Bilgisayar Grafikleri

Kaynak Kitaplar :

Mathematical Elements for Computer Graphics
David F.Rogers, J.Alan Adams
McGraw-Hill Publishing Company

Procedural Elements for Computer Graphics
David F.Rogers
McGraw-Hill Publishing Company

Konular

-OpenGL’e giriş
-2D ve 3D nokta ve cisim tanımı
-2D Temel işlemler
-2D uzay eğrileri
-3D Temel işlemler
-Projeksiyon
-3D uzay yüzeyleri
-Saklı yüzey
-Saklı kenar
-Kaplama
-Aydınlatma

OpenGL’e giriş

OpenGL’in Avantajları

• Tüm OpenGL uygulamaları, işletim sistemi ne olursa olsun, OpenGL API uyumlu donanımlar üzerinde mükemmel görsel sonuçlar üretebilir.
• Grafik donanımlarının yeni gelişmiş özellikleri, OpenGL tarafından, geliştirme mekanizması (extension mechanism) sayesinde kullanılabilir. Yani OpenGL, donanımaözel, gelişmiş özellikleri kullanmak için API fonksiyonları içerebilir.
• OpenGL temelli grafik uygulamaları, çok çeşitli sistemler üzerinde koşulabilir. (tüketici elektroniği – consumer electronics, PC, iş istasyonu – workstation, süper bilgisayarlar gibi)
• OpenGL grafik kütüphanesi kullanılarak, çok daha az bir kod satırıyla daha yüksek performansa sahip uygulamalar geliştirmek mümkündür.
• OpenGL grafik kütüphanesine dair teknik bilgi içeren birçok kaynak mevcuttur.(internet,
kitaplar, vs.)
• Birçok programlama dili (C, C++, Fortran, Ada, Java gibi) OpenGL tabanlı uygulama geliştirmemize olanak sağlar.

OpenGL Söz dizimi

Opengl komutları, gl öneki ile başlarlar. (örnek; glClearColor()). Benzer şekilde OpenGL tarafından tanımlı sabitler de GL_ öneki ile başlarlar ve kelimeler birbirinden _ ile ayrılacak şekilde büyük harfle yazılırlar.

(örnek; GL_COLOR_BUFFER_BIT).

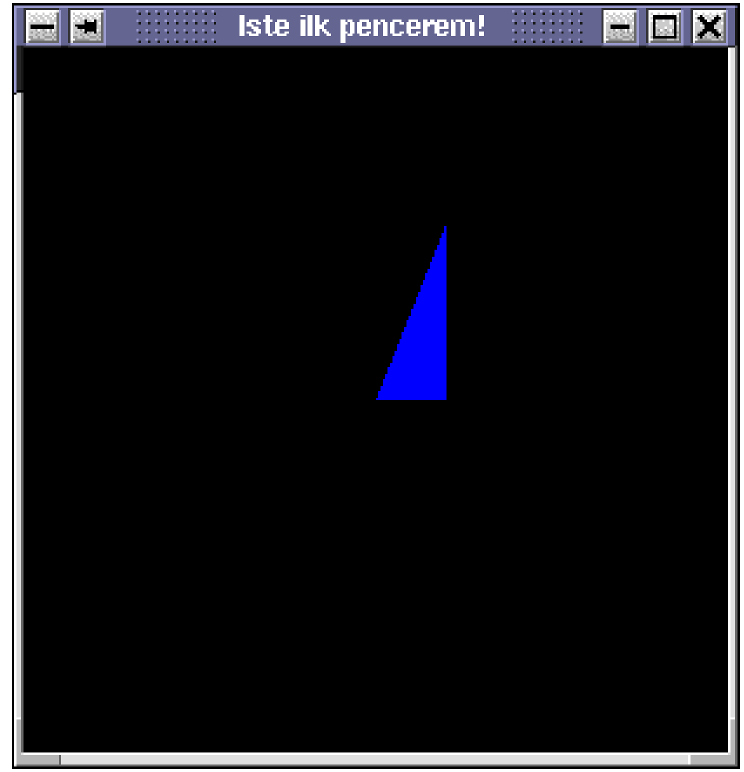
glColor3f komutundaki 3 sayısı da 3 parametre alacağı anlamına gelmektedir. f ise verilen parametrelerin float olacağı anlamına gelmektedir.

glVertex2i(1,3); ya da

glVertex2f(1.0,3.0); gibi

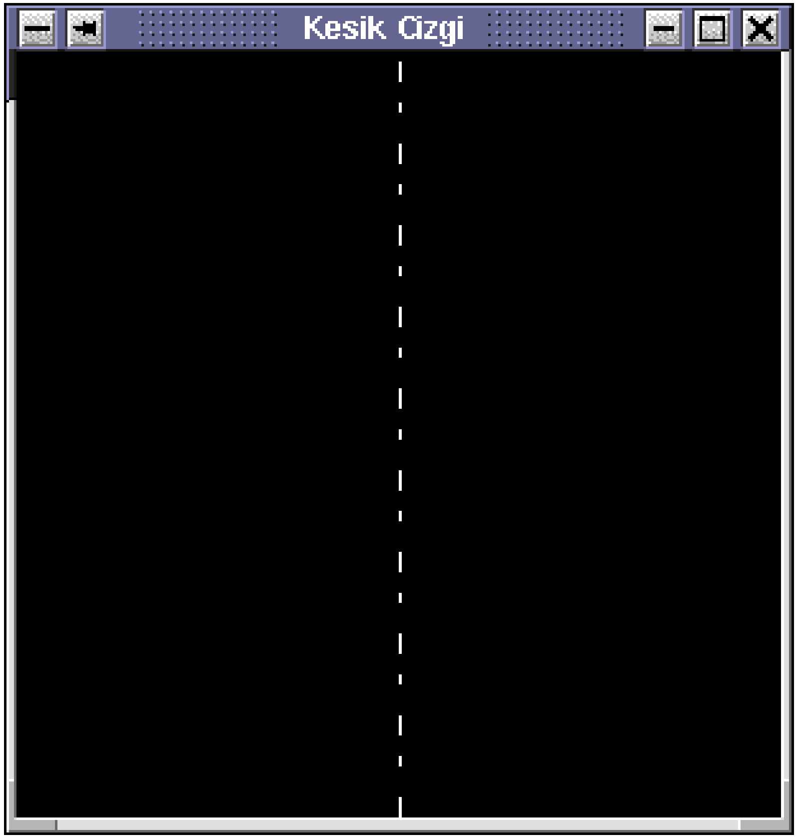
glilk.c

```
#include <GL/glut.h>

void myDisplay()
{
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
  glColor3f (0,0,1);
  glBegin(GL_POLYGON);
    glVertex2f (0.0, 0.0);
    glVertex2f (0.2, 0.0);
    glVertex2f (0.2, 0.5);
  glEnd();

  glFlush();
}

int main (int argc, char ** argv)
{
  glutInit (&argc,argv);
  glutCreateWindow("Iste ilk pencerem!");
  glutDisplayFunc(myDisplay);
  glutMainLoop();
  return(0);
}
```



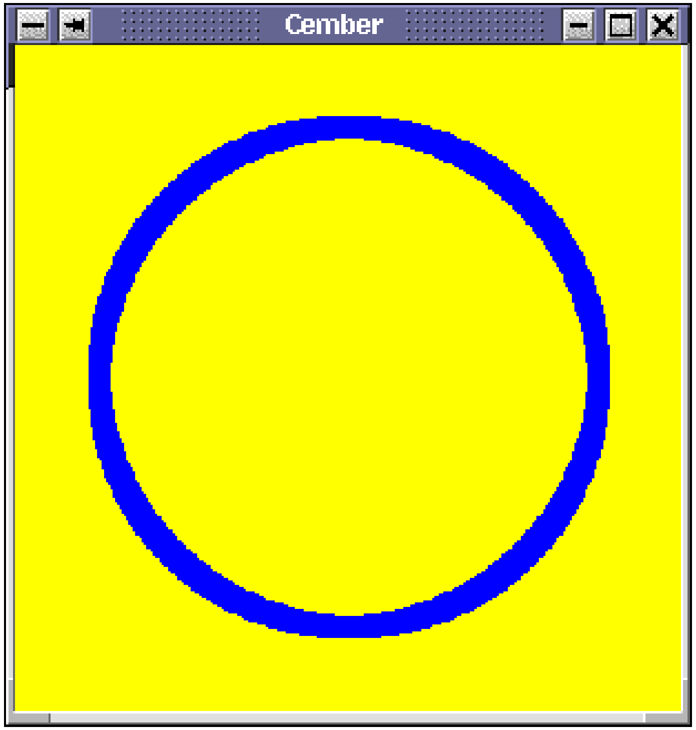
glKesikCizgi.c

```
#include <GL/glut.h>

void display(void)
{
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);

  glColor3f(1,1,1);// white
  glEnable(GL_LINE_STIPPLE);
  glLineStipple (2, 0x0C0F);
  glBegin(GL_LINE_STRIP);
    glVertex2f(0,-1);
    glVertex2f(0,1);
  glEnd();

glFlush();
}

int main(int argc, char **argv)
{
  glutInit(&argc, argv);
  glutCreateWindow("Kesik Cizgi");
  glutDisplayFunc(display);
  glutMainLoop();
  return(0);
}
```



glCember.c

```
#include <GL/glut.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

#define RADIUS 0.75

void cember(void);

int main(int argc, char ** argv)
{
  glutInit(&argc, argv);
  glutCreateWindow("Cember");
  glutDisplayFunc(cember);
  glutMainLoop();
  return(0);
}

void cember(void)
{
  double x,y;
  int i;

  glClearColor(1.0,1.0,0.0,0.0);
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
  glColor3f(0,0,1);// blue

  glPointSize(10.0);
  glBegin(GL_POINTS);
    for(i = 1; i < 360; i++){
      x = RADIUS * sin(((double)i)*M_PI/180);
      y = RADIUS * cos(((double)i)*M_PI/180);
      #ifdef DEBUG
        fprintf(stderr, "(%f, %f)\n", x, y);
      #endif
      glVertex2f(x,y);
    }
  glEnd();

  glFlush();
}
```



Temel İşlevler

```
void glutInit (int    *argcp,
               char  **argv)
```
işlev

GLUT kitaplığının ilklendirilmesi için çağrılması gereken işlevdir. Bu çağırılmadan GLUT kitaplığından başka bir işlev çağrılamaz. Argümanlar programın `main()` işlevinden alınır ve değiştirilmeden kullanılır. Kullanımı söyledir:

```
glutInit(&argc, argv); // main(int argc, char ** argv) olduğu varsayılmıştır.
```

```
int glutCreateWindow (char isim)
```
işlev

Pencere sisteminde bir pencere oluşturur ve pencere başlığına *isim* parametresindeki metni yazar. Pencere numarası ile döner.

```
void glutDisplayFunc (int    (*islev) (void))
```
işlev

Pencere ekrana çizildikten sonra pencerenin içerisinde gösterilecekleri oluşturan işlevin belirtileceği işlevdir (callback).

```
void glutMainLoop ()
```
işlev

Bu işlev sayesinde program kendisine gelecek olayları (event) dinlemeye başlar ve eğer tanımlıysa gelen olaya göre tanımlanmış bir işlevi (callback) çalıştırır.

```
void glClear (GLbitfield maske)
```
işlev

Tamponların içeriğini `glClearColor`, `glClearIndex`, `glClearDepth`, `glClearStencil` ve `glClearAccum` işlevleri ile belirlenen değerlerle temizler.

Parametre olarak `GL_COLOR_BUFFER_BIT`, `GL_DEPTH_BUFFER_BIT`, `GL_ACCUM_BUFFER_BIT`, `GL_STENCIL_BUFFER_BIT` sabitlerinden birini ya da bunların VEYAlanmış değerini alır.

`void glBegin (enum kip)` işlev

Bu işlev bir çizimin başlatıldığını belirtir. Aldığı parametre ise çizilen şeyin noktalar, çizgiler veya içi dolu çizgiler şeklinde görüneceğini belirtir.

Parametre olarak aldığı sembolik sabitler:

GL_POINTS
Verilen noktaları nokta olarak çizer.

GL_LINES
Verilen noktaları doğrularla birleştirir.

GL_POLYGON
Verilen noktaları doğrularla birleştirir ve oluşan şeklin içini renklendirir.

GL_QUADS
Verilen dört noktadan içi boyanmış dörtgen oluşturur.

GL_TRIANGLES
Verilen üç noktadan içi boyanmış üçgen oluşturur.

GL_TRIANGLE_STRIP
Şu noktalar `glBegin` ve `glEnd` arasında çizdirilmiş olsun: `p0, p1, p2, p3, p4, p5`. `p0, p1` ve `p2`'den bir üçgen oluşturulur ve sonraki her nokta için önceki iki nokta birleştirilerek bir üçgen daha oluşturulur. Yani `p3` ile `p1` ve `p2` birleştirilir. Daha sonra `p4` ile `p3` ve `p2`, ... vs.

GL_QUAD_STRIP
`GL_TRIANGLE_STRIP` gibi çalışır, ama bu sefer verilen iki noktayı önceki iki nokta ile birleştirerek bir dörtgen oluşturur.

GL_TRIANGLE_FAN
`p0, p1, p2, p3, p4, p5` verilmiş olsun. `p0, p1` ve `p2` üçgeni çizilir. Daha sonra `p4` için `p0` ve `p3` birleştirilerek yeni üçgen elde edilir. `p5` ile `p4` ve `p0` birleştirilir, ...vs. Böylece şekil yelpaze gibi olur.

`void glEnd ()` işlev

`glBegin()` ile başlayan çizim işleminin bittiğini belirtir. Çizdirilen şekil ekrana yazılmak üzere saklanır; `glFlush()` ile ekrana yazılır.

```
void glFlush ()
```
işlev

Eğer çizilenler tamponlanmışsa, tampon bellekteki tüm şekillerin ekrana basılmasını sağlar.

Sadece yukarıdaki işlevleri kullanarak basit geometrik şekillerin iki boyutta çizimi mümkündür. Yukarıdaki `glilk.c` adlı program bu işlevlerden yararlanarak yazdığımız ilk OpenGL uygulamamızdır.

```
void glClearColor (GLclampf kırmızı,
                   GLclampf yeşil,
                   GLclampf mavi,
                   GLclampf donukluk)
```
işlev

`glClear()` işleviyle temizlenen ekran renk tamponunun ne renk alacağını belirler. Her parametre 0 ya da 1 değerini alır. Örneğin ***donukluk*** değeri 0 ise şeffaflık, 1 ise donukluk elde edilir. Öntanımlı değerlerin tümü 0'dır.

```
void glColor3s (short kırmızı,
                short yeşil,
                short mavi)
```
işlev

Çizilecek şeklin rengini belirler. Öntanımlı değerlerin tümü 0'dır.

```
void glutInitWindowSize (int genişlik,
                         int yükseklik)
```
işlev

Oluşturulan pencerenin boyutlarını belirler. Pencere boyutlarının öntanımlı değeri (300, 300)'dür.

```
void glutInitWindowPosition (int x,
                             int y)
```
işlev

Pencerenin konumlanacağı yeri belirtir. Pencere yerinin öntanımlı değeri (-1, -1)'dir, böylece yerini pencere yöneticisi belirler.

```
void glLineWidth (float genişlik)
```
işlev

Çizginin kalınlığını belirtir. Bu işlevle değiştirilmedikçe kalınlığın öntanımlı değeri 1.0'dır.

```
void glLineStipple (int   çarpan,
                    short örüntü)
```
işlev

Çizginin nokta nokta ya da düz çizgi şeklinde görünmesini ayarlar. Eğer *örüntü*deki bit 0 ise bu bite karşı gelen benek ekrana basılmaz, eğer 1 ise ekrana basılır; Böylece kesik kesik çizgi çizilebilir.

Örnek:

```
glLineStipple(3, 0xcccc); /* 0xCCCC = 1100110011001100 */
```

Bu örnekte ikilik *örüntü* 3 ile genişletilmiştir. Bu işlevle, ekrandaki çizgiler 6 beneklik gruplara ayrılacak ve bir grup ekrana basılacak, bir grup basılmayacaktır.

```
void glEnable ()
```
işlev

```
void glDisable ()
```
işlev

Performans artışı sağlamak için OpenGL'deki kesiklililik, ışıklandırma, kaplama gibi özellikler `glDisable()` ile kapatılabilir. Böylece bu özellikler şeklin ekranda oluşturulması sırasında gözardı edilecek şekil daha hızlı ortaya çıkacaktır.

`glEnable()` özelliğin kullanılmasını sağlarken `glDisable()` kullanılmaz hale getirir. Örneğin:

```
glEnable(GL_LINE_STIPPLE); // kesikli çizgi çizebilmek için
glEnable(GL_SMOOTH);       // renk geçişlerini yumuşatmak için
```

```
void glRecti (int x1,
              int y1,
              int x2,
              int y2)
```
işlev

İşlev, bir köşesi ilk iki parametresi ile çapraz köşesi ise son iki parametresi ile belirtilen bir dörtgenin çizilmesini sağlar.

İşlevin `glRects`, `glRectf`, `glRectd` türevleri de vardır. Tek farkları parametrelerinin sırasıyla `short`, `float`, ve `double` olmasıdır.

Dönüşümler

```
void glRotate (double açı,
               double x,
               double y,
               double z)
```
işlev

Şekil, *açı* derece kadar koordinatları *x*, *y*, *z* ile belirtilen noktanın etrafında döndürülür.

```
void glTranslated (double x,
                   double y,
                   double z)
```
işlev

Koordinatları *x*, *y*, *z* ile belirtilen noktaya koordinat sistemini öteler.

```
void gluOrtho2D (double sol,
                 double sağ,
                 double alt,
                 double üst)
```
işlev

İki boyutlu görüş peneresinin (clipping window) büyüklüğünü belirler.

```
void glLoadIdentity ()
```
işlev

Yapılmış tüm dönüşümlerin geri alınmasını sağlar.

```
void glScaled (double x,
               double y,
               double z)
```
işlev

Bu dönüşüm sayesinde ölçekleme yapılır. Eğer girilen değerler 1'den küçükse nesneler küçültülür, 1'den büyükse nesneler büyütülür. Bu işlevin `float` parametreler alan `glScalef` isimli türevi de mevcuttur.

Olay Tanımlama İşlevleri

```
void glutReshapeFunc (void (*işlev) (int    genişlik,
                                     double yükseklik)
```

işlev

Eğer pencere yeniden boyutlandırılırsa bu işlevin parametresi olan işlev çağrılır ve parametre olarak yeni genişlik ve yükseklik değerleri atanır.

```
void glutIdleFunc (void (*işlev) (void)
```

işlev

Hiçbir olay oluşturulmadığında çalıştırılacak işlevi belirtir.

Artalanda Tamponlama

Her seferinde ekrandaki görüntünün tazelenmesi CRT (=Cathode Ray Tube) tarafından yapılır. Bu olaya programımız müdahale edemez. Bellekte OpenGL'in çizim için kullandığı ekran bölgesine nokta eklemek çizgi çizmek gibi işlemlerle değişiklik yaptıkça ekrana bu değişiklikler anında yansıtılır. Ama tüm değişikliklerin yapıldıktan sonra ekranın tazelenmesini sağlayacak bir yol da vardır.

Çizimi başka bir bellek bölgesinde yapıp sonra ekran bölgesine aktarabiliriz (double buffering). Arka planda ekranın yeni görüntüsü işlevlerle hazırlanır ve bu sırada ön planda yani kullanıcının gördüğü pencerede bir değişiklik olmaz. Biz programımızda `glFlush()` yerine `glSwapBuffers()` işlevini kullanırsak arka planda hazırladığımız değişiklikler ön plana yansır.

Bu durumu "ya hep ya hiç" şeklinde işlenmesi gereken verilere benzetebiliriz. Arka planda şeklin tamamı çizildikten sonra ön plana aktarılır. Böylece ekran tazelenmesi sırasında ekranın titrememesi sağlanır.

Ama artalanda tamponlama yapabilmek için penceremiz oluşturulmadan şu şekilde ilklendirme yapılması gerekmektedir:

```
glutInitDisplayMode (GLUT_RGBA | GLUT_DOUBLE);
```

`GLUT_DOUBLE` sayesinde çift tamponlu bir penceremiz olur. Artık `glFlush()` yerine `glSwapBuffers()` kullanılarak artalanda tamponlama yapılabilir.

Klavye İşlevleri

```
void glutKeyboardFunc (void (*işlev) (char tuş
                                      int  x,
                                      int  y)
```

işlev

Klavyeden bir tuşa basıldığında bu işlev çağrılır. *x* ve *y* farenin o andaki konumunu belirtir. *tuş* ise klavyede basılan tuşu belirtir.

```
void glutSpecialFunc (void (*işlev) (int tuş
                                     int x,
                                     int y)
```

işlev

Klavyedeki "F tuslarini" yani işlev tuşları için bu işlev kullanılır. Örnek:

```
  if(key == GLUT_KEY_F1){ printf("F1'e bastiniz.\n"); }
  else if(key == GLUT_KEY_UP) { printf("Yukari ok tusuna bastiniz.\n"); }
```

```
int glutGetModifiers ()
```

işlev

Herhangi bir tuşa basılmışken CTRL, ALT veya SHIFT tuşlarından birine basılıp basılmadığını bu işlev sayesinde öğrenebiliriz. Örneğin `glutSpecialFunc` işlevi tarafından çalıştırılan `myFunction` işlevi şöyle bir kod içerebilir:

```
void myFunction(void){
  int modifier;
  ...
  modifier = glutGetModifiers();
  if(modifier = GLUT_ACTIVE_SHIFT){ printf("SHIFT tusuna bastiniz."); }
  ...
}
```

İşlevden dönen değeri `GLUT_ACTIVE_SHIFT`, `GLUT_ACTIVE_CTRL`, `GLUT_ACTIVE_ALT` sabitleri ile bulabiliriz.

Fare İşlevleri

```
void glutMouseFunc (void (*işlev) (int tuş
                                   int durum,
                                   int x,
                                   int y)
```

işlev

Bu işlev farenin herhangi bir tuşuna basıldı veya bırakıldığı zaman calışır. *x* ve *y* farenin o andaki konumunu belirtir. *tuş* GLUT_LEFT_BUTTON, GLUT_RIGHT_BUTTON, GLUT_MIDDLE_BUTTON olarak tanımlanan sırasıyla sol, sağ ve orta fare tuşlarını belirtir. *durum* ise tuşun ne durumda olduğunu söyler. GLUT_UP, GLUT_DOWN sabitleriyle tanımlanır.

```
void glutMouseFunc (void (*işlev) (int x,
                                   int y)
```

işlev

Tuş basılı olarak fare hareket ettiğinde çalışan işlevdir. Farenin o anki konumu *x* ve *y* parametrelerine atanır.

```
void glutPassiveMotionFunc (void (*işlev) (int x,
                                           int y)
```

işlev

Herhangi bir tuşa basılmaksızın farenin hareket edişi sırasında çağrılan işlevdir. Farenin o anki konumu *x* ve *y* parametrelerine atanır.

```
void glutEntryFunc (void (*işlev) (int durum)
```

işlev

Fare pencere sınırlarına girince veya sınırlarından çıkınca çağrılan işlevdir. *durum* parametresinin aldığı değere göre GLUT_ENTERED ile farenin pencereye girdiği, GLUT_LEFT ile farenin pencereden çıktığı anlaşılır.

