

## РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 72 ст., 6 рис., 3 табл., 26 джерел та 3 додатки.

Об'єктом дослідження є процеси паркування і пакування Реньї.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості певних узагальнень моделі паркування Реньї.

Метою даної роботи є вивчення асимптотичних властивостей узагальненої моделі паркування і пакування Реньї з законом вибору місця вставки автомобіля, визначеного сумішшю рівномірного та виродженого розподілів.

В роботі використані методи операційного числення, методи розв'язку диференційних рівнянь зі зсувом, тауберівські теореми. Для чисельної апроксимації інтегралів були використані методи інтегрування квадратурами. Для моделювання процесів паркування було застосовано методи Монте-Карло.

Результати роботи:

- побудовано інтегральне рівняння для узагальненої моделі паркування Реньї;
- доведено можливість застосування тауберівської теореми для визначення асимптотики математичного сподівання рівня заповненості при достатньо великих розмірах парковки;
- доведено асимптотичну еквівалентність математичного сподівання рівня заповненості парковки лінійній функції;
- виведено формулу для визначення коефіцієнта нахилу прямої, що апроксимує математичне сподівання;
- проведено уточнення асимптотики;
- доведено обмеженість другого моменту рівня заповненості функцією, що має порядок менший за квадратичний;
- виведено аналог закону великих чисел для рівня заповненості парковки.

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ, ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ТЕОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗСУВОМ, ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ, ТАУБЕРОВІ ТЕОРЕМИ.

## ABSTRACT

The masters' thesis: 72 p., 6 fig., 3 tabl., 26 sources and 3 appendices.

The topic of this masters' thesis is "Stochastic modeling approach to the cars' parking process research".

The object of this thesis is the set of packing and parking processes.

The subject of this thesis is the set of asymptotic properties of several generalizations of Rényi parking and packing model.

The purpose of this thesis is the investigation of asymptotic properties of generalized Rényi parking and packing model defined by mixture of uniform and determined distributions.

In this paper the following analytic approaches are used: operational calculus methods, delayed differential equations methods, tauberian theorems. Quadratures are used for numerical integration. Simulations are made based on traditional Monte-Carlo paradigms.

Thesis results:

- integral equation for generalized model was built;
- was proven that it is possible to apply tauberian theorems in the context of generalized model;
- asymptotic equivalence of expectation of saturation level and linear function was shown;
- exact, albeit slightly complicated formula for linear function slope was inferred;
- the asymptotics were refined using Mellin transform;
- was proven that second moment is bounded with sub-quadratic function;
- law of large numbers analogue was proven for saturation level.

STOCHASTIC PROCESS THEORY, PROBABILITY THEORY, DELAYED DIFFERENTIAL EQUATION THEORY, OPERATIONAL CALCULUS, TAUBERIAN THEOREMS.

## ЗМІСТ

	Ст.
ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ .....	8
ВСТУП .....	9
<b>РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ІСНУЮЧОЇ ЛІТЕРАТУРИ ТА ПІДХОДІВ</b>	<b>11</b>
1.1 Аналіз існуючих підходів .....	11
1.2 Обґрунтування вибору напрямку дослідження .....	15
Висновки до розділу .....	16
<b>РОЗДІЛ 2 АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА МОМЕНТІВ ЗАПОВНЕНО-</b>	
<b>СТІ ІНТЕРВАЛУ</b>	<b>17</b>
2.1 Ввідні позначення .....	17
2.2 Дослідження крайових випадків .....	17
2.3 Опис необхідного математичного апарату для подальшо-	
го дослідження .....	19
2.3.1 Асимптотична поведінка функції .....	19
2.3.2 Теорема Таубера .....	20
2.4 Дослідження моделі з вибором місця для авто за суміш-	
шю рівномірного та розподілу Бернуллі .....	21
2.4.1 Виведення інтегрального рівняння .....	21
2.4.2 Перехід до зображення Лапласа .....	23
2.4.3 Застосування тауберівської теореми .....	29
2.5 Покращення асимптотичної оцінки .....	35
2.5.1 Виведення розкладу Тейлора для зображення Лапласа	35
2.5.2 Застосування зворотної формули Фур'є-Мелліна .....	37
2.5.3 Застосування асимптотики для виведення аналогу	
закону великих чисел .....	52
Висновки до розділу .....	55
<b>РОЗДІЛ 3 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПАРКУВАННЯ</b>	<b>56</b>
3.1 Вибір платформи і мови реалізації .....	56
3.2 Аналіз архітектури продукту .....	57
3.3 Керівництво користувача .....	57
3.3.1 Основний програмний продукт .....	57
3.4 Аналіз роботи алгоритму .....	59

3.4.1	Алгоритм чисельного вирахування інтегралів .....	59
3.4.2	Алгоритм моделювання на одновимірній парковці ....	63
3.4.3	Алгоритм моделювання на двовимірній парковці .....	64
3.5	Результати роботи програми .....	64
3.5.1	Результати підрахунку констант .....	64
3.5.2	Результати роботи моделера .....	65
	Висновки до розділу .....	66
ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІ-		
ДЖЕНЬ .....		68
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ .....		70
ДОДАТОК А ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДОПОВІДІ .....		73
ДОДАТОК Б ЛІСТИНГ КОДУ .....		81
ДОДАТОК В ТЕОРЕТИЧНИЙ МІНІМУМ .....		91
V.1	Поняття випадкової величини .....	91
V.1.1	Представлення випадкових величин .....	91
V.1.2	Числові характеристики випадкових величин .....	92
V.2	Перетворення Лапласа .....	93
V.2.1	Властивості перетворення Лапласа .....	94

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

МС – математичне сподівання

ММК – метод Монте-Карло

ЕОМ – електронна обчислювальна машина

ЗВЧ – закон великих чисел

ЦГТ – центральна гранична теорема

ММІ – метод математичної індукції

## ВСТУП

Проблеми послідовного пакування інтервалів, що узагальнюють відому концепцію Альфреда Реньї паркування автомобілів, мають досить широкий спектр застосувань. Це фізичні моделі структури рідин, хімічні моделі адсорбції та абсорбції, конструкція кодів з автоматичним виправленням помилок, моделювання систем комунікацій та багато інших.

Перші дослідження стосувалися задачі в класичному формулюванні Реньї. А саме: розглядалися різноманітні властивості моделі паркування автомобілів одиначної довжини та рівномірним розподілом вибору місця для автомобіля. Вивчалися асимптотичні властивості, кількості вільних проміжків довжини не менше заданої, тощо.

Більш пізні дослідження включали вивчення узагальнених одновимірних моделей пакування зі змінними розмірами інтервалів, з он-лайн пакуванням за Пуассонівським розподілом, різними сімействами абсолютно неперервних розподілів з певними обмеженнями.

У той же час, інші дослідження стосувалися спрощеної моделі паркування автомобілів розміру 2 на вузли цілочисельної сітки у один або кілька рядів. Більш складні моделі розміщували автомобілі у вузлах випадкових дерев, або інших структурах графа.

Найбільш сучасні дослідження вивчають асимптотичну поведінку рівня заповненості у багатовимірному просторі, або ж швидкість заповнення інтервалами з експоненційно зменшуваними довжинами.

У цій роботі пропонується вивчити процес пакування одиначних інтервалів з трохи іншої сторони. Розподіл для вибору місця для наступного інтервалу задається сумішшю рівномірного та детермінованого розподілів. Для цього було:

- а) визначено максимальну кількість автомобілів на одновимірній парковці у крайніх, детермінованих випадках, а саме:
  - 1) коли водії ставлять авто впритул до попереднього;
  - 2) вироджений випадок коли водії ставлять авто рівно так, щоб між автомобілями був пропуск розміру  $1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

- 3) коли водії ставлять свій автомобіль строго посередині вільного місця.
- б) побудовано модель із сумішшю рівномірного і детермінованого розподілів, для неї визначено асимптотику при достатньо великих розмірах парковки;
- в) доведено обмеженість дисперсії кількості автомобілів в момент сатурації субквадратичною функцією;
- г) виведено аналог закону великих чисел для розглянутої моделі;
- д) створено невеликий додаток на скриптовій мові Python, що визначає коефіцієнт для асимптотичної оцінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на одновимірній парковці у одновимірному випадку;
- е) створено додаток на високопродуктивній мові C++, що допомагає встановити залежність від лінійних розмірів парковки у двовимірному випадку.

Об'єктом дослідження є процес паркування автомобілів.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості певних узагальнень моделі паркування Реньї.

Практичними результатами роботи є створення додатку для моделювання процесу паркування для більш складних моделей, в тому числі і для двовимірної парковки.

Робота складається з 3 розділів. В першому розділі досліджуються існуючі підходи до вирішення задачі паркування автомобілів, надається перелік існуючої літератури. В другому розділі наводиться виведення точної асимптотичної оцінки для узагальненої моделі Реньї. У третьому розділі наведено обґрунтування вибору платформи розробки, аналіз алгоритму моделювання та алгоритму вирахування констант, отриманих у другому розділі.

## РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ІСНУЮЧОЇ ЛІТЕРАТУРИ ТА ПІДХОДІВ

У даному розділі наведено інформацію про результат Реньї стосовно проблеми парковки та пакування. Також проведено розбір літератури та опрацьовано існуючі роботи на цю тему.

### 1.1 Аналіз існуючих підходів

У 1958 році угорський математик Альфред Реньї опублікував працю щодо проблеми заповнення одновимірного обмеженого простору. Ця праця стала підґрунтям для подальшого дослідження в напрямі проблеми парковки та пакування [1].

Задача формулювалася наступним чином: нехай є заданий відрізок  $[0; x]$ , де  $x > 1$ , і нехай на цей відрізок ”паркуються” одновимірні ”автомобілі” одиничної довжини, керуючись рівномірним розподілом. У такій ситуації доводилось, що середнє максимальне значення кількості машин на парковці буде  $m(x)$  задовільняє наступну систему:

$$m(X) = \begin{cases} 0 & 0 \leq X < 1 \\ 1 + \frac{2}{X-1} \int_0^{X-1} m(y) dy & X \geq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

В такому випадку середня щільність автомобілів для великих  $X$  виходить

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{x} = \int_0^{\infty} \exp \left( -2 \int_0^x \frac{1 - e^{-y}}{y} dy \right) dx \approx 0.747597. \quad (1.2)$$



Але цей результат потребує узагальнення, адже описана вище класична модель Реньї не дає можливості активно застосовувати результат на практиці. Тому у цій роботі буде створена більш загальна модель, в якій водії мають змішану модель поведінки: з деякою ймовірністю вони ставлять свій автомобіль впритул до сусіднього, а в іншому випадку – керуючись рівномірним розподілом.

У роботі Дворецького [2] проведено аналогічне дослідження, але отримано більш точну асимптотичну оцінку:

$$m(X) = Cx - (1 - C) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{2e}{x} \right)^{x-1.5} \right). \quad (1.3)$$

Після отримання асимптотики для першого моменту кількості автомобілів на парковці (1.3) було показано асимптотичну нормальність величини

$$Z_x = \frac{N_x - m(x)}{\sigma(x)} \sim N(0, 1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

де  $N_x$  – випадкова величина, що означає кількість автомобілів на парковці в термінальному стані, а  $\sigma(x)$  – стандартне відхилення  $N_x$ .

У роботі Блезделя [3] описано чисельне вирахування константи  $C$  у одновимірному та двовимірному випадках, тобто автомобілі вже квадрати зі стороною 1, і паркуються на великий квадрат зі стороною  $x$ . Наводиться гіпотеза та чисельне підкріплення, що константа у двовимірному випадку дорівнює  $C^2$ . У 1974 році Лал [4] порахував значення константи  $C$  з точністю до 19 знаку після коми.

У праці Нея [5] проведено аналіз широкого спектру моделей на базі класичної моделі Реньї. Він розглядав процедуру паркування з випадковою довжиною автомобіля, та показав, що при справдженні певних умов регуляризації має сенс досліджувати моменти величини  $N(b, x)$ , що позначає кількість автомобілів довжини не менше ніж  $b$  в термінальному стані на парковці довжини  $x$ . Було доведено, що з виконання наведених у роботі умов регуляризації середнє значення  $N(b, x)$  прямує до лінійної функції від  $x$  з порядком

асимптотики  $\mathcal{O}(x^{-n})$  для будь-якого цілого  $n > 0$ . У випадку рівномірного вибору місця паркування виведено лінійну залежність у явній формі.

Деякі досліджувачі підійшли до проблематики з іншої сторони. Наприклад, у роботі [6] Коффман та ін. виконали аналіз моделі з он-лайн паркуванням за Пуассонівським процесом як для вибору місця прибуття, так і для моменту прибуття. Таким чином, починаючи с часу 0 одиничні інтервали прибувають на  $\mathbb{R}^+$  з імовірністю  $\Delta t \Delta y + o(\Delta t \Delta y)$  потрапити на проміжок  $[y, y + \Delta y]$  між часом  $t$  та  $t + \Delta t$ . При фіксованій довжині парковки  $x > 0$ , інтервал приймається лише у тому випадку, якщо він потрапляє на  $[0, x]$  та не перекривається з існуючими на цей час інтервалами. Далі досліджується кількість  $N_x(t)$  інтервалів, прийнятих до моменту  $t$  включно. Для такої моделі було проведено виведення, дещо аналогічне виведенню для класичної моделі Реньї у праці [2], і було показано, що при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\mathbb{E} N_x(t) \rightarrow \alpha(t)x$  і  $\mathbb{D} N_x(t) \rightarrow \mu(t)x$  рівномірно на  $t \in (0, T)$  для деякого фіксованого  $T$ , де  $\alpha(t)$  та  $\mu(t)$  задані явними, хоча і достатньо складними формулами. Використовуючи цю асимптотику, було доведено асимптотичну нормальність  $N_x(t)$  для фіксованого  $t$ :

$$\frac{N_x - m(x)}{\sigma(x)} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

У наступній своїй праці [7] Коффман та ін. досліджували ту саму модель з Пуассонівським процесом, але розглядали частину вільних проміжків довжини не більше  $y$ . Якщо позначити через  $p(t, y)$  границю при  $x \rightarrow \infty$  частини вільних проміжків на момент  $t$ , то було доведено наступний результат:

$$p(t, y) = \begin{cases} \frac{2 \int_0^t (1 - e^{-vy}) \beta(v) dv}{\alpha(t)}, & y \leq 1, \\ p(t, 1) + \frac{(1 - e^{-t(y-1)}) t \beta(t)}{\alpha(t)}, & y > 1, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{де } \alpha(t) = \int_0^t t \beta(v) dv \text{ і } \beta(t) = \exp \left( -2 \int_0^t \frac{1 - e^{-v}}{v} dv \right).$$

У наступних роботах розглянуто моделі, що заповнюють інтервал повністю. Наприклад, у праці Юлія Баришнікова та Олександра Гнедіна [8] було

розглянуто модель заповнення інтервалу  $[0, 1]$  інтервалами зі змінною довжиною за наступним законом:

$$\mathbb{P}\{I \subset [x, 1 - y]\} = (1 - x - y)^\alpha, \quad (x, y) \in \Delta, \quad (1.7)$$

де  $\alpha > 1$  та  $\Delta = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ . Розглядається асимптотика кількості інтервалів, що були прийняті після  $n$  спроб.

