

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 69 ст., 12 рис., 17 табл., 10 джерел та 3 додатки.

Метою даної роботи є створення адекватної математичної моделі парковки, та отримання математичного результату у вигляді оцінки максимальної кількості автомобілів на парковці.

Результати роботи:

- розглянуто 3 детерміновані моделі поведінки водіїв на парковці, виведено відповідні аналітичні формули;
- розглянуто 2 випадкові моделі поведінки водіїв на парковці, а саме модель рівномірного розподілу по вільному проміжку та модель суміші рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі;
- реалізовано додаток консольного типу для моделювання парковки за заданою стратегією поведінки водіїв.

Новизна роботи:

- проведено детальний аналіз результатів Реньї, досліджено і виведено аналітичну формулу для узагальнення класичної моделі парковки Реньї;
- створено додаток для імітаційного моделювання процесу парковки за заданою дисципліною паркування автомобілів.

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ, ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ, ТЕОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗСУВОМ, ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ, ТАУБЕРОВІ ТЕОРЕМИ.

ABSTRACT

The theme of this thesis is "Stochastic modeling approach to the cars' parking process research".

The thesis: 69 p., 12 fig., 17 tabl., 10 sources and 3 appendices.

The theme of this thesis is "Methods of object recognition in musical notation".

The purpose of this thesis is to develop adequate mathematical model of parking process, and getting the estimation of maximum count of vehicles on the parking as the result of mathematical inference.

Thesis results:

- three deterministic models of drivers' behaviour were examined and corresponding analytical formulas were deduced;
- two non-deterministic models of drivers' behaviour were examined, more precisely – a model with uniform distribution of vehicles along the parking, and a model based on the mixture of uniform and Bernulli distribution;
- all implemented algorithms were assembled into console application for imitational parking process modeling.

Thesis newness:

- a detailed analysis of Rényi's results was performed, the classical Rényi's parking model was generalised and corresponding analytical formula was deduced;
- a console application for imitational parking process modelling in case of different disciplines was created.

STOCHASTIC PROCESS THEORY, PROBABILITY THEORY,
BIASED INTEGRAL EQUATION THEORY, OPERATIONAL CALCULUS,
TAUBERIAN THEOREMS.

ЗМІСТ

	Ст.
ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ	8
ВСТУП	9
 РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ АКТУАЛЬНОСТІ ПРОДУКТУ	 12
1.1 Аналіз існуючих підходів	12
1.2 Застосування моделі лінійної парковки на практиці	13
1.3 Висновки до розділу	13
 РОЗДІЛ 2 ВИЗНАЧЕННЯ ОЦІНКИ МАКСИМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ АВТОМОБІЛЕЙ АНАЛІТИЧНИМ ШЛЯХОМ	 14
2.1 Ввідні позначення	14
2.2 Дослідження крайових випадків	14
2.3 Опис необхідного математичного апарату для подальшого дослідження	16
2.3.1 Асимптотична поведінка функції	16
2.3.2 Теорема Таубера	16
2.4 Дослідження моделі з вибором місця для авто за рівномірним розподілом	17
2.4.1 Виведення інтегрального рівняння	18
2.4.2 Перехід до зображення Лапласа	19
2.4.3 Визначення константи у розв'язку	22
2.4.4 Застосування теореми Таубера	23
2.5 Дослідження моделі з вибором місця для авто за сумішшю рівномірного та розподілу Бернуллі	28
2.5.1 Виведення інтегрального рівняння	28
2.5.2 Перехід до зображення Лапласа	29
2.5.3 Визначення константи у розв'язку	33
2.5.4 Застосування теореми Таубера	34
2.6 Висновки до розділу	38
 РОЗДІЛ 3 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА	 40
3.1 Вибір платформи і мови реалізації	40
3.2 Аналіз архітектури продукту	41
3.3 Керівництво користувача	41
3.3.1 Основний програмний продукт	41
3.4 Аналіз роботи алгоритму	43

3.4.1	Алгоритм чисельного вирахування інтегралів	43
3.4.2	Алгоритм моделювання на одновимірній парковці	45
3.4.3	Алгоритм моделювання на двовимірній парковці	46
3.5	Результати роботи програми	47
3.5.1	Результати підрахунку констант	47
3.5.2	Результати роботи моделера	47
3.6	Висновки до розділу	48

РОЗДІЛ 4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРО-	
ГРАМНОГО ПРОДУКТУ	49
4.1	Постановка задачі техніко-економічного аналізу
4.1.1	Обґрунтування функцій програмного продукту
4.1.2	Варіанти реалізації основних функцій
4.2	Обґрунтування системи параметрів ПП
4.2.1	Опис параметрів
4.2.2	Кількісна оцінка параметрів
4.2.3	Аналіз експертного оцінювання параметрів
4.3	Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій
4.4	Економічний аналіз варіантів розробки ПП
4.5	Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня ..
4.6	Висновки до розділу
ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ	
ДОСЛІДЖЕНЬ	67
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	69

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

МС — математичне сподівання

ММК — метод Монте-Карло

ЕОМ – електронна обчислювальна машина

ВСТУП

Історія першого автомобіля почалася ще в 1768 році разом зі створенням паросилових машин, спроможних перевозити людину. Парові машини працювали на тепловому двигуні зовнішнього згоряння, що перетворював енергію водяної пари в механічну енергію зворотно-поступального руху поршню, а потім в обертальний рух валу. Перша примітивна парова машина було побудована ще у XVII сторіччі Папеном, і являла собою циліндр з поршнем, який підіймався під дією пари, а опускався під тиском атмосфери після згущення відпрацьованої пари. Остаточні удосконалення в паровій машині були зроблені Джеймсом Уаттом в 1769 році.

В 1806 році з'явилися перші машини, які приводилися в рух двигунами внутрішнього згоряння на горючому газу, що призвело до появи в 1885 році повсюди використовуваного газолінового або бензинового двигуна внутрішнього згоряння.

Машини, що працюють на електриці ненадовго з'явилися на початку XX століття, але майже повністю зникли з поля зору аж до початку XXI століття, коли знову виникла зацікавленість в малотоксичному і екологічно чистому транспорті.

На сьогоднішній день автомобілі можна побачити усюди: надворі біля будинків, на автомагістралі чи у невеличкому провулку, в центрі міста та в селі. Автомобілей вже така незліченна кількість, що в Києві складно знайти куточок, де не видно автотранспорту, де не чути гулу двигунів. Спираючись на статистику 2011 року, в Україні на 1000 осіб приходилось 158 автомобілів. А от в країнах лідерах за кількістю автомобілей, таких як, наприклад, Монако, нараховувалося порядку 900 авто на 1000 осіб [1].

Отже, досить гостро постає проблема організації розміщення автомобілів. Для цього створюються парковки. Але при проектуванні парковки постає проблема вибору оптимального розміру. Адже різні водії порізному паркують свої автомобілі: деякі витрачають місце економно, а деякі ставлять авто так, як їм заманеться. Тому, якщо спроектувати парковку, що може вмістити необхідну кількість автомобілів і не більше, то виникне ситуація, що місця на парковці більше немає. Якщо ж парковка буде занадто великою, то ймо-

вірно, що багато місць будуть незайманими, тобто простір був використаний не оптимально.

Саме тому у цій роботі розглядається задача оцінки максимальної кількості автомобілей на парковці. Для вирішення проблеми було виконано наступне:

- а) визначено максимальну кількість автомобілей на одновимірній парковці у крайніх, детермінованих випадках, а саме:
 - 1) коли водії ставлять авто впритул до попереднього;
 - 2) коли водії ставлять авто рівно так, щоб між автомобілями був пропуск розміру майже з автомобіль, але останній туди все-таки не поміщався;
 - 3) коли водії ставлять свій автомобіль строго посередині вільного місця.
- б) побудовано деякі моделі заповнення парковки з випадковим фактором. Визначено асимптотику функції залежності математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на одновимірній парковці від довжини парковки для кожної побудованої моделі;
- в) створено невеликий додаток на скриптовій мові Python, що визначає коефіцієнт для асимптотичної оцінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на одновимірній парковці у одновимірному випадку, а також допомагає встановити залежність від лінійних розмірів парковки у двовимірному випадку.

Об'єктом дослідження є процес паркування автомобілів.

Предметом дослідження є створення алгоритму для визначення максимальної кількості авто на парковці у середньому.

В якості методів дослідження використовуються теорія стохастичних процесів та теорія інтегральних рівнянь зі зсувом.

Наукова новизна роботи: проведено детальний аналіз результатів Реньї щодо проблеми паркування та пакування, та побудовано узагальнення класичної моделі Реньї, в якій поведінка водіїв задається не рівномірним законом розподілу, а сумішшю рівномірного та розподілу Бернуллі..

Практичними результатами роботи є створення додатку для моделювання процесу паркування для більш складних моделей, в тому числі і для двовимірної парковки.

Робота складається з 4 розділів. В першому розділі досліджуються існуючі підходи до вирішення задачі паркування автомобілів, пояснюється можливість застосування лінійної моделі парковки у реальному житті. В другому розділі наводиться математичний апарат для виведення формул у випадку недетермінованих моделей та проведене саме виведення формул. У третьому розділі наведено обґрунтування вибору платформи розробки, аналіз алгоритму модулювання та алгоритму вирахування констант, отриманих у другому розділі. У четвертому розділі проводиться функціонально-вартісний аналіз програмного продукту.

РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ АКТУАЛЬНОСТІ ПРОДУКТУ

У цьому розділі наведено інформацію про результат Реньї стосовно проблеми парковки та пакування. Також пояснено застосування моделі лінійної парковки у реальному житті.

1.1 Аналіз існуючих підходів

У 1958 році угорський математик Альфред Реньї опублікував працю щодо проблеми заповнення одновимірного обмеженого простору. Ця праця стала підґрунтям для подальшого дослідження в напрямі проблеми парковки та пакування [2].

Задача формулювалася наступним чином: нехай є заданий відрізок $[0; x]$, де $x > 1$, і нехай на цей відрізок "паркуються" одновимірні "автомобілі" одиничної довжини, керуючись рівномірним розподілом. У такій ситуації доводилось, що середнє максимальне значення кількості машин на парковці буде $M(x)$ задовільняє наступну систему:

$$M(X) = \begin{cases} 0 & 0 \leq X < 1 \\ 1 + \frac{2}{X-1} \int_0^{X-1} M(y) dy & X \geq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

В такому випадку середня щільність автомобілів для великих X виходить

$$m = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{M(X)}{X} = \int_0^{\infty} \exp \left(-2 \int_0^x \frac{1 - e^{-y}}{y} dy \right) dx \approx 0.747597. \quad (1.2)$$

Але цей результат потребує узагальнення, адже описана вище класична модель Реньї не дає можливості активно застосовувати результат на практиці. Тому у цій роботі буде створена більш загальна модель, в якій водії мають змішану модель поведінки: з деякою ймовірністю вони ставлять свій автомо-

більш впритул до сусіднього, а в іншому випадку – керуючись рівномірним розподілом.

1.2 Застосування моделі лінійної парковки на практиці

На перший погляд, суттєвим недоліком одновимірної моделі парковки є незастосовність до тих парковок, що зустрічаються у реальному житті. Насправді, це не так.

Майже кожна сучасна парковка складається з одного або кількох нахилених рядів, обмежених розміткою або огорожею. Але кожний такий ряд нескладно трансформувати у модель одновимірної парковки. Наприклад, на Рис. 1.1 зображено, як можна парковку, що складається з двох рядів, представити у вигляді суперпозиції двох моделей одновимірної парковки. Після цього можна застосовувати отримані результати для кожного ряду окремо.

