Polinômios: Definição, grau, identidade

Resumo

Polinômios
Um polinômio é toda expressão do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^n + a_0$$

Em que

$$\begin{cases} a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_a \text{ são coeficientes} \\ x \text{ é variável} \\ a_0 \text{ é o termo independente} \\ n \text{ é o grau do polinômio, se } a_n \neq 0 \end{cases}$$

Grau de um Polinômio
O grau de um polinômio é o valor do maior expoente de x, desde que o coeficiente dessa potência seja diferente de 0.

Exemplo:

$$P(x) = 2x^3 - 7x + 6 \quad \rightarrow \quad Gr(P) = 3$$

$$P(x) = 3x^5 - x^4 + 2 \quad \rightarrow \quad Gr(P) = 5$$

Identidades Polinomiais

Polinômio Identicamente Nulo
Diz-se que um polinômio é identicamente nulo quando seu valor numérico é 0, qualquer que seja o valor de x. Para tal, todos os seus coeficientes são nulos.

$$P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x; P(x) = 0$$

Polinômios Idênticos
Dois polinômios são idênticos quando seus valores numéricos são iguais, qualquer que seja o valor atribuído a x. Para tal, os coeficientes dos termos de mesmo grau desses polinômios são iguais.

$$P(x) = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x; P(x) = Q(x)$$

Exercícios

1. Qual é o grau do polinômio $P(x) = 10x^6 - x^5 + 3x^3 - 5x^2 + 13$?

a) 0
b) 2
c) 5
d) 6
e) 7

2. Dados os polinômios $p(x) = (a-1)x^2 - (a-b)x + (2a-b+c)$ e $q(x) = 4x^2 - 5x + 1$, determine a, b e c para que tenhamos $p(x) = q(x)$.

a) a = 6, b = 0 e c = −9
b) a = 5, b = 0 e c = −9.
c) a = 5, b = 1 e c = −9
d) a = 5, b = 0 e c = 6

3. Fornecido o polinômio $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + n$, se $p(2) = 0$ e $p(-1) = -6$, determine os valores de m e n.

a) 1 e 5
b) 3 e 6
c) 2 e 4
d) 9 e 4

4. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (m-4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m+4)x + 4$ seja do 2º grau.

a) 4
b) 9
c) 6
d) Não há valor que satisfaça as condições.

5. Sendo $p(x)=ax^4+bx^3+c$ e $q(x)=ax^3-bx-c$, determine os coeficientes a, b e c, sabendo que $p(0)=0$, $p(1)=0$ e $q(1)=2$.

a) 3, 6, 0
b) 1, -1, 0
c) 2, 4, 2
d) 1, 2, 3

6. Determine os valores de m, n e p de modo que se tenha
$(m+n+p)x^4-(p+1)x^3+mx^2+(n-p)x+n=2mx^3+(2p+7)x^2+5mx+2m$.

a) 2, 7, 3
b) 2, 6, 1
c) -3, 1, 2
d) 4, 2, 1

7. Calcule os valores de a, b e c para que o polinômio $p(x)=a(x+c)^3+b(x+d)$ seja idêntico a $p(x)=x^3+6x^2+15x+14$.

a) 2, 5, 6
b) 1, 3, 2
c) 4, 5, 6
d) 1, 3, 6

8. Quais são os valores de m, n e l, respectivamente, para os quais o polinômio $p(x)=(2m-1)x^3-(5n-2)x^3+(3-2l)$ é nulo?

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}$
b) $3, 2, 5$
c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}$
d) $\frac{2}{6}, \frac{1}{5}, \frac{9}{6}$

9. Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$, em que a, b e c são números reais, então o valor de $a - b + c$ é

a) 9.

b) 10.

c) 12.

d) 13.

10. Considerando que $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$ p(x) = $2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$, para que valores de k temos $p(2) = 4$?

a) 6

b) 2

c) 1

d) 3

Gabarito

1. **D**
Como sabemos, O grau de um polinômio é o valor do maior expoente de x. Assim, Gr(P) = 6.

2. **B**
p(x) = q(x)
$(a - 1)x^2 - (a - b)x + (2a - b + c) = 4x^2 - 5x + 1$
a − 1 = 4
a = 4 + 1
a = 5
− (a − b) = −5
− (5 − b) = − 5
− 5 + b = −5
b = 5 − 5
b = 0
2a − b + c = 1
10 − 0 + c = 1
c = 1 − 10
c = − 9
Portanto, para que os polinômios sejam iguais, os coeficientes devem valer: a = 5, b = 0 e c = −9.

