Geometria Plana

Resumo

Triângulos

Condição de existência
A condição de existência de um triângulo é: Num triângulo ABC, em qualquer lado tem que ele é menor que a soma dos outros dois e maior que o módulo da diferença, ou seja:

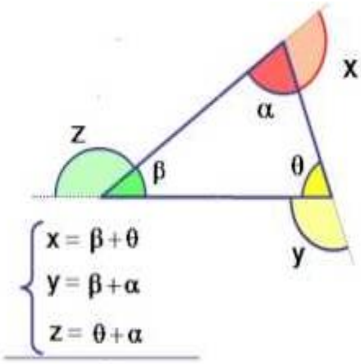
$$|b-c|<a<b+c$$

$$|a-c|<b<a+c$$

$$|a-b|<c<a+b$$

Lei angular
A soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º.

Teorema do ângulo externo
Seja ABC um triângulo qualquer, temos que o ângulo externo relativo a um vértice é igual a soma dos outros dois ângulos internos. Como no esquema:



Classificação do triângulo
Quanto aos lados:
→ Equilátero: Apresenta os três lados congruentes
→ Isósceles: Apresenta os dois lados congruentes e um lado diferente chamado de base (e ângulos da base iguais)
→ Escaleno: Apresenta os três lados diferentes entre si

Quanto aos ângulos
→ Retângulo: Possui um ângulo interno de 90 graus (reto) e dois ângulos agudos
→ Acutângulo: Possui três ângulos internos agudos (menor que 90 graus)
→ Obtusângulo: Possui um ângulo obtuso (maior que 90 graus) e dois ângulos agudos

Área do Triângulo
Temos algumas maneiras de calcular a área do triângulo. Abaixo, apresento-lhes duas fórmulas:

$$S_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} \text{ ou } S_{\Delta} = \frac{a \times c \times sen\theta}{2}$$

Em que b = base, h = altura, a e c = lados do triângulo e θ = ângulo formado pelos lados a e c.

Semelhança

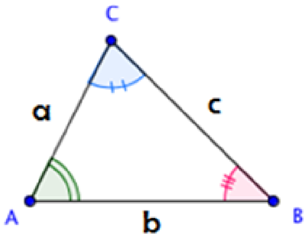
Pegue uma figura e a aumente. Ou a diminua. Temos 3 figuras com o “mesmo” desenho, só que de tamanhos diferentes. Dizemos, assim, que elas são semelhantes entre si.
Ex.: O logo do descomplica em tamanhos diferentes.

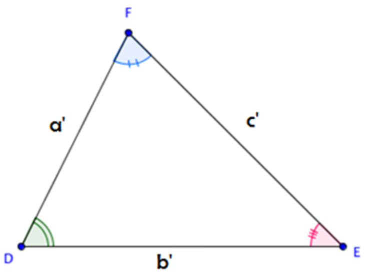
Agora, vamos formalizar esse conceito.

Semelhança de polígonos:
Polígonos são semelhantes quando possuem:
- Ângulos respectivamente iguais.
- Lados respectivamente proporcionais.

Vamos estudar o caso mais clássico de semelhança: Triângulos.

Semelhança de triângulos:
Dois triângulos são semelhantes se possuírem os ângulos iguais. Na verdade, se garantirmos que 2 ângulos são iguais, já podemos dizer que são semelhantes, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante igual a 180 graus.





Temos que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Vale ressaltar que suas respectivas alturas também são proporcionais!

Além disso, temos alguns casos em que a semelhança entre triângulos também ocorre:
Caso LAL: dois triângulos que possuem dois lados proporcionais e o ângulo formado por eles iguais são semelhantes.

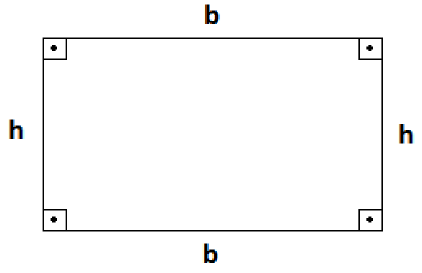
Caso LLL: dois triângulos que possuem dois lados correspondentes proporcionais são semelhantes.

