РОЗДІЛ 1 Дослідження моделі з вибором місця для авто за сумішшю рівномірного та розподілу Бернулі

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись наступним правилом

- з ймовірністю α водій ставить автомобіль в правому кінці вільного проміжку,
- з ймовірністю $\beta = 1 - \alpha$ водій вибирає місце керуючись рівномірним розподілом, аналогічно тому, як це робилося у главі **??**.

1.1 Виведення інтегрального рівняння

Аналогічно, як і в попередній частині, порядок вибору вільних проміжків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після паркування одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього спочатку заповнюється ліва частина, а потім права.

Необхідно визначити $m(X) = \mathbb{E}F(X)$. Нехай $\xi \sim Uniform(0, X-1)$ – випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого автомобіля на парковці у випадку вибору місця за рівномірним розподілом. Тоді маємо наступну тотожність:

$$m(X) = \alpha(1 + m(X-1)) + \beta(1 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(F(\xi) + F(X-1-\xi)|\xi))) =$$
$$= 1 + \alpha m(X-1) + \beta \int\limits_0^{X-1} m(t)\frac{1}{X-1}dt + \beta \int\limits_0^{X-1} m(X-t-1)\frac{1}{X-1}dt$$

Аналогічно виведенню формули (**??**), отримаємо

$$m(X+1) = 1 + \alpha m(X) + \frac{2\beta}{X}\int\limits_0^X m(t)dt, \quad \forall X > 0 \tag{1.1}$$

Аналогічно діям в главі **??**, маємо, що виконується (**??**), (**??**) та (**??**).

1.2 Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати (1.1) за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується (**??**), то зображення Лапласа для $m(X)$ існує. До того ж, аналогічно до виведення в главі **??** маємо, що зображення Лапласа існує і для інших доданків в правій частині рівняння (1.1).

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = \alpha M(p) + 2\beta \int\limits_p^\infty \frac{M(s)}{s} ds + \frac{1}{p} \tag{1.2}$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p:

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = \alpha \dot{M}(p) - 2\beta \frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \tag{1.3}$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} \tag{1.4}$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_h(p) &= -M_h(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \\
\frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} &= -\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \\
\int\limits_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)} ds &= -\int\limits_1^p \left(\frac{e^s}{e^s - \alpha} + \frac{2\beta}{s(e^s - \alpha)} \right) ds \\
\ln M_h(s)\big|_1^p &= -\int\limits_1^p \frac{e^s}{e^s - \alpha} ds - 2\int\limits_1^p \frac{\beta}{s(e^s - \alpha)} ds
\end{aligned}$$

Позначимо

$$Q_\alpha(p) := \int\limits_1^p \frac{\beta}{s(e^s-\alpha)}ds \tag{1.5}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\int\limits_1^p \frac{e^s}{e^s-\alpha}ds = \langle u = e^s-\alpha,\ du = e^s ds = (u+\alpha)ds\rangle = \\ = \int\limits_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{u+\alpha}{u}(u+\alpha)^{-1}du = \int\limits_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{du}{u} = \\ = \log(e^p-\alpha) - \log(e-\alpha) = \log\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha},\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\ln M_h(p) = \ln M_h(1) - \log\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha} - 2Q_\alpha(p) \\ M_h(p) = M_h(1)\cdot\frac{e-\alpha}{e^p-\alpha}\cdot e^{-2Q_\alpha(p)}\cdot const\end{aligned}$$

Оскільки $M(1)$ та $(e-\alpha)$ можна включити в константу, то маємо розв'язок

$$M_h(p) = C\cdot\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}, \quad \forall C\in\mathbb{R} \tag{1.6}$$

Дійсно, перевіримо цей розв'язок:

$$\begin{aligned}\dot{M}_h(p) = C\cdot\left(\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}\right)' = \\ = -C\cdot\left(\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}\right)^2\cdot\left(e^p + (e^p-\alpha)\frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)e^{2Q_\alpha(p)} = \\ = -C\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha}+\frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) = \\ = -M(p)\cdot\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha}+\frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)\end{aligned}$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M(p) = C(p) \cdot \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}$$

Продиференціювавши за p, отримаємо:

$$\dot{M}(p) = \dot{C}(p) \cdot \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1} - C(p)\left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1} \cdot \\ \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right)$$

З іншої сторони, з (1.4) маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p)\left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)}$$

Тому

$$\dot{C}(p) = -\left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right) \cdot \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} = -\frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = -\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + const \tag{1.7}$$