2D ve 3D nokta ve cisim tanımı

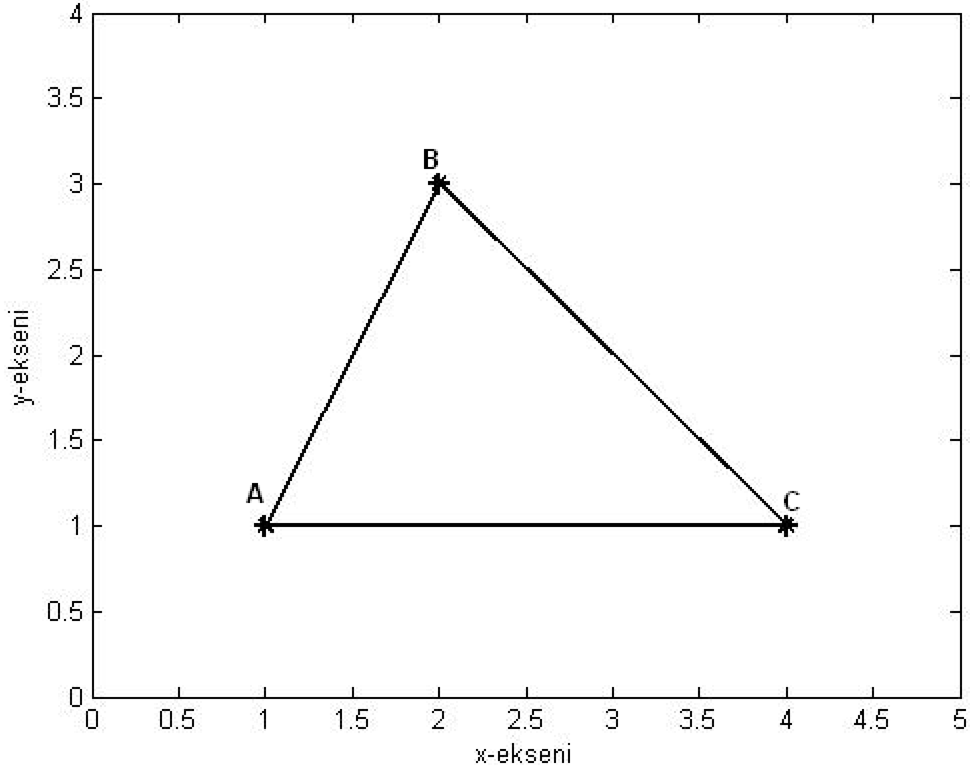
İki boyutlu uzayda bir noktayı şu şekilde tanımlarız:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

Bu gösterim bir A(x,y) noktası için, satır ya da sütun şeklinde tanımlanabilir. Bu matris gösterimi ilerideki işlemlerde temel matris olarak alınacaktır. Birden fazla nokta olması durumunda bu noktalar, bu matrise aynı formda alt alta ekleneceklerdir. Örneğin, A(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) olmak üzere iki nokta ile tanımlama yapıldığında sözkonusu matris şu şekilde olacaktır:

$$X_{nokta} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

İki boyutlu uzayda bir cismi tanımlamak için nokta ve kenar matrislerinin tanımlanması gereklidir. Örnek olarak bir ABC üçgenini tanımlayalım, bu üçgenin noktaları A(1,1) B(2,3) C(4,1) olarak verildiğinde üçgeni şu şekilde çizebiliriz:



Şekil 4.1.-ABC üçgeni

Burada X cisim matrisi ve kenar matrisi şu şekilde tanımlanır:

$$X_{nokta} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 2,3 \\ 4,1 \end{pmatrix}, X_{kenar} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,3 \\ 3,1 \end{pmatrix}$$

$$X_{nokta}=\begin{pmatrix}1,1\\2,3\\4,1\end{pmatrix}, X_{kenar}=\begin{pmatrix}1,2\\2,3\\3,1\end{pmatrix}$$

Burada ilk verilen X_{nokta} matrisi içinde, cismi oluşturan noktalar yeralır. Bunları satır numarası ile birinci nokta, ikinci nokta,.... şeklinde numaralandırılmış olarak düşüneceğiz. İkinci olarak X_{kenar} matrisinde ise sırayla cismi oluşturan kenarlar belirtilmektedir. Bu kenar matrisinde verilen sayılar, nokta matrisinde numaralandırılmış olan noktalardır. Yani ilk satırda verilen (1,2)'yi yorumlarsak; ilk kenarın birinci noktadan ikinci noktaya olduğunu göstermektedir. Diğer kenar değerleri de benzer şekilde yorumlanır.

2D Temel işlemler

-Öteleme
-Ölçekleme
-Yansıtma
-Döndürme
-Herhangi bir nokta etrafında döndürme
-Herhangi bir doğruya göre yansıtma

Homojen Koordinat sistemindeki işlemler:

$$x^* = ax + cy + m$$

$$y^* = bx + dy + n$$

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$ Dönüşüm Matrisi

Öteleme :

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x+m \quad y+n \quad 1]$$

Ölçekleme :

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2x \quad 2y \quad 1]$$

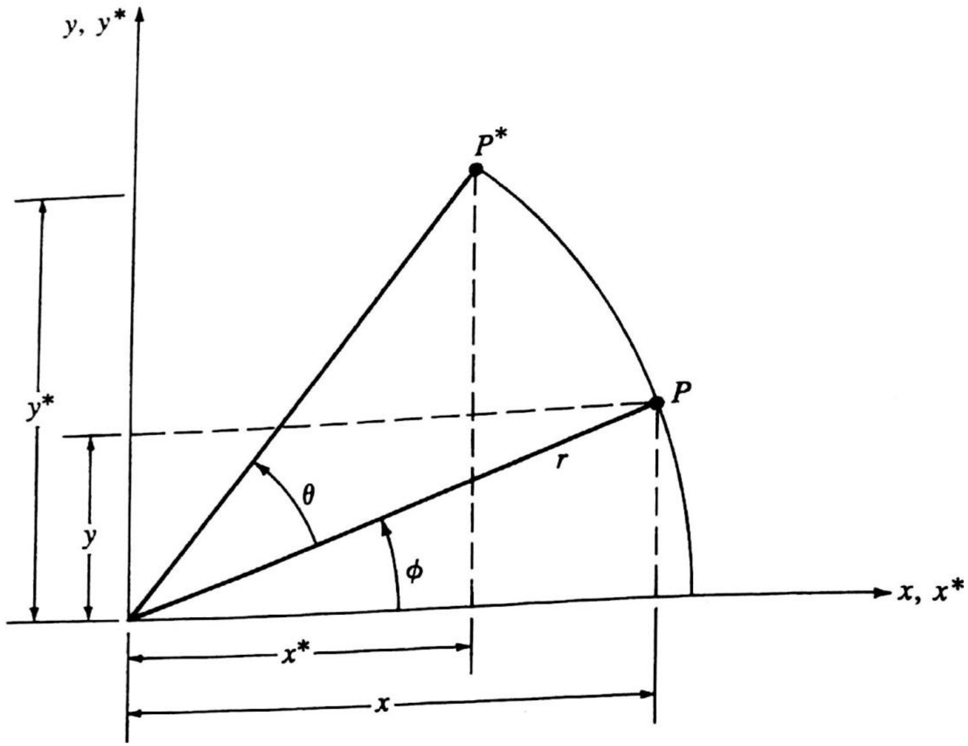
Yansıtma :

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \quad y \quad 1]$$ y-eks göre

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad -y \quad 1]$$ x-eks göre

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \quad -y \quad 1]$$ y= - x göre

Döndürme :



$P = [x \;\; y] = [r\cos\phi \;\; r\sin\phi]$

$P^* = [x^* \;\; y^*] = [r\cos(\phi+\theta) \;\; r\sin(\phi+\theta)]$

$P^* = [x^* \;\; y^*] = [r(\cos\phi\cos\theta-\sin\phi\sin\theta) \;\; r(\cos\phi\sin\theta+\sin\phi\cos\theta]$

$P^* = [x^* \;\; y^*] = [x\cos\theta-y\sin\theta \;\; x\sin\theta+y\cos\theta]$

$x^*= x\cos\theta-y\sin\theta$

$y^*= x\sin\theta+y\cos\theta$

$$[X^*]=[X][R]$$

$$[x^* \quad y^* \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Herhangi bir nokta etrafında döndürme :

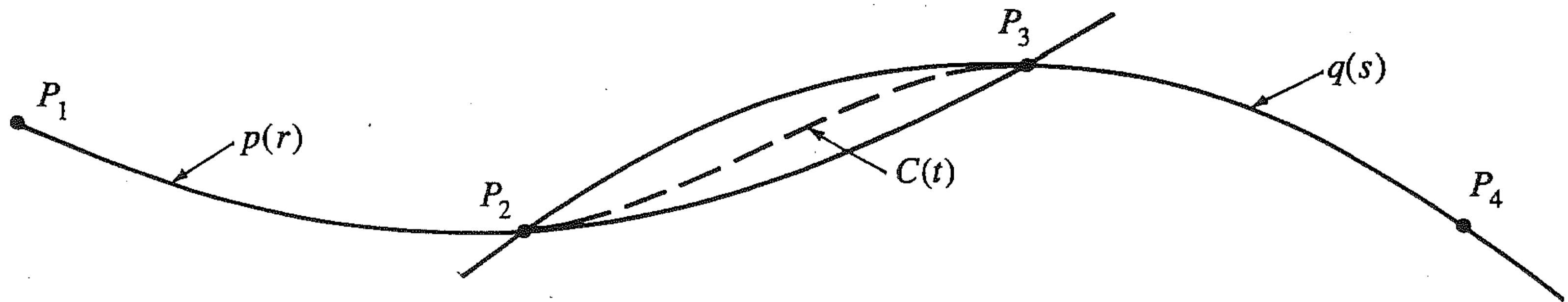
$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

Herhangi bir doğruya göre yansıtma :

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

2D Uzay Eğrileri

1- Parabol uydurma:



$$C(t) = (1-t)p(r) + tq(s)$$

$$p(r) = [\, r^2 \quad r \quad 1 \,][\, B \,]$$

$$q(s) = [\, s^2 \quad s \quad 1 \,][\, D \,]$$

$$r = k_1 t + k_2 \qquad s = k_3 t + k_4$$

$$p(0) = P_1 \qquad p(1/2) = P_2 \qquad p(1) = P_3$$
$$q(0) = P_2 \qquad q(1/2) = P_3 \qquad q(1) = P_4$$
$$C(0) = P_2 \qquad C(1) = P_3$$

$$r = k_1 t + k_2 \qquad s = k_3 t + k_4$$

$$@\, P_2: \quad r = 1/2,\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 1/2$$
$$@\, P_3: \quad r = 1,\ t = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 + k_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1/2$$
$$@\, P_2: \quad s = 0,\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad k_4 = 0$$
$$@\, P_3: \quad s = 1/2,\ t = 1 \quad \Rightarrow \quad k_3 = 1/2$$

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 + t) \qquad s(t) = \frac{1}{2}t$$

$$p(0) = P_1 = [\, 0 \quad 0 \quad 1 \,][\, B \,]$$
$$p(1/2) = P_2 = [\, 1/4 \quad 1/2 \quad 1 \,][\, B \,]$$
$$p(1) = P_3 = [\, 1 \quad 1 \quad 1 \,][\, B \,]$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [\, B \,] = [\, M \,][\, B \,]$$

$$[\, B \,] = [\, M \,]^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$q(0) = P_2 = [\, 0 \quad 0 \quad 1 \,][\, D \,]$$

$$q(1/2) = P_3 = [\, 1/4 \quad 1/2 \quad 1 \,][\, D \,]$$

$$q(1) = P_4 = [\, 1 \quad 1 \quad 1 \,][\, D \,]$$

$$[\, D \,] = [\, M \,]^{-1} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$C(t) = (1-t)[\, r^2 \quad r \quad 1 \,][\, B \,] + t[\, s^2 \quad s \quad 1 \,][\, D \,]$$

$$C(t) = [\, -\tfrac{1}{4}(t^3 + t^2 - t - 1) \quad -\tfrac{1}{2}(t^2 - 1) \quad 1 - t \,][\, B \,] + \begin{bmatrix} \dfrac{t^3}{4} & \dfrac{t^2}{2} & t \end{bmatrix} [\, D \,]$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{2} + t^2 - \frac{t}{2} & t^3 - t^2 - t + 1 & -\frac{t^3}{2} + \frac{t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{t^3}{2} - \frac{3}{2}t^2 + t & -t^3 + 2t^2 & \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{2} + t^2 - \frac{t}{2} & t^3 - t^2 - t + 1 & -\frac{t^3}{2} + \frac{t}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{2} - \frac{3}{2}t^2 + t & -t^3 + 2t^2 & \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$C(t) = [\, t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1 \,][\, A \,][\, G \,] = [\, T \,][\, A \,][\, G \,]$$

$$[\, A \,] = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\, G \,]^T = [\, P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \,]$$

$$C(t) = [\, t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1 \,] \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

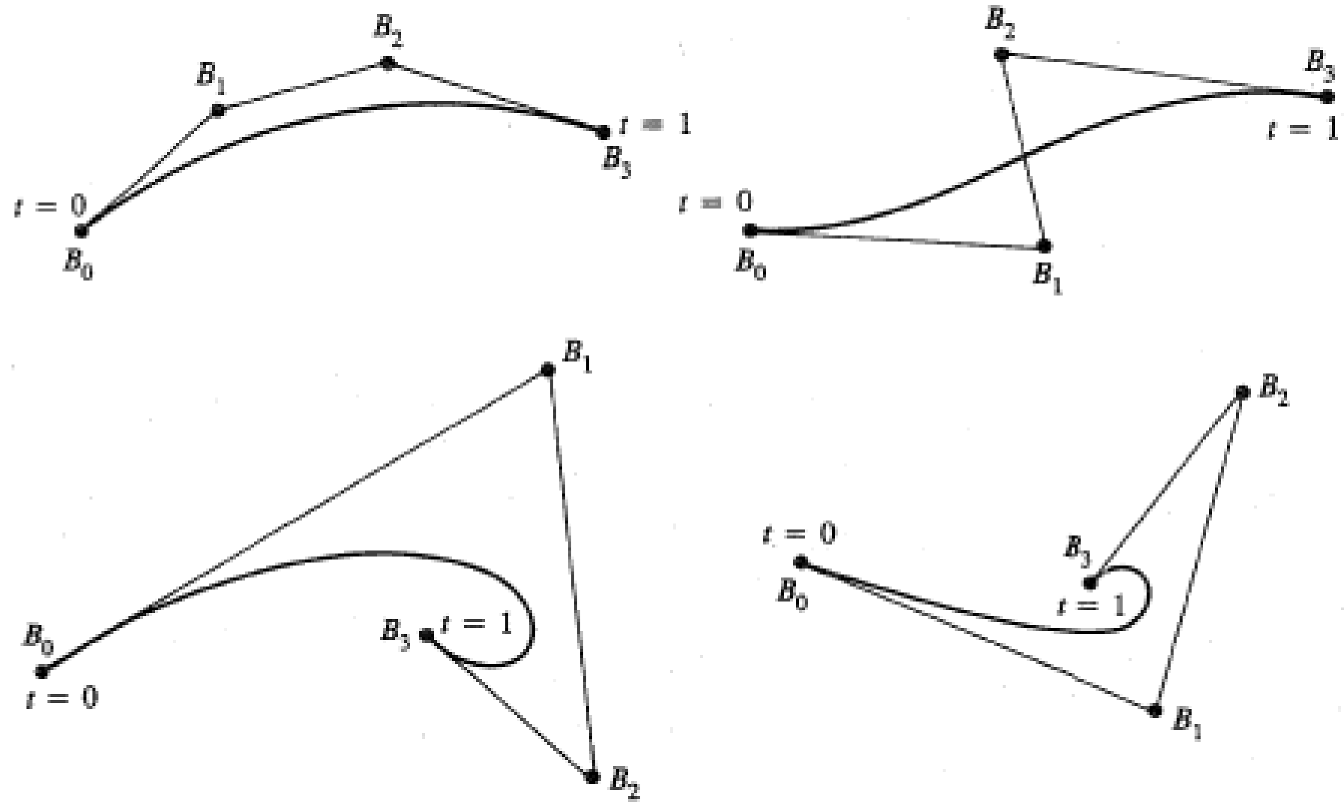
$$p(r) = [\, r^2 \quad r \quad 1 \,] \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

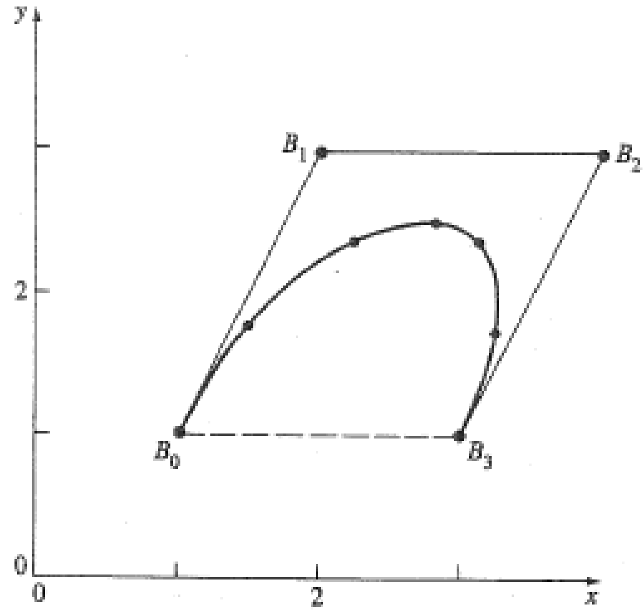
$$q(s) = [\, s^2 \quad s \quad 1 \,] \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Bezier Eğrisi :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i \; J_{n,i}(t) \qquad 0 \le t \le 1 \qquad\qquad J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$





$$J_{3,0}(t) = (1)t^0(1-t)^3 = (1-t)^3$$
$$J_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2$$
$$J_{3,2}(t) = 3t^2(1-t)$$
$$J_{3,3}(t) = t^3$$

$$\begin{aligned} P(t) &= B_0 J_{3,0} + B_1 J_{3,1} + B_2 J_{3,2} + B_3 J_{3,3} \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \end{aligned}$$

$$P(0) = B_0 = [\,1 \quad 1\,]$$
$$P(0.15) = 0.614B_0 + 0.325B_1 + 0.058B_2 + 0.003B_3 = [\,1.5 \quad 1.765\,]$$
$$P(0.35) = 0.275B_0 + 0.444B_1 + 0.239B_2 + 0.042B_3 = [\,2.248 \quad 2.367\,]$$
$$P(0.5) = 0.125B_0 + 0.375B_1 + 0.375B_2 + 0.125B_3 = [\,2.75 \quad 2.5\,]$$
$$P(0.65) = 0.042B_0 + 0.239B_1 + 0.444B_2 + 0.275B_3 = [\,3.122 \quad 2.367\,]$$
$$P(0.85) = 0.003B_0 + 0.058B_1 + 0.325B_2 + 0.614B_3 = [\,3.248 \quad 1.765\,]$$
$$P(1) = B_3 = [\,3 \quad 1\,]$$

$$P(t) = \left[\, (1-t)^3 \quad 3t(1-t)^2 \quad 3t^2(1-t) \quad t^3 \,\right] \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = [\,T\,][\,N\,][\,G\,] = [\,t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1\,] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = [\,t^4 \quad t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1\,] \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

Cubic Spline Eğrisi :

$$P(t) = \sum_{i=1}^{4} B_i\, t^{i-1} \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$P'(t) = B_2 + 2B_3 t + 3B_4 t^2 \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$P(0) = P_1$$
$$P(t_2) = P_2$$
$$P'(0) = P_1'$$
$$P'(t_2) = P_2'$$

$$P(0) = B_1 = P_1$$

$$P'(0) = \sum_{i=1}^{4} (i-1)\, t^{i-2} B_i \Big|_{t=0} = B_2 = P_1'$$

$$P(t_2) = \sum_{i=1}^{4} B_i\, t^{i-1} \Big|_{t=t_2} = B_1 + B_2 t_2 + B_3 t_2^2 + B_4 t_2^3 \qquad =P2$$

$$P'(t_2) = \sum_{i=1}^{4} (i-1) t^{i-2} B_i \Big|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3 t_2 + 3B_4 t_2^2 \qquad =P2'$$

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{{t_2}^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}$$

