

MÉTHODES NUMÉRIQUES EN ACTUARIAT

Estimation du rachat à l'aide des processus de Hawkes

Students

Fatine YORO fatine.yoro@eleves.enpc.fr

25 mars 2025

Table des matières

1	Présentation du Projet	2
2	Simulation du processus de Hawkes	2
2.1	Influence du paramètre α	3
2.2	Influence du paramètre β	4
2.3	Influence du paramètre μ	4
3	Calcul du Best Estimate par auto-excitation	5
3.1	Approche Python pour l'estimation du Best Estimate	6
3.2	Résultat et Interprétation :	6
4	Conclusion	7

1 Présentation du Projet

Dans le contexte de la modélisation des rachats notamment dans le secteur de l'assurance, il est fréquent d'observer que la survenance d'un rachat accroît la probabilité d'événements de rachat ultérieurs. Un *rachat* est une opération par laquelle un assuré ou un investisseur récupère, en tout ou une partie de la valeur acquise d'un contrat. Dans le domaine de l'assurance, il s'agit souvent de la résiliation anticipée d'un contrat, permettant à l'assuré de percevoir une somme, appelée *valeur de rachat*, dont le montant dépend de la durée du contrat, des performances des investissements et des conditions contractuelles. Ce phénomène, souvent désigné par la notion de *contagion*, est capturé efficacement par des modèles dits *auto-excitants* tel que le processus de Hawkes, que l'on étudiera dans ce projet.

L'objectif est alors de valoriser l'engagement de l'assureur à l'instant initial 0 en calculant la *Best Estimate* (BE) définie par :

$$BE(t, T) = E \left[\sum_{T_i \leq T} \exp \left(- \int_t^{T_i} r(s) ds \right) VR(T_i) \right],$$

où $VR(T_i)$ représente la valeur de rachat à l'instant T_i . En réécrivant $VR(T_i)$ sous la forme

$$VR(T_i) = VR(0) \exp \left(\int_t^{T_i} r_S(s) ds \right),$$

où :

- $VR(t)$ représente la valeur de référence à l'instant t ,
- T_i sont les instants des événements qui modélisent les rachats,
- $r(t)$ est le taux d'actualisation stochastique,
- $r_S(t)$ est un ajustement lié au risque spécifique,
- \mathcal{F}_t est la filtration contenant l'information disponible jusqu'à t .

2 Simulation du processus de Hawkes

Dans un cadre actuariel, le Best Estimate (BE) des provisions techniques doit refléter les caractéristiques du processus de survenance des rachats. Le processus de Hawkes est adapté pour modéliser la dépendance temporelle entre les rachats. Contrairement aux processus de Poisson classiques, il intègre les interactions entre événements à travers plusieurs propriétés. L'auto-excitation, où un rachat peut entraîner d'autres, comme dans le cas de crises financières. Le clustering des rachats, où des périodes d'intensité élevée peuvent être suivies de périodes plus calmes, reflétant une dynamique temporelle plus réaliste. Une meilleure estimation des risques, car l'auto-excitation permet d'améliorer l'évaluation du nombre total de rachats, affinant ainsi la prévision du Best Estimate. Le processus de Hawkes définit une **intensité conditionnelle** des rachats :

$$\lambda^*(t) = \mu + \sum_{t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)}$$

où :

- μ est l'intensité de base des rachats,
- α est l'effet d'excitation (un rachat augmente temporairement l'intensité),
- β est le taux de décroissance de l'effet d'excitation,
- t_i sont les temps des sinistres passés.

La stabilité du processus repose sur la condition que l'intégrale du noyau sur l'intervalle $[0, \infty)$ soit inférieure à 1, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\beta t} dt = \frac{\alpha}{\beta} < 1.$$

Cette condition, souvent désignée par le *rapport de branchement*, garantit que chaque événement déclenche, en moyenne, moins d'un événement additionnel, ce qui empêche l'explosion du nombre d'événements dans le temps. Pour simuler le processus de Hawkes, nous mettons en place l'**algorithme d'Ogata**. Cet algorithme repose sur la simulation des sauts successifs du processus en utilisant une approche de type acceptation-rejet, garantissant une estimation des instants d'événement tout en respectant l'intensité conditionnelle du processus.

