Ймовірнісні методи дослідження процесів паркування і пакування

студент 6-го курсу
КА-61м, Фатенко Владислав

Інститут прикладного системного аналізу
керівник: к. ф.-м. н., доц. Ільєнко Андрій Борисович

Узагальнення моделі паркування Реньї

На сьогоднішній день автомобілі можна побачити усюди: надворі біля будинків, на автомагістралі чи у невеличкому провулку, в центрі міста та в селі. Автомобілей вже така незліченна кількість, що в Києві скадно знайти куточок, де не видно автотранспорту, де не чутно гулу двигунів. Досить гостро постає проблема організації розміщення автомобілів. Для цього створюються парковки, але щодо оптимальності вибору їх розмірів виникають сумніви. На жаль, сьогодні ще не має а ні практичних, а ні навіть дієвих теоретичних інструментів розрахунку оптимальних розмірів парковки, тому я вважаю своїм боргом додати імпульсу до розвитку цієї області.

Актуальність роботи

Результати роботи відносяться до стохастичної геометрії і становлять перш за все теоретичний інтерес. В той же час прогнозування максимальної кількості автомобілів на парковці можна застосувати для:

- визначення оптимальних розмірів парковки;
- прогнозування рентабельності існуючої парковки;
- визначення оптимальних розмірів упаковки для розміщення об'єктів.

Актуальність роботи

Результати роботи відносяться до стохастичної геометрії і становлять перш за все теоретичний інтерес. В той же час прогнозування максимальної кількості автомобілів на парковці можна застосувати для:

- визначення оптимальних розмірів парковки;
- прогнозування рентабельності існуючої парковки;
- визначення оптимальних розмірів упаковки для розміщення об'єктів.

Звичайно, амбіції та далекоглядні плани щодо розвитку цієї галузі – це добре, але результати саме цієї роботи відносяться до стохастичної геометрії і становлять перш за все теоретичний інтерес. (...)

Постановка задачі

Мета роботи

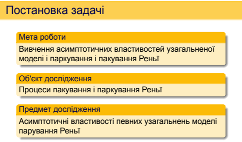
Вивчення асимптотичних властивостей узагальненої моделі і паркування і пакування Реньї

Об'єкт дослідження

Процеси пакування і паркування Реньї

Предмет дослідження

Асимптотичні властивості певних узагальнень моделі парування Реньї



1. Метою даної роботи є вивчення асимптотичних властивостей узагальненої моделі паркування і пакування Реньї з законом вибору місця вставки автомобіля, визначеного сумішшю рівномірного та виродженого розподілів.
2. Об’єктом дослідження є процеси пакування і паркування Реньї.
3. Предметом дослідження є Асимптотичні властивості певних узагальнень моделі парування Реньї.

Постановка задачі

Поставлені задачі

- дослідження асимптотики математичного сподівання максимальної кількості автомобілів, які можуть бути розміщені на паркінгу в залежності від величини паркінгу
  - у випадку рівномірного розподілу місця паркування
  - у випадку суміші рівномірного розподілу і розподілу Бернуллі
- розробка та комп'ютерна реалізація алгоритму імітаційного моделювання процесу заповнення паркінгу в одновимірному та двовимірному випадках

Постановка задачі

Поставлені задачі

- дослідження асимптотики математичного сподівання максимальної кількості автомобілів, які можуть бути розміщені на паркінгу в залежності від величини паркінгу
  - у випадку рівномірного розподілу місця паркування
  - у випадку суміші рівномірного розподілу і розподілу Бернуллі
- розробка та комп'ютерна реалізація алгоритму імітаційного моделювання процесу заповнення паркінгу в одновимірному та двовимірному випадках

У рамках цієї роботи були поставлені наступні задачі:(...)

Математичні основи

Для аналізу використовуються наступний апарат

- теорія випадкових процесів
- теорія інтегральних рівнянь зі зсувом
- операційне числення
- тауберові теореми

Математичні основи

Для аналізу використовуються наступний апарат

- теорія випадкових процесів
- теорія інтегральних рівнянь зі зсувом
- операційне числення
- тауберові теореми

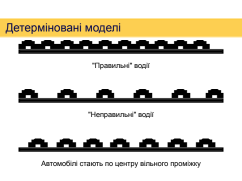
Для виконання цієї роботи використовувався наступний математичний апарат: (...)

Детерміновані моделі

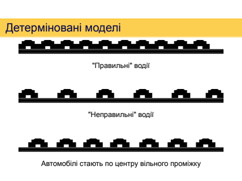
"Правильні" водії

"Неправильні" водії

Автомобілі стають по центру вільного проміжку



1. Водії стають впритул один до одного.
2. Водії намагаються загарбати якомога більше простору.
3. Водії ставлять автомобіль посередині вільного проміжку (показати)



Перша модель - верхня межа, друга - нижня межа. Третя модель є прикладом моделі без асимптотичної поведінки.

