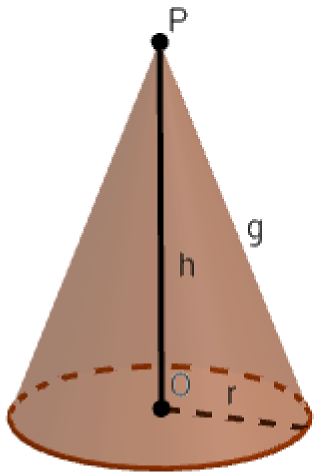
Cones

Resumo

Cone: elementos e classificação

Cone é um solido geométrico caracterizado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto P (vértice) e a outra num ponto qualquer da região circular que forma a base.



Base: Círculos de raio r

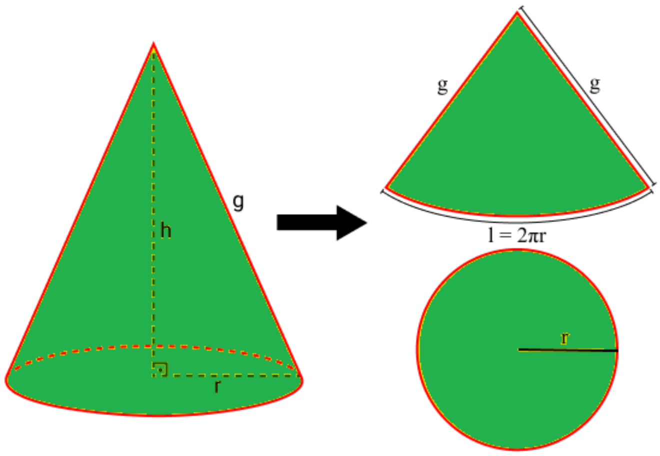
Altura: h

Geratriz: segmento com uma extremidade no vértice P e outra em alguma parte da circunferêcia da base.

Um cone pode ser classificado conforme a inclinação da geratriz em relação à base:

Reto – o cone circular é reto quando o segmento de reta PO é perpendicular à base.
Oblíqua - o cone circular é oblíquo quando o segmento de reta PO é oblíquo à base.

Quando planificado, a área lateral do cone é um setor circular:



O ângulo do setor circular pode ser calculado por regra de 3, já que o comprimento do setor equivale ao perímetro da base:

360^o _____ $2\pi g$

x ________ $2\pi r$

Área da base

$$\boxed{A_b = \pi r^2}$$

Área lateral

$$\boxed{A_b = \pi r g}$$

Área Total

$$A_t = A_b + A_l$$

$$\boxed{A_t = \pi r(g + r)}$$

Volume

$$V = \frac{1}{3} A_B h$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

Onde: A_b = Área da base
A_l = Área lateral
A_t = Área total
h = altura
r = raio
g = geratriz

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

a) pirâmide.

b) semiesfera.

c) cilindro.

d) tronco de cone.

e) cone.

2. Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de (considere $\pi \cong 3$)

a) 5,76m.

b) 4,43m.

c) 6,38m.

d) 8,74m.

3. Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:

a) 144°

b) 192°

c) 240°

d) 288°

e) 336°

4. Um torneiro mecânico construiu uma peça retirando, de um cilindro metálico maciço, uma forma cônica, de acordo com a figura 01 a seguir: (Considere $\pi \cong 3$)

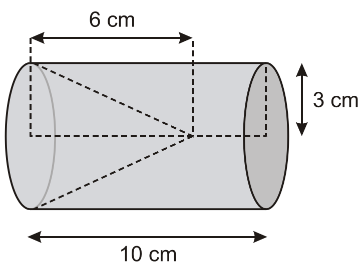
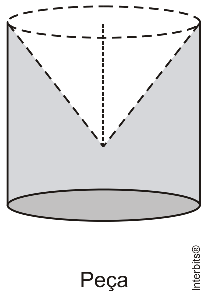


Figura 01



Peça

Qual é o volume aproximado da peça em milímetros cúbicos?

a) $2{,}16 \times 10^5$

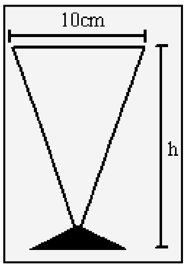
b) $7{,}2 \times 10^4$

c) $2{,}8 \times 10^5$

d) $8{,}32 \times 10^4$

e) $3{,}14 \times 10^5$

5. Uma tulipa de chopp tem a forma cônica, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que sua capacidade é de 100π ml, a altura **h** é igual a:



a) 20cm

b) 16cm

c) 12cm

d) 8cm

e) 4cm

6. Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por 625 π mL de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a Figura 1. O conjunto, como mostra a Figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