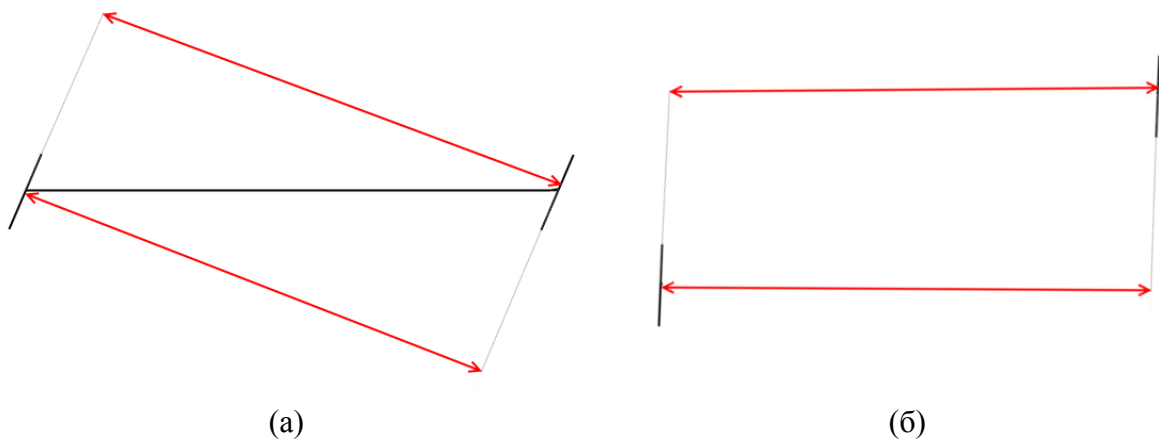


Рисунок 1.1 – Схематичне зображення ряду з реальної парковки (а) та представлення у вигляді двох лінійних парковок (б)

1.3 Висновки до розділу

У цьому розділі було наведено інформацію про результат Реньї стосовно проблеми парковки та пакування. Також пояснено застосування моделі лінійної парковки у реальному житті.

РОЗДІЛ 2 ВИЗНАЧЕННЯ ОЦІНКИ МАКСИМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ АВТОМОБІЛЕЙ АНАЛІТИЧНИМ ШЛЯХОМ

2.1 Ввідні позначення

Для початку вважатимемо, що у нас одновимірна парковка довжини X , на якій розташовуються автомобілі, довжини 1 кожен. Для спрощення будемо вважати, що водії прибувають на парковку по черзі, і залишають там свій автомобіль. Процес продовжується до того моменту, допоки парковка не заповниться. Тобто, не залишиться вільного відрізка довжини не менше за 1. Через $F(X)$ позначимо максимальну кількість автомобілей. Якщо $F(X)$ – випадкова величина, то через $m(X)$ будемо позначати $\mathbb{E}F(X)$.

2.2 Дослідження крайових випадків

В цьому підрозділі буде розглянуто 3 моделі поведінки водіїв для того, щоб отримати певні оцінки для значень $F(X)$.

Перша модель припускає, що всі водії «чемні» та ставлять свій автомобіль скраю вільної частини парковки, наприклад, зліва. Зрозуміло, що це найбільш оптимальний випадок, тобто така модель дозволить припаркувати рівно стільки автомобілей, скільки взагалі може вміститися на парковці.

Друга модель припускає, що всі водії, навпаки, намагаються зайняти якомога більше місця, і тому відступають від краю вільної зони максимально можливий проміжок, в який не вміститься інший автомобіль.

Третя модель припускає, що водії ставлять свої автомобілі посередині вільного проміжку. Ця модель не є крайнім випадком, але є досить цікавою реалізацією процесу паркування.

Всі 3 моделі схематично зображені на Рис. 2.1.

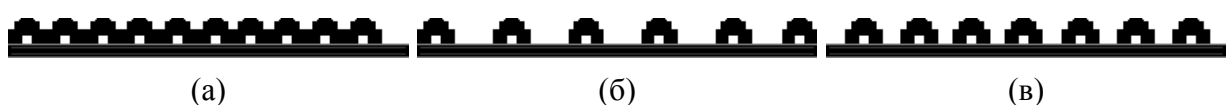


Рисунок 2.1 – Схематичне зображення першої (а), другої (б), та третьої (в) не випадкових моделей

Тепер необхідно визначити результати для цих моделей. Для першої моделі відповідь досить очевидна:

$$F(X) = [X] \quad (2.1)$$

Для другої моделі для спрощення вважатимемо, що усі водії стають зліва вільної частини. Тоді у перших $[\frac{X}{2}]$ авто зліва буде відповідний проміжок розміром майже 1 (нехай рівно 1 – границя), а також, якщо виконується нерівність $X - 2 * [\frac{X}{2}] \geq 1$, то можна вмістити ще 1 автомобіль. Остання нерівність виконується тільки якщо $[X]$ – непарне число. Але тоді $[\frac{X+1}{2}] = 2 * [\frac{X}{2}] + 1$. А якщо X – парне, то $[\frac{X}{2}] = [\frac{X+1}{2}]$, і це допоможе уникнути системи у відповіді. Отже, для другої моделі:

$$F(X) = \left[\frac{X+1}{2} \right] \quad (2.2)$$

Для визначення відповіді для третьої моделі треба навести кілька спостережень:

$$X < 1 \Rightarrow F(X) = 0; \quad 1 \leq X < 3 \Rightarrow F(X) = 1. \quad (2.3)$$

$$F(X) = 2 * F\left(\frac{X-1}{2}\right) + 1, \quad X \geq 1. \quad (2.4)$$

Перше твердження очевидне, а друге випливає з того, що ставлячи автомобіль посередині вільного проміжку довжини X , ми отримуємо два нових вільних проміжка довжини $\frac{X-1}{2}$. Використовуючи наведені факти, спробуємо довести, що

$$F(X) = 2^k - 1, \quad X \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (2.5)$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. База індукції доведена, спираючись на спостереження (2.3). Нехай твердження доведено для k , доведемо його для $k + 1$.

$$X \in [2^{k+1} - 1, 2^{k+2} - 1) \Rightarrow \frac{X-1}{2} \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1) \quad (2.6)$$

Оскільки виконується (2.4), і для k виконується (2.5) за припущенням, то маємо:

$$F(X) = 2 * F\left(\frac{X-1}{2}\right) + 1 = 2 * (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \quad (2.7)$$

Перехід індукції доведено. □

2.3 Опис необхідного математичного апарату для подальшого дослідження

2.3.1 Асимптотична поведінка функції

Нехай f та g – дві функції, визначені в деякому проколотому околі $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 , причому в цьому околі g не обертається в 0.

Означення 2.3.1: f є "О" великим від g [6] при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\exists C > 0 \forall x \in \dot{U}(x_0) : |f(x)| < C|g(x)| \quad (2.8)$$

Означення 2.3.2: f є "о" малим від g [6] при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \dot{U}_\varepsilon(x_0) \forall x \in \dot{U}_\varepsilon(x_0) : |f(x)| < \varepsilon |g(x)| \quad (2.9)$$

Означення 2.3.3: f є еквівалентним g [6] ($f \sim g$) при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

2.3.2 Теорема Таубера

Означення 2.3.4: Функція $L : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – слабо мінлива на нескінченності, якщо для $\forall x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)}$$

Означення 2.3.5: Функція $L : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – слабо мінлива в 0, якщо $L(\frac{1}{x})$ – слабо мінлива на нескінченності.

Нехай $u(t)$ – така функція, що має зображення Лапласа. Нехай $U(t) = \int_0^t u(s)ds$ і $\mathcal{L}\{u(t)\} = \omega(\tau)$.

Тоді має місце наступна теорема [7, ст. 445].

Теорема 2.3.1 (Теорема Абеля-Таубера): Нехай L – слабко мінлива на нескінченності і $0 \leq \rho < +\infty$. Тоді наступні два твердження тотожні:

$$\omega(\tau) \sim \tau^{-\rho} L(1/\tau), \quad \tau \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho + 1)} t^\rho L(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (2.11)$$

Ця теорема має досить видатну історію. Зазвичай вона подається як 2 окремі теореми, перша являє собою перехід від асимптотики інтеграла оригінала до асимптотики зображення, і називається теоремою Абеля. Друга ж, обернена, є однією з Тауберових теорем, і була досить складно доведена в праці Харді-Літлвуда. Але в 1930 Карамата опублікував спрощене доведення, чим створив сенсацію [7, ст. 445].

Досить цікавим зауваженням до цієї теореми є те, що можна змінити границі на протилежні, тобто $\tau \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$ [7, ст. 445].

Теорема 2.3.2: Твердження теореми (2.3.1) залишається вірним, якщо поміняти місцями 0 та ∞ , тобто $\tau \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$ (і, відповідно, L – слабко мінлива в 0).

2.4 Дослідження моделі з вибором місця для авто за рівномірним розподілом

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись рівномірним розподілом.

2.4.1 Виведення інтегрального рівняння

Зрозуміло, що порядок вибору вільних проміжків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після паркування одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього спочатку заповнюється ліва частина, а потім права.

Необхідно визначити $m(X) = \mathbb{E}F(X)$. Нехай $\xi \sim \text{Uniform}(0, X - 1)$ – випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого автомобіля на парковці. Тоді маємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned} m(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(F(\xi) + F(X - 1 - \xi) + 1|\xi)) = \\ &= \int_0^{X-1} m(t) \frac{1}{X-1} dt + \int_0^{X-1} m(X - t - 1) \frac{1}{X-1} dt + 1 \end{aligned}$$

Так як

$$\int_0^{X-1} m(X - t - 1) dt = \langle u = X - t - 1 \rangle = - \int_{X-1}^0 m(u) dt = \int_0^{X-1} m(u) dt,$$

то

$$m(X) = \frac{2}{X-1} \int_0^{X-1} m(t) dt + 1 \quad (2.12)$$

Для зручності зробимо заміну $X \rightarrow X + 1$. Отримаємо

$$m(X + 1) = \frac{2}{X} \int_0^X m(t) dt + 1, \quad \forall X > 0 \quad (2.13)$$

Таким чином, отримали інтегральне рівняння. До того ж, відомо, що

$$m(X) \equiv 0, \quad X \in [0; 1) \quad (2.14)$$

Спираючись на (2.1) та (2.2), маємо обмеження на $m(X)$:

$$\left\lceil \frac{X+1}{2} \right\rceil \leq m(X) \leq [X] \quad (2.15)$$

З цієї нерівності випливає, що якщо є якась асимптотика у функції $m(X)$, то вона порядку X , тобто

$$m(X) \sim C \cdot X \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad C \in [0.5; 1] \quad (2.16)$$

2.4.2 Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати (2.13) за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується (2.15), то зображення Лапласа для $m(X)$ існує. До того ж, за властивістю (??):

$$\mathcal{L}\{m(X+1)\} = \langle (2.14) \rangle = \mathcal{L}\{m(X+1)\eta(X+1)\} = e^p M(p).$$

Оскільки $m(X) \leq X$, то $\int_0^X m(t)dt < X^2$, тобто для інтегралу від $m(X)$ зображення також існує, за властивістю (??):

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^X m(t)dt\right\} = \frac{M(p)}{p}.$$

Аналогічно доводиться, що $\frac{1}{X} \int_0^X m(t)dt < X$ при $X > 0$, а тому зображення Лапласа для цього виразу також існує. Тоді за властивістю (??):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{2}{X} \int_0^X m(t)dt\right\} = 2 \int_p^\infty \frac{M(s)}{s} ds.$$

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = 2 \int_p^\infty \frac{M(s)}{s} ds + \frac{1}{p} \quad (2.17)$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p :

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = -2 \frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \quad (2.18)$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p) - \frac{2M(p)}{pe^p} - \frac{1}{p^2 e^p} = -M(p) \left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) - \frac{e^{-p}}{p^2} \quad (2.19)$$

Розв'яжемо отримане диференціальне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned} \dot{M}_h(p) &= -M_h(p) \left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) \\ \frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} &= -\left(1 + \frac{2e^{-p}}{p}\right) \\ \int_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)} ds &= -\int_1^p \left(1 + \frac{2e^{-s}}{s}\right) ds \\ \ln M_h(s)|_1^p &= -(p-1) - 2 \int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds \end{aligned}$$

Позначимо

$$Q(p) := \int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds \quad (2.20)$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}\ln M_h(p) &= \ln M_h(1) + 1 - p - 2Q(p) \\ M_h(p) &= M_h(1) \cdot e^{1-p-2Q(p)} \cdot \text{const}\end{aligned}$$

Оскільки $M(1)$ можна включити в константу, то маємо розв'язок

$$M_h(p) = C \cdot e^{1-p-2Q(p)}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

