2D de Tüm nesne üzerinde Ölçekleme

Eğer p [x, y] satır vektör ise $T = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & \boxed{s} \end{pmatrix}$ ya da

eğer $p \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sütun vektör ise $T = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & \boxed{s} \end{pmatrix}$

m, x yönünde yer değiştirme ; n y yönünde yer değiştirme; a, b, c, d ölçeklendirme, meyillendirme, yansıtma, döndürmenin koordinatları ; p, q cismin / noktanın homojen koordinatlardaki koordinat düzlemi ya da onu simgeleyen düzlem.

Örnek (Tüm nesne üzerinde ölçekleme): P(1,2) ve Q(−1,1) noktalarından oluşan doğruyu 3 birim ölçekleyin.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2D de Ters Dönüşümler

Ölçekleme: $T^{-1}(s_x, s_y) = T\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right)$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ötelene (yer değiştirme): $T^{-1}(t_x, t_y) = T(-t_x, -t_y)$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Döndürme: $T^{-1}(\theta) = T(-\theta)$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

Dönüşüm Sırası: p, sütun matris olsun. M_1, M_2, M_3, M_4 dönüşüm matrisleri olsun.

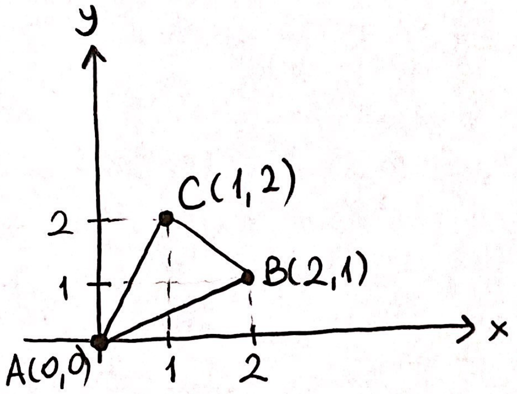
$$p^* = M_4 . M_3 . M_2 . M_1 . p = \left(M_4\left(M_3\left(M_2\,(M_1 p)\right)\right)\right)$$

M_1 matrisi ilk uygulacak olan matris

Yukarıdaki eşitliğin transpozesi alınacak olursa;

$$p^{*T} = p^T . M_1^T . M_2^T . M_3^T . M_4^T$$

Örnek: A(0,0) , B(2,1) , C(1,2) noktalarından oluşan bir üçgen veriliyor. Cismi (üçgeni) B noktasına göre x ve y yönlerinde 2 birim ölçekleyin.



<u>1. adım:</u> B noktasına göre dediği için B noktası orijine taşınır. (T_1)

<u>2. adım:</u> Belirtilen ölçekleme yapılır. (T_2)

<u>3. adım:</u> B'yi eski yerine (ilk koordinatlarına) taşırız. (T_3)