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}$$

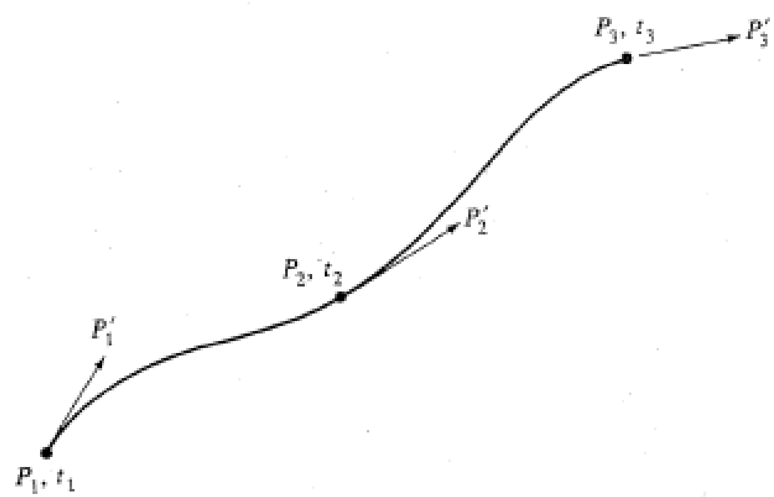
$$P(t) = P_1 + P_1't + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}\right]t^2 + \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}\right]t^3$$

$$P''(t) = \sum_{i=1}^{4}(i-1)(i-2)B_i\, t^{i-3} \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$P'(t) = B_2 + 2B_3t + 3B_4t^2 \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$P'' = 6B_4t_2 + 2B_3$$

$$P'' = 2B_3$$



$$6t_2\left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}\right] + 2\left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}\right] = 2\left[\frac{3(P_3 - P_2)}{t_3^2} - \frac{2P_2'}{t_3} - \frac{P_3'}{t_3}\right]$$

$$t_3P_1' + 2(t_3 + t_2)P_2' + t_2P_3' = \frac{3}{t_2t_3}[t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)]$$

$$t_4P_2' + 2(t_4 + t_3)P_3' + t_3P_4' = \frac{3}{t_3t_4}[t_3^2(P_4 - P_3) + t_4^2(P_3 - P_2)]$$

$$t_5P_3' + 2(t_5 + t_4)P_4' + t_4P_5' = \frac{3}{t_4t_5}[t_4^2(P_5 - P_4) + t_5^2(P_4 - P_3)]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4+t_5) & t_4 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_n & 2(t_n+t_{n-1}) & t_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' \\ \frac{3}{t_2t_3}\{t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)\} \\ \frac{3}{t_3t_4}\{t_3^2(P_4 - P_3) + t_4^2(P_3 - P_2)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1}t_n}\{t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2})\} \\ P_n' \end{bmatrix}$$

$$B_{1k} = P_k$$

$$B_{2k} = P'_k$$

$$B_{3k} = \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}}$$

$$B_{4k} = \frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2}$$

$$[\,B\,] = \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{t_{k+1}^2} & -\dfrac{2}{t_{k+1}} & \dfrac{3}{t_{k+1}^2} & -\dfrac{1}{t_{k+1}} \\ \dfrac{2}{t_{k+1}^3} & \dfrac{1}{t_{k+1}^2} & -\dfrac{2}{t_{k+1}^3} & \dfrac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$P_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} \qquad 0 \le t \le t_{k+1}$$

$$P_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{t_{k+1}^2} & -\dfrac{2}{t_{k+1}} & \dfrac{3}{t_{k+1}^2} & -\dfrac{1}{t_{k+1}} \\ \dfrac{2}{t_{k+1}^3} & \dfrac{1}{t_{k+1}^2} & -\dfrac{2}{t_{k+1}^3} & \dfrac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \qquad \tau = (t/t_{k+1})$$

$$P_k(\tau) = \begin{bmatrix} F_1(\tau) & F_2(\tau) & F_3(\tau) & F_4(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \tau \le 1 \\ 1 \le k \le n-1 \end{array}$$

$$F_{1k}(\tau) = 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1$$

$$F_{2k}(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2$$

$$F_{3k}(\tau) = \tau(\tau^2 - 2\tau + 1)t_{k+1}$$

$$F_{4k}(\tau) = \tau(\tau^2 - \tau)t_{k+1}$$

Örnek: $P_1[0,0]$, $P_2[1,1]$, $P_3[2,-1]$, $P_4[3,0]$, $P'_1[1,1]$, $P'_4[1,1]$

$$t_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$$

$$t_3 = \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2} = \sqrt{(1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$t_4 = \sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ \frac{3}{t_2 t_3}\{t_2^2(P_3-P_2)+t_3^2(P_2-P_1)\} \\ \frac{3}{t_3 t_4}\{t_3^2(P_4-P_3)+t_4^2(P_3-P_2)\} \\ P'_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.236 & 7.300 & 1.414 & 0 \\ 0 & 1.414 & 7.300 & 2.236 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6.641 & 0.949 \\ 6.641 & 0.949 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.318 & 0.142 & -0.028 & 0.062 \\ 0.062 & -0.028 & 0.142 & -0.318 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6.641 & 0.949 \\ 6.641 & 0.949 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.505 & -0.148 \\ 0.505 & -0.148 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1(1/3) = 2(1/3)^3 - 3(1/3)^2 + 1 = \frac{20}{27} = 0.741 \qquad F_1(2/3) = 2(2/3)^3 - 3(2/3)^2 + 1 = \frac{7}{27} = 0.259$$

$$F_2(1/3) = -2(1/3)^3 + 3(1/3)^2 = \frac{7}{27} = 0.259 \qquad F_2(2/3) = -2(2/3)^3 + 3(2/3)^2 = \frac{20}{27} = 0.741$$

$$F_3(1/3) = (1/3)[(1/3)^2 - 2(1/3) + 1]\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{27} = 0.210 \qquad F_3(2/3) = (2/3)[(2/3)^2 - 2(2/3) + 1]\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{27} = 0.105$$

$$F_4(1/3) = (1/3)[(1/3)^2 - 1/3]\sqrt{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{27} = -0.105 \qquad F_4(2/3) = (2/3)[(2/3)^2 - 2/3]\sqrt{2} = \frac{-4\sqrt{2}}{27} = -0.210$$

$$P(1/3) = \begin{bmatrix} 0.741 & 0.259 & 0.210 & -0.105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0.505 & -0.148 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.416 & 0.484 \end{bmatrix}$$

$$P(2/3) = \begin{bmatrix} 0.259 & 0.741 & 0.105 & -0.210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0.505 & -0.148 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.740 & 0.876 \end{bmatrix}$$

Segment	τ	$P_x(\tau)$	$P_y(\tau)$
1	1/3	0.416	0.484
	2/3	0.740	0.876
2	1/3	1.343	0.457
	2/3	1.657	−0.457
3	1/3	2.260	−0.876
	2/3	2.584	−0.484

Ara noktalardaki türev değerlerinin hesabı

Standart Cubic Spline:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & \vdots \\ & 0 \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 \quad \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \vdots \\ P_n' \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} P_1' \\ \frac{3}{t_2 t_3}\left(t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)\right) \\ \vdots \\ P_n' \end{bmatrix}$$

Normalize edilmiş cubic spline:

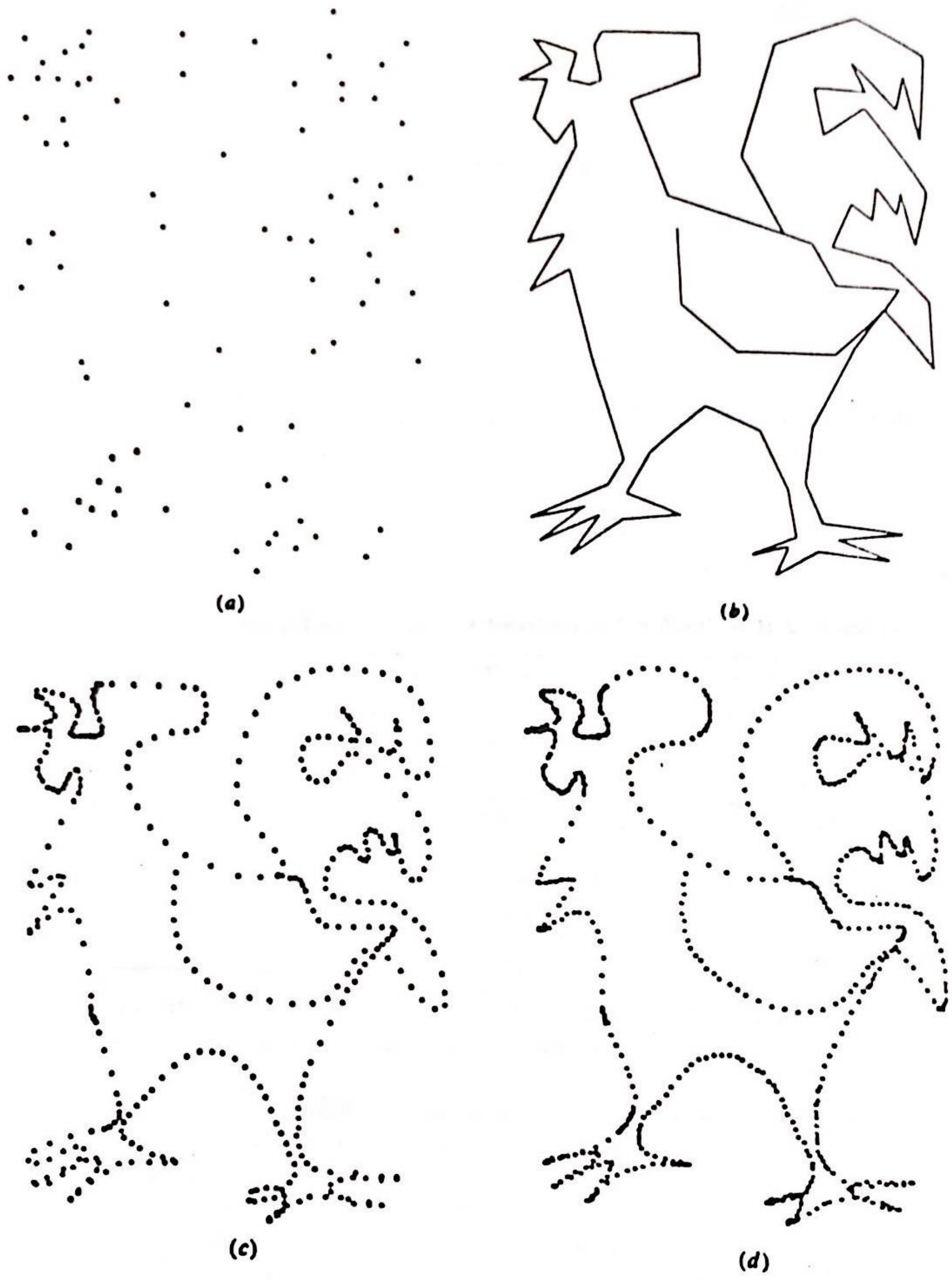
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' \\ 3\{(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1)\} \\ 3\{(P_4 - P_3) + (P_3 - P_2)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 3\{(P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2})\} \\ P_n' \end{bmatrix}$$

Uç noktaları selbest bırakılmış cubik spline:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & & \dots & 0 \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & & t_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & 0 & \dots & 2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \vdots \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1) \\ \frac{3}{t_2 t_3}(t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)) \\ \vdots \\ \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Normalize edilmiş ve uç noktaları selbest bırakılmış cubic spline :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \vdots \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(P_2 - P_1) \\ 3((P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) \\ \vdots \\ 6(P_n - P_{n-1}) \end{bmatrix}$$



(a)-Noktasal
(b)-Doğrusal
(c)-Normalize edilmiş
(d)-Standart

B-Spline Eğrisi :

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \qquad t_{\min} \le t < t_{\max}, \quad 2 \le k \le n+1$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \le t < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

$$x_i = 0 \qquad 1 \le i \le k$$

$$x_i = i - k \qquad k+1 \le i \le n+1$$

$$x_i = n - k + 2 \qquad n+2 \le i \le n+k+1$$

n=4

$$k = 2 \qquad [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4]$$

$$k = 3 \qquad [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3]$$

$$k = 4 \qquad [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

$$[\,X\,] = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2\,]$$ k=3, n=3

$0 \leq t < 1$

$N_{3,1}(t) = 1; \qquad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 3$

$N_{2,2}(t) = 1 - t; \qquad N_{3,2}(t) = t; \qquad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3$

$N_{1,3}(t) = (1-t)^2; \qquad N_{2,3}(t) = t(1-t) + \dfrac{(2-t)}{2}t;$

$N_{3,3}(t) = \dfrac{t^2}{2}; \qquad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2, 3$

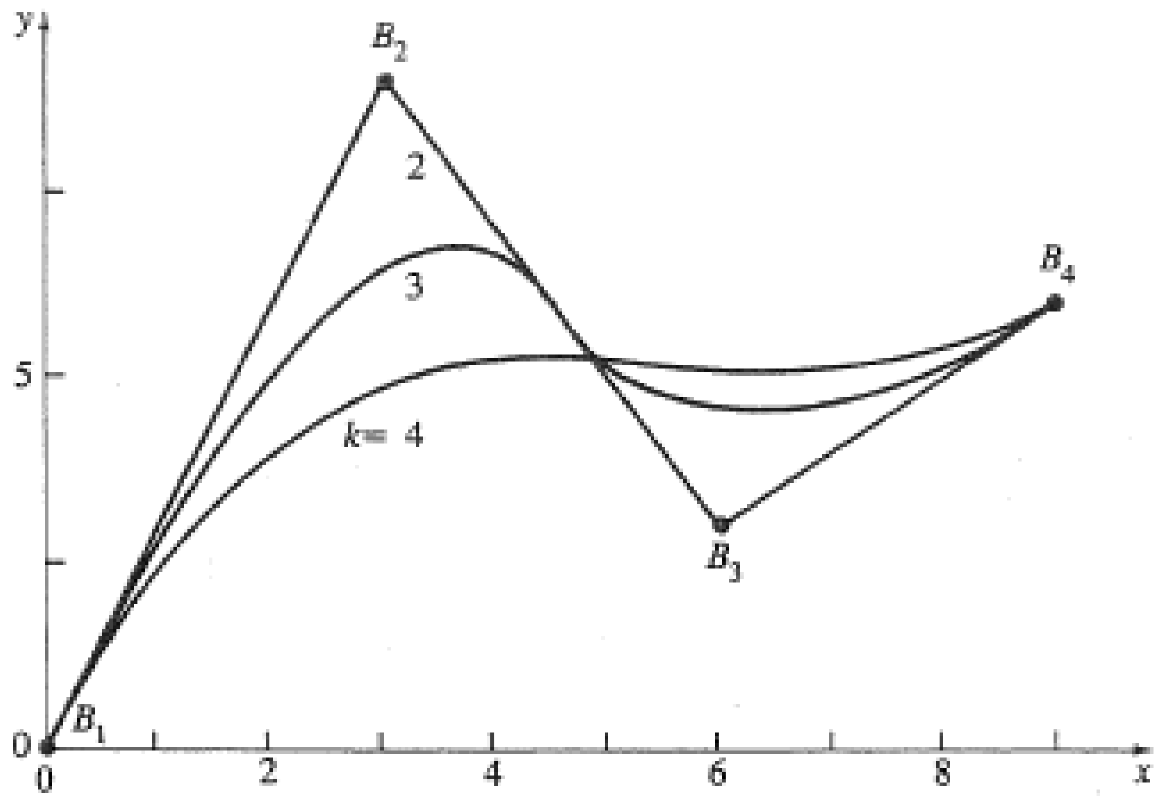
$1 \leq t < 2$

$N_{4,1}(t) = 1; \qquad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 4$

$N_{3,2}(t) = (2-t); \qquad N_{4,2}(t) = (t-1); \qquad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4$

$N_{2,3}(t) = \dfrac{(2-t)^2}{2}; \qquad N_{3,3}(t) = \dfrac{t(2-t)}{2} + (2-t)(t-1);$

$N_{4,3}(t) = (t-1)^2; \qquad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3, 4$


y
x
0
2
4
6
8
5
B1
B2
B3
B4
2
3
k= 4

$$B_1[1 \quad 1],\ B_2[2 \quad 3],\ B_3[4 \quad 3],\ B_4[3 \quad 1].$$

$$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3]$$

k=2, n=3

$0 \leq t < 1$

$N_{2,1}(t) = 1; \qquad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 2$

$N_{1,2}(t) = 1 - t; \qquad N_{2,2}(t) = t; \qquad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2$

$1 \leq t < 2$

$N_{3,1}(t) = 1; \qquad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 3$

$N_{2,2}(t) = 2 - t; \qquad N_{3,2}(t) = (t - 1); \qquad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3$

$2 \leq t < 3$

$N_{4,1}(t) = 1; \qquad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 4$

$N_{3,2}(t) = (3 - t); \qquad N_{4,2}(t) = (t - 2); \qquad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4$

$$P(t) = B_1 N_{1,2}(t) + B_2 N_{2,2}(t) + B_3 N_{3,2}(t) + B_4 N_{4,2}(t)$$

$$P(t) = (1 - t)B_1 + tB_2 = B_1 + (B_2 - B_1)t \qquad 0 \leq t < 1$$

$$P(t) = (2 - t)B_2 + (t - 1)B_3 = B_2 + (B_3 - B_2)t \qquad 1 \leq t < 2$$

$$P(t) = (3 - t)B_3 + (t - 2)B_4 = B_3 + (B_4 - B_3)t \qquad 2 \leq t < 3$$

3D Temel işlemler

-Öteleme
-Ölçekleme
-Yansıtma
-Döndürme
-Herhangi bir doğru etrafında döndürme
-Herhangi bir düzleme göre yansıtma

Ölçekleme=

$$[X][T] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [ax \quad ey \quad jz \quad 1] = [x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1]$$

Döndürme=

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yansıtma=

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Öteleme=

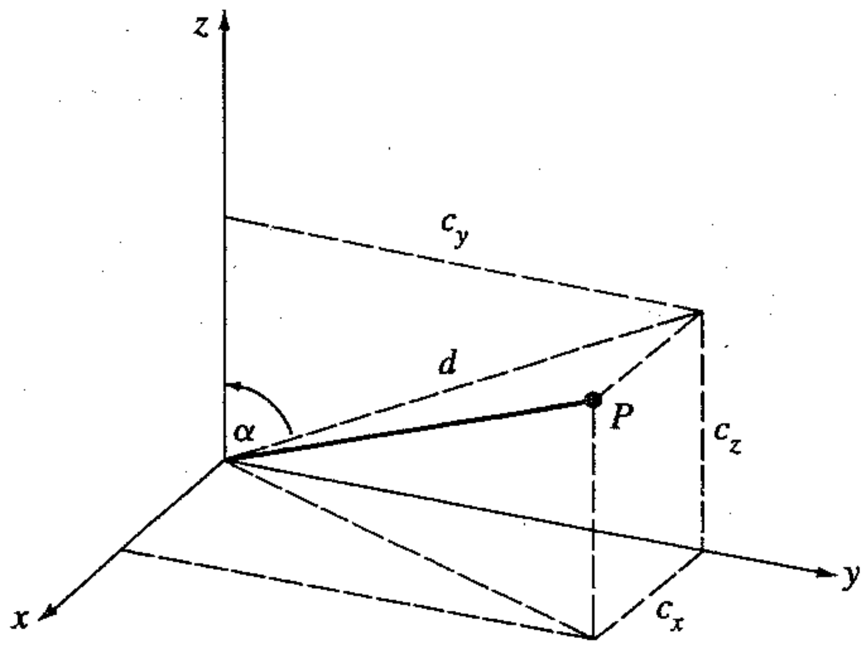
$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

Herhangi bir doğru etrafında döndürme=

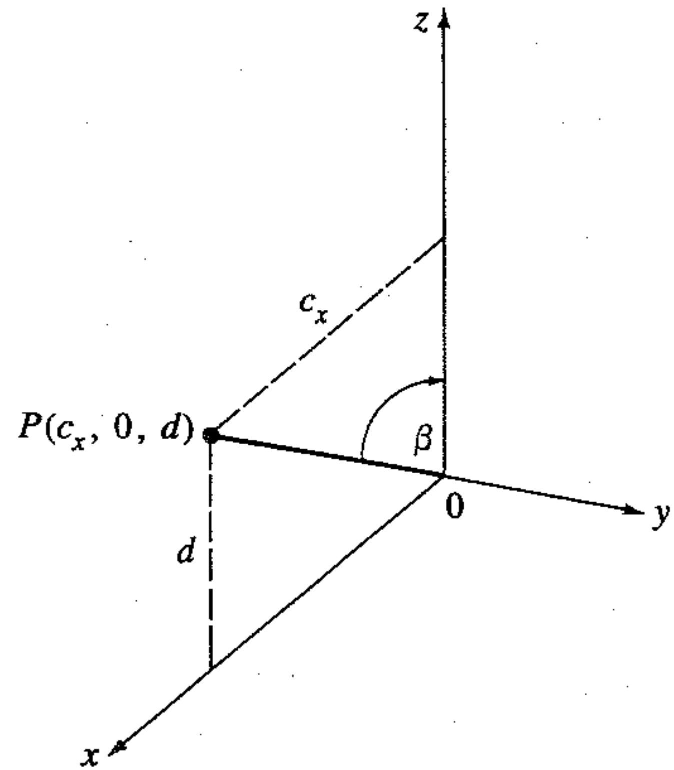
$$[\,M\,] = [\,T\,][\,R_x\,][\,R_y\,][\,R_\delta\,][\,R_y\,]^{-1}[\,R_x\,]^{-1}[\,T\,]^{-1}$$

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,R_x\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z/d & c_y/d & 0 \\ 0 & -c_y/d & c_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

$$d = \sqrt{{c_y}^2 + {c_z}^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{c_z}{d} \qquad \sin\alpha = \frac{c_y}{d}$$

$$\cos\beta = d \qquad \sin\beta = c_x$$

$$[\,R_y\,] = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,R_\delta\,] = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,V\,] = [\,(x_1 - x_0) \quad (y_1 - y_0) \quad (z_1 - z_0)\,]$$

$$[\,c_x \quad c_y \quad c_z\,] = \frac{[\,(x_1 - x_0) \quad (y_1 - y_0) \quad (z_1 - z_0)\,]}{[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Herhangi bir düzleme göre yansıtma=

$$[\,M\,] = [\,T\,][\,R_x\,][\,R_y\,][\,Rflt_z\,][\,R_y\,]^{-1}[\,R_x\,]^{-1}[\,T\,]^{-1}$$

(x_0, y_0, z_0) ve (x_1, y_1, z_1) noktalarından geçen doğrunun denklemi,

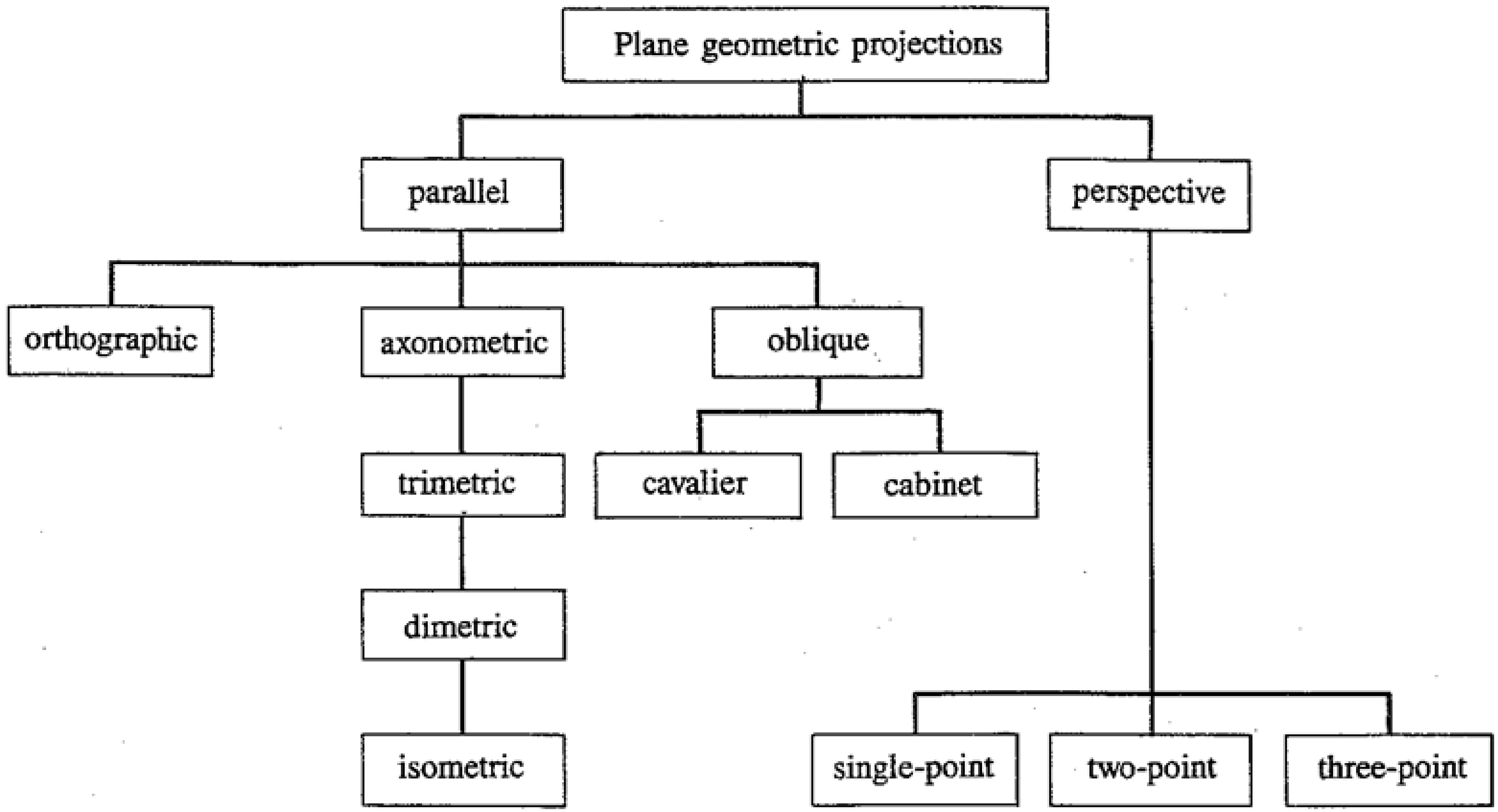
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