У більш сучасній роботі [9] парковка заповнюється інтервалами довжини 2, після виснаження, вільні проміжки заповнюються одиничними інтервалами, на наступній ітерації інтервалами довжини  $\frac{1}{2}$ , і т.д. Розглядається швидкість виснаження парковки, а саме величина  $\frac{L_{n+1}}{L_n}$ , де  $L_n$  – очікувана сумарна довжина вільних проміжків після  $n$  ітерацій. Доводиться, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = R_{\frac{1}{2}} \approx 0.61. \quad (1.8)$$

Частину досліджень присвячено дискретним моделям. Наприклад, у роботі [10] було розглянуто паркування у два ряди цілочисельної сітки  $\mathbb{Z}$ , а в праці [11] автомобілі паркуються на вершини випадкового дерева. Робота Пояркова присвячена визначенню нижньої межі кількості розміщених кубів для процесу паркування  $d$ -розмірних кубів зі стороною 2 в  $d$ -розмірний куб зі стороною 4 до моменту сатурації. При чому куби з ребром довжини 2 паралельні сторонам великого кубу, і центри знаходяться в цілих точках. Доводиться, що середня кількість малих кубів не менша за  $\left(\frac{3}{2}\right)^d$ .

У роботі Пенроуза [12] розглядається процес пакування одиничних куль в великий куб, аналогічно моделі Реньї, але з будь-якою розмірністю. Доводиться ЗВЧ та ЦГТ для кількості розміщених куль в термодинамічній границі.

## 1.2 Обґрунтування вибору напрямку дослідження

В цитованих роботах одержані досить загальні теоретичні результати в різних моделях, які істотно узагальнюють класичну модель Реньї. В той же час, розгляд настільки загальних задач часто унеможливорює отримання конкретних констант, що з'являються в асимптотичних розкладах для різних характеристик досліджуваних моделей. Тому актуальним залишається вивчення таких узагальнень моделі Реньї, які дозволяють одержувати точні результати.

Прикладом такого узагальнення є наступна модель. Будемо вважати, що закон розподілу, згідно з яким кожний автомобіль обирає місце паркування, є не рівномірним, а сумішшю рівномірного та виродженого розподілу в лівому кінці вільного проміжку.

Наведена модель паркування допускає наступну інтерпретацію. Припустимо, що кожний водій відноситься до однієї з двох категорій – ”досвідчених”, частка яких становить  $p$ , або ”недосвідчених”, частка яких становить  $1 - p$ . Досвідчені водії намагаються припаркувати свої машини впритул до вже припаркованих раніше, в той час як недосвідчені паркуються в будь-якій точці вільного проміжку згідно з рівномірним розподілом.

Науковий інтерес представляє дослідження асимптотичної поведінки такої моделі, а також визначення старших моментів розподілу частки зайнятого проміжку.

Для такої моделі не можна застосувати теорію, описану в роботі Нея [5], адже не виконуються умови регуляризації, що необхідні для ствердження лінійної асимптотичності першого моменту. Проте можливо застосувати апарат перетворень Лапласа та пов'язані з ним теореми.

## **Висновки до розділу**

У розділі було наведено інформацію про результат Ренїї стосовно проблеми парковки та пакування. Було опрацьовано існуючу літературу та проаналізовано існуючі підходи. Наведено обґрунтування вибору напрямку дослідження.

## РОЗДІЛ 2 АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА МОМЕНТІВ ЗАПОВНЕНОСТІ ІНТЕРВАЛУ

### 2.1 Ввідні позначення

Для початку вважатимемо, що у нас одновимірна парковка довжини  $x$ , на якій розташовуються автомобілі, довжини 1 кожен. Для спрощення будемо вважати, що водії прибувають на парковку по черзі, і залишають там свій автомобіль. Процес продовжується до того моменту, допоки парковка не заповниться. Тобто, не залишиться вільного відрізка довжини не менше за 1. Через  $N_x$  позначимо кількість автомобілів на парковці в термінальному стані. Якщо  $N_x$  – випадкова величина, то через  $m(X)$  будемо позначати  $\mathbb{E} N_x$ .

### 2.2 Дослідження крайових випадків

В даному підрозділі розглянуто 3 детерміновані моделі поведінки водіїв для того, щоб отримати певні оцінки для значень  $N_x$ .

Перша модель припускає, що всі водії «чемні» та ставлять свій автомобіль з краю вільної частини парковки, наприклад, зліва. Зрозуміло, що це найбільш оптимальний випадок, тобто така модель дозволить припаркувати рівно стільки автомобілів, скільки взагалі може вміститися на парковці.

Друга модель припускає, що всі водії, навпаки, намагаються зайняти якомога більше місця, і тому відступають від краю вільної зони максимально можливий проміжок, в який не вміститься інший автомобіль.

Третя модель припускає, що водії ставлять свої автомобілі посередині вільного проміжку. Ця модель не є крайнім випадком, але є досить цікавою реалізацією процесу паркування.

Всі 3 моделі схематично зображені на Рис. 2.1.

Тепер необхідно визначити результати для цих моделей. Для першої моделі відповідь досить очевидна:

$$N_x = [x] \quad (2.1)$$

Для другої моделі для спрощення вважатимемо, що усі водії стають зліва вільної частини. Тоді у перших  $[\frac{x}{2}]$  авто зліва буде відповідний проміжок розміром майже 1 (нехай рівно 1 – границя), а також, якщо виконується нерівність  $x - 2 * [\frac{x}{2}] \geq 1$ , то можна вмістити ще 1 автомобіль. Остання нерівність виконується тільки якщо  $[x]$  – непарне число. Але тоді  $[\frac{x+1}{2}] = 2 * [\frac{x}{2}] + 1$ . А якщо  $x$  – парне, то  $[\frac{x}{2}] = [\frac{x+1}{2}]$ , і це допоможе уникнути системи у відповіді. Отже, для другої моделі:

$$N_x = \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil \quad (2.2)$$

Для визначення відповіді для третьої моделі треба навести кілька спостережень:

$$x < 1 \Rightarrow N_x = 0; \quad 1 \leq x < 3 \Rightarrow N_x = 1. \quad (2.3)$$

$$N_x = 2 * F\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1, \quad x \geq 1. \quad (2.4)$$

Перше твердження очевидне, а друге випливає з того, що ставлячи автомобіль посередині вільного проміжку довжини  $x$ , ми отримуємо два нових вільних проміжка довжини  $\frac{x-1}{2}$ . Використовуючи наведені факти, спробуємо довести, що

$$N_x = 2^k - 1, \quad x \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (2.5)$$

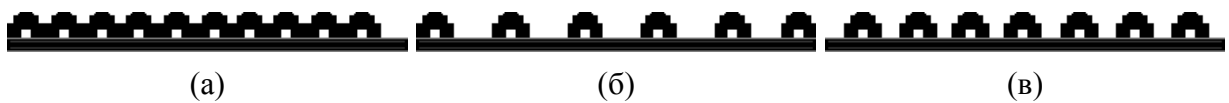


Рисунок 2.1 – Схематичне зображення першої (а), другої (б), та третьої (в) не випадкових моделей

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. База індукції доведена, спираючись на спостереження (2.3). Нехай твердження доведено для  $k$ , доведемо його для  $k + 1$ .

$$x \in [2^{k+1} - 1, 2^{k+2} - 1) \Rightarrow \frac{x - 1}{2} \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1) \quad (2.6)$$

Оскільки виконується (2.4), і для  $k$  виконується (2.5) за припущенням, то маємо:

$$N_x = 2 * F\left(\frac{x - 1}{2}\right) + 1 = 2 * (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1. \quad (2.7)$$

Перехід індукції доведено. □

## 2.3 Опис необхідного математичного апарату для подальшого дослідження

### 2.3.1 Асимптотична поведінка функції

Нехай  $f$  та  $g$  – дві функції, визначені в деякому проколотому околі  $\dot{U}(x_0)$  точки  $x_0$ , причому в цьому околі  $g$  не обертається в 0.

Означення 2.3.1:  $f \in \mathcal{O}$ -великим від  $g$  [14] при  $x \rightarrow x_0$ , якщо

$$\exists C > 0 \forall x \in \dot{U}(x_0) : |f(x)| < C|g(x)|. \quad (2.8)$$

Означення 2.3.2:  $f \in o$ -малим від  $g$  [14] при  $x \rightarrow x_0$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \dot{U}_\varepsilon(x_0) \forall x \in \dot{U}_\varepsilon(x_0) : |f(x)| < \varepsilon|g(x)|. \quad (2.9)$$



Означення 2.3.3:  $f$  є еквівалентним  $g$  [14] ( $f \sim g$ ) при  $x \rightarrow x_0$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

### 2.3.2 Теорема Таубера

Означення 2.3.4: Функція  $L : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – повільно змінна на нескінченності, якщо для  $\forall x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Означення 2.3.5: Функція  $L : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – повільно змінна в 0, якщо  $L(\frac{1}{x})$  – повільно змінна на нескінченності.

Нехай  $u(t) \geq 0$  – така функція, що має зображення Лапласа. Нехай  $U(t) = \int_0^t u(s)ds$  і  $\mathcal{L}\{u(t)\} = \omega(\tau)$ .

Тоді має місце наступна теорема [20, ст. 445].

Теорема 2.3.1 (Тауберівська теорема Феллера): Нехай  $L$  – повільно змінна на нескінченності і  $0 \leq \rho < +\infty$ . Тоді наступні два твердження тотожні:

$$\omega(\tau) \sim \tau^{-\rho} L(1/\tau), \quad \tau \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho + 1)} t^\rho L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Досить цікавим зауваженням до цієї теореми є те, що можна змінити границі на протилежні, тобто  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0$  [20, ст. 445].

Теорема 2.3.2: Твердження теореми (2.3.1) залишається вірним, якщо поміняти місцями 0 та  $\infty$ , тобто  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0$  (і, відповідно,  $L$  – повільно змінна в 0).

## 2.4 Дослідження моделі з вибором місця для авто за сумішню рівномірного та розподілу Бернуллі

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись наступним правилом:

- з ймовірністю  $p$  водій ставить автомобіль в правому кінці вільного проміжку,
- з ймовірністю  $q = 1 - p$  водій вибирає місце керуючись рівномірним розподілом.

### 2.4.1 Виведення інтегрального рівняння

Нескладно переконатись, що порядок вибору вільних проміжків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після паркування одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього спочатку заповнюється ліва частина, а потім права.

Необхідно визначити  $m_p(x) = \mathbb{E} F(x)$ . Нехай  $\xi \sim \text{Uniform}(0, x - 1)$  – випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого автомобіля на парковці у випадку вибору місця за рівномірним розподілом. Тоді

маємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned} m_p(x) &= p(1 + m_p(x-1)) + q(1 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(F(\xi) + F(x-1-\xi)|\xi))) = \\ &= 1 + pm_p(x-1) + q \int_0^{x-1} m_p(t) \frac{1}{x-1} dt + q \int_0^{x-1} m_p(x-t-1) \frac{1}{x-1} dt \end{aligned}$$

Так як

$$\int_0^{x-1} m_p(x-t-1) dt = \langle u = x-t-1 \rangle = - \int_{x-1}^0 m_p(u) du = \int_0^{x-1} m_p(u) du,$$

то

$$m_p(x) = 1 + pm_p(x-1) + \frac{2q}{x-1} \int_0^{x-1} m_p(t) dt. \quad (2.12)$$

Для зручності зробимо заміну  $x \rightarrow x+1$ . Отримаємо

$$m_p(x+1) = 1 + pm_p(x) + \frac{2q}{x} \int_0^x m_p(t) dt, \quad \forall x > 0 \quad (2.13)$$

Таким чином, отримали інтегральне рівняння. До того ж, відомо, що

$$m_p(x) \equiv 0, \quad x \in [0; 1). \quad (2.14)$$

Спираючись на (2.1) та (2.2), маємо обмеження на  $m(x)$ :

$$\left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil \leq m_p(x) \leq [x]. \quad (2.15)$$

З цієї нерівності випливає, що якщо є якась асимптотика у функції  $m_p(x)$ , то вона порядку  $x$ , тобто

$$m_p(x) \sim C_p \cdot x \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad C_p \in [0.5; 1]. \quad (2.16)$$

### 2.4.2 Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати (2.13) за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується (2.15), то зображення Лапласа для  $m_p(x)$  існує. До того ж, за властивістю (B.16):

$$\mathcal{L} \{m_p(x+1)\} = \langle (2.14) \rangle = \mathcal{L} \{m_p(x+1)\eta(x+1)\} = e^s M_p(s). \quad (2.17)$$

Оскільки  $m_p(x) \leq x$ , то  $\int_0^x m_p(t) dt < x^2$ , тобто для інтегралу від  $m_p(x)$  зображення також існує, за властивістю (B.12):

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x m_p(t) dt \right\} = \frac{M_p(s)}{s}.$$

Аналогічно доводиться, що  $\frac{1}{x} \int_0^x m_p(t) dt < x$  при  $x > 0$ , а тому зображення Лапласа для цього виразу також існує. Тоді за властивістю (B.13):

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{2}{x} \int_0^x m_p(t) dt \right\} = 2 \int_s^\infty \frac{M_p(u)}{u} du.$$

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^s M_p(s) = p M_p(s) + 2q \int_s^\infty \frac{M_p(u)}{u} du + \frac{1}{s}. \quad (2.18)$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння відносно  $s$ :

$$e^s M_p(s) + e^s \dot{M}_p(s) = p \dot{M}_p(s) - 2q \frac{M_p(s)}{s} - \frac{1}{s^2}. \quad (2.19)$$

Виразимо  $\dot{M}_p(s)$  з цього рівняння:

$$\dot{M}_p(s) = -M_p(s) \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right) - \frac{1}{s^2(e^s - p)}. \quad (2.20)$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned} \dot{M}_p^h(s) &= -M_p^h(s) \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right) \\ \frac{\dot{M}_p^h(s)}{M_p^h(s)} &= - \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right) \\ \int_1^s \frac{\dot{M}_p^h(u)}{M_p^h(u)} du &= - \int_1^s \left( \frac{e^u}{e^u - p} + \frac{2q}{u(e^u - p)} \right) du \\ \ln M_p^h(u) \Big|_1^s &= - \int_1^s \frac{e^u}{e^u - p} du - 2 \int_1^s \frac{q}{u(e^u - p)} du. \end{aligned}$$

Позначимо

$$Q_p(s) := \int_1^s \frac{q}{u(e^u - p)} du. \quad (2.21)$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
 \int_1^s \frac{e^u}{e^u - p} du &= \langle u = e^u - p, du = e^u du = (u + p) du \rangle = \\
 &= \int_{e-p}^{e^s-p} \frac{u+p}{u} (u+p)^{-1} du = \int_{e-p}^{e^s-p} \frac{du}{u} = \\
 &= \log(e^s - p) - \log(e - p) = \log \frac{e^s - p}{e - p},
 \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 \ln M_p^h(s) &= \ln M_p^h(1) - \log \frac{e^s - p}{e - p} - 2Q_p(s), \\
 M_p^h(s) &= M_p^h(1) \cdot \frac{e - p}{e^s - p} \cdot e^{-2Q_p(s)} \cdot \text{const.}
 \end{aligned}$$

Оскільки  $M(1)$  та  $(e - p)$  можна включити в константу, то маємо розв'язок

$$M_p^h(s) = C \cdot ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1}, \quad \forall C \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Дійсно, перевіримо цей розв'язок:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_p^h(s) &= C \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}} \right) = \\
 &= -C \cdot \left( \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}} \right)^2 \cdot \left( e^s + (e^s - p) \frac{2q}{s(e^s - p)} \right) e^{2Q_p(s)} = \\
 &= -C \cdot ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1} \cdot \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right) = \\
 &= -M_p^h(s) \cdot \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right).
 \end{aligned}$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M_p(s) = C(s) \cdot ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1}.$$

Продиференціювавши відносно  $s$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{M}_p(s) = \dot{C}(s) \cdot ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1} - \\ - C(s) ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1} \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right). \end{aligned}$$

З іншої сторони, з (2.20) маємо

$$\dot{M}_p(s) = -C(s) ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1} \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right) - \frac{1}{s^2(e^s - p)}.$$

Тому

$$\dot{C}(s) = - ((e^s - p)e^{2Q_p(s)}) \cdot \frac{1}{s^2(e^s - p)} = - \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2}.$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до  $s$  отримуємо:

$$C(s) = - \int_1^s \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + const. \quad (2.23)$$

І тоді отримуємо вираз для  $M_p(s)$ :

$$\begin{aligned} M_p(s) &= - \left( \int_1^s \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + \text{const} \right) ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1} = \\ &= - \left( \int_1^s \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\begin{aligned} \dot{M}_p(s) &= - \frac{\partial}{\partial s} \left( \int_1^s \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}} - \\ &- \left( \int_1^s \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) \left( \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}} \right)' = - \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2} \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}} + \\ &- \left( \int_1^s \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) ((e^s - p)e^{2Q_p(s)})^{-1} \cdot \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right) = \\ &= - \frac{1}{s^2(e^s - p)} - M_p(s) \left( \frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2q}{s(e^s - p)} \right). \end{aligned}$$

Перевірено. Тоді остаточний результат без вирахування константи:

$$M_p(s) = \left( \int_s^1 \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}}. \quad (2.24)$$

Спираючись на (2.17), маємо

$$\mathcal{L} \{m_p(x+1)\} = \tilde{M}_p(s) = \left( \int_s^1 \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) \frac{e^s}{e^s - p} e^{-2Q_p(s)}. \quad (2.25)$$

За властивістю перетворення Лапласа  $\tilde{M}_p(s) \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow +\infty$ .