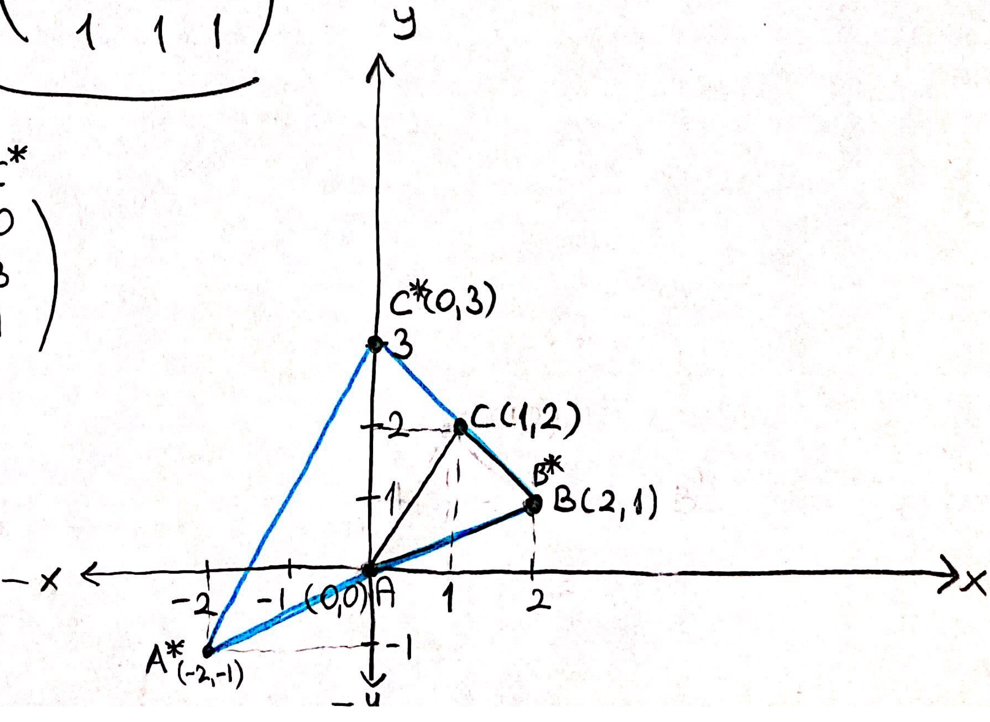
matris çarpım yönü ←

$$
\begin{array}{cccc}
T_3 & T_2 & T_1 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot &
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot &
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot &
\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot
\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot
\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} A^* & B^* & C^* \end{array} \\
\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



2. çözüm: Tüm nesne üzerinde ölçekleme yapılabilir. Çünkü $m=n=2$, x ve y yönünde aynı ölçekleme yapılması istenmiş.

$$\underset{T_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{T_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{T_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

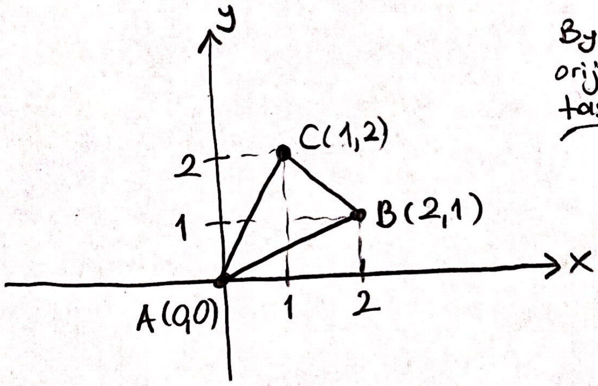
$\delta = \frac{1}{2}$ alınır

$\longleftarrow$ matris çarpım yönü

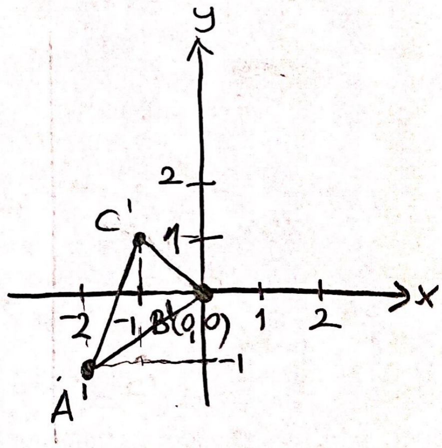
B noktasına göre ölçekleme dediği için B değişmeyecek. Çünkü B ye göre hesaplarken önce B yi orijine taşırız. Böylece B nin koordinatları (0,0) olur. Ölçekleyip eski haline alınca tekrar (2,1) olacak yani son durumda B nin koordinatları değişmemiş olacak.

1. adım : B noktası orijini taşınır. (T_1)

$$\underset{T_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} A' & B' & C' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

