Vetores: produto misto

Quer ver esse material pelo Dex? Clique aqui.

Resumo

Produto Misto

Chama-se produto misto dos vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, tomados nesta ordem, ao número real $\vec{u}.\left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$. O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também é indicado por $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

Podemos calculá-lo por:

$$\vec{u}.\left(\vec{v} \times \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

Solução:

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Propriedades

Assim como no produto vetorial, as propriedades do produto misto decorrem, em sua maioria, das propriedades dos determinantes.

$\rightarrow$ O produto misto $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Em relação ao exemplo anterior, em que $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 27$, teríamos $\left(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\right) = -27$, por exemplo.

Cuidado! Se houver apenas uma permutação, há troca de sinal. Se houver duas permutações, altera o sinal duas vezes, ou seja, volta ao sinal inicial.

$\rightarrow$ $\left(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) + \left(\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}\right)$

$\rightarrow \left(\vec{u},\ \vec{v}+\vec{x},\ \vec{w}\right)=\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)+\left(\vec{u},\vec{x},\ \vec{w}\right)$

$\rightarrow \left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}+\vec{x}\right)=\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)+\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{x}\right)$

$\rightarrow \left(\alpha\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)=\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\alpha v},\ \vec{w}\right)=\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \alpha\vec{w}\right)=\alpha\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)$

$\rightarrow \left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)=0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

$\rightarrow$ Geometricamente, o produto misto $\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Já o volume do tetraedro determinado por esses mesmos vetores tem volume igual a $\frac{\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)}{6}$

Exercícios

1. Qual é o produto misto entre os vetores $\vec{u}=(2,-1,1)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ e $\vec{w}=(2,-1,4)$?

a) 0
b) 1
c) -1
d) 3
e) -3

2. Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})=5$, quanto vale $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$?

a) 0
b) 1
c) -1
d) 5
e) -5

3. Sabendo que $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{x})=2$ e $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x})=5$, qual é o valor de $(2\vec{u}+4\vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$?

a) 7
b) 9
c) 22
d) 24
e) 42

4. Verifique se os pontos A(1, 2, 4), B(-1, 0, -2), C(0, 2, 2) e D(-2, 1, -3) estão no mesmo plano.

5. Um paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}=(a,a,a)$, $\vec{v}=(2a,2a,3a)$ e $\vec{w}=(2a,a,a)$, com $a \in \mathbb{R}$, tem volume igual a 8. Determine o valor de a.

a) 1
b) 2
c) $\frac{3}{2}$
d) 3
e) $\frac{5}{2}$

6. Qual deve ser o valor de m para que os vetores u = (2, m, 0), v = (1, −1, 2) e w = (−1, 3, −1) sejam coplanares?

a) 0
b) -1
c) 1
d) -10
e) 10

7. Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u = (3, −1, 4), v = (2, 0, 1) e w = (−2, 1, 5).

a) 17
b) 18
c) 19
d) 20
e) 21

8. Qual o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{2}$
d) 2

9. Sejam A(1, 2, -1), B(5, 0, 1), C(2, -1, 1) e D(6, 1, -3) vértices de um tetraedro. Qual é o volume deste tetraedro?

a) 6 u.v.
b) 12 u.v.
c) 24 u.v.
d) 36 u.v.
e) 72 u.v.

10. Sejam os vetores $\vec{u}=(3,m,-2)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$ e $\vec{w}=(2,-1,2)$. Calcule o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 16 u.v.

a) $m=-12$ ou $m=4$
b) $m=12$ ou $m=4$
c) $m=-12$ ou $m=-4$
d) $m=12$ ou $m=-4$

Gabarito

1. D

Usando a definição de produto misto, temos:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

2. D

Como fizemos duas permutações, então o valor do produto misto não se altera, ou seja $\left(\vec{w},\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right) = 5$

3. D

Usando as propriedades de produto misto, temos:

$$\left(2\vec{u} + 4\vec{v},\ \vec{w}\ ,\ \vec{x}\right) = \left(2\vec{u},\ \vec{w}\ ,\ \vec{x}\right) + \left(4\vec{v},\ \vec{w}\ ,\ \vec{x}\right) = 2\left(\vec{u},\ \vec{w}\ ,\ \vec{x}\right) + 4\left(\vec{v},\ \vec{w}\ ,\ \vec{x}\right) = 2.2 + 4.5 = 24$$

4. Observe:

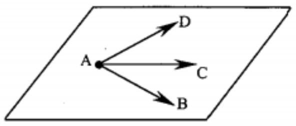
Os quatro pontos dados são coplanares se forem coplanares os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ e, para tanto, deve-se ter

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$$

Como

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

os pontos dados são coplanares.



5. B

O volume V do paralelepípedo, através do produto misto, será dado por:

$$V = \left\| \begin{matrix} a & a & a \\ 2a & 2a & 3a \\ 2a & a & a \end{matrix} \right\| = |a^3| = 8$$

Resolvendo a equação, temos:

$|a^3| = 8 \Rightarrow a^3 = 8$ ou $a^3 = -8 \Rightarrow a = 2$ ou $a = -2$.

Portanto, a alternativa correta é a [B], $a = 2$.

6. D

Como sabemos, para que os três vetores sejam coplanares, então seu produto misto é zero. Ou seja

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo a equação, encontramos m = -10.

7. **A**

O volume do paralelepípedo, através do produto misto entre os 3 vetores, é dado por:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0+8+2+0+10-3=17$$

8. **B**

Basta calcularmos o produto misto entre os vetores $\vec{i},\ \vec{j}$ e $\vec{k}$:

$$\vec{i}.\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

9. **A**

O volume do tetraedro é dado por

$$V_t = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$$

Mas

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 36$$

Portanto, o volume do tetraedro é

$$V_t = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 \text{ u.v.}$$

10. **A**

Observe:

O volume do paralelepípedo é dado por

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

e, no caso presente, deve-se ter

$$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 16$$

Sendo

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 8$$

vem

$$|-2m - 8| = 16,$$

que, pela definição de módulo, implica duas hipóteses:

$$-2m - 8 = 16 \qquad \text{ou} \qquad -2m - 8 = -16$$

e, portanto,

$$m = -12 \quad \text{ou} \qquad m = 4$$