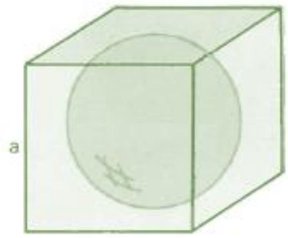
Inscrição e circunscrição de sólidos

Resumo

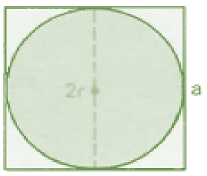
Nesta aula apresentaremos através de exemplos inscrição e circunscrição dos sólidos mais comuns: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Esfera e Cubo

<u>Esfera inscrita em cubo</u>

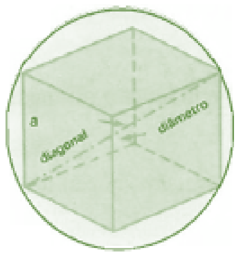


O diâmetro da esfera será igual a aresta do cubo

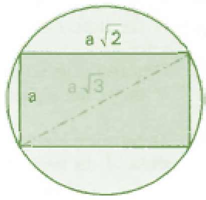


$$\boxed{2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}}$$

<u>Esfera circunscrita em cubo</u>



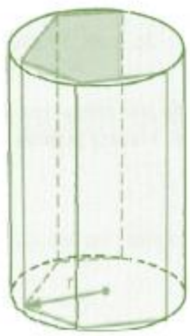
O diâmetro da esfera será igual a diagonal do cubo



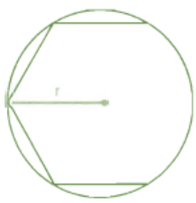
$$\boxed{2r = a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Prisma e cilindro

<u>Prisma inscrito em cilindro</u>

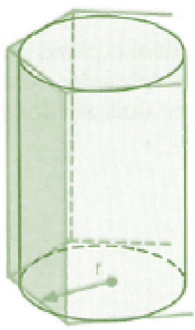


O raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base do prisma.



Base

<u>Prisma circunscrito em cilindro</u>



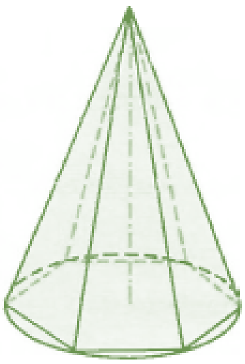
O raio da base do cilindro é o raio da circunferência inscrita à base do prisma.

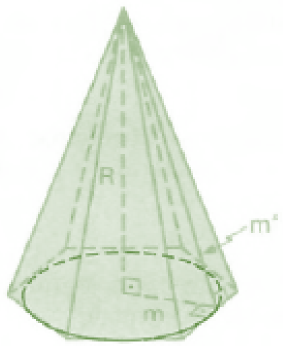
Base

Pirâmide e cone

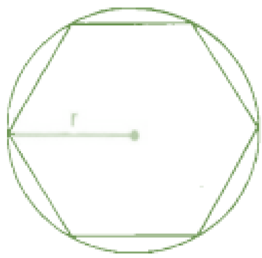
Pirâmide inscrita em cone

Pirâmide circunscrita em cone





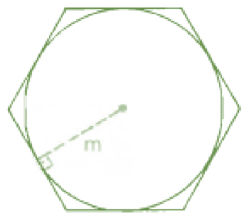
O raio da base do cone é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.



Base

O raio da base do cone é a apótema da base da pirâmide.

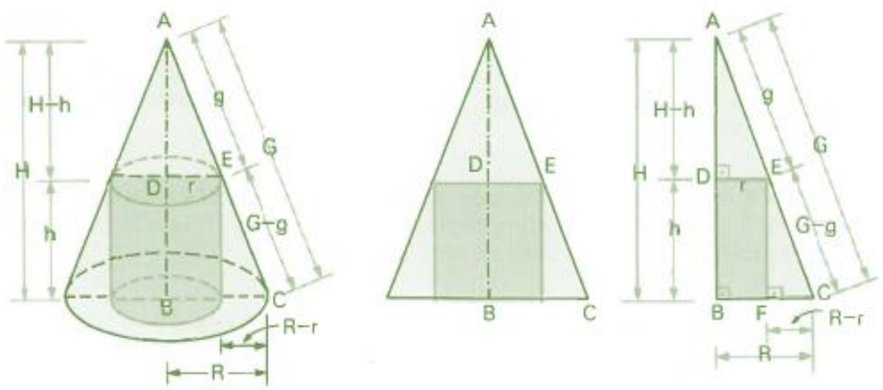
A geratriz do cone é o apótema da pirâmide.