Розглянемо  $Q_p(s)$  ( $s$  розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{aligned} Q_p(s) &= \int_1^s \frac{1-p}{u(e^u - p)} du < \int_1^\infty \frac{1-p}{u(e^u - p)} du < \int_1^\infty \frac{1-p}{e^u - p} du < \\ &< \int_1^\infty \frac{1}{e^u} du = \exp(-1) - \exp(-\infty) = \exp(-1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Останній перехід нерівності пояснюється досить просто:

$$\frac{1-p}{u-p} < \frac{1}{p}, \quad u > 1 \Leftrightarrow u - up = u(1-p) < u - p, \quad u > 1.$$

Тобто  $Q_p(s)$  - обмежена на  $[1; \infty]$ . Тому обмеженими на цій вісі будуть і  $e^{\pm 2Q_p(s)}$ . Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то  $Q_p(s)$  – монотонно зростаюча за  $s$ . Тому

$$0 = \tilde{M}_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{M}_p(s) = \left( \int_1^\infty \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-2Q_p(s)}. \quad (2.27)$$

Тут  $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-2Q_p(s)} = \text{const} > 0$ , тому маємо, що

$$K = - \int_1^\infty \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du = \int_1^\infty \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du. \quad (2.28)$$

Таким чином, отримали нову версію  $M_p(s)$ :

$$\begin{aligned} M_p(s) &= \left( \int_s^1 \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du + K \right) \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}} = \\ &= \frac{1}{(e^s - p)e^{2Q_p(s)}} \int_s^\infty \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du. \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.4.3 Застосування тауберівської теореми

Для знаходження асимптотики  $m_p(x)$  на нескінченності, за теоремою Таубера (2.3.1) необхідно визначити асимптотику  $M_p(s)$  при  $s \rightarrow 0$ .

Якщо знайти такі  $C \in \mathbb{R}$  та  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , що  $M_p(s) \sim C \cdot s^{-\delta}$ ,  $s \rightarrow 0$ , то можна стверджувати, що  $\int_0^x m_p(x) dx \sim \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} C x^\delta$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Вже зараз зрозуміло, що  $\delta = 2$ , адже теорема справедлива в обидва боки і виконується (2.16).

Для цього розглянемо поведінку в нулі трьох множників, з яких складається  $M_p(s)$ , а саме:

$$M_p(s) = \frac{1}{(e^s - p)} \cdot \frac{1}{e^{2Q_p(s)}} \cdot \int_s^\infty \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du.$$

Щодо першого множнику, то в 0 він, очевидно, прямує до  $\frac{1}{1-p}$ .

Для наступного аналізу доведемо деякі леми.

Лема 2.4.1:  $e^{-2Q_p(s)}$  поводитья як  $s^{-2}$  в 0, з точністю до константи, а саме:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-2Q_p(s)}}{s^{-2}} = \exp \left( -2 \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right). \quad (2.30)$$

Доведення. Для знаходження границі прологарифмуємо вираз. Отримаємо:

$$\begin{aligned} 2 \ln s - 2Q_p(s) &= 2 \ln s - 2 \int_1^s \frac{1-p}{u(e^u - p)} du = 2 \int_1^s \frac{1}{u} du - \\ &- 2 \int_1^s \frac{1-p}{u(e^u - p)} du = 2 \int_1^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du = -2 \int_s^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du. \end{aligned}$$

Тепер, підвівши до експоненти обидві частини, отримаємо:

$$\frac{e^{-2Q_p(s)}}{s^{-2}} = \exp \left( -2 \int_s^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right).$$

Якщо довести, що інтеграл

$$-2 \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du$$

збігається, то лему буде доведено, адже експонента – неперервна функція, і можна переходити до границі під експонентою. Зрозуміло, що

$$-2 \int_s^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du$$

збігається для  $\forall s \in (0; 1]$ . Дійсно, оскільки  $e^u - 1 < e^u - p$ , підінтегральна функція  $\frac{1-e^{-u}}{u}$  мажорується  $\frac{1}{u}$ , яка, в свою чергу, має скінченне значення інтегралу:

$$\int_s^1 \frac{1}{u} du = \ln 1 - \ln s = -\ln s, \quad s > 0.$$

Невизначеність виникає лише в точці 0. Знайдемо границю підінтегральної функції в точці 0:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} &= \langle \text{правило Лопіталя для невизначеності } 0/0 \rangle = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^u}{ue^u + (e^u - p)} = \frac{1}{1 - p}. \end{aligned}$$

Таким чином, підінтегральна функція обмежена в деякому  $\varepsilon$ -околі 0, тому інтеграл також збіжний, і лему доведено.  $\square$

#### Лема 2.4.2: Функція

$$Q_p(s) = \int_1^s \frac{1-p}{u(e^u - p)} du$$

– обмежена на  $[w; \infty]$ ,  $w > 0$ .

Доведення. На проміжку  $[1; \infty]$  підінтегральна функція мажорується функцією  $e^{-u}$  (див. (2.26)), а на проміжку  $[w; 1]$  – функцією  $\frac{1}{u}$ , адже  $1 - p < e^u - p$ ,  $u > 0$ . Тому, аналогічно доведенню попередньої лема, інтеграл буде

збіжний, і:

$$Q_p(s) \leq \int_1^{\infty} e^{-u} du = \exp(-1), \quad s \geq 1,$$

$$Q_p(s) \leq \int_w^1 \frac{1}{u} du = -\ln w, \quad s \in [w; 1].$$

Таким чином,  $Q_p(s) \leq \max\{-\ln w, \exp(-1)\}$ . □

Лема 2.4.3: Інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du$$

– збіжний.

Доведення. Спираючись на лему (2.4.1), маємо, що підінтегральна функція прямує до деякої константи при  $u \rightarrow 0$ , оскільки є обернено пропорційною до функції з тої леми. Тому в деякому проколотому  $\varepsilon$ -околі точки 0 підінтегральна функція буде обмежена. На інтервалі  $[\varepsilon; \infty]$  за лемою (2.4.2),  $Q_p(u)$  – обмежена, а тому і  $\exp(2Q_p(u))$  також. Тому збіжність на інтервалі  $[\varepsilon; \infty]$  виконується, якщо збігається інтеграл

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{u^2} du.$$

А його збіжність – відомий факт. □

Таким чином, спираючись на доведені леми, маємо при  $s \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 M_p(s) &\sim \frac{s^{-2}}{1-p} \cdot \exp \left( -2 \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right) \int_0^\infty \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du = \\
 &= \frac{s^{-2}}{1-p} \cdot \exp \left( -2 \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right) \times \\
 &\times \int_0^\infty \exp \left( 2 \int_1^u \frac{1-p}{\tau(e^\tau - p)} d\tau - 2 \ln u \right) du = \\
 &= \frac{s^{-2}}{1-p} \cdot \exp \left( -2 \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right) \times \\
 &\times \int_0^\infty \exp \left( 2 \int_1^u \frac{1-p}{\tau(e^\tau - p)} d\tau - 2 \int_1^u \frac{1}{\tau} d\tau \right) du = \\
 &= \frac{s^{-2}}{1-p} \cdot \exp \left( -2 \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right) \times \\
 &\times \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_1^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du = \\
 &= \frac{s^{-2}}{1-p} \cdot \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^1 \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau - 2 \int_1^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du.
 \end{aligned}$$

Склавши інтеграли під експонентою, отримаємо:

$$M_p(s) \sim s^{-2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-p} \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du}_{\text{збігається, не залежить від } s}, \quad s \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

Тепер, за теоремою Таубера маємо при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\int_0^x m_p(x) dx \sim \frac{1}{(1-p)\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du \cdot x^2. \quad (2.32)$$

Або, продиференціювавши обидві частини, отримаємо:

$$m_p(x) \sim \frac{2}{(1-p)\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du \cdot x.$$

$$m_p(x) \sim \frac{1}{1-p} \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du \cdot x, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Тут була можливість диференціювати обидві частини за правилом Лопіталя, адже має місце невизначеність  $\infty/\infty$ .

Таким чином було доведено, що  $m_p(x) \sim C_p \cdot x$  при  $x \rightarrow \infty$ , де

$$C_p = \frac{1}{1-p} \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du. \quad (2.34)$$

## 2.5 Покращення асимптотичної оцінки

Нескладно помітити, що  $\mu_p(x) = Cx - \frac{1-C}{1-p}$  є розв'язком рівняння (2.13)  $\forall C \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{2(1-p)}{x} \int_0^x \mu_p(t) dt + p\mu_p(x) = \\
 & = 1 + \frac{2(1-p)}{x} \int_0^x \left\{ Ct - \frac{1-C}{1-p} \right\} dt + p \left( Cx - \frac{1-C}{1-p} \right) = \\
 & = 1 + (1-p)Cx - 2(1-C) + pCx - \left( \frac{1}{1-p} - 1 \right)(1-C) = \\
 & = C(x+1) - \frac{1-C}{1-p} = \mu_p(x+1).
 \end{aligned}$$

Тому резонно апроксимувати досліджувану функцію  $m_p(x)$  використовуючи функцію  $\mu_p$ . Далі буде доведено наступне твердження:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( m(x) - C_p x + \frac{1-C_p}{1-p} \right) = 0. \quad (2.35)$$

### 2.5.1 Виведення розкладу Тейлора для зображення Лапласа

Нескладно помітити, що

$$\begin{aligned}
 Q_p(s) &= \int_1^s \frac{1-p}{u(e^u - p)} du = \int_1^s \frac{1}{u} du - \int_1^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du = \\
 &= \ln(s) - \int_1^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du.
 \end{aligned} \quad (2.36)$$



Тоді з (2.36) та (2.29) маємо

$$M_p(s) = \frac{e^{-2Q_p(s)}}{(e^s - p)} \int_s^\infty \frac{e^{2Q_p(u)}}{u^2} du =$$

$$\frac{s^{-2}}{e^s - p} \exp \left( 2 \int_1^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right) \int_s^\infty \exp \left( -2 \int_1^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du.$$

Оскільки  $e^u - 1 \sim u$ ,  $u \rightarrow 0$ , то інтеграл  $\int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du$  існує для  $\forall p < 1$ .

Отже, можна винести з-під інтегралу константу  $\exp \left( \int_0^1 \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right)$ .

$$M_p(s) = \frac{s^{-2}}{e^s - p} \exp \left( 2 \int_0^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right) \int_s^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du =$$

$$= \frac{s^{-2}}{e^s - p} \exp \left( 2 \int_0^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du \right) \left[ (1 - p)C_p - \int_0^s \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du \right].$$

Оскільки  $s^2 M_p(s)$  — аналітична функція на  $\Re s > \sigma$ , де  $\sigma < 0$  при  $p < 1$ , то з розкладу в ряд Тейлора випливає

$$M_p(s) = \frac{C_p}{s^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial s}(s^2 M_p(s))}{s} + \psi_p(s), \quad (2.37)$$

де  $\psi_p(s)$  — аналітична на  $\Re s > \sigma$ . Позначимо через  $R_p(s) = \int_0^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du$ , тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(s^2 M_p(s)) &= -\frac{e^s}{(e^s - p)^2} \left[ (1 - p)C_p e^{2R_p(s)} - \int_0^s e^{2(R_p(s) - R_p(u))} du \right] + \\ &+ \frac{1}{e^s - p} \left[ \left( (1 - p)C_p - \int_0^s e^{-R_p(u)} du \right) e^{2R_p(s)} \frac{2(e^s - 1)}{s(e^s - p)} - e^{2(R_p(s) - R_p(s))} \right]. \end{aligned}$$

Підставивши  $s = 0$ , отримаємо

$$\frac{\partial(s^2 M_p)}{\partial s}(0) = -\frac{1}{(1 - p)^2}(1 - p)C_p + \frac{1}{1 - p} [2C_p - 0 - 1] = \frac{C_p - 1}{1 - p}.$$

Таким чином,

$$M_p(s) = C_p s^{-2} - \frac{1 - C_p}{1 - p} s^{-1} + \psi_p(s). \quad (2.38)$$

### 2.5.2 Застосування зворотної формули Фур'є-Мелліна

У цьому параграфі буде виконано уточнення оцінки (2.35) за допомогою зворотної формули Фур'є-Мелліна. У роботі [19] цей результат сформульовано наступним чином.

**Теорема 2.5.1 (Формула Фур'є-Мелліна):** Нехай  $f(t) = 0, t < 0, f(t) < Ce^{\alpha t}, \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ . Тоді  $\forall \sigma > \alpha$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s) ds. \quad (2.39)$$

Наслідок 2.5.1: Нехай  $0 < f(t) < Ce^{\alpha t}$ ,  $\forall \alpha > 0$  і  $F(s)$  — аналітична в півплощині  $s > \sigma$ ,  $\sigma < 0$ . Тоді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{st} F(s) ds. \quad (2.40)$$

Доведення. Спочатку покажемо, що  $|F(s)| < F(\Re s)$ .