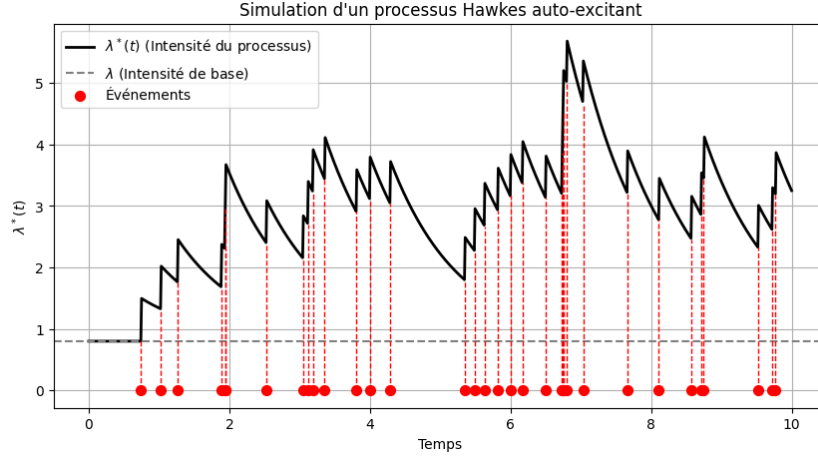


FIGURE 1 – Simulation d'un processus de Hawkes où $\mu = 0.8$, $\beta = 0.7$ et $\alpha = 0.6$

Ici, nous avons fixé les paramètres du modèle. Cependant, si des données historiques avaient été disponibles, nous aurions pu calibrer α , β et μ en utilisant par exemple la méthode du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments. Ces techniques consistent à ajuster le modèle de manière à maximiser la vraisemblance d'observer les données réelles, ou à faire correspondre les moments théoriques du processus (moyenne, variance) avec ceux observés empiriquement. Ainsi, la calibration permet d'obtenir une estimation plus précise des paramètres, et donc une prévision du Best Estimate mieux adaptée aux observations.

2.1 Influence du paramètre α

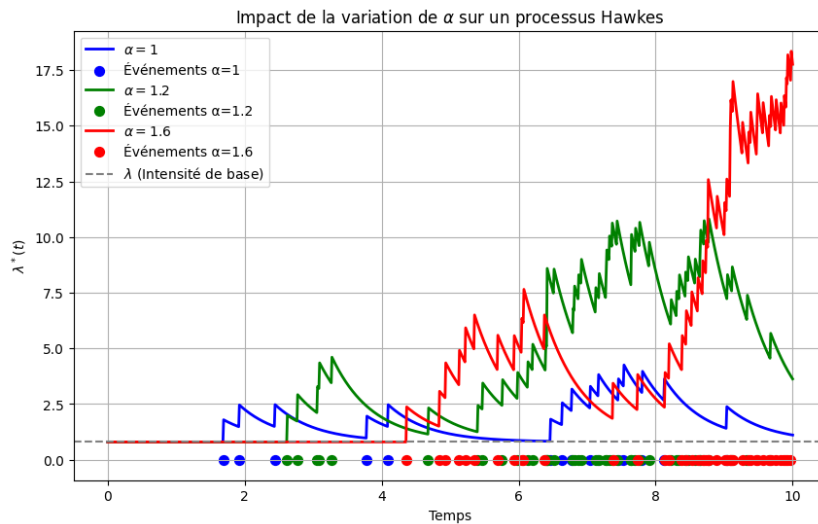


FIGURE 2 – Impact de la variation de α sur un processus de Hawkes pour β et μ fixés.