Дійсно, перевіримо цей розв'язок:

$$\begin{aligned}\dot{M}_h(p) &= C \cdot e^{1-p-2Q(p)} \cdot (-1 - 2\dot{Q}(p)) = \\ &= C \cdot e^{1-p-2Q(p)} \cdot \left(-1 - 2\frac{e^{-p}}{p}\right) = -M_h(p) \cdot \left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right)\end{aligned}$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$\begin{aligned}M(p) &= C(p) \cdot e^{1-p-2Q(p)} \\ \dot{M}(p) &= \dot{C}(p) \cdot e^{1-p-2Q(p)} - C(p) \cdot (e^{1-p-2Q(p)}) \cdot \left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right)\end{aligned}$$

з іншої сторони, з (2.19) маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p) \cdot e^{1-p-2Q(p)} \left(1 + 2\frac{e^{-p}}{p}\right) - \frac{e^{-p}}{p^2}$$

тому

$$\dot{C}(p) = -\frac{e^{-p}}{p^2} e^{p+2Q(p)-1} = -e^{-1} \frac{e^{2Q(p)}}{p^2}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = -\exp(-1) \cdot \int_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + \text{const} \quad (2.22)$$

І тоді отримуємо вираз для $M(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) &= - \left(\exp(-1) \cdot \int_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + \text{const} \right) e^{1-p-2Q(p)} = \\ &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) e^{-p-2Q(p)}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\begin{aligned} \dot{M}(p) &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right)' e^{-p-2Q(p)} - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) \cdot \\ &\cdot (e^{-p-2Q(p)})' = - \frac{e^{2Q(p)}}{p^2} e^{-p-2Q(p)} + \left(\int_1^p \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) \cdot \\ &\cdot e^{-p-2Q(p)} \left(1 + 2 \frac{e^{-p}}{p} \right) = - \frac{e^{-p}}{p^2} - M(p) \left(1 + 2 \frac{e^{-p}}{p} \right) \end{aligned}$$

Перевірено. Тоді остаточний результат без вирахування константи:

$$M(p) = \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) e^{-p-2Q(p)} \quad (2.24)$$

2.4.3 Визначення константи у розв'язку

У 2.4.2 було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X + 1)$, до того ж,

$$\mathcal{L} \{m(X + 1)\} = e^p M(p). \quad (2.25)$$

Таким чином, маємо

$$\mathcal{L} \{m(X + 1)\} = \tilde{M}(p) = \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) e^{-2Q(p)}. \quad (2.26)$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\tilde{M}(p) \rightarrow 0$, $p \rightarrow +\infty$.

Розглянемо $Q(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{aligned} Q(p) &= \int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds < \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds < \int_1^\infty e^{-s} ds = \\ &= \exp(-1) - \exp(-\infty) = \exp(-1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Тобто $Q(p)$ - обмежена на $[1; \infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q(p)$ – монотонно зростаюча за p . Тому

$$0 = \tilde{M}(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{M}(p) = \left(\int_\infty^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) \lim_{p \rightarrow \infty} e^{-2Q(p)} \quad (2.28)$$

Тут $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-2Q(p)} = \text{const} > 0$, тому маємо, що

$$K = - \int_\infty^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds = \int_1^\infty \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds. \quad (2.29)$$

Таким чином, отримали нову версію $M(p)$:

$$M(p) = \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds + K \right) e^{-p-2Q(p)} = e^{-p-2Q(p)} \int_p^\infty \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds \quad (2.30)$$

2.4.4 Застосування теореми Таубера

Для знаходження асимптотики $m(X)$ на нескінченності, за теоремою Таубера (2.3.1) необхідно визначити асимптотику $M(p)$ при $p \rightarrow 0$.

Якщо знайти такі $C \in \mathbb{R}$ та $\alpha \in \mathbb{R}^+$, що $M(p) \sim C \cdot p^{-\alpha}$, $p \rightarrow 0$, то можна стверджувати, що $\int_0^X m(x) dx \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} C X^\alpha$, $X \rightarrow \infty$. Вже зараз

зрозуміло, що $\alpha = 2$, адже теорема справедлива в обидва боки і виконується (2.16).

Для цього розглянемо поведінку в нулі трьох множників, з яких складається $M(p)$, а саме:

- а) e^{-p} ;
- б) $e^{-2Q(p)}$;
- в) $\int_p^{\infty} \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds$,

Щодо першого множнику, то в 0 він прямує до 1, тож ні на що не впливає, і його можна не розглядати.

Для наступного аналізу доведемо деякі леми.

Лема 2.4.1: $e^{-2Q(p)}$ поводитья як p^{-2} в 0, з точністю до константи, а саме:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}} = \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{1 - e^{-s}}{s} ds \right) \quad (2.31)$$

Доведення. Для знаходження ліміту прологарифмуємо вираз. Отримаємо:

$$\begin{aligned} 2 \ln p - 2Q(p) &= 2 \ln p - 2 \int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds = 2 \int_1^p \frac{1}{s} ds - 2 \int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds = \\ &= 2 \int_1^p \frac{1 - e^{-s}}{s} ds = -2 \int_p^1 \frac{1 - e^{-s}}{s} ds \end{aligned}$$

Тепер, підвівши до експоненти обидві частини, отримаємо:

$$\frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}} = \exp \left(-2 \int_p^1 \frac{1 - e^{-s}}{s} ds \right)$$

Якщо довести, що інтеграл

$$-2 \int_0^1 \frac{1 - e^{-s}}{s} ds$$

збігається, то лему буде доведено, адже експонента – неперервна функція, і можна переходити до ліміту під експонентою. Зрозуміло, що

$$-2 \int_p^1 \frac{1 - e^{-s}}{s} ds$$

збігається для $\forall p \in (0; 1]$. Дійсно, підінтегральна функція $\frac{1-e^{-s}}{s}$ мажорується $\frac{1}{s}$, яка, в свою чергу, має скінченне значення інтегралу:

$$\int_p^1 \frac{1}{s} ds = \ln 1 - \ln p = -\ln p, \quad p > 0$$

Невизначеність виникає лише в точці 0. Знайдемо ліміт підінтегральної функції в точці 0:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s}}{s} = \langle \text{правило Лопіталя для невизначенності } 0/0 \rangle = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{-s}}{1} = 1$$

Таким чином, підінтегральна функція обмежена в деякому ε -околі 0, тому інтеграл також збіжний, і лему доведено. \square

Лема 2.4.2: Функція

$$Q(p) = \int_1^p \frac{e^{-s}}{s} ds$$

– обмежена на $[w; \infty]$, $w > 0$.

Доведення. На проміжку $[1; \infty]$ підінтегральна функція мажорується функцією e^{-s} , а на проміжку $[w; 1]$ – функцією $\frac{1}{s}$, тому, аналогічно доведенню

попередньої леми, інтеграл буде збіжний, і:

$$Q(p) \leq \int_1^{\infty} e^{-s} ds = \exp(-1), \quad p \geq 1$$

$$Q(p) \leq \int_w^1 \frac{1}{s} ds = -\ln w, \quad p \in [w; 1]$$

Таким чином, $Q(p) \leq \max\{-\ln w, \exp(-1)\}$. □

Лема 2.4.3: Інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds$$

– збіжний.

Доведення. Спираючись на лему (2.4.1), маємо, що підінтегральна функція прямує до деякої константи при $s \rightarrow 0$, оскільки є обернено пропорційною до функції з тої леми. Тому в деякому проколотому ε -околі точки 0 підінтегральна функція буде обмежена. На інтервалі $[\varepsilon; \infty]$ за лемою (2.4.2), $Q(s)$ – обмежена, а тому і $\exp(2Q(s))$ також. Тому збіжність на інтервалі $[\varepsilon; \infty]$ виконується, якщо збігається інтеграл

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds.$$

А його збіжність – відомий факт. □

Таким чином, спираючись на доведені леми, маємо:

$$\begin{aligned}
M(p) &\sim p^{-2} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds \right) \int_0^\infty \frac{e^{2Q(s)}}{s^2} ds = \\
&= p^{-2} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds \right) \int_0^\infty \exp \left(2 \int_1^s \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau - 2 \ln s \right) ds = \\
&= p^{-2} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds \right) \int_0^\infty \exp \left(2 \int_1^s \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau - 2 \int_1^s \frac{1}{\tau} d\tau \right) ds = \\
&= p^{-2} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds \right) \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_1^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds = \\
&= p^{-2} \cdot \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} ds - 2 \int_1^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds
\end{aligned}$$

Склавши інтеграли під експонентою, отримаємо:

$$M(p) \sim p^{-2} \cdot \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds, \quad p \rightarrow 0. \quad (2.32)$$

Тепер, за теоремою Таубера маємо при $X \rightarrow \infty$:

$$\int_0^X m(x) dx \sim \frac{1}{\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds \cdot X^2. \quad (2.33)$$

Або, продиференціювавши обидві частини, отримаємо:

$$m(X) \sim \frac{2}{\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds \cdot X. \quad (2.34)$$

$$m(X) \sim \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds \cdot X, \quad X \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Тут ми мали право диференціювати обидві частини за правилом Лопі-
таля, адже має місце невизначеність ∞/∞ .

2.5 Дослідження моделі з вибором місця для авто за сумішню рів- номірного та розподілу Бернуллі

В цій моделі водії вибирають місце для автомобіля, керуючись насту-
пним правилом

- з ймовірністю α водій ставить автомобіль в правому кінці вільного про-
міжку,
- з ймовірністю $\beta = 1 - \alpha$ водій вибирає місце керуючись рівномірним
розподілом, аналогічно тому, як це робилося у главі 2.4.

2.5.1 Виведення інтегрального рівняння

Аналогічно, як і в попередній частині, порядок вибору вільних проміж-
ків водіями не впливає на результат, тому будемо вважати, що після парку-
вання одного автомобіля парковка розбивається на 2 частини, і після цього
спочатку заповнюється ліва частина, а потім права.

Необхідно визначити $m(X) = \mathbb{E}F(X)$. Нехай $\xi \sim \text{Uniform}(0, X - 1)$
– випадкова величина, що визначає положення лівого краю першого авто-
мобіля на парковці у випадку вибору місця за рівномірним розподілом. Тоді
маємо наступну тотожність:

$$\begin{aligned} m(X) &= \alpha(1 + m(X - 1)) + \beta(1 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(F(\xi) + F(X - 1 - \xi)|\xi))) = \\ &= 1 + \alpha m(X - 1) + \beta \int_0^{X-1} m(t) \frac{1}{X-1} dt + \beta \int_0^{X-1} m(X - t - 1) \frac{1}{X-1} dt \end{aligned}$$

Аналогічно виведенню формули (2.13), отримаємо

$$m(X + 1) = 1 + \alpha m(X) + \frac{2\beta}{X} \int_0^X m(t) dt, \quad \forall X > 0 \quad (2.36)$$

Аналогічно діям в главі 2.4, маємо, що виконується (2.14), (2.15) та (2.16).

2.5.2 Перехід до зображення Лапласа

Спробуємо розв'язати (2.36) за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується (2.15), то зображення Лапласа для $m(X)$ існує. До того ж, аналогічно до виведення в главі 2.4 маємо, що зображення Лапласа існує і для інших доданків в правій частині рівняння (2.36).