Base

Cilindro e cone

Cilindro Circular reto inscrito em cone reto



Usando os elementos indicados nas figuras, temos:

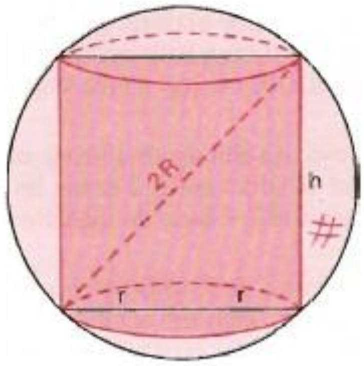
$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{g}{G}=\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}$$

$$\Delta EDF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{G-g}{G}=\frac{R-r}{R}=\frac{h}{H}$$

$$\Delta ADE \sim \Delta EFC \Rightarrow \frac{g}{G-g}=\frac{r}{R-r}=\frac{H-h}{h}$$

Cilindro e esfera

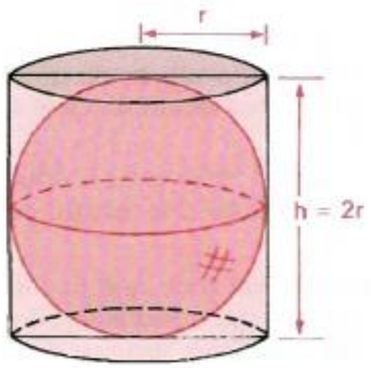
Cilindro inscrito numa esfera



O raio da base r e a altura h de um cilindro inscrito numa esfera de raio R possuem a seguinte relação:

$$(2r)^2 + h^2 = (2R)^2$$

Cilindro circunscrito a uma esfera



O cilinro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero cujo raio da base é igual ao raio da esfera

$$h = 2r$$

Exercícios

1. Uma esfera de raio R está inscrita em um cilindro. O volume do cilindro é igual a:

a) $\dfrac{\pi r^3}{3}$

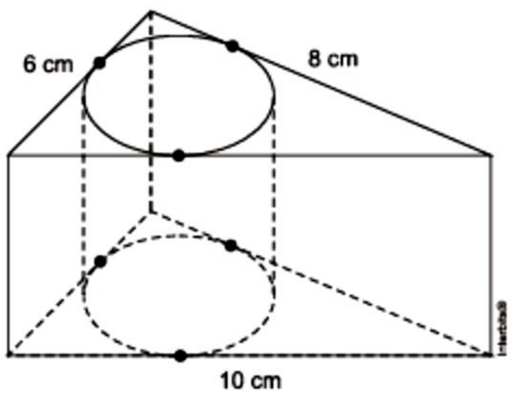
b) $\dfrac{2\pi r^3}{3}$

c) πr^3

d) $2r^3$

e) $2\pi r^3$

2. Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura e 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura. O raio da perfuração da peça é igual a:



a) 1 cm

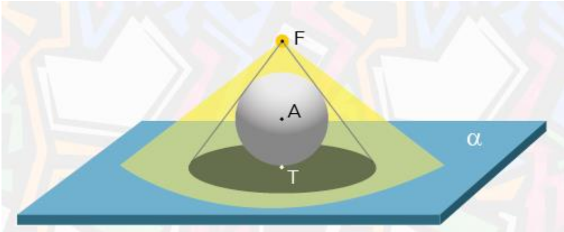
b) 2 cm

c) 3 cm

d) 4 cm

e) 5 cm

3. Uma esfera de centro A e raio igual a 3dm é tangente ao plano α de uma mesa em um ponto T. Uma fonte de luz encontra-se em um ponto F de modo que F, A e T são colineares.



