# Retas: paralelismo, perpendicularismo e distância de ponto à reta

## Resumo

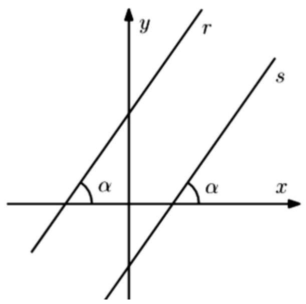
Já estudamos a equação da reta, agora chegou a hora de vermos algumas relações entre retas!

**1. Posições relativas entre retas**

**1.1. Retas paralelas:**

Duas retas são paralelas se apresentam a mesma inclinação em relação ao eixo x, ou seja, possuem o mesmo coeficiente angular.

$$r//s \quad \leftrightarrow \quad m_r = m_s$$

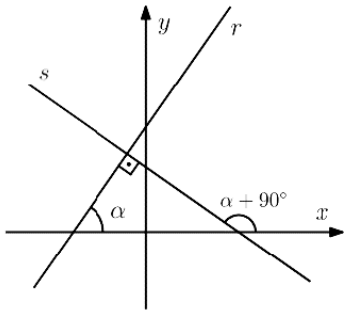



Obs: Se $m_1 \neq m_2$ então elas são concorrentes.

**1.2 Retas perpendiculares:**

Duas retas r e s são perpendiculares se o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1.

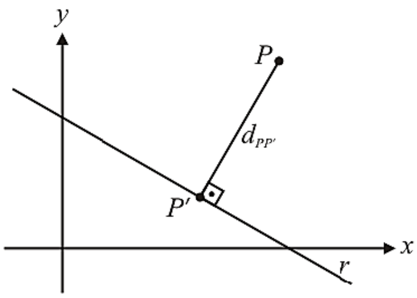
$$r \perp s \quad \leftrightarrow \quad m_r . m_s = -1$$



**2. Distância de um ponto a uma reta**

Dadas uma reta r: $ax + by + c = 0$ e um ponto $P(x_0, y_0)$, a distância do ponto P à reta r é dada pela fórmula:

$$\boxed{d_{PP'} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|}$$




Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

## Exercícios

**1.** Considere no plano cartesiano as retas r e s dadas pelas equações:
r : $3x + 3py + p = 0$ e
s: $px + 9y - 3 = 0$
com $p \in \mathbb{R}$.

Baseado nessas informações, marque a alternativa INCORRETA.

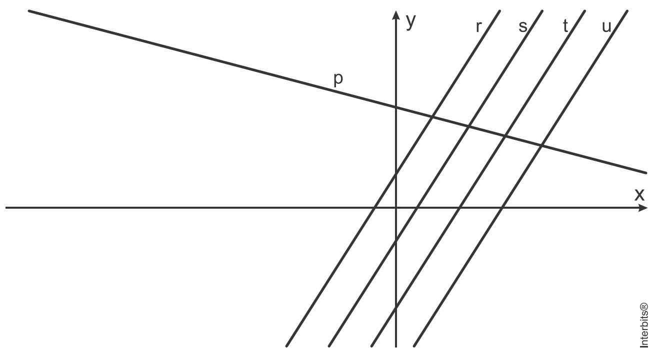
**a)** r e s são retas concorrentes se $|p| \neq 3$.

**b)** Existe um valor de p para o qual r é equação do eixo das ordenadas e s é perpendicular a r.

**c)** r e s são paralelas distintas para dois valores reais de p.

**d)** r e s são retas coincidentes para algum valor de p.

**2.** Na figura a seguir, as retas r, s, t, u são paralelas e seus coeficientes lineares estão em uma progressão aritmética de razão -2.




Sabendo-se que a equação da reta p é $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e da reta u é $y = 3x - 5$, o ponto de intersecção da reta p com reta s é

**a)** $\left(\frac{4}{7}, \frac{19}{7}\right)$

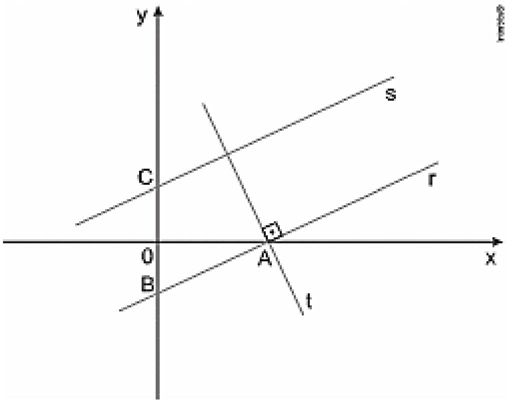
**b)** $\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}\right)$

**c)** $\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$

**d)** $\left(\frac{16}{7}, \frac{13}{7}\right)$

**e)** $\left(\frac{18}{7}, \frac{11}{7}\right)$

**3.** Sobre a figura abaixo, sabe-se que a equação de r é 2y = x − 3; que os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo das abscissas; que as retas r e s são paralelas; e que t é perpendicular a r.