Стохастичні моделі

- розташування за рівномірним розподілом, тобто автомобілі обирають місце виходячи з рівномірного розподілу по вільному простору;
- розташування за сумішшю рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі з параметром $\alpha \in [0,\ 1)$, тобто з ймовірністю α водій встановлює автомобіль з краю, керуючись моделлю "правильного" водія, і з ймовірністю $1 - \alpha$ встановлює автомобіль виходячи з рівномірного розподілу по вільному простору.

Стохастичні моделі

- розташування за рівномірним розподілом, тобто автомобілі обирають місце виходячи з рівномірного розподілу по вільному простору;
- розташування за сумішшю рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі з параметром $\alpha \in [0,\ 1)$, тобто з ймовірністю α водій встановлює автомобіль з краю, керуючись моделлю "правильного" водія, і з ймовірністю $1-\alpha$ встановлює автомобіль виходячи з рівномірного розподілу по вільному простору.

1. розташування за рівномірним розподілом, тобто автомобілі обирають місце виходячи з рівномірного розподілу по вільному простору
2. розташування за сумішшю рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі з параметром $\alpha \in [0,\ 1)$, тобто з ймовірністю α водій встановлює автомобіль з краю, керуючись моделлю "правильного" водія, і з ймовірністю $1-\alpha$ встановлює автомобіль виходячи з рівномірного розподілу по вільному простору.

Результати роботи

Випадок центрального розташування

В роботі було отримано точну аналітичну формулу максимальної кількості автомобілів $F(X)$ на паркінгу довжини X у випадку центрального розташування.

Теорема 1

У випадку вибору місця для автомобіля в центрі вільного проміжку максимальна кількість автомобілів $F(X)$ на паркінгу визначається наступним чином

$$F(X) = 2^k - 1, \text{ якщо } X \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Результати роботи
Випадок центрального розташування

В роботі було отримано точну аналітичну формулу максимальної кількості автомобілів $F(X)$ на паркінгу довжини X у випадку центрального розташування.

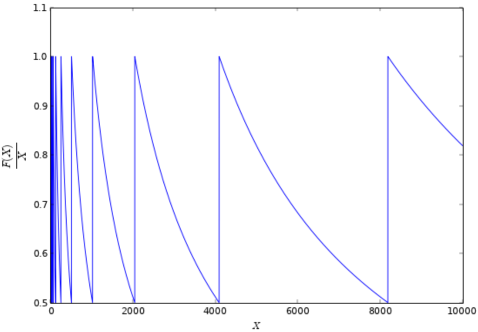
Теорема 1

У випадку вибору місця для автомобіля в центрі вільного проміжку максимальна кількість автомобілів $F(X)$ на паркінгу визначається наступним чином

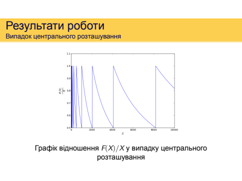
$$F(X) = 2^k - 1, \text{ якщо } X \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Тут треба пояснити, що центральне розташування – коли автомобілі стають посерелині вільного проміжку, згадавши останню картинку поперелнього слайда, і швиденько перейти на наступний слайд, де є гарний графік.

Результати роботи
Випадок центрального розташування



Графік відношення $F(X)/X$ у випадку центрального розташування



Цей випадок є яскравим прикладом того, що асимптотична поведінка не завжди має місце.

Результати роботи

Випадок рівномірного розташування

В роботі було виведене інтегральне рівняння зі зсувом для математичного сподівання $m(X)$ максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини X.

Теорема 2

У випадку розташування автомобілів за рівномірним розподілом виконується наступне співвідношення для $m(X)$:

$$m(X+1) = \frac{2}{X}\int_0^X m(t)dt + 1, \quad \forall X > 0$$

Результати роботи

Випадок рівномірного розташування

Теорема 2 (продовження)

До того ж, має місце асимптотична поведінка

$$m(X) \sim \kappa \cdot X, \quad X \to \infty.$$

де

$$\kappa = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right) ds$$

Результати роботи
Випадок рівномірного розташування

Теорема 2 (продовження)

До того ж, має місце асимптотична поведінка

$$m(X) \sim \kappa \cdot X, \quad X \to \infty.$$

де

$$\kappa = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau\right) ds$$

На основі інтегрального рівняння було отримано асимптотику математичного сподівання $m(X)$ максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини X при $X \to \infty$.

Результати роботи
Випадок рівномірного розташування

Приблизне значення сталої κ може бути отримано чисельними методами:

$$\kappa \approx 0.747598.$$

На практиці було проведене імітаційне моделювання парковки за моделлю рівномірного розташування, і було отримане експериментальне значення для κ:

$$\kappa^{experimental} = \frac{\#cars}{lenght} = 0.747588.$$

Результати роботи
Випадок рівномірного розташування

Приблизне значення сталої κ може бути отримано чисельними методами:

$$\kappa \approx 0.747598.$$

На практиці було проведене імітаційне моделювання парковки за моделлю рівномірного розташування, і було отримане експериментальне значення для κ:

$$\kappa^{experimental} = \frac{\#cars}{lenght} = 0.747588.$$

Порівняти результати аналітичної формули та імітаційного моделювання.