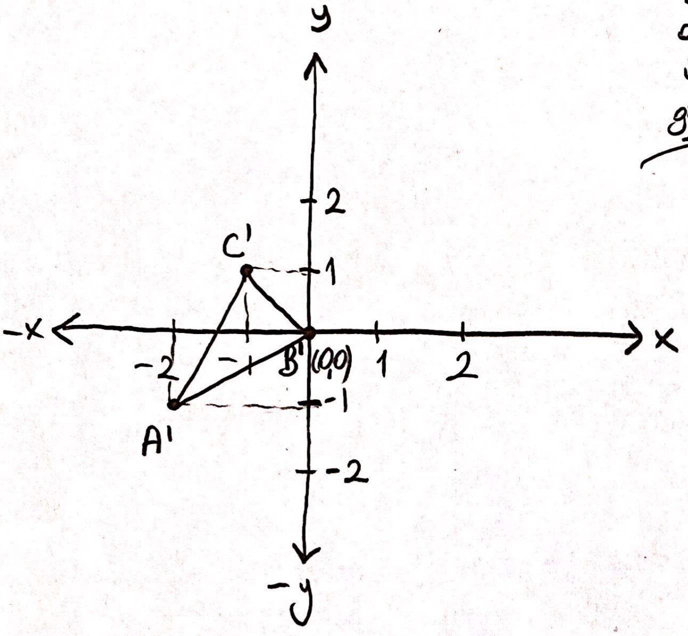


B'yi orijine taşı

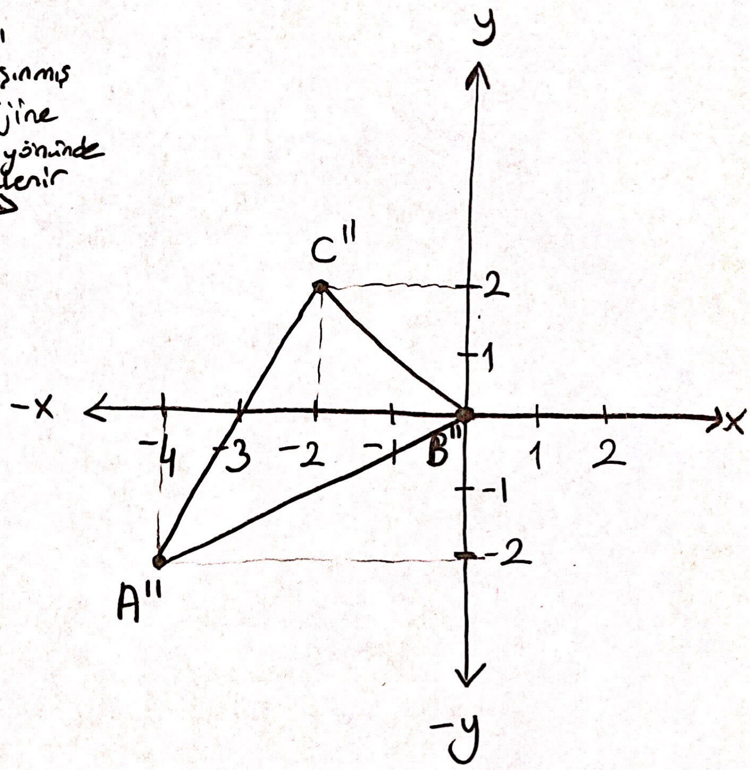


2. adım: Orijine göre x ve y yönünde 2 birim ölçekleyin. (T_2)

$$\underset{T_2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} \begin{matrix} A' & B' & C' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} A'' & B'' & C'' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

