Função composta

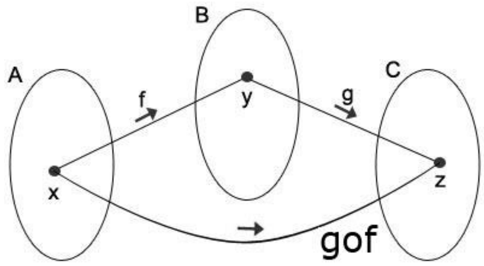
Resumo

Função composta

Função composta é aquela que tem como abscissa a imagem de outra função.

$$h(x) = g[f(x)] = g \circ f$$

Ou seja, a abscissa de g(x) é a imagem de f(x).
Observe como isso funciona:



Condição de existência

Para que haja a função composta da função **g** com a função **f**, o domínio de **g** deve ser igual ao contradomínio de **f**.
Repare que no esquema anterior, f tem como domínio o conjunto A e contradomínio o conjunto B. Já a função g tem como domínio o conjunto B e contradomínio o conjunto C. Ou seja, o domínio de **g** é igual ao contradomínio de **f**.

Determinação da função composta

Partimos do exemplo de duas funções f(x) = x + 1 e g(x) = 2x
Calcular f[g(x)] significa encontrar a lei de formação da função composta de g com f. Tendo como base as funções do exemplo, usamos o passo a passo abaixo:

- Partimos de f(x) = x + 1
- Em seguida, substituímos x por g(x):

$$f[g(x)] = g(x) + 1$$

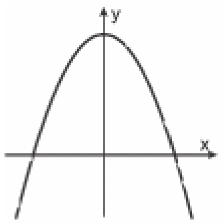
- Enfim, como g(x) = 2x, temos:

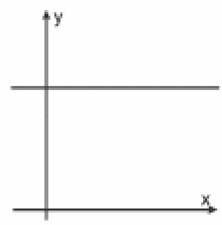
$$g[f(x)] = 2x + 1.$$

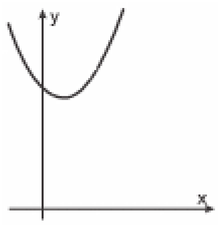
Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

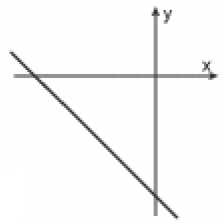
Exercícios

1. A função f tem lei de formação f(x) = 3 − x e a função g tem lei de formação g(x) = 3x². Um esboço do gráfico da função f(g(x)) é dado por:

a) 

c) 

b) 

d) 

2. Em uma disciplina o número de alunos reprovados por ano é descrito pela função g(t), em que t é dado em anos. Considerando $f(g(t)) = \sqrt{2t+1}$ e $f(t) = \sqrt{t-2}$ é possível afirmar que a função g(t) é:

a) $g(t) = 2t + 3$

b) $g(t) = \sqrt{2t+3}$

c) $g(t) = 2t - 3$

d) $g(t) = \sqrt{2t-3}$

3. Considere as funções $f(x) = \frac{x^2}{2} + b$ e $g(x) = x + k$ com b e k, números reais. Sabendo que $f\left(g(-5)\right) = g(-2)$ e que $g\left(f(-2)\right) = 12$, o valor de f(-4) é igual a:

a) 14

b) 11

c) 10

d) 7

e) 3

4. Sabe-se que $f\left(\frac{2x}{3}-3\right)=x+1$. Desta forma, pode-se afirmar que f(-1) vale:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

5. Seja a função $h(x)$ definida para todo número real x por

$$h(x)=\begin{cases}2^{x+1} & \text{se} \quad x \le 1,\\ \sqrt{x-1} & \text{se} \quad x>1.\end{cases}$$

Então, $h(h(h(0)))$ é igual a:

a) 0
b) 2
c) 4
d) 6
e) 8

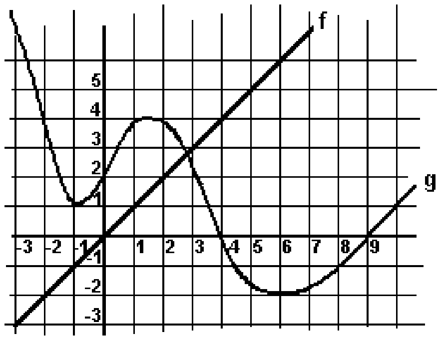
6. Considere a função afim f(x) = ax + b definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que f(4) = 2, podemos afirmar que $f\left(f(3)\right)+f(5))$ é igual a:

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

7. Dadas as funções f(x) = 2x − 1 e g(x) = x² + 3x + c, o maior valor inteiro de c tal que a equação $g\left(f(x)\right)=0$ apresente raízes reais é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