Plus α est élevé, plus l'intensité $\lambda^*(t)$ augmente après chaque événement, car chaque événement a un effet plus fort sur les suivants. On observe une montée progressive de l'intensité pour les valeurs élevées de α , ce qui reflète l'effet d'auto-excitation du processus Hawkes. Pour les valeurs de α faibles, l'intensité retombe rapidement vers λ , alors que pour α élevé, elle reste plus longtemps élevée. Lorsque α est plus grand, on observe que les événements (points) sont plus rapprochés : cela signifie que les

événements déclenchent plus fréquemment de nouveaux événements. Pour α plus faible, les événements restent plus dispersés dans le temps.

Ce graphique illustre bien la propriété d'auto-excitation du processus Hawkes : un événement augmente la probabilité d'occurrence des futurs événements. Plus α est grand, plus les événements ont un effet durable sur l'intensité, ce qui peut mener à des phases d'excitation prolongées et plus fréquentes.

2.2 Influence du paramètre β

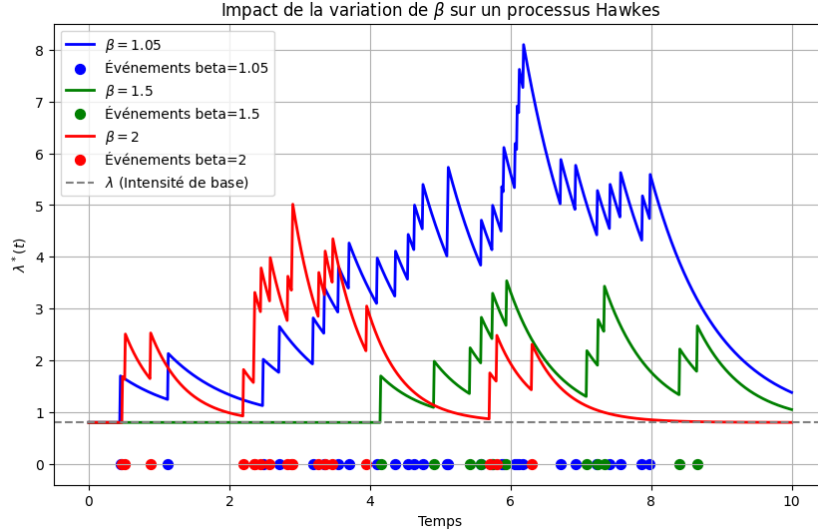


FIGURE 3 – Impact de la variation de β sur un processus de Hawkes pour α et μ fixés.

Le paramètre β contrôle la rapidité avec laquelle l'intensité $\lambda^*(t)$ redescend après un événement. En effet, un β plus grand signifie une décroissance plus rapide de l'influence des événements passés. La comparaison des courbes pour différentes valeurs de β permet de constater que, pour une valeur faible, par exemple $\beta = 1.05$ (courbe bleue), la décroissance de l'intensité est lente, de sorte que l'intensité accumulée reste élevée sur une longue période. Ce comportement conduit à une forte auto-excitation et génère un effet de cascade d'événements. Pour une valeur intermédiaire, telle que $\beta = 1.5$ (courbe verte), l'intensité diminue plus rapidement entre les événements, réduisant ainsi l'effet de persistance. Enfin, pour une valeur élevée de β (courbe rouge), l'intensité chute rapidement après chaque événement, empêchant ainsi une accumulation significative de l'excitation. Lorsque β est faible, l'intensité reste élevée plus longtemps, ce qui se traduit par une fréquence d'événements plus importante, alors qu'un β plus élevé entraîne un espacement des événements dans le temps, en raison d'une atténuation rapide de l'excitation. En résumé, une faible valeur de β favorise des rafales d'événements en raison d'une mémoire longue, un comportement typique des phénomènes de contagion forte, comme ceux observés lors de crises financières ou de tremblements de terre.