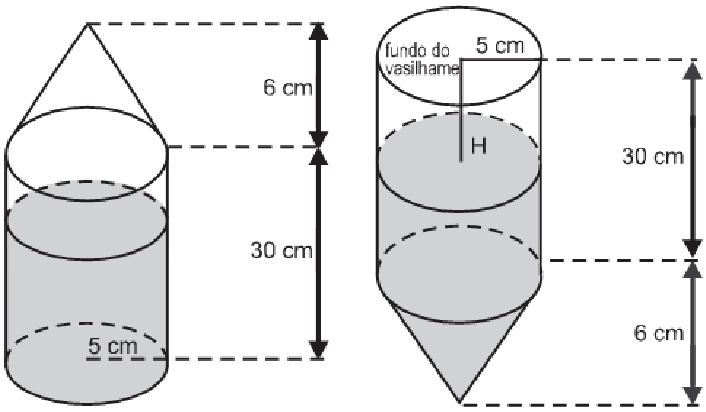


Figura 1 Figura 2

Considerando essas informações, qual é o valor da distância H?

a) 5cm

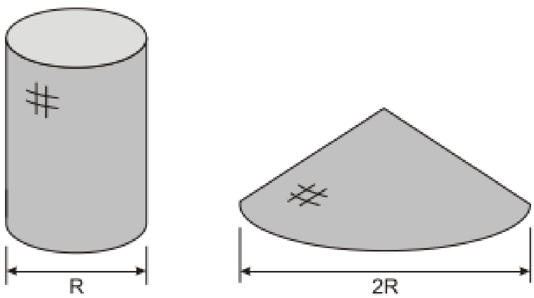
b) 7cm

c) 8cm

d) 12cm

e) 18cm

7. Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escorreu, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.



A altura do cone formado pela areia era igual a

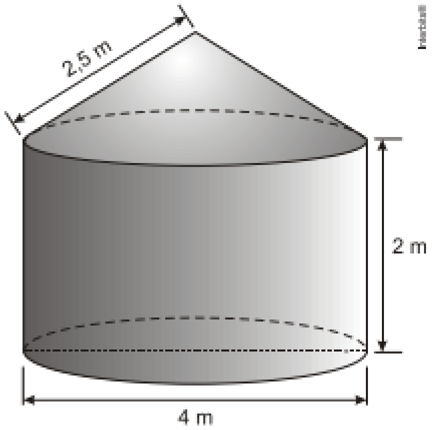
a) 3/4 da altura do cilindro.

b) 1/2 da altura do cilindro.

c) 2/3 da altura do cilindro.

d) 1/3 da altura do cilindro.

8. A prefeitura de certo município realizou um processo de licitação para a construção de 100 cisternas de placas de cimento para famílias da zona rural do município. Esse sistema de armazenamento de água é muito simples, de baixo custo e não poluente. A empreiteira vencedora estipulou o preço de 40 reais por m² construído, tomando por base a área externa da cisterna. O modelo de cisterna pedido no processo tem a forma de um cilindro com uma cobertura em forma de cone, conforme a figura abaixo.



Considerando que a construção da base das cisternas deve estar incluída nos custos, é correto afirmar que o valor, em reais, a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas será, no máximo, de:

Use: π = 3,14

a) 100.960

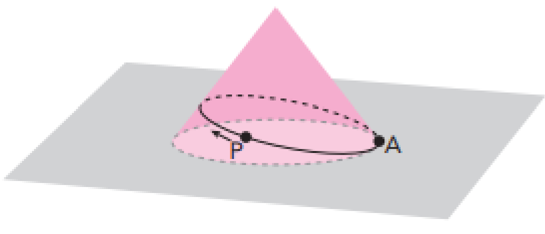
b) 125.600

c) 140.880

d) 202.888

e) 213.520

9. A figura a seguir representa a trajetória curva do ponto P sobre a superfície lateral de um cone circular reto cujo raio da base mede 10 cm e a geratriz, 60 cm. O ponto P inicia sua trajetória no ponto A, que pertence à circunferência da base, e dá uma volta completa em torno do cone, até retornar ao ponto A.



Com a planificação da superfície lateral do cone, é possível calcular o menor comprimento da trajetória percorrida por P, que corresponde, em centímetros, a:

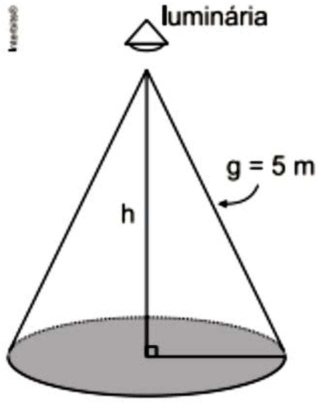
a) 50

b) 60

c) 18π

d) 20π

10. Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m², considerando $\pi \cong 3{,}14$, a altura h será igual a

a) 3 m.

b) 4 m.

c) 5 m.

d) 9 m.

e) 16 m

Gabarito

1. E

A expressão superfície de revolução garante que a figura represente a superfície lateral de um cone.

2. A

O volume do cone é $V = \frac{Sb.H}{3}$.

