Rapport projet outils mathématique pour l'informatique

Khmarou Fatima-Ezzahra
Abounaim Yassine

2024/2025

Ce document couvre différents aspects de la transformée de Fourier , répartis comme suit:

1 Introduction

La Transformée de Fourier est un outil mathématique fondamental en analyse des signaux, utilisé pour représenter un signal dans le domaine fréquentiel. Elle permet de décomposer un signal complexe en une somme de composantes sinusoïdales élémentaires, caractérisées par leurs fréquences, amplitudes et phases. Cette transformation est essentielle dans de nombreux domaines, notamment le traitement du signal, l'analyse d'images, la physique, et les télécommunications.

Définition mathématique: Pour un signal continu x(t), la Transformée de Fourier est donnée par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} \, dt,$$

Le projet se décompose en quatre volets principaux :
1. La transformée de Fourier directe discrète pour une image.
Il s'agit d'implémenter la TFD appliquée aux données discrètes.

2. La transformée de Fourier rapide discrète 1D.
L'objectif est ici d'optimiser la TFD en implémentant la FFT dans le cas unidimensionnel. Cette méthode réduit considérablement la complexité.
3. La transformée de Fourier rapide discrète 2D.
L'extension en deux dimensions de la FFT sera étudiée et mise en œuvre pour traiter efficacement des images et des signaux multidimensionnels.
4. La transformée de Fourier inverse rapide 1D et 2D.
Enfin, l'inverse des transformations 1D et 2D sera implémenté pour reconstruire l'image ou le signal.

2 La transformée de Fourier directe discrète

Dans cette partie on implémente la transformée de Fourier discrète (DFT) sur une image en utilisant sa définition mathématique.

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{u \cdot x}{M} + \frac{v \cdot y}{N}\right)}$$

La DFT est une technique permettant de convertir une image du domaine spatial, où chaque pixel représente une intensité lumineuse, vers le domaine fréquentiel, où les coefficients décrivent les fréquences et phases présentes dans l'image.
L'image d'entrée est d'abord convertie en niveaux de gris (si elle est en couleur) et en type double pour permettre un traitement précis des nombres complexes.
Ensuite, la transformation est calculée pixel par pixel en suivant l'équation de la DFT.
Bien que cette implémentation soit fidèle à la définition théorique, elle est peu efficace pour les grandes images en raison de sa complexité O(M^2N^2).
Nous avons fait une comparaison entre le résultat de notre fonction de la transformée de Fourrier avec celle de Matlab (fft2).
L'image obtenue est presque entièrement noire, ce qui signifie que la différence entre les deux résultats est très faible dans la majorité des pixels.

3 La transformée de Fourier rapide discrète 1D

La Transformée de Fourier Rapide (FFT) discrète 1D est un algorithme optimisé pour calculer efficacement la Transformée de Fourier Discrète (DFT) d'un signal 1D.
On a implémenté la transformée de Fourier discrète (DFT) sur un signal de longueur N .

Cependant, sa complexité algorithmique brute de O(N^2) due aux multiples opérations de multiplication et de sommation,en fait une méthode coûteuse en temps pour les signaux de grande taille.
Pour cela on utilise la FFT qui réduit cette complexité à ($NlogN$) repose sur une idée clé : diviser la DFT en sous-problèmes plus petits grâce à la **dichotomie pair-impair**.

Dichotomie pair-impair : un gain algorithmique. La division en indices pairs et impairs s'appuie sur la propriété suivante des exponentielles complexes :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot e^{-2i\pi k(2n)/N} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot e^{-2i\pi k(2n+1)/N}$$

Cela permet de réécrire X(k) comme une combinaison des résultats d'une DFT sur les indices pairs (x(2n)) et d'une DFT sur les indices impairs (x(2n+1)),multipliée par un facteur de rotation (racine N-ième de l'unité).
Ainsi, la DFT complète de taille N est divisée en deux DFT de taille N/2, réduisant drastiquement le nombre d'opérations.

Affichage des résultats.

a) Signal dans le domaine temporel (graphe 1).
Le premier graphique représente l'oscillation résultant de la superposition des deux fréquences principales du signal.
On observe un signal périodique, où les variations rapides dues à la composante à 150 Hz sont superposées à des variations plus lentes associées à la fréquence de 50 Hz.

b) FFT avec la fonction intégrée fft (graphe 2).
Le deuxième graphique montre la magnitude des coefficients de la Transformée de Fourier calculée avec la fonction intégrée fft.
Les pics principaux apparaissent aux indices correspondant aux fréquences f1=50Hz et f2=150Hz.
Ces pics indiquent les composantes dominantes du signal dans le domaine fréquentiel, confirmant la présence des deux fréquences d'origine.

c) FFT avec la fonction personnalisée fft 1d (graphe 3).
Le troisième graphique représente la FFT calculée à l'aide de la fonction personnalisée fft1d.
Si l'implémentation de cette fonction est correcte, le résultat est similaire à celui obtenu avec la fonction intégrée fft. On observe les mêmes pics aux fréquences 50Hz et 150Hz, confirmant que la fonction personnalisée reproduit fidèlement les composantes fréquentielles du signal.

