РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 42 ст., 2 рис., 0 табл., 7 джерел та 3 додатки.

Метою даної роботи є створення адекватної математичної моделі парковки, та отримання математичного результату у вигляді оцінки максимальної кількості автомобілів на парковці.

Результати роботи:

- розглянуто 3 детерміновані моделі поведінки водіїв на парковці, виведено відповідні аналітичні формули;
- розглянуто 2 випадкові моделі поведінки водіїв на парковці, а саме модель рівномірного розподілу по вільному проміжку та модель суміші рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі;
- реалізовано додаток консольного типу для моделювання парковки за заданою стратегією поведінки водіїв.

Новизна роботи:

- проведено детальний аналіз результатів Реньї, досліджено і виведено аналітичну формулу для узагальнення класичної моделі парковки Реньї;
- створено додаток для імітаційного моделювання процесу парковки за заданою дисципліною паркування автомобілів.

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ, ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ, ТЕОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗСУВОМ, ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ, ТАУБЕРОВІ ТЕОРЕМИ.

ABSTRACT

The theme of this thesis is ”Stochastic modeling approach to the cars’ parking process research”.

The thesis: 42 p., 2 fig., 0 tabl., 7 sources and 3 appendices.

The theme of this thesis is ”Methods of object recognition in musical notation”.

The purpose of this thesis is to develop adequate mathematical model of parking process, and getting the estimation of maximum count of vehicles on the parking as the result of mathematical inference.

Thesis results:

- three deterministic models of drivers’ behaviour were examined and corresponding analytical formulas were deduced;
- two non-deterministic models of drivers’ behaviour were examined, more precisely – a model with uniform distribution of vehicles along the parking, and a model based on the mixture of uniform and Bernulli distribution;
- all implemented algorithms were assembled into console application for imitational parking process modeling.

Thesis newness:

- a detailed analysis of Rènyi’s results was performed, the classical Rènyi’s parking model was generalised and corresponding analytical formula was deduced;
- a console application for imitational parking process modelling in case of different disciplines was created.

STOCHASTIC PROCESS THEORY, PROBABILITY THEORY, BIASED INTEGRAL EQUATION THEORY, OPERATIONAL CALCULUS, TAUBERIAN THEOREMS.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

МС — математичне сподівання

ММК — метод Монте-Карло

ЕОМ – електронна обчилювальна машина

ВСТУП

Історія першого автомобіля почалася ще в 1768 році разом зі створенням паросилових машин, спроможних перевозити людину. Парові машини працювали на тепловому двигуні зовнішнього згоряння, що перетворював енергію водяної пари в механічну енергію зворотно-поступального руху поршню, а потім в обертальний рух валу. Перша примітивна парова машина було побудована ще у XVII сторіччі Папеном, і являла собою циліндр з поршнем, який підіймався під дією пари, а опускався під тиском атмосфери після згущення відпрацьованої пари. Остаточні удосконалення в паровій машині були зроблені Джеймсом Уаттом в 1769 році.

В 1806 році з'явилися перші машини, які приводилися в рух двигунами внутрішнього згоряння на горючому газу, що призвело до появи в 1885 році повсюди використовуваного газолінового або бензинового двигуна внутрішнього згоряння.

Машини, що працюють на електриці ненадовго з'явилися на початку XX століття, але майже повністю зникли з поля зору аж до початку XXI століття, коли знову виникла зацікавленість в малотоксичному і екологічно чистому транспорті.

На сьогоднішній день автомобілі можна побачити усюди: надворі біля будинків, на автомагістралі чи у невеличкому провулку, в центрі міста та в селі. Автомобілей вже така незліченна кількість, що в Києві скадно знайти куточок, де не видно автотранспорту, де не чутно гулу двигунів. Спираючись на статистику 2011 року, в Україні на 1000 осіб приходилось 158 автомобілів. А от в країнах лідерах за кількістю автомобілей, таких як, наприклад, Монако, нараховувалося порядку 900 авто на 1000 осіб [1].

Отже, досить гостро постає проблема організації розміщення автомобілів. Для цього створюються парковки. Але при проектуванні парковки постає проблема вибору оптимального розміру. Адже різні водії порізному паркують свої автомобілі: деякі витрачають місце економно, а деякі ставлять авто так, як їм заманеться. Тому, якщо спроектувати парковку, що може вмістити необхідну кількість автомобілів і не більше, то виникне ситуація, що місця на парковці більше немає. Якщо ж парковка буде занадто великою, то ймовірно, що багато місць будуть незайманими, тобто простір був використаний не оптимально.

Саме тому у цій роботі розглядається задача оцінки максимальної кількості автомобілей на парковці. Для вирішення проблеми було виконано наступне:

а) визначено максимальну кількість автомобілей на одновимірній парковці у крайніх, детермінованих випадках, а саме:
   1) коли водії ставлять авто впритул до попереднього;
   2) коли водії ставлять авто рівно так, щоб між автомобілями був пропуск розміру майже з автомобіль, але останній туди все-таки не поміщався;
   3) коли водії ставлять свій автомобіль строго посередині вільного місця.

б) побудовано деякі моделі заповнення парковки з випадковим фактором. Визначено асимптотику функції залежності математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на одновимірній парковці від довжини парковки для кожної побудованої моделі;

в) створено невеликий додаток на скриптовій мові Python, що визначає коефіцієнт для асимптотичної оцінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на одновимірній парковці у одновимірному випадку, а також допомагає встановити залежність від лінійних розмірів парковки у двовимірному випадку.

Об’єктом дослідження є процес паркування автомобілів.

Предметом дослідження є створення алгоритму для визначення максимальної кількості авто на парковці у середньому.

В якості методів дослідження використовуються теорія стохастичних процесів та теорія інтегральних рівнянь зі зсувом.

Наукова новизна роботи: проведено детальний аналіз результатів Реньї щодо проблеми паркування та пакування, та побудовано узагальнення класичної моделі Реньї, в якій поведінка водіїв задається не рівномірним законом розподілу, а сумішшю рівномірного та розподілу Бернуллі..

Практичними результатами роботи є створення додатку для моделювання процесу паркування для більш складних моделей, в тому числі і для двовимірної парковки.