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t) e^{-st}| dt = \int_0^\infty f(t) e^{-t \Re s} dt = F(\Re s).$$

Тепер, оскільки  $F$  — аналітична в правій півплощині відносно  $\sigma$ , то за теоремою Коші [18] інтеграл по контуру, зображеному на Рис. 2.2 дорівнює нулю:

$$\int_{-iR}^{iR} F(s) e^{st} ds + \int_{iR}^{iR+\delta} F(s) e^{st} ds + \int_{iR+\delta}^{-iR+\delta} F(s) e^{st} ds + \int_{-iR+\delta}^{-iR} F(s) e^{st} ds = 0.$$

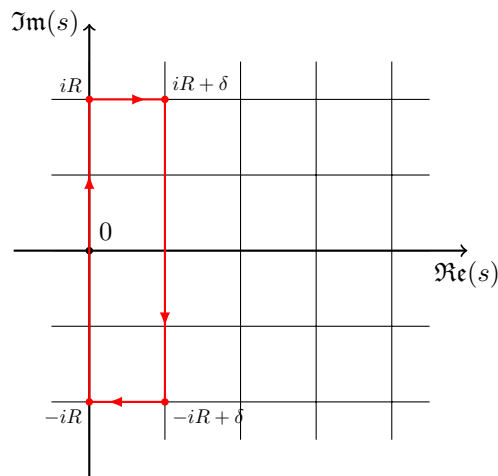


Рисунок 2.2 – Шлях інтегрування аналітичної функції  $F(s)$

Позначимо  $V(R) = \int_{-iR+\delta}^{iR+\delta} F(s)e^{st}ds$ ,  $\forall 0 < \delta < 1$ . Нескладно переконатися, що  $\left| \int_{iR}^{iR+\delta} F(s)e^{st}ds \right| \leq \delta e^{\delta t} \max_{[0,1]} |F(\Re s)| \leq \delta \cdot \text{const}$ . Тоді  $\forall \delta > 0, \forall R > 0$

$$\left| \int_{-iR}^{iR} F(s)e^{st}ds - V(R) \right| \leq \delta \cdot \text{const}.$$

Зробимо граничний перехід  $\delta \rightarrow 0$ : оскільки через аналітичність  $F(s)$  інтеграл  $\int_{-iR}^{iR} F(s)e^{st}ds$  існує, то

$$\int_{-iR}^{iR} F(s)e^{st}ds = V(R).$$

Завершується доведення граничним переходом  $R \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR}^{iR} F(s)e^{st}ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} V(R) = f(t).$$

□

Виходячи з рівняння (2.38), аналітичності  $\psi_p(s)$  та наслідку (2.5.1), маємо наступне твердження:

$$m_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} M_p(s)e^{sx}ds = C_p x - \frac{1-C_p}{1-p} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(it)e^{itx}dt. \quad (2.41)$$

Для подальшого виведення знадобиться наступна лема.

Лема 2.5.1: Нехай  $p \in (0, 1)$ , тоді виконуються наступні твердження:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta - p}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} d\theta = 0, \quad (2.42)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} d\theta = 0. \quad (2.43)$$

Доведення. Друге рівняння доводиться досить тривіально:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} d\theta &= - \int_0^{\pi} \frac{d(\cos \theta)}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d(\cos \theta)}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{du}{p^2 - 2pu + 1} - \int_{-1}^1 \frac{du}{p^2 - 2pu + 1} = 0. \end{aligned}$$

Для доведення першого рівняння знайдемо первісну підінтегральної функції. Нескладно переконатися, що

$$\int \frac{\cos \theta - p}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} d\theta = \frac{2 \arctan \left( \frac{1+p}{1-p} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \theta}{2p} = I(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Через періодичність  $\cos \theta$  визначений інтеграл на  $[0, 2\pi]$  дорівнює інтегралу на  $[-\pi, \pi]$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta - p}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} d\theta &= I(\pi-) - I(-\pi+) = \\ &= \frac{2 \arctan(+\infty) - \pi - 2 \arctan(-\infty) - \pi}{2p} = 0. \end{aligned}$$

□

Наслідок 2.5.2: Нехай  $p \in (0, 1)$ , тоді наступні інтеграли існують:

$$\int_1^\infty \frac{\cos \theta - p}{\theta(p^2 - 2p \cos \theta + 1)} d\theta,$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin \theta}{\theta(p^2 - 2p \cos \theta + 1)} d\theta.$$

Доведення. Наведемо доведення для інтегралу з косинусом, для другого цілком аналогічно. Розглянемо інтеграл на проміжку  $[2\pi n + \arccos p, 2\pi(n + 1) + \arccos p]$ :

$$\int_{2\pi n + \arccos p}^{2\pi(n+1) + \arccos p} \frac{\cos \theta - p}{\theta(p^2 - 2p \cos \theta + 1)} d\theta.$$

Оскільки на проміжку  $[2\pi n + \arccos p, 2\pi(n + 1) - \arccos p]$  функція  $(\cos \theta - p)$  – недодатня, а на проміжку  $[2\pi(n + 1) - \arccos p, 2\pi(n + 1) + \arccos p]$  – невід’ємна, то

$$\begin{aligned} & \int_{2\pi n + \arccos p}^{2\pi(n+1) + \arccos p} \frac{\cos \theta - p}{\theta(p^2 - 2p \cos \theta + 1)} d\theta \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi(n + 1) - \arccos p} \int_{2\pi n + \arccos p}^{2\pi(n+1) + \arccos p} \frac{\cos \theta - p}{p^2 - 2p \cos \theta + 1} d\theta = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно інтеграл на проміжку  $[2\pi n - \arccos p, 2\pi(n + 1) - \arccos p]$  буде не менше 0. Таким чином,

$$\int_1^{2\pi - \arccos p} (\dots) d\theta \leq \int_1^\infty \frac{\cos \theta - p}{\theta(p^2 - 2p \cos \theta + 1)} d\theta \leq \int_1^{2\pi + \arccos p} (\dots) d\theta.$$

До того ж,

$$\int_1^\infty \frac{\cos \theta - p}{\theta(p^2 - 2p \cos \theta + 1)} d\theta = \int_1^{2\pi - \arccos p} (\dots) d\theta + \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \int_{2\pi n - \arccos p}^{2\pi(n+1) - \arccos p} (\dots) d\theta}_{\geq 0}.$$

Таким чином, маємо обмежену монотонну послідовність, і тому у неї є границя.  $\square$

Справедливим є ще один наслідок, що доводиться аналогічно попередньому.

Наслідок 2.5.3: Нехай  $p \in (0, 1)$ ,  $\alpha \geq 0$ , тоді наступний інтеграл обмежений зверху не залежно від  $\alpha$ :

$$\int_1^\infty \frac{e^{\alpha\theta} \cos \theta - p}{\theta(p^2 - 2pe^{\alpha\theta} \cos \theta + e^{2\alpha\theta})} d\theta \leq C.$$

У наступній лемі буде використано поняття асимптотичного  $\mathcal{O}$  для комплекснозначних функцій. У роботі [13] Ніколас де Брьойн визначив цю асимптотичну властивість наступним чином.

Означення 2.5.1: Нехай  $S$  – деяка множина.  $f$  та  $\varphi$  – деякі дійснозначні або комплекснозначні функції, визначені на множині  $S$ . Тоді формула

$$f(s) = \mathcal{O}(\varphi(s)), \quad s \in S,$$

означає, що існує таке додатне число  $A$ , що не залежить від  $s$ , і

$$|f(s)| = A|\varphi(s)|, \quad \forall s \in S.$$

Лема 2.5.2: Для  $\forall p \in [0; 1)$

$$\psi_p(it) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|t|}\right). \quad (2.44)$$

Доведення. Якщо показати, що  $M_p(it) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|t|}\right)$ , то твердження леми випливає автоматично:

$$\psi_p(it) = M_p(it) + C_p t^{-2} - i \frac{1 - C_p}{1 - p} t^{-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|t|}\right).$$

Залишається показати, що для

$$M_p(s) = \frac{s^{-2}}{e^s - p} \exp\left(2 \int_0^s \frac{e^u - 1}{u(e^u - p)} du\right) \int_s^\infty \exp\left(-2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau\right) du$$

твердження правдиве. Щоб при підрахунку  $M_p(it)$  інтегрувати за уявною віссю, необхідно показати, що інтеграл

$$\int_{it}^{i\infty} \exp\left(-2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau\right) du$$

існує. Оскільки інтеграл по контуру, зображеному на Рис. 2.3, дорівнює 0 за теоремою Коші, то

$$\int_{it}^{iR} = - \int_{K_t} + \int_t^R + \int_{K_R},$$

де  $K_r$  — інтеграл по дузі з радіусом  $r$  та зміною кута відносно вісі абсцис в межах  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .



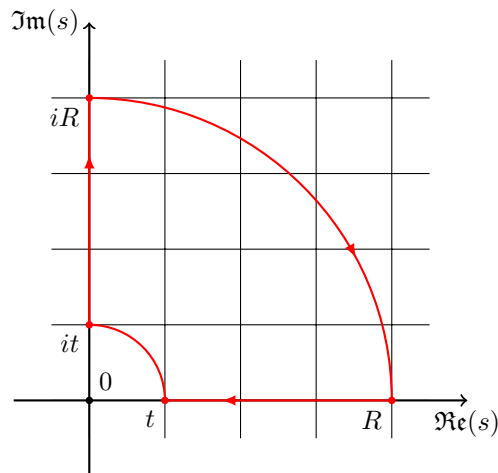


Рисунок 2.3 – Шлях інтегрування функції  $\exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right)$

Нескладно помітити, що для доведення існування інтегралу  $\int_{it}^{i\infty}$  достатньо показати, що  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R}$  існує, адже інтеграл  $\int_t^\infty$  існує через існування  $M_p(t)$ . Інтеграл по  $K_R$  можна розписати наступним чином:

$$\begin{aligned} \int_{K_R} \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du &= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2 \int_0^{Re^{i\varphi}} \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau} ie^{i\varphi} d\varphi = \\ &= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2 \int_0^R \frac{e^{re^{i\varphi}} - 1}{r(e^{re^{i\varphi}} - p)} dr} ie^{i\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Щоб довести існування, достатньо показати абсолютну збіжність інтегралу.

$$\begin{aligned}
R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-2 \int_0^R \frac{e^{re^{i\varphi}} - 1}{r(e^{re^{i\varphi}} - p)} dr} i e^{i\varphi} \right| d\varphi &= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-2 \int_0^R \frac{e^{re^{i\varphi}} - 1}{r(e^{re^{i\varphi}} - p)} dr} \right| d\varphi = \\
&= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-2 \int_0^R \frac{(e^{re^{i\varphi}} - 1)(e^{re^{-i\varphi}} - p)}{r(e^{re^{i\varphi}} - p)(e^{re^{-i\varphi}} - p)} dr} \right| d\varphi = \langle \theta = r \sin \varphi \rangle = \\
&= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-2 \int_0^R \frac{1 - (1+p)e^{-r \cos \varphi} \cos \theta + pe^{-2r \cos \varphi} + (1-p)ie^{-r \cos \varphi} \sin \theta}{r((\cos \theta - pe^{-r \cos \varphi})^2 + \sin^2 \theta)} dr} \right| d\varphi.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Оскільки  $\sin \theta = \sin(r \sin \varphi) = \mathcal{O}(r)$ ,  $r \rightarrow 0$ , то інтеграл

$$i \int_0^R \frac{(1-p)e^{-r \cos \varphi} \sin \theta}{r((\cos \theta - pe^{-r \cos \varphi})^2 + \sin^2 \theta)} dr$$

існує, і уявною частиною чисельника інтеграла під експонентою можна знехтувати через модуль.

Розглянемо інтеграл

$$I(p, \varphi, R) = \int_0^R \frac{1 - (1+p)e^{-r \cos \varphi} \cos \theta + pe^{-2r \cos \varphi}}{r((\cos \theta - pe^{-r \cos \varphi})^2 + \sin^2 \theta)} dr.$$

Якщо показати, що  $(2I(p, \varphi, R) - \ln R) \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow \infty$  не залежно від  $\varphi$ , то інтеграл по  $K_R$  є абсолютно збіжним. Дійсно, у такому випадку

$$R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2I(p, \varphi, R)} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2I(p, \varphi, R) + \ln R} d\varphi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Спочатку покажемо, що можна знехтувати частиною інтегралу в межах від 0 до 1. По-перше,

$$\begin{aligned} (\cos \theta - pe^{-r \cos \varphi})^2 + \sin^2 \theta &= 1 + p^2 e^{-2r \cos \varphi} - 2pe^{-r \cos \varphi} \cos \theta = \\ &= (pe^{-r \cos \varphi} - 1)^2 + (1 - \cos \theta) 2pe^{-r \cos \varphi} \geq (1 - p)^2. \end{aligned}$$

Таким чином, порядок полюса в 0 підінтегральної функції не перевищує одного. Розкладемо складові чисельника у ряд Тейлора в нулі:

$$\begin{aligned} 1 - (1 + p)e^{-r \cos \varphi} \cos \theta + pe^{-2r \cos \varphi} &= 1 + p(1 - 2r \cos \varphi + o(r)) - \\ &- (1 + p)(1 - r \cos \varphi + o(r))(1 + o(r)) = (1 - p)r \cos \varphi + o(r). \end{aligned}$$

Отримали, що в нулі  $r$  у чисельника і знаменника скорочується, і в нулі немає особливих точок. До того ж, і чисельник, і знаменник обмежені зверху і знизу не залежно від  $\varphi$ , тому далі можна не враховувати частину інтегралу від 0 до 1, і розглядати лише

$$I(p, \varphi, R) = \int_1^R \frac{1 - (1 + p)e^{-r \cos \varphi} \cos \theta + pe^{-2r \cos \varphi}}{r((\cos \theta - pe^{-r \cos \varphi})^2 + \sin^2 \theta)} dr, \quad R > 1.$$

Зрозуміло, що замість нижньої границі 1 можна узяти будь-яку фіксовану  $R_0 > 0$ . Тепер розглянемо 2 випадки,  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$  та  $\varphi \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$  відповідно.

Нехай  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$ . Візьмемо  $R_0 = \sqrt{2} \ln(\max\{10, 9p\})$ . Тоді

$$\begin{aligned}
 1 - 2pe^{-r \cos \varphi} \cos \theta + p^2 e^{-2r \cos \varphi} &= 1 + pe^{-r \cos \varphi} (pe^{-r \cos \varphi} - 2 \cos \theta) \leq \\
 &\leq 1 + 3pe^{-r \cos \varphi} \leq \langle \cos \varphi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, r \geq \sqrt{2} \ln 9p \rangle \leq \frac{4}{3}, \\
 2I(p, \varphi, R) &\geq \int_{R_0}^R \frac{(1 - pe^{-r \cos \varphi})(1 - e^{-r \cos \varphi})}{\frac{2}{3}r} dr \geq \\
 &\geq \int_{R_0}^R \frac{\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{2}{3}r} dr = \frac{6}{5} \ln R + \text{const}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, якщо  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$ , то  $2I(p, \varphi, R) - \ln R = \frac{\ln R}{5} + \text{const} \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Нехай тепер  $\varphi \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ . Розглянемо  $I(p, \varphi, R) - \ln R$ :

$$\begin{aligned}
 &\int_1^R \frac{1 - (1+p)e^{-r \cos \varphi} \cos \theta + pe^{-2r \cos \varphi}}{r(1 - 2pe^{-r \cos \varphi} \cos \theta + p^2 e^{-2r \cos \varphi})} dr - \int_1^R \frac{1}{r} dr = \\
 &= \int_1^R \frac{-(1-p)e^{-r \cos \varphi} \cos \theta + p(1-p)e^{-2r \cos \varphi}}{r(1 - 2pe^{-r \cos \varphi} \cos \theta + p^2 e^{-2r \cos \varphi})} dr = \langle \alpha = \text{ctg } \varphi \rangle = \\
 &= (1-p) \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^{\frac{R}{\sin \varphi}} \frac{pe^{-2\alpha\theta} - e^{-\alpha\theta} \cos \theta}{\theta(1 - 2pe^{-\alpha\theta} \cos \theta + p^2 e^{-2\alpha\theta})} d\theta. \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Обмеженість інтегралу (2.46) знизу впливає з наслідку (2.5.3). Таким чином, якщо  $\varphi \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ , то  $2I(p, \varphi, R) - 2 \ln R \leq \text{const} \Rightarrow 2I(p, \varphi, R) - \ln R \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Отже, при  $t > 0$

$$M_p(it) = -\frac{it^{-2}}{e^{it} - p} \exp \left( 2 \int_0^t \frac{e^{iu} - 1}{u(e^{iu} - p)} du \right) \times \\ \times \int_t^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^{i\tau} - 1}{\tau(e^{i\tau} - p)} d\tau \right) du. \quad (2.47)$$