Quadriláteros

Quadriláteros são polígonos de 4 lados e que possuem certas características especiais:
- Soma dos ângulos internos é igual a 360°.
- Possuem apenas duas diagonais.

Vamos conhecer os quadriláteros mais famosos, como quadrado, retângulo, trapézio, entre outros.

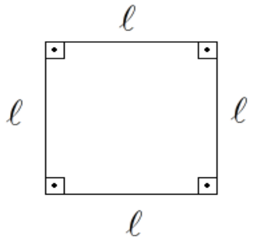
Retângulo:
É o quadrilátero equiângulo, ou seja, possui os quatro ângulos iguais a 90°



Área: S = b.h

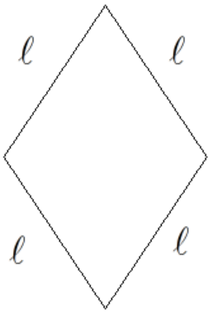
Obs.: Uma propriedade interessante do retângulo é que suas diagonais têm o mesmo comprimento, ou seja, $\overline{AC} = \overline{BD}$

Quadrado:
É um quadrilátero regular, ou seja, possui os quatro lados e os quatro ângulos iguais.



Área do quadrado: $S = l^2$

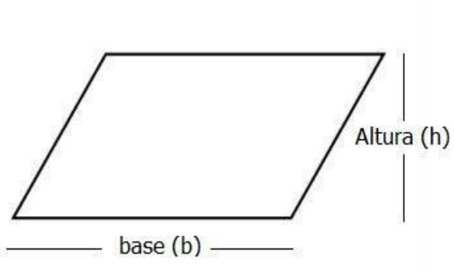
Losango:
É o quadrilátero equilátero, ou seja, possui os quatro lados iguais.



Área: Sendo D a diagonal maior e d a diagonal menor, temos que $S = \dfrac{D \times d}{2}$

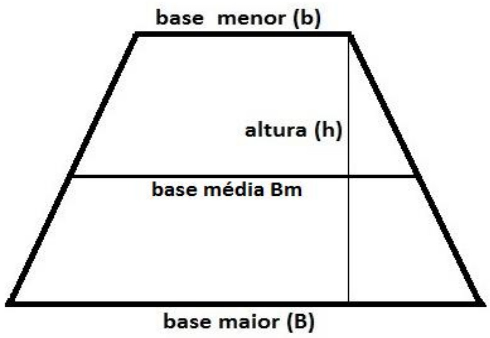
Obs.: Suas diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos, dividindo o losango em quatro triângulos retângulos iguais.

Paralelogramo:
É o quadrilátero que possui os lados paralelos.



Área: $S = b \times h$
OBS.: Os lados opostos são congruentes, assim como os ângulos opostos.
Os ângulos adjacentes são suplementares.
As diagonais se cruzam no ponto médio.

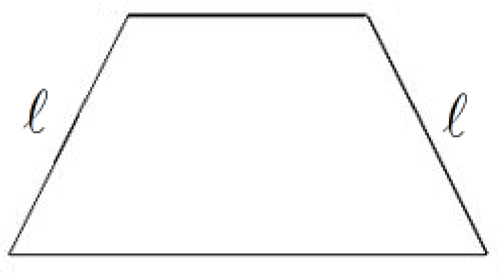
Trapézio:
É um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos que são chamados de bases.



A base média de um trapézio pode ser calculada através da semi-soma de suas bases, ou seja, $B_m = \dfrac{B+b}{2}$

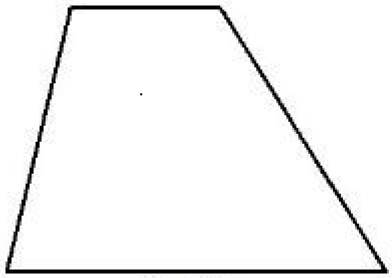
Área: $S = \left(\dfrac{B+b}{2}\right)h = B_m \times h$
Existem 3 tipos de trapézios:

Trapézio isósceles:
É aquele cujos lados não paralelos são congruentes.