2.3 Influence du paramètre μ

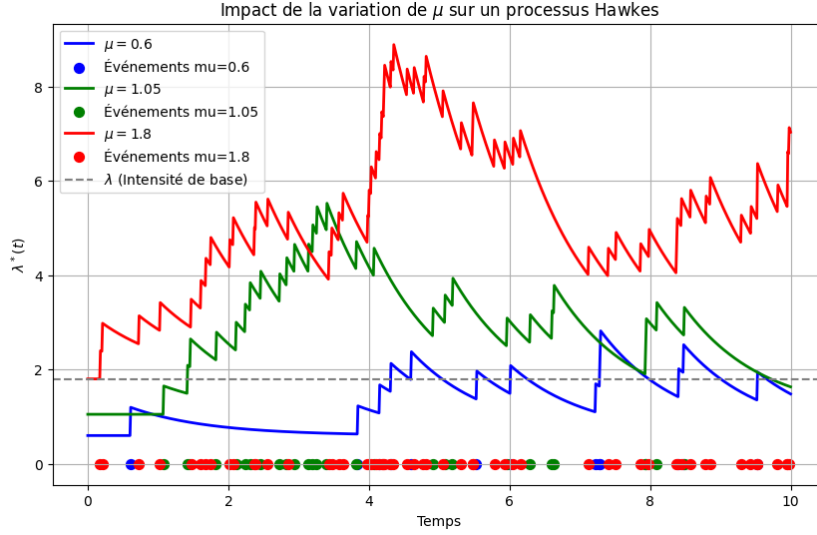


FIGURE 4 – Impact de la variation de μ sur un processus de Hawkes pour α et β fixés.

Plus μ est élevé, plus l'intensité de base est grande, et donc plus l'intensité $\lambda^*(t)$ augmente rapidement en réponse aux événements. Cela confirme le rôle de μ comme intensité de base : une augmentation de μ entraîne un processus plus actif, avec des événements plus fréquents. Les points en bas du graphique représentent les événements détectés pour chaque valeur de μ . Avec $\mu=1.8$ (rouge), les événements sont beaucoup plus fréquents qu'avec $\mu=0.6$ (bleu). Cela confirme que plus l'intensité de base est élevée, plus le processus est actif et génère d'événements.

3 Calcul du Best Estimate par auto-excitation

Dans l'estimation des provisions techniques, le Best Estimate (BE) des rachats représente la valeur actuelle attendue des coûts futurs associés aux risques de rachat. Pour modéliser ce phénomène, nous exprimons le BE sous la forme :

$$\text{BE}(t, T) = VR(t) \mathbb{E} \left[\sum_{T_i \leq T} \exp \left(- \int_t^{T_i} [r(u) - r_S(u)] du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Si on considère un modèle où les rachats suivent une dynamique auto-excitante et que l'on modélise l'ajustement du taux $r_S(u)$ par une fonction $f(x(u), r(u))$, ici on choisit la fonction suivante :

$$f(x, r) = r + x.$$

Cette dernière expression, qui intègre la dynamique auto-excitante des événements de rachat, est approchée numériquement par la méthode de Monte Carlo. Dans cette approche, les diffusions des variables d'état (x, r) et la simulation des instants T_i sont réalisées de manière indépendante.

En posant, pour $1 \leq j \leq n$,

$$a_j = \exp \left(\int_{T_{j-1}}^{T_j} x(u) du \right),$$

où n est l'indice du dernier instant avant T , le terme dans l'espérance se simplifie en une somme récursive :

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots = a_1 \left(1 + a_2 \left(1 + \dots a_{n-1} \left(1 + a_n \right) \dots \right) \right),$$

une expression qui peut être calculée efficacement à l'aide de l'algorithme d'Hörner.

3.1 Approche Python pour l'estimation du Best Estimate

Dans le cadre de l'estimation du Best Estimate (BE) des rachats, nous adoptons la méthodologie suivante en Python :

1. **Simulation des instants de rachat via un processus de Hawkes.**

Nous utilisons l'algorithme de *thinning* d'Ogata pour générer aléatoirement les instants $\{T_i\}$ sur l'intervalle $[0, T]$. Le processus de Hawkes étant *auto-excitant*, chaque événement augmente temporairement l'intensité des événements futurs.