З наслідку (2.5.2) зрозуміло, що інтеграл  $\int_1^\infty \frac{1-p}{u(e^{iu}-p)} du$  існує, а тому з (2.47) негайно випливає

$$M_p(it) = \mathcal{O} \left( \frac{1}{|t|} \right) \quad (2.48)$$

для  $t > 0$ . За властивістю перетворення Лапласа  $M_p(-it) = \overline{M_p(it)}$ , тому (2.48) виконується і для  $t < 0$ .  $\square$

Повернемося до вираження  $m_p(x)$  через формулу Мелліна:

$$m_p(x) = C_p x - \frac{1 - C_p}{1 - p} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi_p(it) e^{itx} dt, \\ m_p(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p} = \frac{p}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi_p(it) e^{it(x-1)} dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (e^{it} - p) \psi_p(it) e^{it(x-1)} dt.$$

Позначимо  $\Psi_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(it) e^{itx} dt$ . Для  $\Psi_p$  нескладно вивести початкові значення:

$$\begin{aligned}\Psi_p(x) &= \frac{1 - C_p}{1 - p} - C_p x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \Psi_p(x) &= 1 + \frac{1 - C_p}{1 - p} - C_p x, \quad 1 < x \leq 2.\end{aligned}\tag{2.49}$$

За лемою (2.5.2) можна застосувати інтегрування частинами до  $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{it} - p) \psi_p(it) e^{it(x-1)} dt$ .

$$\begin{aligned}m_p(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p} - p \Psi_p(x - 1) &= \\ &= -\frac{i}{2\pi(x-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} ((e^{it} - p) \psi_p(it)) e^{it(x-1)} dt.\end{aligned}$$

Оскільки  $\psi_p(it) = M_p(it) + C_p t^{-2} - i \frac{1 - C_p}{1 - p} t^{-1}$ , то

$$\frac{\partial}{\partial t} ((e^{it} - p) \psi_p(it)) = \frac{\partial}{\partial t} ((e^{it} - p) M_p(it)) + \frac{1 - C_p}{1 - p} e^{it} t^{-1} + \mathcal{O}(t^{-2}).$$

Використовуючи (2.20) нескладно переконатися, що  $\frac{\partial}{\partial t} ((e^{it} - p) M_p(it)) = \mathcal{O}(t^{-2})$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} ((e^{it} - p) M_p(it)) = -2(1 - p) \frac{M_p(it)}{it} + \frac{1}{t^2} = \mathcal{O}(t^{-2}).$$

Тоді отримали, що

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} ((e^{it} - p)\psi_p(it)) e^{it(x-1)} dt = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 - C_p}{1 - p} e^{it} t^{-1} + \mathcal{O}(t^{-2}) \right) e^{it(x-1)} dt = \\
& = \text{const} + \frac{1 - C_p}{1 - p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{t} dt.
\end{aligned}$$

Тепер залишається спертися на відомий факт про збіжність та обмеженість інтегралу  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{t} dt$ , і отримаємо, що

$$m_p(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p} - p\Psi_p(x - 1) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x - 1}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Це означає, що  $\exists N \in \mathbb{R}^+$  таке, що  $|m_p(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p} - p\Psi_p(x - 1)| < N \left|\frac{1}{x}\right|$  при  $x \geq 1$ . Покажемо, що  $\Psi_p(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ . Для  $0 < x < 2$  це, очевидно, виконується – наслідок (2.49). Нехай це виконується для усіх  $1 \leq x \leq X$ :  $|\Psi_p(x)| < M \left|\frac{1}{x}\right|$ . Будемо вважати, що  $M \geq \frac{2N}{1-p}$ . Тоді

$$\begin{aligned}
|\Psi_p(X + 1)| &= |m_p(X + 1) - C_p(X + 1) + \frac{1 - C_p}{1 - p}| \leq \\
& p|\Psi_p(X)| + N \left| \frac{1}{X + 1} \right| \leq (pM \cdot \frac{X + 1}{X} + N) \left| \frac{1}{X + 1} \right|.
\end{aligned}$$

Якщо  $M \leq pM \cdot \frac{X + 1}{X} + N$ , то покладемо  $M \leftarrow pM \cdot \frac{X + 1}{X} + N$ . Така процедура обмежена, оскільки при фіксованому  $p$  величина  $X$  дійде до такої, що  $\frac{X + 1}{X} \leq \frac{1 + p}{2p}$ . Тоді

$$pM \cdot \frac{X + 1}{X} + N \leq \frac{1 + p}{2} M + N \leq \frac{1 + p}{2} M + \frac{1 - p}{2} M = M.$$

Отримали, що  $\Psi_p(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \geq 1$ . За визначенням,

$$\Psi_p(x) = m_p(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p},$$

тому, очевидно,

$$m_p(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Нескладно переконатися з (2.20), що

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}((e^{it} - p)m_p(it)) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Тоді, очевидно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}((e^{it} - p)\psi_p(it)) e^{it(x-1)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( i \frac{1 - C_p}{1 - p} e^{it} t^{-1} + \mathcal{O}(t^{-2}) \right) e^{it(x-1)} dt = \\ &= \text{const} + i \frac{1 - C_p}{1 - p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{t} dt. \end{aligned}$$

Тому, інтегруючи частинами ще раз і повторюючи прийом вище, але з більш жосткою оцінкою асимптотики справа, можна показати, що

$$m(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$



За допомогою ММІ можна показати, що

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}((e^{it} - p)m_p(it)) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тоді для  $\forall n \in \mathbb{N}$  можна показати, що

$$m(x) - C_p x + \frac{1 - C_p}{1 - p} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.50)$$

### 2.5.3 Застосування асимптотики для виведення аналогу закону великих чисел

Розглянемо випадкову величину  $N_p(x + 1)$ , що позначає кількість автомобілів на парковці довжини  $x + 1$  в момент заповнення. При умові паркування з краю,  $N_p(x + 1) = 1 + N_p(x)$ . А при умові рівномірного розподілу з вибором точки паркування,  $N_p(x + 1) = 1 + N_p(t) + N_p(x - t)$ , де  $N_p(t)$  і  $N_p(x - t)$  – незалежні. Тоді, оскільки  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(\xi)|\theta)) = \mathbb{E} f(\xi)$  [17], то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} N_p^2(x + 1) &= p \mathbb{E} N_p^2(x) + 2p \mathbb{E} N_p(x) + p + \\ &+ \frac{1 - p}{x} \int_0^x (1 + \mathbb{E} N_p^2(t) + \mathbb{E} N_p^2(x - t)) dt + \\ &+ \frac{1 - p}{x} \int_0^x (2 \mathbb{E} N_p(t) + 2 \mathbb{E} N_p(x - t) + 2 \mathbb{E} N_p(t) \mathbb{E} N_p(x - t)) dt. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Тепер, оскільки  $\mathbb{E} N_p^2(x) = \mathbb{D} N_p(x) + (\mathbb{E} N_p(x))^2 = \mathbb{D} N_p(x) + m_p^2(x)$ ,  
то маємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} N_p(x+1) &= -m_p^2(x+1) + p \mathbb{D} N_p(x) + p(m_p(x)+1)^2 + (1-p) + \\ &+ \frac{2(1-p)}{x} \int_0^x (\mathbb{D} N_p(t) + m_p^2(t) + 2m_p(t) + m_p(t)m_p(x-t)) dt. \end{aligned}$$

У попередньому пункті було доведено (2.50), а точніше, що

$$m(x) = C_p x - \frac{1-C_p}{1-p} + \Psi_p(x), \quad (2.52)$$

де  $\Psi_p(x) \leq \gamma < \infty$  і  $\Psi_p(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Розглянемо  $p(m_p(x)+1)^2 - pm_p^2(x+1)$ .

$$\begin{aligned} (m_p(x)+1)^2 - m_p^2(x+1) &\leq C_p^2 x^2 - 2C_p \frac{1-C_p}{1-p} x + 2C_p x - \\ &- C_p^2 (x+1)^2 + 2C_p \frac{1-C_p}{1-p} (x+1) + const = \\ &= 2C_p(1-C_p)x + const. \end{aligned}$$

Таким чином,  $p(m_p(x)+1)^2 - pm_p^2(x+1) \leq 2pC_p(1-C_p)x + const$ .

Нескладно переконатися, що  $\left| \int_0^X \Psi_p(t) dt \right| < const$ , аналогічно

$\left| \int_0^X t \Psi_p(t) dt \right| < const$ . Спираючись на ці дві нерівності, тривіально доводиться, що інтеграл

$$\frac{2}{x} \int_0^x \left( m_p^2(t) + 2m_p(t) + m_p(t)m_p(x-t) - \frac{m_p^2(x+1)}{2} \right) dt$$

обмежений. Тоді маємо нерівність

$$\begin{aligned} \mathbb{D} N_p(x+1) &\leq p \mathbb{D} N_p(x) + 2pC_p(1-C_p)x + \\ &+ \frac{2(1-p)}{x} \int_0^x \mathbb{D} N_p(t) dt + K. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Нескладно переконатися, що для функції  $\delta_p(x) = Km_p(x)$  виконується

$$\delta_p(x+1) = p\delta_p(x) + \frac{2(1-p)}{x} \int_0^x \delta_p(t) dt + K.$$

Також зрозуміло, що існує така  $\gamma_p(x) = \alpha x^\rho$ , де  $\alpha > 0$  і  $\rho \in (1, 2)$ , що

$$\gamma_p(x+1) \geq p\gamma_p(x) + \frac{2(1-p)}{x} \int_0^x \gamma_p(t) dt + 2pC_p(1-C_p)x.$$

Оскільки на відрізку  $[0, 1]$  дисперсія  $\mathbb{D} N_p(x) \equiv 0$ , то  $\mathbb{D} N_p(x) \leq \delta_p(x) + \gamma_p(x)$ , тобто

$$\mathbb{D} N_p(x) = o(x^2). \quad (2.54)$$

Тоді, за нерівністю Чебишова маємо

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{N_p(x)}{m_p(x)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\mathbb{D} N_p(x)}{\varepsilon^2 m_p^2(x)}. \quad (2.55)$$

Оскільки права частина прямує до нуля при  $x \rightarrow \infty$ , то ймовірність виходу відношення за межі епсілон-околу 1 прямує до нуля. Це можна трактувати наступним чином: якщо розмір парковки  $x$  достатньо великий, то можна практично вважати, що  $N_p(x) \approx C_p x$ , тобто значення  $\frac{N_p(x)}{x}$  будуть дуже близькими до  $C_p$ .

## Висновки до розділу

У даному розділі було проведено асимптотичний аналіз поведінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на парковці при достатньо великих лінійних розмірах парковки.

Було розглянуто узагальнену модель паркування Реньї, що задано розподілом, що є сумішшю рівномірного з вагою  $q = 1 - p$  та виродженого розподілу з вагою  $p$ . Для неї за допомогою тауберівської теореми було доведено асимптотичну лінійність першого моменту  $m_p(x)$  випадкової величини  $N_p(x)$ , що позначає кількість автомобілів на парковці довжини  $x$  в момент сатурації при заповненні за вищевказаною схемою. Виконано покращення асимптотичної оцінки  $m(x)$  з використанням формули Мелліна, в результаті отримано, що

$$m(x) - C_p x - \frac{1 - C_p}{1 - p} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty,$$

де

$$C_p = \frac{1}{1 - p} \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^u \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) du.$$

Було доведено обмеженість другого центрального моменту  $N_p(x)$  лінійною функцією, і доведено виконання закону великих чисел використовуючи нерівність Чебишова.

Аналітично отримані константи знаходяться чисельно, що буде виконано у наступному розділі.

## РОЗДІЛ 3 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПАРКУВАННЯ

Створений програмний продукт дозволяє визначати середнє значення максимальної кількості автомобілів одиничних лінійних розмірів на парковці прямокутної фіксованих розмірів, при заданій моделі поведінки водіїв.

### **3.1 Обґрунтування вибору платформи та мови реалізації програмного продукту**

Реалізація програмного продукту проведена за допомогою мови C++ та Python. Вибір такого тандему є цілком виправданим. Мова C++ є мовою середнього рівня - в ній присутні елементи мов програмування як низького (підмножина - C), так і високого рівня, що робить C++ дуже ефективною для розробки складних проєктів. При цьому виконання елементарних дій (попиксельна обробка зображень) та алгоритмів в цілому залишається максимально швидкою.

Мова Python використовується для швидких математичних розрахунків, в тому числі, для вирахування чисельних значень інтегралів.

Основною платформою для використання програмного продукту було вибрано сімейство операційних систем на базі UNIX, оскільки процес розробки та використання додатків з консольним інтерфейсом там найбільше спрощений. Також, для швидких математичних розрахунків необхідне середовище виконання Python, що дуже просто налаштовується в системах сімейства Linux та в більшості випадків присутнє в стандартній комплектації операційної системи.

Однак, розробка програмного продукту проводилася з дотриманням правил кросплатформеного програмування, що дає можливість збирати ви-

конувані файли і в інших популярних операційних системах (наприклад, сімейства Windows NT).

## **3.2 Аналіз архітектури продукту**

Продукт "modeler" побудований таким чином, що він зчитує параметри заданою користувачем моделі у форматі xml, та в циклі моделювати траєкторію процесу паркування автомобілів на одновимірній парковці, використовуючи вбудований в C++ генератор псевдовипадкових чисел. За результат програма бере середнє значення по всіх змодельованим траєкторіям.

Продукт "modeler2d" побудований таким чином, що він зчитує параметри заданою користувачем моделі у форматі xml, та в циклі моделювати траєкторію процесу паркування автомобілів на двовимірній парковці, використовуючи вбудований в C++ генератор псевдовипадкових чисел. За результат програма бере середнє значення по всіх змодельованим траєкторіям. Ідея багаторазової ітерації з подальшим взяттям середнього ґрунтується на законі великих чисел.

Продукт "integral" вираховує подвійні інтеграли, наведені у розділі [2](#).

## **3.3 Керівництво користувача**

### **3.3.1 Основний програмний продукт**

Програмний продукт розроблено як додаток консольного типу. Тобто, для оперування роботою додатка використовуються текстові команди, що вводяться в консоль операційної системи.

Запуск програми "modeler" відбувається за допомогою команди:

```
modeler [<model_name>.xml]
```

Запуска програми "modeler2d" відбувається аналогічно:

```
modeler2d [<model_name>.xml]
```

### 3.3.1.1 Основні параметри

Користувач задає необхідну для вивчення модель через xml-файл. Типова структура xml-файлу виглядає наступним чином:

```
<model repeat_count="<count>" parking_length="<length>">
  <behaviour_1 p="<prob>" />
  ...
  <behaviour_n p="<prob>" />
</model>
```

Тобто в моделі задаються варіанти поведінки водіїв, а також відповідні ймовірності вибору поведінки. Істотним зауваженням є те, що сума ймовірностей має дорівнювати 1, інакше програма завершує роботу з ненульовим кодом.