A área da base é $S_b = \pi.r^2$

Portanto, $S_b = 3.8^2 = 3.64 = 192$ m²

Logo, $V_{cone} = \frac{192.9}{3} = 576$ m³

Esse volume é transferido para um cubo de aresta 10 m. O cubo não ficará cheio. A água ficará na altura x. Portanto, o volume de água será de um paralelepípedo retângulo de dimensões 10 m, 10 m e x m

O volume do paralelepípedo é dado pelo produto das três dimensões. Sabemos que esse volume é 576 m³. Então, $V_{paralelepípedo} = 10.10.x = 576 \leftrightarrow x = 5,76$ m.

3. D

Como sabemos, na planificação de um cone, a medida do comprimento da base do cone corresponde ao comprimento do setor que o originou. Assim, como o raio da base do cone mede 4, temos que o comprimento da circunferência da base é 8π. Agora, para acharmos a geratriz do cone, que é o raio de setor circular na planificação, fazemos Pitágoras e encontramos G = 5. Ou seja, a geratriz do cone mede 5 cm. Assim, se o setor fosse uma circunferência completa, seu comprimento seria de 10π. Por fim, fazemos regra de 3, com as informações que temos:

10 π ______360º

8 π ______ x

Resolvendo a regra de 3, encontramos x = 288º.

4. A

O volume da peça é o volume do cilindro menos o volume do cone retirado.

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi.3^2.10 = 90\pi$$

$$V_{cone} = \frac{\pi(r')^2 h}{3} = \frac{\pi(3)^2 6}{3} = 18\pi$$

$$V_{cilindro} - V_{cone} = 90\pi - 18\pi = 72\pi = 216 \text{ cm}^3 = 216 \text{ mL} = 2,16 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

5. C

Sabemos que o volume do cone é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Assim:

$$100\pi = \frac{1}{3}\pi(5)^2 h$$

Resolvendo a equação, encontramos H = 12 cm.

6. B

Volume do cone = $\frac{\pi.5^2.6}{3} = 50\pi\ cm^3$

Volume do líquido do cilindro da figura 2 = 625π - 50π = 575π
Altura do líquido do cilindro da figura 2.

$\pi.5^2.h = 575\pi \Leftrightarrow h = 23$ cm.

Na figura 2, temos: H = 30 – h logo H = 7 cm

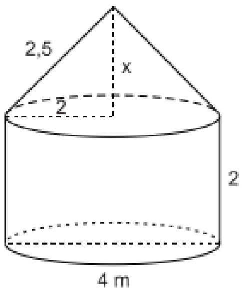
7. A

Como o volume de areia é o mesmo, segue que:

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r_{con}^2\cdot h_{con} = \pi\cdot r_{cil}^2\cdot h_{cil} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot(2R)^2\cdot h_{con} = R^2\cdot h_{cil}$$
$$\Leftrightarrow h_{con} = \frac{3}{4}\cdot h_{cil}.$$

8. E

Observe:



$X^2 + 2^2 = 2{,}5^2 \Leftrightarrow X = 1{,}5$ m

Área de uma cisterna = Área da sup. lateral do cone + área da superfície lateral do cilindro + área do círculo.
Área da Cisterna = π.2.2,5 + 2. π.2.2 + π.2²
Área da cisterna = 17π.m²
Área de 100 cisternas 1700π.m²
Valor das cisternas 40.1700.3,14 = 213.520 reais.

9. B

Primeiramente, precisamos lembrar que a planificação de um cone é um setor circular. Além disso, podemos calcular o ângulo desse setor se lembrarmos que o perímetro da base do cone é o comprimento do setor. Assim, sabendo que o raio da base é r = 10 cm e a geratriz é g = 60 cm, temos que:

Perímetro da base do cone é $2p = 2\pi 10 = 20\pi$.

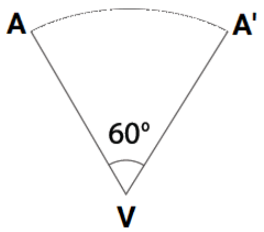
Por regra de 3, sabendo que 20π é, também, o comprimento do setor, podemos fazer:

$2\pi 60 = 120\pi$ ________ 360°

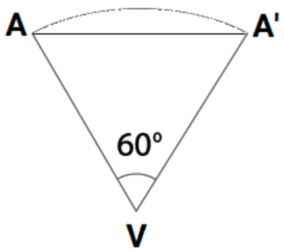
20π ________________ θ

Resolvendo a regra de 3, achamos θ = 60°.

Assim, planificando o cone, temos:



Com $\overline{AV} = 60$ cm e $\overline{A'V} = 60$ cm . Precisamos descobrir a menor distância entre A e A', que é o percurso do ponto P. Como sabemos, a menor distância entre dois pontos é sempre uma reta:



Como podemos reparar, o triângulo AA'V é equilátero, com $\overline{AA'} = 60$ cm.

10. B

Se a área a ser iluminada mede $28,26\ m^2$ e r é o raio da área circular iluminada, então

$\pi \cdot r^2 = 28,26 \Rightarrow r \cong \sqrt{\dfrac{28,26}{3,14}} \Rightarrow r \cong 3\ m.$

Portanto, como $g = 5\ m$ e $r = 3\ m$, segue que $h = 4\ m$.