Таким чином, отримали інтегральне рівняння в термінах зображення Лапласа, яке вже можна розв'язати, адже нема зсуву:

$$e^p M(p) = \alpha M(p) + 2\beta \int_p^\infty \frac{M(s)}{s} ds + \frac{1}{p} \quad (2.37)$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за p :

$$e^p M(p) + e^p \dot{M}(p) = \alpha \dot{M}(p) - 2\beta \frac{M(p)}{p} - \frac{1}{p^2} \quad (2.38)$$

Виразимо $\dot{M}(p)$ з цього рівняння:

$$\dot{M}(p) = -M(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} \quad (2.39)$$

Розв'яжемо отримане диференційне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідну частину:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_h(p) &= -M_h(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \\
 \frac{\dot{M}_h(p)}{M_h(p)} &= - \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \\
 \int_1^p \frac{\dot{M}_h(s)}{M_h(s)} ds &= - \int_1^p \left(\frac{e^s}{e^s - \alpha} + \frac{2\beta}{s(e^s - \alpha)} \right) ds \\
 \ln M_h(s)|_1^p &= - \int_1^p \frac{e^s}{e^s - \alpha} ds - 2 \int_1^p \frac{\beta}{s(e^s - \alpha)} ds
 \end{aligned}$$

Позначимо

$$Q_\alpha(p) := \int_1^p \frac{\beta}{s(e^s - \alpha)} ds \quad (2.40)$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
 \int_1^p \frac{e^s}{e^s - \alpha} ds &= \langle u = e^s - \alpha, du = e^s ds = (u + \alpha) ds \rangle = \\
 &= \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{u + \alpha}{u} (u + \alpha)^{-1} du = \int_{e-\alpha}^{e^p-\alpha} \frac{du}{u} = \\
 &= \log(e^p - \alpha) - \log(e - \alpha) = \log \frac{e^p - \alpha}{e - \alpha},
 \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 \ln M_h(p) &= \ln M_h(1) - \log \frac{e^p - \alpha}{e - \alpha} - 2Q_\alpha(p) \\
 M_h(p) &= M_h(1) \cdot \frac{e - \alpha}{e^p - \alpha} \cdot e^{-2Q_\alpha(p)} \cdot const
 \end{aligned}$$

Оскільки $M(1)$ та $(e - \alpha)$ можна включити в константу, то маємо розв'язок

$$M_h(p) = C \cdot ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

Дійсно, перевіримо цей розв'язок:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_h(p) &= C \cdot \left(\frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \right)' = \\
 &= -C \cdot \left(\frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \right)^2 \cdot \left(e^p + (e^p - \alpha) \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) e^{2Q_\alpha(p)} = \\
 &= -C \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) = \\
 &= -M(p) \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right)
 \end{aligned}$$

Нескладно помітити, що отримали вихідне рівняння. Тепер застосуємо метод варіації довільних сталих:

$$M(p) = C(p) \cdot \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)} \right)^{-1}$$

Продиференціювавши за p , отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}(p) &= \dot{C}(p) \cdot \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)} \right)^{-1} - C(p) \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)} \right)^{-1} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right)
 \end{aligned}$$

З іншої сторони, з (2.39) маємо

$$\dot{M}(p) = -C(p) \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)} \right)^{-1} \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)}$$

Тому

$$\dot{C}(p) = - \left((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)} \right) \cdot \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} = - \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2}$$

Тоді простим інтегруванням в межах від 1 до p отримуємо:

$$C(p) = - \int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + const \quad (2.42)$$

І тоді отримуємо вираз для $M(p)$:

$$\begin{aligned} M(p) &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + \text{const} \right) ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} = \\ &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\begin{aligned} \dot{M}(p) &= - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right)' \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} - \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \right)' = - \frac{e^{2Q_\alpha(p)}}{p^2} \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} + \left(\int_1^p \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \cdot \\ &\cdot ((e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)})^{-1} \cdot \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) = - \frac{1}{p^2(e^p - \alpha)} - \\ &- M(p) \left(\frac{e^p}{e^p - \alpha} + \frac{2\beta}{p(e^p - \alpha)} \right) \end{aligned}$$

Перевірено. Тоді остаточний результат без вирахування константи:

$$M_\alpha(p) = \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \quad (2.44)$$

Зазначимо, що у випадку $\alpha = 0$ ми маємо випадок з глави 2.4, тож і формула (2.44) має співпадати з (2.24) при $\alpha = 0$. Спираючись на те, що $Q_0(p) \equiv Q(p)$, отримуємо, що $M_0(p) \equiv M(p) \quad \forall p > 0$.

2.5.3 Визначення константи у розв'язку

У 2.4.2 було доведено, що зображення Лапласа існує не тільки для $m(X)$, а і для $m(X + 1)$, до того ж,

$$\mathcal{L} \{m(X + 1)\} = e^p M(p). \quad (2.45)$$

Аналогічно доводиться той самий факт, але для випадку суміші рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі. Таким чином, маємо

$$\mathcal{L} \{m_\alpha(X + 1)\} = \tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{e^p}{e^p - \alpha} e^{-2Q_\alpha(p)}. \quad (2.46)$$

Оскільки зображення Лапласа – аналітична функція в деякій правій півплощині комплексного простору, то $\tilde{M}_\alpha(p) \rightarrow 0$, $p \rightarrow +\infty$.

Розглянемо $Q_\alpha(p)$ (p розглядаємо на дійсній вісі):

$$\begin{aligned} Q_\alpha(p) &= \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds < \int_1^\infty \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds < \int_1^\infty \frac{1 - \alpha}{e^s - \alpha} ds < \\ &< \int_1^\infty \frac{1}{e^s} ds = \exp(-1) - \exp(-\infty) = \exp(-1) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Останній перехід нерівності пояснюється досить просто:

$$\frac{1 - \alpha}{u - \alpha} < \frac{1}{\alpha}, \quad u > 1 \Leftrightarrow u - u\alpha = u(1 - \alpha) < u - \alpha, \quad u > 1$$

Тобто $Q_\alpha(p)$ - обмежена на $[1; \infty]$. Тому обмеженими на цій вісі будуть і $e^{\pm 2Q_\alpha(p)}$. Також зрозуміло, що якщо інтегрувати по дійсній вісі, то $Q_\alpha(p)$ – монотонно зростаюча за p . Тому

$$0 = \tilde{M}_\alpha(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{M}_\alpha(p) = \left(\int_\infty^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \lim_{p \rightarrow \infty} e^{-2Q_\alpha(p)} \quad (2.48)$$

Тут $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-2Q_\alpha(p)} = \text{const} > 0$, тому маємо, що

$$K = - \int_{\infty}^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds = \int_1^{\infty} \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds. \quad (2.49)$$

Таким чином, отримали нову версію $M(p)$:

$$\begin{aligned} M_\alpha(p) &= \left(\int_p^1 \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds + K \right) \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} = \\ &= \frac{1}{(e^p - \alpha)e^{2Q_\alpha(p)}} \int_p^{\infty} \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.5.4 Застосування теореми Таубера

Для знаходження асимптотики $m_\alpha(X)$ на нескінченності, за теоремою Таубера (2.3.1) необхідно визначити асимптотику $M_\alpha(p)$ при $p \rightarrow 0$.

Якщо знайти такі $C \in \mathbb{R}$ та $\delta \in \mathbb{R}^+$, що $M_\alpha(p) \sim C \cdot p^{-\delta}$, $p \rightarrow 0$, то можна стверджувати, що $\int_0^X m_\alpha(x) dx \sim \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} C X^\delta$, $X \rightarrow \infty$. Вже зараз зрозуміло, що $\delta = 2$, адже теорема справедлива в обидва боки і виконується (2.16).

Для цього розглянемо поведінку в нулі трьох множників, з яких складається $M_\alpha(p)$, а саме:

- а) $\frac{1}{e^p - \alpha}$;
- б) $e^{-2Q_\alpha(p)}$;
- в) $\int_p^{\infty} \frac{e^{2Q_\alpha(s)}}{s^2} ds$,

Щодо першого множника, то в 0 він, очевидно, прямує до $\frac{1}{1-\alpha}$,

Для наступного аналізу доведемо деякі леми.

Лема 2.5.1: $e^{-2Q(p)}$ поводитья як p^{-2} в 0, з точністю до константи, а саме:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{-2Q(p)}}{p^{-2}} = \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \quad (2.51)$$

Доведення. Для знаходження ліміту прологарифмуємо вираз. Отримаємо:

$$\begin{aligned} 2 \ln p - 2Q_\alpha(p) &= 2 \ln p - 2 \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds = 2 \int_1^p \frac{1}{s} ds - \\ &- 2 \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds = 2 \int_1^p \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds = -2 \int_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \end{aligned}$$

Тепер, підвівши до експоненти обидві частини, отримаємо:

$$\frac{e^{-2Q_\alpha(p)}}{p^{-2}} = \exp \left(-2 \int_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right)$$

Якщо довести, що інтеграл

$$-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds$$

збігається, то лему буде доведено, адже експонента – неперервна функція, і можна переходити до ліміту під експонентою. Зрозуміло, що

$$-2 \int_p^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds$$

збігається для $\forall p \in (0; 1]$. Дійсно, оскільки $e^s - 1 < e^s - \alpha$, підінтегральна функція $\frac{1-e^{-s}}{s}$ мажорується $\frac{1}{s}$, яка, в свою чергу, має скінченне значення

інтегралу:

$$\int_p^1 \frac{1}{s} ds = \ln 1 - \ln p = -\ln p, \quad p > 0$$

Невизначеність виникає лише в точці 0. Знайдемо ліміт підінтегральної функції в точці 0:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} &= \langle \text{правило Лопіталя для невизначеності } 0/0 \rangle = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^s}{se^s + (e^s - \alpha)} = \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Таким чином, підінтегральна функція обмежена в деякому ε -околі 0, тому інтеграл також збіжний, і лему доведено. \square

Лема 2.5.2: Функція

$$Q_\alpha(p) = \int_1^p \frac{1 - \alpha}{s(e^s - \alpha)} ds$$

– обмежена на $[w; \infty]$, $w > 0$.

Доведення. На проміжку $[1; \infty]$ підінтегральна функція мажорується функцією e^{-s} (див. (2.47)), а на проміжку $[w; 1]$ – функцією $\frac{1}{s}$, адже $1 - \alpha < e^s - \alpha$, $s > 0$. Тому, аналогічно доведенню попередньої леми, інтеграл буде збіжний, і:

$$\begin{aligned} Q_\alpha(p) &\leq \int_1^\infty e^{-s} ds = \exp(-1), \quad p \geq 1 \\ Q_\alpha(p) &\leq \int_w^1 \frac{1}{s} ds = -\ln w, \quad p \in [w; 1] \end{aligned}$$

Таким чином, $Q_\alpha(p) \leq \max\{-\ln w, \exp(-1)\}$. \square

Лема 2.5.3: Інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{2Q_{\alpha}(s)}}{s^2} ds$$

– збіжний.

Доведення. Спираючись на лему (2.5.1), маємо, що підінтегральна функція прямує до деякої константи при $s \rightarrow 0$, оскільки є обернено пропорційною до функції з тої леми. Тому в деякому проколотому ε -околі точки 0 підінтегральна функція буде обмежена. На інтервалі $[\varepsilon; \infty]$ за лемою (2.5.2), $Q_{\alpha}(s)$ – обмежена, а тому і $\exp(2Q_{\alpha}(s))$ також. Тому збіжність на інтервалі $[\varepsilon; \infty]$ виконується, якщо збігається інтеграл

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds.$$

А його збіжність – відомий факт. □

Таким чином, спираючись на доведені леми, маємо при $p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} M_{\alpha}(p) &\sim \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^{\infty} \frac{e^{2Q_{\alpha}(s)}}{s^2} ds = \\ &= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^{\infty} \exp \left(2 \int_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^{\tau} - \alpha)} d\tau - 2 \ln s \right) ds = \\ &= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^{\infty} \exp \left(2 \int_1^s \frac{1-\alpha}{\tau(e^{\tau} - \alpha)} d\tau - 2 \int_1^s \frac{1}{\tau} d\tau \right) ds = \\ &= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^s - 1}{s(e^s - \alpha)} ds \right) \int_0^{\infty} \exp \left(-2 \int_1^s \frac{e^{\tau} - 1}{\tau(e^{\tau} - \alpha)} d\tau \right) ds = \\ &= \frac{p^{-2}}{1-\alpha} \cdot \int_0^{\infty} \exp \left(-2 \int_0^1 \frac{e^{\tau} - 1}{\tau(e^{\tau} - \alpha)} d\tau - 2 \int_1^s \frac{e^{\tau} - 1}{\tau(e^{\tau} - \alpha)} d\tau \right) ds \end{aligned}$$

Склавши інтеграли під експонентою, отримаємо:

$$M_\alpha(p) \sim p^{-2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds, \quad p \rightarrow 0. \quad (2.52)$$

Тепер, за теоремою Таубера маємо при $X \rightarrow \infty$:

$$\int_0^X m_\alpha(x) dx \sim \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds \cdot X^2. \quad (2.53)$$

Або, продиференціювавши обидві частини, отримаємо:

$$m_\alpha(X) \sim \frac{2}{(1-\alpha)\Gamma(2+1)} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds \cdot X. \quad (2.54)$$

$$m_\alpha(X) \sim \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - \alpha)} d\tau \right) ds \cdot X, \quad X \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

Тут ми мали право диференціювати обидві частини за правилом Лопі-
таля, адже має місце невизначеність ∞/∞ .