Параметри моделі для продукту "modeler" перелічені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Параметри моделі для продукту "modeler"

Параметр	Пояснення
repeat_count	Кількість запусків моделювань для вирахування середнього значення
parking_length	Довжина парковки для моделювання

Типи дисциплін водіїв, що підтримуються продуктом "modeler" перелічені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Дисципліни водіїв, що підтримуються продуктом "modeler"

Дисципліна	Пояснення
left	Водій ставить свій автомобіль зліва вільного проміжку
right	Водій ставить свій автомобіль справа вільного проміжку
center	Водій ставить свій автомобіль по центру вільного проміжку
uniform	Водій ставить свій автомобіль керуючись рівномірним розподілом

Для продукту "modeler2d" було підключено лише поведінку водіїв, аналогічну класичній моделі Ренї у випадку одновимірної моделі, тобто за рівномірним розподілом. Тому для цієї програми задаються лише параметри моделі, перелічені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Параметри моделі для продукту "modeler2d"

Параметр	Пояснення
repeat_count	Кількість запусків моделювань для вирахування середнього значення
a	Довжина парковки по вісі $0x$
b	Довжина парковки по вісі $0y$

### 3.4 Аналіз роботи алгоритму

#### 3.4.1 Алгоритм чисельного вирахування інтегралів

У пункті 2.4 розділу 2 було виведено формулу (2.33). Для визначення середнього значення максимальної кількості автомобілів на парковці, керу-



ючись отриманою формулою, необхідно чисельно визначити наступну константу:

$$\kappa = \int_0^{\infty} \exp \left( -2 \int_0^s \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds \quad (3.1)$$

Оскільки чисельно рахувати інтеграл від експоненти від інтегралу незручно, неоптимально та це дасть досить велику похибку, треба звести інтеграл під експонентою до відомих функцій.

Лема 3.4.1:

$$\int_0^s \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \ln s + \Gamma(0, s) + \gamma, \quad (3.2)$$

де  $\gamma = 0.5772156649$  – константа Ейлера-Маскероні,  $\Gamma(0, s)$  – неповна гамма-функція.

Доведення.

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau &= \int_0^1 \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau + \int_1^s \frac{1}{\tau} d\tau + \int_s^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau - \int_1^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \\
&= \int_0^1 \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau + \ln s + \Gamma(0, s) - \int_1^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \\
&= \ln s + \Gamma(0, s) + \lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\tau} \ln \tau d\tau - \\
&\quad - \underbrace{e^{-\tau} \ln \tau \Big|_1^\infty}_0 - \int_1^\infty e^{-\tau} \ln \tau d\tau = \ln s + \Gamma(0, s) + \\
&\quad + \lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 - \int_0^\infty e^{-\tau} \ln \tau d\tau = \lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 + \\
&\quad + \ln s + \Gamma(0, s) + \gamma.
\end{aligned}$$

Останній перехід впливає з тотожності

$$\gamma = - \int_0^\infty e^{-\tau} \ln \tau d\tau.$$

Якщо довести, що  $\lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 = 0$ , то лему доведено.

З озкладу у ряд Тейлора впливає, що

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} = 1.$$

Тому

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} (1 - e^{-\tau}) \ln \tau &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \cdot \frac{\ln \tau}{\tau^{-1}} = \\ &= \langle \text{правило Лопіталя} \rangle = 1 \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau^{-1}}{-\tau^{-2}} = 0.\end{aligned}$$

Тому  $\lim_{a \rightarrow 0} (1 - e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 = 0$ , а отже, лему доведено.  $\square$

Таким чином отримали, що

$$\kappa = e^{-2\gamma} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-2\Gamma(0, s))}{s^2} ds. \quad (3.3)$$

Для підрахунку невласного інтегралу можна оцінити його залишок, і знайти такі межі інтегрування, щоб залишок не перевищував деякого  $\varepsilon$ .

Тобто необхідно знайти таке  $\delta$ , щоб виконувалось

$$e^{-2\gamma} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\exp(-2\Gamma(0, s))}{s^2} ds < \varepsilon.$$

Оскільки  $\exp(-2\Gamma(0, s)) < 1$ , то достатньо знайти таке  $\delta$ , щоб виконувалось

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds < \varepsilon e^{2\gamma}.$$

Оскільки беремо  $\delta \geq 0$ , то

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{s^2} &< \varepsilon e^{2\gamma}, \\ -\frac{1}{s} \Big|_{\delta}^{\infty} &< \varepsilon e^{2\gamma}, \\ \delta^{-1} &< \varepsilon e^{2\gamma}, \\ \varepsilon^{-1} e^{-2\gamma} &< \delta.\end{aligned}$$

Тобто, щоб отримати результат з точністю  $10^{-6}$ , треба взяти  $\delta > 10^6 e^{-2\gamma} \approx 315236$ . Це і реалізовано в додатку "integral".

### 3.4.2 Алгоритм моделювання на одновимірній парковці

Для моделювання одновимірної парковки виконується наступний алгоритм дій:

1. Створюється вектор довжин вільних проміжків, який ініціалізується однією довжиною – довжиною парковки.
2. Допоки вектор не пустий, виконується:
  - 2.1. Вибирається поведінка водія використовуючи рандомізатор.
  - 2.2. Дістається остання довжина з вектору, і ділиться на частини відповідно до моделі поведінки водія.
  - 2.3. Кожна з частин додається до вектору, якщо її довжина не менша 1, тобто, довжини автомобіля.
  - 2.4. Інкрементується поточна кількість автомобілів.

Цей процес повторюється задану кількість разів, і в кінці програма видає середнє значення автомобілів з усіх ітерацій, а також відношення до довжини парковки.

### 3.4.3 Алгоритм моделювання на двовимірній парковці

Двовимірний алгоритм працює аналогічно одновимірному, тільки розглядаються не проміжки, а прямокутники. А саме, створюється список вільних прямокутників. Під вільним розуміється прямокутник, в якому будь-яка точка може бути потенційним центром автомобіля.

Ініціалізується цей список початковим прямокутником —  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2})$ , де  $a, b$  — задані лінійні розміри парковки. Спираючись на площі поточних прямокутників, обирається один з ймовірністю рівною відношенню його площі до сумарної площі усіх вільних прямокутників. Після цього всередині обраного прямокутника обирається за рівномірним розподілом точка, навколо якої будується квадратний окіл розміру  $2 \times 2$ , і перевіряється на перетин з усіма поточними вільними прямокутниками. Якщо перетинається, то вільний прямокутник ділиться на менші прямокутники, при чому один із прямокутників — область перетину. Усі менші прямокутники, окрім перетину, додаються в список.

## 3.5 Результати роботи програми

### 3.5.1 Результати підрахунку констант

Для формули (2.33) було чисельно пораховано коефіцієнт  $C_p$ , для кожного  $p$  від 0 до 0.9 з кроком 0.1. Результати наведені на Рис. 3.1.

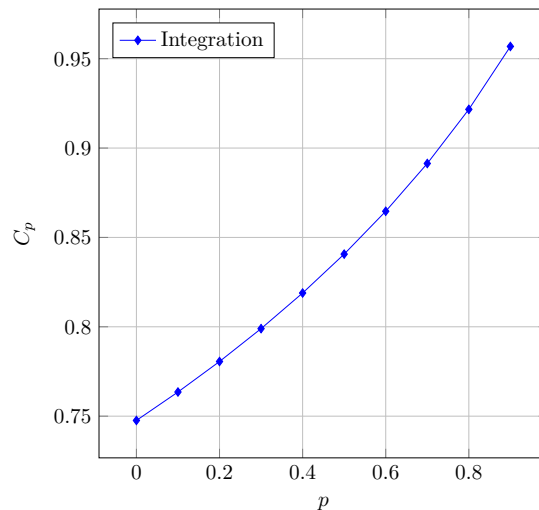


Рисунок 3.1 – Значення  $C_p$ , отримані методом чисельного інтегрування

### 3.5.2 Результати роботи моделера

Для формули (2.33) було промодельовано поведінку водіїв на парковці довжини  $x = 100000$  і емпірично визначено коефіцієнт  $C_p$ , для кожного  $p$  від 0 до 0.9 з кроком 0.1. Результати наведені на Рис. 3.2.

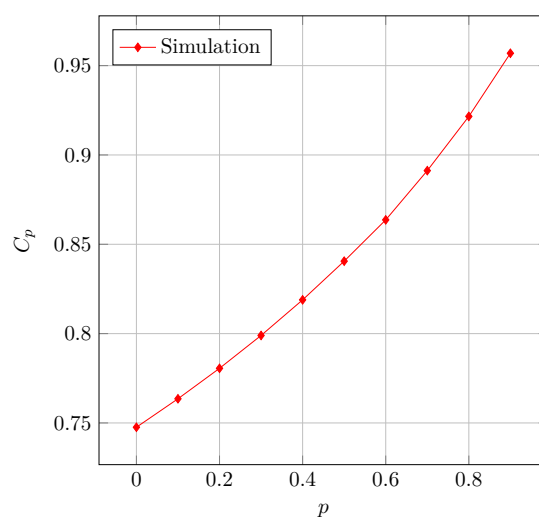


Рисунок 3.2 – Значення  $C_p$ , отримані методом імітаційного моделювання

З Рис. 3.3 нескладно помітити, що теоретичний результат майже співпав з результатом моделювання:

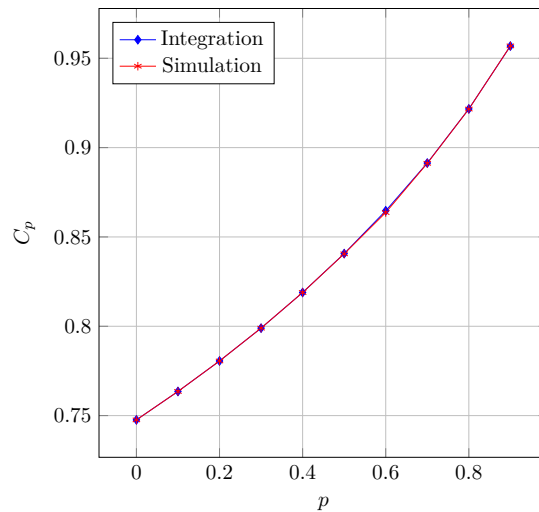


Рисунок 3.3 – Порівняння значень  $C_p$ , отриманих різними методами

Для двовимірного випадку існує припущення, так звана гіпотеза Паласті, що відношення середньої кількості автомобілів до загальної площі парковки прямує до  $C^2 \approx 0.56$ , але це не доведений факт [1]. Було проведено експеримент на розмірах 50x50, 100x100, 200x200, і результати вийшли відповідно 0.7, 0.6 та 0.58, тобто ймовірно, що припущення правдиве, але для перевірки на дуже великих розмірах парковки необхідні дуже потужні обчислювальні ресурси через велику складність двовимірного алгоритму.

## Висновки до розділу

В даному розділі описано структурну схему розробленого програмного продукту, обґрунтовано вибір цільової ОС, надана коротка інструкція з експлуатації програмного продукту. Програмний продукт є пакетом з декількох програм, які слугують одній цілі – визначення математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на парковці, використовуючи аналітичний

та алгоритмічний методи. Під час зіставлення результатів виявилось, що аналітичний та алгоритмічний підходи дають майже однакові результати. Перевагою аналітичного методу є швидкість і досить висока точність, в той час як алгоритмічний метод дозволяє більш гнучко налаштувати поведінку водіїв на парковці.

Також була виконана спроба підтвердити гіпотезу щодо двовимірної парковки. Чисельно значення збігається до  $C^2 \approx 0.56$ , проте для більш точної оцінки необхідно використовувати потужніші обчислювальні ресурси.



## ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У 1958 році угорський математик Реньї порушив проблему паркування автомобілів в теоретичному аспекті. І хоча вона називається проблемою паркування, отримані результати можуть бути прикладені не лише до автомобілів. Вони можуть застосовуватися до фізичних моделей структури рідин, хімічних моделей адсорбції та абсорбції, до конструкції кодів з автоматичним виправленням помилок, до моделювання систем комунікацій та ін.

У даній магістерській дисертації було узагальнено класичну модель паркування Реньї. Отримано наступні результати.

Проведено дослідження існуючих підходів і результатів щодо проблеми паркування та пакування. Виконано аналіз аналітичного апарату, що дозволяє розв'язувати інтегральні рівняння зі зсувом, таким чином, допомагає у вирішенні проблем розглянутого класу. Було створено узагальнену модель паркування, в якій водії паркуються, керуючись сумішшю рівномірного та детермінованого розподілів. Для цього узагальнення було виведено аналітичну формулу математичного сподівання максимальної кількості автомобілів за великих розмірів парковки. Це узагальнення дає змогу використовувати модель Реньї на практиці, адже насправді існують сумнівні водії, які намагаються зайняти якомога менше місця на парковці, а є такі, що ставлять свій автомобіль як заманеться.

Використовуючи отриманий результат, було доведено закон великих чисел для рівня заповненості парковки. Цей результат дає змогу стверджувати, що відношення  $\frac{N_p(x)}{x}$  практично дорівнює  $C_p$  при великих значеннях  $x$ , і рівень заповненості можна досить точно оцінювати через інтегральний вираз для  $C_p$ .

Паралельно з виведенням аналітичного результату був створений консольний додаток, що дозволяє моделювати процес паркування імітаційним шляхом і визначати математичне сподівання максимальної кількості автомобілів як середнє значення результатів кількох експериментів з однаковими вихідними параметрами.

Було перевірено, що обидва методи дають один і той самий результат з точністю до четвертого знаку після коми на класичній моделі Реньї та на узагальненій з 10 різними ймовірностями паркування автомобіля з краю.

За аналізом отриманих результатів роботи програмного продукту можна зробити висновок, що обрані методи дозволили досягти виконання поставлених цілей з достатньо великим ступенем точності. Але у кожного метода є свої переваги та недоліки. Перевагою аналітичного методу є швидкість і досить висока точність, в той час як алгоритмічний метод дозволяє більш гнучко налаштувати поведінку водіїв на парковці.

Подальшими дослідженнями за даним напрямом можуть стати:

- оцінка асимптотичної поведінки моментів вищих порядків;
- доведення центральної граничної теореми для величини  $\frac{N_p(x) - m_p(x)}{\sigma_p(x)}$ ;
- отримання аналітичного результату для асимптотики у випадку двовимірної парковки;
- підтримка додатком змінних розмірів автомобілів;
- створення додатку для моделювання багатовимірного розміщення.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Weisstein, Eric W. Rényi's Parking Constants / Eric W. Weisstein. — 2016. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://mathworld.wolfram.com/RenyisParkingConstants.html>.
2. Dvoretzky, A. On the "parking" problem / A Dvoretzky, H Robbins // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Series A. — 1964. — 1. — Vol. 9. — Pp. 209–225.
3. Blaisdell, B. E. On Random Sequential Packing in the Plane and a Conjecture of Palasti / B. E. Blaisdell, H. Solomon // Journal of Applied Probability. — 1970. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 667–698.
4. Lal, M. Evaluation of a Constant Associated with a Parking Problem / M. Lal, P. Gillard // Mathematics of Computation. — 1974. — Vol. 28, no. 126. — Pp. 561–564.
5. Ney, P. E. A Random Interval Filling Problem / P. E. Ney // The Annals of Applied Probability. — Vol. 33, no. 2. — Pp. 702–718.
6. E. G. Coffman, Jr. Packing Random Intervals On-Line / Jr. E. G. Coffman, P. Jelenković, B. Poonen // Algorithmica. — Vol. 22, no. 4. — P. 448–476.
7. E. G. Coffman, Jr. Interval Packing: The Vacant Interval Distribution / Jr. E. G. Coffman, L. Flatto, P. Jelenković // The Annals of Applied Probability. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 240–257.
8. Baryshnikov, Yuliy. Counting Intervals in the Packing Process / Yuliy Baryshnikov, Alexander Gnedin // The Annals of Applied Probability. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 863–877.
9. Mackey, M. Exhaustion of an interval by iterated Rényi parking / M. Mackey, W. G. Sullivan // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — Vol. 446. — Pp. 38–61.
10. Fleurke, S. R. A Second-row Parking Paradox / S. R. Fleurke, C. Külske // Journal of Statistical Physics. — Vol. 136. — Pp. 285–295.
11. Dehling, H. G. Parking on a Random Tree / H. G. Dehling, S. R. Fleurke, C. Külske // Journal of Statistical Physics. — Vol. 133. — Pp. 151–157.

