Geometria Espacial

Resumo

Geometria de posição

Na geometria espacial, trabalhamos em três dimensões.

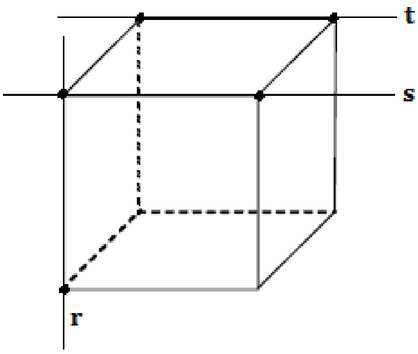
Postulados de determinação

- **Determinação da reta:**
  Dois pontos distintos determinam uma reta.

- **Determinação do plano:**
  - Três pontos não colineares determinam um plano.
  - Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
  - Duas retas concorrentes determinam um plano.
  - Duas retas paralelas determinam um plano.

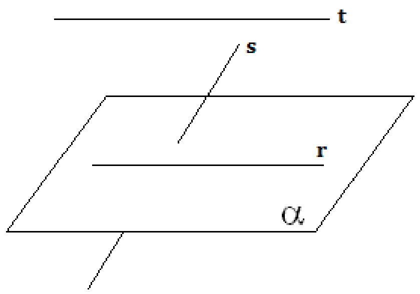
Posições relativas

- **Entre retas:**



$$\text{Retas}\begin{cases}\text{Coplanares}\begin{cases}\text{Paralelas}\begin{cases}\text{Distintas (s, t)}\\ \text{Coincidentes}\end{cases}\\ \text{Concorrentes (r, s)}\end{cases}\\ \text{Não-coplanares}\{\text{Reversas (r, t)}\end{cases}$$

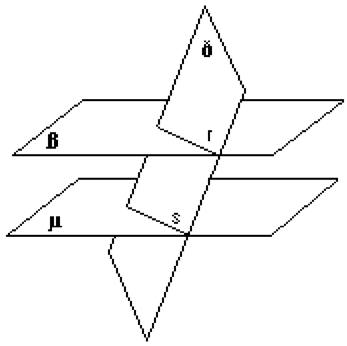
- **Entre reta e plano:**



Reta paralela ao plano: t
Reta contida no plano: r
Reta secante ao plano: s

Teorema: Se uma reta possui dois pontos distintos que pertencem a um plano, então ela está contida nesse plano.

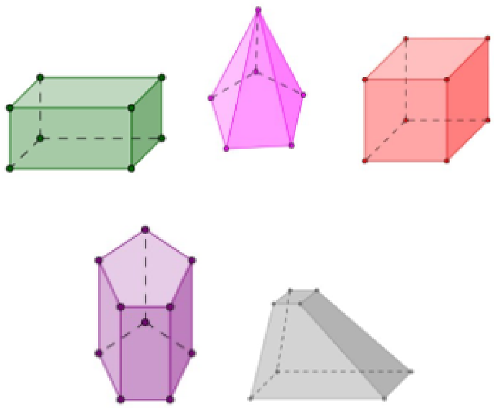
- **Entre planos:**



Planos paralelos distintos: μ e β
Planos secantes: δ e μ ou δ e β

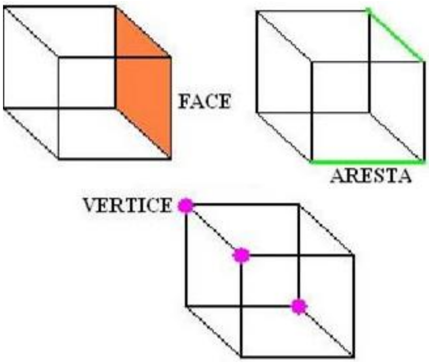
Poliedros

São sólidos geométricos formados por vértices, arestas e faces, cujas superfícies são polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.). A palavra poliedro vem do grego antigo, em que poli significa "vários" e "edros" significa "faces". Veja alguns exemplos de poliedros:



Relação de Euler

Em um poliedro, como dito antes, podemos distinguir faces, arestas e os vértices. Observe abaixo:



Ou seja:

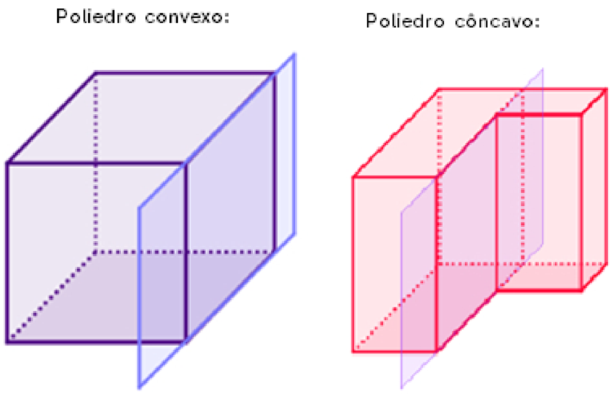
- faces são as superfícies planas poligonais que limitam o poliedro.
- arestas são as interseções entre as faces do poliedro.
- vértices são os pontos de encontro das arestas.

Leonhard Euler foi um matemático suíço que desenvolveu uma expressão matemática que descreve a relação entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Eis a fórmula:

$$V + F = A + 2$$

Devemos ter cuidado ao usar essa fórmula, pois ela funciona para qualquer poliedro convexo e para *alguns* poliedros côncavos. Mas o que são poliedros convexos e côncavos?

- Um **poliedro** é chamado **convexo** quando o plano que contém cada face deixa todas as outras em um mesmo semiespaço.



Cálculo para quantidade de arestas de um poliedro

Seja um poliedro com f_3 faces triangulares, f_4 faces quadrangulares, f_5 pentagonais etc...

Podemos calcular a quantidade de arestas (A) desse poliedro usando a fórmula:

$$2A = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots$$

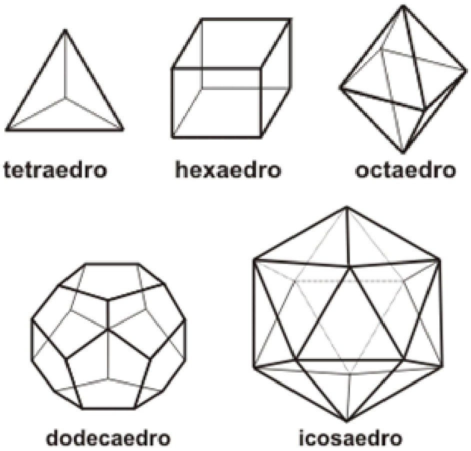
Poliedros de Platão

O filósofo Platão criou um teorema que nos diz que existem 5, e apenas 5, poliedros regulares. Esses 5 poliedros são chamados poliedros de Platão.

Para que possa ser um poliedro de Platão, é necessário que o poliedro obedeça às seguintes disposições:

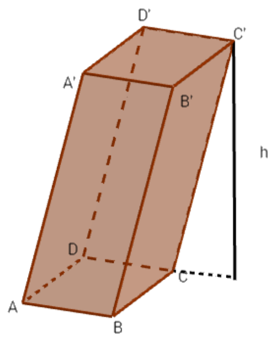
- todas as faces devem ter a mesma quantidade n de arestas;
- todos os vértices devem ser formados pela mesma quantidade m de arestas;

Estes são os poliedros de Platão:



Prisma

Prisma é um solido geométrico caracterizado por tem suas bases sendo formadas por polígonos.



Bases: ABCD e A'B'C'D'
Arestas das bases: Inferior: AB, AD, BC, CD
Superior: A'B', A'D', B'C', C'D'
Arestas Laterais: AA', BB', CC', DD'
Altura: h

Números de Faces = 6

- Em relação ao número de lados dos polígonos das bases, os prismas podem ser classificados como:
  Triangulares: as bases são triângulos
  Quadrangulares: as bases são quadriláteros
  Pentagonais: as bases são pentágonos
  Hexagonais: as bases são hexágonos
  E assim por diante.