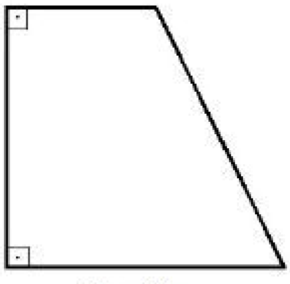


Obs.: Os ângulos da base também são congruentes.

Trapézio escaleno:
É aquele cujos lados não paralelos têm comprimentos distintos.

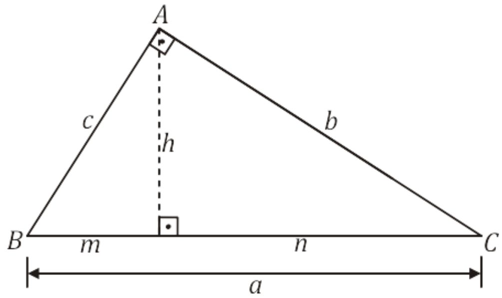


Trapézio **retângulo**:
É aquele em que a altura é o próprio lado.



Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Quando trabalhamos em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide a base do triângulo em dois segmentos, chamados de projeções dos catetos.



a – Hipotenusa
b – Cateto
c – Cateto
h – Altura
m e n – Projeções dos catetos

Podemos ver que temos triângulos semelhantes entre si. Dessas semelhanças, surgem as relações métricas do triângulo retângulo.

Projeções X Altura:

$$\Delta ABH \sim \Delta AHC \rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \rightarrow h^2 = m.n$$

Projeções X Cateto X Hipotenusa:

$$\Delta ABC \sim \Delta AHC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a.m$$

$$\Delta ABC \sim \Delta AHB \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a.n$$

Catetos X Hipotenusa X Altura:

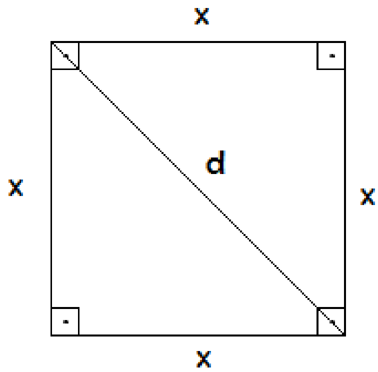
$$\Delta ABC \sim \Delta AHC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{n} \rightarrow a.h = b.c$$

Teorema de Pitágoras:
Somando as equações do item 2, temos:

$$\begin{cases} b^2 = m.n \\ c^2 = a.n \end{cases} \rightarrow \quad b^2 + c^2 = a.n + a.m = a(m+n) = a.a = a^2$$

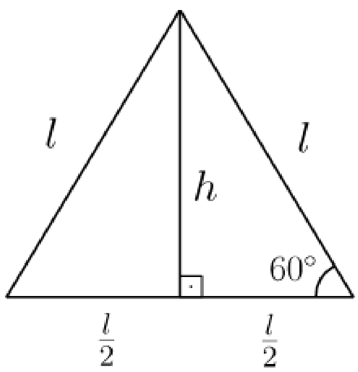
Daí temos a fórmula mais famosa da geometria: $a^2 = b^2 + c^2$

Observação: É do teorema de Pitágoras que vem a fórmula da diagonal do quadrado.



$d^2 = x^2 + x^2$
$d^2 = 2x^2$
$d = x\sqrt{2}$

Temos também a fórmula para a altura de um triângulo equilátero.



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

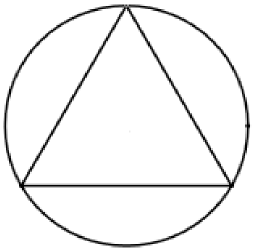
Polígonos Inscritos e Circunscritos

Apótema: Em um polígono regular, o apótema é o segmento de reta que parte do centro e vai até o ponto médio de um lado. Além disso, essa reta é perpendicular a um dos lados.