12. Penrose, M. D. Limit Theory for Random Sequential Packing and Deposition / M. D. Penrose, J.E. Yukich // The Annals of Applied Probability. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 272–301.
13. de Bruijn, N.G. Asymptotic Methods in Analysis / N.G. de Bruijn. Bibliotheca mathematica. — Dover Publications, 1970. — 200 pp. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://books.google.com.ua/books?id=Oqj9AgAAQBAJ>.
14. Spivak, M. Calculus / M. Spivak. Calculus. — Cambridge University Press, 2006. — 680 pp. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [https://books.google.com.ua/books?id=7JKVu\\_9InRUC](https://books.google.com.ua/books?id=7JKVu_9InRUC).
15. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. — Высшая школа, 1977. — 400 с. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://books.google.com.ua/books?id=PgpVtAEACAAJ>.
16. McLachlan, N.W. Laplace Transforms and Their Applications to Differential Equations / N.W. McLachlan. Dover Books on Mathematics. — Dover Publications, 2014. — 240 pp. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://books.google.com.ua/books?id=5wg7BAAAQBAJ>.
17. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. — 2 изд. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.
18. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — Наука, 1965. — 736 с. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://books.google.com.ua/books?id=My7vAAAAAAAJ>.
19. Schiff, J.L. The Laplace Transform: Theory and Applications / J.L. Schiff. Undergraduate Texts in Mathematics. — New-York: Springer New York, 1999. — 250 pp. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://books.google.com.ua/books?id=RU-5jSP1KMcC>.
20. Feller, William. An Introduction To Probability Theory and Its Applications / William Feller. — 2 edition. — New-York: John Wiley & Sons, 1971. — Vol. 2. — 704 pp.
21. Rényi, A. On a One-Dimensional Problem Concerning Random Space-Filling / A. Rényi. — Budapest: Math. Inst. Hung. Acad., 1958. — 153 pp.

22. Itoh, Y. Parking cars with spin but no length / Y. Itoh, L. Shepp // Journal of Statistical Physics. — Vol. 97. — Pp. 209–231.
23. Penrose, M. D. Random parking, sequential adsorption, and the jamming limit / M. D. Penrose // Communications in Mathematical Physics. — Vol. 218. — Pp. 153–176.
24. Itoh, Y. Random sequential coding by Hammin distance / Y. Itoh, H. Solomon // Journal of Applied Probability. — Vol. 23. — Pp. 688–695.
25. Solomon, H. A review of the packing problem / H. Solomon, H. J. Weiner // Communications in Statistics - Theory and Methods. — Vol. 15. — Pp. 2571–2607.
26. Mackenzie, J. K. Sequential filling of a line by intervals placed at random and its application to linear adsorption / J. K. Mackenzie // The journal of Chemical Physics. — Vol. 37. — Pp. 723–728.

## ДОДАТОК А. ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДОПОВІДІ

## Ймовірнісні методи дослідження процесів паркування і пакування

студент 6-го курсу  
КА-61м, Фатенко Владислав

Інститут прикладного системного аналізу  
керівник: к. ф.-м. н., доц. Ільєнко Андрій Борисович

## Актуальність роботи

Проблеми послідовного пакування інтервалів, що узагальнюють відому концепцію Альфреда Реньї паркування автомобілів, мають досить широкий спектр застосувань. Деякі з них:

- фізичні структури рідин;
- хімічні моделі адсорбції та абсорбції;
- моделювання систем комунікацій.

## Постановка задачі

### Мета роботи

Вивчення асимптотичних властивостей узагальненої моделі паркування і пакування Реньї

### Об'єкт дослідження

Процеси пакування і паркування Реньї

### Предмет дослідження

Асимптотичні властивості певних узагальнень моделі паркування Реньї

## Постановка задачі

### Узагальнена модель паркування

- ❶ Заданий початковий відрізок довжини  $x$ .
- ❷ Задано сімейство розподілів  $U_{a,b}$  з такою функцією розподілу  $F_U(t)$ , що  $F_U(a) = 0$  і  $F_U(b) = 1$ .
- ❸ Допоки існує хоча б один незаповнений інтервал  $(a_i, b_i)$  такий, що  $b_i - a_i \geq 1$ :
  - ❶ З розподілу  $U_{a_i, b_i - 1}$  обирається випадкове значення  $t$  – позиція лівого краю одиничного інтервалу.
  - ❷ На початковому відрізку інтервал  $(t, t + 1)$  позначається як заповнена множина.

## Постановка задачі

У класичній моделі паркування у якості  $U_{a,b}$  виступає рівномірний розподіл на інтервалі  $(a, b)$ . Пропонується розглянути узагальнену модель, в якій  $U_{a,b} = U_p(a, b)$  задається функцією розподілу

$$F_{U_p(a,b)}(t) = p \cdot [t \geq a] + (1 - p) \cdot \begin{cases} 0, & t < a, \\ \frac{t-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t > b, \end{cases} \quad (1)$$

де  $p \in [0, 1)$  – фіксоване.

## Постановка задачі

Досліджується кількість інтервалів  $N_p(x)$ , розміщених на відрізку в момент сатурації. Цілі дослідження:

- визначення асимптотики  $m_p(x) = \mathbb{E}N_p(x)$ ;
- доведення асимптотичної субквадратичності другого центрального моменту величини  $N_p(x)$  на нескінченності;
- виведення закону великих чисел для  $\frac{N_p(x)}{x}$ ;
- розробка та комп'ютерна реалізація алгоритму імітаційного моделювання процесу заповнення паркінгу в одновимірному та двовимірному випадках.



## Результати роботи

Інтегральне рівняння для першого моменту

В роботі було виведено інтегральне рівняння зі зсувом для математичного сподівання  $m_p(x)$  максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини  $x$ .

### Теорема 1

У випадку розташування автомобілів за сумішшю рівномірного та детермінованого розподілів (1) виконується наступне співвідношення:

$$m_p(x+1) = 1 + pm_p(x) + \frac{2(1-p)}{x} \int_0^x m_p(t) dt, \quad \forall x > 0 \quad (2)$$

7 / 16

студент 6-го курсу КА-61м, Фатенко Владислав

Узагальнення моделі паркування Реньї

## Результати роботи

Асимптотична поведінка першого моменту

Було доведено асимптотичну формулу для  $m_p(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

### Теорема 2

Перший момент випадкової величини  $N_p(x)$  прямує до лінійної функції від довжини парковки  $x$  з швидкістю, вищою за поліноміальну:

$$m_p(x) = C_p x - \frac{1 - C_p}{1 - p} + \mathcal{O}(x^{-n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$\text{де } C_p = \frac{1}{1-p} \int_0^\infty \exp \left( -2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau \right) ds. \quad (4)$$

8 / 16

студент 6-го курсу КА-61м, Фатенко Владислав

Узагальнення моделі паркування Реньї

## Результати роботи

Закон великих чисел для рівня заповненості

Було показано, що має місце закон великих чисел для рівня заповненості вихідного відрізка  $\frac{N_p(x)}{x}$ . Тобто, при достатньо великих розмірах парковки можна практично вважати, що  $N_p(x) = C_p x$ .

### Теорема 3

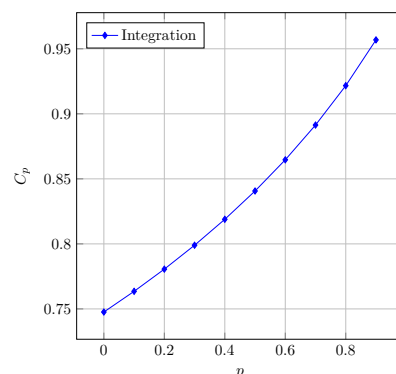
У випадку розташування автомобілів за сумішшю рівномірного та детермінованого розподілів (1) відношення  $\frac{N_p(x)}{x}$  стохастично прямує до  $C_p$  при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{N_p(x)}{x} - C_p \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

## Результати роботи

Оцінка константи  $C_p$  методом чисельного інтегрування

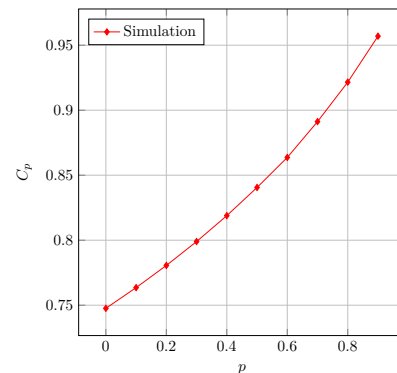
Приблизне значення сталої  $C_p$  можна визначити з формули (4) за допомогою чисельної апроксимації.



## Результати роботи

Оцінка константи  $C_p$  методом імітаційного моделювання

Приблизне значення сталої  $C_p$  можна визначити методом Монте-Карло, усереднюючи по великій кількості експериментів. В межах одного експерименту проводиться імітаційне моделювання процесу паркування з досить великим розміром парковки.



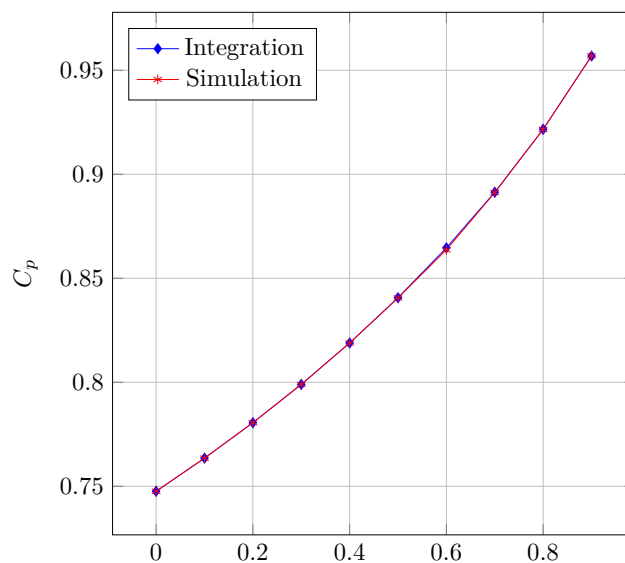
11 / 16

студент 6-го курсу КА-61м, Фатенко Владислав

Узагальнення моделі паркування Реньї

## Результати роботи

Порівняння значень  $C_p$ , отриманих двома способами



12 / 16

студент 6-го курсу КА-61м, Фатенко Владислав

Узагальнення моделі паркування Реньї

## Висновки

В роботі, використовуючи аналітичні та чисельні методи, досліджено асимптотику першого та другого моментів випадкової величини, що позначає кількість автомобілей на парковці в момент виснаження. Було доведено, що математичне сподівання збігається до лінійної функції зі швидкістю, більшою за поліноміальну. Отримано явний вигляд коефіцієнтів вищевказаної лінійної функції, хоч і у досить складній репрезентації подвійного інтегралу.

## Висновки

Отриману асимптотичну оцінку першого моменту було застосовано для доведення обмеженості другого центрального моменту функцією, що повільніша за квадратичну на нескінченності. Це дозволило використати нерівність Чебишова для виведення закону великих чисел.

Окрім математичного результату, було створено консольний додаток для імітаційного моделювання процесу паркування з виснаженням. За допомогою нього було перевірено теоретичний результат.

## Шляхи подальшого розвитку

- оцінка асимптотичної поведінки моментів вищих порядків;
- доведення центральної граничної теореми для величини  $\frac{N_p(x) - m_p(x)}{\sigma_p(x)}$ ;
- отримання аналітичного результату для асимптотики у випадку двовимірної парковки;
- підтримка додатком змінних розмірів автомобілів;
- створення додатку для моделювання багатовимірного розміщення.

Дякую за увагу.

## ДОДАТОК Б. ЛІСТИНГ КОДУ

**Моделювання процесу парковки**

## appendicies/cppcode/modeler.cpp

```

1  #include <boost/property_tree/ptree.hpp>
    #include <boost/property_tree/xml_parser.hpp>
    // #include <boost/random/uniform_real_distribution.hpp>
    // #include <boost/random/normal_distribution.hpp>
    #include <random>
6  #include <string>
    #include <vector>
    #include <map>
    #include <algorithm>
    #include <numeric>
11 #include <cmath>
    #include <iostream>
    #include <chrono>

    struct model
16 {

        enum behaviour_type {
            place_left,
            place_right,
21     place_center,
            place_uniform,
            place_normal
        };

26     const static std::map<std::string, behaviour_type> converter;
        const static std::map<behaviour_type, std::string> back_converter;
        const static double eps;
        // typedef boost::random::uniform_real_distribution<double> uni_d_type;
        typedef std::uniform_real_distribution<double> uni_d_type;
31

        size_t repeat_count = 100;
        double parking_length = 1.0;

        std::vector<std::pair<double, behaviour_type>> strategy;
36     void load(const std::string& path);
        void save(const std::string& path);

```

```

    int fit();
    inline double fit_avg();
41 void fit_avg_regularized(std::ostream&);

private:
    void split_last(behaviour_type, std::vector<double>&);
    uni_d_type uni_d{0,1};
46 unsigned seed = std::chrono::system_clock::now().time_since_epoch().count();
    std::default_random_engine generator{seed};
};

const double model::eps = 1e-7;
51 const std::map<std::string, model::behaviour_type> model::converter =
    {
        {"left", model::place_left},
        {"right", model::place_right},
        {"center", model::place_center},
56 {"uniform", model::place_uniform},
        {"normal", model::place_normal}
    };

const std::map<model::behaviour_type, std::string> model::back_converter =
    {
61 {model::place_left, "left"},
        {model::place_right, "right"},
        {model::place_center, "center"},
        {model::place_uniform, "uniform"},
        {model::place_normal, "normal"}
66 };

void model::split_last(behaviour_type b, std::vector<double>& v)
{
    double len = v.back();
71 v.pop_back();
    switch(b) {
        case place_left:
        case place_right:
            if (len >= 2)
76 v.push_back(len - 1);
            break;
        case place_center:
            if (len >= 3)
                v.insert(v.end(), 2, (len - 1) / 2);
81 break;
        case place_uniform:
            if (len >= 2) {
                double pos = uni_d_type(0, len - 1)(generator);
                double residuals[2] = {pos, len - 1 - pos};
            }
    }
}

```

```

86         for (auto resid : residuals)
            if (resid >= 1) {
                v.push_back(resid);
            }
        }
91     break;
    case place_normal:
        throw(std::runtime_error("Not implemented"));
        break;
    }
96 }

int model::fit()
{
    if (parking_length < 1)
101     return 0;
    std::vector<double> lengths{parking_length};
    int counter = 0;
    while(!lengths.empty())
    {
106     double acc = 0, p = uni_d(generator);
        for (auto& entry : strategy)
        {
            acc += entry.first;
            if (p < acc) {
111                split_last(entry.second, lengths);
                counter++;
                break;
            }
        }
116     }
    return counter;
}

inline double model::fit_avg()
121 {
    double sum = 0.0;
    for (int i = 0; i < repeat_count; i++)
        sum += fit();
    return sum / repeat_count;
126 }

void model::fit_avg_regularized(std::ostream& out)
{
    out << "Filled";
131     double result = 0;
    if (parking_length < 1)

