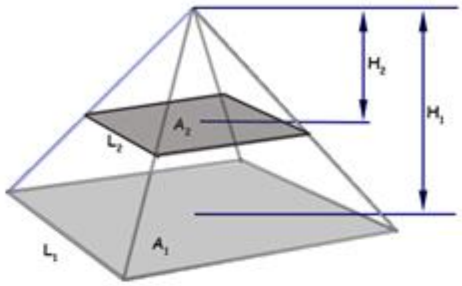
Troncos

Resumo

Tronco de pirâmide

Considere uma pirâmide e uma secção transversal paralela à base. Denominamos tronco de pirâmide à parte da pirâmide limitada pela base e pela secção transversal.

Elementos:

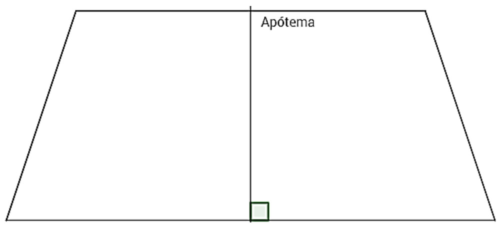


H_1 → altura total da pirâmide
H_2 → altura da pirâmide menor
A_1 → área da base maior do tronco
A_2 → área da base menor do tronco
L_1 → aresta da base
L_2 → aresta da secção transversal

Observando a figura podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \text{ e } \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3$$

Apótema do tronco de uma pirâmide:



1. As faces laterais do tronco de pirâmide são trapézios isósceles congruentes.
2. O apótema do tronco é a altura do trapézio.

Volume do tronco de pirâmide

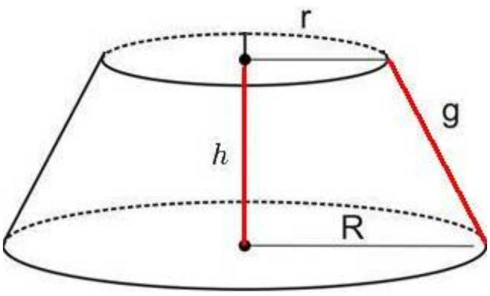
O volume de tronco de pirâmide é a diferença entre o volume original e o volume da pirâmide determinada pela secção transversal.

E pode ser calculado pela expressão:

$$V = \frac{H_1}{3}\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1A_2}\right)$$

Tronco de cone circular reto:

Considere um cone circular e uma secção transversal qualquer. Denominamos tronco de cone à parte do cone limitada pela base e por essa secção transversal.



g → geratriz
h → altura
R → Raio maior
r → raio menor

Volume do tronco de cone:

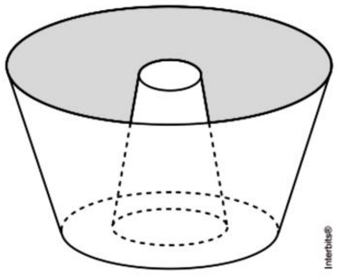
Seja um tronco de cone, de raios R e R’ e altura h. O volume desse tronco pode ser calculado através da expressão:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R.r\right)$$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

a) um tronco de cone e um cilindro.

b) um cone e um cilindro.

c) um tronco de pirâmide e um cilindro.

d) dois troncos de cone.

e) dois cilindros.

2. Uma caixa de um perfume tem o formato de um tronco de pirâmide quadrangular regular fechado. Para embrulhá-la, Pedro tirou as seguintes medidas: aresta lateral 5 cm e arestas das bases 8 cm e 2 cm A quantidade total de papel para embrulhar esta caixa, supondo que não haja desperdício é nem sobreposição de material, foi de:

a) 88 cm²

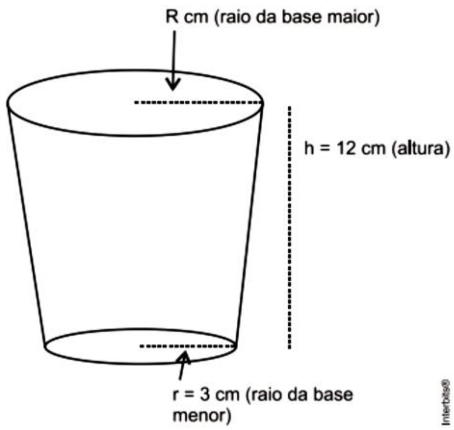
b) 168 cm²

c) 8m cm ²

d) 68 cm²

e) 148 cm²

3. Considere um balde para colocação de gelo no formato de um tronco de cone circular reto apresentando as medidas indicadas na figura a seguir.



Considerando que esse balde esteja com 25% de sua capacidade ocupada com gelo derretido (água) e, consequentemente, com um volume de água igual a 0,097π litros, qual é o valor (em cm) do raio da base maior R?