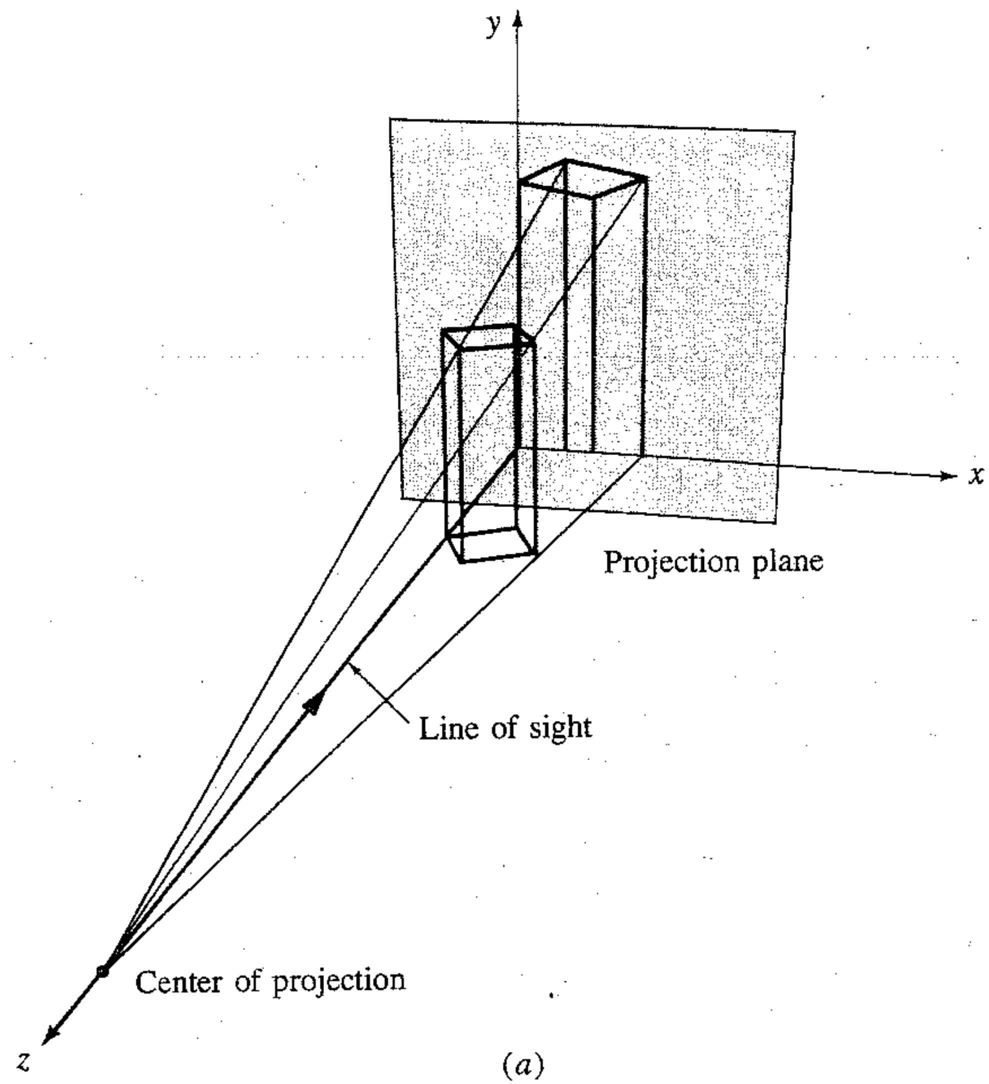
verilen iki doğrunun arasındaki açı α'nın kosinüsü,

$$\cos\alpha = \frac{a_0.a_1 + b_0.b_1 + c_0.c_1}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2}.\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

Eğer bu değer, pozitif ise, doğrular arasındaki dar açı; negatif ise, doğrular arasındaki geniş açı elde edilir.

Projeksiyon(izdüşüm)





(*a*)

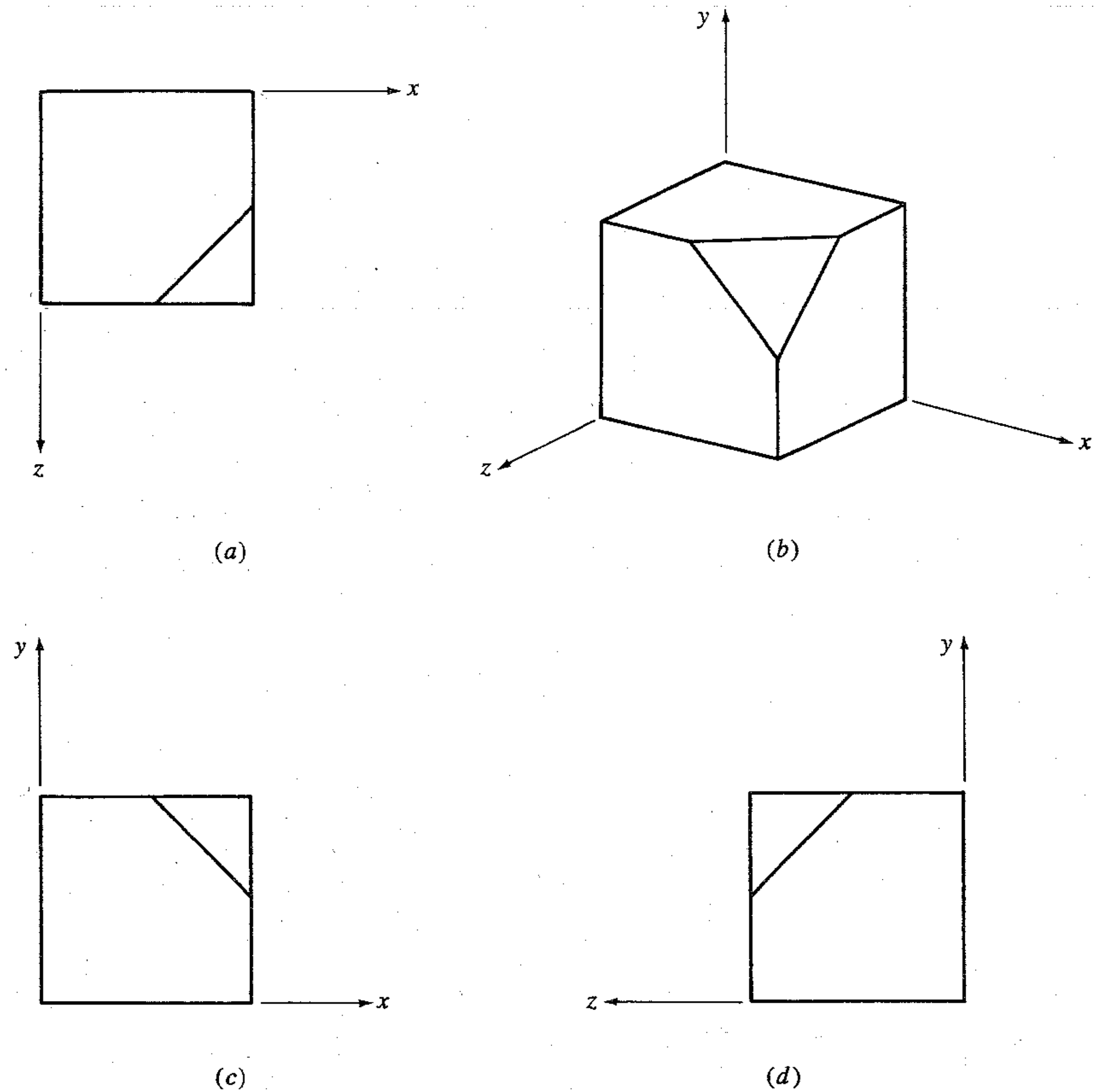
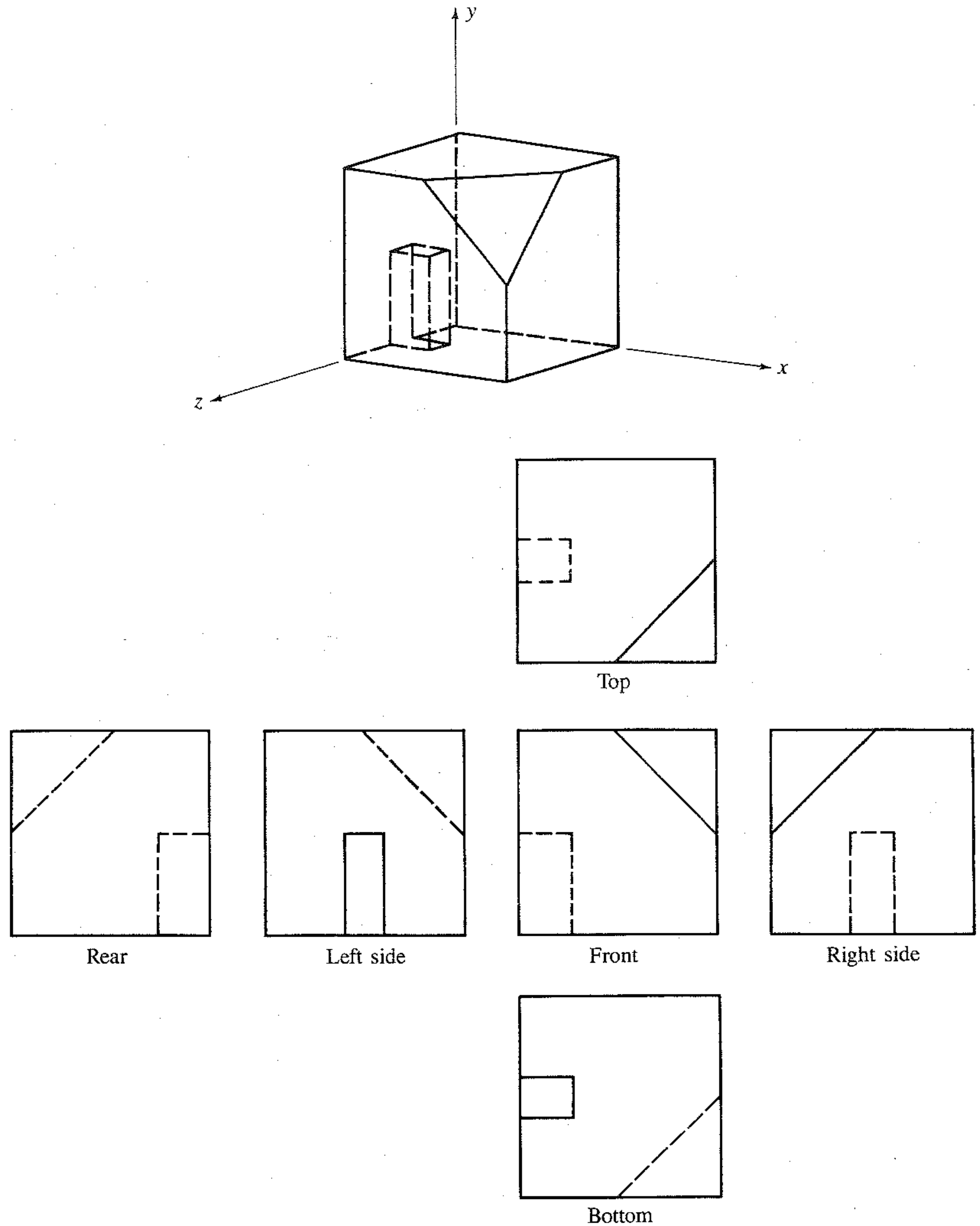
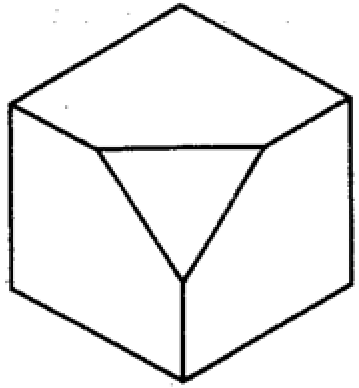


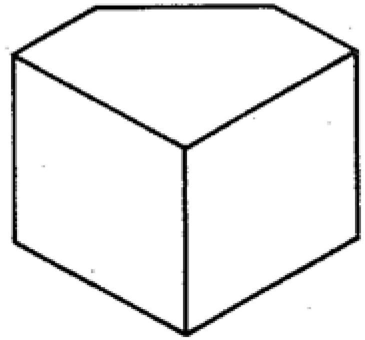
Figure 3–12 Orthographic projections onto (b) $y = 0$, (c) $z = 0$ and (d) $x = 0$ planes.


y
z
x
Top
Rear
Left side
Front
Right side
Bottom



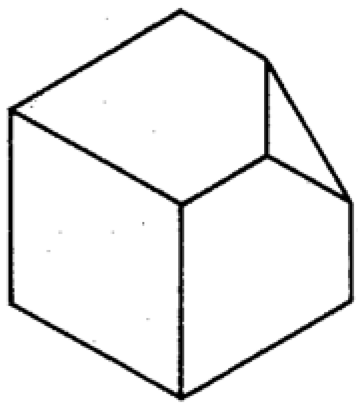
$\phi < 0, \quad \theta > 0$

(a)



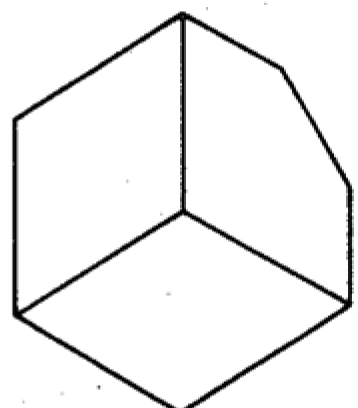
$\phi < 0, \quad \theta < 0$

(b)



$\phi > 0, \quad \theta > 0$

(c)



$\phi > 0, \quad \theta < 0$

(d)

Four possible isometric projections with rotation angles $\phi = \pm 45^\circ$, $\theta = \pm 35.26^\circ$. (a) $\phi = -45^\circ$, $\theta = +35.26^\circ$; (b) $\phi = -45^\circ$, $\theta = -35.26^\circ$; (c) $\phi = +45^\circ$, $\theta = +35.26^\circ$; (d) $\phi = +45^\circ$, $\theta = -35.26^\circ$.

$$[\,T\,] = [\,R_y\,][\,R_x\,][\,P_z\,]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

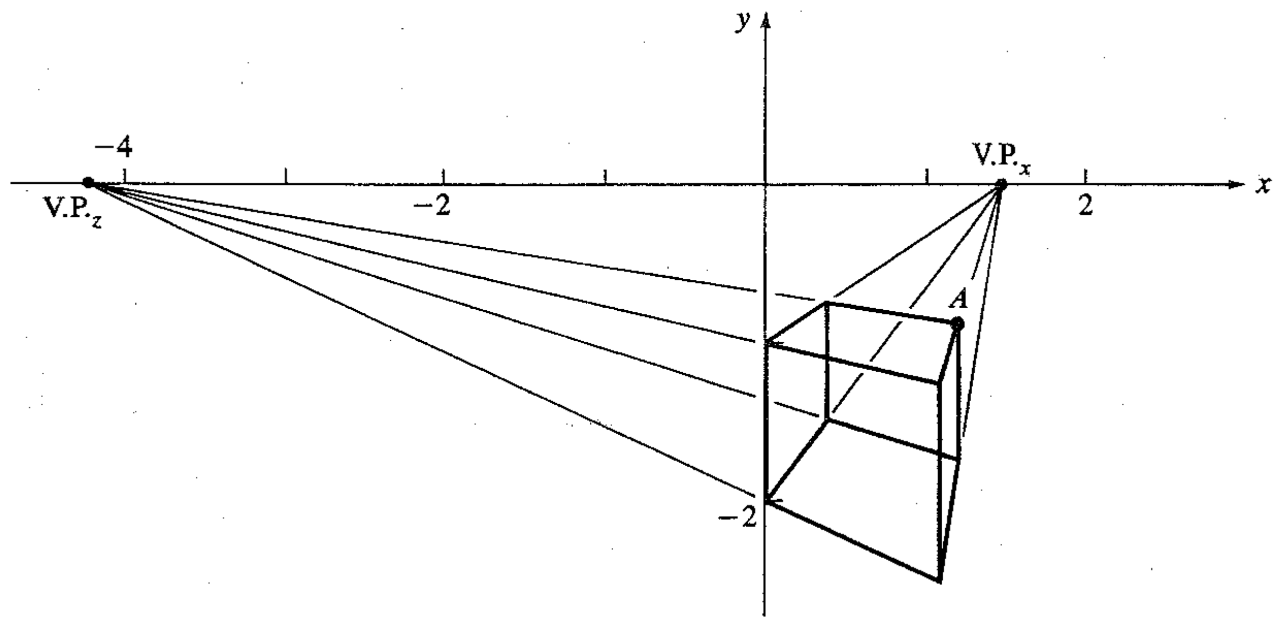
$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0 \\ -0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

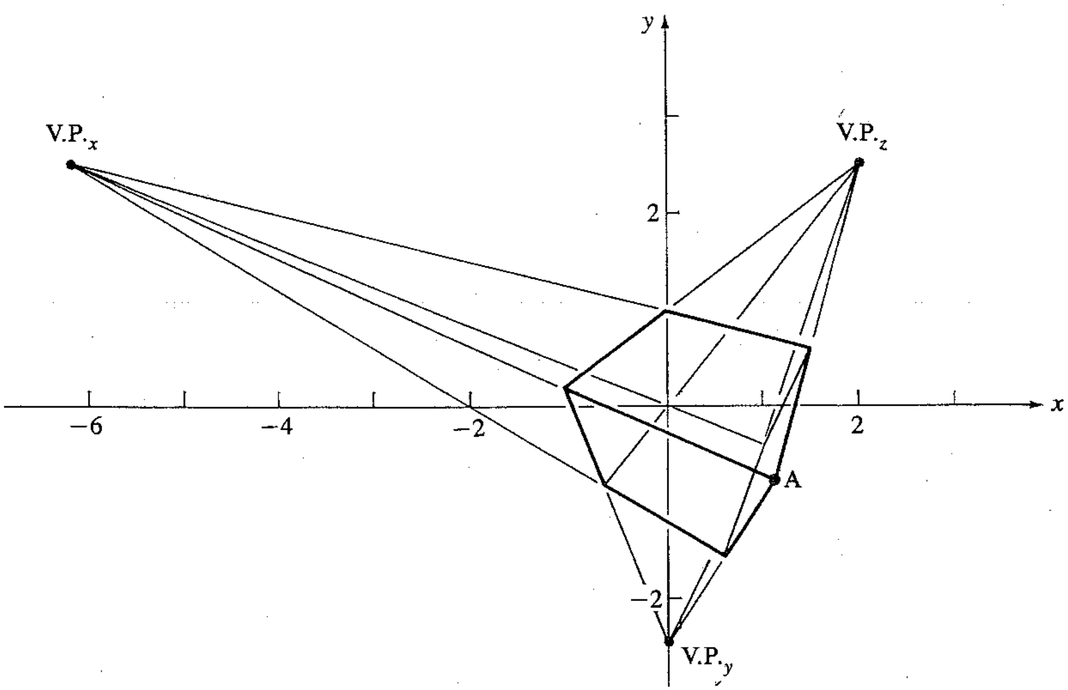
$$[\,X\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

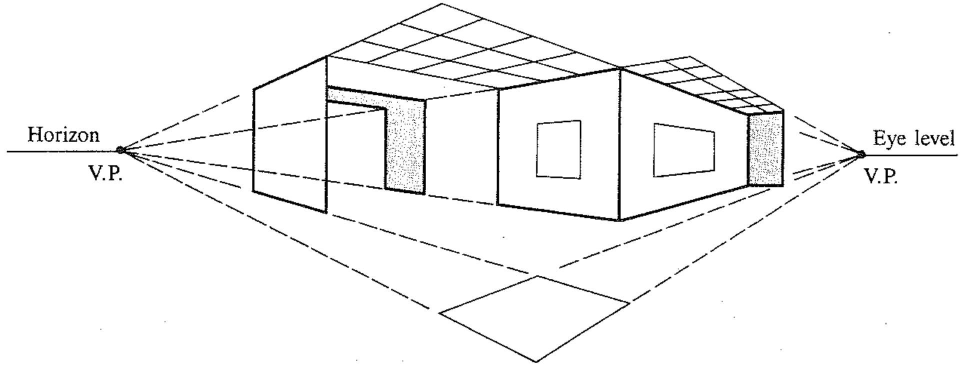
$$[\,X^*\,] = [\,X\,][\,T\,] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.408 & 0 & 1 \\ 0 & -0.816 & 0 & 1 \\ 0 & -0.408 & 0 & 1 \\ -0.354 & 0.204 & 0 & 1 \\ -0.707 & 0.408 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.707 & -0.408 & 0 & 1 \\ 0.707 & 0.408 & 0 & 1 \\ 0 & 0.816 & 0 & 1 \\ 0.354 & 0.204 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)

