Matrizes: Matriz inversa

Resumo

Dada a matriz quadrada A, dizemos que A é invertível (ou não singular), se e somente se existir uma matriz X, tal que A.X=I, onde I é a matriz identidade. Uma notação comum para a matriz inversa é A^{-1}.
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descobrir a matriz inversa é o mesmo que descobrir valores de x,y,z,w em $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando o produto das matrizes:

$$\begin{bmatrix} x+2z & y+2w \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a igualdade das matrizes

$$x + 2z = 1 \rightarrow x = 1$$
$$y + 2w = 0 \rightarrow y = -2$$
$$z = 0$$
$$w = 1$$

Substituindo, descobrimos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Não é sempre que a matriz possui inversa, pois o sistema pode não ter solução. Em aulas posteriores, aprenderemos um método prático para a existência ou não de inversa.

Exercícios

1. Determine uma matriz invertível P que satisfaça a equação P^{-1}. A = $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, sendo A=$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

a) P=$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{10}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$

b) P=$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$

c) P=$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

d) P=$\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{9} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

e) P=$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{bmatrix}$ em que *a* é um número real. Sabendo que *A* admite inversa A^{-1} cuja primeira coluna é $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ -1 \end{bmatrix}$, a soma dos elementos da diagonal principal de A^{-1} é igual a

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

3. A matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

4. A matriz inversa da matriz em destaque, mostrada adiante é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. Sabendo que a inversa de uma matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, e que a matriz X é solução da equação matricial $X \cdot A = B$, em que $B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz X é

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

6. O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz <u>inversa</u> da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

c) 0

d) -2

e) $-\frac{1}{3}$

7. Calcular x tal que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ seja igual a sua inversa:

a) -2

b) 1

c) -1

d) 2

e) 0

8. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ onde x e y são números reais e M é a matriz inversa de A. Então o produto xy é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{4}$

9. João comeu uma salada de frutas com **a**, **m** e **p** porções de 100g de abacaxi, manga e pera, respectivamente, conforme a matriz X. A matriz A representa as quantidades de calorias, vitamina C e cálcio, em miligramas, e a matriz B indica os preços, em reais, dessas frutas em 3 diferentes supermercados. A matriz C mostra que João ingeriu 295,6cal, 143,9mg de vitamina C e 93mg de cálcio.

MATRIZ X
Porções de 100g

$$\begin{array}{r} \text{Abacaxi} \\ \text{Manga} \\ \text{Pêra} \end{array} \begin{bmatrix} a \\ m \\ p \end{bmatrix}$$

MATRIZ A
(por cada 100g)

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \text{Abacaxi} & \text{Manga} & \text{Pêra} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Calorias} \\ \text{Vitamina C} \\ \text{Cálcio} \end{array} & \begin{bmatrix} 52 & 64{,}3 & 63{,}3 \\ 27{,}2 & 43 & 3{,}5 \\ 18 & 21 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

MATRIZ B
(por cada 100g)

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \text{Abacaxi} & \text{Manga} & \text{Pêra} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Coma bem} \\ \text{Compre mais} \\ \text{Boa compra} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}16 & 0{,}25 & 0{,}45 \\ 0{,}20 & 0{,}27 & 0{,}35 \end{bmatrix} \end{array}$$

MATRIZ C

$$\begin{array}{r} \text{Calorias} \\ \text{Vitamina C (mg)} \\ \text{Cálcio (mg)} \end{array} \begin{bmatrix} 295{,}6 \\ 143{,}9 \\ 93 \end{bmatrix}$$

Considerando que as matrizes inversas de A e B são A^{-1} e B^{-1}, o custo dessa salada de frutas, em cada supermercado, é determinado pelas seguintes operações:

a) $B.A^{-1}.C$

b) $C.A^{-1}.B$

c) $A^{-1}.B^{-1}.C$

d) $B^{-1}.A^{-1}.C$

10. Dada a matriz M= $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & K \\ -K & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, se $M^{-1} = M^{t}$, então K pode ser:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

Gabarito

1. E

Seja p= $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

$$P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = A \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x & -2y \\ 5z & -2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{5},\ y = 1,\ z = \frac{3}{5} \text{ e } w = -\frac{3}{2}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

2. A

$A.A^{-1} = I_2$

$$\begin{bmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2a-1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos o sistema $\begin{cases} a.(2a-1) - (2a+1) = 1 \\ (a-1).(2a-1) - 1(a+1) = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema temos a = 2, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Portanto, a soma dos elementos da diagonal principal é 3 + 2 = 5

3. B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a - g = 1 \to a = \frac{1}{2} \\ 2a + d + 10g = 0 \to d = -1 \\ -g = 0 \to g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b - h = 0 \to b = 0 \\ 2b + e + 10h = 1 \to e = 1 \\ -h = 0 \to h = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c - i = 0 \to c = -\frac{1}{2} \\ 2c + f + 10i = 0 \to f = 11 \\ -i = 1 \to i = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. B

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa a identidade de ordem 2. Sabendo que a matriz inversa (A^{-1}) tem a propriedade que a. A^{-1}=i, onde i é a identidade. Nesse caso a=i, portanto i. A^{-1}=i e usando a propriedade da multiplicação da matriz identidade temos que $I.A^{-1} = I \to A^{-1} = I$

5. A

Sabendo que $A \cdot A^{-1} = I$, com I sendo a matriz identidade de ordem 2, temos

$$\begin{aligned} X \cdot A = B &\Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \\ &\Leftrightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1} \\ &\Leftrightarrow X = [8 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow X = [24 - 15 \quad -8 + 6] \\ &\Leftrightarrow X = [9 \quad -2]. \end{aligned}$$

Portando, a soma pedida é igual a $9 + (-2) = 7.$

6. A

Para descobrir a inversa, calculamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como a questão pede apenas o a_{23}, só precisamos descobrir o elemento a_{23} da matriz inversa, nesse caso o f. Fazendo o produto da matriz pela ultima coluna da matriz inversa temos:

$$c + i = 0 \rightarrow c = -i \rightarrow c = -1 + f$$

$$2c + f = 0 \rightarrow 2(-1 + f) + f = 0 \rightarrow 3f = 2 \rightarrow f = \frac{2}{3}$$

$$f + i = 1 \rightarrow i = 1 - f$$

7. C

Como $A = A^{-1}$ então a.a=i, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha da matriz a pela segunda coluna da matriz inversa, temos:

$$2 + 2x = 0$$

$$x = -1$$

8. A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x - 2 = 1 \rightarrow x = 3$$

$$-1 + 2y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$xy = 3.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

9. A

O produto de a por x calcula a quantidade de calorias, vitamina c e cálcio consumidos. Igualando esse produto a c, calculamos os valores de a, m e p. O produto de b por x calcula o gasto em cada supermercado. Seja g a matriz dos gastos:

$$A.X = C$$

$$\left(A^{-1}.A\right).X = A^{-1}.C$$

$$I.X = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}.C$$

$$G = B.X \rightarrow B.A^{-1}.C$$

10. E

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & K \\ -K & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = M^{t} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -K \\ K & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & K \\ -K & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -K \\ K & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{4} + K^2 = 1 \rightarrow 3 + 4K^2 = 4 \rightarrow K^2 = \frac{1}{4} \rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$K = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad K = -\frac{1}{2}$$