  Quando as bases de um prisma reto são polígonos regulares (todos os lados iguais), ele é chamado de prisma regular.

- Em relação a inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser classificados como:
  Oblíquos: as arestas laterais são oblíquas, em relação à base
  Retos: as arestas laterais são perpendiculares à base. Em todo prisma reto as faces laterais são retângulos e a altura do prisma coincide com as arestas laterais.

Área

$$A_t = 2A_b + A_l$$

A_t = Área Total
A_b= Área da Base
A_l= Área Lateral

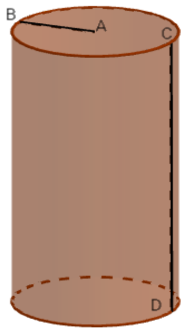
Volume

$$V = A_B H$$

A_B = Área da Base
H = Altura

Cilindro

Cilindro é um solido geométrico caracterizado por tem suas bases sendo formadas por círculos.



Bases: Círculos de raio AB
Altura: CD
Geratriz: CD

Obs: Geratriz: Medida lateral do cilindro
Um cilindro pode ser classificado conforme a inclinação da geratriz em relação à base:
Reto: o cilindro circular é reto quando a geratriz é perpendicular à base.
Oblíqua: o cilindro circular é oblíqua quando a geratriz é oblíqua à base.

Área da base:

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral:

$$A_l = 2\pi r h$$

Área total:

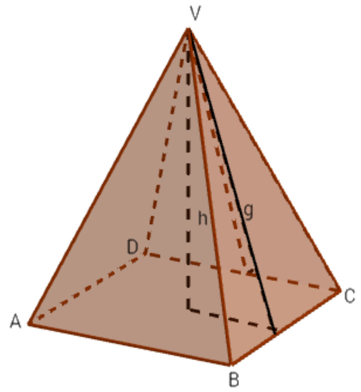
$$A_t = 2A_b + A_l$$
$$A_t = 2\pi r(h + r)$$

Volume:

$$V = A_B h$$
$$V = \pi r^2 h$$

Pirâmide

Pirâmide é um sólido geométrico caracterizado por uma base sendo um polígono plano (mais comuns são quadrados, triângulos ou hexágonos) e por um ponto externo a ela, onde de cada vértice se liga um segmento de reta até o ponto.
Uma pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Nesse tipo de pirâmide, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.
Exemplo: Pirâmide de base quadrada



Base: ABCD
Arestas das bases: AB, AD, BC, CD
Arestas Laterais: AV, BV, CV, DV
Altura: h
Números de Faces = 5
Apótema da pirâmide: g (segmento com uma extremidade no vértice P e outra em alguma parte da base). Na pirâmide regular, teremos:

$$h^2 + m^2 = g^2$$

Uma pirâmide pode ser classificada de acordo com as bases:
Pirâmide triangular – a base é um triângulo;
Pirâmide quadrangular – a base é um quadrilátero;
Pirâmide pentagonal – a base é um pentágono;
Pirâmide hexagonal – a base é um hexágono;
E assim por diante.

Área da base:
A área da base será a área do polígono formado.

Área lateral:
A área da lateral será a soma das áreas das faces laterais.

Área total:

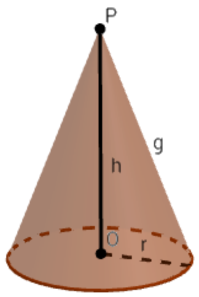
$$A_t = A_b + A_l$$

Volume:

$$V = \frac{1}{3} A_B h$$

Cone:

Cone é um solido geométrico caracterizado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto P (vértice) e a outra num ponto qualquer da região circular que form a base.