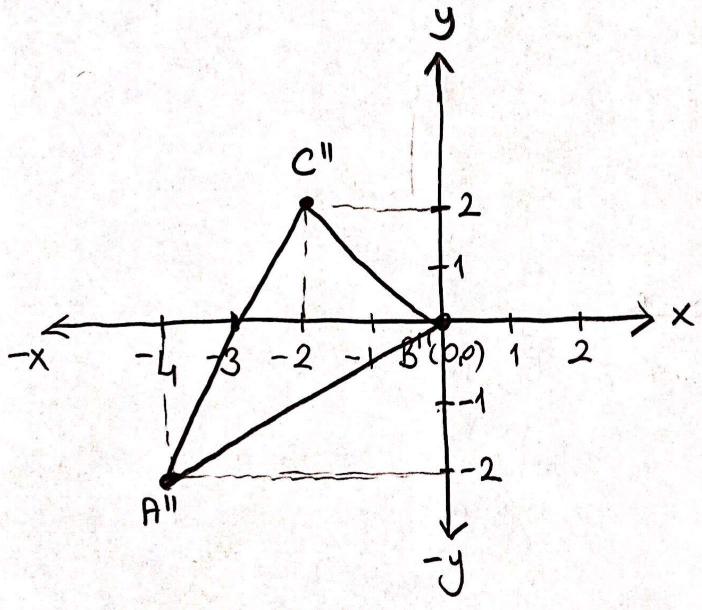


B noktası orijine taşınmış üçgen orijine göre x ve y yönünde 2br ölçeklenir

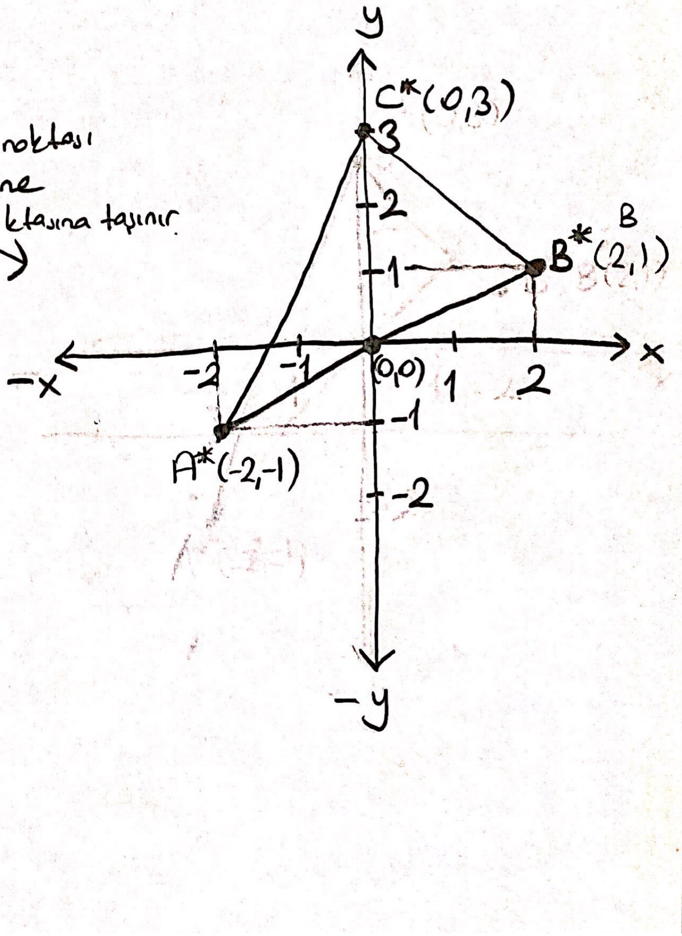


3. adım: Orijindeki B noktası eski yerine (ilk koordinatlarına) taşınır. (T_3) (B'' noktası)

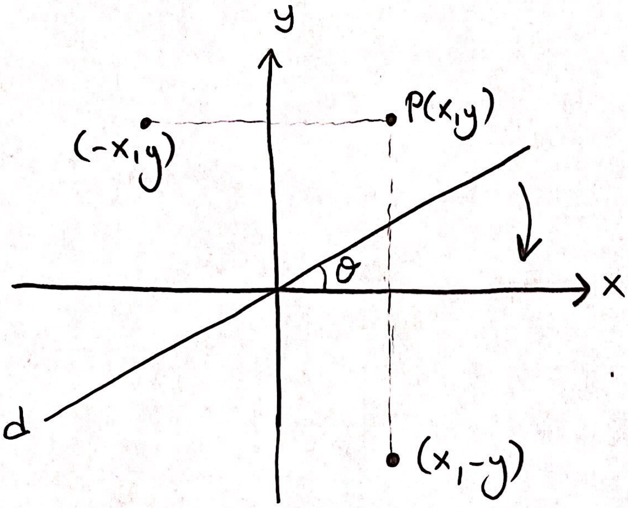
$$
\underset{T_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A'' & B'' & C'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A^* & B^* & C^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$



B''(0,0) noktası eski yerine (2,1) noktasına taşınır



Bir p noktasının orijinden geçen doğruya (eksene) göre yansıtılması



1. Adım: d doğrusu x ekseni ile çakıştırılır. Saat yönünde (negatif yönde) θ açısı kadar döndürülür. x ekseni ile çakıştırmak için döndürme yapıyoruz.

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

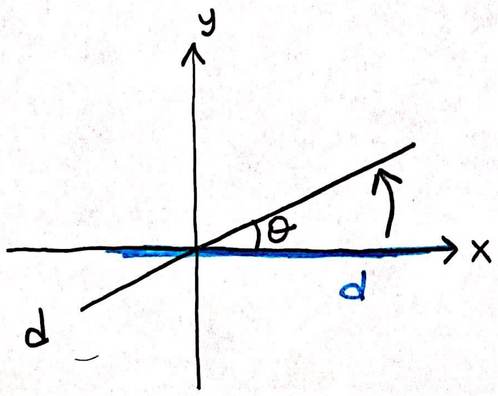
$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

x'e göre yansıtma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

y'ye göre yansıtma: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

2. Adım: x eksenine göre yansıtma için $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Adım: d doğrusu eski yerine taşınır.



Saat yönünün tersi yönünde (pozitif yönde) θ açısı kadar döndürülür.

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$T_3 . T_2 . T_1 . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

$$T_3 . T_2 . T_1 . P = P^*$$

Örnek: $P(1,2)$ noktasının x ekseni ile $45°$ lik açı yapan bir d doğrusuna göre yansıtılmasından sonra oluşacak yeni noktanın koordinatlarını bulunuz.