Relação entre apótemas e lados de figuras inscritíveis e circunscritíveis
Sendo L:Lado; A:Apótema e R:Raio temos

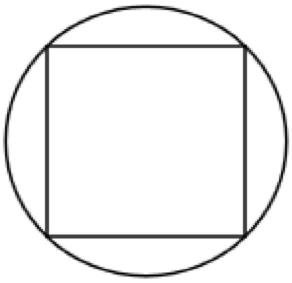
Inscritas
Todo polígono regular pode ser inscrito (posto dentro) numa circunferência. Observe que todos os vértices dos polígonos regulares estão em contrato com a circunferência.

Triângulo equilátero



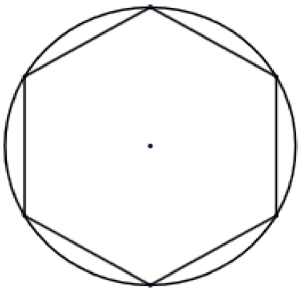
$$L = R\sqrt{3}$$
$$A = \frac{R}{2}$$

Quadrado



$$L = R\sqrt{2}$$
$$A = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

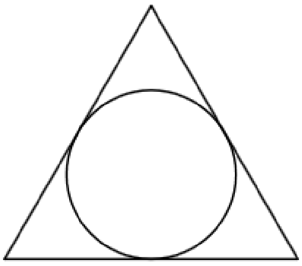
Hexágono



$$L = R$$
$$A = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

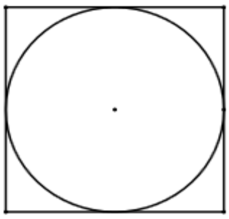
Circunscritas:
Todo polígono regular é circunscrito (fica por fora) da circunferência. A circunferência é tangente (toca) aos lados do polígono.

Triângulo equilátero



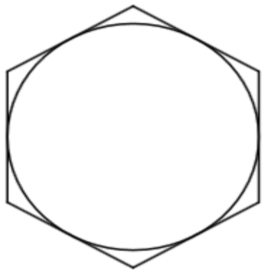
$$A = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$
$$R = A$$

Quadrado



$$A = \frac{L}{2}$$
$$R = A$$

Hexágono



$$A = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$R = A$$

Polígonos

Ângulos Internos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Ângulos Externos:

$$a_e = \frac{360°}{n} \qquad S_e = 360°$$

Número de Diagonais:

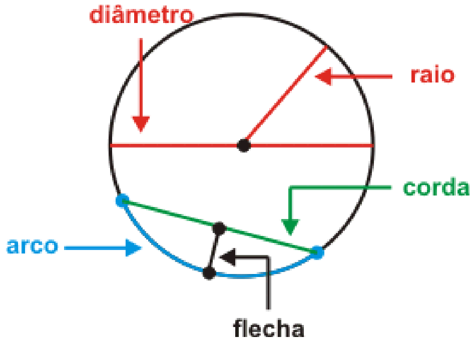
$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos no plano que estão à mesma distância em relação a um ponto central. Esta distância é chamada de raio.

Obs: Circunferência ≠ Círculo!
Círculo é toda a região do plano delimitado por uma circunferência.
Circunferência é apenas a linha que dá forma à figura.

Elementos de uma circunferência:



Centro: ponto equidistante de todos os pontos da circunferência.
Raio: distância entre o centro e qualquer ponto da circunferência.

Arco: segmento da circunferência delimitado por dois pontos.
Corda: segmento de reta que une dois pontos da circunferência.

Obs: O diâmetro é a maior corda de uma circunferência! Lembrando:
diâmetro = 2.Raio

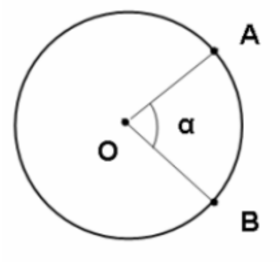
Flecha: segmento de reta que liga o ponto médio da corda ao ponto médio do seu arco correspondente.

Comprimento da circunferência e de arcos:

Dado uma circunferência com centro O e raio R, seu comprimento é dado pela seguinte fórmula:

$$C = 2\pi R$$

Para se calcular o comprimento de um arco de circunferência, basta fazer regra de 3 relacionando o comprimento angular do arco (α) e o comprimento angular de toda circunferência (360 graus ou 2π radianos).