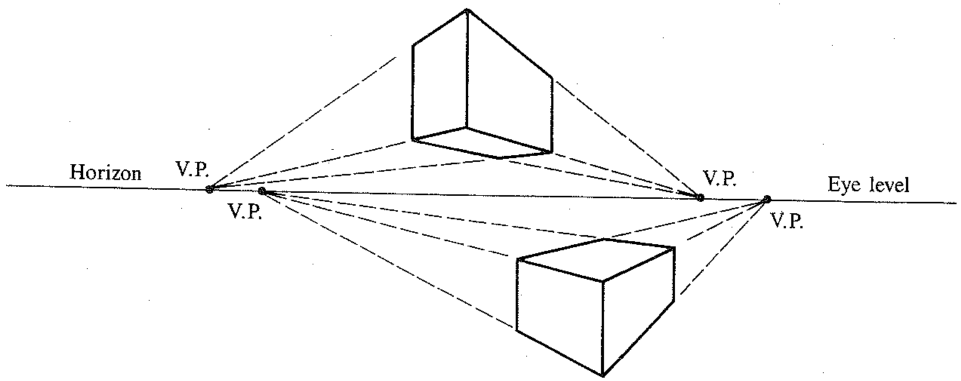


(b)

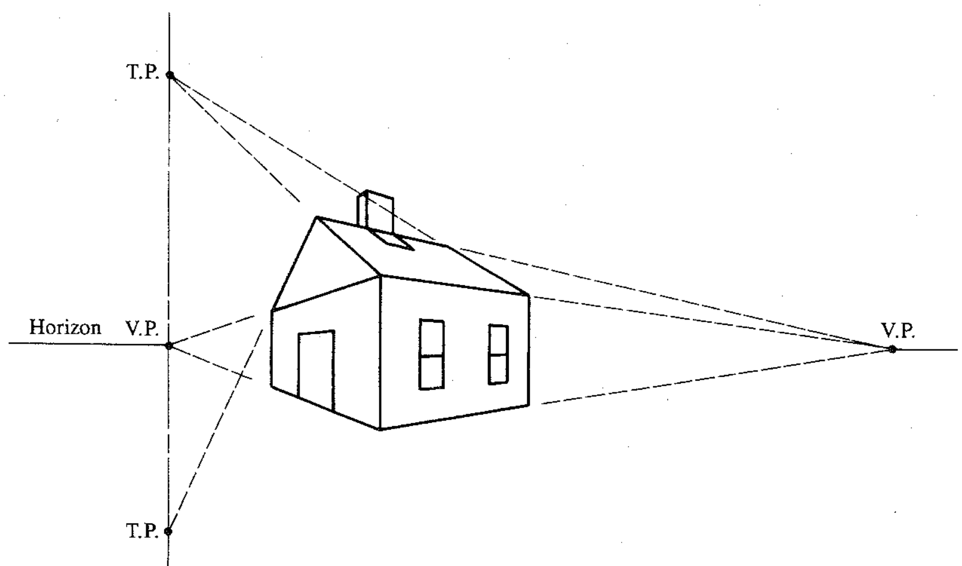


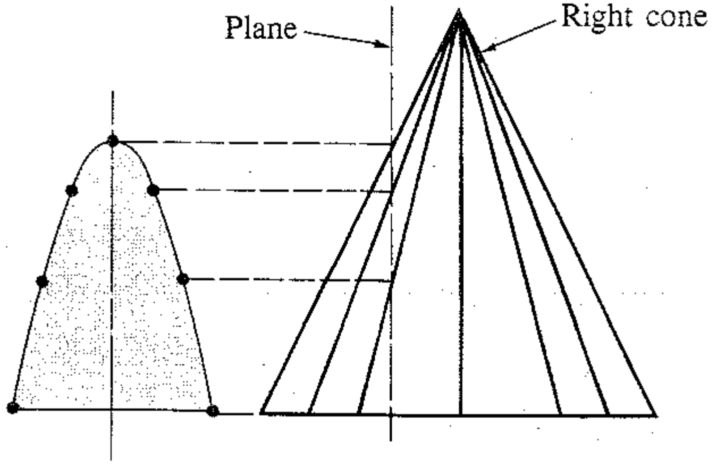

Horizon
V.P.
Eye level
V.P.

(*a*)


Horizon
V.P.
V.P.
V.P.
Eye level
V.P.

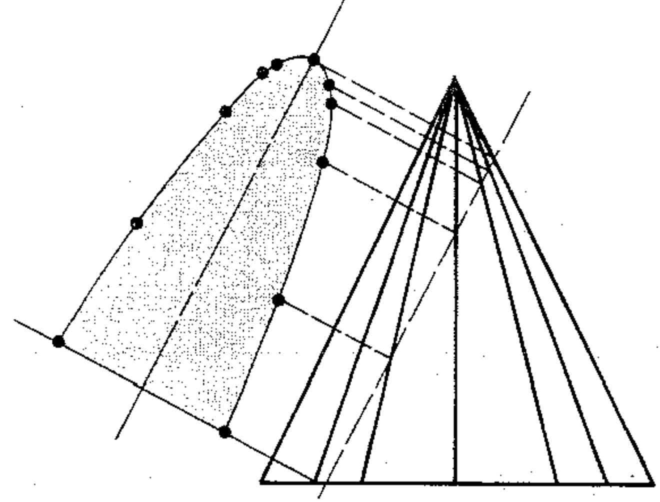
(*b*)


T.P.
Horizon
V.P.
V.P.
T.P.



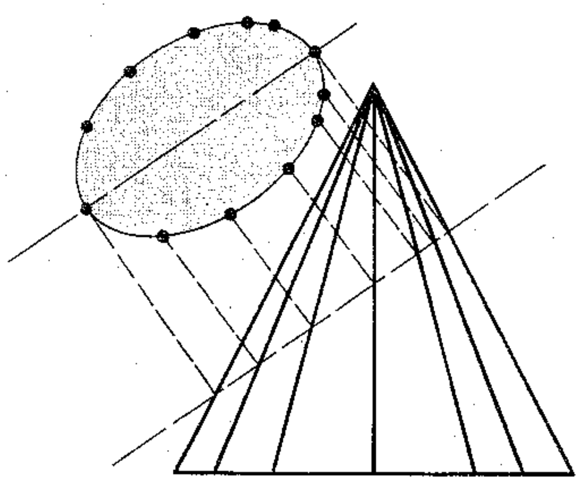
Hyperbola

(*a*)



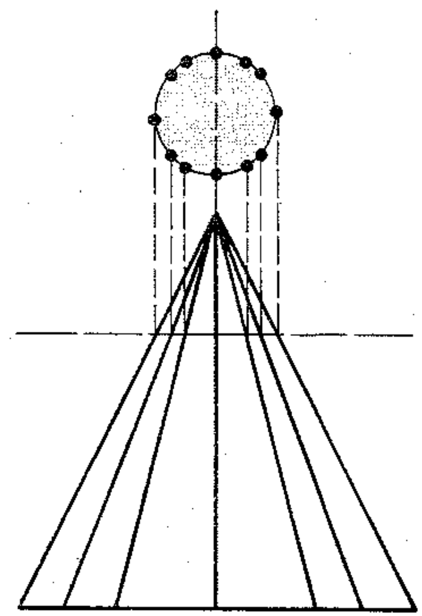
Parabola

(*b*)



Ellipse

(*c*)



Circle

(*d*)

$$x = r\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$y = r\sin\theta$$

the parametric equation of the sphere is

$$\begin{aligned} Q(\theta, \phi) &= [\, x(\theta) \quad y(\theta)\cos\phi \quad y(\theta)\sin\phi \,] \\ &= [\, r\cos\theta \quad r\sin\theta\cos\phi \quad r\sin\theta\sin\phi \,] \qquad 0 \le \theta \le \pi \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le \phi \le 2\pi \end{aligned}$$

$$x = a\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$y = b\sin\theta$$

gives the parametric equation for any point on the ellipsoid of revolution as

$$Q(\theta, \phi) = [\, a\cos\theta \quad b\sin\theta\cos\phi \quad b\sin\theta\sin\phi \,] \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{matrix}$$

the parametric parabola $\quad x = a\theta^2 \qquad 0 \le \theta \le \theta_{\mathrm{max}}$

$$y = 2a\theta$$

the parametric hyperbola $\quad x = a\sec\theta \qquad 0 \le \theta \le \theta_{\mathrm{max}}$

$$y = b\tan\theta$$

Ellipsoid:

$$x = a\ \cos\theta \sin\phi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = b\ \sin\theta \sin\phi \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$
$$z = c\ \cos\phi$$

Hyperboloid of one sheet:

$$x = a\ \cos\theta \cosh\phi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = b\ \sin\theta \sinh\phi \qquad -\pi \le \phi \le \pi$$
$$z = c\ \sinh\phi$$

Hyperboloid of two sheets:

$$x = \pm a\ \cosh\phi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = b\ \sin\theta \sinh\phi \qquad -\pi \le \phi \le \pi$$
$$z = c\ \cos\theta \sinh\phi$$

Elliptic paraboloid:

$$x = a\ \phi \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = b\ \phi \sin\theta \qquad 0 \le \phi \le \phi_{\max}$$
$$z = \phi^2$$

Hyperbolic paraboloid:

$$x = a\ \phi \cosh\theta \qquad -\pi \le \theta \le \pi$$
$$y = b\ \phi \sinh\theta \qquad \phi_{\min} \le \phi \le \phi_{\max}$$
$$z = \phi^2$$

Elliptic cone:

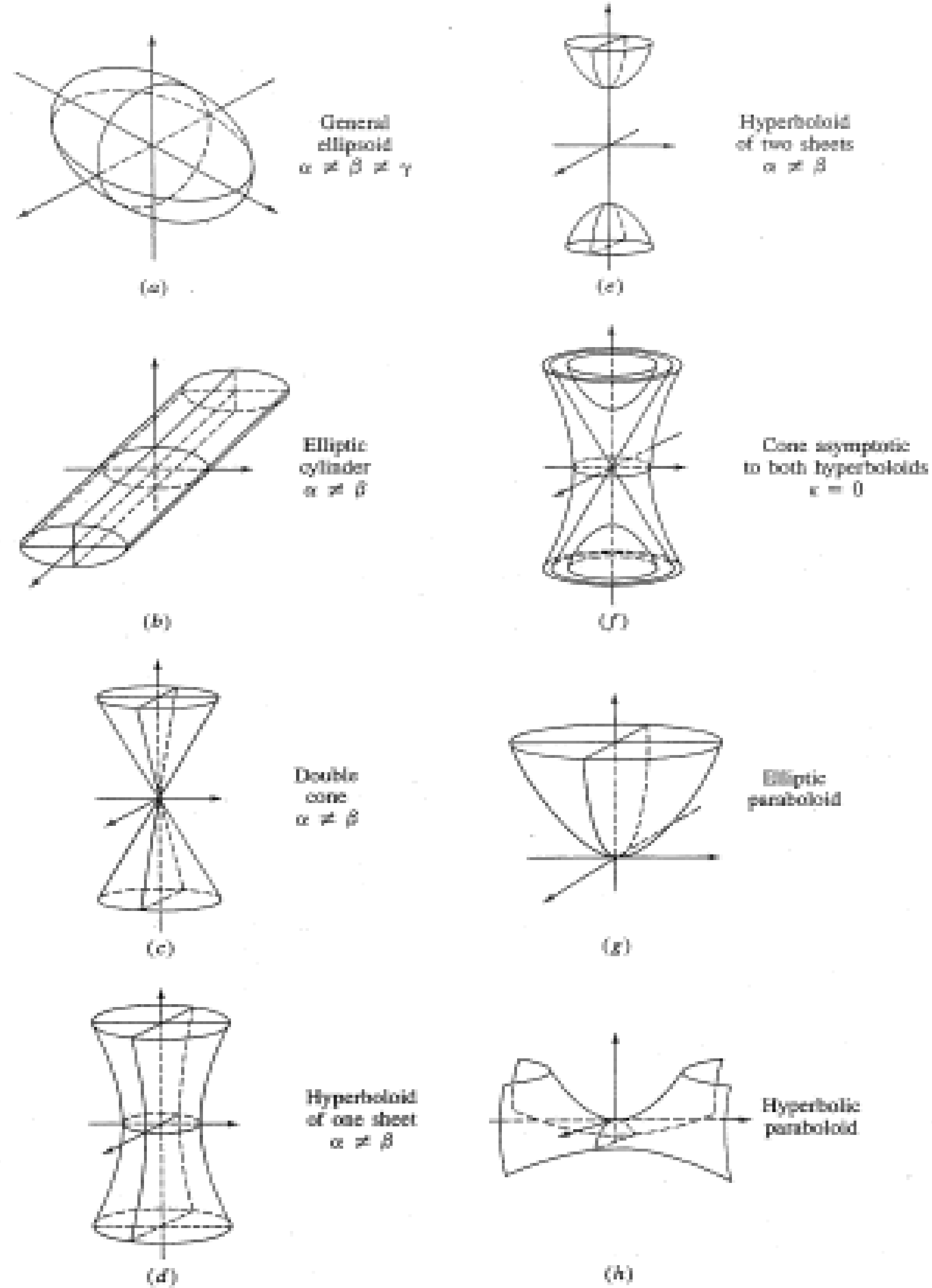
$$x = a\ \phi \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = b\ \phi \sin\theta \qquad \phi_{\min} \le \phi \le \phi_{\max}$$
$$z = c\ \phi$$

Elliptic cylinder:

$$x = a\ \cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = b\ \sin\theta \qquad \phi_{\min} \le \phi \le \phi_{\max}$$
$$z = \phi$$

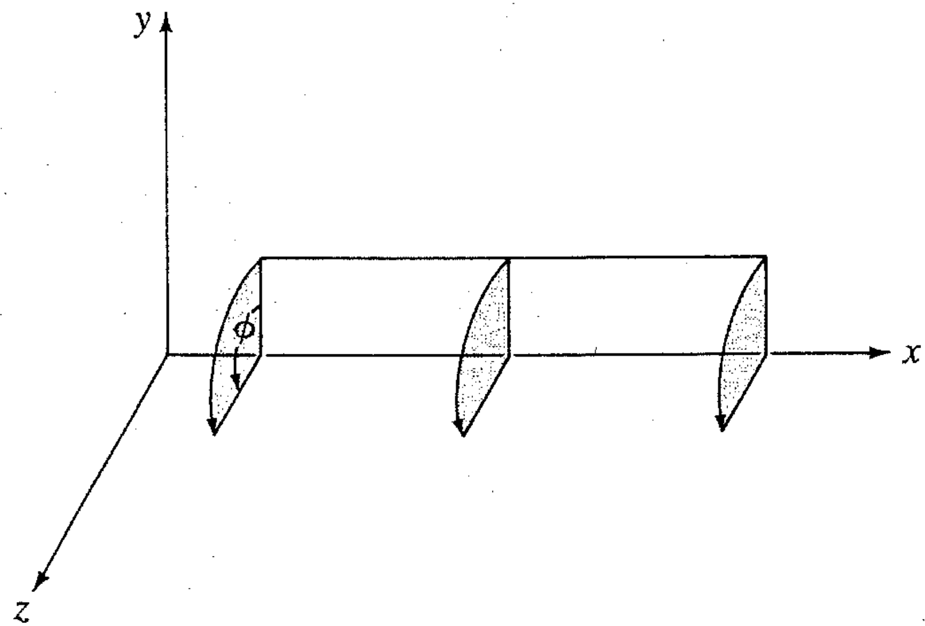
Parabolic cylinder:

$$x = a\ \theta^2 \qquad 0 \le \theta \le \theta_{\max}$$
$$y = 2a\ \theta \qquad \phi_{\min} \le \phi \le \phi_{\max}$$
$$z = \phi$$

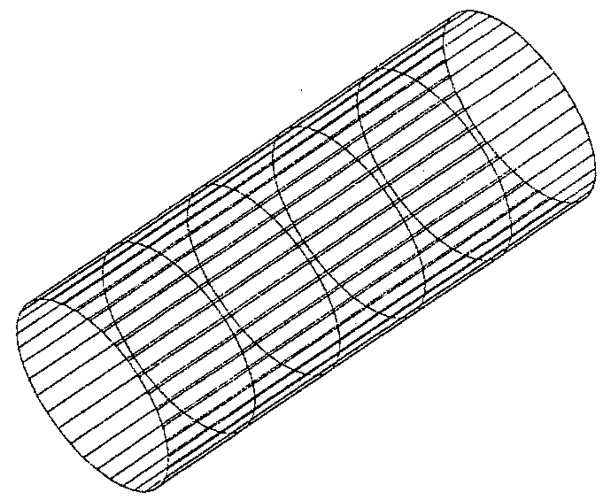


3D Uzay Yüzeyleri

Kaydırma Yüzeyi :

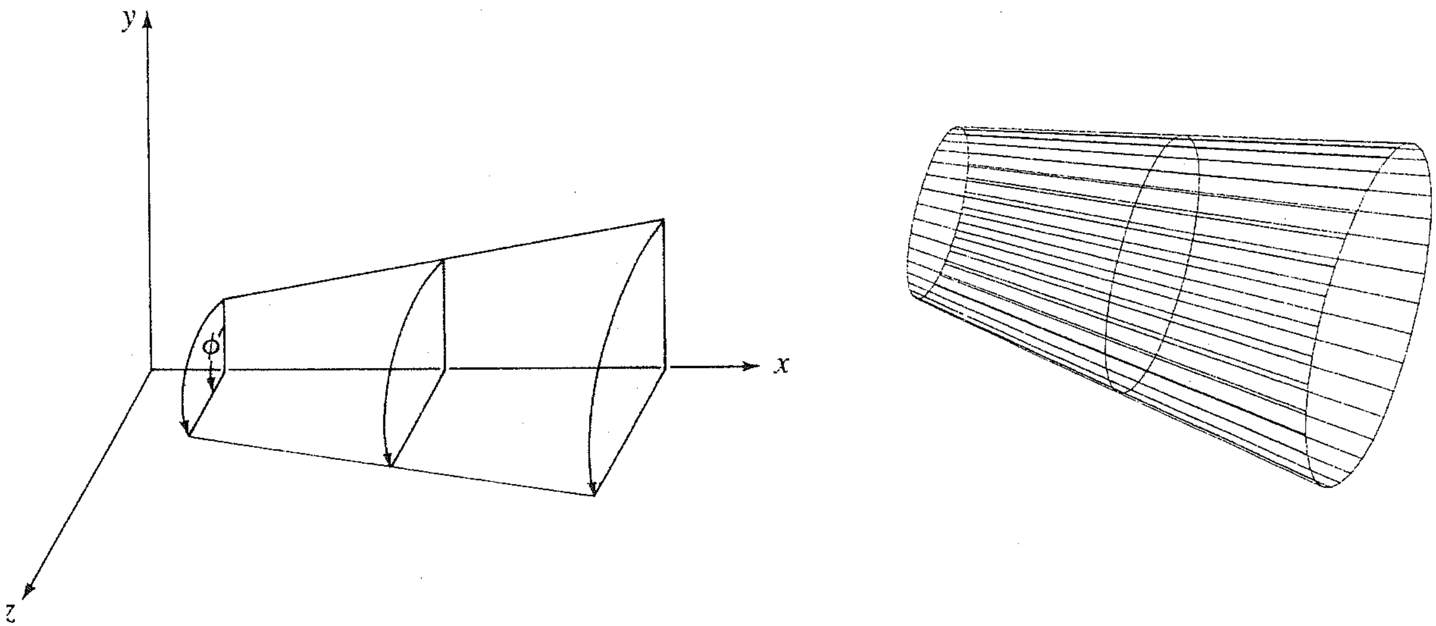


(a)



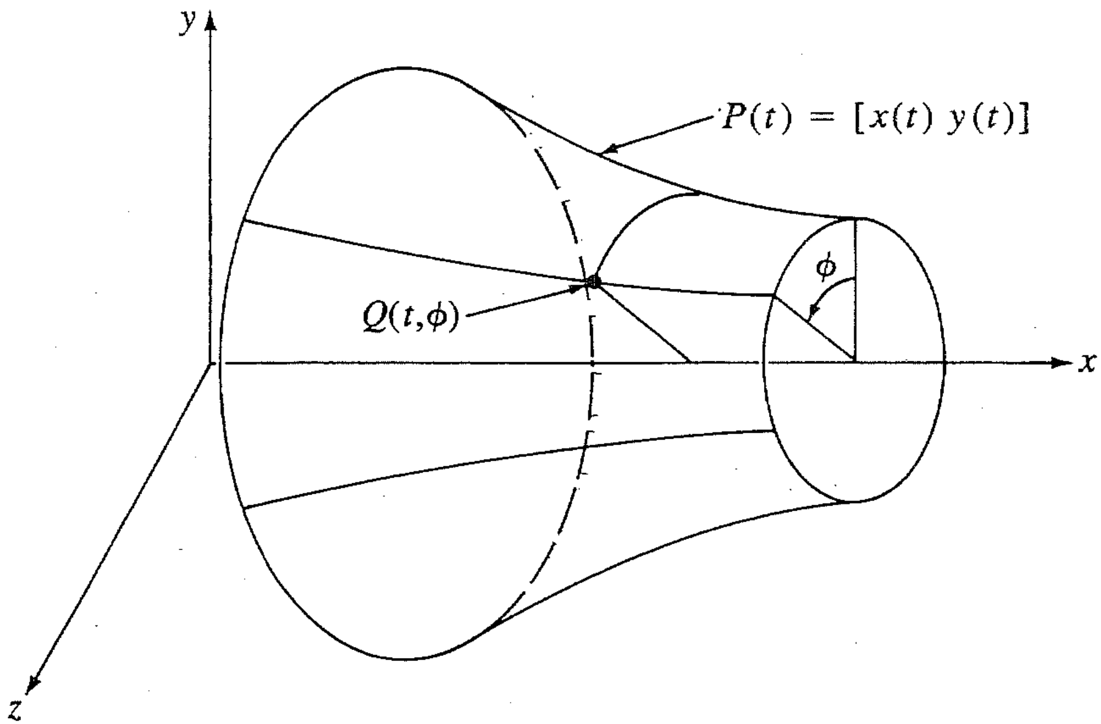
(b)

Döndürme Yüzeyi :