2.6 Висновки до розділу

У даному розділі було проведено асимптотичний аналіз поведінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на парковці при достатньо великих лінійних розмірах парковки.

Було розглянуто 3 тривіальних моделі паркування автомобілів, 2 з яких є крайовими, тобто визначають верхню та нижню межу кількості автомобілів на парковці.

Було розглянуто 2 нетривіальні моделі паркування автомобілів. Для них виведено аналітичні формули асимптотичної поведінки математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на парковці при достатньо великих розмірах парковки:

- а) Водії розподіляються рівномірно по вільному проміжку на парковці. Отримано результат (2.35).
- б) Узагальнення першої моделі. Водії з ймовірністю α ставлять свій автомобіль скраю вільного проміжку, а з ймовірністю $1 - \alpha$ – аналогічно першій нетривіальній моделі, – рівномірно. Отримано результат (2.55). Аналітично отримані константи знаходяться чисельно, що буде виконано у наступному розділі.

РОЗДІЛ 3 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Створений програмний продукт дозволяє визначати середнє значення максимальної кількості автомобілів одиничних лінійних розмірів на парковці прямокутної фіксованих розмірів, при заданій моделі поведінки водіїв.

3.1 Обґрунтування вибору платформи та мови реалізації програмного продукту

Реалізація програмного продукту проведена за допомогою мови C++ та Python. Вибір такого тандему є цілком виправданим. Мова C++ є мовою середнього рівня - в ній присутні елементи мов програмування як низького (підмножина - C), так і високого рівня, що робить C++ дуже ефективною для розробки складних проектів. При цьому виконання елементарних дій (попільська обробка зображень) та алгоритмів в цілому залишається максимально швидкою.

Мова Python використовується для швидких математичних розрахунків, в тому числі, для вирахування чисельних значень інтегралів.

Основною платформою для використання програмного продукту було вибрано сімейство операційних систем на базі UNIX, оскільки процес розробки та використання додатків з консольним інтерфейсом там найбільше спрощений. Також, для швидких математичних розрахунків необхідне середовище виконання Python, що дуже просто налаштовується в системах сімейства Linux та в більшості випадків присутнє в стандартній комплектації операційної системи.

Однак, розробка програмного продукту проводилася з дотриманням правил кросплатформеного програмування, що дає можливість збирати виконувачі файли і в інших популярних операційних системах (наприклад, сімейства Windows NT).

3.2 Аналіз архітектури продукту

Продукт "modeler" побудований таким чином, що він зчитує параметри заданою користувачем моделі у форматі xml, та в циклі моделювати траєкторію процесу паркування автомобілів на одновимірній парковці, використовуючи вбудований в C++ генератор псевдовипадкових чисел. За результат програма бере середнє значення по всім змодельованим траєкторіям.

Продукт "modeler2d" побудований таким чином, що він зчитує параметри заданою користувачем моделі у форматі xml, та в циклі моделювати траєкторію процесу паркування автомобілів на двовимірній парковці, використовуючи вбудований в C++ генератор псевдовипадкових чисел. За результат програма бере середнє значення по всім змодельованим траєкторіям. Ідея багаторазової ітерації з подальшим взяттям середнього ґрунтується на законі великих чисел.

Продукт "integral" вираховує подвійні інтеграли, наведені у розділі [2](#).

3.3 Керівництво користувача

3.3.1 Основний програмний продукт

Програмний продукт розроблено як додаток консольного типу. Тобто, для оперування роботою додатка використовуються текстові команди, що вводяться в консоль операційної системи.

Запуск програми "modeler" відбувається за допомогою команди:

```
modeler [<model_name>.xml]
```

Запуска програми "modeler2d" відбувається аналогічно:

```
modeler2d [<model_name>.xml]
```

3.3.1.1 Основні параметри

Користувач задає необхідну для вивчення модель через xml-файл. Типова структура xml-файлу виглядає наступним чином:

```

<model repeat_count="<count>" parking_length="<length>">
  <behaviour_1 p="<prob>" />
  ...
  <behaviour_n p="<prob>" />
</model>

```

Тобто в моделі задаються варіанти поведінки водіїв, а також відповідні ймовірності вибору поведінки. Істотним зауваженням є те, що сума ймовірностей має дорівнювати 1, інакше програма завершує роботу з ненульовим кодом.

Параметри моделі для продукту "modeler" перелічені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Параметри моделі для продукту "modeler"

Параметр	Пояснення
repeat_count	Кількість запусків моделювань для вирахування середнього значення
parking_length	Довжина парковки для моделювання

Типи дисциплін водіїв, що підтримуються продуктом "modeler" перелічені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Дисципліни водіїв, що підтримуються продуктом "modeler"

Дисципліна	Пояснення
left	Водій ставить свій автомобіль зліва вільного проміжку
right	Водій ставить свій автомобіль справа вільного проміжку
center	Водій ставить свій автомобіль по центру вільного проміжку
uniform	Водій ставить свій автомобіль керуючись рівномірним розподілом

Для продукту "modeler2d" було підключено лише поведінку водіїв, аналогічну класичній моделі Ренї у випадку одновимірної моделі, тобто за рівномірним розподілом. Тому для цієї програми задаються лише параметри моделі, перелічені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Параметри моделі для продукту "modeler2d"

Параметр	Пояснення
repeat_count	Кількість запусків моделювань для вирахування середнього значення
a	Довжина парковки по вісі $0x$
b	Довжина парковки по вісі $0y$

3.4 Аналіз роботи алгоритму

3.4.1 Алгоритм чисельного вирахування інтегралів

У 2.4 розділу 2 було виведено формулу (2.35). Для визначення середнього значення максимальної кількості автомобілів на парковці, керуючись отриманою формулою, необхідно чисельно визначити наступну константу:

$$\kappa = \int_0^{\infty} \exp \left(-2 \int_0^s \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right) ds \quad (3.1)$$

Оскільки чисельно рахувати інтеграл від експоненти від інтегралу незручно, неоптимально та це дасть досить велику похибку, треба звести інтеграл під експонентою до відомих функцій.

Лема 3.4.1:

$$\int_0^s \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \ln s + \Gamma(0, s) + \gamma, \quad (3.2)$$

де $\gamma = 0.5772156649$ – константа Ейлера-Маскероні, $\Gamma(0, s)$ – неповна гамма-функція.

Доведення.

$$\begin{aligned}
 \int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau &= \int_0^1 \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau + \int_1^s \frac{1}{\tau} d\tau + \int_s^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau - \int_1^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \\
 &= \int_0^1 \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau + \ln s + \Gamma(0, s) - \int_1^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \\
 &= \ln s + \Gamma(0, s) + \lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\tau} \ln \tau d\tau - \\
 &\quad - \underbrace{e^{-\tau} \ln \tau \Big|_1^\infty}_0 - \int_1^\infty e^{-\tau} \ln \tau d\tau = \ln s + \Gamma(0, s) + \\
 &\quad + \lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 - \int_0^\infty e^{-\tau} \ln \tau d\tau = \lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 + \\
 &\quad + \ln s + \Gamma(0, s) + \gamma
 \end{aligned}$$

Останній перехід впливає з тотожності

$$\gamma = - \int_0^\infty e^{-\tau} \ln \tau d\tau$$

Якщо довести, що $\lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 = 0$, то лему доведено.

З озкладу у ряд Тейлора впливає, що

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} = 1.$$

Тому

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} \cdot \frac{\ln u}{u^{-1}} = \langle \text{правило Лопіталя} \rangle = 1 \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u^{-1}}{-u^{-2}} = 0$$

Тому $\lim_{a \rightarrow 0} (1-e^{-\tau}) \ln \tau \Big|_0^1 = 0$, а отже, лему доведено. □

Таким чином отримали, що

$$\kappa = e^{-2\gamma} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-2\Gamma(0, s))}{s^2} ds \quad (3.3)$$

Для підрахунку невласного інтегралу можна оцінити його залишок, і знайти такі межі інтегрування, щоб залишок не перевищував деякого ε .

Тобто необхідно знайти таке δ , щоб виконувалось

$$e^{-2\gamma} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\exp(-2\Gamma(0, s))}{s^2} ds < \varepsilon.$$

Оскільки $\exp(-2\Gamma(0, s)) < 1$, то достатньо знайти таке δ , щоб виконувалось

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds < \varepsilon e^{2\gamma}.$$

Оскільки беремо $\delta \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds &< \varepsilon e^{2\gamma} \\ -\frac{1}{s} \Big|_{\delta}^{\infty} &< \varepsilon e^{2\gamma} \\ \delta^{-1} &< \varepsilon e^{2\gamma} \\ \varepsilon^{-1} e^{-2\gamma} &< \delta. \end{aligned}$$

Тобто, щоб отримати результат з точністю 10^{-6} , треба взяти $\delta > 10^6 e^{-2\gamma} \approx 315236$. Це і реалізовано в додатку "integral".

3.4.2 Алгоритм моделювання на одновимірній парковці

Для моделювання одновимірної парковки виконується наступний алгоритм дій:

а) Створюється вектор довжин вільних проміжків, який ініціалізується однією довжиною – довжиною парковки.

б) Допоки вектор не пустий, виконується:

Вибирається поведінка водія використовуючи рандомізатор.

Дістається остання довжина з вектору, і ділиться на частини відповідно до моделі поведінки водія.

Кожна з частин додається до вектору, якщо її довжина не менша 1, тобто, довжини автомобіля.

Інкрементується поточна кількість автомобілів.

Цей процес повторюється задану кількість разів, і в кінці програма видає середнє значення автомобілів з усіх ітерацій, а також відношення до довжини парковки.

3.4.3 Алгоритм моделювання на двовимірній парковці

Двовимірний алгоритм працює аналогічно одновимірному, тільки розглядаються не проміжки, а прямокутники. А саме, створюється список вільних прямокутників. Під вільним розуміється прямокутник, в якому будь-яка точка може бути потенційним центром автомобіля.

Ініціалізується цей список початковим прямокутником $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2})$, де a, b – задані лінійні розміри парковки. Спираючись на площі поточних прямокутників, обирається один з ймовірністю рівною відношенню його площі до сумарної площі усіх вільних прямокутників. Після цього всередині обраного прямокутника обирається за рівномірним розподілом точка, навколо якої будується квадратний окіл розміру 2×2 , і перевіряється на перетин з усіма поточними вільними прямокутниками. Якщо перетинається, то вільний прямокутник ділиться на менші прямокутники, при чому один із прямокутників – область перетину. Усі менші прямокутники, окрім перетину, додаються в список.

3.5 Результати роботи програми

3.5.1 Результати підрахунку констант

Для формули (2.35) було чисельно пораховано коефіцієнт $\kappa = 0.747598$.

Для формули (2.55) було чисельно пораховано коефіцієнт κ_α , для кожного α від 0 до 0.9 з кроком 0.1. Результати наведені в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4 – Результати розрахунку константи для узагальненої моделі

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747598	0.76351	0.780574	0.798962	0.818896
α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84066	0.864638	0.891365	0.92165	0.956849

3.5.2 Результати роботи моделера

Для формули (2.35) було промодельовано поведінку водіїв і емпірично визначено коефіцієнт $\kappa = 0.747588$.

Для формули (2.55) було промодельовано поведінку водіїв і емпірично визначено коефіцієнт κ_α , для кожного α від 0 до 0.9 з кроком 0.1. Результати наведені в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5 – Результати розрахунку константи для узагальненої моделі

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4
κ_α	0.747588	0.76352	0.780569	0.798959	0.818891
α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
κ_α	0.84055	0.863658	0.891214	0.92158	0.95693

Нескладно помітити, що теоретичний результат співпав з результатом моделювання з точністю до 4 знаку.