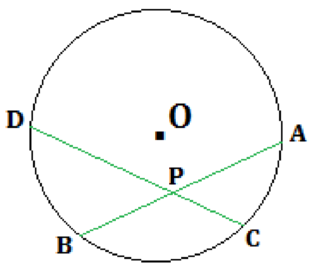


Comprimento	Ângulo
X	α
2πR	360 graus

$$x = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

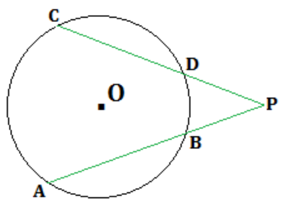
Relações métricas:

a) Duas cordas



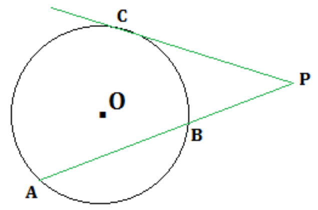
$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$$

b) Duas retas secantes:



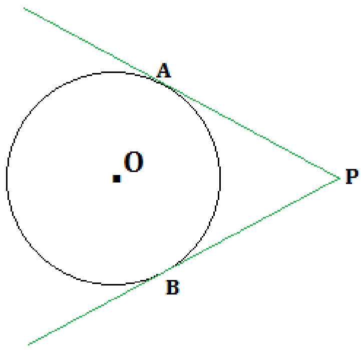
$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$$

c) Uma reta tangente e uma secante



$$\overline{PA}.\overline{PB} = (\overline{PC})^2$$

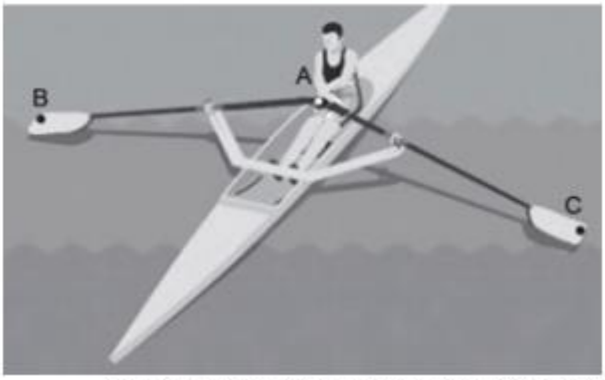
d) Duas retas tangentes



$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Exercícios

1. O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

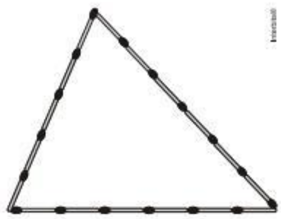


Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo BÂC tem medida de 170°. O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é

a) retângulo escaleno.
b) acutângulo escaleno.
c) acutângulo isósceles.
d) obtusângulo escaleno.
e) obtusângulo isósceles.

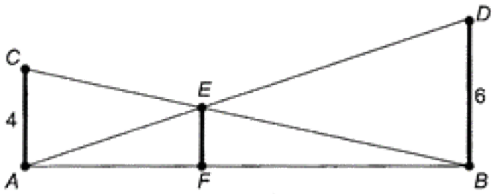
2. Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3
b) 5
c) 6
d) 8
e) 10

3. O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m

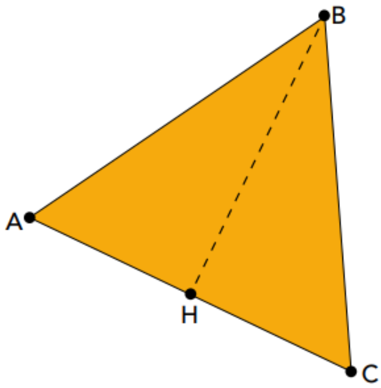
b) 2 m

c) 2,4 m

d) 3 m

e) $2\sqrt{6}$ m

4. No triângulo equilátero ABC, H corresponde ao ponto médio do lado AC. Desse modo, a área do triângulo ABH é igual à metade da área de ABC.