Nessas condições, a equação da reta t é:

**a)** y = - 2x +6

**b)** $y = -\frac{1}{2}x + 6$

**c)** 2y = - x+6

**d)** y + 2x = 3

**e)** $y = \frac{x-6}{2}$

**4.** A reta s que passa por P(1,6) e é perpendicular $y = \frac{2}{3}x + 3$ a r é:

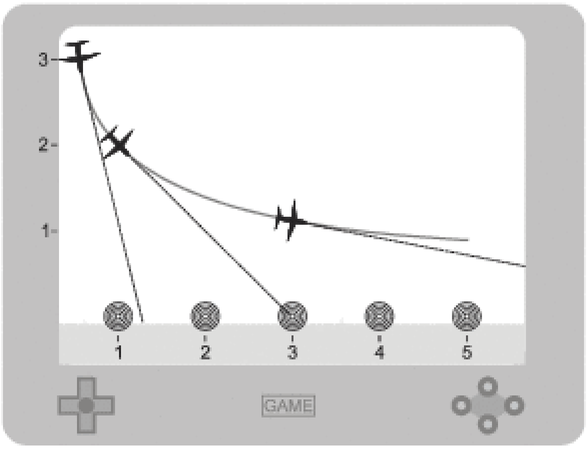
**a)** $y = \frac{3}{2}x$

**b)** y = x + 5

**c)** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

**d)** $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

**5.** A figura mostra um jogo de videogame, em que aviões disparam balas visando a atingir o alvo. Quando o avião está no ponto (1, 2), dispara uma bala e atinge o alvo na posição (3, 0).




Sendo r a reta determinada pela trajetória da bala, observe as seguintes afirmativas:

**I.** O ponto P(1/2, 5/2) pertence a r.

**II.** A reta r é perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB, onde A(0, 3) e B(3, 0).

**III.** A reta r é paralela à reta s: $2x - 2y + 5 = 0$.

Está(ão) correta(s)

**a)** apenas I.

**b)** apenas I e II.

**c)** apenas III.

**d)** apenas II e III.

**e)** I, II e III.

**6.** Seja A = (4, 2) um ponto do plano cartesiano e sejam B e C os simétricos de A em relação aos eixos coordenados. A equação da reta que passa por A e é perpendicular à reta que passa por B e C é:

**a)** $2x-y=6$

**b)** $x-2y=0$

**c)** $x-y=2$

**d)** $x+2y=8$

**e)** $x + y = 6$

**7.** Os valores de k para que as retas $2x + ky = 3$ e $x + y = 1$ sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são

**a)** 3 , 2 – e 1.

**b)** −1 e 1.

**c)** 1 e −1.

**d)** −2 e 2.

**e)** 2 e −2.

**8.** As retas $2x + 3y = 1$ e $6x - ky = 1$ são perpendiculares. Então, k vale

**a)** 2

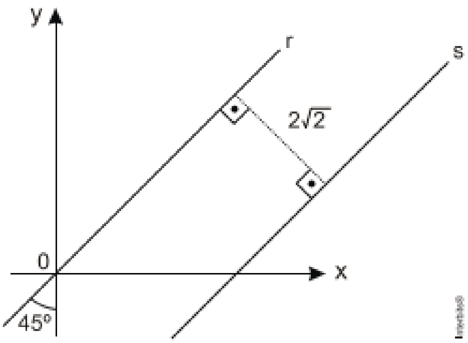
**b)** 1

**c)** 3

**d)** 4

**e)** 5

**9.** Na figura, as retas r e s são paralelas. Se (x, y) é um ponto de s, então $x - y$ vale




**a)** 2

**b)** 3

**c)** 4

**d)** 6

**e)** 5

**10.** Considere os pontos A(2, 3) e B(4, 1) e a reta r: $3x + 4y = 0$. Se $d_{A,r}$ e $d_{B,r}$ são, respectivamente, as distâncias de A e de B até a reta r, é correto afirmar que

**a)** $d_{A,r} > d_{B,r}$

**b)** $d_{A,r} < d_{B,r}$

**c)** $d_{A,r} = d_{B,r}$

**d)** $d_{A,r} = 2d_{B,r}$

## Gabarito

**1. D**

[A] Verdadeira. De fato, pois se

$$\frac{3}{p} \neq \frac{3p}{9} \Leftrightarrow p^2 \neq 9 \Leftrightarrow |p| \neq 3,$$

então as retas são concorrentes.