Для двовимірного випадку існує припущення, що відношення середньої кількості автомобілів до загальної площі парковки прямує до $\kappa^2 \approx 0.56$, але це не доведений факт [2]. Було проведено експеримент на розмірах 50x50,

100x100, 200x200, і результати вийшли відповідно 0.7, 0.6 та 0.58, тобто ймовірно, що припущення правдиве, але для перевірки на дуже великих розмірах парковки необхідні дуже потужні обчислювальні ресурси через велику складність двовимірного алгоритму.

3.6 Висновки до розділу

В даному розділі описано структурну схему розробленого програмного продукту, обґрунтовано вибір цільової ОС, надана коротка інструкція з експлуатації програмного продукту. Програмний продукт є пакетом з декількох програм, які слугують одній цілі – визначення математичного сподівання максимальної кількості автомобілів на парковці, використовуючи аналітичний та алгоритмічний методи. Під час зіставлення результатів виявилось, що аналітичний та алгоритмічний підходи дають майже однакові результати. Перевагою аналітичного методу є швидкість і досить висока точність, в той час як алгоритмічний метод дозволяє більш гнучко налаштувати поведінку водіїв на парковці.

Також була проведена в певному сенсі успішна спроба підтвердити гіпотезу щодо двовимірної парковки.

РОЗДІЛ 4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

У даному розділі проводиться оцінка основних характеристик програмного продукту, призначеного для системи автоматичного оптичного розпізнавання нотного запису. Програмний продукт розроблений з використанням мов програмування C++ та Python. При цьому використовувалися середовища розробки Vim 7.3 та JetBrains PyCharm 2016.1 відповідно.

Програмний продукт є автоматичним консольним додатком, тобто інтерфейсом користувача є консольні команди. Реалізація інтерфейсу створена за допомогою бібліотеки PyQt 5.5.

Програмний продукт призначено для використання в популярних операційних системах сімейств Linux, Windows, OS X.

Нижче наведено аналіз різних варіантів реалізації модулю з метою вибору оптимальної, з огляду при цьому як на економічні фактори, так і на характеристики продукту, що впливають на продуктивність роботи та на його сумісність з апаратним забезпеченням. Для цього було використано апарат функціонально-вартісного аналізу.

Функціонально-вартісний аналіз (ФВА) – це технологія, яка дозволяє оцінити реальну вартість продукту або послуги незалежно від організаційної структури компанії. Як прямі, так і побічні витрати розподіляються по продуктах та послугах у залежності від потрібних на кожному етапі виробництва обсягів ресурсів. Виконані на цих етапах дії у контексті метода ФВА називаються функціями.

Мета ФВА полягає у забезпеченні правильного розподілу ресурсів, виділених на виробництво продукції або надання послуг, на прямі та непрямі витрати. У даному випадку – аналізу функцій програмного продукту й виявлення усіх витрат на реалізацію цих функцій.

Фактично, цей метод працює за таким алгоритмом:

- визначається послідовність функцій, необхідних для виробництва продукту. Спочатку – всі можливі, потім вони розподіляються по двом групам: ті, що впливають на вартість продукту і ті, що не впливають. На

цьому ж етапі оптимізується сама послідовність скороченням кроків, що не впливають на цінність і відповідно витрат.

- для кожної функції визначаються повні річні витрати й кількість робочих часів.
- для кожної функції на основі оцінок попереднього пункту визначається кількісна характеристика джерел витрат.
- після того, як для кожної функції будуть визначені їх джерела витрат, проводиться кінцевий розрахунок витрат на виробництво продукту.

4.1 Постановка задачі техніко-економічного аналізу

У роботі застосовується метод ФВА для проведення техніко-економічного аналізу розробки.

Відповідно цьому варто обирати і систему показників якості програмного продукту.

Технічні вимоги до продукту наступні:

- програмний продукт повинен функціонувати на персональних комп'ютерах зі стандартним набором компонент;
- забезпечувати високу швидкість обробки великих об'ємів даних у реальному часі;
- забезпечувати зручність і простоту взаємодії з користувачем або з розробником програмного забезпечення у випадку використання його як модуля;
- передбачати мінімальні витрати на впровадження програмного продукту.

4.1.1 Обґрунтування функцій програмного продукту

Головна функція F_0 – розробка програмного продукту, який аналізує процес за вхідними даними та будує його модель для подальшого прогнозування. Виходячи з конкретної мети, можна виділити наступні основні функції ПП:

F_1 вибір мови програмування;

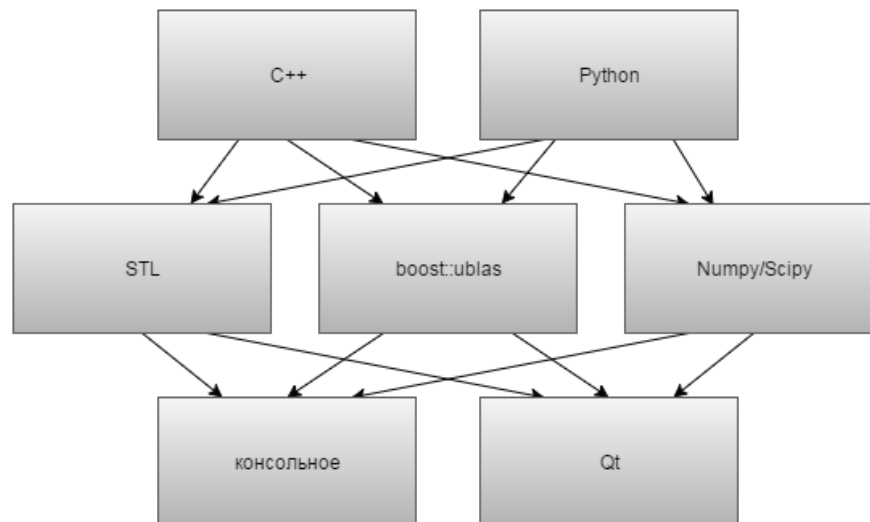


Рисунок 4.1 – Морфологічна карта

F_2 вибір оптимальної бібліотеки для математичних обчислень;

F_3 інтерфейс користувача.

Кожна з основних функцій може мати декілька варіантів реалізації.

- Функція F_1 :

- а) мова програмування C++;
- б) мова програмування Python.

- Функція F_2 :

- а) STL;
- б) boost::ublas;
- в) Numpy/Scipy.

- Функція F_3 :

- а) консольний інтерфейс користувача;
- б) графічний інтерфейс користувача, створений за технологією Qt.

4.1.2 Варіанти реалізації основних функцій

Варіанти реалізації основних функцій наведені у морфологічній карті системи (Рис. 4.1). На основі цієї карти побудовано позитивно-негативну матрицю варіантів основних функцій (Таблиця 4.1).

Морфологічна карта відражає всі можливі комбінації варіантів реалізації функцій, які складають повну множину варіантів ПП.

Таблиця 4.1 – Позитивно-негативна матриця

Основні функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F1	А	Максимальна швидкість роботи, кросплатформений, краща підтримка	Вищий поріг входу, менша швидкість розробки
	Б	простіший у використанні, вища швидкість розробки	Нижча швидкодія
F2	А	Безкоштовний, кросплатформений продукт, велика кількість якісної документації, краща підтримка	Високий поріг входу, велика кількість речей, що потребують обережної поведінки з ними
	Б	Велика бібліотека готових функцій	Потребує підключення додаткових модулів
	В	Велика бібліотека готових функцій, що легкі у використанні	Менша швидкодія, при роботі з мови Python необхідно уникати циклів для оптимізації
F3	А	Простота роботи, гнучкість інтерфейсу, швидкість розробки, кросплатформеність	Високий поріг входу, складність і незрозумілість побудови інтерактивної системи
	Б	Низький поріг входу, кросплатформеність, висока швидкість роботи і розробки	Тільки для C++ та вряперів, більша складність розробки

На основі аналізу позитивно-негативної матриці робимо висновок, що при розробці програмного продукту деякі варіанти реалізації функцій варто відкинути, тому, що вони не відповідають поставленим перед програмним продуктом задачам. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

4.1.2.1 Функція F_1

Відкидаємо варіант б) через те, що для даного продукту дуже важливо зберігати велику швидкодію, хоча це потребує більшої професійності при побудові додатку.

4.1.2.2 Функція F_2

Оскільки програмний продукт створюється за допомогою C++, логічно вибирати бібліотеку для роботи з зображеннями, що первісно написана для мов C/C++. Хоча варіант використання бібліотек Numpy/Scipy залишається можливим, він більш складний у побудові і буде мати меншу швидкодію внаслідок додаткової передачі даних через вряппер Python.

Використання бібліотеки boost є досить прийнятним, але бібліотеки STL, що вбудована в C++, цілком достатньо для проведення розрахунків, тому нема сенсу підключати додаткові бібліотеки з аналогічним функціоналом.

4.1.2.3 Функція F_3

Вважаємо варіанти А і Б гідними розгляду. Кожен має свої переваги та недоліки.

Таким чином, будемо розглядати такі варіанти реалізації ПП:

а) $F_{1a} - F_{2a} - F_{3a}$

б) $F_{1a} - F_{2a} - F_{3b}$

Для оцінювання якості розглянутих функцій обрана система параметрів, описана нижче.

4.2 Обґрунтування системи параметрів ПП

На підставі даних про основні функції, що повинен реалізувати програмний продукт, вимог до нього, визначаються основні параметри виробу, що будуть використані для розрахунку коефіцієнта технічного рівня.

4.2.1 Опис параметрів

Для того, щоб охарактеризувати програмний продукт, будемо використовувати наступні параметри:

X_1 - швидкодія мови програмування;

X_2 - об'єм оперативної пам'яті, що витрачається на роботу програми;

X_3 - середній час розрахунку реалізації моделі парковки;

X_4 - об'єм програмного коду

X_1 відображає швидкість виконання операцій, залежно від обраної мови програмування.

X_2 відображає об'єм оперативної пам'яті персонального комп'ютера, що необхідний для збереження та обробки даних під час виконання програми.

X_3 відображає час, який витрачається на моделювання рівномірної парковки довжини 100.

X_4 показує кількість програмного коду який необхідно створити безпосередньо розробнику.

4.2.2 Кількісна оцінка параметрів

Гірші, середні і кращі значення параметрів вибираються на основі вимог замовника й умов, що характеризують експлуатацію ПП як показано у табл. 4.2

За даними таблиці 4.2 будуються графічні характеристики параметрів: рис. 4.2 - рис. 4.5

