

РОЗДІЛ 1 Дослідження моделі з вибором місця для авто за сумішшю рівномірного та розподілу Бернуллі

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись наступним правилом

- з ймовірністю α водій ставить автомобіль в правому кінці вільного проміжку,
- з ймовірністю $\beta = 1 - \alpha$ водій вибирає місце керуючись рівномірним розподілом, аналогічно тому, як це робилося у главі ??.

1.1 Виведення інтегрального рівняння

Аналогічно, як і в попередній частині, порядок вибору вільних проміжків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після паркування одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього спочатку заповнюється ліва частина, а потім права.

Необхідно визначити $m(X) = \mathbb{E}F(X)$. Нехай $\xi \sim Uniform(0, X - 1)$ – випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого автомобіля на парковці у випадку вибору місця за рівномірним розподілом. Тоді маємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned} m(X) &= \alpha(1 + m(X - 1)) + \beta(1 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(F(\xi) + F(X - 1 - \xi)|\xi))) = \\ &= 1 + \alpha m(X - 1) + \beta \int_0^{X-1} m(t) \frac{1}{X-1} dt + \beta \int_0^{X-1} m(X - t - 1) \frac{1}{X-1} dt \end{aligned}$$

Аналогічно виведенню формули (??), отримаємо

$$m(X + 1) = 1 + \alpha m(X) + \frac{2\beta}{X} \int_0^X m(t) dt, \quad \forall X > 0 \quad (1.1)$$

Аналогічно діям в главі ??, маємо, що виконується (??), (??) та (??).

1.2 Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати (1.1) за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується (??), то зображення Лапласа для $m(X)$ існує. До того ж, аналогічно до виведення в главі ?? маємо, що зображення Лапласа існує і для інших доданків в правій частині рівняння (1.1).

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = \alpha M(p) + 2\beta \int_p^\infty \frac{M(s)}{s} ds + \frac{1}{p} \quad (1.2)$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p :

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = \alpha \dot{M}(p) - 2\beta \frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \quad (1.3)$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} \quad (1.4)$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned} \dot{M}_h(p) &= -M_h(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \\ \frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} &= - \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \\ \int_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)} ds &= - \int_1^p \left(\frac{e^s}{e^s - \alpha} + \frac{2\beta}{s(e^s - \alpha)} \right) ds \\ \ln M_h(s)|_1^p &= - \int_1^p \frac{e^s}{e^s - \alpha} ds - 2 \int_1^p \frac{\beta}{s(e^s - \alpha)} ds \end{aligned}$$

Позначимо

$$Q_\alpha(p) := \int_1^p \frac{\beta}{s(e^s - \alpha)} ds \quad (1.5)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_1^p \frac{e^s}{e^s - \alpha} ds &= \langle u = e^s - \alpha, du = e^s ds = (u + \alpha) ds \rangle = \\ &= \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{u + \alpha}{u} (u + \alpha)^{-1} du = \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{du}{u} = \\ &= \log(e^p - \alpha) - \log(e - \alpha) = \log \frac{e^p - \alpha}{e - \alpha}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \ln M_h(p) &= \ln M_h(1) - \log \frac{e^p - \alpha}{e - \alpha} - 2Q_\alpha(p) \\ M_h(p) &= M_h(1) \cdot \frac{e - \alpha}{e^p - \alpha} \cdot e^{-2Q_\alpha(p)} \cdot \text{const} \end{aligned}$$

Оскільки $M(1)$ та $(e - \alpha)$ можна включити в константу, то маємо розв'язок

$$M_h(p) = C \cdot ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

Дійсно, перевіримо цей розв'язок:

$$\begin{aligned} \dot{M}_h(p) &= C \cdot \left(\frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \right)' = \\ &= -C \cdot \left(\frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \right)^2 \cdot \left(e^p + (e^p - \alpha) \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) e^{2Q_\alpha(p)} = \\ &= -C \cdot ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) = \\ &= -M(p) \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \end{aligned}$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M(p) = C(p) \cdot ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1}$$

Продиференціювавши за p , отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{M}(p) &= \dot{C}(p) \cdot ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} - C(p) ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \end{aligned}$$