[B] Verdadeira. Com efeito, pois se $p = 0,$ então $r : x = 0$ e $s : y = \frac{1}{3}.$

[C] Verdadeira. De fato, pois se

$$\frac{3}{p} = \frac{3p}{9} \neq \frac{p}{-3} \Leftrightarrow p = \pm 3,$$

então $r$ e $s$ são paralelas distintas.

[D] Falsa. As retas $r$ e $s$ serão coincidentes se existir algum valor real de $p$ para o qual se tenha $\frac{3}{p} = \frac{3p}{9} = \frac{p}{-3}.$ Porém, tal sistema é impossível e, assim, não existe $p$ real de tal sorte que $r$ e $s$ sejam coincidentes.

**2. B**

É fácil ver que a equação da reta $s$ é $y = 3x - 1.$ Desse modo, a abscissa do ponto de interseção das retas $p$ e $s$ é tal que

$$3x - 1 = -\frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{7}.$$

Portanto, temos $y = 3 \cdot \frac{8}{7} - 1 = \frac{17}{7}$ e a resposta é $\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}\right).$

**3. A**

O coeficiente angular da reta $r$ é $\frac{1}{2}$ e a reta $t$ é perpendicular à reta $r,$ logo $m_t = -2.$

Para determinar as coordenadas do ponto $A$ devemos considerar $y = 0$ na equação da reta $r,$ logo:

$2y = x - 3$

$2 \cdot 0 = x - 3$

$x = 3$

Portanto, o ponto $A$ será $A(3, 0)$ e a equação da reta $t$ será:

$y - 0 = -2 \cdot (x - 3)$

$y = -2x + 6$

**4. D**

Sabendo que o coeficiente angular da reta $r$ é $\frac{2}{3}$ e que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é $-1,$ podemos escrever:

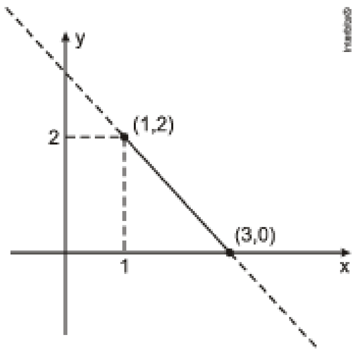
$$m_s \cdot \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{3}{2}$$

Logo, a equação da reta $r$ será dada por:

$$y - 6 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{2} + 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{15}{2}$$

**5. B**

Considerando a reta r representada abaixo, temos:




Equação da reta r: $y - 0 = \frac{0-2}{3-1} \cdot (x-3) \Rightarrow x + y - 3 = 0$

[I] Verdadeira, pois $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$

[II] Verdadeira.

Ponto médio de AB: $M = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+0}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Coeficiente angular da reta citada neste item: $\frac{\frac{3}{2} - 0}{\frac{3}{2} - 0} \cdot = 1$

Como $1 \cdot (-1) = -1$, as reta citada é perpendicular a reta r.

[III] Falsa, pois o coeficiente angular da reta s é 1, diferente do coeficiente angular da reta r que é -1.

**6. A**

Temos $B = (4, -2)$ e $C = (-4, 2)$. Logo, o coeficiente angular da reta que passa por B e C é $\frac{2-(-2)}{-4-4} = -\frac{1}{2}$.

A reta cuja equação queremos determinar passa por A e é perpendicular à reta que passa por B e C. Logo, sua equação é

$y - 2 = 2 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow 2x - y = 6.$

**7. E**

(r) $2x + ky = 3 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{k}$

(s) $x + y = 1 \Rightarrow m_s = -1$

Para que r seja paralela a s: $m_r = m_s \Rightarrow -\frac{2}{k} = -1 \Rightarrow k = 2$

Para que r seja perpendicular a s: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow -\frac{2}{k} \cdot (-1) = -1 \Rightarrow k = -2$

**8. D**

$(r)\ 2x+3y=1 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$

$(s)\ 6x-ky=1 \Rightarrow m_s = \frac{6}{k}$

$m_r \cdot m_s = -1$

$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{6}{k}\right) = -1$

$-12 = -3k$

$k = 4$

**9. C**

Seja $A = (\alpha, 0)$ o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abscissas.
Como a distância de A até a reta *r* é igual $2\sqrt{2}$ e o ângulo que a reta *r* forma com o eixo das abscissas mede 45°, segue que $\alpha = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4$.
Portanto, $x - y = \alpha - 0 = 4 - 0 = 4$.

**10. A**

Do enunciado, temos:

$$d_{A,r} = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 0|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$d_{A,r} = \frac{18}{5}$$

$$d_{B,r} = \frac{|3\cdot 4 + 4\cdot 1 + 0|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$d_{B,r} = \frac{16}{5}$$

Portanto,
$d_{A,r} > d_{B,r}$