Base: Círculos de raio r
Altura: h
Geratriz: segmento com uma extremidade no vértice P e outra em alguma parte da circunferêcia da base.

Área da base:

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral:

$$A_b = \pi r g$$

Área total:

$$A_t = A_b + A_l$$

$$A_t = \pi r(g + r)$$

Volume:

$$V = \frac{1}{3} A_B h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Esfera

É sólido limitado por uma *superfície esférica* fechada e que tem todos os seus pontos à mesma distância de um ponto em seu interior.

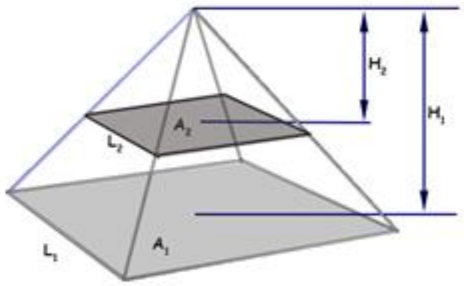
Área da superfície esférica

$$A = 4\pi R^2$$

Volume

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Tronco de pirâmide
Considere uma pirâmide e uma secção transversal paralela à base. Denominamos tronco de pirâmide à parte da pirâmide limitada pela base e pela secção transversal.
Elementos:

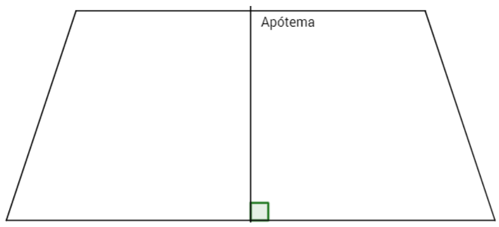


$H_1 \rightarrow$ altura total da pirâmide
$H_2 \rightarrow$ altura da pirâmide menor
$A_1 \rightarrow$ área da base maior do tronco
$A_2 \rightarrow$ área da base menor do tronco
$L_1 \rightarrow$ aresta da base
$L_2 \rightarrow$ aresta da secção transversal

Observando a figura podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \text{ e } \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3$$

Apótema do tronco de uma pirâmide:



1. As faces laterais do tronco de pirâmide são trapézios isósceles congruentes.
2. O apótema do tronco é a altura do trapézio.

Volume do tronco de pirâmide

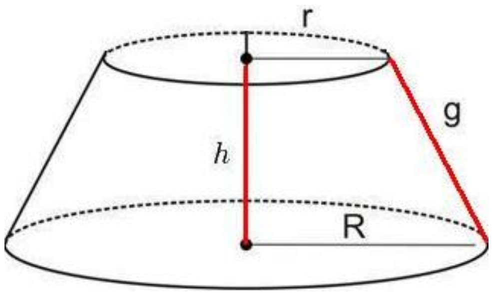
O volume de tronco de pirâmide é a diferença entre o volume original e o volume da pirâmide determinada pela secção transversal.

E pode ser calculado pela expressão:

$$V = \frac{H_1}{3}\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1A_2}\right)$$

Tronco de cone circular reto

Considere um cone circular e uma secção transversal qualquer. Denominamos tronco de cone à parte do cone limitada pela base e por essa secção transversal.



g → geratriz

h → altura

R → Raio maior

r → raio menor

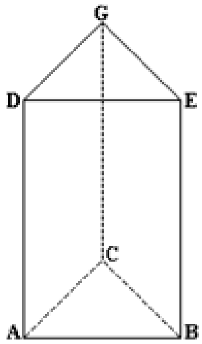
Volume do tronco de cone:

Seja um tronco de cone, de raios R e R' e altura h. O volume desse tronco pode ser calculado através da expressão:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R.r\right)$$

Exercícios

1. Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial.



Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice

a) A

b) B

c) C

d) D

e) E

2. Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

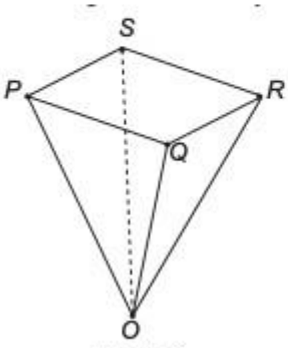


Figura 1

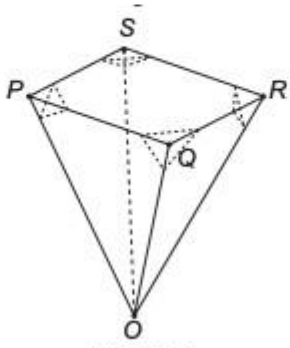


Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.

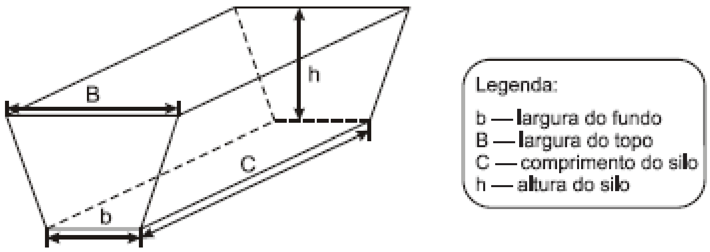
b) 9, 24 e 13.

c) 7, 15 e 12.

d) 10, 16 e 5.

e) 11, 16 e 5.

3. Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc. embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

a) 110.

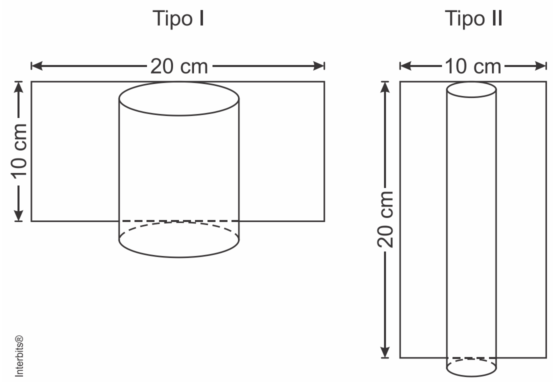
b) 125.

c) 130.

d) 220.

e) 260.

4. Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de $20\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}$ (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

a) o triplo.

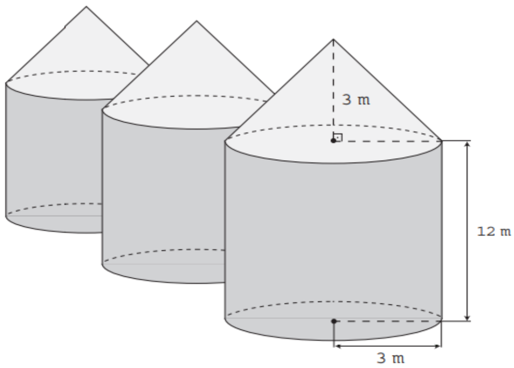
b) o dobro.

c) igual.

d) a metade.

e) a terça parte.

5. Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6

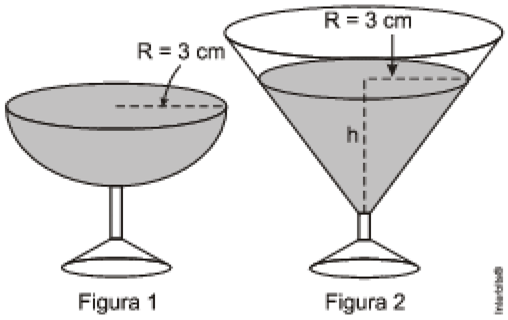
b) 16

c) 17

d) 18

e) 21

6. Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.
Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33.

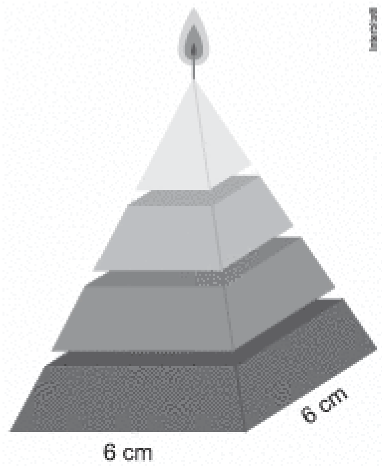
b) 6,00.

c) 12,00.

d) 56,52.

e) 113,04.

7. Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm³.

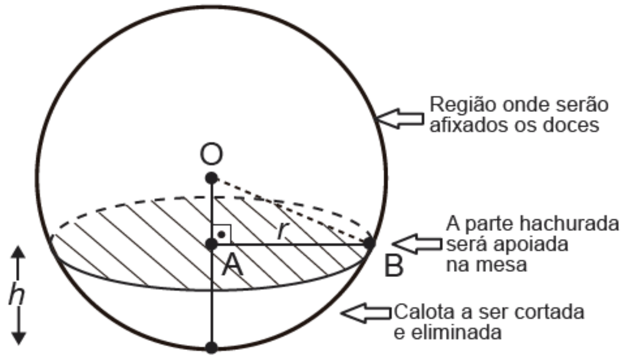
b) 189 cm³.

c) 192 cm³.

d) 216 cm³.

e) 540 cm³.

8. Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio *r* da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura *h*, em centímetro, igual a

a) $5-\dfrac{\sqrt{91}}{2}$

b) $10-\sqrt{91}$

c) 1

d) 4

e) 5

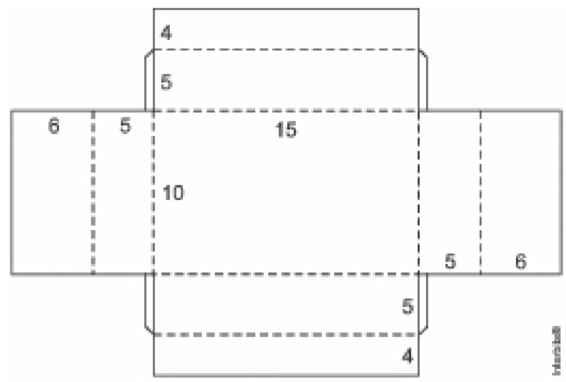
9. Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas. No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

10. Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de

I. um cone reto de altura 1cm e raio da base 1,5cm.
II. um cubo de aresta 2cm.
III. uma esfera de raio 1,5cm.
IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2cm, 3cm e 4cm.
V. um cilindro reto de altura 3cm e raio da base 1cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

a) I, II e III.

b) I, II e V.

c) I, II, IV e V.

d) II, III, IV e V.

e) III, IV e V.

Gabarito

1. E

Saiu de G

Percorreu GC. Está agora em C

Partiu de C e percorreu a diagonal $\overline{CD}$. Está agora em D

Partiu de D e percorreu $\overline{DE}$ (DE é reversa com $\overline{CG}$)

Chegou, portando no ponto E.

2. A

Uma pirâmide quadrangular possui 5 faces, 8 arestas e 5 vértices. Após os cortes, tais quantidades serão acrescidas em $4,$ 12 e 8 unidades, respectivamente.
Portanto, a joia ficará com 9 faces, 20 arestas e 13 vértices.

3. A

Como $h = 2\,\text{m},$ segue-se que $b = 6 - 2 \cdot 0{,}5 = 5\,\text{m}.$ Logo, segue que o volume total do silo é igual a $2 \cdot \left(\frac{6+5}{2}\right) \cdot 20 = 220\,\text{m}^3.$ Em consequência, sabendo que 1 tonelada de forragem ocupa $2\,\text{m}^3,$ podemos concluir que o resultado pedido é $\frac{220}{2} = 110$ toneladas.