2. **Simulation de la variable d'état x comme un processus d'Ornstein–Uhlenbeck.**

Dans l'intervalle $[T_{j-1}, T_j]$, on suppose que x_t suit l'équation stochastique :

$$dx_t = k_x (x_\infty - x_t) dt + \sigma_x dW_t,$$

où k_x est le taux de réversion, x_∞ la moyenne de long terme, σ_x la volatilité et W_u un mouvement brownien. Par une discrétisation (par ex. Euler–Maruyama), on obtient une trajectoire $\{x_t\}$ ou $t \in [T_{j-1}, T_j]$, dont on peut calculer l'intégrale

$$\int_{T_{j-1}}^{T_j} x_t dt.$$

3. **Calcul de la somme récursive.**

Pour chaque intervalle $[T_{j-1}, T_j]$, on définit $a_j = \exp\left(\int_{T_{j-1}}^{T_j} x_t dt\right)$. On évalue ensuite la somme $a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots$ grâce à l'*algorithme d'Hörner* pour un calcul plus efficace.

4. **Approche Monte Carlo.**

On répète un grand nombre de fois (`num_simulations`) les étapes précédentes :

- Simulation du processus de Hawkes pour obtenir les instants $\{T_i\}$.
- Simulation des trajectoires d' x (processus d'Ornstein–Uhlenbeck) sur chaque intervalle $[T_{j-1}, T_j]$.
- Calcul de la somme récursive.

Pour chaque simulation, on obtient une réalisation de la contribution actualisée des rachats. Le *Best Estimate* se déduit alors par la moyenne empirique de ces valeurs, multipliée par $VR(0)$.

3.2 Résultat et Interprétation :

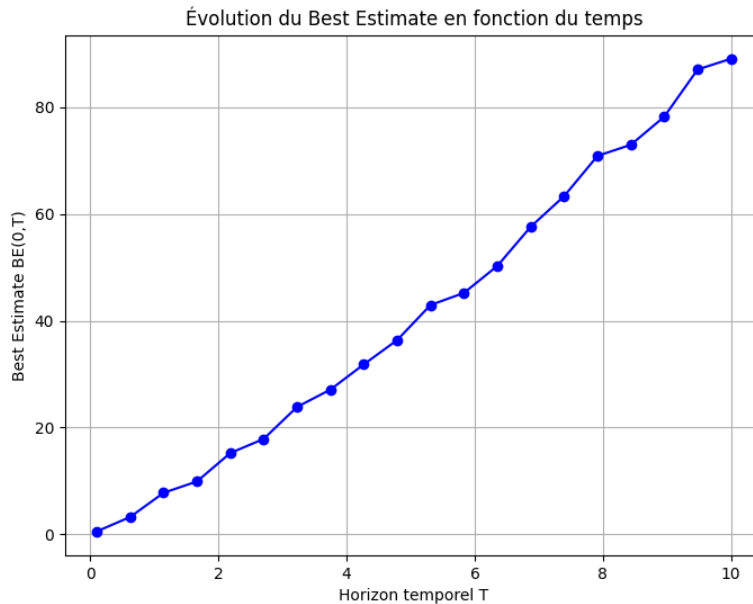


FIGURE 5 – Evolution du $BE(0, T)$ en fonction de la maturité T .

La Figure 5 illustre la croissance de $BE(0, T)$ au fur et à mesure que l'horizon temporel T s'allonge. Cette augmentation s'explique par plusieurs facteurs :

- **Allongement de l'intervalle futur** : Un intervalle plus long laisse davantage de temps aux événements (rachats) pour se produire, ce qui augmente la somme attendue des coûts futurs.
- **Processus auto-excitant** : Dans le cas d'un processus de Hawkes, chaque événement augmente temporairement l'intensité des événements suivants. Plus l'horizon T est grand, plus le nombre potentiel d'événements et leur effet de contagion s'amplifient.
- **Actualisation partielle** : Même si les flux futurs sont actualisés, l'impact d'un horizon élargi sur le nombre d'événements domine souvent l'effet réducteur de l'actualisation, surtout si la variable d'état $x(u)$ reste globalement positive.