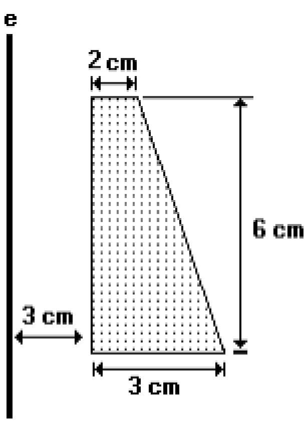
a) 8,5

b) 9

c) 8

d) 7,5

4. O volume do sólido gerado pela rotação completa da figura a seguir, em torno do eixo e é, em cm³:



a) 38π

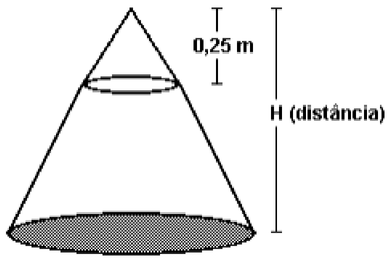
b) 54π

c) 92π

d) 112π

e) 128π

5. Considerando um lustre de formato cônico com altura e raio da base igual a 0,25m, a distância do chão (H) em que se deve pendurá-lo para obter um lugar iluminado em forma de círculo com área de $25\pi m^2$, é de



a) 12m.
b) 10m.
c) 8m.
d) 6m.
e) 5m.

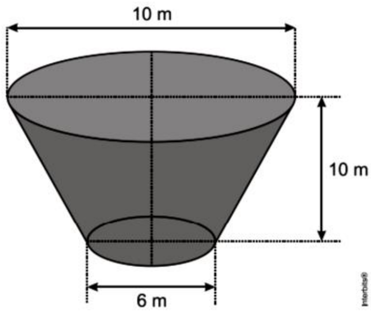
6. Considere um cone de altura 4cm e um tronco deste cone de altura 3cm. Sabendo-se que este tronco tem volume $21cm^3$, qual o volume do cone?

a) 53/3
b) 30
c) 64/3
d) 21
e) 33/3

7. Uma pirâmide de 6cm de altura tem a base com $144cm^2$ de área. A área da secção plana paralela à base e distante 5cm do vértice é:

a) 100/3
b) 100
c) 120
d) 24
e) nda

8. A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?



a) $\dfrac{40}{3}10^2\pi$

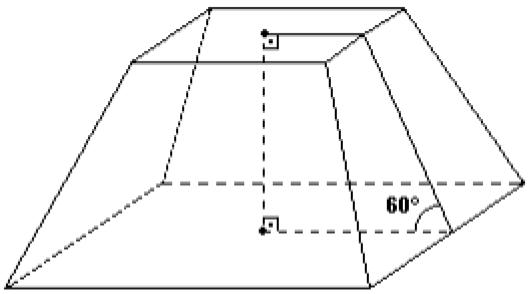
b) $\dfrac{19}{2}10^5\pi$

c) $\dfrac{49}{3}10\pi$

d) $\dfrac{49}{3}10^4\pi$

e) $\dfrac{19}{3}10^3\pi$

9. Considere o tronco de uma pirâmide regular de bases quadradas representado na figura a seguir.



Se as diagonais das bases medem $10\sqrt{2}$ cm e $4\sqrt{2}$ cm, a área total desse tronco, em centímetros quadrados, é

a) 168

b) 186

c) 258

d) 266

e) 284

10. Um salame tem a forma de um cilindro reto com 40 cm de altura e pesa 1 kg. Tentando servir um freguês que queria meio quilo de salame, João cortou um pedaço, obliquamente, de modo que a altura do pedaço varia entre 22 cm e 26 cm. O peso do pedaço é de:

a) 600 g

b) 610 g

c) 620 g

d) 630 g

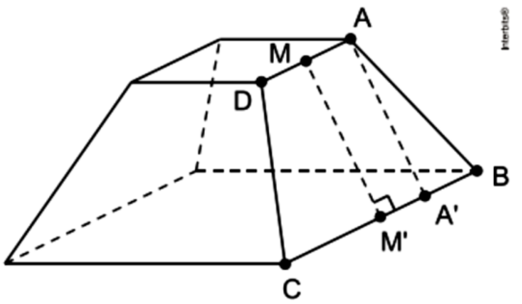
e) 640 g

Gabarito

1. **D**
É fácil ver que o sólido da figura é constituído por dois troncos de cone.

2. **E**
Observe

Considere a figura.



Sendo M o ponto médio de AD, e M' o ponto médio de BC, segue que $\overline{A'B} = 4 - 1 = 3$ cm.
Logo, como $\overline{AB} = 5\text{cm}$, vem $\overline{AA'} = 4\text{cm}$.
Portanto, a quantidade total de papel utilizada para embrulhar a caixa, supondo que não haja desperdício e nem sobreposição de material, é igual a

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 4 \cdot \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \cdot \overline{AA'} &= 2^2 + 8^2 + 4 \cdot \frac{2+8}{2} \cdot 4 \\ &= 148\text{cm}^2.\end{aligned}$$

3. **C**
Observe:

Como $0{,}097\pi$ litros correspondem a $25\% = \frac{1}{4}$ da capacidade do balde, temos que a capacidade do balde é igual a $4 \cdot 0{,}097\pi\,\text{L} = 0{,}388\pi\,\text{L} = 388\pi\,\text{cm}^3$.
Portanto, sabendo que a altura do balde mede 12cm e o raio da base menor mede 3cm, vem

$$\begin{aligned}388\pi = \frac{12\pi}{3}(R^2 + 3R + 3^2) &\Leftrightarrow R^2 + 3R - 88 = 0 \\ &\Rightarrow R = 8\text{cm}.\end{aligned}$$

4. E

Esse é o volume do tronco com um volume cilíndrico "oco" no meio

A fórmula do volume do tronco é $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R.r)$.