Sendo W o perímetro do triângulo ABH e Y o perímetro do triângulo ABC, uma relação correta entre W e Y é:

a) $0 < W < \frac{Y}{2}$

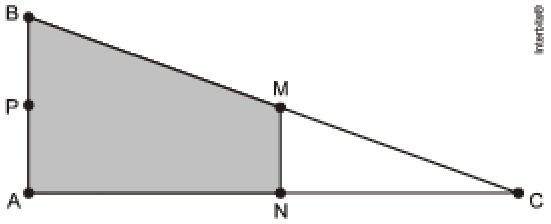
b) $W = \frac{Y}{2}$

c) $\frac{Y}{2} < W < Y$

d) $W = Y$

e) $Y = \frac{W}{2}$

5. Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

a) à mesma área do triângulo AMC.

b) à mesma área do triângulo BNC.

c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.

d) ao dobro da área do triângulo MNC.

e) ao triplo da área do triângulo MNC.

6. Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

a) 14

b) 12

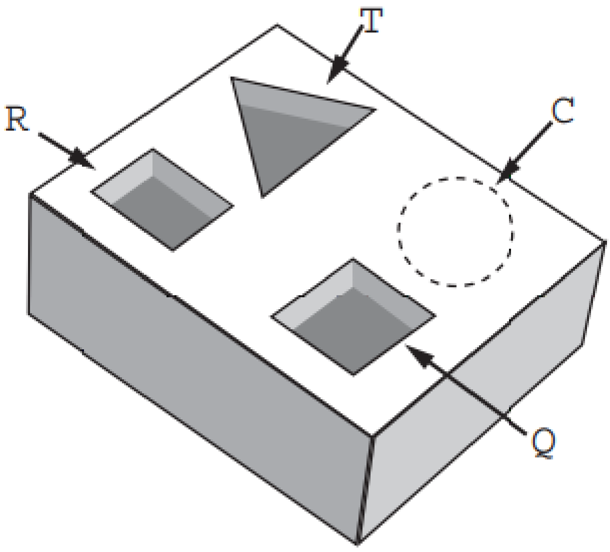
c) $7\sqrt{2}$

d) $6+4\sqrt{2}$

e) $6+2\sqrt{2}$

7. Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C).

O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.

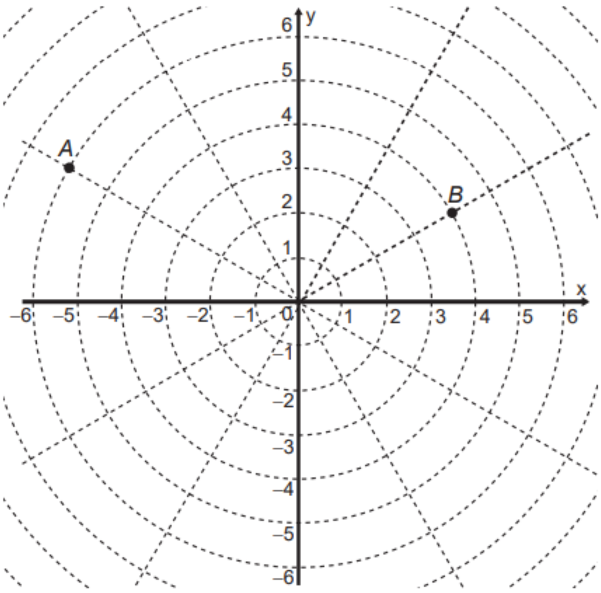


Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.

Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

8. Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0, 0). Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal. Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto 8 até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a