І тоді отримуємо вираз для $M(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) &= -\left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + const\right)\left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1} = \\ &= -\left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K\right)\frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\dot{M}(p) = -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)' \frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} - \left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}\right)' = -\frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2}\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} + \left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\cdot$$
$$\cdot\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha}+\frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) = -\frac{1}{p^2(e^p-\alpha)}-$$
$$-M(p)\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha}+\frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)$$

Перевірено. Тоді остаточний результат без вирахування константи:

$$M_\alpha(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \tag{1.9}$$

Зазначимо, що у випадку $\alpha = 0$ ми маємо випадок з глави **??**, тож і формула (1.9) має співпадати з (**??**) при $\alpha = 0$. Спираючись на те, що $Q_0(p) \equiv Q(p)$, отримуємо, що $M_0(p) \equiv M(p)\ \forall p > 0$.

1.3 Визначення константи у розв'язку

У **??** було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X+1)$, до того ж,

$$\mathcal{L}\left\{m(X+1)\right\} = e^p M(p). \tag{1.10}$$

Аналогічно доводиться той самий факт, але для випадку суміші рівномірного розподілу та розподілу Бернулі. Таким чином, маємо

$$\mathcal{L}\left\{m_\alpha(X+1)\right\} = \tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\frac{e^p}{e^p-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}. \tag{1.11}$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\tilde{M}_\alpha(p) \to 0,\ p \to +\infty$.

Розглянемо $Q_\alpha(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$
\begin{gathered}
Q_\alpha(p) = \int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)} ds < \int\limits_1^\infty \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)} ds < \int\limits_1^\infty \frac{1-\alpha}{e^s-\alpha} ds < \\
< \int\limits_1^\infty \frac{1}{e^s} ds = \exp(-1) - \exp(-\infty) = \exp(-1)
\end{gathered}
\tag{1.12}
$$

Останній перехід нерівності пояснюється досить просто:

$$
\frac{1-\alpha}{u-\alpha} < \frac{1}{\alpha},\ u > 1 \Leftrightarrow u - u\alpha = u(1-\alpha) < u - \alpha,\ u > 1
$$

Тобто $Q_\alpha(p)$ - обмежена на $[1;\infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q_\alpha(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q_\alpha(p)$ – монотонно зростаюча за p. Тому

$$
0 = \tilde{M}_\alpha(\infty) = \lim_{p\to\infty} \tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int\limits_\infty^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \lim_{p\to\infty} e^{-2Q_\alpha(p)}
\tag{1.13}
$$

Тут $\lim\limits_{p\to\infty} e^{-2Q_\alpha(p)} = const > 0$, тому маємо, що

$$
K = -\int\limits_\infty^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds = \int\limits_1^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds.
\tag{1.14}
$$

Таким чином, отримали нову версію $M(p)$:

$$
\begin{gathered}
M_\alpha(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} = \\
= \frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \int\limits_p^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds
\end{gathered}
\tag{1.15}
$$

1.4 Застосування теореми Таубера

Для знаходження асимптотики $m_\alpha(X)$ на нескінченності, за теоремою Таубера (**??**) необхідно визначити асимптотику $M_\alpha(p)$ при $p \to 0$.

Якщо знайти такі $C \in \mathbb{R}$ та $\delta \in \mathbb{R}^+$, що $M_\alpha(p) \sim C \cdot p^{-\delta},\ p \to 0$, то можна стверджувати, що $\int\limits_0^X m_\alpha(x)dx \sim \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} C X^\delta,\ X \to \infty$. Вже зараз зрозуміло, що $\delta = 2$, адже теорема справедлива в обидва боки і виконується (**??**).

Для цього розглянемо поведінку в нулі трьох множників, з яких складається $M_\alpha(p)$, а саме:

а) $\frac{1}{e^p - \alpha}$;

б) $e^{-2Q_\alpha(p)}$;

в) $\int\limits_p^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds$,

Щодо першого множнику, то в 0 він, очевидно, прямує до $\frac{1}{1-\alpha}$,

Для наступного аналізу доведемо деякі леми.