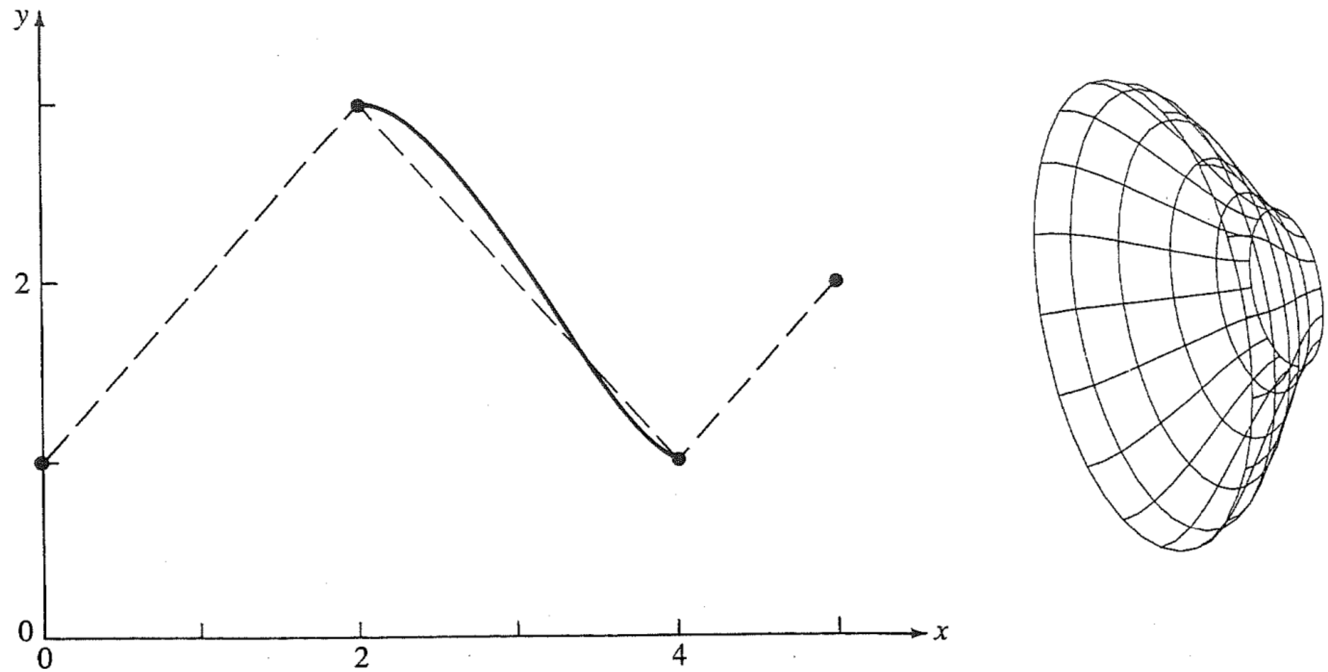


(a) (b)

Döndürme Yüzeyi :

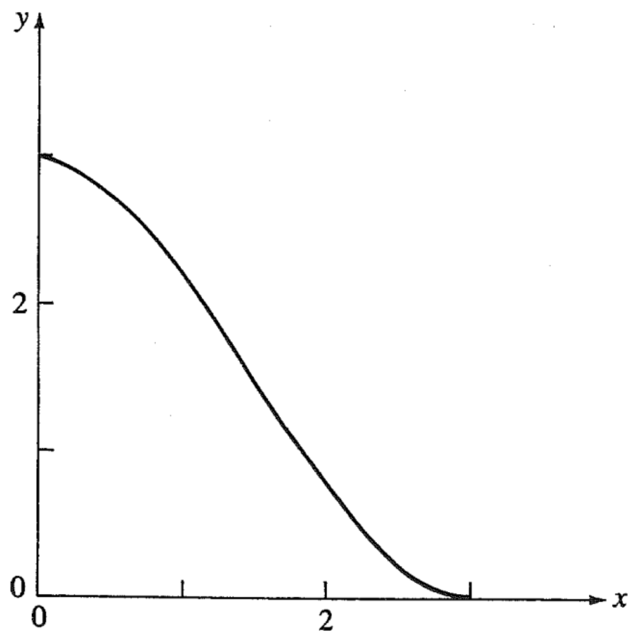


Döndürme Yüzeyi :

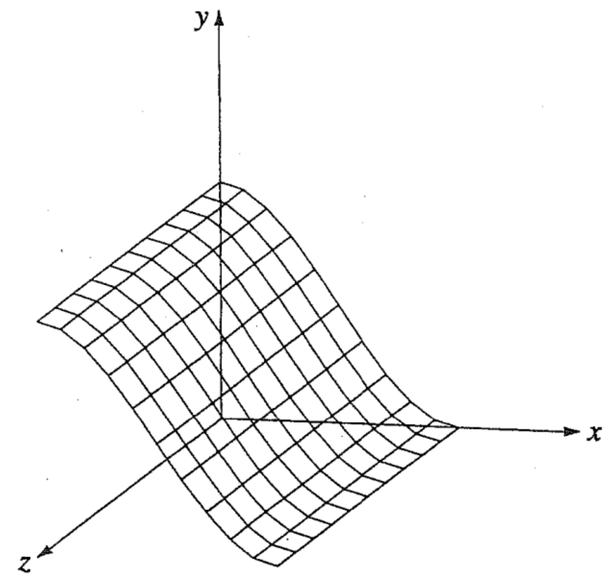


(a) (b)

Kaydırma Yüzeyi :

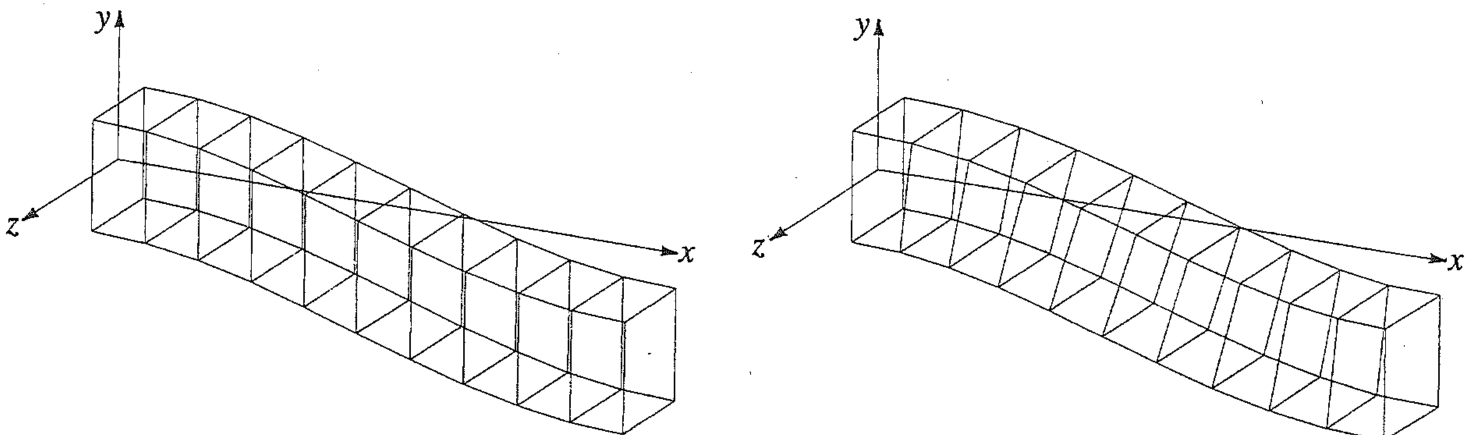


(a)



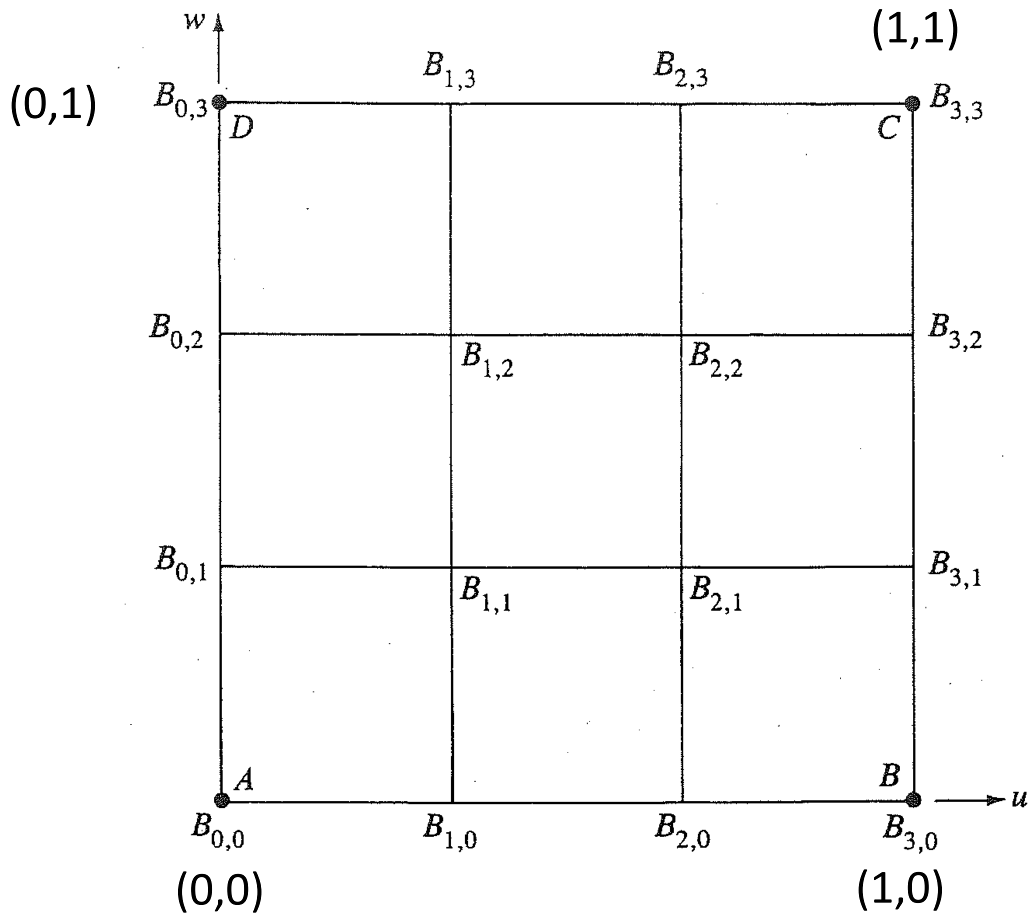
(b)

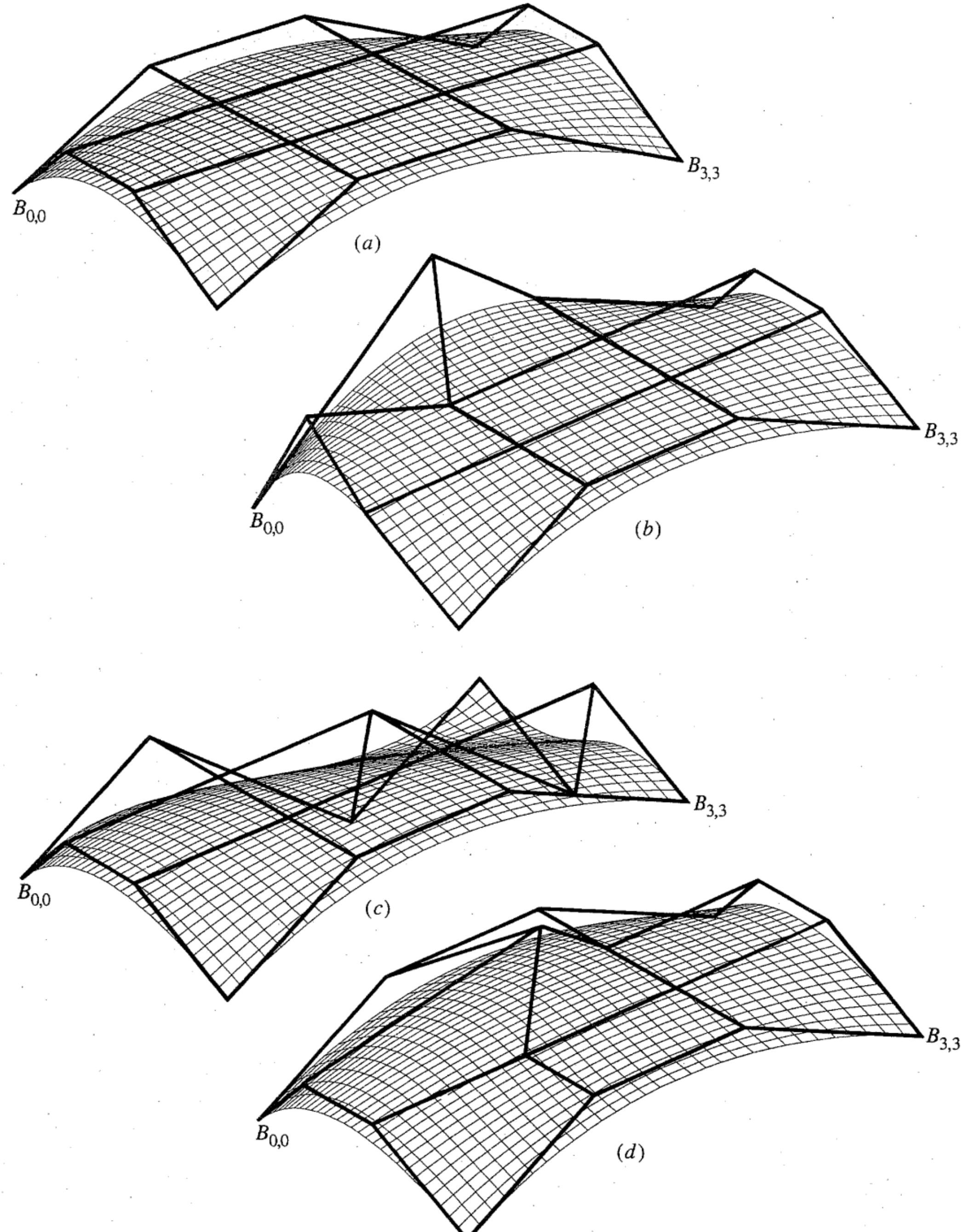
Kaydırma Yüzeyi :



(a) (b)

Bezier Yüzeyi :




$B_{0,0}$
$B_{3,3}$
(a)
$B_{0,0}$
$B_{3,3}$
(b)
$B_{0,0}$
$B_{3,3}$
(c)
$B_{0,0}$
$B_{3,3}$
(d)

$$Q(u,w) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(w)$$

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

$$K_{m,j}(w) = \binom{m}{j} w^j (1-w)^{m-j}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$$

$$Q(u,w) = [\,U\,][\,N\,][\,B\,][\,M\,]^T[\,W\,]$$

$$Q(u,w) = [\, u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1 \,] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

4x4
nokta
matrisi

$$\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^3 \\ w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(u,w) = [\, u^4 \quad u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1 \,] \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & -12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

5x3
nokta
matrisi

$$\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} \\ B_{4,0} & B_{4,1} & B_{4,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

B-Spline Yüzeyi :

$$Q(u,w) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)$$

$$N_{i,k}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \leq u < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i)N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u)N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

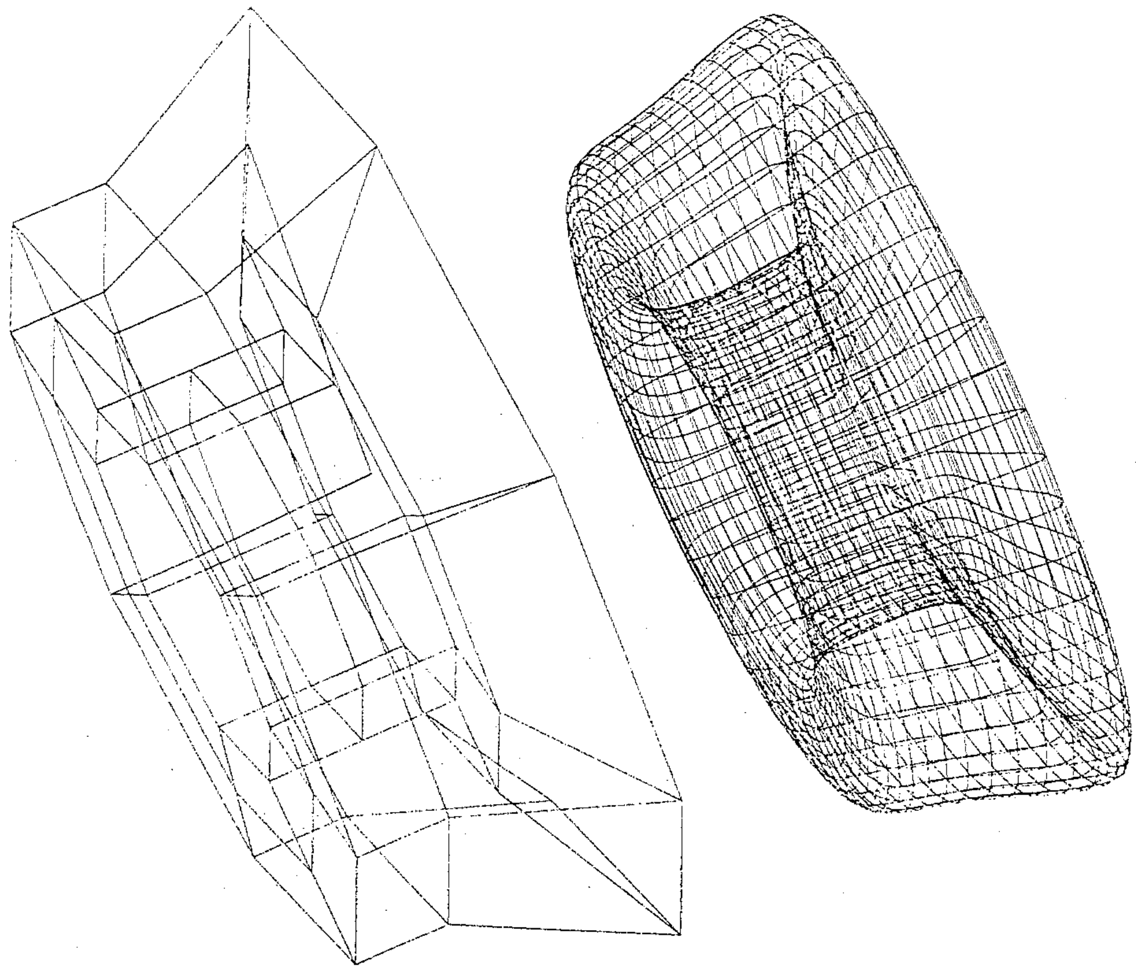
$$M_{j,l}(w) = \begin{cases} 1 & \text{if } y_j \leq w < y_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M_{j,l}(w) = \frac{(w - y_j)M_{j,l-1}(w)}{y_{j+l-1} - y_j} + \frac{(y_{j+l} - w)M_{j+1,l-1}(w)}{y_{j+l} - y_{j+1}}$$

$$x_i = 0 \qquad 1 \leq i \leq k$$

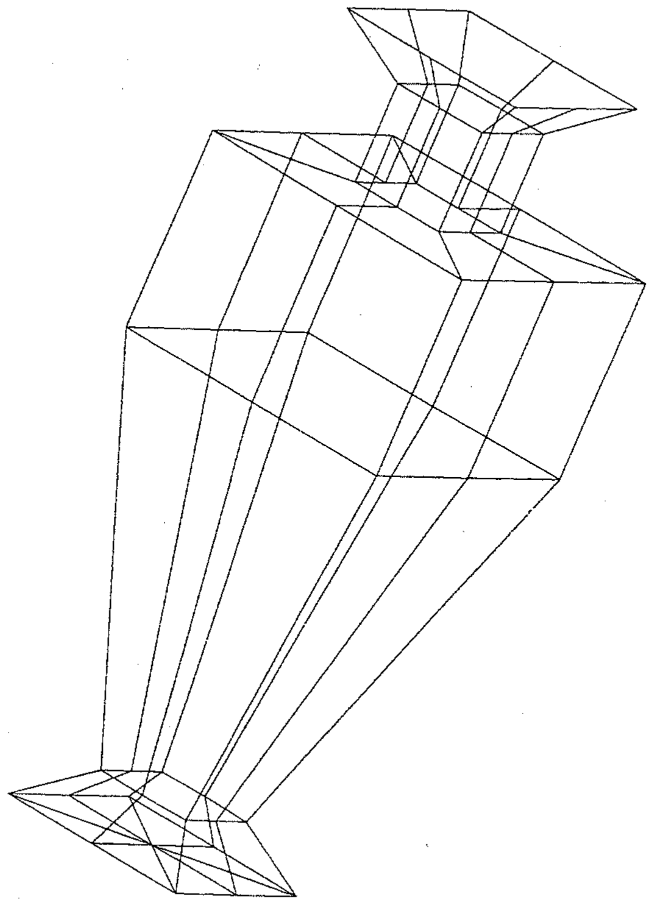
$$x_i = i - k \qquad k + 1 \leq i \leq n + 1$$

$$x_i = n - k + 2 \qquad n + 2 \leq i \leq n + k + 1$$

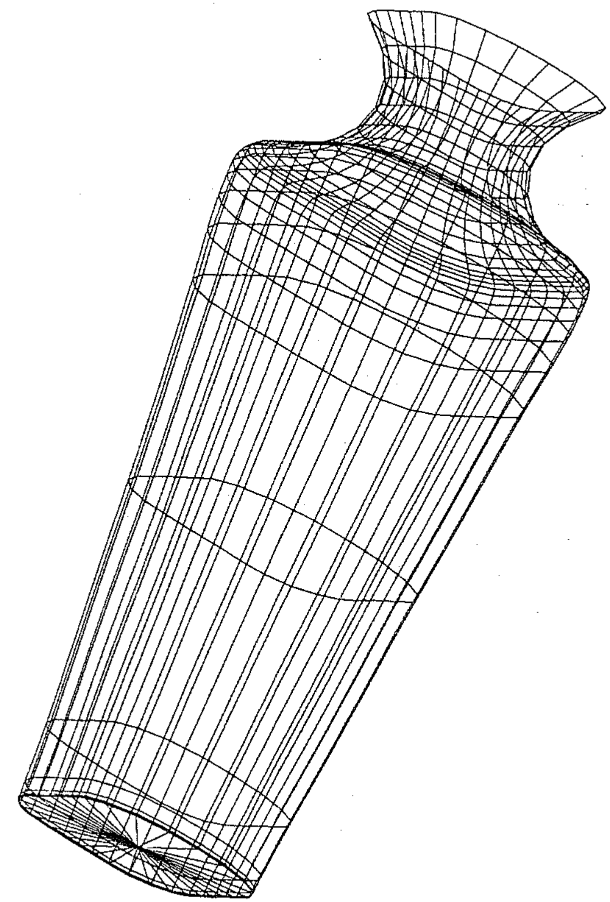


(a) (b)

(a)



(c)



(d)

