سیگنال ها و سیستم ها

درس چهارم

موضوعات این جلسه

- نمایی‌های مختلط به عنوان توابع ویژه سیستم‌های LTI
- بیان سری فوریه برای سیگنال‌های پریودیک CT
- چگونه ضرایب فوریه را محاسبه کنیم؟
- همگرایی و پدیده‌ی گیبس (Gibbs)

مقدمه

- جین باتیس جوزف فوریه در سال ۱۷۶۸ در فرانسه بدنیا آمد.
- فوریه در کتاب خود که بعدها توسط فریمن به انگلیسی ترجمه شد، نشان داد که هر تابع متناوبی می‌تواند با استفاده از مجموع توابع سینوسوئید بیان شود.
- برای توابع غیرپریودیک نیز در حالت خاص می‌توان از سینوسوئیدها برای بیان آن استفاده کرد


Jean B. Joseph Fourier
(1768-1830)

ویژگی های مناسب یک مجموعه تابع پایه

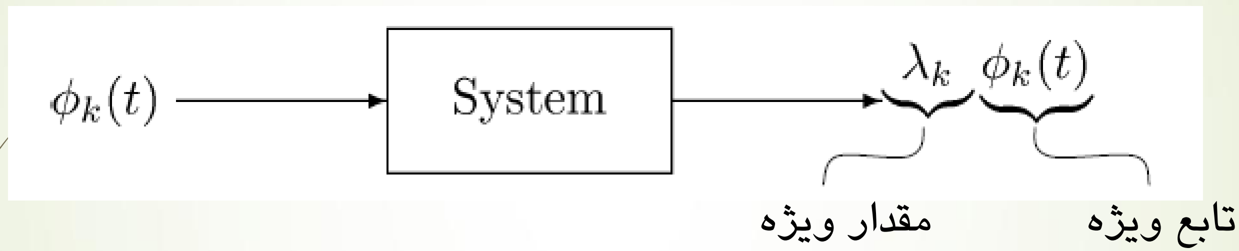
- تعداد زیادی از سیگنال‌های مفید بتوانند توسط این توابع پایه بیان شوند
- پاسخ سیستم‌های LTI به این توابع پایه نسبتا ساده، مفید و قابل فهم باشد

تمرکز قبلی: توابع نمونه و ضربه واحد

تمرکز فعلی: توابع ویژه‌ی سیستم‌های LTI

توابع ویژه ی $\phi_k(t)$ و خواص آن

- ابتدا تمرکز خود را بر روی سیستم‌های CT قرار می‌دهیم، اما نتایج قابل اعمال به سیستم‌های DT نیز هست



خروجی همان تابع ولی با یک گین ← ورودی تابع ویژه

- بر اساس خاصیت جمع آثار سیستم‌های LTI

- بدین ترتیب، مساله‌ی یافتن پاسخ سیستم LTI، تعیین مقادیر λ_k است

نمایی های مختلط به عنوان توابع پایه هر سیستم LTI

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} \\ &= \underbrace{H(s)}_{\text{مقدار ویژه}} \; \underbrace{e^{st}}_{\text{تابع ویژه}} \end{aligned}$$

$$x[n] = z^{n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m} \right] z^{n} \\ &= \underbrace{H(z)}_{\text{مقدار ویژه}} \; \underbrace{z^{n}}_{\text{تابع ویژه}} \end{aligned}$$

نمایی های مختلط به عنوان توابع پایه هر سیستم LTI

- CT:

$$x(t) \xrightarrow{e^{st}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{H(s)e^{st}} y(t)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k H(s_k) a_k e^{s_k t}$$

- DT:

$$x[n] \xrightarrow{z_k^n} \boxed{h[n]} \xrightarrow{H(z_k)z_k^n} y[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k H(z_k) a_k z_k^n$$