Observe a ilustração. Considere o cone de vértice **F** cuja base é o círculo de centro **T** definido pela sombra da esfera projetada sobre a mesa. Se esse círculo tem área igual à da superfície esférica, então a distância **FT**, em decímetros, corresponde a:

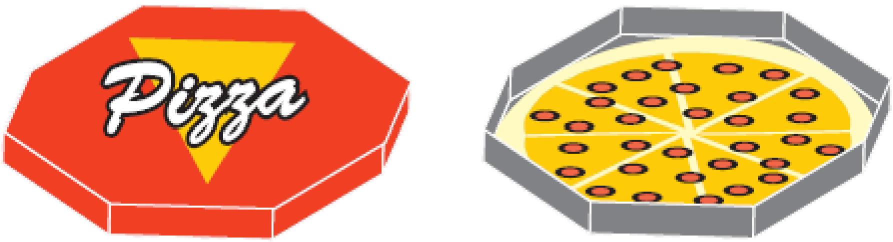
a) 10

b) 9

c) 8

d) 7

4. Uma embalagem em forma de prisma octogonal regular contém uma *pizza* circular que tangencia as faces do prisma.



Desprezando a espessura da pizza e do material usado na embalagem, a razão entre a medida do raio da pizza e a medida da aresta da base do prisma é igual a:

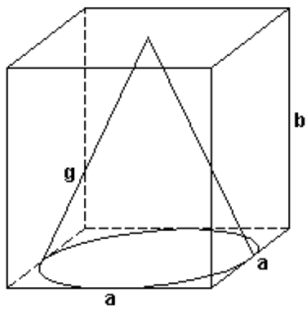
a) $2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

d) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

5. Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão b/a entre as dimensões do paralelepípedo é $\frac{3}{2}$ e o volume do cone é π. Então, o comprimento g da geratriz do cone é



a) $\sqrt{5}$

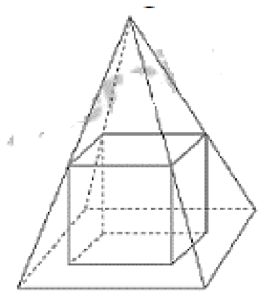
b) $\sqrt{6}$

c) $\sqrt{7}$

d) $\sqrt{10}$

e) $\sqrt{11}$

6. Um cubo tem quatro vértices nos pontos médios das arestas laterais de uma pirâmide quadrangular retangular, e os outros quatro na base da pirâmide, e os outros quatro na base da pirâmide, como mostra a figura abaixo.



a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{1}{8}$

7. Um designer criou pesos para papel usando cubos e esferas. Nas peças criadas a esfera está inscrita no cubo, que tem aresta medindo 6 cm. Para dar um efeito visual, ele colocou na parte interna do cubo, e externa à esfera, um líquido vermelho. Com 1 litro desse líquido o designer pode confeccionar no máximo quantas peças?

a) 9

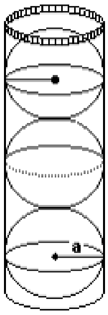
b) 12

c) 18

d) 24

e) 27

8. Bolas de tênis são vendidas, normalmente, em embalagens cilíndricas contendo 3 unidades.



Supondo-se que as bolas têm raio a em centímetros e tangenciam as paredes internas da embalagem, o espaço interno dessa embalagem que NÃO é ocupado pelas bolas é, em cm³

a) $2\pi a^3$

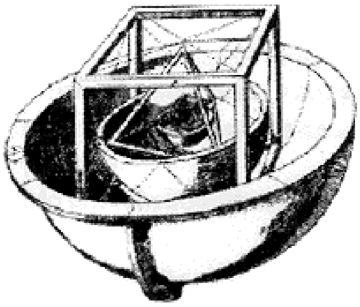
b) $\frac{4\pi a^3}{3}$

c) $\frac{\pi a^3}{3}$

d) a^3

e) $\frac{2\pi a^3}{3}$

9. O modelo astronômico heliocêntrico de Kepler, de natureza geométrica, foi construído a partir dos cinco poliedros de Platão, inscritos em esferas concêntricas, conforme ilustra a figura abaixo:
A razão entre a medida da aresta do cubo e a medida do diâmetro da esfera a ele circunscrita, é:



a) $\sqrt{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

10. Algumas caixas de pizza para entrega têm o formato de um prisma regular de base hexagonal. Considere uma caixa destas com altura de 4 cm e, com base, um polígono de perímetro 72 cm. Se a pizza tem o formato de um cilindro circular, então o volume máximo de pizza que pode vir nesta caixa é:

a) $216\sqrt{3}$ cm³

b) 576π cm³

c) $864\sqrt{3}$ cm³

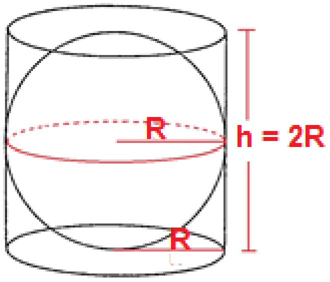
d) 108π cm³

e) 432π cm³

Gabarito

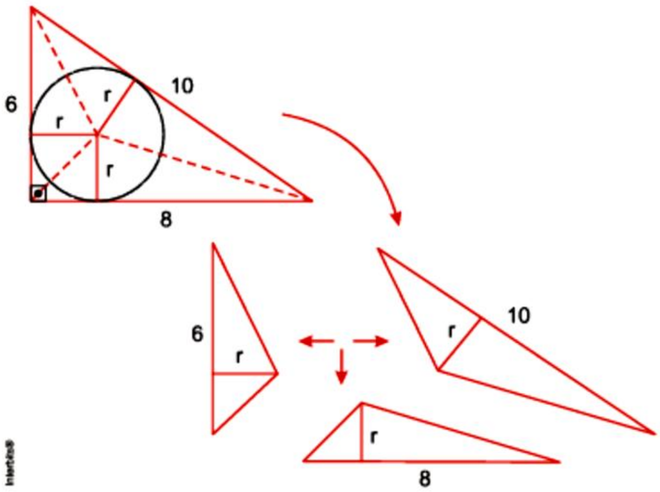
1. E

De acordo com a figura, o raio da esfera possui a mesma medida do raio da base do cilindro e a altura do cilindro vale o dobro do raio**.**



$$V_{cilindro} = \pi R^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$$

2. B



Seja r o raio da base do cilindro
O triângulo é retângulo, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$
Logo, sua área será $A = \frac{6.8}{2} = 24$

Portanto: $\frac{6.r}{2} + \frac{8.r}{2} + \frac{10.r}{2} = 24$
$12r = 24$
$r = 2$

3. C

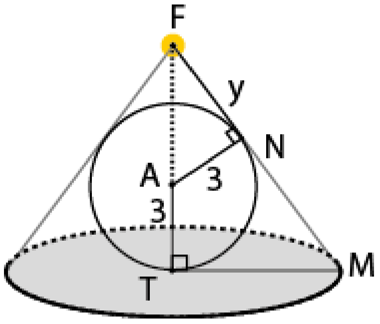
Considere-se o raio do círculo definido pela sombra igual a x. A área desse círculo será igual a πx^2.
A esfera possui raio r = 3 dm. Logo, a área de sua superfície corresponde a:

$$4\pi r^2 = 36\pi$$

Como a área do círculo é igual à da superfície esférica:

$$\pi x^2 = 36\pi \leftrightarrow x = 6 \text{ dm}$$

Observe agora a figura:



Os triângulos FMT e AFN são semelhantes. Sua razão de semelhança é expressa por:

$$\frac{\overline{MT}}{\overline{AN}} = \frac{6}{3} = 2$$

Sabe-se assim que cada lado do triângulo maior equivale ao dobro do lado correspondente do triângulo menor. Pode-se estabelecer a seguinte equivalência:

$\overline{FT} = 2y$

Logo:

$\overline{AF} + 3 = 2y$

$\overline{AF} = 2y - 3$

No triângulo AFN:

$\overline{AF}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{FN}^2$

$(2y - 3)^2 = 3^2 + y^2$

$4y^2 - 12y + 9 = 9 + y^2$

$3y^2 - 12y = 0$

$y^2 - 4y = 0$

$y\,(y - 4) = 0$

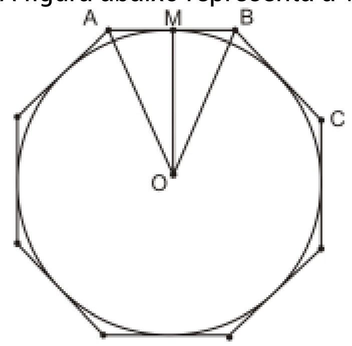
$y = 4$

Então:

$\overline{FT} = 2y = 8\text{ cm}$

4. C

A figura abaixo representa a vista superior da *pizza* na embalagem.