a) $\frac{2.\pi.1}{3}+8$

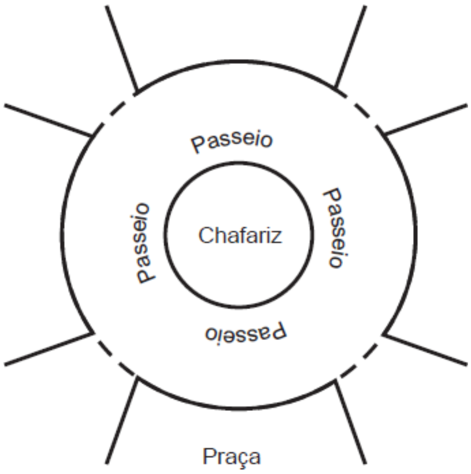
b) $\frac{2.\pi.2}{3}+6$

c) $\frac{2.\pi.3}{3}+4$

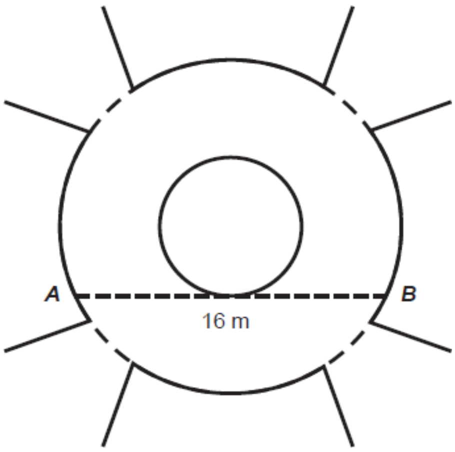
d) $\frac{2.\pi.4}{3}+2$

e) $\frac{2.\pi.5}{3}+2$

9. A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB: 16 m.

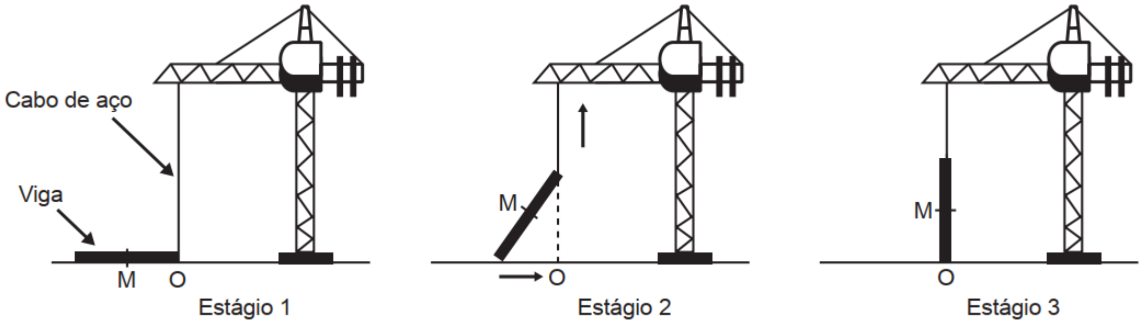


Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

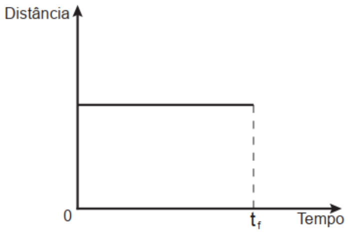
A medida encontrada pelo engenheiro foi

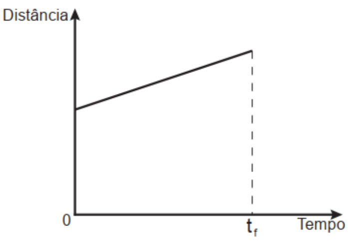
a) 4π
b) 8π
c) 48π
d) 64π
e) 192π

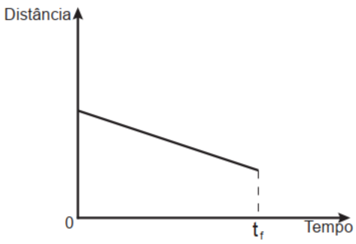
10. Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicial mente no solo.

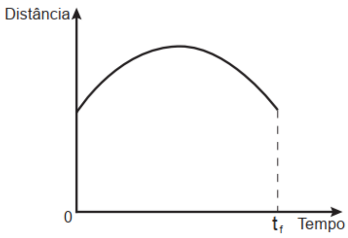


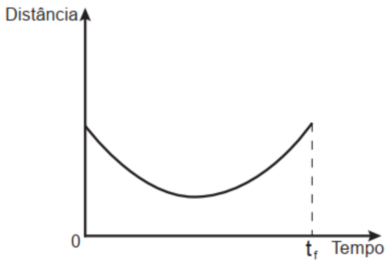
Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo t = 0 (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga. O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre t = 0 e t_f, é:

a)


b)


c)


d)


e)


Gabarito

1. E

Sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $90° < B\hat{A}C < 180°$, podemos afirmar que ABC é obtusângulo isósceles.