نمایی های مختلط به عنوان توابع پایه هر سیستم LTI

- چه نوع سیگنال‌هایی می‌تواند با استفاده از مجموع نمایی‌های مختلط بیان شود
  - فعلا تمرکز خود را بر روی مجموعه محدودی از نمایی‌های مختلط قرار می‌دهیم

CT: $s = jw$ – purely imaginary, i.e., signals of the form $e^{j\omega t}$

DT: $z = e^{jw}$, i.e., signals of the form $e^{j\omega n}$

دامنه‌ی یک

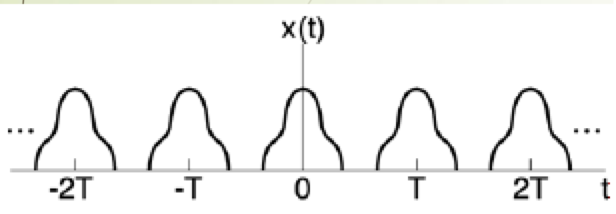
$\Downarrow$

سری و تبدیل فوریه‌ی CT و DT

سیگنال‌های پریودیک

بیان سیگنال های پریودیک CT با استفاده از سری فوریه

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{for all } t$$



- کمترین مقدار T، مقدار پریود سیگنال است
- $\omega_\circ = \frac{2\pi}{T}$ برابر با فرکانس زاویه‌ای سیگنال است

$e^{j\omega t}$ تابعی پریودیک با پریود T $\Leftrightarrow$ $\omega = k\omega_0$

$\Downarrow$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi t/T}$$

- پریودیک با پریود T
- $\{a_k\}$ ضرایب (سری) فوریه هستند
- $k=0$ مقدار DC است
- $k=\pm 1$ هارمونیک اول است
- $k=\pm 2$ هارمونیک دوم است

بیان سیگنال های پریودیک CT با استفاده از سری فوریه

- سوال ۱: چگونه می‌توان ضرایب فوریه را بدست آورد؟

ابتدا، برای سیگنال پریودیک ساده‌ی شامل چند سینوسوئید

$$\begin{aligned} \text{Ex: } x(t) &= \cos 4\pi t + 2\sin 8\pi t \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{2}{2j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right] \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه اولر

$$\omega_0 = 4\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 - \text{no dc component} \\ a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_{-1} &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= \frac{1}{j} \\ a_{-2} &= -\frac{1}{j} \\ a_3 &= 0 \\ a_{-3} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

بیان سیگنال های پریودیک CT با استفاده از سری فوریه

- برای سیگنال‌های پریودیک حقیقی، دو شکل رایج دیگر برای سری فوریه CT وجود دارد:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t]$$

یا

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\gamma_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)]$$

- دقت کنید که در استفاده از نمایی مختلط، با فرکانس‌های مثبت و منفی سروکار داریم:

$$e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad e^{-jk\omega_0 t}$$

- بخاطر آورید که:

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t})$$

و

$$\sin(k\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})$$

بیان سیگنال های پریودیک CT با استفاده از سری فوریه

- حال، پاسخ کامل سوال ۱: با داشتن x (t)، چگونه a_kها را بدست آوریم؟

فرض

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

۱- ضرب در $e^{-jn\omega_0 t}$

$$\Downarrow$$

۲- انتگرال گیری روی یک پریود

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right) e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \sum^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right)$$

(در اینجا $\int_T$ بیانگر انتگرال بر روی یک دوره به طول T، یعنی یک پریود است)

توجه داشته باشید که:

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$
$$= T\delta[k-n] \quad \text{Orthogonality}$$

$$\Downarrow$$

بیان سیگنال های پریودیک CT با استفاده از سری فوریه

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot T\delta[k-n]$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

$$\Downarrow$$

سری فوریه ($\omega_0=2\pi/T$)