Le spectre miroir dans la FFT.

La FFT de la Transformée de Fourier discrète (DFT) produit un spectre symétrique autour de $f/2$ (la moitié de la fréquence d'échantillonnage, appelée fréquence de Nyquist). Cela signifie que les fréquences réelles et leurs images miroir apparaissent dans le résultat FFT.

4 La transformée de Fourier rapide discrète 2D

la fft 2d qu'on a fournie effectue une transformée de Fourier 2D (FFT 2D) sur une image, mais en la décomposant en deux étapes : d'abord une FFT 1D sur les lignes, puis une FFT 1D sur les colonnes.

La fonction fft 2d(image) appliquera la FFT 1D sur chaque ligne, puis appliquera la FFT 1D sur chaque colonne du résultat pour obtenir la FFT 2D.

Pourquoi on a utilisé la séparation ligne/colonne.

La transformée de Fourier 2D peut être vue comme la combinaison de deux FFT 1D :
1.La FFT 1D des lignes traite les variations horizontales de l'image.
2.La FFT 1D des colonnes traite les variations verticales.

Cela permet de réduire la complexité du calcul en effectuant d'abord deux FFT 1D successives (une sur les lignes et une sur les colonnes), ce qui est plus efficace que de calculer directement une FFT 2D.

Comparaison des complexités.

1.FFT 2D brute $O(MN)^2$
2.FFT 2D optimisée avec séparabilité : $O(N^2 logN)$
La réduction est énorme, particulièrement pour les grandes matrices

5 La transformée de Fourier inverse rapide 1D

On a implémenté dans cette partie la transformée de Fourrier inverse rapide 1D en partant de sa formule mathématique :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right)$$

L'algorithme est basé sur la version récursive de l'IFFT, qui réduit la complexité de calcul par rapport à une approche naïve directe. Cette réduction de la complexité est rendue possible par l'algorithme Cooley-Tukey, qui divise le problème en sous-problèmes plus petits. Concrètement, l'algorithme est décomposé en deux parties : la partie paire et la partie impaire.
La partie paire :

$$x_{pair}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k_{\text{pair}}} X[k_{\text{pair}}] \cdot \exp\left(\frac{2\pi i k_{\text{pair}} n}{N}\right)$$

Lors de la première étape de l'algorithme, nous extrayons les indices pairs du vecteur d'entrée X. Ces indices forment un sous-vecteur appelé even. La transformée inverse de Fourier est ensuite calculée récursivement sur ce sous-vecteur.

La partie impaire :

$$x_{impair}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k_{\text{impair}}} X[k_{\text{impair}}] \cdot \exp\left(\frac{2\pi i k_{\text{impair}} n}{N}\right)$$

Une fois les sous signaux pairs et impairs traités, nous devons les recombiner pour obtenir le signal complet dans le domaine temporel. Cela se fait en utilisant les facteurs de rotation (basés sur les racines N ièmes de l'unité) pour ajuster les phases des éléments impairs avant de les additionner ou soustraire des éléments pairs.Ensuite, nous extrayons les indices impairs de X pour former un sous-vecteur appelé odd. De même, la transformée inverse de Fourier est calculée récursivement sur ce sous-vecteur.

Une fois les sous signaux pairs et impairs traités, nous devons les recombiner pour obtenir le signal complet dans le domaine temporel. Cela se fait en utilisant les facteurs de rotation (basés sur les racines N ièmes de l'unité) pour ajuster les phases des éléments impairs avant de les additionner ou soustraire des éléments pairs.

Relation avec la FFT :

Si on connaît la FFT du signal x[n], la IFFT est simplement une version "renversée" de cette formule. La FFT est généralement calculée en utilisant un facteur exponentiel ,tandis que l'IFFT utilise l'inverse de ce facteur . En outre, l'IFFT est normalisée par un facteur 1/N.

6 La transformée de Fourier inverse rapide 2D

Dans cette section, nous avons implémenté la transformée inverse de Fourier rapide 2D en utilisant la transformée inverse de Fourier rapide 1D comme outil de base.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right)$$

L'objectif de cette fonction est de reconstruire une image (ou un signal 2D). Ce

processus repose sur l'application successive de la transformée inverse de Fourier rapide 1D sur les lignes et les colonnes de l'image.
L'algorithme de la transformée inverse de Fourier 2D peut être décomposé en deux étapes distinctes pour optimiser les calculs et réduire la complexité :
1. Transformation des lignes :
L'IFFT est appliquée sur chaque ligne de l'image.
2. Transformation des colonnes :
Après avoir transformé les lignes, on transpose la matrice pour traiter les colonnes. L'IFFT est appliquée sur les colonnes de l'image obtenue, Cela permet de finaliser la reconstruction de l'image. Après ces deux étapes, l'image complète est reconstruite et envoyée en résultat.

Résumé du processus.
Première étape : Appliquer l'IFFT 1D sur chaque ligne de l'image.
Deuxième étape : Appliquer l'IFFT 1D sur chaque colonne du résultat de la première étape.
Cela permet de calculer l'IFFT 2D de l'image en exploitant la séparabilité de la transformée de Fourier 2D, tout comme pour la FFT 2D.