Результати роботи

Випадок суміші рівномірного та розподілу Бернулі

В роботі було виведене інтегральне рівняння зі зсувом для математичного сподівання $m_\alpha(X)$ максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини X.

Теорема 3

У випадку розташування автомобілів за сумішшю рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі виконується наступне співвідношення для $m_\alpha(X)$:

$$m_\alpha(X+1) = 1 + \alpha m(X) + \frac{2(1-\alpha)}{X} \int_0^X m(t)dt, \quad \forall X > 0$$

Результати роботи

Випадок суміші рівномірного та розподілу Бернулі

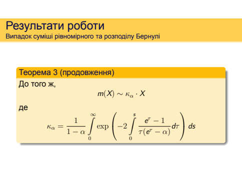
Теорема 3 (продовження)

До того ж,

$$m(X) \sim \kappa_\alpha \cdot X$$

де

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau\right) ds$$



На основі інтегрального рівняння було отримано асимптотику математичного сподівання $m_\alpha(X)$ максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини X при $X \to \infty$.

Результати роботи
Випадок рівномірного розташування

Приближне значення сталої κ_α може бути отримано чисельними методами:

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747598	0.76351	0.780574	0.798962	0.818896
α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84066	0.864638	0.891365	0.92165	0.956849

На практиці було проведене імітаційне моделювання парковки за моделлю рівномірного розташування, і було отримане експериментальне значення для κ_α:

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747588	0.76352	0.780569	0.798959	0.818891
α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84055	0.863658	0.891214	0.92158	0.95693

Результати роботи
Випадок рівномірного розташування

Приблизне значення сталої κ_α може бути отримано чисельними методами:

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747598	0.76351	0.780574	0.798962	0.818896

α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84066	0.864638	0.891365	0.92165	0.956849

На практиці було проведене імітаційне моделювання парковки за моделлю рівномірного розташування, і було отримане експериментальне значення для κ_α:

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747588	0.76352	0.780569	0.798959	0.818891

α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84055	0.863658	0.891214	0.92158	0.95693

Порівняти результати аналітичної формули та імітаційного моделювання.

Результати роботи

Моделювання двовимірної парковки

Було проведено імітаційне моделювання для двовимірного прямокутного паркінгу з моделлю розташування автомобілів за рівномірним розподілом. Отримали наступні результати:

a	b	$\frac{\#cars}{a*b}$
50	50	0.5801
50	100	0.5889
100	100	0.5951
50	200	0.5975
200	200	0.6021
500	500	0.6111

Результати роботи

Моделювання двовимірної парковки

Було проведено імітаційне моделювання для двовимірного прямокутного паркінгу з моделлю розташування автомобілів за рівномірним розподілом. Отримали наступні результати:

a	b	$\frac{\#cars}{a*b}$
50	50	0.5801
50	100	0.5889
100	100	0.5951
50	200	0.5975
200	200	0.6021
500	500	0.6111

Цей додаток було створено для більш реалістичного моделювання процесу паркування у випадку двовимірної парковки. Найбільш цікавою характеристикою є математичне сподівання відношення максимальної кількості автомобілів, отриманого внаслідок ітерацій імітаційного моделювання, до загальної площі прямокутної парковки. Існує гіпотеза Паласті, яка стверджує, що ця характеристика прямує до $\kappa^2 \approx 0.56$. На жаль, вона не підтверджується практично.

Висновки

В роботі, використовуючи аналітичні та чисельні методи, досліджено асимптотику математичного сподівання максимальної кількості автомобілів, що можуть бути припарковані на стоянці, за різних припущень щодо вибору місця паркування. Для випадкового вибору цього місця на вільній ділянці розглядалося два ймовірнісні розподіли – рівномірний та суміш рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі. Другий розподіл, очевидно, є узагальненням першого та дозволяє врахувати наявність водіїв з різним досвідом паркування.

Висновки

В обох випадках отримано вказану асимптотику та підтверджено її методами імітаційного моделювання. Для цього було розроблено та реалізовано чисельний алгоритм, що дозволяє з високою точністю оцінити шукані характеристики.
Крім того, в роботі було проведено імітаційне моделювання випадкового паркування автомобілів на двовимірному прямокутному паркінгу.

Шляхи подальшого розвитку

- знаходження асимптотики інших числових характеристик максимальної кількості припаркованих автомобілів (дисперсія, старші моменти тощо);
- формулювання та доведення граничних теорем про слабку збіжність розподілу відповідним чином нормованої максимальної кількості припаркованих автомобілів;
- аналіз моделей з іншими припущеннями щодо розподілу випадкового вибору місця паркування.

Шляхи подальшого розвитку

- знаходження асимптотики інших числових характеристик максимальної кількості припаркованих автомобілів (дисперсія, старші моменти тощо);
- формулювання та доведення граничних теорем про слабку збіжність розподілу відповідним чином нормованої максимальної кількості припаркованих автомобілів;
- аналіз моделей з іншими припущеннями щодо розподілу випадкового вибору місця паркування.

1. дозволить краще зрозуміти поведінку максимальної кількості припаркованих автомобілів
2. виведення аналогу ЦГТ для парковки
3. більше узагальнення.

Дякую за увагу.