```



```

        out << result;
    else
        out << (result = fit_avg());
136 out << "/" << parking_length << "with_ratio:";
    if (parking_length != 0)
        out << result / parking_length;
    else
        out << "inf";
141 out << ' ' << std::endl;
}

void model::load(const std::string& path)
{
146 strategy.clear();
    using boost::property_tree::ptree;
    ptree pt;
    read_xml(path, pt);
    repeat_count = pt.get<size_t>("model.<xmlattr>.repeat_count", repeat_count);
151 parking_length = pt.get<double>("model.<xmlattr>.parking_length",
    parking_length);
    std::cout << "Loaded parking_length:" << parking_length << std::endl;
    std::cout << "Loaded repeat_count:" << repeat_count << std::endl;
    for (auto& entry : pt.get_child("model"))
    {
156 if (entry.first == "<xmlattr>")
        continue;
        strategy.emplace_back(entry.second.get<double>("<xmlattr>.p"),
        converter.at(entry.first));
        std::cout << "Added" << entry.first << "behaviour with probability" <<
        strategy.back().first << std::endl;
    }
161 auto sum = std::accumulate(strategy.begin(), strategy.end(), 0.0, [](double
    acc, std::pair<double, behaviour_type> next) {return acc + next.first;});
    assert(std::abs(sum - 1.0) < eps);
}

void model::save(const std::string& path)
166 {
    using boost::property_tree::ptree;
    ptree pt;
    pt.put("model.<xmlattr>.repeat_count", repeat_count);
    pt.put("model.<xmlattr>.parking_length", parking_length);
171 for (auto& entry : strategy)
    {
        pt.put("model." + back_converter.at(entry.second) + "<xmlattr>.p",
        entry.first);
    }
}

```

```

        write_xml(path, pt);
176 }

int main(int argc, char* argv[]) {
    model m;
    if (argc > 1)
181     m.load(argv[1]);
    else
        m.load("base_model.xml");
    m.fit_avg_regularized(std::cout);
    return 0;
186 }

```

## Модельовання процесу двовимірної парковки

### appendicies/cppcode/modeler2d.cpp

```

#include <boost/property_tree/ptree.hpp>
#include <boost/property_tree/xml_parser.hpp>
// #include <boost/random/uniform_real_distribution.hpp>
4 // #include <boost/random/normal_distribution.hpp>
#include <random>
#include <string>
#include <vector>
#include <map>
9 #include <algorithm>
#include <numeric>
#include <cmath>
#include <iostream>
#include <chrono>
14 #include <list>
#include <tuple>

struct model2d
19 {
    double a;
    double b;
    // only uniform distribution is supported here

24 struct point
    {
        point(double x, double y) : x(x), y(y) { }
        double x;
        double y;
    }
}

```

```

29     };

    typedef std::pair<point, point> rectangle;
    typedef std::uniform_real_distribution<double> uni_d_type;

34     int fit();
    inline double fit_avg();
    void fit_avg_regularized(std::ostream& out);

    model2d(int a, int b, size_t repeat_count = 100) : a(a), b(b),
    repeat_count(repeat_count) { }

39 private:
    size_t repeat_count;
    double eps = 1e-6;
    double rec_square(const rectangle&);
44     void consume(std::list<rectangle>& recs, const rectangle& exclusion);
    bool does_intersect(const rectangle&, const rectangle&);
    double current_square;
    unsigned seed = std::chrono::system_clock::now().time_since_epoch().count();
    std::default_random_engine generator{seed};

49 };

double model2d::rec_square(const rectangle& rec) {
    return (rec.second.x - rec.first.x) * (rec.second.y - rec.first.y);
}

54 bool model2d::does_intersect(const rectangle& left, const rectangle& right)
{
    return std::max(left.first.x, right.first.x) < std::min(left.second.x,
    right.second.x) &&
    std::max(left.first.y, right.first.y) < std::min(left.second.y,
    right.second.y);

59 }

void model2d::consume(std::list<rectangle>& recs, const rectangle& exclusion)
{
    auto g_iterator = recs.begin();
64     std::list<rectangle> additions;

    //std::cout << "Exclusion(" << exclusion.first.x << "," << exclusion.first.y
    << "," <<
    //exclusion.second.x << "," << exclusion.second.y << ")" << std::endl;
    while (g_iterator != recs.end())
69     {
        auto iterator = g_iterator++;
        if (does_intersect(*iterator, exclusion)) {

```

```

// DO SOME EPIC STUFF HERE
std::vector<std::pair<double,double>> x_sides, y_sides;
74     if (exclusion.first.x > iterator->first.x && exclusion.second.x <
iterator->second.x)
    {
        x_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.x,
exclusion.first.x));
        x_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.first.x,
exclusion.second.x));
        x_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.second.x,
iterator->second.x));
79     }
    else if (exclusion.first.x > iterator->first.x && exclusion.first.x <
iterator->second.x)
    {
        x_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.x,
exclusion.first.x));
        x_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.first.x,
iterator->second.x));
84     }
    else if (exclusion.second.x > iterator->first.x && exclusion.second.x
< iterator->second.x)
    {
        x_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.x,
exclusion.second.x));
        x_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.second.x,
iterator->second.x));
89     }
    else
    {
        x_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.x,
iterator->second.x));
94     }

    if (exclusion.first.y > iterator->first.y && exclusion.second.y <
iterator->second.y)
    {
        y_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.y,
exclusion.first.y));
        y_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.first.y,
exclusion.second.y));
99     y_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.second.y,
iterator->second.y));
    }
    else if (exclusion.first.y > iterator->first.y && exclusion.first.y <
iterator->second.y)
    {

```

```

        y_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.y,
exclusion.first.y));
104         y_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.first.y,
iterator->second.y));
    }
    else if (exclusion.second.y > iterator->first.y && exclusion.second.y
< iterator->second.y)
    {
        y_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.y,
exclusion.second.y));
109         y_sides.push_back(std::make_pair(exclusion.second.y,
iterator->second.y));
    }
    else
    {
        y_sides.push_back(std::make_pair(iterator->first.y,
iterator->second.y));
114     }

    for (auto& x_side : x_sides)
        for (auto& y_side : y_sides) {
            rectangle new_rec = std::make_pair(point(x_side.first,
y_side.first), point(x_side.second, y_side.second));
119             if (!does_intersect(new_rec, exclusion))
                additions.push_back(new_rec);
            else
                current_square -= rec_square(new_rec);
                assert(rec_square(new_rec) >= 0);
124         }
        recs.erase(iterator);
    }
    recs.splice(recs.end(), additions);
129 }

int model2d::fit()
{
    if (a < 1 || b < 1)
134         return 0;
    std::list<rectangle> rectangles{{{0,0}, {a,b}}};
    current_square = a * b;
    int counter = 0;
    while(!rectangles.empty() && !(current_square <= eps))
139     {
        auto decision = uni_d_type(0, current_square)(generator);
        auto current_rect = std::find_if(rectangles.begin(), rectangles.end(),
[decision](rectangle& rec) {

```

```

        static double sum = 0;
        sum += (rec.second.x - rec.first.x) * (rec.second.y - rec.first.y);
144         if (sum >= decision)
            return true;
            return false;
    });
    auto x = uni_d_type(current_rect->first.x,
current_rect->second.x) (generator);
149    auto y = uni_d_type(current_rect->first.y,
current_rect->second.y) (generator);
    rectangle exclusion = std::make_pair(point(x - 1, y - 1), point(x + 1, y
+ 1));
    consume(rectangles, exclusion);
    counter++;
}
154 return counter;
}

inline double model2d::fit_avg()
{
159     double sum = 0.0;
    for (int i = 0; i < repeat_count; i++)
        sum += fit();
    return sum / repeat_count;
}

164 void model2d::fit_avg_regularized(std::ostream& out)
{
    out << "Filled␣";
    double result = 0;
169     if (a < 1 || b < 1)
        out << result;
    else
        out << (result = fit_avg());
    out << "/" << a*b << "␣with␣ratio:␣";
174     if (a * b != 0)
        out << result / (a * b);
    else
        out << "inf";
    out << ' ' << std::endl;
179 }

int main()
{
184     model2d m {100, 100};
    m.fit_avg_regularized(std::cout);

```

```

    return 0;
}

```

## Вирахування константи для класичної моделі Реньї

### appendicies/cppcode/integral.cpp

```

#include <boost/math/special_functions/gamma.hpp>
#include <boost/math/constants/constants.hpp>
3
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace boost::math;
8
int main() {
    double step = 1e-4;
    long double integral = 0;
    for (int i = 1; i <= 1000000; i++)
13        integral += std::exp(- 2 * (tgamma(1e-10, i * step)) - 2 * std::log(i *
step)) * step;
    step *= 10;
    for (int i = 100001; i <= 10000000; i++)
        integral += std::exp(- 2 * (tgamma(1e-10, i * step)) - 2 * std::log(i *
step)) * step;
    step *= 10;
18    for (int i = 1000001; i <= 10000000; i++)
        integral += std::exp(- 2 * (tgamma(1e-10, i * step)) - 2 * std::log(i *
step)) * step;
    std::cout << integral / std::exp(2 * constants::euler<double>()) << std::endl;
    return 0;
}

```

## ДОДАТОК В. ТЕОРЕТИЧНИЙ МІНІМУМ

### В.1 Поняття випадкової величини

Одним з найважливішим поняттям в теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. Під випадковою величиною розуміють змінну, яка в результаті дослідження в залежності від випадку приймає одне з можливої множини своїх значень (яке саме – заздалегідь невідомо).

Означення В.1.1: Випадковою величиною  $X$  називається функція, що задана у просторі елементарних подій  $\Omega$ , тобто  $X \in f(\omega)$ , де  $\omega$  – елементарна подія, що належить простору  $\Omega$  [17].

Для дискретної випадкової величини множина можливих значень функції  $f(\omega)$  скінчена або злічена, для неперервної – нескінченна або незлічена.

Означення В.1.2: Законом розподілу випадкової величини називається відношення, що встановлює зв'язок між можливим значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями [17].

#### В.1.1 Представлення випадкових величин

Означення В.1.3: Функцією розподілу випадкової величини  $X$  називається функція  $F(X)$ , котра виражає для кожного  $x$  ймовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, яке менше за  $x$  [17]:

$$F(x) = \mathbb{P} \{X < x\} \quad (\text{В.1})$$

Означення В.1.4: Випадкова величина називається дискретною, якщо вона набуває скінчену або злічену множину значень.



Означення В.1.5: Випадкова величина називається неперервною, якщо її функція розподілу є неперервною, диференційованою майже скрізь, за винятком, можливо, окремих ізольованих точок [17].

Функцію  $F(X)$  іноді називають інтегральною функцією розподілу або інтегральним законом розподілу. Визначення неперервної випадкової величини за допомогою функції розподілу не є єдиним.

Означення В.1.6: Щільністю ймовірності (щільністю розподілу або просто щільністю)  $f(x)$  неперервної випадкової величини  $X$  називається похідна її функції розподілу  $f(x) = F'(x)$  [17].

Щільність ймовірності іноді називають диференціальною функцією розподілу або диференціальним законом розподілу. А графік  $f(x)$  – кривою розподілу.

## В.1.2 Числові характеристики випадкових величин

Означення В.1.7: Математичним сподіванням, або середнім значенням  $\mathbb{E}(X)$  дискретної випадкової величини  $X$  називається сума добутків всіх його значень на відповідні їм ймовірності [17]:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \quad (\text{B.2})$$

Означення В.1.8: Математичне сподівання неперервної випадкової величини визначається [17]:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{B.3})$$

Означення В.1.9: Дисперсією  $\mathbb{D}(X)$  випадкової величини  $X$  називається математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)^2$ . Або  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X - a)^2$ , де  $a = \mathbb{E} X$ .

Якщо  $X$  – дискретна, то

$$\mathbb{D}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E} X)^2 \cdot p_i \quad (\text{B.4})$$

Якщо  $X$  – неперервна, то

$$\mathbb{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E} X)^2 f(x) dx \quad (\text{B.5})$$

Означення В.1.10: Середнім квадратичним відхиленням (стандартним відхиленням або стандартом)  $\sigma_X$  випадкової величини  $X$  називається арифметичним значенням кореня квадратного з дисперсії:  $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{D} X}$

Математичне сподівання  $\mathbb{E} X$ , або перший початковий момент, характеризує середнє значення або положення розподілу випадкової величини  $X$  на числовій осі; дисперсія  $\mathbb{D} X$ , або другий центральний момент  $\mu_2$ , – величину розсіювання розподілу  $X$  відносно  $\mathbb{E} X$  [15].

## В.2 Перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа - інтегральне перетворення, що зв'язує функцію  $F(s)$  комплексної змінної (зображення) з функцією  $f(t)$  дійсного змінного (оригінал). З його допомогою досліджуються властивості динамічних систем і вирішуються диференціальні і інтегральні рівняння.

Однією з особливостей перетворення Лапласа, які визначили його широке поширення в наукових і інженерних розрахунках, є те, що багатьом співвідношенням і операціям над оригіналами відповідають простіші співвідно-

шення над їх зображеннями. Так, згортка двох функцій зводиться в просторі зображень до операції множення, а лінійні диференціальні рівняння стають алгебраїчними.

Означення В.2.1: Перетворенням Лапласа функції дійсної змінної  $f(t)$  називається функція  $F(s)$  комплексної змінної  $s = \theta + i\omega$  така, що:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{B.6})$$

при цьому права частина виразу називається інтегралом Лапласа [16].

Перетворення Лапласа існує, якщо  $f(t) : \mathbb{R}^+ \cup 0 \rightarrow \mathbb{R}$  – інтегровна на будь-якому підінтервалі  $[0, +\infty)$  і виконується нерівність  $|f(t)| < Ke^{\omega t}$  для деяких фіксованих  $K > 0$ ,  $\omega \geq 0$ .

### В.2.1 Властивості перетворення Лапласа

1. Перетворення Лапласа лінійне, тобто для  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (\text{B.7})$$

2. Теорема подібності. Для  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F(\alpha s) \quad (\text{B.8})$$

3. Диференціювання оригінала. Якщо перетворення Лапласа існує для  $f'(t)$ , то

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (\text{B.9})$$

4. Диференціювання зображення. Зводиться до домноження оригіналу на  $-t$ :

$$\mathcal{L}^{-1} \{F'(s)\} = -t \cdot f(t) \quad (\text{B.10})$$

або, взагалі:

$$\mathcal{L}^{-1} \{F^{(n)}(s)\} = (-t)^n \cdot f(t) \quad (\text{B.11})$$

5. Інтегрування оригіналу. Зводиться до поділу зображення Лапласа на  $s$ :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (\text{B.12})$$

6. Інтегрування зображення. Якщо інтеграл

$$\int_s^\infty F(p) dp$$

збігається, то він є зображенням для функції  $\frac{f(t)}{t}$ :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(p) dp \quad (\text{B.13})$$

7. Теорема зміщення. Для  $\forall s_0 \in \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{L} \{e^{s_0 t} f(t)\} = F(s - s_0) \quad (\text{B.14})$$

8. Теорема запізнення. Для  $\forall t_0 > 0$

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0}F(s) \quad (\text{B.15})$$

або більш загально,  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\eta(t - t_0)\} = e^{-st_0}F(s) \quad (\text{B.16})$$

$$\text{де } \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \text{ — функція Хевісайда.}$$

Важливою для застосування є наступна теорема:

9. Теорема єдиності. Якщо дві функції  $f_1(t)$  та  $f_2(t)$  мають одне й те саме зображення Лапласа  $F(s)$ , то ці функції тотожно рівні.

Означення В.2.2: Згорткою двох функцій  $f(t)$  та  $g(t)$  називається

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (\text{B.17})$$

10. Теорема про згортку. Зображенням згортки двох функцій є добуток зображень Лапласа цих функцій:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s) \cdot G(s) \quad (\text{B.18})$$

Для визначення зв'язку між асимптотичною поведінкою оригіналу та зображення було використано [теорему Таубера](#).