4. B

Sejam V_I e V_{II} os volumes das velas de cada tipo. Temos que

$V_I = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10 = \frac{1000}{\pi}\text{cm}^3$ **e** $V_{II} = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = \frac{500}{\pi}\text{cm}^3.$

Se o custo é diretamente proporcional ao volume, então $C = k \cdot V,$ em que C é o custo, k é a constante de proporcionalidade e V é o volume.
Desse modo,

$$\left.\begin{array}{l} C_I = k \cdot \dfrac{1000}{\pi} \\ C_{II} = k \cdot \dfrac{500}{\pi} \end{array}\right| \Leftrightarrow \frac{C_I}{C_{II}} = 2 \Leftrightarrow C_I = 2 \cdot C_{II},$$

Ou seja, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será o dobro.

5. D

O volume do silo é dado por

$$\pi \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 \cong 324 + 27 \cong 351\,m^3.$$

Portanto, se n é o número de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo, então

$$n \geq \frac{351}{20} = 17{,}55.$$

A resposta é $18.$

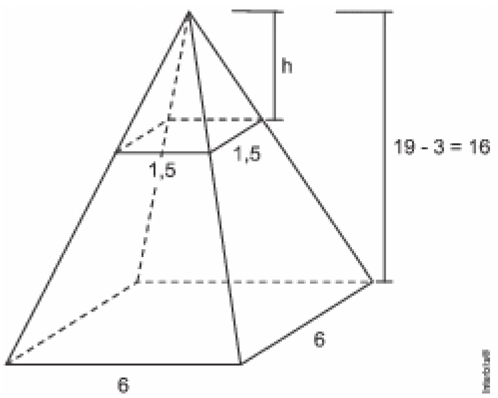
6. B

$$\frac{2}{3}.\pi.3^3 = \frac{1}{3}\pi.3^2.h \Leftrightarrow 3h = 18 \Leftrightarrow h = 6cm$$

7. B

$$\frac{h}{16}\frac{1{,}5}{6} \Leftrightarrow h = 4$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}6^2 \cdot 16 - \frac{1}{3}.1{,}5^2 \cdot 4 = 189\ \text{cm}^3$$



8. C

O triângulo OAB é um triângulo pitagórico do tipo 3-4-5, portanto:

$\overline{OA} = 4$

$AB = r = 3$

$R = 5$

$h = R - \overline{OA} = 5 - 4 \Rightarrow h = 1$

9. D

O número máximo de potes em cada caixa é dado por

$$\left[\frac{8}{4}\right]\cdot\left[\frac{8}{4}\right]\cdot\left[\frac{40}{6}\right]=2\cdot 2\cdot 6=24,$$

$$\left[\frac{8}{4}\right]\cdot\left[\frac{20}{4}\right]\cdot\left[\frac{14}{6}\right]=2\cdot 5\cdot 2=20,$$

$$\left[\frac{18}{4}\right]\cdot\left[\frac{5}{4}\right]\cdot\left[\frac{35}{6}\right]=4\cdot 1\cdot 5=20,$$

$$\left[\frac{20}{4}\right]\cdot\left[\frac{12}{4}\right]\cdot\left[\frac{12}{6}\right]=5\cdot 3\cdot 2=30$$

e

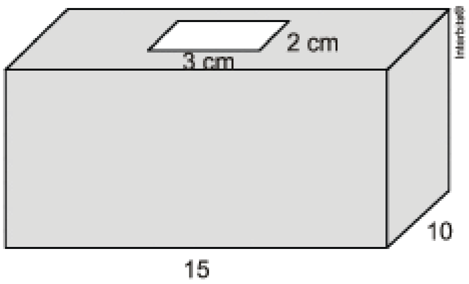
$$\left[\frac{24}{4}\right]\cdot\left[\frac{8}{4}\right]\cdot\left[\frac{14}{6}\right]=6\cdot 2\cdot 2=24.$$

Portanto, ele deve adquirir o modelo IV.

Observação: $[x]$ denota o maior inteiro menor do que ou igual a x.

10. C

A caixa montada pode ser representada pela figura a seguir:



Desta forma, o único sólido que não passa pela abertura da caixa é a esfera.