2. A

Sejam a e b as quantidades de palitos em cada um dos outros dois lados do triângulo. Tem-se que $\{a, b\} \in \{\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$. Mas, pela condição de existência de um triângulo, só pode ser $\{a, b\} \in \{\{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}\}$ e, portanto, a resposta é 3.

3. C

É fácil ver que os triângulos AEC e BED são semelhantes. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{4}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF} + \overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{2+3}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{AF} + \overline{BF}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Além disso, como os triângulos AEF e ABD também são semelhantes, vem

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BD}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{AF} + \overline{BF}} = \frac{\overline{EF}}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow \overline{EF} = 2{,}4 \text{ m}.\end{aligned}$$

4. C

Sendo o lado do triângulo igual a $"a"$, pode-se escrever:

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{BH}^2 \Rightarrow \overline{BH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &Y = a + a + a = 3a \\ &W = a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a + 0{,}5a + \frac{1{,}73}{2}a = 2{,}366a \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \frac{Y}{2} < W < Y$$

5. E

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow S_{ABC} = 4.S_{MNC}$$

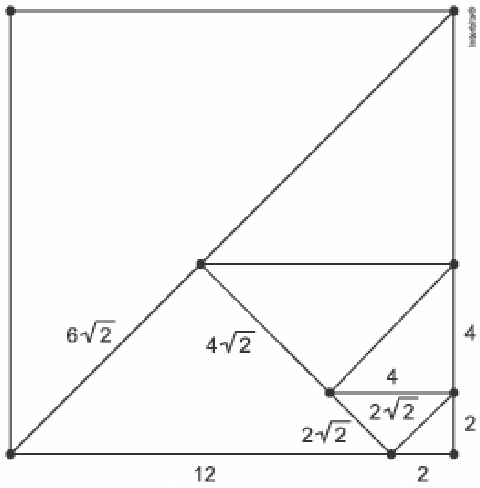
$S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{MNC} =$

$S_{ABMN} = 4.S_{MNC} - S_{MNC}$

$S_{ABMN} = 3.\ S_{CMN}$ (TRIPLO)

6. A

É fácil ver que as hipotenusas dos triângulos retângulos crescem segundo uma progressão geométrica de primeiro termo $2\sqrt{2}\,\text{cm}$ e razão $\sqrt{2}$.



Portanto, de acordo com a figura, a resposta é $12+2=14\,\text{cm}$.

7. B

Usando as aproximações fornecidas, concluímos que os diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito a T medem, respectivamente, $4\,\text{cm}$ e $8\,\text{cm}$. Em consequência, os exemplares I e V não satisfazem as condições, pois T cabe em V e I cabe em T.
Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras concluímos facilmente que a diagonal de R mede $5\,\text{cm}$. Em que os diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito a R medem, respectivamente, $3\,\text{cm}$ e $5\,\text{cm}$. Portanto, os exemplares III e IV também não satisfazem as condições restando apenas o exemplar II.

8. A

O menor caminho, por inspeção, corresponde ao comprimento de 8 segmentos de reta de medida igual a 1, somado ao comprimento do arco definido pelo ângulo central de $\frac{4\pi}{6}\cdot 1=\frac{2\pi}{3}\text{rad}$ e raio 1, ou seja, $\frac{2\pi}{3}+8$.

9. D

Sejam O e M, respectivamente, o centro do chafariz e o ponto médio do segmento de reta AB. Logo, se $R=\overline{OB}$ é o raio da praça e $r=\overline{OM}$ é o raio do chafariz, então, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$R^2=r^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2-r^2=64.$$

A área do passeio é $\pi\cdot(R^2-r^2)=64\pi\,\text{m}^2$.

10. A

Entre os estágios 1 e 3, em qualquer instante, o segmento de reta MO corresponde à mediana do triângulo retângulo cuja hipotenusa tem comprimento igual ao comprimento da viga. Desse modo, como a mediana mede metade da hipotenusa, e esta é constante, segue que a resposta é o gráfico da alternativa [A].