Робота складається з 4 розділів. В першому розділі досліджуються існуючі підходи до вирішення задачі паркування автомобілів, пояснується можливість застосування лінійної моделі парковки у реальному житті. В другому розділі наводиться математичний апарат для виведення формул у випадку недетермінованих моделей та проведене саме виведення формул. У третьому розділі наведено обґрунтування вибору платформи розробки, аналіз алгоритму модулювання та алгоритму вирахування констант, отриманих у другому розділі. У четвертому розділі проводиться функціонально-вартісний аналіз програмного продукту.

РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ АКТУАЛЬНОСТІ ПРОДУКТУ

У цьому розділі наведено інформацію про результат Реньї стосовно проблеми парковки та пакування. Також проведено розбір літератури та опрацьовано існуючі роботи на цю тему.

1.1 Аналіз існуючих підходів

У 1958 році угорський математик Альфред Реньї опублікував працю щодо проблеми заповнення одновимірного обмеженого простору. Ця праця стала підґрунтям для подальшого дослідження в напрямі проблеми парковки та пакування [2].

Задача формулювалася наступним чином: нехай є заданий відрізок $[0;\ x]$, де $x > 1$, і нехай на цей відрізок "паркуються" одновимірні "автомобілі" одиничної довжини, керуючись рівномірним розподілом. У такій ситуації доводилось, що середнє максимальне значення кількості машин на парковці буде $M(x)$ задовільняє наступну систему:

$$M(X) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \text{X} < 1 \\ 1 + \frac{2}{X-1} \int\limits_0^{X-1} M(y)dy & \text{X} \geq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

В такому випадку середня щільність автомобілів для великих X виходить

$$m = \lim_{X\to\infty} \frac{M(X)}{X} = \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-2\int\limits_0^{x} \frac{1-e^{-y}}{y} dy\right) dx \approx 0.747597. \tag{1.2}$$

Але цей результат потребує узагальнення, адже описана вище класична модель Реньї не дає можливості активно застосовувати результат на практиці. Тому у цій роботі буде створена більш загальна модель, в якій водії мають змішану модель поведінки: з деякою ймовірністю вони ставлять свій автомобіль впритул до сусіднього, а в інакшому випадку – керуючись рівномірним розподілом.

1.2 Огляд літератури, в якій досліджено змінну довжину юніту

У 1958 році угорський математик Альфред Реньї опублікував працю щодо проблеми заповнення одновимірного обмеженого простору. Ця праця стала підґрунтям для подальшого дослідження в напрямі проблеми парковки та пакування [2].

Задача формулювалася наступним чином: нехай є заданий відрізок $[0;\ x]$, де $x > 1$, і нехай на цей відрізок "паркуються" одновимірні "автомобілі" одиничної довжини, керуючись рівномірним розподілом. У такій ситуації доводилось, що середнє максимальне значення кількості машин на парковці буде $M(x)$ задовільняє наступну систему:

$$M(X) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \text{X} < 1 \\ 1 + \frac{2}{X-1} \int\limits_{0}^{X-1} M(y)dy & \text{X} \geq 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

В такому випадку середня щільність автомобілів для великих X виходить

$$m = \lim_{X \to \infty} \frac{M(X)}{X} = \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-2 \int\limits_{0}^{x} \frac{1-e^{-y}}{y} dy\right) dx \approx 0.747597. \tag{1.4}$$

Але цей результат потребує узагальнення, адже описана вище класична модель Реньї не дає можливості активно застосовувати результат на практиці. Тому у цій роботі буде створена більш загальна модель, в якій водії мають змішану модель поведінки: з деякою ймовірністю вони ставлять свій автомобіль впритул до сусіднього, а в інакшому випадку – керуючись рівномірним розподілом.

1.3 Огляд літератури стосовно випадку розподілу з неперервною щільністю з певними обмеженнями

У 1958 році угорський математик Альфред Реньї опублікував працю щодо проблеми заповнення одновимірного обмеженого простору. Ця праця стала підґрунтям для подальшого дослідження в напрямі проблеми парковки та пакування [2].

Задача формулювалася наступним чином: нехай є заданий відрізок $[0;\ x]$, де $x > 1$, і нехай на цей відрізок "паркуються" одновимірні "автомобілі" одиничної довжини, керуючись рівномірним розподілом. У такій ситуації доводилось, що середнє максимальне значення кількості машин на парковці буде $M(x)$ задовільняє наступну систему:

$$M(X) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \text{X} < 1 \\ 1 + \frac{2}{X-1} \int\limits_0^{X-1} M(y)dy & \text{X} \geq 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

В такому випадку середня щільність автомобілів для великих X виходить

$$m = \lim_{X\to\infty} \frac{M(X)}{X} = \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^x \frac{1-e^{-y}}{y} dy\right) dx \approx 0.747597. \tag{1.6}$$

Але цей результат потребує узагальнення, адже описана вище класична модель Реньї не дає можливості активно застосовувати результат на практиці. Тому у ції роботі буде створена більш загальна модель, в якій водії мають змішану модель поведінки: з деякою ймовірністю вони ставлять свій автомобіль впритул до сусіднього, а в інакшому випадку – керуючись рівномірним розподілом.

1.4 Огляд літератури стосовно оцінки моментів вищих порядків для проблеми паркування

У 1958 році угорський математик Альфред Реньї опублікував працю щодо проблеми заповнення одновимірного обмеженого простору. Ця праця стала підґрунтям для подальшого дослідження в напрямі проблеми парковки та пакування [2].

Задача формулювалася наступним чином: нехай є заданий відрізок $[0;\ x]$, де $x > 1$, і нехай на цей відрізок "паркуються" одновимірні "автомобілі" одиничної довжини, керуючись рівномірним розподілом. У такій ситуації доводилось, що середнє максимальне значення кількості машин на парковці буде $M(x)$ задовільняє наступну систему:

$$M(X) = \begin{cases} 0 & 0 \le \mathrm{X} < 1 \\ 1 + \frac{2}{X-1} \int\limits_0^{X-1} M(y)dy & \mathrm{X} \ge 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

В такому випадку середня щільність автомобілів для великих X виходить

$$m = \lim_{X\to\infty} \frac{M(X)}{X} = \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-2\int\limits_0^{x} \frac{1-e^{-y}}{y} dy\right) dx \approx 0.747597. \tag{1.8}$$

Але цей результат потребує узагальнення, адже описана вище класична модель Реньї не дає можливості активно застосовувати результат на практиці. Тому у ції роботі буде створена більш загальна модель, в якій водії мають змішану модель поведінки: з деякою ймовірністю вони ставлять свій автомобіль впритул до сусіднього, а в інакшому випадку – керуючись рівномірним розподілом.