Лема 1.4.1: $e^{-2Q(p)}$ поводиться як p^{-2} в 0, з точністю до константи, а саме:

$$\lim_{p \to 0} \frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}} = \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{e^s - 1}{s(s^s - \alpha)} ds\right) \tag{1.16}$$

Доведення. Для знаходження ліміту прологарифмуємо вираз. Отримаємо:

$$2\ln p - 2Q_\alpha(p) = 2\ln p - 2\int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s - \alpha)} ds = 2\int\limits_1^p \frac{1}{s} ds -$$

$$-2\int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s - \alpha)} ds = 2\int\limits_1^p \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds = -2\int\limits_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds$$

Тепер, підвівши до експоненти обидві частини, отримаємо:

$$\frac{e^{-2Q_\alpha(p)}}{p^{-2}} = \exp\left(-2\int\limits_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds\right)$$

Якщо довести, що інтеграл

$$-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds$$

збігається, то лему буде доведено, адже експонента – неперервна функція, і можна переходити до ліміту під експонентою. Зрозуміло, що

$$-2\int\limits_p^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds$$

збігається для $\forall p \in (0;\ 1]$. Дійсно, оскільки $e^s - 1 < e^s - \alpha$, підінтегральна функція $\frac{1-e^{-s}}{s}$ мажорується $\frac{1}{s}$, яка, в свою чергу, має скінченне значення інтегралу:

$$\int\limits_p^1 \frac{1}{s}ds = \ln 1 - \ln p = -\ln p, \quad p > 0$$

Невизначеність виникає лише в точці 0. Знайдемо ліміт підінтегральної функції в точці 0:

$$\lim_{p\to 0}\frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)} = \langle\text{правило Лопіталя для невизначенності 0/0}\rangle =$$
$$= \lim_{p\to 0}\frac{e^s}{se^s+(e^s-\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Таким чином, підінтегральна функція обмежена в деякому ε-околі 0, тому інтеграл також збіжний, і лему доведено. □

Лема 1.4.2: Функція

$$Q_\alpha(p) = \int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}ds$$

– обмежена на $[w;\ \infty],\ w > 0$.

Доведення. На проміжку $[1;\ \infty]$ підінтегральна функція мажорується функцією e^{-s} (див. (1.12)), а на проміжку $[w;\ 1]$ – функцією $\frac{1}{s}$, адже $1 - \alpha <$

$e^s - \alpha,\ s > 0$. Тому, аналогічно доведенню попередньо леми, інтеграл буде збіжний, і:

$$Q_\alpha(p) \leq \int\limits_1^\infty e^{-s} ds = \exp(-1), \quad p \geq 1$$

$$Q_\alpha(p) \leq \int\limits_w^1 \frac{1}{s} ds = -\ln w, \quad p \in [w;\ 1]$$

Таким чином, $Q_\alpha(p) \leq \max\{-\ln w, \exp(-1)\}$. □

Лема 1.4.3: Інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds$$

– збіжний.

Доведення. Спираючись на лему (1.4.1), маємо, що підінтегральна функція прямує до деякої константи при $s \to 0$, оскільки є обернено пропорційною до функції з тої леми. Тому в деякому проколотому ε-околі точки 0 підінтегральна функція буде обмежена. На інтервалі $[\varepsilon;\ \infty]$ за лемою (1.4.2), $Q_\alpha(s)$ – обмежена, а тому і $\exp(2Q_\alpha(s))$ також. Тому збіжність на інтервалі $[\varepsilon;\ \infty]$ виконується, якщо збігається інтеграл

$$\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{1}{s^2} ds.$$

А його збіжність – відомий факт. □

Таким чином, спираючись на доведені леми, маємо при $p \to 0$:

$$M_\alpha(p) \sim \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right) \int\limits_0^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right) \int\limits_0^\infty \exp\left(2\int\limits_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau - 2\ln s\right) ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right) \int\limits_0^\infty \exp\left(2\int\limits_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau - 2\int\limits_1^s \frac{1}{\tau}d\tau\right) ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right) \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_1^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right) ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau - 2\int\limits_1^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right) ds$$

Склавши інтеграли під експонентою, отримаємо:

$$M_\alpha(p) \sim p^{-2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right) ds, \quad p \to 0. \tag{1.17}$$

Тепер, за теоремою Таубера маємо при $X \to \infty$:

$$\int\limits_0^X m_\alpha(x)dx \sim \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right) ds \cdot X^2. \tag{1.18}$$

Або, продиференціювавши обидві частини, отримаємо:

$$m_\alpha(X) \sim \frac{2}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right) ds \cdot X. \tag{1.19}$$

$$m_\alpha(X) \sim \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right) ds \cdot X, \quad X \to \infty. \tag{1.20}$$

Тут ми мали право диференціювати обидві частини за правилом Лопіталя, адже має місце невизначеність ∞/∞.