Equações trigonométricas

Resumo

Equação trigonométrica

As equações trigonométricas são equações contendo uma ou mais funções trigonométricas da variável trigonométrica. Resolver a equação significa encontrar os valores dos arcos cujas funções trigonométricas tornam a equação verdadeira.

Exemplo: $sen(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sabemos que o seno de 60° é justamente $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo, assim, uma das soluções. Porém o seno de 120° também vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Repare que existem infinitos valores de x que satisfazem a equação, visto que podemos dar infinitas voltas no ciclo trigonométrico. Por isso, que, geralmente, restringimos o intervalo das respostas em uma única volta, ou seja $0 < x < 2\pi$.

Não existe um método único para resolver todas as equações trigonométricas. No entanto, a maioria delas pode ser transformada em outras mais simples, porém equivalentes, ou seja, de mesma solução.

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui]

Exercícios

1. Se p e q são duas soluções da equação $2sen^2x - 3senx + 1 = 0$ tais que $sen(p) \neq sen(q)$, então o valor da expressão $sen^2 p - \cos^2 q$ é igual a:

a) 0.

b) 0,25.

c) 0,50.

d) 1.

2. Seja x real tal que cos x = tg x. O valor de sen x é:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

3. Quantas soluções a equação $\cos(2x-1) = 0$ tem no intervalo [0,5]? (Lembre-se que π = 3,14).

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 0

4. Sendo $senx + \cos x = \frac{1}{5}$, determine os possíveis valores de $senx$.

a) $\frac{3}{5}$ ou $\frac{4}{5}$

b) $-\frac{3}{5}$ ou $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{3}{5}$ ou $-\frac{4}{5}$

d) $\frac{3}{5}$ ou $-\frac{4}{5}$

e) $-\frac{3}{5}$ ou $\frac{5}{4}$

5. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\cos\sec(x) - \cot g(x) = 2sen(x)$.

a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pm\frac{2\pi}{3} \right\}$

c) $S = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pm 2\pi + 2k\pi \}$

d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

e) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

6. Seja x tal que sen x + cos x = 1. Determine todos os valores possíveis para sen 2x + cos 2x.

a) 0

b) 1

c) -1

d) 1 e -1

e) 0 e -1

7. Resolva a equação sen(x) - sen³(x) = 0.

a) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

8. A quantidade de soluções que a equação trigonométrica $sen^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ admite no intervalo $[0, 3\pi]$ é

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

9. A soma das soluções da equação trigonométricas $\cos 2x + 3\cos x = -2$, no intervalo $[0, 2\pi]$ é

a) π

b) 2π

c) 3π

d) $\frac{5\pi}{3}$

e) $\frac{10\pi}{3}$

10. Sabendo-se que $sen^2x - 3senx\cos x + 2\cos^2 x = 0$ e que $\cos x \neq 0$, temos que os possíveis valores para tg(x) são:

a) 0 e -1

b) 0 e 1

c) 1 e 2

d) -1 e -2

e) -2 e 0

Gabarito

1. B

Observe:

$$2sen^2x - 3sen\,x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\Delta = 1$$

$$senx = \frac{-(-3) \pm 1}{2 \cdot 2} \left\langle \begin{array}{l} senx = 1 \\ senx = 1/2 \end{array} \right.$$

$$sen^2p - cos^2q = sen^2p - (1 - sen^2q) = sen^2p + sen^2q - 1 = 1^2 + (1/2)^2 - 1 = 1/4 = 0,25.$$

2. C

Observe:

Sabendo que $tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $cos^2 x = 1 - sen^2 x$, vem

$$\begin{aligned} cos\,x = tg\,x \Rightarrow cos\,x &= \frac{sen\,x}{cos\,x} \\ &\Rightarrow cos^2 x = sen\,x \\ &\Leftrightarrow sen^2 x + sen\,x = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(sen\,x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1 \\ &\Leftrightarrow sen\,x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\Rightarrow sen\,x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \end{aligned}$$

3. C

Observe:

- A função tem período π.
- o primeiro zero é em π /4+1/2 = 1,29

Assim:

1,29

1,29+ π /2=2,86

2,86+ π /2=4,43

4,43+ π /2=6

3 soluções.

4. **B**
Observe:

$$\begin{cases} \text{senx} + \cos x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{5} - \text{senx} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}^2 x + \left(\frac{1}{5} - \text{senx}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x + \frac{1}{25} - \frac{2}{5}\text{senx} + \text{sen}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{sen}^2 x - \frac{2}{5}\text{senx} - \frac{24}{25} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\text{sen}^2 x - 10\text{senx} - 24 = 0 \Rightarrow \text{senx} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(50)(-24)}}{100} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4800}}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{senx} = \frac{10 \pm \sqrt{4900}}{100} = \frac{10 \pm 70}{100} \Rightarrow \begin{cases} \text{senx} = \frac{10 - 70}{100} = \frac{-60}{100} = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5} \\ \text{senx} = \frac{10 + 70}{100} = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

5. **A**
Observe:

$$\text{cossec}\, x - \text{cotg}\, x = 2\text{senx} \Rightarrow \frac{1}{\text{senx}} - \frac{\cos x}{\text{senx}} = 2\text{senx} \Rightarrow 2\text{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in Z \end{cases} \\ \cos x = \frac{1+3}{4} = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \notin \text{Domínio}(\text{cossec}\, x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

6. **D**
Observe:

$(\text{sen } x + \cos x)^2 = (1)^2$
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\text{sen } x \cos x = 1$
$\text{sen } 2x = 2\text{sen } x \cos x = 0 \rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$
$\text{sen } x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow \cos 2x = 1 \rightarrow \text{sen} 2x + \cos 2x = 1$
$\cos x = 0 \rightarrow \text{sen } x = 1 \rightarrow \cos 2x = -1 \rightarrow \text{sen} 2x + \cos 2x = -1$

7. **C**
Observe:

Solução: $\text{sen } x\,(1 - \text{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow \text{sen } x \,.\, \cos^2 x = 0$
$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = k\pi$
$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

8. D

Sabendo que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, para todo y real, vem

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 1 = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Para $x \in [0, 3\pi]$, a equação $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ possui as raízes $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ e $\frac{8\pi}{3}$, enquanto que a equação $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ possui as raízes $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$. Desse modo, a resposta é 6.

9. C

$$\begin{aligned}&\cos 2x + 3\cos x = -2 \Rightarrow\\ &\Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow 2\cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0\end{aligned}$$

Temos, então uma equação do segundo grau na incógnita $\cos x$.

Resolvendo esta equação, temos:

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Logo, a soma de suas raízes será dada por:

$$\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 3\pi$$

10. C

Dividindo toda a equação por $\cos^2 x$, temos:

$$\frac{sen^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3sen(x)\cos(x)}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow tg^2 x - tgx + 2 = 0$$

Ou seja, caímos em uma equação de segundo grau cujas raízes são 1 e 2.