Como o octógono é regular, e o triângulo AOB é isósceles, têm-se os seguintes ângulos:

$$A\hat{O}B = 45°$$

$$M\hat{B}O = \frac{135°}{2} = 67,5°$$

Considere no triângulo OMB:

$$OM = r$$

$$MB = \frac{AB}{2} = \frac{\ell}{2}$$

Portanto:

$$tg(67,5°) = \frac{r}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2r}{\ell}$$

$$tg(135°) = \frac{2tg(67,5°)}{1 - tg^2(67,5°)}$$

$$tg^2(67,5°) - 2tg(67,5°) - 1 = 0$$

$$tg(67,5°) = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$$

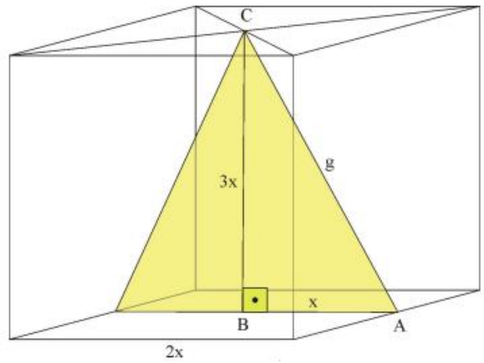
Logo:

$$\frac{2r}{\ell} = 1+\sqrt{2}$$

$$\frac{r}{\ell} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

5. D

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 3x \\ a = 2x \end{cases}$$



Aplicando Pitágoras em ABC: $g^2 = x^2 + 9x^2$, $g = x\sqrt{10}$

O volume do cone é π. Logo: $\frac{\pi x^2.3x}{3} = \pi \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$.

Assim $g = \sqrt{10}$

6. C

Seja x o lado do cubo e y o lado da base da pirâmide.

Se a face superior do cubo divide as arestas laterais da pirâmide ao meio, os lados da base da pirâmide são o dobro do lado do cubo: y = 2x

O mesmo acontece com a altura da pirâmide: H = 2x

Volume do cubo: $V_c = x^3$

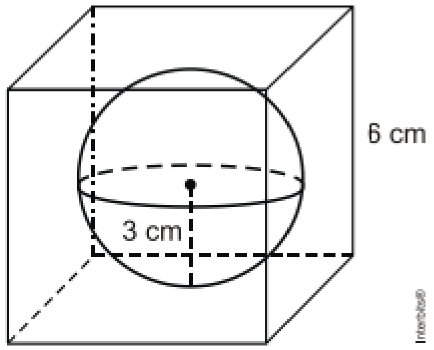
Volume da pirâmide: $V_p = \frac{y^2.H}{3} \leftrightarrow V_p = \frac{(2x)^2(2x)}{3} = \frac{8x^3}{3}$

Assim, temos:

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{3}{8}$$

7. A

Observe:



V(líquido) = V(cubo) – V(esfera)

V(líquido) = $6^3 - \dfrac{4\pi.3^3}{3}$ (considerando $\pi = 3{,}14$)

V(líquido) = 102,96cm^3

Número de peças com 1 Litro = $\dfrac{1000\text{cm}^3}{102{,}96\text{cm}^3}$ □ 9,7

Resposta: No máximo 9 peças.

8. A

Primeiro, é importante reparar que h = 6r.

Agora, sabemos que o volume do cilindro é $\pi r^2 h = \pi r^2 6r = 6\pi r^3$. Temos que calcular o volume de cada esfera:

$\dfrac{4\pi r^3}{3}$. Como são 3 iguais, temos que o volume total das 3 é: $4\pi r^3$.

Por fim, o volume do espaço não ocupado é $6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$. Como o raio r = a, então, $2\pi a^3$.

9. C

Como o cubo está inscrito na esfera, teremos:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2R = a\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

10. E

Observe:

Como o perímetro da base do prisma é igual a 72 cm, segue que a aresta da base desse prisma mede $\ell = \dfrac{72}{6} = 12\text{cm}$. Portanto, sabendo que o raio do cilindro é igual $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{cm}$ e a altura da caixa é 4 cm, temos que o volume máximo de pizza que pode vir na caixa é $\pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 432\pi\,\text{cm}^3$.