T_1: d doğrusu x ile çakıştırılır. Saat yönünde $45°$ döndürülür.

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos(-45) & -\sin(-45) \\ \sin(-45) & \cos(-45) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

T_2: x eksenine göre yansıtma yapılır: $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

T_3: d doğrusu eski yerine taşınır. Saat yönünün tersi yönünde $45°$ döndürülür.

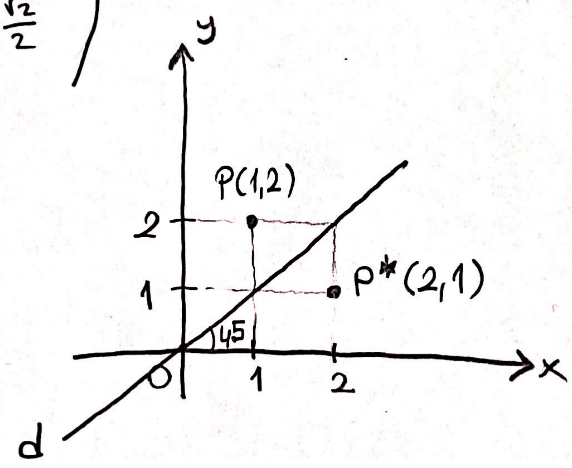
$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Öyleyse;

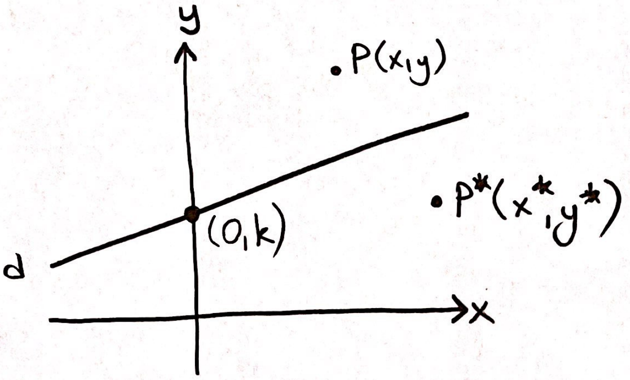
$$\overset{p^*}{\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}} = \overset{T_3}{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\overset{T_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\overset{T_1}{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}} \cdot \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}_{= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}}_{= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



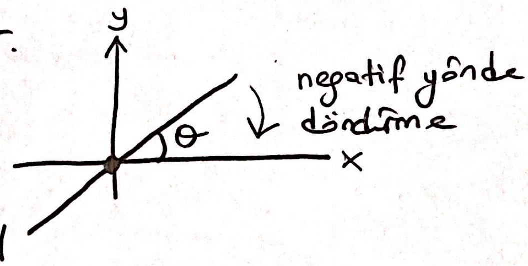
Bir p noktasını herhangi bir doğruya (eksene) göre yansıtma



1. Adım: d doğrusu orijine taşınır.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

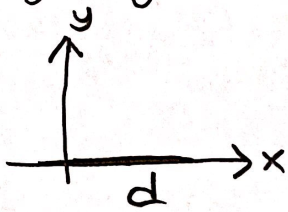
2. Adım: d doğrusu x ekseni ile çakıştırılır.



$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Adım: P noktası x eksenine göre yansıtılır.

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

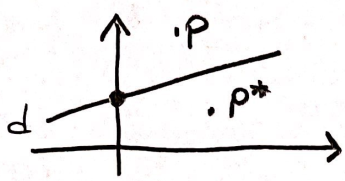


4. Adım: d doğrusu θ açısı kadar pozitif yönde döndürülür.

$$T_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Adım: d doğrusu k birim kadar eski yerine taşınır (ötelenir).

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

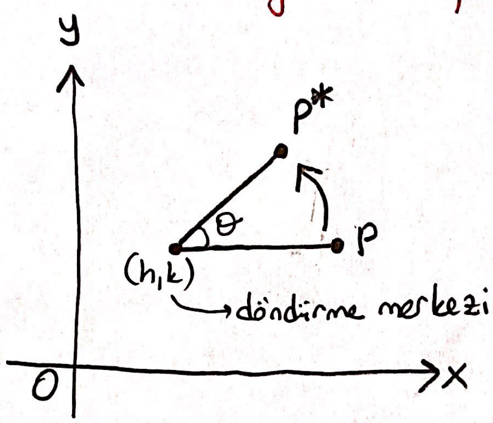


$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{pmatrix} = T_5 . T_4 . T_3 . T_2 . T_1 . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

yer değiştirme olduğu için durum vektörü böyle yazılır.

$$P^* = T_5 . T_4 . T_3 . T_2 . T_1 . P$$

Herhangi bir p noktasına göre döndürme



Döndürme yapılan cisim OPR olabilir.
PQR olabilir.
ABC olabilir.