З іншої сторони, з (1.4) маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p) ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)}$$

Тому

$$\dot{C}(p) = -((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}) \cdot \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} = -\frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = - \int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + const \quad (1.7)$$

І тоді отримуємо вираз для $M(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + const \right) ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} = \\ &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}(p) &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right)' \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \right)' = - \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2} \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} + \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \cdot \\
 &\cdot ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) = - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} - \\
 &- M(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right)
 \end{aligned}$$

Перевірено. Тоді остаточний результат без вирахування константи:

$$M_\alpha(p) = \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \quad (1.9)$$

Зазначимо, що у випадку $\alpha = 0$ ми маємо випадок з глави ??, тож і формула (1.9) має співпадати з (??) при $\alpha = 0$. Спираючись на те, що $Q_0(p) \equiv Q(p)$, отримуємо, що $M_0(p) \equiv M(p) \forall p > 0$.

1.3 Визначення константи у розв'язку

У ?? було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X + 1)$, до того ж,

$$\mathcal{L} \{m(X + 1)\} = e^p M(p). \quad (1.10)$$

Аналогічно доводиться той самий факт, але для випадку суміші рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі. Таким чином, маємо

$$\mathcal{L} \{m_\alpha(X + 1)\} = \tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{e^p}{e^p - \alpha} e^{-2Q_\alpha(p)}. \quad (1.11)$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\tilde{M}_\alpha(p) \rightarrow 0$, $p \rightarrow +\infty$.

Розглянемо $Q_\alpha(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{aligned} Q_\alpha(p) &= \int_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)} ds < \int_1^\infty \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)} ds < \int_1^\infty \frac{1-\alpha}{e^s-\alpha} ds < \\ &< \int_1^\infty \frac{1}{e^s} ds = \exp(-1) - \exp(-\infty) = \exp(-1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Останній перехід нерівності пояснюється досить просто:

$$\frac{1-\alpha}{u-\alpha} < \frac{1}{\alpha}, \quad u > 1 \Leftrightarrow u - u\alpha = u(1-\alpha) < u - \alpha, \quad u > 1$$

Тобто $Q_\alpha(p)$ - обмежена на $[1; \infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q_\alpha(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q_\alpha(p)$ – монотонно зростаюча за p . Тому

$$0 = \tilde{M}_\alpha(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int_\infty^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \lim_{p \rightarrow \infty} e^{-2Q_\alpha(p)} \quad (1.13)$$

Тут $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-2Q_\alpha(p)} = \text{const} > 0$, тому маємо, що

$$K = - \int_\infty^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds = \int_1^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds. \quad (1.14)$$

Таким чином, отримали нову версію $M(p)$:

$$\begin{aligned} M_\alpha(p) &= \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} = \\ &= \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \int_p^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.4 Застосування теореми Таубера

Для знаходження асимптотики $m_\alpha(X)$ на нескінченності, за теоремою Таубера (??) необхідно визначити асимптотику $M_\alpha(p)$ при $p \rightarrow 0$.

Якщо знайти такі $C \in \mathbb{R}$ та $\delta \in \mathbb{R}^+$, що $M_\alpha(p) \sim C \cdot p^{-\delta}$, $p \rightarrow 0$, то можна стверджувати, що $\int_0^X m_\alpha(x) dx \sim \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} C X^\delta$, $X \rightarrow \infty$. Вже зараз зрозуміло, що $\delta = 2$, адже теорема справедлива в обидва боки і виконується (??).

Для цього розглянемо поведінку в нулі трьох множників, з яких складається $M_\alpha(p)$, а саме:

- а) $\frac{1}{e^p - \alpha}$;
- б) $e^{-2Q_\alpha(p)}$;
- в) $\int_p^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds$,

Щодо першого множника, то в 0 він, очевидно, прямує до $\frac{1}{1-\alpha}$,

Для наступного аналізу доведемо деякі леми.