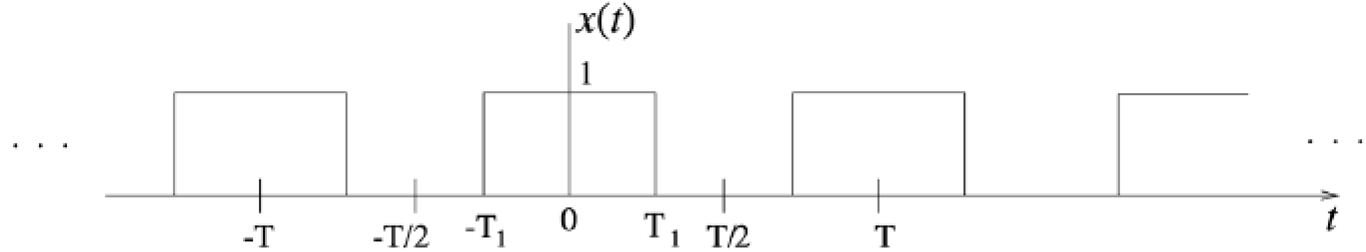
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{(Synthesis equation)}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{(Analysis equation)}$$

$$\Downarrow$$

بیان سیگنال های پریودیک CT با استفاده از سری فوریه

- مثال ۱: موج مربعی پریودیک



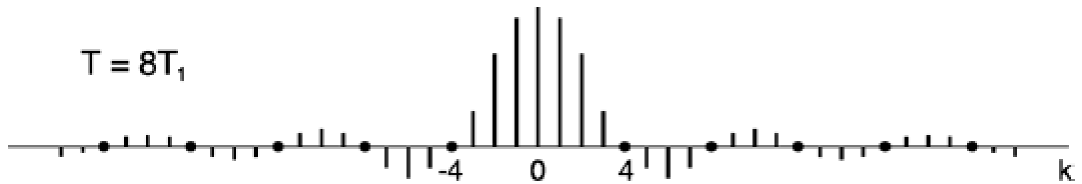
For $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{2T_1}{T}$$

جزء DC همان مقدار متوسط است

For $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

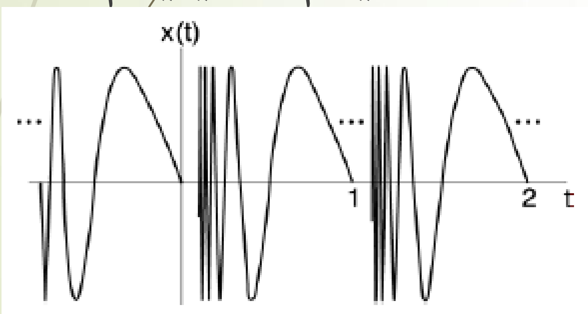


همگرایی سری فوریه CT

- تحت شرایطی متفاوت اما معقول (شرایط دیریکله)
- وضعیت ۱: باید x(t) روی یک پریود کاملا انتگرال‌پذیر باشد، یعنی:

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

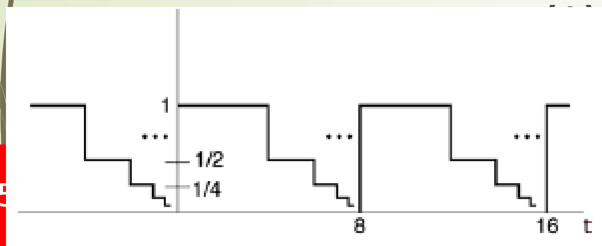
- وضعیت ۲: بایستی در یک بازه زمانی محدود، x(t) ماکزیمم و مینیمم‌های محدود داشته باشد



  - مثلا: مثالی که از وضعیت (۲) تخطی کند

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \qquad 0 < t \leq 1$$

- وضعیت ۳: بایستی در یک بازه زمانی محدود،
محدود باشد



  - مثلا: مثالی که از وضعیت (۳) تخطی کند

همگرایی سری فوریه CT

- اما هنوز همگرایی ویژگی‌های جالب دیگری دارد:

  - همچنانکه $N \rightarrow \infty$ ، $x_N(t)$ پدیده‌ی گیبس را در نقاط گسسته به نمایش می‌گذارد