Regra de Cramer

Resumo

Consideramos o sistema: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$

Suponhamos que a ≠ 0. Observamos que esse sistema pode ser escrito pela forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Esse sistema é possível determinado quando o determinante $D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ for diferente de zero.

As soluções desse sistema através da **Regra de Cramer** são dadas por:

$$x=\frac{D_x}{D}$$

$$y=\frac{D_y}{D}$$

Onde,

$D_x=\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$, em que trocamos a coluna referente aos coeficientes de “x” pela coluna de resultados.

$D_y=\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$, em que trocamos a coluna referente aos coeficientes de “y” pela coluna de resultados.

Exemplo: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x-2y-2z=-1 \\ x-y+z=-2 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-8$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-8$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$y = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$z = \frac{8}{-8} = -1$$

Obs: Se D = 0 não poderemos discutir o sistema.

Exercícios

1. Pedro e André possuem, juntos, 20 cartões colecionáveis. Em uma disputa entre ambos, em que fizeram apostas com seus cartões, Pedro quadriplicou seu número de cartões, enquanto André ficou com apenas 2 / 3 do número de cartões que possuía inicialmente. Dessa forma, o número de cartões que Pedro ganhou na disputa foi

a) 6.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

2. Utilizando a Regra de Cramer, determine o valor da incógnita y no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+3y+3z=18 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 5x+4y+2z=27 \end{cases}$$

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

3. Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andreia pesam 123 kg;
- Andreia e Bidu pesam 66 kg.

O peso de cada uma deles é:

a) Andreia pesa 51 kg, Bidu 15 kg e Carlos 72 kg.

b) Andreia pesa 50 kg, Bidu 15 kg e Carlos 72 kg.

c) Andreia pesa 51 kg, Bidu 12 kg e Carlos 72 kg.

d) Andreia pesa 51 kg, Bidu 15 kg e Carlos 70 kg.

4. Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de a + b é:

a) -1

b) 4

c) 9

d) 14

e) 19

5. Sabemos que os sistemas possuem uma representação matricial formada pelos coeficientes numéricos de cada incógnita. Por exemplo, o sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + jy + kz = l \end{cases}$$

possui a seguinte representação matricial:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d \\ h \\ l \end{vmatrix}$$

O sistema também pode ser representado pela matriz incompleta formada somente pelos coeficientes numéricos das incógnitas.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

Essa representação de sistemas na forma de matrizes permite a utilização da Regra de Cramer no cálculo das incógnitas do sistema.
Com base nas informações, calcule os valores de x, y e z do sistema de equações

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = -1 \\ x - y + z = -2 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

utilizando a Regra de Cramer.

a) (1, 2, -1)

b) (1, 2, 1)

c) (1, -2, 1)

d) (-1, 2, 1)

e) (-1, 2, -1)

6. Qual o conjunto solução do sistema linear?

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 14 \end{cases}$$

Resolva por Regra de Cramer.

a) (0,5,-1)

b) (0,5,1)

c) (0,-5,-1)

d) (5,0,-1)

e) (5,0,1)

7. Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1 400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, qual o número de sócios e não sócios que compareceram ao show.

a) 100 sócios e 80 não sócios.

b) 80 sócios e 120 não sócios.

c) 120 sócios e 160 não sócios.

d) 120 sócios e 80 não sócios.

e) 120 sócios e 100 não sócios.

8. Qual o conjunto solução do sistema linear?

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$

Resolva por Regra de Cramer.

a) (1/5, 3/5)

b) (3/5, 1/5)

c) (-3/5, 7/5)

d) (1/5, -3/5)

e) (-3, 1)

9. Qual o conjunto solução do sistema linear?

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 0 + 5z = 0 \\ -x + 2y + 0 = 4 \end{cases}$$

Resolva por Regra de Cramer.

a) (3/4, 1, -5/2)

b) (-5/2, 3/4, 1)

c) (3/4, 1, 5/2)

d) (5/2, 3/4, 1)

e) (-5/2, 3/4, -1)

10. Qual o conjunto solução do sistema linear?

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Resolva por Regra de Cramer.

a) (3,-1)

b) (-1, 3)

c) (3, 1)

d) (1, 3)

e) (-3, -1)

Gabarito

1. A

Equacionando e resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} p + a = 20 \\ 4p + \dfrac{2}{3}a = 20 \end{cases}$$

Por Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & \dfrac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} - 4 = \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$D_p = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 20 & \dfrac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3} - 20 = \frac{40}{3} - \frac{60}{3} = -\frac{20}{3}$$

$$\frac{D_p}{D} = 2$$

Se Pedro possuía 2 cartões inicialmente e após a disputa quadriplicou seu número de cartões, então este ficou com 8 cartões ao final (4.2 = 8). Ou seja, Pedro ganhou 6 cartões na disputa.