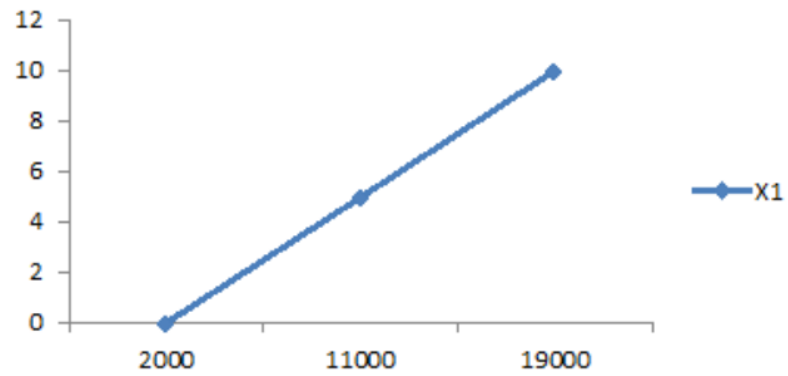


Рисунок 4.2 – Швидкодія мови програмування X_1

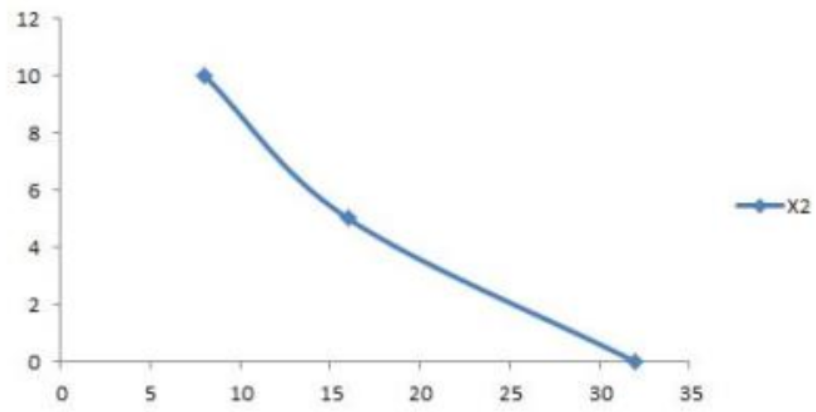


Рисунок 4.3 – Об'єм оперативної пам'яті X_2

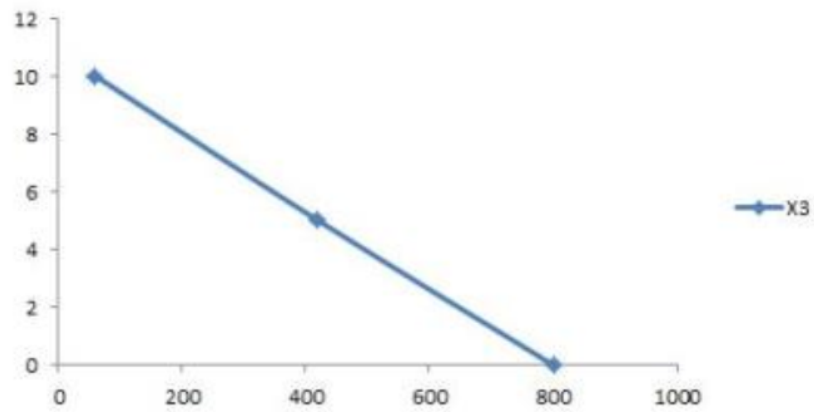
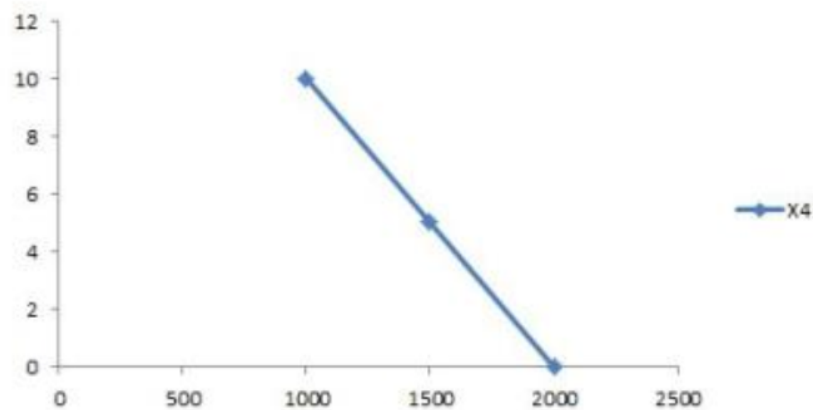


Рисунок 4.4 – Час обробки зображення X_3

Таблиця 4.2 – Основні параметри ПП

Назва параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі
Швидкодія мови програмування	X_1	оп/мс	2000	11000	19000
Об'єм оперативної пам'яті	X_2	мб	32	16	8
Час обробки моделі	X_3	мс	1000	800	100
Об'єм програмного коду	X_4	строк	2000	1500	1000

Рисунок 4.5 – Об'єм програмного коду X_4

4.2.3 Аналіз експертного оцінювання параметрів

Після детального обговорення й аналізу кожний експерт оцінює ступінь важливості кожного параметру для конкретно поставленої цілі – розробка програмного продукту, який дає найбільш точні результати при оптичному аналізі нотних листів.

Значимість кожного параметра визначається методом попарного порівняння. Оцінку проводить експертна комісія із 7 людей. Визначення коефіцієнтів значимості передбачає:

- визначення рівня значимості параметра шляхом присвоєння різних рангів;

Таблиця 4.3 – Результати експертного ранжування параметрів

Позначення	Назва	Ранг за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відх. Δ	Δ^2
		1	2	3	4	5	6	7			
X_1 , оп/мс	Швидкодія мови програмування	4	3	4	4	4	4	4	27	9.5	90.25
X_2 , мб	Об'єм оперативної пам'яті	1	2	3	1	2	3	2	14	-3.5	12.25
X_3 , мс	Час обробки зображення	3	4	2	3	3	2	3	20	2.5	6.25
X_4 , строк	Об'єм програмного коду	2	1	1	2	1	1	1	9	-8.5	72.25
Разом		10	10	10	10	10	10	10	70	0	181

- перевірку придатності експертних оцінок для подальшого використання;
- визначення оцінки попарного пріоритету параметрів;
- обробку результатів та визначення коефіцієнту значимості.

Результати експертного ранжування наведені у таблиці 4.3.

Для перевірки степені достовірності експертних оцінок, визначимо наступні параметри:

- а) сума рангів кожного з параметрів і загальна сума рангів:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i = 70 = \frac{Nn(n+1)}{2} \quad (4.1)$$

де n - число оцінюваних параметрів, N - число експертів

- б) середня сума рангів:

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i,j} R_{ij} = 17.5 \quad (4.2)$$

Таблиця 4.4 – Попарне порівняння параметрів

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Чисельне значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 і X2	>	>	>	>	>	<	>	>	1.5
X1 і X3	>	<	>	>	>	>	>	>	1.5
X1 і X4	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X2 і X3	<	<	>	<	<	>	<	<	1.5
X2 і X4	<	>	>	<	>	>	>	>	1.5
X3 і X4	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5

в) відхилення суми рангів кожного параметра від середньої суми рангів:

$$\Delta_i = R_i - T \quad i = 1 \dots n \quad (4.3)$$

Сума відхилень по всіх параметрах повинна дорівнювати 0;

г) загальна сума квадратів відхилення:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta^2 = 181 \quad (4.4)$$

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12 \cdot S}{N^2(n^3 - n)} = 0.74 \quad (4.5)$$

Ранжування можна вважати достовірним, тому що знайдений коефіцієнт узгодженості перевищує нормативний, котрий дорівнює 0.67.

Скориставшись результатами ранжування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю 4.4.

Числове значення, що визначає ступінь переваги i -го параметра над j -тим, a_{ij} визначається по формулі:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1.5, & X_i > X_j \\ 1.0, & X_i = X_j \\ 0.5, & X_i < X_j \end{cases} \quad (4.6)$$

Таблиця 4.5 – Розрахунок вагомості параметрів

Ітерації					1		2		3	
Параметри X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	b_i	$K_{\text{Б}}^{(i)}$	b_i^1	$K_{\text{Б}}^{(i)}$	b_i^2	$K_{\text{Б}}^{(i)}$
X_1	1.0	0.5	0.5	1.5	3.5	0.219	22.25	0.216	100	0.215
X_2	1.5	1.0	0.5	1.5	4.5	0.281	27.25	0.282	124.3	0.283
X_3	1.5	1.5	1.0	1.5	5.5	0.344	34.25	0.347	156	0.348
X_4	0.5	0.5	0.5	1.0	2.5	0.156	14.25	0.155	64.75	0.154
Всього:					16	1	98	1	445	1

З отриманих оцінок складемо матрицю $A = ||a_{ij}||$

Для кожного параметра зробимо розрахунок вагомості $K_B^{(i)}$ за наступною формулою:

$$K_B^{(i)} = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n b_j}, \text{ де } b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (4.7)$$

Відносні оцінки розраховуються декілька разів доти, поки наступні значення не будуть незначно відрізнятися від попередніх (менше 2%). На другому і наступних кроках відносні оцінки розраховуються за наступними формулами:

$$K_B^{(i)} = \frac{b'_i}{\sum_{j=1}^n b'_j}, \text{ де } b'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_j \quad (4.8)$$

Як видно з таблиці 4.5, різниця значень коефіцієнтів вагомості не перевищує 2%, тому більшої кількості ітерацій не потрібно.

4.3 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій

Визначаємо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо.

Абсолютні значення параметрів X_2 (об'єм пам'яті для збереження даних) та X_1 (швидкодія мови програмування) відповідають технічним вимогам умов функціонування даного ПП.

Таблиця 4.6 – Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації основних функцій ПП

Основні функції	Варіант реалізації функції	Абсолютне значення параметра	Бальна оцінка параметра	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
$F_1(X_1)$	А	11000	3.6	0.215	0.774
$F_2(X_3)$	А	800	2.4	0.348	0.835
$F_3(X_2, X_4)$	А	16	3.4	0.283	0.962
	Б	80	1	0.154	0.154

Абсолютне значення параметра X_3 (час обробки зображення) обрано не найгіршим (не максимальним), тобто це значення відповідає або варіанту а) 800 мс або варіанту б) 80мс.

Коефіцієнт технічного рівня для кожного варіанта реалізації ПП розраховується за формулою (4.9) Результати наведемо в таблиці 4.6

$$K_K(j) = \sum_{i=1}^n K_B^{(i,j)} B^{(i,j)} \quad (4.9)$$

де n - кількість параметрів, $K_B^{(i)}$ - коефіцієнт вагомості i -го параметра, $B^{(i,j)}$ - оцінка i -го параметра в балах.

За даними з таблиці 4.6 за формулою

$$K_K = K_{TY} [F_{1k}] + K_{TY} [F_{2k}] + \dots + K_{TY} [F_{zk}] \quad (4.10)$$

визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$$K_{K1} = 0.774 + 0.835 + 0.962 = 2.57$$

$$K_{K2} = 0.774 + 0.835 + 0.154 = 1.76$$

Як видно з розрахунків, кращим є перший варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

4.4 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Для визначення вартості розробки ПП спочатку проведемо розрахунок трудомісткості.

Всі варіанти включають в себе два окремих завдання:

- а) Розробка проекту програмного продукту;
- б) Розробка програмної оболонки;

Завдання 1 за ступенем новизни відноситься до групи А, завдання 2 – до групи Б. За складністю алгоритми, які використовуються в завданні 1 належать до групи 1; а в завданні 2 – до групи 3.

Для реалізації завдання 1 використовується довідкова інформація, а завдання 2 використовує інформацію у вигляді даних.

Проведемо розрахунок норм часу на розробку та програмування для кожного з завдань. Загальна трудомісткість обчислюється як

$$T_O = T_P \cdot K_{\Pi} \cdot K_{СК} \cdot K_M \cdot K_{СТ} \cdot K_{СТ.М} \quad (4.11)$$

де T_P - трудомісткість розробки ПП; K_{Π} - поправочний коефіцієнт; $K_{СК}$ - коефіцієнт на складність вхідної інформації; K_M - коефіцієнт рівня мови програмування; $K_{СТ}$ - коефіцієнт використання стандартних модулів і прикладних програм; $K_{СТ.М}$ - коефіцієнт стандартного математичного забезпечення.

Для першого завдання, виходячи із норм часу для завдань розрахункового характеру ступеню новизни А та групи складності алгоритму 1, трудомісткість дорівнює: $T_P = 90$ людино-днів. Поправний коефіцієнт, який враховує вид нормативно-довідкової інформації для першого завдання: $K_{\Pi} = 1.7$. Поправний коефіцієнт, який враховує складність контролю вхідної та вихідної інформації для всіх завдань рівний 1: $K_{СК} = 1$. Оскільки при розробці першого завдання використовуються стандартні модулі, врахуємо це за допомогою коефіцієнта $K_{СТ} = 0.8$. Тоді, за формулою (4.11), загальна трудомісткість програмування першого завдання дорівнює:

$$T_1 = 90 \cdot 1.7 \cdot 0.8 = 122.4 \text{ людино-днів}$$

Проведемо аналогічні розрахунки для подальших завдань.

Для другого завдання (використовується алгоритм третьої групи складності, степінь новизни Б), тобто $T_P = 27$ людино-днів, $K_{\Pi} = 0.9$, $K_{СК} = 1$, $K_{СТ} = 0.8$:

$$T_2 = 27 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 19.44 \text{ людино-днів}$$

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного з обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість, враховуючи більшу складність другого завдання в другому випадку:

$$T_1 = (122.4 + 19.44 + 4.8) \cdot 8 = 1173.12 \text{ людино-годин}$$

$$T_2 = (122.4 + 19.44 + 6.91) \cdot 8 = 1190 \text{ людино-годин}$$

Найбільш високу трудомісткість має варіант 2. В розробці беруть участь два програмісти з окладом 6000 грн., один аналітик-програміст з окладом 9000 грн. Визначимо годинну зарплату за формулою:

$$C_h = \frac{M}{T_m t} \text{ грн} \quad (4.12)$$

де M – середній місячний оклад працівників; T_m – кількість робочих днів на місяць; t – кількість робочих годин в день.

$$C_h = \frac{6000 + 6000 + 9000}{3 \cdot 21 \cdot 8} = 41.67 \text{ грн} \quad (4.13)$$

Тоді, розрахуємо заробітну плату за формулою:

$$C_{зп} = C_h \cdot T_i \cdot K_{КД} \quad (4.14)$$

де C_h – величина погодинної оплати праці програміста; T_i – трудомісткість відповідного завдання; $K_{КД}$ – норматив, який враховує додаткову заробітну плату.