Лема 1.4.1: $e^{-2Q(p)}$ поводитья як p^{-2} в 0, з точністю до константи, а саме:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}} = \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(s^s - \alpha)} ds \right) \quad (1.16)$$

Доведення. Для знаходження ліміту прологарифмуємо вираз. Отримаємо:

$$\begin{aligned} 2 \ln p - 2Q_\alpha(p) &= 2 \ln p - 2 \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds = 2 \int_1^p \frac{1}{s} ds - \\ &- 2 \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds = 2 \int_1^p \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds = -2 \int_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \end{aligned}$$

Тепер, підвівши до експоненти обидві частини, отримаємо:

$$\frac{e^{-2Q_\alpha(p)}}{p^{-2}} = \exp \left(-2 \int_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right)$$

Якщо довести, що інтеграл

$$-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds$$

збігається, то лему буде доведено, адже експонента – неперервна функція, і можна переходити до ліміту під експонентою. Зрозуміло, що

$$-2 \int_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds$$

збігається для $\forall p \in (0; 1]$. Дійсно, оскільки $e^s - 1 < e^s - \alpha$, підінтегральна функція $\frac{1-e^{-s}}{s}$ мажорується $\frac{1}{s}$, яка, в свою чергу, має скінченне значення інтегралу:

$$\int_p^1 \frac{1}{s} ds = \ln 1 - \ln p = -\ln p, \quad p > 0$$

Невизначеність виникає лише в точці 0. Знайдемо ліміт підінтегральної функції в точці 0:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} &= \langle \text{правило Лопіталя для невизначеності } 0/0 \rangle = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^s}{se^s + (e^s - \alpha)} = \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Таким чином, підінтегральна функція обмежена в деякому ε -околі 0, тому інтеграл також збіжний, і лему доведено. \square

Лема 1.4.2: Функція

$$Q_\alpha(p) = \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds$$

– обмежена на $[w; \infty]$, $w > 0$.

Доведення. На проміжку $[1; \infty]$ підінтегральна функція мажорується функцією e^{-s} (див. (1.12)), а на проміжку $[w; 1]$ – функцією $\frac{1}{s}$, адже $1 - \alpha <$

$e^s - \alpha$, $s > 0$. Тому, аналогічно доведенню попередньої леми, інтеграл буде збіжний, і:

$$Q_\alpha(p) \leq \int_1^\infty e^{-s} ds = \exp(-1), \quad p \geq 1$$

$$Q_\alpha(p) \leq \int_w^1 \frac{1}{s} ds = -\ln w, \quad p \in [w; 1]$$

Таким чином, $Q_\alpha(p) \leq \max\{-\ln w, \exp(-1)\}$. □

Лема 1.4.3: Інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds$$

– збіжний.

Доведення. Спираючись на лему (1.4.1), маємо, що підінтегральна функція прямує до деякої константи при $s \rightarrow 0$, оскільки є обернено пропорційною до функції з тої леми. Тому в деякому проколотому ε -околі точки 0 підінтегральна функція буде обмежена. На інтервалі $[\varepsilon; \infty]$ за лемою (1.4.2), $Q_\alpha(s)$ – обмежена, а тому і $\exp(2Q_\alpha(s))$ також. Тому збіжність на інтервалі $[\varepsilon; \infty]$ виконується, якщо збігається інтеграл

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{s^2} ds.$$

А його збіжність – відомий факт. □

Таким чином, спираючись на доведені леми, маємо при $p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
M_\alpha(p) &\sim \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds = \\
&= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^\infty \exp \left(2 \int_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau - 2 \ln s \right) ds = \\
&= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^\infty \exp \left(2 \int_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau - 2 \int_1^s \frac{1}{\tau} d\tau \right) ds = \\
&= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_1^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds = \\
&= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau - 2 \int_1^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds
\end{aligned}$$

Склавши інтеграли під експонентою, отримаємо:

$$M_\alpha(p) \sim p^{-2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds, \quad p \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

Тепер, за теоремою Таубера маємо при $X \rightarrow \infty$:

$$\int_0^X m_\alpha(x) dx \sim \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds \cdot X^2. \quad (1.18)$$

Або, продиференціювавши обидві частини, отримаємо:

$$m_\alpha(X) \sim \frac{2}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds \cdot X. \quad (1.19)$$

$$m_\alpha(X) \sim \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds \cdot X, \quad X \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Тут ми мали право диференціювати обидві частини за правилом Лопі-
таля, адже має місце невизначеність ∞/∞ .