1.5 Висновки до розділу

У цьому розділі було наведено інформацію про результат Реньї стосовно проблеми парковки та пакування. Також пояснено застосування моделі лінійної парковки у реальному житті.

РОЗДІЛ 2 ВИЗНАЧЕННЯ ОЦІНКИ МАКСИМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ АВТОМОБІЛЕЙ АНАЛІТИЧНИМ ШЛЯХОМ

2.1 Ввідні позначення

Для початку вважатимемо, що у нас одновимірна парковка довжини X, на якій розташовуються автомобілі, довжини 1 кожен. Для спрощення будемо вважати, що водії прибувають на парковку по черзі, і залишають там свій автомобіль. Процес продовжується до того моменту, допоки парковка не заповниться. Тобто, не залишиться вільного відрізку довжини не менше за 1. Через $F(X)$ позначимо максимальну кількість автомобілей. Якщо $F(X)$ – випадкова величина, то через $m(X)$ будемо позначати $\mathbb{E}F(X)$.

2.2 Дослідження крайових випадків

В цьому підрозділі буде розглянуто 3 моделі поведінки водіїв для того, щоб отримати певні оцінки для значень $F(X)$.

Перша модель припускає, що всі водії «чемні» та ставлять свій автомобіль скраю вільної частини парковки, наприклад, зліва. Зрозуміло, що це найбільш оптимальний випадок, тобто така модель дозволить припаркувати рівно стільки автомобілей, скільки взагалі може вміститися на парковці.

Друга модель припускає, що всі водії, навпаки, намагаються зайняти якомога більше місця, і тому відступають від краю вільної зони максимально можливий проміжок, в який не вміститься інший автомобіль.

Третя модель припускає, що водії ставлять свої автомобілі посередині вільного проміжку. Ця модель не є крайнім випадком, але є досить цікавою реалізацією процесу паркування.

Всі 3 моделі схематично зображені на Рис. 2.1.

(а)

(б)

(в)

Рисунок 2.1 – Схематичне зображення першої (а), другої (б), та третьої (в) невипадкових моделей

Тепер необхідно визначити результати для цих моделей. Для першої моделі відповідь досить очевидна:

$$F(X) = [X] \tag{2.1}$$

Для другої моделі для спрощення вважатимемо, що усі водії стають зліва вільної частини. Тоді у перших $[\frac{X}{2}]$ авто зліва буде відповідний проміжок розміром майже 1 (нехай рівно 1 – границя), а також, якщо виконується нерівність $X - 2 * [\frac{X}{2}] \geq 1$, то можна вмістити ще 1 автомобіль. Остання нерівність виконується тільки якщо $[X]$ – непарне число. Але тоді $[\frac{X+1}{2}] = 2 * [\frac{X}{2}] + 1$. А якщо X – парне, то $[\frac{X}{2}] = [\frac{X+1}{2}]$, і це допоможе уникнути системи у відповіді. Отже, для другої моделі:

$$F(X) = \left[\frac{X+1}{2}\right] \tag{2.2}$$

Для визначення відповіді для тертьої моделі треба навести кілька спостережень:

$$X < 1 \Rightarrow F(X) = 0; \quad 1 \leq X < 3 \Rightarrow F(X) = 1. \tag{2.3}$$

$$F(X) = 2 * F\left(\frac{X-1}{2}\right) + 1, X \geq 1. \tag{2.4}$$

Перше твердження очевидне, а друге випливає з того, що ставлячи автомобіль посередині вільного проміжку довжини X, ми отримуємо два нових вільних проміжка довжини $\frac{X-1}{2}$. Використовуючи наведені факти, спробуємо довести, що

$$F(X) = 2^k - 1, \quad X \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{2.5}$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. База індукції доведена, спираючись на спостереження (2.3). Нехай твердження доведено для k, доведемо його для $k + 1$.

$$X \in [2^{k+1} - 1, 2^{k+2} - 1) \Rightarrow \frac{X-1}{2} \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1) \tag{2.6}$$

Оскільки виконується (2.4), і для k виконується (2.5) за припущенням, то маємо:

$$F(X) = 2 * F(\frac{X-1}{2}) + 1 = 2 * (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \quad (2.7)$$

Перехід індукції доведено. □

2.3 Опис необхідного математичного апарату для подальшого дослідження

2.3.1 Асимптотична поведінка функції

Нехай f та g – дві функції, визначені в деякому проколотому околі $\dot{U}(x_0)$ точки x_0, причому в цьому околі g не обертається в 0.

Означення 2.3.1: f є "O" великим від g [6] при $x \to x_0$, якщо

$$\exists C > 0 \forall x \in \dot{U}(x_0) : |f(x)| < C|g(x)| \quad (2.8)$$

Означення 2.3.2: f є "o" малим від g [6] при $x \to x_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \dot{U}_\varepsilon(x_0) \forall x \in \dot{U}_\varepsilon(x_0) : |f(x)| < \varepsilon |g(x)| \quad (2.9)$$

Означення 2.3.3: f є еквівалентним g [6] ($f \sim g$) при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

2.3.2 Теорема Таубера

Означення 2.3.4: Функція $L : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ – слабо мінлива на нескінченності, якщо для $\forall x > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1$$

Означення 2.3.5: Функція $L : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ – слабо мінлива в 0, якщо $L(\frac{1}{x})$ – слабо мінлива на нескінченності.

Нехай $u(t)$ – така функція, що має зображення Лапласа. Нехай $U(t) = \int\limits_0^t u(s)ds$ і $\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = \omega(\tau)$.