Зарплата розробників за варіантами становить:

$$\text{а) } C_{зп} = 41.67 \cdot 1328.64 \cdot 1.2 = 58660.69 \text{ грн}$$

$$\text{б) } C_{зп} = 41.67 \cdot 1345.52 \cdot 1.2 = 59504.76 \text{ грн}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок в залежності від групи професійного ризику (II клас) становить 22%:

$$\text{а) } C_{\text{від}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 58660.69 \cdot 0.22 = 12905.35 \text{ грн}$$

$$\text{б) } C_{\text{від}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 59504.76 \cdot 0.22 = 13091.05 \text{ грн}$$

Тепер визначимо витрати на оплату однієї машино-години — C_M

Так як одна ЕОМ обслуговує одного програміста з окладом 6000 грн., з коефіцієнтом зайнятості 0.2 то для однієї машини отримаємо:

$$C_{\Gamma} = 12 \cdot M \cdot K_3 = 12 \cdot 6000 \cdot 0.2 = 14400 \text{ грн}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$C_{\text{зп}} = C_{\Gamma} \cdot (1 + K) = 14400 \cdot (1 + 0.2) = 17280 \text{ грн}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок:

$$C_{\text{від}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 17280 \cdot 0.22 = 3801.6 \text{ грн}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 20% та вартості ЕОМ – 8000 грн.

$$C_a = K_{\text{тм}} \cdot K_a \cdot \Pi_{\text{пр}} = 1.15 \cdot 0.2 \cdot 8000 = 1840 \text{ грн}$$

де $K_{\text{тм}}$ – коефіцієнт, який враховує витрати на транспортування та монтаж приладу у користувача; K_a – річна норма амортизації; $\Pi_{\text{пр}}$ – договірна ціна приладу.

Витрати на ремонт та профілактику розраховуємо як:

$$C_p = K_{\text{тм}} \cdot \Pi_{\text{пр}} \cdot K_p = 1.15 \cdot 8000 \cdot 0.05 = 460 \text{ грн}$$

де K_p – відсоток витрат на поточні ремонти.

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$\begin{aligned} T_{\text{еф}} &= (D_{\text{к}} - D_{\text{в}} - D_{\text{с}} - D_{\text{р}}) \cdot t \cdot K_{\text{в}} = \\ &= (365 - 104 - 8 - 16) \cdot 8 \cdot 0.9 = 1706.4 \text{ годин} \end{aligned}$$

де D_k – календарна кількість днів у році; D_b, D_c – відповідно кількість вихідних та святкових днів; D_p – кількість днів планових ремонтів устаткування; t – кількість робочих годин в день; K_b – коефіцієнт використання приладу у часі протягом зміни.

Витрати на оплату електроенергії розраховуємо за формулою:

$$C_{\text{ел}} = T_{\text{еф}} \cdot N_c \cdot K_z \cdot \Pi_{\text{ен}} = 1706.4 \cdot 0.156 \cdot 0.2436 \cdot 2.08 = 134.87 \text{ грн}$$

де N_c – середньо-споживча потужність приладу; K_z – коефіцієнтом зайнятості приладу; $\Pi_{\text{ен}}$ – тариф за 1 КВт-годину електроенергії.

Накладні витрати розраховуємо за формулою:

$$C_n = \Pi_{\text{пр}} \cdot 0.67 = 8000 \cdot 0.67 = 5360 \text{ грн}$$

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$$\begin{aligned} C_{\text{екс}} &= C_{\text{зп}} + C_{\text{від}} + C_a + C_p + C_{\text{ел}} + C_n = \\ &= 17280 + 3801.6 + 1840 + 460 + 134.87 + 5360 = 28876.47 \text{ грн} \end{aligned}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$C_{\text{м-г}} = C_{\text{екс}} / T_{\text{еф}} = 28876.47 / 1706.4 = 16.92 \text{ грн/год}$$

В нашому випадку всі роботи пов'язані з розробкою програмного продукту ведуться на ЕОМ. Витрати на оплату машинного часу розраховуються за наступною формулою:

$$C_m = C_{\text{м-г}} \cdot T$$

В залежності від обраного варіанта реалізації, витрати на оплату машинного часу складають:

$$\text{а) } C_m = 16.92 \cdot 1173.12 = 19849.19 \text{ грн}$$

$$\text{б) } C_m = 16.92 \cdot 1190 = 20134.8 \text{ грн}$$

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$C_n = C_{\text{зп}} \cdot 0.67$$

$$a) C_H = 58660.69 \cdot 0.67 = 39302.66 \text{ грн}$$

$$б) C_H = 59504.76 \cdot 0.67 = 39868.19 \text{ грн}$$

Отже, вартість розробки ПП за варіантами становить:

$$C_{\text{пп}} = C_{\text{зп}} + C_{\text{від}} + C_{\text{м}} + C_{\text{н}}$$

$$a) C_{\text{пп}} = 58660.69 + 12905.35 + 19849.19 + 39302.66 = 130717.89 \text{ грн}$$

$$б) C_{\text{пп}} = 59504.76 + 13091.05 + 20134.8 + 39868.19 = 132598.8 \text{ грн}$$

4.5 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня

Розрахуємо коефіцієнт техніко-економічного рівня за формулою:

$$K_{\text{тер}j} = K_{\text{К}j} / C_{\Phi j} \quad (4.15)$$

$$a) K_{\text{тер}1} = 2.57/130717.89 = 0.197 \cdot 10^{-4};$$

$$б) K_{\text{тер}2} = 1.76/132598.8 = 0.132 \cdot 10^{-4};$$

Як бачимо, найбільш ефективним є перший варіант реалізації програми з коефіцієнтом техніко-економічного рівня $K_{\text{тер}1} = 0.197 \cdot 10^{-4}$.

4.6 Висновки до розділу

В даному розділі проведено повний функціонально-вартісний аналіз ПП, який було розроблено в рамках дипломного проекту. Процес аналізу можна умовно розділити на дві частини.

В першій з них проведено дослідження ПП з технічної точки зору: було визначено основні функції ПП та сформовано множину варіантів їх реалізації; на основі обчислених значень параметрів, а також експертних оцінок їх важливості було обчислено коефіцієнт технічного рівня, який і дав змогу визначити оптимальну з технічної точки зору альтернативу реалізації функцій ПП.

Другу частину ФВА присвячено вибору з альтернативних варіантів реалізації найбільш економічно обґрунтованого. Порівняння запропонованих

варіантів реалізації в рамках даної частини виконувалось за коефіцієнтом ефективності, для обчислення якого були обчислені такі допоміжні параметри, як трудомісткість, витрати на заробітну плату, накладні витрати.

Після виконання функціонально-вартісного аналізу програмного комплексу що розроблюється, можна зробити висновок, що з альтернатив, що залишились після першого відбору двох варіантів виконання програмного комплексу оптимальним є перший варіант реалізації програмного продукту. У нього виявився найкращий показник техніко-економічного рівня якості:

$$K_{\text{тер}} = 0.197 \cdot 10^{-4}$$

Цей варіант реалізації програмного продукту має такі параметри:

- мова програмування – C++
- розрахунки — бібліотека STL
- інтерфейс користувача — консольного типу

Даний варіант виконання програмного продукту надає користувачу зручний інтерфейс консольного типу, непоганий функціонал і гнучкість з достатньо великою швидкістю.

ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Одним з досить серйозних пороків людського виду є постійне намагання підлаштувати природу під себе. Дійсно, вже рідко де, окрім заповідників, знайдеш чисту і недоторкану природу, адже куди не глянь – усюди забудови, дороги, машини і трагічні наслідки техногенних катастроф.

В той самий час доситьактивно розвивається медицина, за останні два сторіччя істотно виріс середній вік людини, тож наша популяція стає все більше і більше. А чим більше людей, тим більше потребується житлових місць, харчів, автомобілів. І досить часто все це створюється бездумно, без розрахунку.

Саме тому у 1958 році угорський математик Реньї порушив проблему паркування автомобілів в теоретичному аспекті. І хоча вона називається проблемою паркування, результати, отримані під час її розв'язування можуть бути використані не лише до автомобілів. Їх можна застосувати для оптимального пакування, оптимального розміщення будівель, навіть для оптимальної організації робочого простору.

У даній атестаційній роботі було узагальнено класичну модель паркування Реньї. Було отримано наступні результати.

Проведено дослідження існуючих підходів і результатів щодо проблеми паркування та пакування. Проведено аналіз аналітичного апарату, що дозволяє вирішувати інтегральні рівняння зі зсувом, таким чином, допомагає у вирішенні проблем розглянутого класу. Було створено узагальнену модель паркування, в якій водії паркуються керуючись сумішшю рівномірного розподілу та розподілу Бернуллі. Для цього узагальнення було виведено аналітичну формулу математичного сподівання максимальної кількості автомобілів за великих розмірів парковки. Це узагальнення дає змогу використовувати модель Реньї на практиці, адже насправді існують сумлінні водії, які намагаються зайняти якомога менше місця на парковці, а є такі, що ставлять свій автомобіль як заманеться.

Паралельно з виведенням аналітичного результату був створений консольний додаток, що дозволяє моделювати процес паркування імітаційним

шляхом, і визначати математичне сподівання максимальної кількості автомобілів як середнє значення результатів кількох імітацій.

Було перевірено, що обидва методи дають один і той самий результат з точністю до четвертого знаку після коми на класичній моделі Реньї та на узагальненій з 10 різними ймовірностями паркування автомобіля з краю.

За аналізом отриманих результатів роботи програмного продукту можна зробити висновок, що обрані методи дозволили досягти виконання поставлених цілей з достатньо великою степінню точності. Але у кожного метода є свої плюси та мінуси. Перевагою аналітичного методу є швидкість і досить висока точність, в той час як алгоритмічний метод дозволяє більш гнучко налаштувати поведінку водіїв на парковці.

Подільшими дослідженнями за даним напрямом можуть стати:

- отримання аналітичного результату для асимптотики у випадку двовимірної парковки;
- зменшення складності алгоритму для двовимірної парковки;
- підтримка додатком змінних розмірів автомобілів;
- створення додатку для тривимірного розміщення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Список стран по количеству автомобилей на 1000 человек. — 2016. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_стран_по_количеству_автомобилей_на_1000_человек.
2. Weisstein, Eric W. Rényi's Parking Constants / Eric W. Weisstein. — 2016. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://mathworld.wolfram.com/RenyisParkingConstants.html>.
3. Rényi, A. On a One-Dimensional Problem Concerning Random Space-Filling. / A. Rényi. — Budapest: Math. Inst. Hung. Acad., 1958. — P. 153.
4. Dvoretzky, A. On the Parking Problem. / A. Dvoretzky, H. Robbins. — Budapest: Math. Inst. Hung. Acad., 1964. — P. 275.
5. Blaisdell, B. E. On Random Sequential Packing in the Plane and a Conjecture of Palasti. / B. E. Blaisdell, H. Solomon. — Budapest: J. Appl. Prob., 1970. — P. 834.
6. «О» большое и «о» малое. — 2016. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/«О»_большое_и_«о»_малое.
7. Feller, William. An Introduction To Probability Theory and Its Applications. / William Feller. — 2 edition. — New-York: John Wiley & Sons, 1971. — Vol. 2. — P. 704.
8. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. / Н.Ш. Кремер. — 2 изд. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — С. 573.
9. Каніовська, І.Ю. — Конспект лекцій з теорії ймовірностей та математичної статистики. — ІПСА, К., 2013.
10. Преобразование Лапласа. — 2016. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Лапласа.