Saklı Yüzey

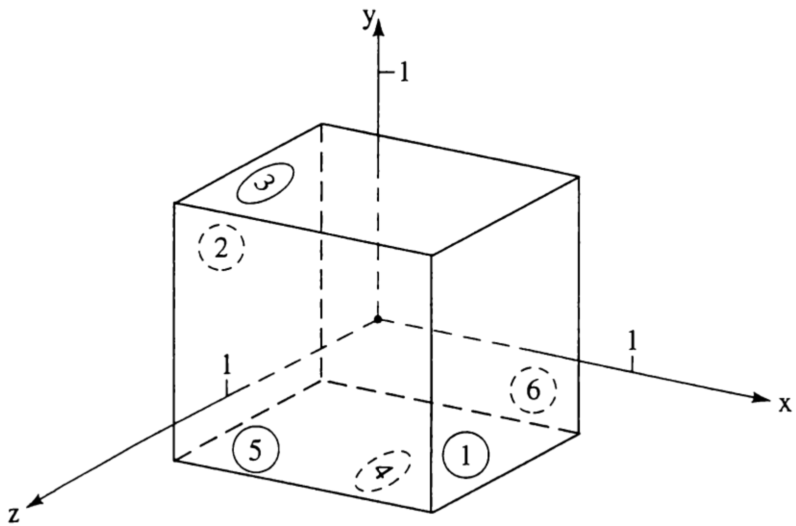
Roberts Algorithm

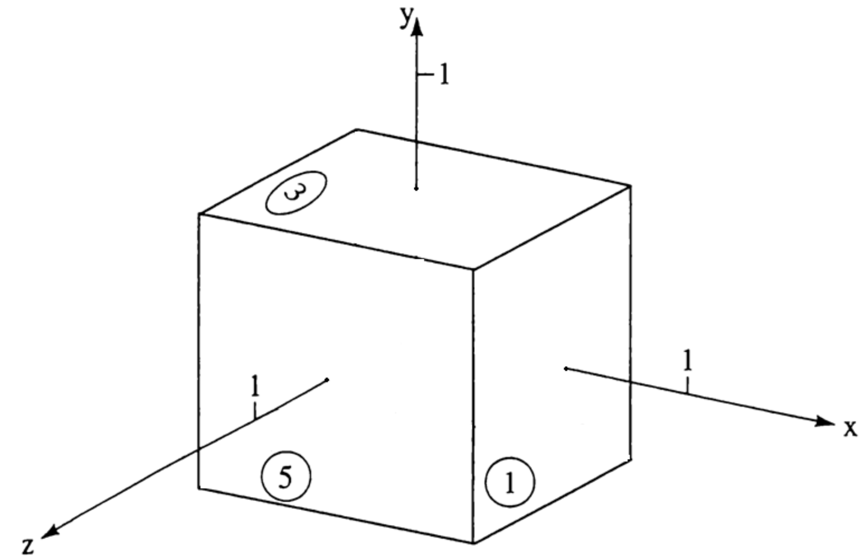
$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ b_1 & b_2 & & b_n \\ c_1 & c_2 & & c_n \\ d_1 & d_2 & & d_n \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$


y
1
3
2
1
1
6
x
5
4
1
z


y
1
3
1
1
x
5
1
z

$$[V] = \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \\ \end{array}$$
$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 4]$$

$$[S] \cdot [V] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 4] \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ [\,-2 \quad 6 \quad -2 \quad 6 \quad -2 \quad 6\,] \end{array}$$

$$[V] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[VT] = [T]^{-1}[V] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 4]$$

$$[S] \cdot [V] \geq 0.$$

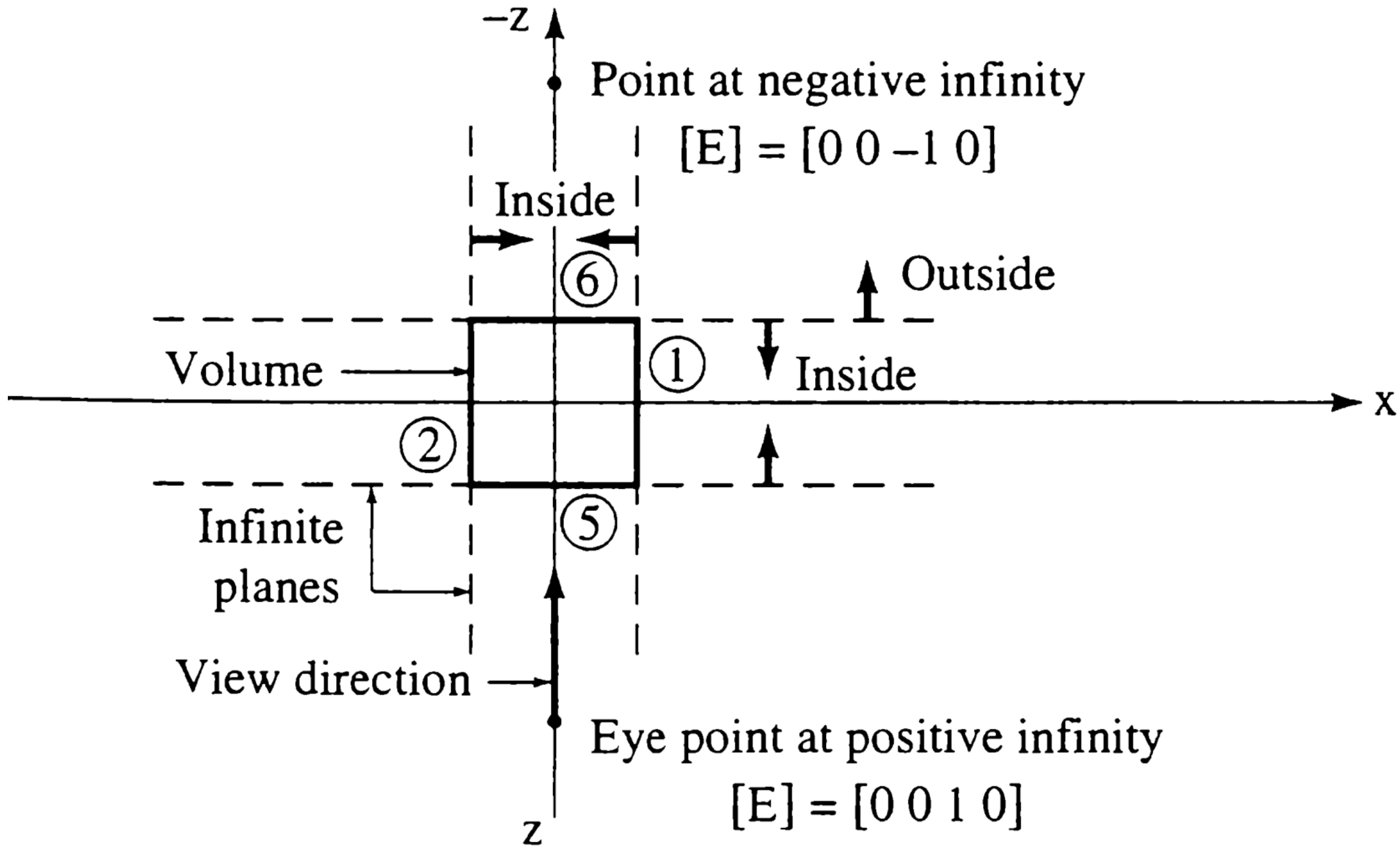
$$[ST] = [S][T] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 4][T] = [13 \quad 1 \quad 4] = \begin{bmatrix} 3\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ [ST] \cdot [VT] = & \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[E] = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$$

$$[E] \cdot [V] < 0$$

$$[E]\cdot[V] = [0\ \ 0\ \ -1\ \ 0]\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ -2]$$



–z
Point at negative infinity
[E] = [0 0 –1 0]
Inside
6
Outside
1
Volume
Inside
x
2
5
Infinite
planes
View direction
Eye point at positive infinity
[E] = [0 0 1 0]
z

Saklı Kenar

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{d}t$$

$$\mathbf{Q}(\alpha, t) = \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{g}\alpha = \mathbf{s} + \mathbf{d}t + \mathbf{g}\alpha \qquad 0 \le t \le 1, \ \ \alpha \ge 0$$

$$h = \mathbf{u} \cdot [VT] = \mathbf{s} \cdot [VT] + t\mathbf{d} \cdot [VT] + \alpha\mathbf{g} \cdot [VT] > 0 \qquad 0 \le t \le 1, \ \ \alpha \ge 0$$

$$p = \mathbf{s} \cdot [VT]$$

$$q = \mathbf{d} \cdot [VT]$$

$$w = \mathbf{g} \cdot [VT]$$

$$P_1 = [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$$

$$P_2 = [2 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$$

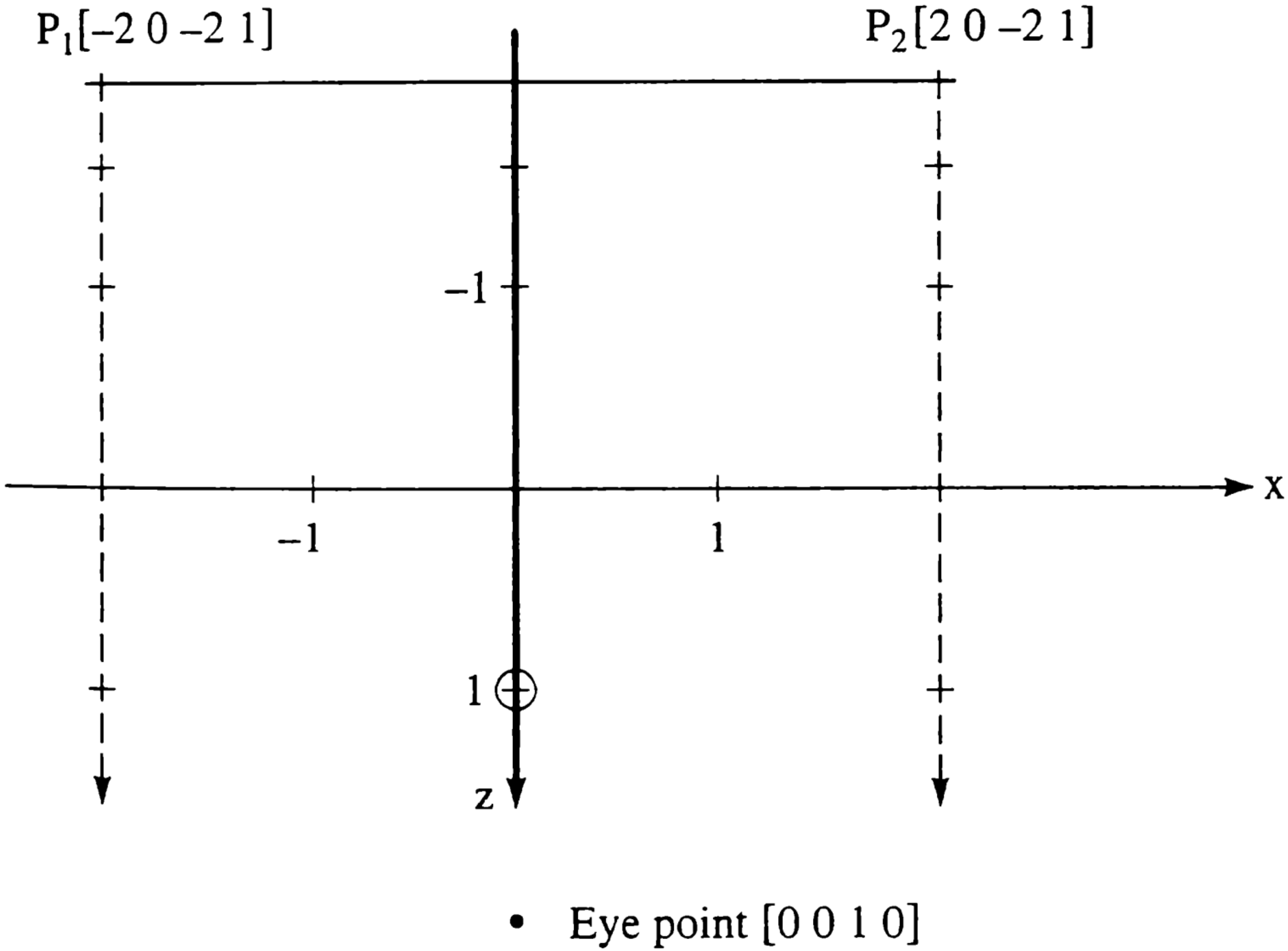
$$P(t) = \mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{d}\,t = [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1] + [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,t$$

$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\begin{aligned} Q(\alpha, t) = \mathbf{s} + \mathbf{d}\,t + \mathbf{g}\,\alpha &= [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1] \\ &\quad + [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,t + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\,\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{v} &= [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1] + [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= [0 \quad 0 \quad -2 \quad 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q\left(3, \frac{1}{2}\right) = \mathbf{v} + \mathbf{g}\,\alpha &= [0 \quad 0 \quad -2 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\,(3) \\ &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] \end{aligned}$$



P1[–2 0 –2 1]
P2[2 0 –2 1]
–1
–1
1
x
1
z
Eye point [0 0 1 0]

t	α	$\mathbf{v}(t)$	$Q(\alpha, t)$
0	0	$[-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$	$[-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$
	$1/2$		$[-2 \quad 0 \quad -3/2 \quad 1]$
	1		$[-2 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$
	2		$[-2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$
	3		$[-2 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$
$1/2$	0	$[0 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$	$[0 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$
	$1/2$		$[0 \quad 0 \quad -3/2 \quad 1]$
	1		$[0 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$
	2		$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$
	3		$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$
1	0	$[2 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$	$[2 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$
	$1/2$		$[2 \quad 0 \quad -3/2 \quad 1]$
	1		$[2 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$
	2		$[2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$
	3		$[2 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$

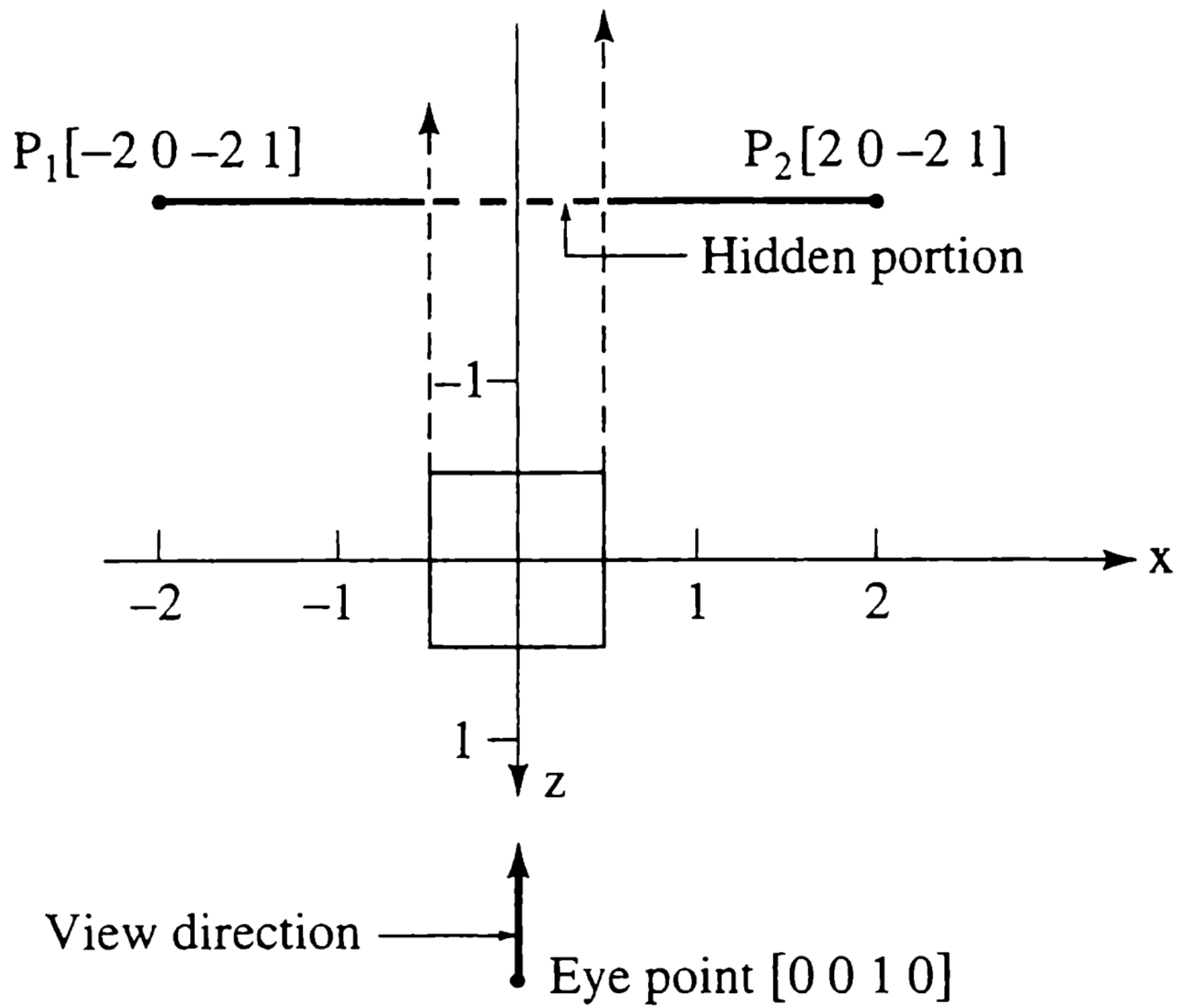
$$h = \mathbf{u}\cdot[VT] = \mathbf{s}\cdot[VT] + t\mathbf{d}\cdot[VT] + \alpha\mathbf{g}\cdot[VT] > 0 \qquad 0 \le t \le 1,\ \ \alpha \ge 0$$

$$p = \mathbf{s}\cdot[VT]$$

$$q = \mathbf{d}\cdot[VT]$$

$$w = \mathbf{g}\cdot[VT]$$

$$h_j = p_j + tq_j + \alpha w_j > 0 \qquad 0 \le t \le 1,\ \ \alpha \ge 0$$


P1[–2 0 –2 1]
P2[2 0 –2 1]
Hidden portion
–1
–2
–1
1
2
x
1
z
View direction
Eye point [0 0 1 0]

$$P(t) = \mathbf{v} = [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1] + [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\, t$$

$$\mathbf{s} = [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1]$$

$$\mathbf{d} = [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$[VT] = [V] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p = \mathbf{s} \cdot [VT] = [\;5 \quad -3 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \quad -3\;]$$

$$q = \mathbf{d} \cdot [VT] = [-8 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

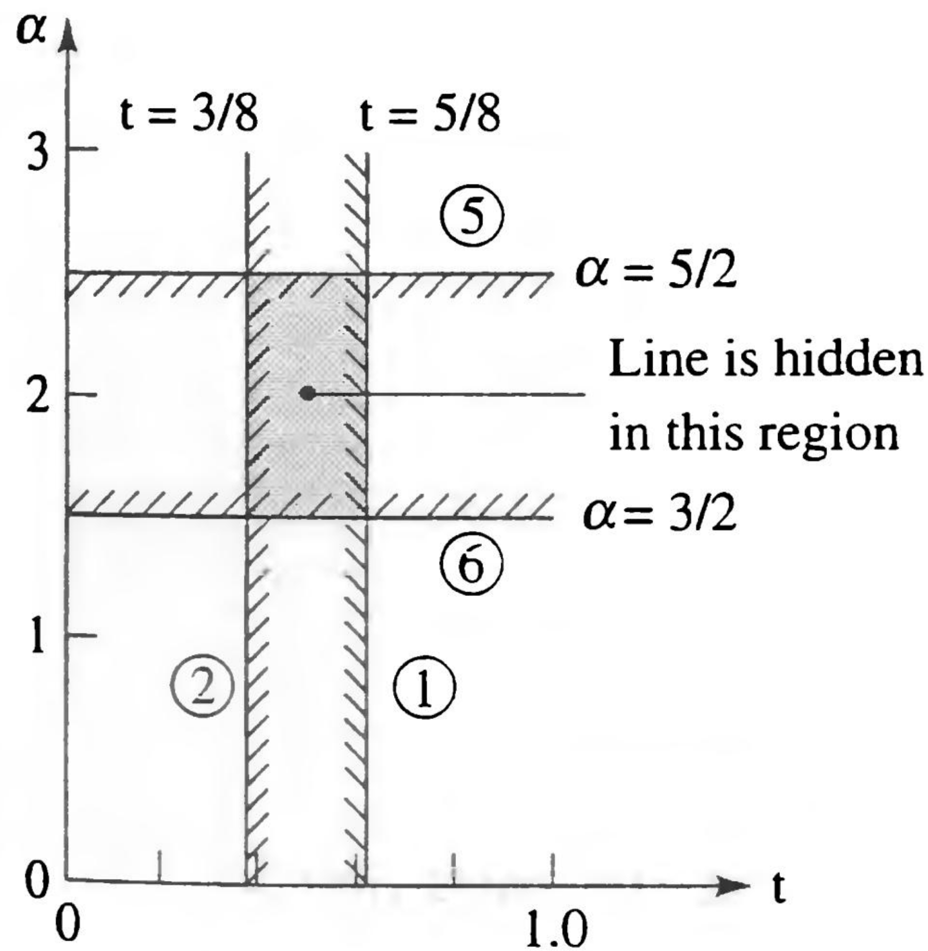
$$w = \mathbf{g} \cdot [VT] = [\;0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2\;]$$

