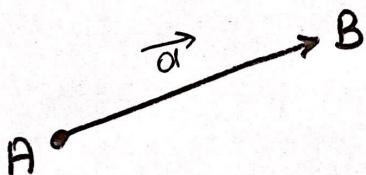


①

Tel Kafes (Wireframe) Grafikleri:

Vektör: Doğrultusu (yönü) ve uzunluğu (büyüklüğü) belirli olan bir doğru parçası.

Başlangıç noktası A, bitim noktası B olan \overrightarrow{AB} doğru parçasına yönlü doğru parçası denir. Bu vektör \vec{a} ile gösterilir. Ok vektörün yönünü gösterir.



Bir vektör çok çeşitli şekillerde gösterilebilir. En çok kullanılan gösterimler (\vec{a}) veya koju harf (a) şeklindeki gösterimlerdir.

Vektörün bileşenleriyle gösteriminde ise genellikle sıralı n-lı kullanılır.

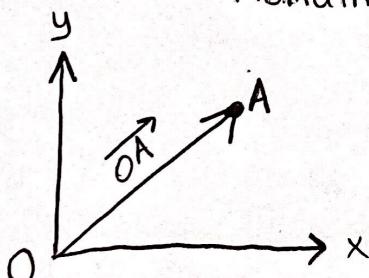
$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Vektörün bileşenleri satır veya sütun dizimleri şeklinde de yazılabilir.

$$\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \text{ ya da } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$\vec{i}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{i}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{i}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektörleri olmak üzere. $\vec{a} = a_1 \vec{i}_1 + a_2 \vec{i}_2 + \dots + a_n \vec{i}_n$ vektör gösterimi birim vektor gösterimidir.

Konum (yer) vektörü

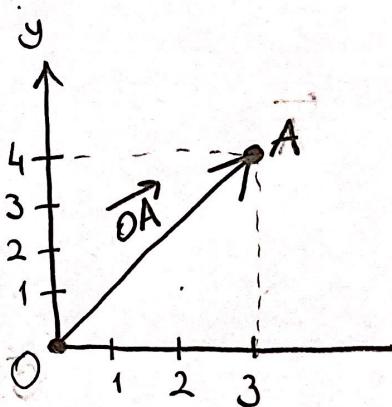


Başlangıç noktası orijin olan vektörlere konum (yer) vektörü denir. Eğer vektor orijinde değilse vektörün uzunluğunu ve yönünü değiştirmeden orijine taşıyabiliriz.

②

Başlangıç noktası $O = (0,0)$, bitiş noktası $A = (3,4)$ olan
iki boyutlu bir vektörü as. şekilde gösterebiliriz.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A} - \vec{O} = (3,4) - (0,0) = (3,4)$$



Bir vektörün normu: \vec{A} vektörünün normu (uzunluğu) $\|\vec{A}\|$
veya $|A|$ ile gösterilir.

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \text{ iin}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2B iin Dönüşümler

- Öteleme (yer degistirme, tasima) (translation)
- Döndürme (rotation)
- Ölçeklendirme (scaling)
- Meyillendirme (shearing)
- Yansıtma (reflection)

Standart
dönüşümler

Örnek: $\vec{v} = [x, y]$ olsun. T bir dönüşüm matrisi olsan.

$$\underbrace{[x, y]_{1 \times 2}}_{\text{Konum vektörü}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}}_{T \text{ dönüşüm matrisi}} = \underbrace{[]_{1 \times 2}}_{\text{Dönüştürülmiş konum vektörü } \vec{v}^*}$$

(3)

1) Ölçeklendirme (Scaling)

$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisi olmak üzere a ve d pozitif ve birbirine eşit ve $b=c=0$ olmak üzere ölçeklendirme (dengeleştirilmiş ölçeklendirme) (balanced scaling) için kullanılacak olan matris