Тоді має місце наступна теорема [7, ст. 445].

Теорема 2.3.1 (Теорема Абеля-Таубера): Нехай L – слабко мінлива на нескінченності і $0 \le \rho < +\infty$. Тоді наступні два твердження тотожні:

$$\omega(\tau) \sim \tau^{-\rho} L(1/\tau), \qquad \tau \to 0 \tag{2.10}$$

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} t^{\rho} L(t), \qquad t \to +\infty \tag{2.11}$$

Ця теорема має досить видатну історію. Зазвичай вона подається як 2 окремі теореми, перша являє собою перехід від асимптотики інтеграла оригінала до асимптотики зображення, і називається теоремою Абеля. Друга ж, обернена, є однією з Тауберових теорем, і була досить складно доведена в праці Харді-Літлвуда. Але в 1930 Карамата опублікував спрощене доведення, чим створив сенсацію [7, ст. 445].

Досить цікавим зауваженням до цієї теореми є те, що можна змінити границі на протилежні, тобто $\tau \to \infty,\ t \to 0$ [7, ст. 445].

Теорема 2.3.2: Твердження теореми (2.3.1) залишається вірним, якщо поміняти місцями 0 та ∞, тобто $\tau \to \infty,\ t \to 0$ (і, відповідно, L – слабко мінлива в 0).

2.4 Дослідження моделі з вибором місця для авто за рівномірним розподілом

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись рівномірним розподілом.

2.4.1 Виведення інтегрального рівняння

Зрозуміло, що порядок вибору вільних проміжків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після паркування одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього спочатку заповнюється ліва частина, а потім права.

Необхідно визначити $m(X) = \mathbb{E}F(X)$. Нехай $\xi \sim Uniform(0, X-1)$ – випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого автомобіля на парковці. Тоді маємо наступну тотожність:

$$m(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F(\xi) + F(X-1-\xi) + 1|\xi)) =$$
$$= \int\limits_0^{X-1} m(t)\frac{1}{X-1}dt + \int\limits_0^{X-1} m(X-t-1)\frac{1}{X-1}dt + 1$$

Так як

$$\int\limits_0^{X-1} m(X-t-1)dt = \langle u = X-t-1 \rangle = -\int\limits_{X-1}^{0} m(u)dt = \int\limits_0^{X-1} m(u)dt,$$

то

$$m(X) = \frac{2}{X-1}\int\limits_0^{X-1} m(t)dt + 1 \tag{2.12}$$

Для зручності зробимо заміну $X \to X+1$. Отримаємо

$$m(X+1) = \frac{2}{X}\int\limits_0^{X} m(t)dt + 1, \quad \forall X > 0 \tag{2.13}$$

Таким чином, отримали інтегральне рівняння. До того ж, відомо, що

$$m(X) \equiv 0, \quad X \in [0;1) \tag{2.14}$$

Спираючись на (2.1) та (2.2), маємо обмеження на $m(X)$:

$$\left[\frac{X+1}{2}\right] \leq m(X) \leq [X] \tag{2.15}$$

З цієї нерівності випливає, що якщо є якась асимптотика у функції $m(X)$, то вона порядку X, тобто

$$m(X) \sim C \cdot X \text{ при } x \to +\infty, \quad C \in [0.5; 1] \tag{2.16}$$

2.4.2 Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати (2.13) за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується (2.15), то зображення Лапласа для $m(X)$ існує. До того ж, за властивістю (**??**):

$$\mathcal{L}\left\{m(X+1)\right\} = \langle(2.14)\rangle = \mathcal{L}\left\{m(X+1)\eta(X+1)\right\} = e^{p}M(p).$$

Оскільки $m(X) \leq X$, то $\int\limits_0^X m(t)dt < X^2$, тобто для інтегралу від $m(X)$ зображення також існує, за властивістю (**??**):

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^X m(t)dt\right\} = \frac{M(p)}{p}.$$

Аналогічно доводиться, що $\frac{1}{X}\int\limits_0^X m(t)dt < X$ при $X > 0$, а тому зображення Лапласа для цього виразу також існує. Тоді за властивістю (**??**):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{2}{X}\int\limits_0^X m(t)dt\right\} = 2\int\limits_p^\infty \frac{M(s)}{s}ds.$$

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = 2\int_p^{\infty} \frac{M(s)}{s} ds + \frac{1}{p} \tag{2.17}$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p:

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = -2\frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \tag{2.18}$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p) - \frac{2M(p)}{pe^p} - \frac{1}{p^2 e^p} = -M(p)\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) - \frac{e^{-p}}{p^2} \tag{2.19}$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\dot{M}_h(p) = -M_h(p)\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right)$$

$$\frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} = -\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right)$$

$$\int_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)} ds = -\int_1^p \left(1 + \frac{2e^{-s}}{s}\right) ds$$

$$\ln M_h(s)\Big|_1^p = -(p-1) - 2\int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds$$

Позначимо

$$Q(p) := \int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds \tag{2.20}$$

Тоді маємо

$$\ln M_h(p) = \ln M_h(1) + 1 - p - 2Q(p)$$
$$M_h(p) = M_h(1) \cdot e^{1-p-2Q(p)} \cdot const$$

Оскільки $M(1)$ можна включити в константу, то маємо розв'язок

$$M_h(p) = C \cdot e^{1-p-2Q(p)}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

Дійсно, перевіримо цей розв'язок:

$$\dot{M}_h(p) = C \cdot e^{1-p-2Q(p)} \cdot (-1 - 2\dot{Q}(p)) =$$
$$= C \cdot e^{1-p-2Q(p)} \cdot \left(-1 - 2\frac{e^{-p}}{p}\right) = -M_h(p) \cdot \left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right)$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M(p) = C(p) \cdot e^{1-p-2Q(p)}$$
$$\dot{M}(p) = \dot{C}(p) \cdot e^{1-p-2Q(p)} - C(p) \cdot (e^{1-p-2Q(p)}) \cdot \left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right)$$

з іншої сторони, з (2.19) маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p) \cdot e^{1-p-2Q(p)} \left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right) - \frac{e^{-p}}{p^2}$$