Neste caso

h = 6 cm (altura do trapézio)

R = 3 + 3 = 6 cm (distância entre o eixo e o polígono + base maior)

r = 3 + 2 = 5 cm (distância entre o eixo e o polígono + base menor)

$$V_t = \frac{\pi.6}{3}(6^2 + 5^2 + 6.5) = 182\pi$$

O volume "oco" é o de um cilindro

$$V_c = \pi.s^2.h$$

h = 6 cm (altura do trapézio)

s = 3 cm (distância do eixo ao polígono)

$$V_c = \pi.3^2.6 = 54\pi$$

O volume pedido é o volume do tronco menos a parte "oca"

V = 182 π - 54 π = 128 π

5. E

Área da base do menor cone: πr^2

Isso conclui-se que o raio do chão é 5

Portanto:

$$\frac{0,25}{5} = \frac{0,25}{h}$$

$$h = 5 \text{ m}$$

6. C

Volume do cone acima do tronco = V_1

Volume do tronco = V_2

Volume total: $V_1 + V_2$

Sendo $h_1 = 1$ e $h_2 = 3$ e a razão de semelhança k = 1/4, temos:

$$\frac{V_1}{V_1+V_2}=k^3$$
$$\frac{V_1}{V_1+21}=\frac{1}{64}$$
$$64V_1=V_1+21$$
$$V_1=\frac{21}{63}=\frac{1}{3}$$

Portanto, o volume total é:

$$V_1+V_2=\frac{1}{3}+21=\frac{64}{3}$$

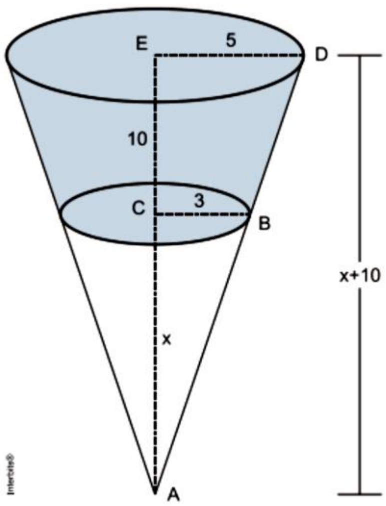
7. B

A pirâmide grande e a pequena são semelhantes. A grande possui altura h = 6 e área da base Sb = 144. Sabemos que a pirâmide pequena tem h = 5 e queremos calcular a área da base. Assim, por semelhança, temos:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{x}{144}$$
$$x=100$$

8. D

Observe:



$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{x+10}=\frac{3}{5} \Rightarrow x=15$$

O volume V pedido (em m^3) é a diferença entre os volumes dos cones de raios 5m e 3m, respectivamente.

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot5^2\cdot25-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot3^3\cdot15=\frac{490\pi}{3}m^3=\frac{49}{3}10^4\,\pi L.$$

9. **E**

Sejam:

L: lado da base maior

l: lado da base menor

a: apótema do tronco

Como as bases são quadradas, e sabemos que quadrados tem diagonal $L\sqrt{2}$, podemos calcular L e l:

$L\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

L = 10 cm

$l\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

l = 4 cm

Sejam O e O' os centros das base menor e maior

Seja OP a base menor do trapézio → OP = l/2 → OP = 2

Seja O'Q a base maior do trapézio → O'Q = 10/2 → O'Q = 5

Seja H o pé da perpendicular de P sobre O'H = OP → O'H = 2

Trace PH formando o triângulo retângulo PHQ

HQ = O'Q - O'H → HQ = 5 - 2 → HQ = 3 é o cateto menor do triângulo retângulo a é a hipotenusa do triângulo:
cos60º = 3/a → 1/2 = 3/a → a = 6

área total → área da base maior + área da base menor + 4 x área do trapézio

$$S_t = 100 + 16 + 4\left[(10+4)\frac{6}{2}\right] = 116 + 168 = 284 \text{ cm}^2$$

10. **A**

Como a altura varia entre 22 cm e 26 cm, usaremos a altura média entre esses 2 valores, logo, $\frac{22+26}{2} = 24$. Como a área da base será a mesma, temos que um cilindro com 40 cm de altura pesa 1kg, queremos saber quando pesará um com 24 cm.

40 cm ------ 1kg
24 cm ------ x

x = 0,6 kg = 600g