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, a > 0$$

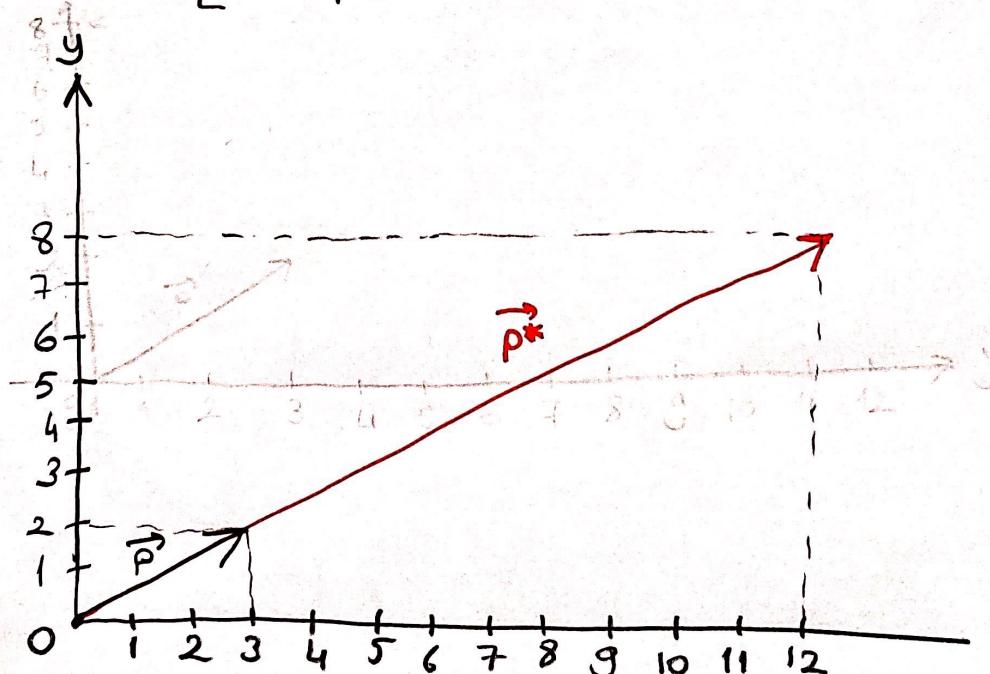
Örneğin; $\vec{p} = (3, 2)$ konum vektörü için

$$(3 \ 2) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = (3a \ 2a) = \vec{p}^*$$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise konum vektörü değişmez.

$\vec{p} = (3 \ 2)$ konum vektörüne $T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisi uygulanırsa;

$$(3 \ 2) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = (12 \ 8)$$



Örn: $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ döndürüm matrisinde $a+b=c+d=0$ faktörüne göre
 a ve d farklı pozitif sayılar ise bu dönüşüm etkisi
 dengelememis ölçütleridir (unbalanced scaling) oluşturur.

Örn: 1) $[x \ y]$ noktasını x yönünde 2 birim uzatın
 (ölaçleyin).

$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [2x \ y]$$

2) $[x \ y]$ noktasını y yönünde $\frac{1}{3}$ birim kısaltın (ölaçleyin).

$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [x \ \frac{1}{3}y]$$

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ için}$$

$a > 0$ ise x eksenine göre uzatma

$a < 1$ ise x eksenine göre kısaltma

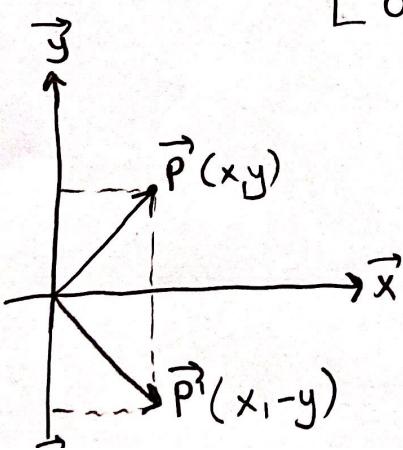
$d > 0$ ise y eksenine göre uzatma

$d < 1$ ise y eksenine göre kısaltma

2) Yansıtma (Reflection)

2 boyutta bir konum vektörünün x -eksenine göre
 yansıması

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisi ile tensil edilir.}$$



$$[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [x \ -y]$$

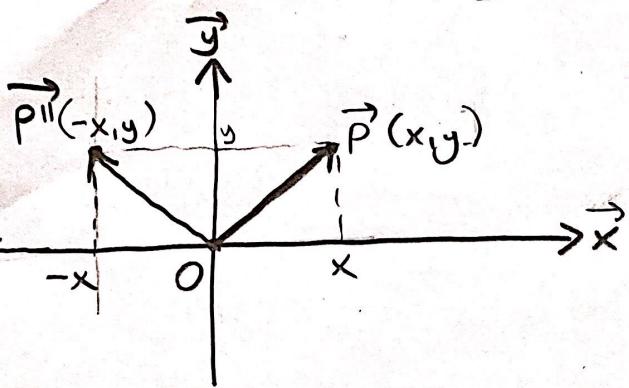
$d = -1$ ise x eksenine göre yansıtma

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(5)

2D de bir konum vektörünün y - eksenine göre yansıması

$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile tamsil edilir.