тому

$$\dot{C}(p) = -\frac{e^{-p}}{p^2} e^{p+2Q(p)-1} = -e^{-1}\frac{e^{2Q(p)}}{p^2}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = -\exp(-1) \cdot \int_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + const \tag{2.22}$$

І тоді отримуємо вираз для $M(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) = -\left(\exp(-1)\cdot\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds + const\right)e^{1-p-2Q(p)} = \\ = -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds + K\right)e^{-p-2Q(p)}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\dot{M}(p) = -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds + K\right)' e^{-p-2Q(p)} - \left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds + K\right)\cdot$$
$$\cdot\left(e^{-p-2Q(p)}\right)' = -\frac{e^{2Q(p)}}{p^2}e^{-p-2Q(p)} + \left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds + K\right)\cdot$$
$$\cdot e^{-p-2Q(p)}\left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right) = -\frac{e^{-p}}{p^2} - M(p)\left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right)$$

Перевірено. Тоді остаточний результат без вирахування константи:

$$M(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds + K\right)e^{-p-2Q(p)} \tag{2.24}$$

2.4.3 Визначення константи у розв’язку

У 2.4.2 було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X+1)$, до того ж,

$$\mathcal{L}\left\{m(X+1)\right\} = e^p M(p). \tag{2.25}$$

Таким чином, маємо

$$\mathcal{L}\left\{m(X+1)\right\} = \tilde{M}(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds + K\right)e^{-2Q(p)}. \tag{2.26}$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\tilde{M}(p) \to 0,\ p \to +\infty$.

Розглянемо $Q(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{aligned} Q(p) = \int\limits_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds < \int\limits_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds < \int\limits_1^\infty e^{-s} ds = \\ = \exp(-1) - \exp(-\infty) = \exp(-1) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Тобто $Q(p)$ - обмежена на $[1;\infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q(p)$ – монотонно зростаюча за p. Тому

$$0 = \tilde{M}(\infty) = \lim_{p\to\infty} \tilde{M}(p) = \left(\int\limits_\infty^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) \lim_{p\to\infty} e^{-2Q(p)} \tag{2.28}$$

Тут $\lim\limits_{p\to\infty} e^{-2Q(p)} = const > 0$, тому маємо, що

$$K = -\int\limits_\infty^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds = \int\limits_1^\infty \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds. \tag{2.29}$$

Таким чином, отримали нову версію $M(p)$:

$$M(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) e^{-p-2Q(p)} = e^{-p-2Q(p)} \int\limits_p^\infty \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds \tag{2.30}$$

2.4.4 Застосування теореми Таубера

Для знаходження асимптотики $m(X)$ на нескінченності, за теоремою Таубера (2.3.1) необхідно визначити асимптотику $M(p)$ при $p \to 0$.

Якщо знайти такі $C \in \mathbb{R}$ та $\alpha \in \mathbb{R}^+$, що $M(p) \sim C \cdot p^{-\alpha},\ p \to 0$, то можна стверджувати, що $\int\limits_0^X m(x)dx \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} C X^\alpha,\ X \to \infty$. Вже зараз зрозуміло, що $\alpha = 2$, адже теорема справедлива в обидва боки і виконується (2.16).

Для цього розглянему поведінку в нулі трьох множників, з яких складається $M(p)$, а саме:

а) e^{-p};

б) $e^{-2Q(p)}$;

в) $\int\limits_p^{\infty} \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds$,

Щодо першого множнику, то в 0 він прямує до 1, тож ні на що не впливає, і його можна не розглядати.

Для наступного аналізу доведемо деякі леми.

Лема 2.4.1: $e^{-2Q(p)}$ поводиться як p^{-2} в 0, з точністю до константи, а саме:

$$\lim_{p\to 0} \frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}} = \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds\right) \tag{2.31}$$

Доведення. Для знаходження ліміту прологарифмуємо вираз. Отримаємо:

$$2\ln p - 2Q(p) = 2\ln p - 2\int\limits_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds = 2\int\limits_1^p \frac{1}{s} ds - 2\int\limits_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds =$$

$$= 2\int\limits_1^p \frac{1-e^{-s}}{s} ds = -2\int\limits_p^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds$$

Тепер, підвівши до експоненти обидві частини, отримаємо:

$$\frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}} = \exp\left(-2\int\limits_p^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds\right)$$

Якщо довести, що інтеграл

$$-2\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds$$

збігається, то лему буде доведено, адже експонента – неперервна функція, і можна переходити до ліміту під експонентою. Зрозуміло, що

$$-2\int\limits_p^1 \frac{1-e^{-s}}{s}ds$$

збігається для $\forall p \in (0;\ 1]$. Дійсно, підінтегральна функція $\frac{1-e^{-s}}{s}$ мажорується $\frac{1}{s}$, яка, в свою чергу, має скінченне значення інтегралу:

$$\int\limits_p^1 \frac{1}{s}ds = \ln 1 - \ln p = -\ln p, \quad p > 0$$

Невизначеність виникає лише в точці 0. Знайдемо ліміт підінтегральної функції в точці 0:

$$\lim_{p\to 0}\frac{1-e^{-s}}{s} = \langle \text{правило Лопіталя для невизначенності 0/0} \rangle = \lim_{p\to 0}\frac{e^{-s}}{1} = 1$$

Таким чином, підінтегральна функція обмежена в деякому ε-околі 0, тому інтеграл також збіжний, і лему доведено. □

Лема 2.4.2: Функція

$$Q(p) = \int\limits_1^p \frac{e^{-s}}{s}ds$$

– обмежена на $[w;\ \infty],\ w > 0$.

Доведення. На проміжку $[1;\ \infty]$ підінтегральна функція мажорується функцією e^{-s}, а на проміжку $[w;\ 1]$ – функцією $\frac{1}{s}$, тому, аналогічно доведенню попередньої леми, інтеграл буде збіжний, і:

$$Q(p) \leq \int_{1}^{\infty} e^{-s} ds = \exp(-1), \quad p \geq 1$$

$$Q(p) \leq \int_{w}^{1} \frac{1}{s} ds = -\ln w, \quad p \in [w;\ 1]$$

Таким чином, $Q(p) \leq \max\{-\ln w, \exp(-1)\}$. □

Лема 2.4.3: Інтеграл

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds$$

– збіжний.

