Ймовірнісні методи дослідження процесів паркування і пакування

студент 6-го курсу
КА-61м, Фатенко Владислав

Інститут прикладного системного аналізу
керівник: к. ф.-м. н., доц. Ільєнко Андрій Борисович

Актуальність роботи

Проблеми послідовного пакування інтервалів, що узагальнюють відому концепцію Альфреда Реньї паркування автомобілів, мають досить широкий спектр застосувань. Деякі з них:

- фізичні структури рідин;
- хімічні моделі адсорбції та абсорбції;
- моделювання систем комунікацій.

Постановка задачі

Мета роботи

Вивчення асимптотичних властивостей узагальненої моделі і паркування і пакування Реньї

Об’єкт дослідження

Процеси пакування і паркування Реньї

Предмет дослідження

Асимптотичні властивості певних узагальнень моделі парування Реньї

Постановка задачі

Узагальнена модель паркування

1. Заданий початковий відрізок довжини x.
2. Задано сімейство розподілів $U_{a,b}$ з такою функцією розподілу $F_U(t)$, що $F_U(a) = 0$ і $F_U(b) = 1$.
3. Допоки існує хоча б один незаповнений інтервал $[a_i, b_i]$ такий, що $b_i - a_i \geq 1$:
   1. З розподілу $U_{a_i, b_i - 1}$ обирається випадкове значення t – позиція лівого краю одиничного інтервалу.
   2. На початковому відрізку інтервал $(t, t+1)$ позначається як заповнена множина.

Постановка задачі

У класичній моделі паркування у якості $U_{a,b}$ виступає рівномірний розподіл на інтервалі (a, b). Пропонується розглянути узагальнену модель, в якій $U_{a,b} = U_p(a, b)$ задається функцією розподілу

$$F_{U_p(a,b)}(t) = p \cdot [t \geq a] + (1 - p) \cdot \begin{cases} 0, & t < a, \\ \frac{t-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t > b, \end{cases}$$

де $p \in [0, 1)$ – фіксоване.

Постановка задачі

Досліджується кількість інтервалів $N(x)$, розміщених на відрізку в момент сатурації. Цілі дослідження:

- визначення асимптотики $m_p(x) = \mathbb{E}N(x)$;
- доведення асимптотичної субквадратичності другого центрального моменту величини $N(x)$ на нескінченності;
- виведення закону великих чисел для $\frac{N(x)}{x}$;
- розробка та комп'ютерна реалізація алгоритму імітаційного моделювання процесу заповнення паркінгу в одновимірному та двовимірному випадках.

Результати роботи

Випадок центрального розташування

В роботі було отримано точну аналітичну формулу максимальної кількості автомобілів $F(X)$ на паркінгу довжини X у випадку центрального розташування.

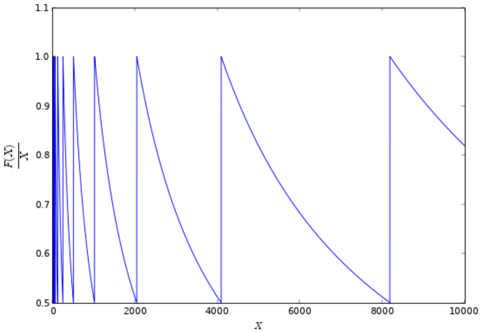
Теорема 1

У випадку вибору місця для автомобіля в центрі вільного проміжку максимальна кількість автомобілів $F(X)$ на паркінгу визначається наступним чином

$$F(X) = 2^k - 1, \text{ якщо } X \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Результати роботи

Випадок центрального розташування



Графік відношення $F(X)/X$ у випадку центрального розташування

Результати роботи

Випадок рівномірного розташування

В роботі було виведене інтегральне рівняння зі зсувом для математичного сподівання $m(X)$ максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини X.

Теорема 2

У випадку розташування автомобілів за рівномірним розподілом виконується наступне співвідношення для $m(X)$:

$$m(X+1) = \frac{2}{X} \int_0^X m(t)dt + 1, \quad \forall X > 0$$

Результати роботи

Випадок рівномірного розташування

Теорема 2 (продовження)

До того ж, має місце асимптотична поведінка

$$m(X) \sim \kappa \cdot X, \quad X \to \infty.$$

де

$$\kappa = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau\right) ds$$

Результати роботи
Випадок рівномірного розташування

Приблизне значення сталої κ може бути отримано чисельними методами:

$$\kappa \approx 0.747598.$$

На практиці було проведене імітаційне моделювання парковки за моделлю рівномірного розташування, і було отримане експериментальне значення для κ:

$$\kappa^{experimental} = \frac{\#cars}{lenght} = 0.747588.$$

Результати роботи

Випадок суміші рівномірного та розподілу Бернулі

В роботі було виведене інтегральне рівняння зі зсувом для математичного сподівання $m_\alpha(X)$ максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини X.

Теорема 3

У випадку розташування автомобілів за сумішшю рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі виконується наступне співвідношення для $m_\alpha(X)$:

$$m_\alpha(X+1) = 1 + \alpha m(X) + \frac{2(1-\alpha)}{X} \int\limits_0^X m(t)dt, \quad \forall X > 0$$

Результати роботи

Випадок суміші рівномірного та розподілу Бернулі

Теорема 3 (продовження)

До того ж,

$$m(X) \sim \kappa_\alpha \cdot X$$

де

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2 \int\limits_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds$$

Результати роботи
Випадок рівномірного розташування

Приблизне значення сталої κ_α може бути отримано чисельними методами:

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747598	0.76351	0.780574	0.798962	0.818896

α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84066	0.864638	0.891365	0.92165	0.956849

На практиці було проведене імітаційне моделювання парковки за моделлю рівномірного розташування, і було отримане експериментальне значення для κ_α:

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747588	0.76352	0.780569	0.798959	0.818891

α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84055	0.863658	0.891214	0.92158	0.95693

Результати роботи

Моделювання двовимірної парковки

Було проведено імітаційне моделювання для двовимірного прямокутного паркінгу з моделлю розташування автомобілів за рівномірним розподілом. Отримали наступні результати:

a	b	$\frac{\#cars}{a*b}$
50	50	0.5801
50	100	0.5889
100	100	0.5951
50	200	0.5975
200	200	0.6021
500	500	0.6111

Висновки

В роботі, використовуючи аналітичні та чисельні методи, досліджено асимптотику математичного сподівання максимальної кількості автомобілів, що можуть бути припарковані на стоянці, за різних припущень щодо вибору місця паркування. Для випадкового вибору цього місця на вільній ділянці розглядалося два ймовірнісні розподіли – рівномірний та суміш рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі. Другий розподіл, очевидно, є узагальненням першого та дозволяє врахувати наявність водіїв з різним досвідом паркування.

Висновки

В обох випадках отримано вказану асимптотику та підтверджено її методами імітаційного моделювання. Для цього було розроблено та реалізовано чисельний алгоритм, що дозволяє з високою точністю оцінити шукані характеристики.
Крім того, в роботі було проведено імітаційне моделювання випадкового паркування автомобілів на двовимірному прямокутному паркінгу.

Шляхи подальшого розвитку

- знаходження асимптотики інших числових характеристик максимальної кількості припаркованих автомобілів (дисперсія, старші моменти тощо);
- формулювання та доведення граничних теорем про слабку збіжність розподілу відповідним чином нормованої максимальної кількості припаркованих автомобілів;
- аналіз моделей з іншими припущеннями щодо розподілу випадкового вибору місця паркування.

Дякую за увагу.