Önemli olan neye göre döndürme yapacağımız.

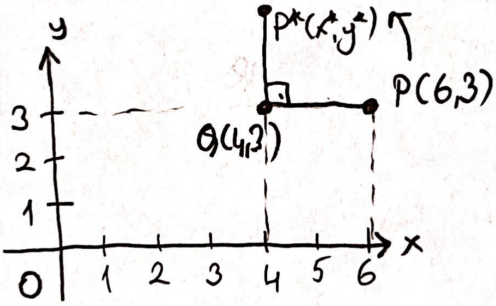
1. Adım: Döndürme merkezi orijine taşınır. (T_1)

2. Adım: θ açısı kadar pozitif yönde (saat yönünün tersi) döndürme yapılır. (T_2)

3. Adım: Döndürme merkezi eski haline getirilir. (T_3)

$$T_3 . T_2 . T_1 . \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \\ y_1^* & y_2^* & y_3^* \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Örnek: P(6,3) noktasının Q(4,3) noktasına göre 90° döndürülmesi sonunda p^* noktasının koordinatlarını bulunuz.



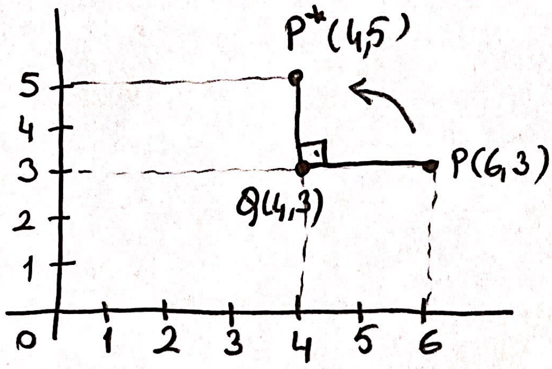
$$\underset{T_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} . \underset{T_2}{\begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} . \underbrace{\underset{T_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} . \begin{array}{cc} P & Q \\ \left(\begin{matrix} 6 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right) & \end{array}}_{=} = \begin{array}{cc} p^* & Q \\ \left(\begin{matrix} x^* & x \\ y^* & y \\ 1 & 1 \end{matrix}\right) & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} p^* & Q \\ \left(\begin{matrix} 4 & 4 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right) & \end{array}$$

P (6,3) noktası Q (4,3) noktasına göre 90° döndürüldüğünde

P* (4,5) noktası elde edilir.



Örnek: A (3,1) bir nokta ve $T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ dönüşümü olsun.

A noktasına T dönüşümü uygulandıktan sonraki A^* noktasının koordinatlarını bulunuz. (Homojen koordinatlara örnek)

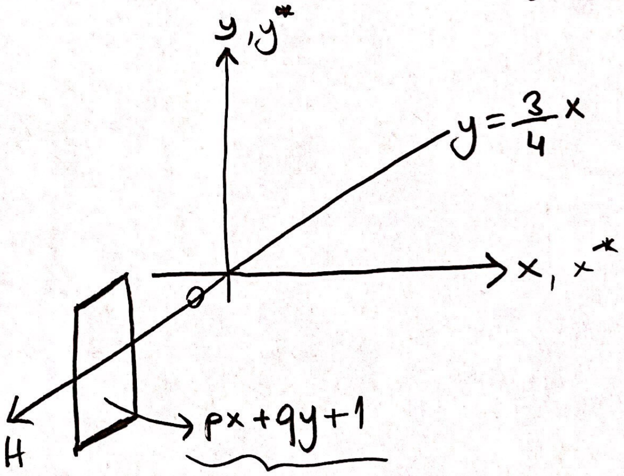
$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ H \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{14}{11} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \\ 1 \end{pmatrix}$$

H yi 1 yapmamız gerek.
X ve Y yi $-\frac{11}{2}$ ye böldük.

$A^*\left(\frac{2}{11}, -\frac{14}{11}\right)$ noktasının homojen koordinat sistemindeki $\begin{pmatrix} X \\ y \\ H \end{pmatrix}$ simgelenişlerinden biri $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$ dir. $A^*(x^*, y^*)$ noktasının homojen koordinat sisteminde sonsuz simgelenişi vardır. Örneğin; $\begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ -11 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 11 \end{pmatrix}$ bu simgelenişlerden iki tanesidir.