Доведення. Спираючись на лему (2.4.1), маємо, що підінтегральна функція прямує до деякої константи при $s \to 0$, оскільки є обернено пропорційною до функції з тої леми. Тому в деякому проколотому ε-околі точки 0 підінтегральна функція буде обмежена. На інтервалі $[\varepsilon;\ \infty]$ за лемою (2.4.2), $Q(s)$ – обмежена, а тому і $\exp(2Q(s))$ також. Тому збіжність на інтервалі $[\varepsilon;\ \infty]$ виконується, якщо збігається інтеграл

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds.$$

А його збіжність – відомий факт. □

Таким чином, спираючись на доведені леми, маємо:

$$M(p) \sim p^{-2} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s}ds\right)\int\limits_0^\infty \frac{e^{2Q(s)}}{s^2}ds =$$

$$= p^{-2} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s}ds\right)\int\limits_0^\infty \exp\left(2\int\limits_1^s \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau - 2\ln s\right)ds =$$

$$= p^{-2} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s}ds\right)\int\limits_0^\infty \exp\left(2\int\limits_1^s \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau - 2\int\limits_1^s \frac{1}{\tau}d\tau\right)ds =$$

$$= p^{-2} \cdot \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s}ds\right)\int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_1^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right)ds =$$

$$= p^{-2} \cdot \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}ds - 2\int\limits_1^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right)ds$$

Склавши інтеграли під експонентою, отримаємо:

$$M(p) \sim p^{-2} \cdot \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right)ds, \quad p \to 0. \tag{2.32}$$

Тепер, за теоремою Таубера маємо при $X \to \infty$:

$$\int\limits_0^X m(x)dx \sim \frac{1}{\Gamma(2+1)}\int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right)ds \cdot X^2. \tag{2.33}$$

Або, продиференціювавши обидві частини, отримаємо:

$$m(X) \sim \frac{2}{\Gamma(2+1)}\int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right)ds \cdot X. \tag{2.34}$$

$$m(X) \sim \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right)ds \cdot X, \quad X \to \infty. \tag{2.35}$$

Тут ми мали право диференціювати обидві частини за правилом Лопіталя, адже має місце невизначеність ∞/∞.

2.5 Дослідження моделі з вибором місця для авто за сумішшю рівномірного та розподілу Бернулі

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись наступним правилом

- з ймовірністю α водій ставить автомобіль в правому кінці вільного проміжку,
- з ймовірністю $\beta = 1 - \alpha$ водій вибирає місце керуючись рівномірним розподілом, аналогічно тому, як це робилося у главі 2.4.

2.5.1 Виведення інтегрального рівняння

Аналогічно, як і в попередній частині, порядок вибору вільних проміжків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після паркування одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього спочатку заповнюється ліва частина, а потім права.

Необхідно визначити $m(X) = \mathbb{E}F(X)$. Нехай $\xi \sim Uniform(0, X-1)$ – випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого автомобіля на парковці у випадку вибору місця за рівномірним розподілом. Тоді маємо наступну тотожність:

$$m(X) = \alpha(1 + m(X-1)) + \beta(1 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(F(\xi) + F(X-1-\xi)|\xi))) =$$
$$= 1 + \alpha m(X-1) + \beta \int\limits_0^{X-1} m(t)\frac{1}{X-1}dt + \beta \int\limits_0^{X-1} m(X-t-1)\frac{1}{X-1}dt$$

Аналогічно виведенню формули (2.13), отримаємо

$$m(X+1) = 1 + \alpha m(X) + \frac{2\beta}{X}\int\limits_0^X m(t)dt, \quad \forall X > 0 \tag{2.36}$$

Аналогічно діям в главі 2.4, маємо, що виконується (2.14), (2.15) та (2.16).

2.5.2 Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати (2.36) за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується (2.15), то зображення Лапласа для $m(X)$ існує. До того ж, аналогічно до виведення в главі 2.4 маємо, що зображення Лапласа існує і для інших доданків в правій частині рівняння (2.36).

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = \alpha M(p) + 2\beta \int\limits_p^\infty \frac{M(s)}{s} ds + \frac{1}{p} \tag{2.37}$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p:

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = \alpha \dot{M}(p) - 2\beta \frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \tag{2.38}$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p)\left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)}\right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} \tag{2.39}$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\dot{M}_h(p) = -M_h(p)\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)$$
$$\frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} = -\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)$$
$$\int_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)}ds = -\int_1^p \left(\frac{e^s}{e^s-\alpha} + \frac{2\beta}{s(e^s-\alpha)}\right)ds$$
$$\ln M_h(s)\Big|_1^p = -\int_1^p \frac{e^s}{e^s-\alpha}ds - 2\int_1^p \frac{\beta}{s(e^s-\alpha)}ds$$

Позначимо

$$Q_\alpha(p) := \int_1^p \frac{\beta}{s(e^s-\alpha)}ds \tag{2.40}$$

Оскільки

$$\int_1^p \frac{e^s}{e^s-\alpha}ds = \langle u = e^s-\alpha,\ du = e^s ds = (u+\alpha)ds\rangle =$$
$$= \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{u+\alpha}{u}(u+\alpha)^{-1}du = \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{du}{u} =$$
$$= \log(e^p-\alpha) - \log(e-\alpha) = \log\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha},$$

то

$$\ln M_h(p) = \ln M_h(1) - \log\frac{e^p-\alpha}{e-\alpha} - 2Q_\alpha(p)$$
$$M_h(p) = M_h(1)\cdot\frac{e-\alpha}{e^p-\alpha}\cdot e^{-2Q_\alpha(p)}\cdot const$$

Оскільки $M(1)$ та $(e-\alpha)$ можна включити в константу, то маємо розв'язок

$$M_h(p) = C\cdot\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}, \quad \forall C\in\mathbb{R} \tag{2.41}$$