8. Na figura estão representados os gráficos de uma função polinomial g, e da função f(x) = x. A partir da figura pode-se determinar que g(f(-1)) vale aproximadamente:



a) -2

b) 4

c) 0

d) -1

e) 1

9. Sejam as funções f e g de R em R tais que f(x) = 2 x + 1 e f(g(x)) = 2 x^2 - 9, o valor de g(- 2) é igual a:

a) 0

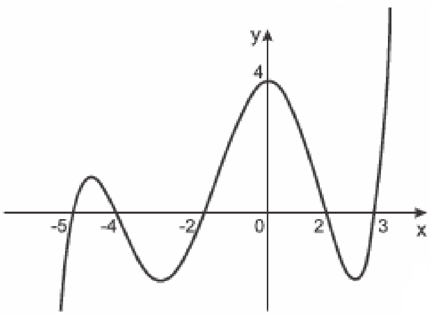
b) - 1

c) 1

d) - 2

e) 3

10. Considere a função real g, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo $g \circ g$ a função composta de g com g, então o valor de $(g \circ g)(-2)$ é



a) 0

b) 4

c) 2

d) -2

e) -5

Gabarito

1. A

Tem-se que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 3 - 3x^2 \\ &= -3(x^2 - 1) \\ &= -3(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

A função $f \circ g$ é quadrática, seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e seus zeros são -1 e 1.

Portanto, segue que só pode ser a alternativa [A].

2. A

Aplicando $g(t)$ em $f(t)$ temos:

$$f(t) = \sqrt{t-2} \Rightarrow f(g(t)) = \sqrt{g(t)-2} \Leftrightarrow \sqrt{2t+1} = \sqrt{g(t)-2}$$

Elevando ambos lados ao quadrado para extrair as raízes temos:

$$2t + 1 = g(t) - 2 \Rightarrow g(t) = 2t + 3$$

3. B

Se $g(f(-2)) = 12$, então

$$\frac{(-2)^2}{2} + b + k = 12 \Leftrightarrow b = 10 - k.$$

Daí, sendo $f(g(-5)) = g(-2)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{(-5+k)^2}{2} + 10 - k = -2 + k &\Leftrightarrow k^2 - 14k + 49 = 0 \\ &\Leftrightarrow (k-7)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 7. \end{aligned}$$

Portanto, vem $b = 3$ e, assim, encontramos

$$f(-4) = \frac{(-4)^2}{2} + 3 = 11$$

4. A

Calculando:

$$f\left(\frac{2}{3}x - 3\right) = x + 1$$

$$\left(\frac{2}{3}x - 3\right) = -1 \Rightarrow x = 3$$

$$f\left(\frac{2}{3}x - 3\right) = f(3) = 3 + 1 \Rightarrow f(-1) = 4$$

5. C

Desde que $h(0) = 2^1 = 2$ temos, $h(2) = \sqrt{2-1} = 1$ e, portanto, vem $h(1) = 2^{1+1} = 4.$

Portanto, a resposta é
$h(h(h(0))) = h(h(2)) = h(1) = 4.$

6. D

Tem-se que $f(4) = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 2.$ Além disso, como $f(3) = 3a + b$ e $f(5) = 5a + b,$ vem

$f(3) + f(5) = 3a + b + 5a + b = 2(4a + b) = 2 \cdot 2 = 4.$

Portanto, segue que $f(f(3) + f(5)) = f(4) = 2.$

7. B

Tem-se que

$$g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + 3(2x-1) + c = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2x + c - 2 = 0.$$

A equação terá raízes reais desde que seu discriminante seja positivo, isto é,

$$2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (c-2) > 0 \Leftrightarrow 4(c-2) < 1$$
$$\Leftrightarrow c < 2 + \frac{1}{4}.$$

Portanto, o maior valor inteiro de c tal que a equação $g(f(x)) = 0$ apresente raízes reais é $2.$

8. E

Como, na questão, é pedido para calcularmos g(f(-1)), precisamos ir por partes. Primeiro, temos que calcular f(-1). Olhando o gráfico da função f, vemos que f(-1) = -1. Agora, temos que calcular g(-1). Mais uma vez, pelo gráfico, vemos que g(-1) = 1. Ou seja, g(f(-1)) = 1.

9. B

$2g(x) + 1 = 2x^2 - 9$
$g(x) = x^2 - 5$
$g(-2) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$

10. B

De acordo com o gráfico, temos $g(-2) = 0.$ Logo, segue que

$(g \circ g)(-2) = g(g(-2)) = g(0) = 4.$