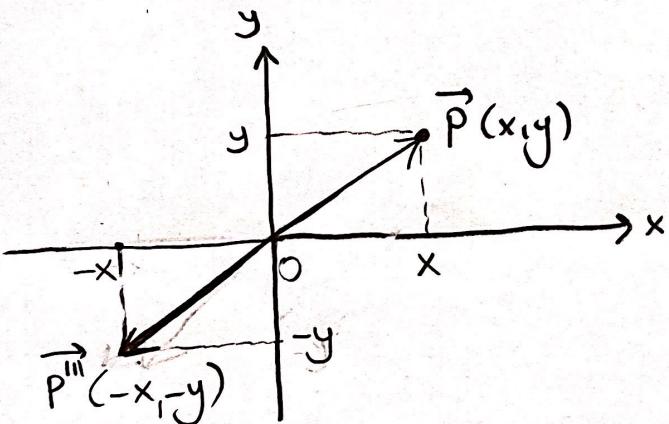


$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \ y]$$

$a = -1$ ise y eksenine göre yansıma

2D de orijine göre yansıma, $a = -1, d = -1$ ise orijine göre yansıma yapılır.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$[x \ y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-x \ -y]$$

3) Meyillendirme (Shearing)

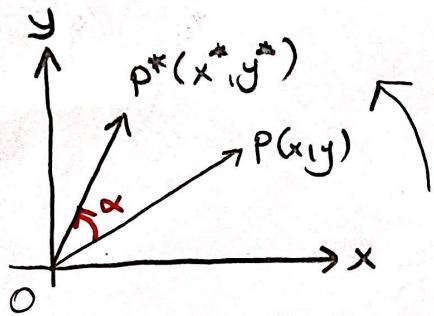
$[x \ y]$ konum vektörünü x yönünde 3 birim meyllendirmek demek y yi sabit tutup x i taşımak demek

$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = [x+cy \ y]$$

$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [x+3y \ y]$$

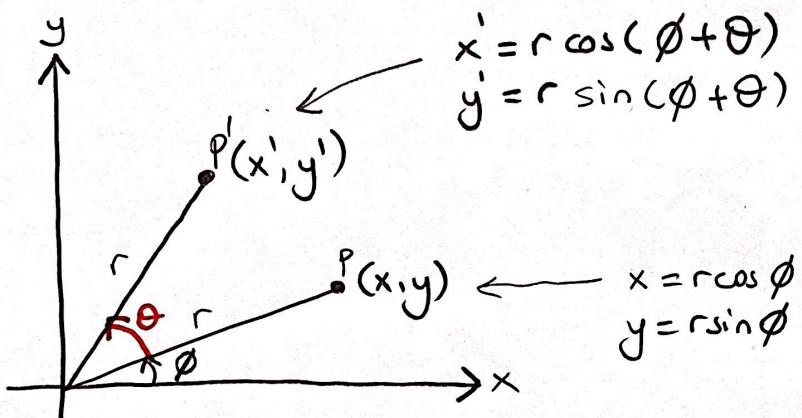
(6)

4) 2D de Dönüşme (Rotation)



Pozitif yönde yani saat yönünün tersine döndürme yapıyoruz.

Orjin etrafında pozitif yönde θ açısı ~~la~~^{dön} döndürüldüğünde,



$$x' = r \cos(\phi + \theta) = r(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\phi + \theta) = r(\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta) = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Dönme matrisi