Дійсно, перевіримо цей розв'язок:

$$\dot{M}_h(p) = C \cdot \left(\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}\right)' =$$
$$= -C \cdot \left(\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}\right)^2 \cdot \left(e^p + (e^p-\alpha)\frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) e^{2Q_\alpha(p)} =$$
$$= -C\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) =$$
$$= -M(p) \cdot \left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M(p) = C(p) \cdot \left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}$$

Продиференціювавши за p, отримаємо:

$$\dot{M}(p) = \dot{C}(p) \cdot \left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1} - C(p)\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)$$

З іншої сторони, з (2.39) маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p)\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) - \frac{1}{p^2(e^p-\alpha)}$$

Тому

$$\dot{C}(p) = -\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right) \cdot \frac{1}{p^2(e^p-\alpha)} = -\frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = -\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + const \tag{2.42}$$

І тоді отримуємо вираз для $M(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) &= -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + const\right)\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1} = \\ &= -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.43}$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\dot{M}(p) = -\left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)'\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} - \left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}\right)' = -\frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2}\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} + \left(\int\limits_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\cdot$$
$$\cdot\left((e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right) = -\frac{1}{p^2(e^p-\alpha)} -$$
$$- M(p)\left(\frac{e^p}{e^p-\alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p-\alpha)}\right)$$

Перевірено. Тоді остаточний результат без вирахування константи:

$$M_\alpha(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\frac{1}{(e^p-\alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \tag{2.44}$$

Зазначимо, що у випадку $\alpha = 0$ ми маємо випадок з глави 2.4, тож і формула (2.44) має співпадати з (2.24) при $\alpha = 0$. Спираючись на те, що $Q_0(p) \equiv Q(p)$, отримуємо, що $M_0(p) \equiv M(p)$ $\forall p > 0$.

2.5.3 Визначення константи у розв'язку

У 2.4.2 було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X+1)$, до того ж,

$$\mathcal{L}\left\{m(X+1)\right\} = e^{p}M(p). \tag{2.45}$$

Аналогічно доводиться той самий факт, але для випадку суміші рівномірного розподілу та розподілу Бернулі. Таким чином, маємо

$$\mathcal{L}\left\{m_\alpha(X+1)\right\} = \tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int\limits_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\frac{e^p}{e^p-\alpha}e^{-2Q_\alpha(p)}. \tag{2.46}$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\tilde{M}_\alpha(p) \to 0,\ p \to +\infty$.

Розглянемо $Q_\alpha(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{gathered}Q_\alpha(p) = \int\limits_1^p \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}ds < \int\limits_1^\infty \frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}ds < \int\limits_1^\infty \frac{1-\alpha}{e^s-\alpha}ds < \\ < \int\limits_1^\infty \frac{1}{e^s}ds = \exp(-1) - \exp(-\infty) = \exp(-1)\end{gathered} \tag{2.47}$$

Останній перехід нерівності пояснюється досить просто:

$$\frac{1-\alpha}{u-\alpha} < \frac{1}{\alpha},\ u > 1 \Leftrightarrow u - u\alpha = u(1-\alpha) < u-\alpha,\ u>1$$

Тобто $Q_\alpha(p)$ - обмежена на $[1;\infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q_\alpha(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q_\alpha(p)$ – монотонно зростаюча за p. Тому

$$0 = \tilde{M}_\alpha(\infty) = \lim_{p\to\infty}\tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int\limits_\infty^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds + K\right)\lim_{p\to\infty} e^{-2Q_\alpha(p)} \tag{2.48}$$

Тут $\lim\limits_{p\to\infty} e^{-2Q_\alpha(p)} = const > 0$, тому маємо, що

$$K = -\int\limits_{\infty}^{1} \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds. \tag{2.49}$$

Таким чином, отримали нову версію $M(p)$:

$$\begin{aligned} M_\alpha(p) &= \left(\int\limits_{p}^{1} \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} = \\ &= \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \int\limits_{p}^{\infty} \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds \end{aligned} \tag{2.50}$$

2.5.4 Застосування теореми Таубера

Для знаходження асимптотики $m_\alpha(X)$ на нескінченності, за теоремою Таубера (2.3.1) необхідно визначити асимптотику $M_\alpha(p)$ при $p \to 0$.

Якщо знайти такі $C \in \mathbb{R}$ та $\delta \in \mathbb{R}^+$, що $M_\alpha(p) \sim C \cdot p^{-\delta}, \ p \to 0$, то можна стверджувати, що $\int\limits_0^X m_\alpha(x)dx \sim \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} C X^\delta, \ X \to \infty$. Вже зараз зрозуміло, що $\delta = 2$, адже теорема справедлива в обидва боки і виконується (2.16).

Для цього розглянемо поведінку в нулі трьох множників, з яких складається $M_\alpha(p)$, а саме:

а) $\frac{1}{e^p - \alpha}$;

б) $e^{-2Q_\alpha(p)}$;

в) $\int\limits_p^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds$,

Щодо першого множнику, то в 0 він, очевидно, прямує до $\frac{1}{1-\alpha}$,

Для наступного аналізу доведемо деякі леми.

Лема 2.5.1: $e^{-2Q(p)}$ поводиться як p^{-2} в 0, з точністю до константи, а саме:

$$\lim_{p\to 0}\frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}}=\exp\left(-2\int\limits_0^1\frac{e^s-1}{s(s^s-\alpha)}ds\right)\tag{2.51}$$

Доведення. Для знаходження ліміту прологарифмуємо вираз. Отримаємо:

$$2\ln p-2Q_\alpha(p)=2\ln p-2\int\limits_1^p\frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}ds=2\int\limits_1^p\frac{1}{s}ds-$$
$$-2\int\limits_1^p\frac{1-\alpha}{s(e^s-\alpha)}ds=2\int\limits_1^p\frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds=-2\int\limits_p^1\frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds$$

Тепер, підвівши до експоненти обидві частини, отримаємо:

$$\frac{e^{-2Q_\alpha(p)}}{p^{-2}}=\exp\left(-2\int\limits_p^1\frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right)$$