Homojen koordinat sistemlerinde $H=0$ ise $ay-bx=0$ doğrusu sonsuzda bir nokta gösterir.



düzlemde x, y sabit alarak H sonsuz değeri ile sonsuz nokta yazabilirim.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

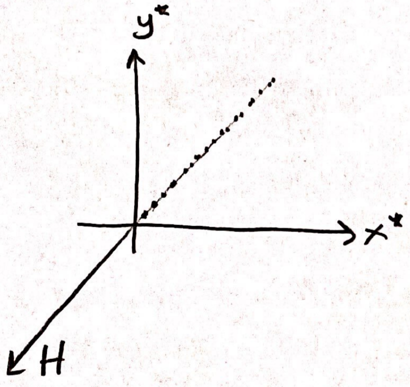
$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1/200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 600 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1/2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 1 \end{bmatrix}$$

(*) $H=0$ düzlemini gösteremeyiz o sonsuzda bir noktadır.



3D de Dönüşümler

Ölçekleme: $T = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Yer değiştirme (öteleme): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Döndürme: Her dönme, 3 eksen etrafında 3 farklı saat yönünün tersine dönüş açısının bileşimi olarak temsil edilebilir, yani

yz düzleminde x ekseni Ψ açısı kadar,
xz düzleminde y ekseni θ açısı kadar,
xy düzleminde z ekseni ϕ açısı kadar

$R_x: R_{yz}(\Psi)$: x eksenine göre Ψ açısı kadar döndürme matrisi: $\begin{array}{c} \begin{matrix} X & Y & Z & H \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ 0 & \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

(x sabit kalır, y ve z değişir)

$R_y: R_{zx}(\theta)$: y eksenine göre θ açısı kadar döndürme: $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_z: R_{xy}(\phi)$: z eksenine göre ϕ açısı kadar döndürme: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(!) Döndürme eksenlere göre yapılır. Döndürme yapmadan önce mutlaka cisim orijine taşınmalıdır.

3D de Dönüşümlerin Tersi

(Dönüşüm Matrislerinin Tersi)

Ölçekleme: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

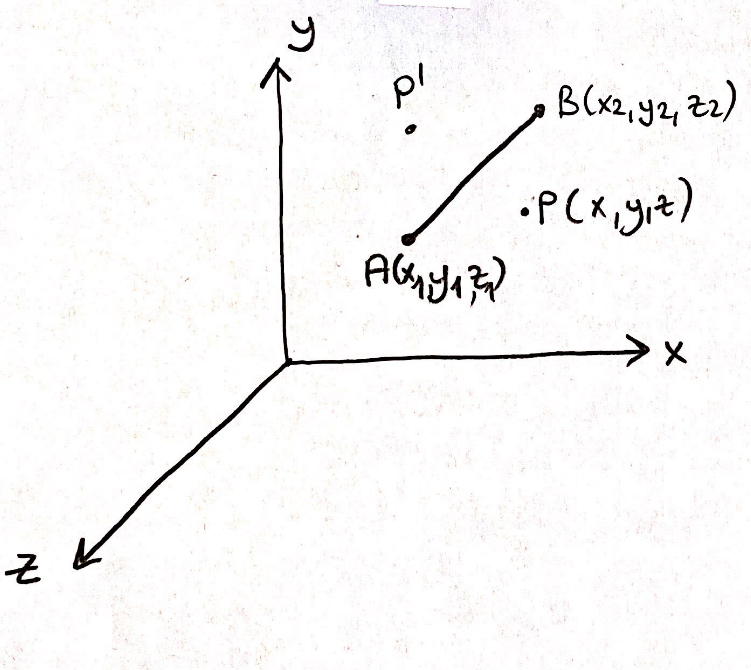
Öteleme: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Döndürme: x eksenine göre : $R_{yz}^{-1}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ 0 & -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y eksenine göre : $R_{zx}^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

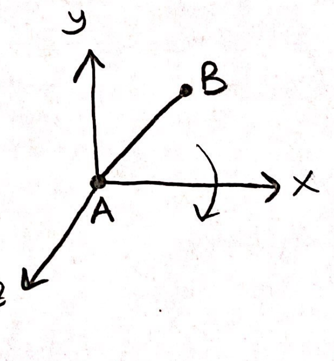
z eksenine göre $R_{xy}^{-1}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3D de Keyfi Bir Eksen Etrafında Döndürme