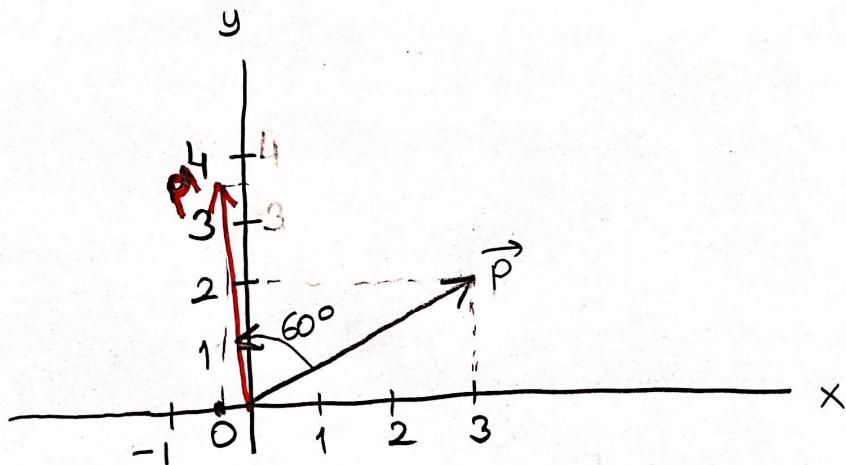
Örn: $P[3 \ 2]$ konum vektörünü pozitif yönde 60° döndürüldüğünde olusacak olan yeni konum vektörünü bulunuz.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(7)

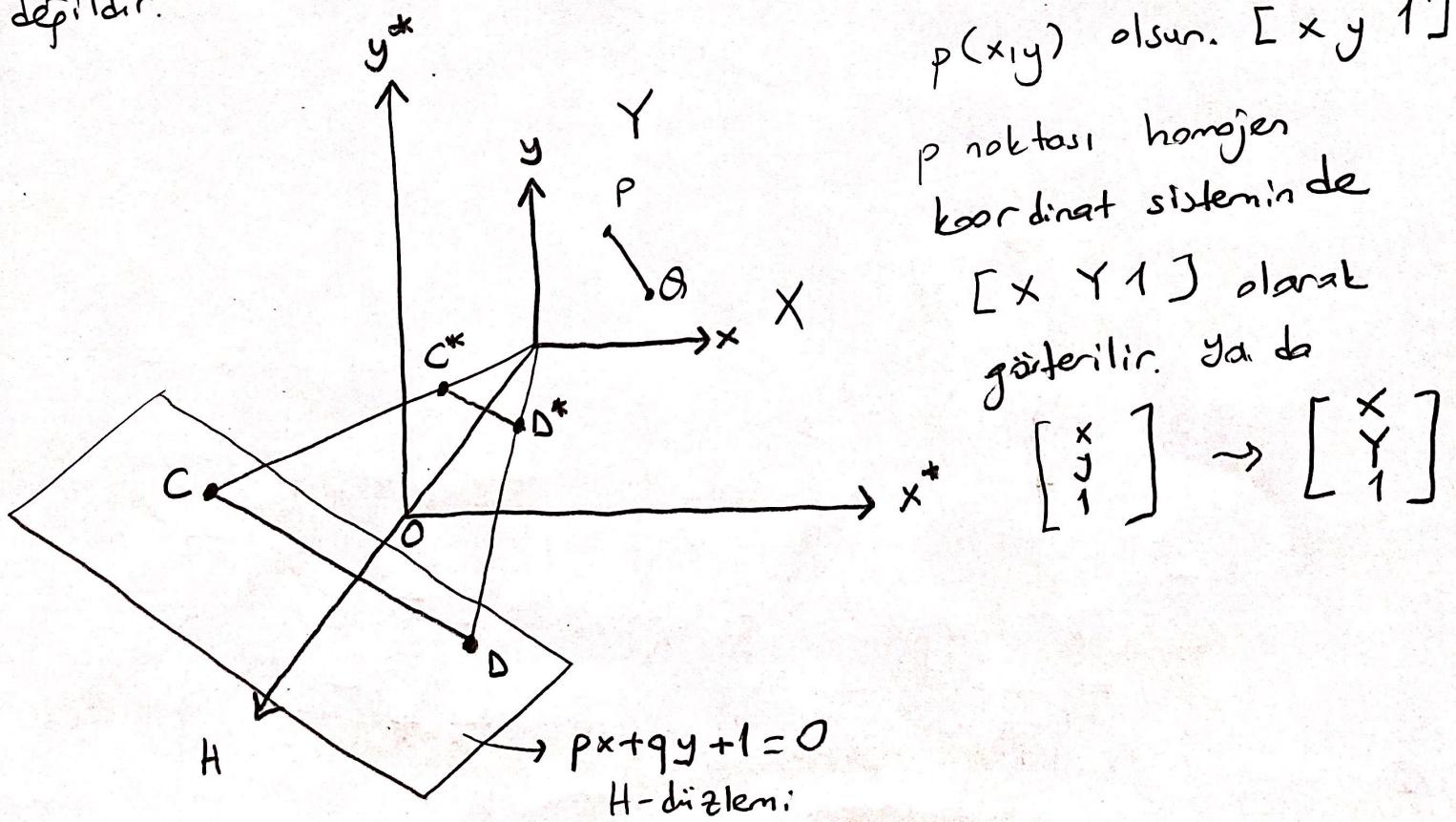
$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 - 2 \cdot 0,866 \\ 3 \cdot 0,866 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,5 - 1,732 \\ 2,598 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,23 \\ 3,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