En conséquence, la valeur de $BE(0, T)$ s'accroît à mesure que T augmente, reflétant le fait qu'un horizon temporel plus étendu accroît la probabilité et l'impact financier des événements futurs.

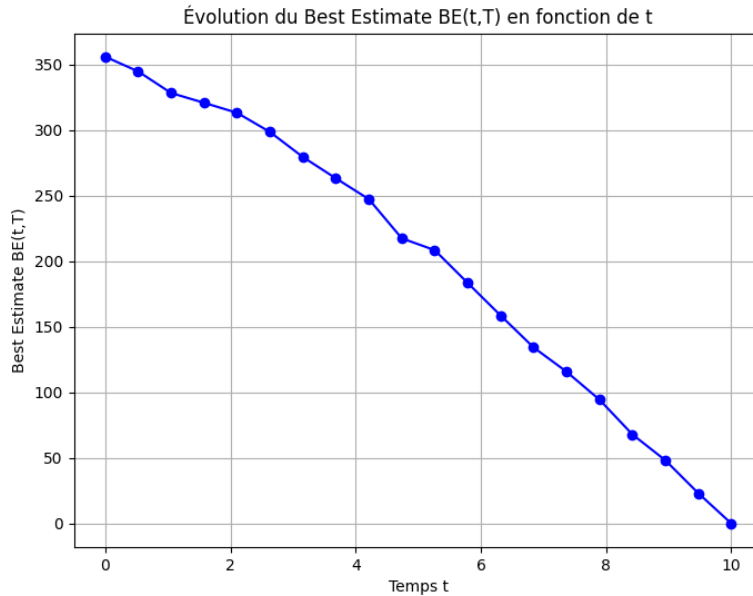


FIGURE 6 – Pour une maturité fixée T , évolution du $BE(t, T)$ en fonction de t .

La Figure 6 illustre l'évolution du Best Estimate $BE(t, T)$ au fil du temps t , pour un horizon de maturité donné $T=10$. On observe une décroissance marquée de la valeur du BE à mesure que t se rapproche de T . Deux facteurs principaux expliquent cette tendance :

- **Réduction de l'intervalle futur** : À mesure que t augmente, la période $[t, T]$ pendant laquelle les événements futurs (rachats) peuvent survenir se raccourcit. Il y a donc moins de contributions potentielles à la somme, ce qui diminue la valeur attendue du BE.
- **Effet d'actualisation renforcé** : Le facteur d'actualisation $\exp(\int_t^T x(u) du)$ se calcule sur un intervalle de plus en plus court, ce qui réduit la part actualisée de chaque événement futur. En outre, si la variable d'état x prend des valeurs négatives (ou trop faibles), la pondération s'en trouve encore plus réduite.

En combinant ces deux effets, on obtient une chute progressive du $BE(t, T)$: plus on se rapproche de la maturité T , moins il reste d'événements futurs à prendre en compte et plus leur impact est amorti par l'actualisation.

4 Conclusion

Nous avons utilisé le processus de Hawkes afin de simuler des instants de rachat en appliquant l'algorithme d'Ogata. Ce modèle est pertinent pour la modélisation de tels événements, car il permet de capturer les dynamiques d'auto-excitation : un rachat peut en provoquer d'autres, créant ainsi une structure temporelle réaliste. Cependant, en l'absence de données réelles, nous n'avons pu mener qu'une simulation théorique. Une analyse plus approfondie aurait nécessité une étude de cas, où nous aurions pu calibrer les paramètres μ , α et β . L'intérêt de cette modélisation est également de contribuer au calcul du Best Estimate (BE) des provisions techniques dans un cadre Solvabilité II.

Annexe

- **Hawkes Processes** : Simulation, Estimation, and Validation (Patrick J.Laub, Thomas Taimre et Philip K.Pollett).
- **Solvency II** : Solvency II : Techniques de modélisation du Best Estimate en assurance-vie (Alexandre HELUIN).