1. Adım: A noktası orijine taşınır.

$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



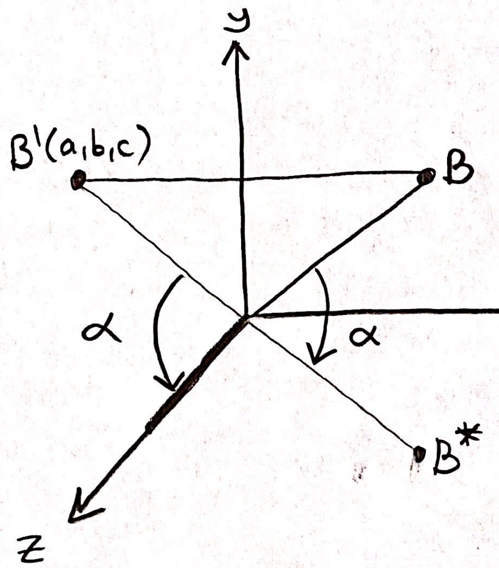
AB doğrusunun z eksenine izdüşümünü alalım. Daha sonra cisim (p noktası) istenilen açı kadar (30°) z ekseni etrafında döndürülür.

AB nin z üzerine izdüşümü 2 adımda gerçekleşir:

- AB doğrusunu x ekseni etrafında α kadar döndürme (negatif yönde) sonucunda yz düzlemine izdüşürülmeli.

• α açısı kadar negatif yönde dönen, elde edilen, doğruyu y ekseni etrafında öyle bir β açısı kadar döndürelim ki doğru z ekseni ile çakışsın.

2. Adım:

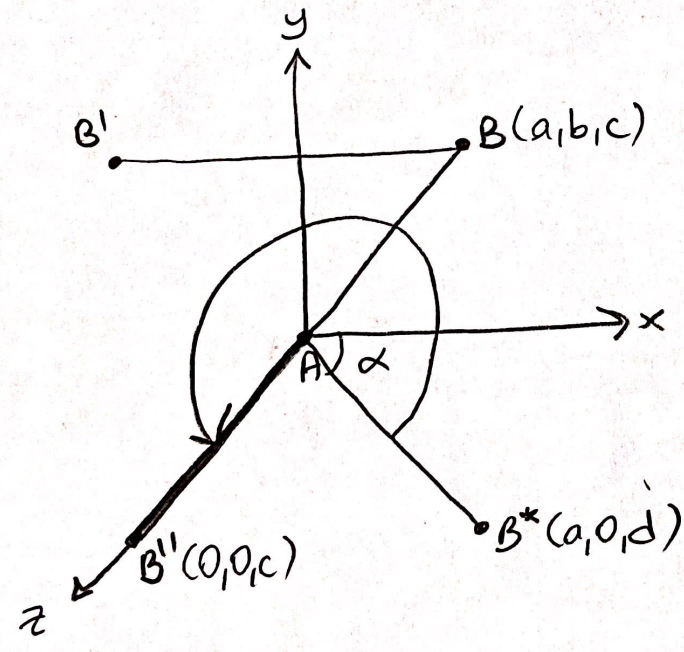


B noktası α açısı kadar x eksenine göre negatif yönde döndürülür. Böylece B noktası yz düzlemine izdüşürülmüş olur.

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{d} & \frac{b}{d} & 0 \\ 0 & \frac{-b}{d} & \frac{c}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(–) yönde döndürdüğümüz için – oldu.

3. Adım: B^* noktası y ekseni etrafında β açısı kadar döndürülerek doğrunun z ekseni ile çakışması sağlanır. Böylece AB doğrusu (yz düzlemindeki B' noktası z ekseni üzerine gelir (B'')) AB'' olur.



$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{d}{\ell} & 0 & -\frac{a}{d} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-a}{\ell} & 0 & \frac{d}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Adım: AB doğrusu z ekseni ile çakıştı. Z ye göre 30° döndürme yapılır.

$$T_4 = \begin{pmatrix} \cos 30 & -\sin 30 & 0 & 0 \\ \sin 30 & \cos 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Adım: y eksenine göre + yönde β açısı kadar döndürme

6. Adım: x eksenine göre + yönde α açısı kadar döndürme

7. Adım: AB doğrusu (ekseni) eskı yerine taşınır.

izdüşümler bu sütunda

Not: $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

perspektif satırı