3. **C**
$p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + n$
$p(2) = 0$
$2 * 2^3 - 6 * 2^2 + 2 * m + n = 0$
$16 - 24 + 2m + n = 0$
$\boldsymbol{2m + n = 8}$

$p(-1) = -6$
$2 * (-1)^3 - 6 * (-1)^2 + (-1) * m + n = -6$
$-2 - 6 - m + n = -6$
$-m + n = 8 - 6$
$\boldsymbol{-m + n = 2}$

Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} 2m + n = 8 \\ -m + n = 2 \end{cases}$$

$-m + n = 2$
$n = 2 + m$

$2m + n = 8$
$2m + 2 + m = 8$
$3m = 8 - 2$
$3m = 6$
$\mathbf{m = 2}$

$n = 2 + m$
$n = 2 + 2$
$\mathbf{n = 4}$

4. D

As condições para que o polinômio dado seja do 2º grau são as seguintes:

$m - 4 = 0$
$m = 4$

$m^2 - 16 \neq 0$
$m^2 \neq 16$
$m \neq 4$ e $m \neq -4$

Para $m = 4$, temos:
$p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$
$p(x) = (4 - 4)x^3 + (4^2 - 16)x^2 + (4 + 4)x + 4$
$p(x) = 0x^3 + 0x^2 + 8x + 4$
$p(x) = 8x + 4$
Grau 1

Para $m = -4$, temos:
$p(x) = (-4 - 4)x^3 + ((-4)^2 - 16)x^2 + (-4 + 4)x + 4$
$p(x) = -8x^3 + 0x^2 + 0x + 4$
$p(x) = -8x^3 + 4$
Grau 3

Não existe valor para m de forma que p(x) tenha grau 2.

5. B

$p(x) = ax^4 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 - bx - c$

$p(0) = 0$
$p(0) = a * 0^4 + b * 0^3 + c$
$c = 0$

$p(1) = 0$
$p(1) = a * 1^4 + b * 1^3 + c$
$0 = a + b + 0$
$a + b = 0$

$q(1) = 2$
$q(1) = a * 1^3 - b * 1 - c$
$2 = a - b - 0$
$a - b = 2$

Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$a + b = 0$
$a = -b$

$a - b = 2$
$-b - b = 2$
$-2b = 2$
$2b = -2$
$b = -1$

$a = -b$
$a = -(-1)$
$a = 1$

Os valores dos coeficientes são: $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.

6. C

$(m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p)x + n = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m.$

$m + n + p = 0$

$-(p + 1) = 2m$

$m = 2p + 7$

$n - p = 5$

$n = 2m$

$-(p + 1) = 2m$

$-p - 1 = 2(2p + 7)$

$-p - 1 = 4p + 14$

$-p - 4p = 14 + 1$

$-5p = 15$

$5p = -15$

$p = -3$

$m = 2p + 7$

$m = 2(-3) + 7$

$m = - 6 + 7$

$m = 1$

$n = 2m$

$n = 2.1$

$n = 2$

Portanto, os valores de p, m e n são respectivamente −3, 1 e 2.

7. B

$a(x + c)^3 + b(x + d) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$
$a(x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3) + bx + bd = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$
$ax^3 + 3x^2ac + 3axc^2 + ac^3 + bx + bd = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$
$ax^3 + 3x^2ac + x(3ac^2 + b) + (ac^3 + bd) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$

$a = 1$
$3ac = 6$
$3ac^2 + b = 15$
$ac^3 + bd = 14$

Dessa forma:

$3ac = 6$
$3 .1.c = 6$
$3c = 6$
$c = 2$

$3ac^2 + b = 15$
$3.1.2^2 + b = 15$
$12 + b = 15$
$b = 3$

$ac^3 + bd = 14$
$1 .2^3 + 3.d = 14$
$8 + 3d = 14$
$3d = 14 - 8$

$3d = 6$
$d = 2$
Os números a, b e c são respectivamente 1, 3 e 2.

8. C
$2m - 1 = 0$
$2m = 1$
$m = 1/2$

$5n - 2 = 0$
$5n = 2$
$n = 2/5$

$3 - 2l = 0$
$-2l = -3$
$2l = 3$
$l = 3/2$

9. D
Desenvolvendo e agrupando termos semelhantes, obtemos

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c.$$

Assim, para que $x^2 + 9$ seja idêntica $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$, deve-se ter

$$\left|\begin{array}{l} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2. \\ c = 10 \end{array}\right.$$

Portanto, temos $a - b + c = 1 - (-2) + 10 = 13.$

10. D
$p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 2k$
$p(2) = 4$
$2.2^3 - k.2^2 + 3.2 - 2k = 4$
$16 - 4k + 6 - 2k = 4$
$-4k - 2k = -16 - 6 + 4$
$-6k = -18(-1)$
$6k = 18$
$k = 3$
Temos que o valor de k é igual a 3.