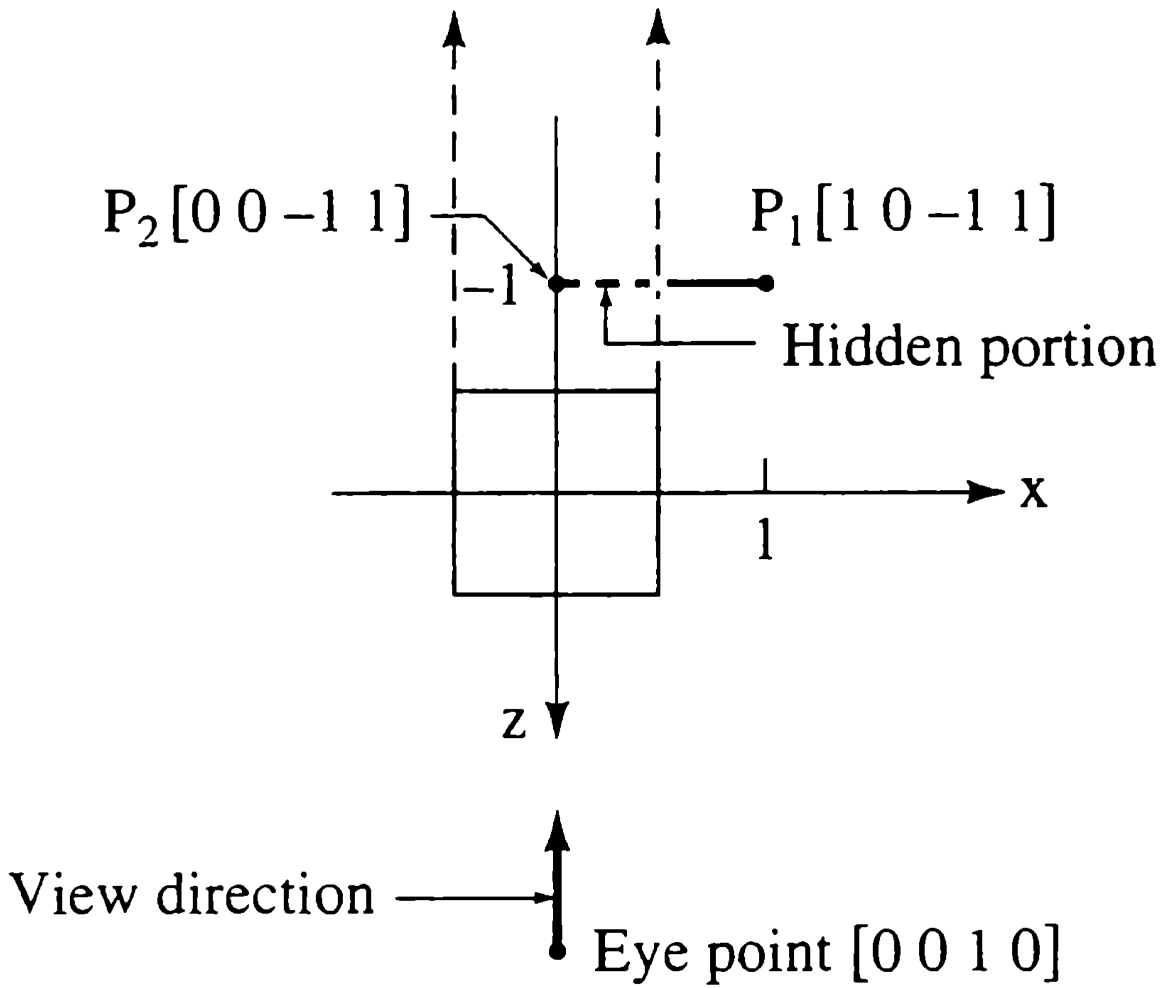
$$h_j = p_j + t q_j + \alpha w_j > 0$$

$$
\begin{array}{llrl}
① & 5-8t & & >0 \\
② & -3+8t & & >0 \\
③ & 1 & & >0 \\
④ & 1 & & >0 \\
⑤ & 5 & -2\alpha & >0 \\
⑥ & -3 & +2\alpha & >0
\end{array}
$$

$$
P\left(\frac{3}{8}\right) = [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1] + [4 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\left(\frac{3}{8}\right) = \left[-\frac{1}{2} \quad 0 \quad -2 \quad 1\right]
$$

$$
P\left(\frac{5}{8}\right) = [-2 \quad 0 \quad -2 \quad 1] + [4 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\left(\frac{5}{8}\right) = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad -2 \quad 1\right]
$$


α
t = 3/8
t = 5/8
3
5
α = 5/2
Line is hidden
in this region
2
α = 3/2
6
1
2
1
0
0
1.0
t



P2 [0 0 –1 1]
P1 [1 0 –1 1]
–1
Hidden portion
x
1
z
View direction
Eye point [0 0 1 0]

$$\mathbf{s} = [\ \ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$$

$$\mathbf{d} = [-1 \quad 0 \quad\ \ 0 \quad 0]$$

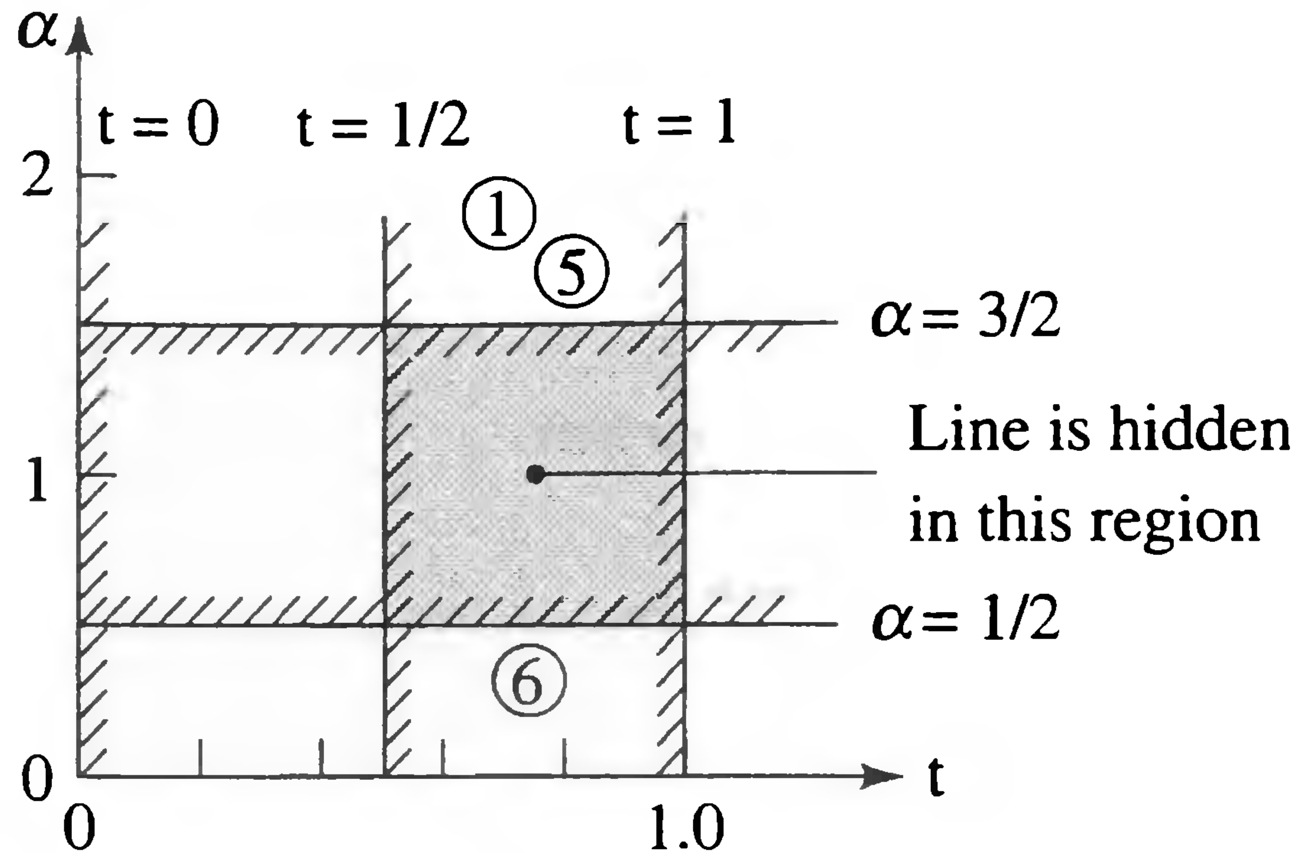
$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$p = \mathbf{s} \cdot [VT] = [-1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad -1]$$

$$q = \mathbf{d} \cdot [VT] = [\ \ 2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$w = \mathbf{g} \cdot [VT] = [\ \ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2]$$

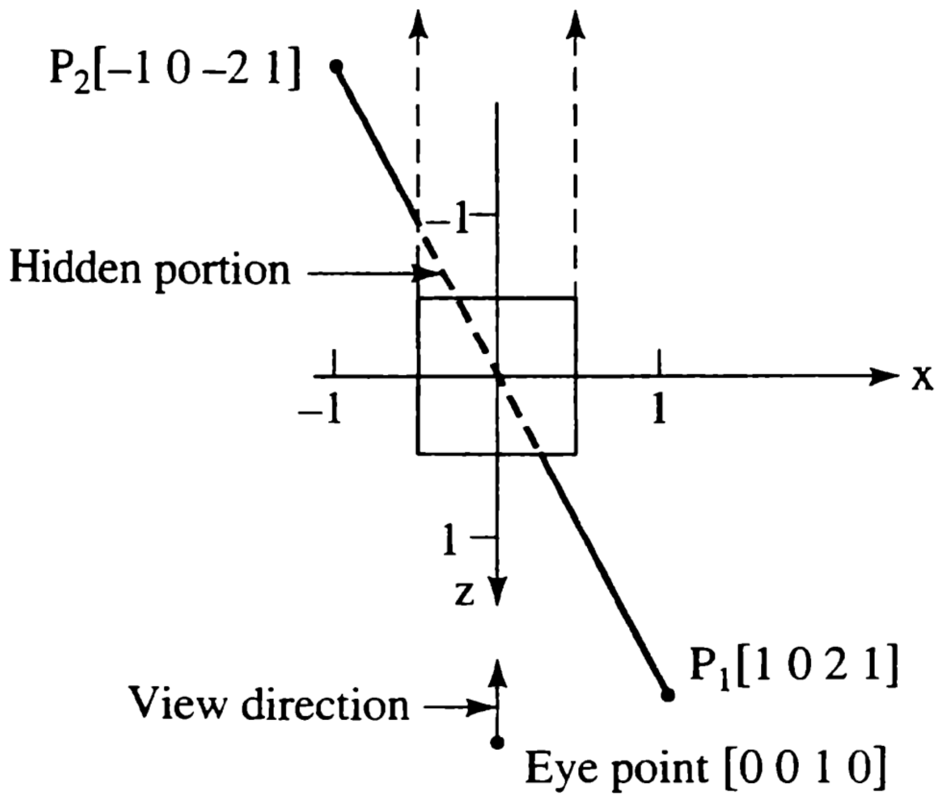
$$\begin{array}{clrl}
① & -1 + 2t & & > 0 \\
② & 3 - 2t & & > 0 \\
③ & 1 & & > 0 \\
④ & 1 & & > 0 \\
⑤ & 3 & - 2\alpha & > 0 \\
⑥ & -1 & + 2\alpha & > 0
\end{array}$$



α
t = 0
t = 1/2
t = 1
2
1
0
1
5
6
α = 3/2
Line is hidden
in this region
α = 1/2
0
1.0
t

$$P(0) = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 1] + [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,(0) = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 1] + [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad -1 \quad 1\right]$$



$$P(t) = \mathbf{v} = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 1] + [-2 \quad 0 \quad -4 \quad 0]\,t$$

$$\mathbf{s} = [\ 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1]$$

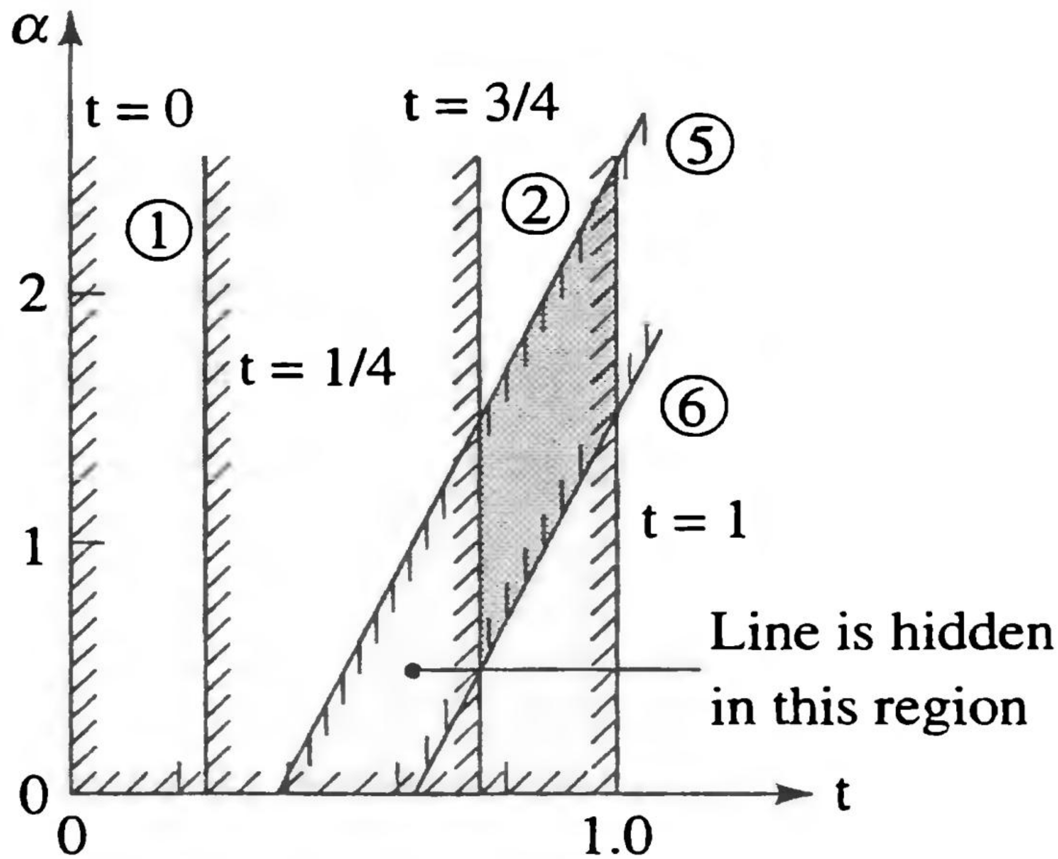
$$\mathbf{d} = [-2 \quad 0 \quad -4 \quad 0]$$

$$p = \mathbf{s}\cdot[VT] = [-1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad -3 \quad 5]$$

$$q = \mathbf{d}\cdot[VT] = [4 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \quad -8]$$

$$w = \mathbf{g}\cdot[VT] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2]$$

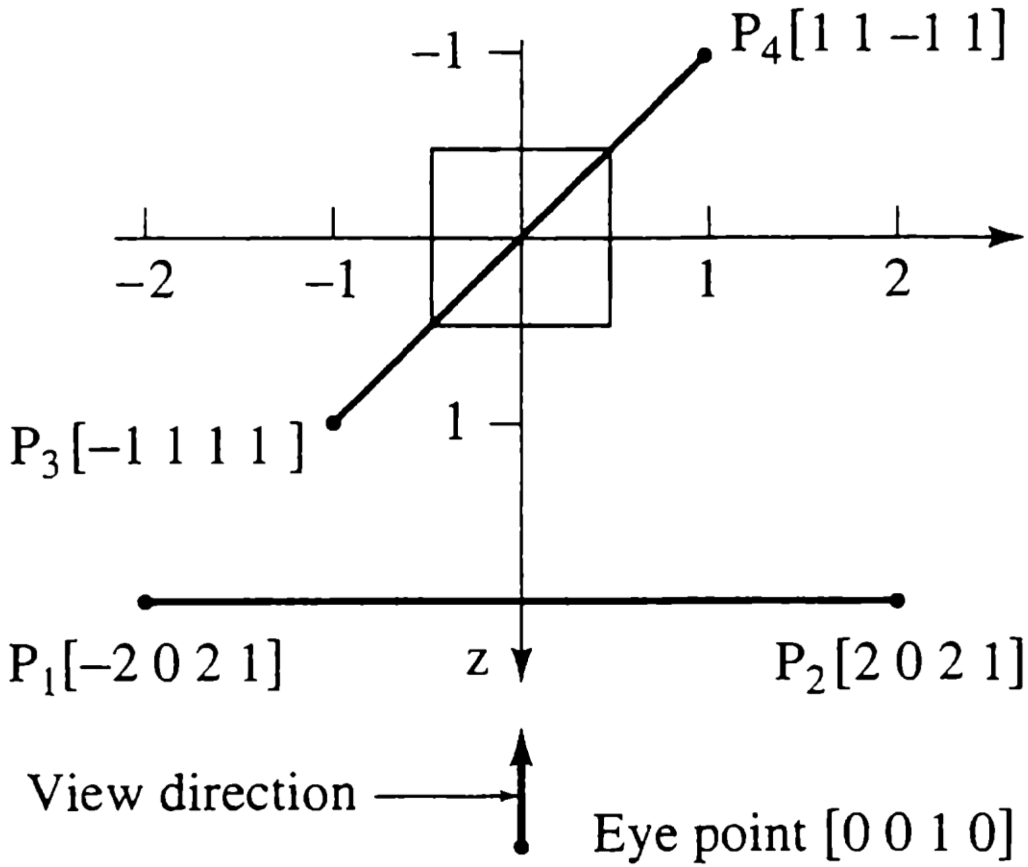
$$
\begin{aligned}
&① \ -1 + 4t && > 0 \\
&② \quad 3 - 4t && > 0 \\
&③ \quad 1 && > 0 \\
&④ \quad 1 && > 0 \\
&⑤ \ -3 + 8t - 2\alpha && > 0 \\
&⑥ \quad 5 - 8t + 2\alpha && > 0
\end{aligned}
$$


α
t = 0
t = 3/4
5
2
1
2
t = 1/4
6
1
t = 1
Line is hidden
in this region
0
t
0
1.0

$$0 \leq t \leq \frac{3}{8} \qquad \text{and} \qquad \frac{3}{4} \leq t \leq 1$$

$$P(0) = [\,1 \quad 0 \quad 2 \quad 1\,] \qquad \text{to} \qquad P\left(\frac{3}{8}\right) = \left[\,\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1\,\right]$$

$$P\left(\frac{5}{8}\right) = \left[\,-\frac{1}{4} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 1\,\right] \qquad \text{to} \qquad P(1) = [\,-1 \quad 0 \quad -2 \quad 1\,]$$


P4[1 1 −1 1]
−1
−2
−1
1
2
1
P3[−1 1 1 1]
P1[−2 0 2 1]
z
P2[2 0 2 1]
View direction
Eye point [0 0 1 0]

$$\mathbf{s} = [-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\mathbf{d} = [\ \ 2 \quad 0 \quad -2 \quad 0]$$

$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\begin{array}{lllcrrrrrr}
 & & & & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \\
p & = \mathbf{s} \cdot [VT] & = & [& 3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 3\ ] \\
q & = \mathbf{d} \cdot [VT] & = & [& -4 & 4 & 0 & 0 & 4 & -4\ ] \\
w & = \mathbf{g} \cdot [VT] & = & [& 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2\ ]
\end{array}$$

$w_5 < 0$ and $p_5 < 0$ but $p_5 + q_5 > 0$

$w_3 = 0$ and $p_3 < 0$ and $p_3 + q_3 < 0$

Tamamen görünür.

$$\mathbf{s} = [-2 \quad 0 \quad 2 \quad 1]$$

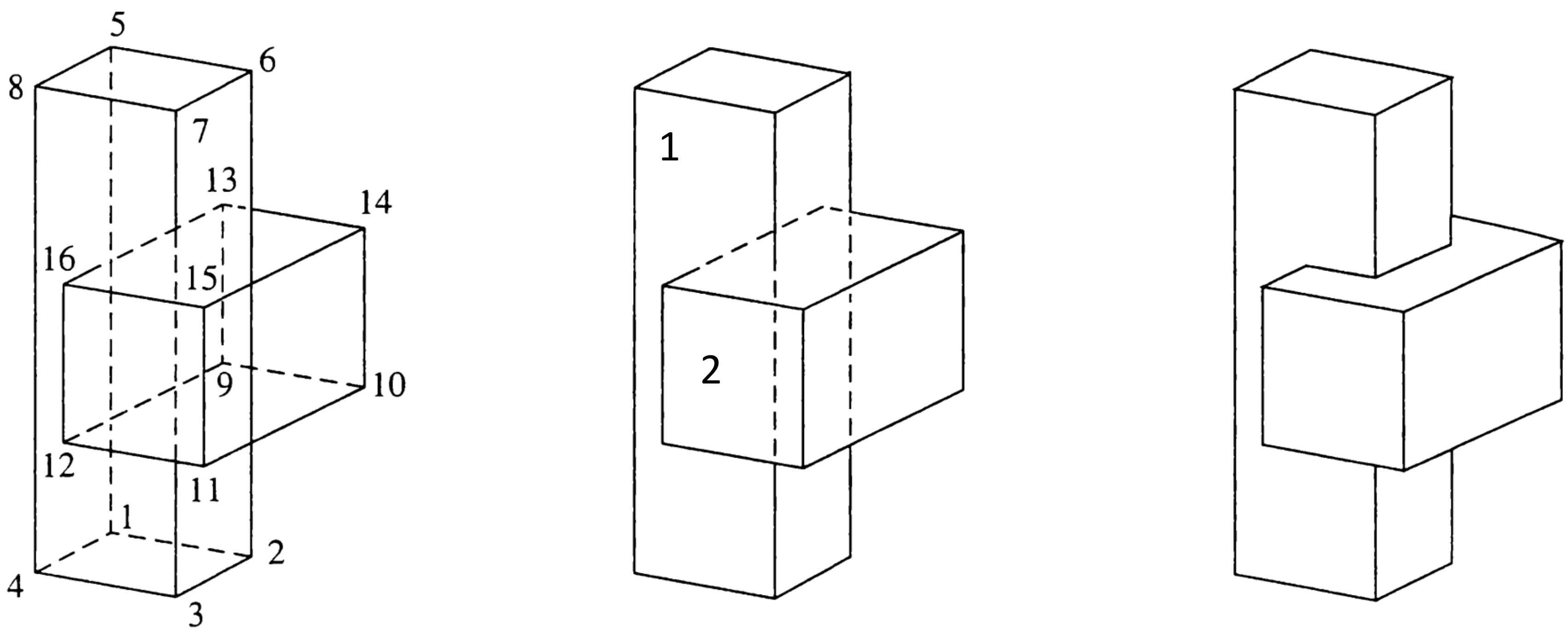
$$\mathbf{d} = [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\begin{array}{lllllllll} & & & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \\ p & = \mathbf{s}\cdot[VT] & = & [\ 5 & -3 & 1 & 1 & -3 & 5\ ] \\ q & = \mathbf{d}\cdot[VT] & = & [\ -8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0\ ] \\ w & = \mathbf{g}\cdot[VT] & = & [\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2\ ] \end{array}$$

$$w_5 < 0 \qquad \text{and} \qquad p_5 < 0 \qquad \text{and} \qquad p_5 + q_5 < 0$$

Tamamen görünür.



(a) (b) (c)

Nokta matrisleri :

Block 1			
Vertex number	x	y	z
1	0	0	1
2	2	0	1
3	2	0	3
4	0	0	3
5	0	6	1
6	2	6	1
7	2	6	3
8	0	6	3

Block 2			
Vertex number	x	y	z
9	1	2	0
10	3	2	0
11	3	2	4
12	1	2	4
13	1	4	0
14	3	4	0
15	3	4	4
16	1	4	4

Kenar Matrisleri :

Block 1	
Edge	Joins vertices
11	1–2
12	2–3
13	3–4
14	4–1
15	5–6
16	6–7
17	7–8
18	8–5
19	1–5
10	2–6
11	3–7
12	4–8

Block 2	
Edge	Joins vertices
13	19–10
14	10–11
15	11–12
16	12–19
17	13–14
18	14–15
19	15–16
20	16–13
21	19–13
22	10–14
23	11–15
24	12–16

Yüzey Matrisleri :

Block 1	
Polygon number	Edges
1	2, 11, 6, 10
2	4, 12, 8, 9
3	5, 6, 7, 8
4	1, 2, 3, 4
5	3, 12, 7, 11
6	1, 10, 5, 9

Block 2	
Polygon number	Edges
7	14, 23, 18, 22
8	21, 20, 24, 16
9	17, 18, 19, 20
10	13, 14, 15, 16
11	15, 24, 19, 23
12	13, 22, 17, 21