2D de Homojen Koordinatlar

Homojen koordinatlarda bir p noktasının singelenisi tek
degildir.



$\text{p noktası } (2,3) \text{ olsun. } [x \ y \ 1] = [2 \ 3 \ 1]$ ⑧

 $[x \ y \ H] = [2 \ 3 \ 1]$
 $[x \ y \ 1/2] = [1 \ 3/2 \ 1/2]$
 $[x \ y \ 1/4] = [1/2 \ 3/4 \ 1/4]$
 $[x \ y \ 1/8] = [1/4 \ 3/8 \ 1/8]$
 $[x \ y \ 2] = [4 \ 6 \ 2]$

⋮

$H=0$ ise p noktası sonsuzda bir nokta tensil eder.

$[x \ y \ 0] = [\infty \ \infty \ 1]$

$\underset{H}{\circlearrowleft}$

$\underbrace{[x \ y \ H]}_{C \text{ noktası}} = \underbrace{[x \ y \ 1]}_{P \text{ noktası}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{x} \\ \xrightarrow{y} \\ \xrightarrow{H} \end{array} = \underbrace{[x^* \ y^* \ 1]}_{C^* \text{ noktası}}$

$x = x$

$y = y$

$H = px + qy + 1$

$[x \ y \ H] = [x \ y \ px + qy + 1] = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ \hline px + qy + 1 & px + qy + 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3)

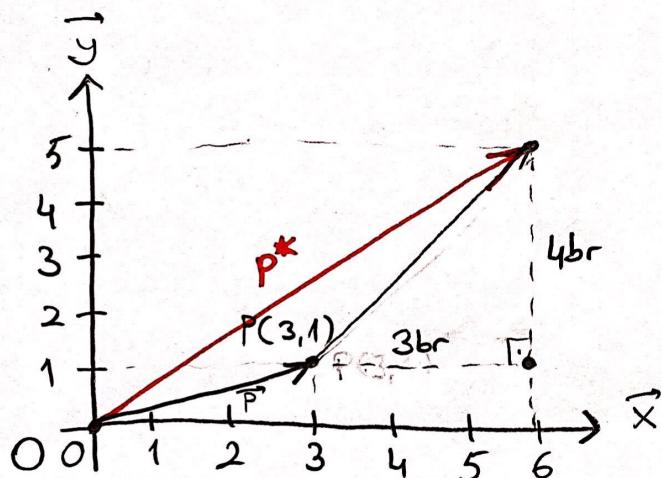
1) 2D'de Öteleme (Yer değiştirmme) (Translation)

$\vec{P} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ olsun. x yönünde 3 birim, y yönünde

4 birim ötelemesi demek;

$$\left. \begin{array}{l} x^* = x + 3 \\ y^* = y + 4 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \vec{P}^* = [x^*, y^*] \text{ satır vektör} \\ P^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \text{ sütun vektör} \end{array}$$

Örneğin $\vec{P} = [3, 1]$ olsun. x yönünde 3 birim, y yönünde
4 birim ötelendiğinde \vec{P} vektörü



$$\begin{aligned} [x^* \ y^*] &= [3 \ 1] + [3 \ 4] \\ &= [6 \ 5] \end{aligned}$$

$P = [x, y]$ konum vektörünün;

x yönünde 2 birim

y yönünde 3 birim ötelemesini istiyoruz.

$$\left. \begin{array}{l} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{array} \right\} \text{ Bunu elde etmek istiyoruz.}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sütun vektör ise $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[x \ y]$ satır vektör ise $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve (10)

$$[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_T$$