Якщо довести, що інтеграл

$$-2\int\limits_0^1\frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds$$

збігається, то лему буде доведено, адже експонента – неперервна функція, і можна переходити до ліміту під експонентою. Зрозуміло, що

$$-2\int\limits_p^1\frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds$$

збігається для $\forall p\in(0;\ 1]$. Дійсно, оскільки $e^s-1<e^s-\alpha$, підінтегральна функція $\frac{1-e^{-s}}{s}$ мажорується $\frac{1}{s}$, яка, в свою чергу, має скінченне значення

інтегралу:

$$\int_p^1 \frac{1}{s} ds = \ln 1 - \ln p = -\ln p, \quad p > 0$$

Невизначеність виникає лише в точці 0. Знайдемо ліміт підінтегральної функції в точці 0:

$$\lim_{p \to 0} \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} = \langle \text{правило Лопіталя для невизначенності } 0/0 \rangle =$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{e^s}{se^s + (e^s - \alpha)} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Таким чином, підінтегральна функція обмежена в деякому ε-околі 0, тому інтеграл також збіжний, і лему доведено. $\square$

Лема 2.5.2: Функція

$$Q_\alpha(p) = \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds$$

– обмежена на $[w;\ \infty],\ w > 0$.

Доведення. На проміжку $[1;\ \infty]$ підінтегральна функція мажорується функцією e^{-s} (див. (2.47)), а на проміжку $[w;\ 1]$ – функцією $\frac{1}{s}$, адже $1 - \alpha < e^s - \alpha,\ s > 0$. Тому, аналогічно доведенню попередньо леми, інтеграл буде збіжний, і:

$$Q_\alpha(p) \leq \int_1^\infty e^{-s} ds = \exp(-1), \quad p \geq 1$$

$$Q_\alpha(p) \leq \int_w^1 \frac{1}{s} ds = -\ln w, \quad p \in [w;\ 1]$$

Таким чином, $Q_\alpha(p) \leq \max\{-\ln w, \exp(-1)\}$. $\square$

Лема 2.5.3: Інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds$$

– збіжний.

Доведення. Спираючись на лему (2.5.1), маємо, що підінтегральна функція прямує до деякої константи при $s \to 0$, оскільки є обернено пропорційною до функції з тої леми. Тому в деякому проколотому ε-околі точки 0 підінтегральна функція буде обмежена. На інтервалі $[\varepsilon;\ \infty]$ за лемою (2.5.2), $Q_\alpha(s)$ – обмежена, а тому і $\exp(2Q_\alpha(s))$ також. Тому збіжність на інтервалі $[\varepsilon;\ \infty]$ виконується, якщо збігається інтеграл

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{s^2}ds.$$

А його збіжність – відомий факт. $\square$

Таким чином, спираючись на доведені леми, маємо при $p \to 0$:

$$M_\alpha(p) \sim \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right)\int_0^\infty \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2}ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right)\int_0^\infty \exp\left(2\int_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau - 2\ln s\right)ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right)\int_0^\infty \exp\left(2\int_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau - 2\int_1^s \frac{1}{\tau}d\tau\right)ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp\left(-2\int_0^1 \frac{e^s-1}{s(e^s-\alpha)}ds\right)\int_0^\infty \exp\left(-2\int_1^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right)ds =$$

$$= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^1 \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau - 2\int_1^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-\alpha)}d\tau\right)ds$$

Склавши інтеграли під експонентою, отримаємо:

$$M_\alpha(p) \sim p^{-2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau\right) ds, \quad p \to 0. \tag{2.52}$$

Тепер, за теоремою Таубера маємо при $X \to \infty$:

$$\int\limits_0^X m_\alpha(x)dx \sim \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau\right) ds \cdot X^2. \tag{2.53}$$

Або, продиференціювавши обидві частини, отримаємо:

$$m_\alpha(X) \sim \frac{2}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau\right) ds \cdot X. \tag{2.54}$$

$$m_\alpha(X) \sim \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2\int\limits_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau\right) ds \cdot X, \quad X \to \infty. \tag{2.55}$$

Тут ми мали право диференціювати обидві частини за правилом Лопіталя, адже має місце невизначеність ∞/∞.

2.6 Висновки до розділу

У даному розділі було проведено асимптотичний аналіз поведінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на парковці при достатньо великих лінійних розмірах парковки.

Було розглянуто 3 тривіальних моделі паркування автомобілів, 2 з яких є крайовими, тобто визначають верхню та нижню межу кількості автомобілів на парковці.

Було розглянуто 2 нетривіальні моделі паркування автомобілів. Для них виведено аналітичні формули асимптотичної поведінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на парковці при достатньо великих розмірах парковки:

а) Водії розподіляються рівномірно по вільному проміжку на парковці. Отримано результат (2.35).

б) Узагальнення першої моделі. Водії з ймовірністю α ставлять свій автомобіль скраю вільного проміжку, а з ймовірністю $1 - \alpha$ – аналогічно першій нетривіальній моделі, – рівномірно. Отримано результат (2.55).

Аналітично отримані константи знаходяться чисельно, що буде виконано у наступному розділі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Список стран по количеству автомобилей на 1000 человек. — 2016. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_стран_по_количеству_автомобилей_на_1000_человек.
2. Weisstein, Eric W. Rényi's Parking Constants / Eric W. Weisstein. — 2016. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://mathworld.wolfram.com/RenyisParkingConstants.html.
3. Rényi, A. On a One-Dimensional Problem Concerning Random Space-Filling. / A. Rényi. — Budapest: Math. Inst. Hung. Acad., 1958. — P. 153.
4. Dvoretzky, A. On the Parking Problem. / A. Dvoretzky, H. Robbins. — Budapest: Math. Inst. Hung. Acad., 1964. — P. 275.
5. Blaisdell, B. E. On Random Sequential Packing in the Plane and a Conjecture of Palasti. / B. E. Blaisdell, H. Solomon. — Budapest: J. Appl. Prob., 1970. — P. 834.
6. «O» большое и «o» малое. — 2016. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/«O»_большое_и_«o»_малое.
7. Feller, William. An Introduction To Probability Theory and Its Applications. / William Feller. — 2 edition. — New-York: John Wiley & Sons, 1971. — Vol. 2. — P. 704.