2. B

No cálculo do determinante das matrizes indicadas utilizaremos o método de Sarrus.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 75 + 36 - 30 - 18 - 40 = 31$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 3 \\ 3 & 23 & 5 \\ 5 & 27 & 2 \end{vmatrix} = 92 + 450 + 243 - 345 - 108 - 270 = 62$$

y = D_y / D

y = 62/31

y = 2

O valor da incógnita y no sistema de equações é 2.

3. A

Seja Andreia = A, Bidu = B e Carlos = C. Temos:

$$\begin{cases} b+c=87 \\ a+c=123 \\ a+b=66 \end{cases}$$

Por Cramer, temos:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+1+1-0-0-0=2$$

$$Db=\begin{vmatrix} 0 & 87 & 1 \\ 1 & 123 & 1 \\ 1 & 66 & 0 \end{vmatrix}=0+87+66-123-0-0=30$$

b = D_b / D
b = 30 / 2
b = 15

b + c = 87
15 + c = 87
c = 87 – 15
c = 72

a + b = 66
a = 66 – 15
a = 51

Andreia pesa 51 kg, Bidu 15 kg e Carlos 72 kg.

4. D

$$\frac{a1}{a2}=\frac{b1}{b2}=\frac{c1}{c2}$$
$$\frac{2}{a}=\frac{1}{2}=\frac{5}{b}$$
$$a=4\ e\ b=10$$
$$a+b=14$$

5. A

No cálculo do determinante das matrizes indicadas utilizaremos o método de Sarrus.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-4-2-4+6-1=-8$$

$$Dx = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2+4-2-12+1=-8$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6-2-2-8+3-1=-16$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+8-1-2+2+2=8$$

x = Dx / D
x = −8/−8
x = 1

y = Dy/D
y = −16/−8
y = 2

z = Dz/D
z = 8/−8 = −1

Conjunto solução: x = 1, y = 2 e z = −1.

6. A

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

D = (1+6+18) – (9+3+4)
D = 7 + 18 – 16
D= 9

D_x

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 14 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dx = (7+28+36) – (42+21+8)
Dx = 71 – 71 = 0

$x = D_x/D$
x = 0/9
x = 0

D_y

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 14 & 1 \end{vmatrix}$$

Dy = (4+21+84) – (36+14+14)
Dy = 109 – 64 = 45

$y = D_y/D$
y = 45/9
y = 5

D_z

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

Dz = (14+24+42) – (21+12+56)
Dz =80 – 89 = -9

$z = D_z/D$
z = -9/9
z = -1

7. **D**

x: sócios

y: não sócios

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 5x+10y=1400 \end{cases}$$

Por Regra de Cramer, temos:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}=10-5=5$$

$$Dx=\begin{vmatrix} 200 & 1 \\ 1400 & 10 \end{vmatrix}=2000-1400=600$$

$$Dy=\begin{vmatrix} 1 & 200 \\ 5 & 1400 \end{vmatrix}=1400-1000=400$$

x = Dx / D

x = 600 / 5

x = 120

y = Dy / D

y = 400 / 5

y = 80

Por substituição:

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 5x+10y=1400 \end{cases}$$

Isolando x na 1ª equação:

x + y = 200

x = 200 – y

Substituindo x na 2ª equação:

5x + 10y = 1400

5 * (200 – y) + 10y = 1400

1000 – 5y + 10y = 1400

–5y + 10y = 1400 – 1000

5y = 400

y = 400/5

y = 80

Substituindo y na 1ª equação:

x + y = 200

x = 200 – y

x = 200 – 80

x = 120

No show estavam presentes 120 sócios e 80 não sócios.

8. C

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

det(M)=2.4−3.1=5

$$M_y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

det(My)=2.5 - 3.1 = 7

$$M_x = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

det(Mx)=3.4−5.3=-3

$$x = \frac{det(M_x)}{det(M)} = \frac{-3}{5}$$

$$y = \frac{det(M_y)}{det(M)} = \frac{7}{5}$$

9. B

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

det(M)=-16

$$Mx = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

det(Mx)=40

$$My = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

det(My)=-12

$$Mz = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

det(Mz)=-16

$$x = \frac{det(Mx)}{det(M)} = \frac{40}{-16} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{det(My)}{det(M)} = \frac{-12}{-16} = \frac{3}{4}$$

$$z = \frac{det(Mz)}{det(M)} = \frac{-16}{-16} = 1$$

10. A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 2.2 = 1 - 4$$

$$\det(A) = -3$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 5.2 = 1 - 10$$

$$\det(A_x) = -9$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 2.1 = 5 - 2$$

$$\det(A_y) = 3$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-9}{-3}$$

$$x = 3$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{3}{-3}$$

$$y = -1$$