Juros simples e compostos

Resumo

Juros

A palavra juros é bem familiar ao nosso cotidiano e está amplamente difundida nos mais variados segmentos. Por exemplo, se uma pessoa pega empréstimo em um banco ou atrasa alguma conta, sabemos que correm juros em cima desta aplicação. Normalmente, quando se realiza alguma dessas operações, fica estabelecido uma taxa de juros x% por período, dia, mês ou ano.

Vejamos a seguir alguns termos muito usados em matemática financeira:

- U.M.: Unidade Monetária (Real, dólar, euro...).
- C: o capital inicial.
- t: tempo.
- i: a taxa de juros.
- M: montante, que corresponde ao capital acrescido dos juros.
- J: juros, que correspondem ao valor obtido quando aplicamos uma taxa de juros sobre o capital.

É sempre verdade que $M = C + J$.

Juros Simples

É a modalidade de juros em que a taxa de juros é aplicada sempre sobre o capital inicial. Sendo a taxa constante e o capital inicial também constante, os juros de cada período também serão constantes.

Para calcularmos os juros, temos:

$$M = C(1 + it) \text{ ou } J = C.i.t$$

- O tempo e a taxa devem estar na mesma unidade de tempo para se calcular os juros.
  E ainda, a taxa não deve ficar em porcentagem, e sim em decimal.

- As parcelas de um pagamento parcelado a juros simples estão em uma progressão aritmética! Cada parcela é sempre acrescida de um valor fixo que, aqui, chamamos de juros.

Juros compostos

É a modalidade de juros em que a taxa de juros é aplicada sobre o montante do período anterior. Diferente do regime de juros simples, onde se calcula primeiro os juros e posteriormente o montante, nos juros compostos calcula-se diretamente o montante aplicando ao capital inicial o fator multiplicativo elevado ao número de períodos decorridos:

M = C(1+i)(1+i)...(1+i) por t vezes.

Assim, temos:

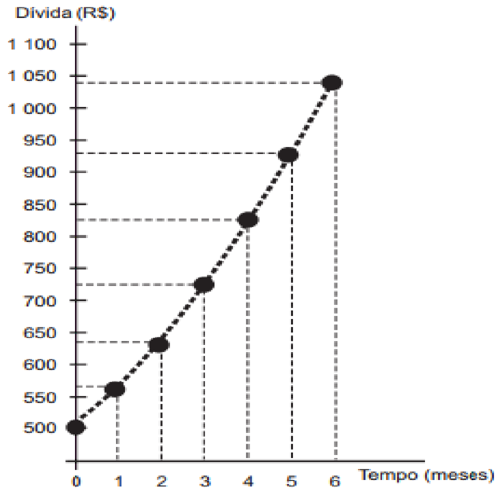
$$M = C.(1+i)^t$$

- As parcelas pagas no regime de juros compostos estão em progressão geométrica!

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

a) R$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.

b) R$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.

c) R$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.

d) R$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.

e) R$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

2. Um empréstimo foi feito à taxa mensal de i%, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.
O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.
A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é:

a) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}\right]$

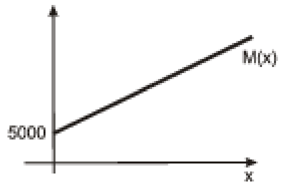
b) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2i}{100}\right)}\right]$

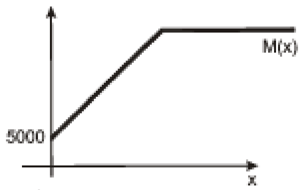
c) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}\right]$

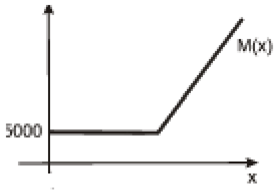
d) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{3i}{100}\right)}\right]$

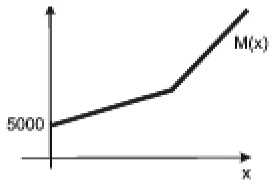
e) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^3}\right]$

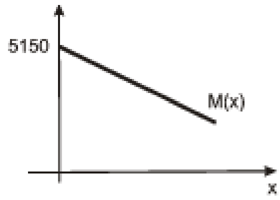
3. Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de meses. Nessas condições, a representação gráfica correta para M(x) é?

a)


b)


c)


d)


e)


4. Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o rendimento médio mensal das famílias catarinenses é R$ 1368,00. Considerando-se que uma família pegou um empréstimo no valor de 30% de sua renda média mensal e vai pagar este empréstimo a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, quanto essa família pegou emprestado e qual o valor que a família irá pagar (montante final) se saldar essa dívida em 2 meses?

a) Pegou emprestado R$ 407,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 423,86.

b) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.

c) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 424,90.

d) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.

e) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 426,98.

5. Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10 % ao mês e gerou, em três meses, um montante de R$53.240,00.

Calcule o valor, em reais, do capital inicial C.

a) 40 mil

b) 38 mil

c) 36 mil

d) 42 mil

6. Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos. Nos quato primeiros meses, a taxa foi de 1%, ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês. Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$65.536,00, então o capital aplicado em reais, foi aproximadamente igual a:

Dado: $65536 = 2^{16}$

a) $3,66^8$.

b) $3,72^8$.

c) $3,78^8$.

d) $3,88^8$.

e) $3,94^8$.

7. Analise as seguintes situações:

1. Seu João fez um empréstimo de R$ 1000,00 no Banco A, a uma taxa de juros simples; após 4 meses, pagou um montante de R$ 1320,00 e quitou sua dívida.

2. Dona Maria fez um empréstimo de R$ 1200,00 no Banco B, a uma taxa de juros simples; após 5 meses, pagou um montante de R$ 1800,00 e quitou a dívida.

Assinale a alternativa CORRETA.
A taxa mensal de juros simples cobrada pelo Banco A e pelo Banco B, respectivamente, é:

a) 8%am e 10%am

b) 18%am e 13%am

c) 6,4%am e 12,5%am

d) 13%am e 18%am

e) 10%am e 8%am

8. Em 2000, certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares ao FMI (Fundo Monetário Internacional) para pagar em 100 anos. Porém, por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje e a dívida foi sendo "rolada" com a taxação de juros compostos de 8,5% ao ano. Determine o valor da dívida no corrente ano de 2015, em dólar. Considere $(1{,}085)^5 \cong 1{,}5$.

a) 1,2 milhões.

b) 2,2 milhões.

c) 3,375 milhões.

d) 1,47 milhões.

e) 2 milhões.

9. Um capital aplicado a juros compostos a uma certa taxa anual de juros dobra a cada 7 anos.
Se, hoje, o montante é R$250 000,00, o capital aplicado há 28 anos é um valor cuja soma dos algarismos vale

a) 20

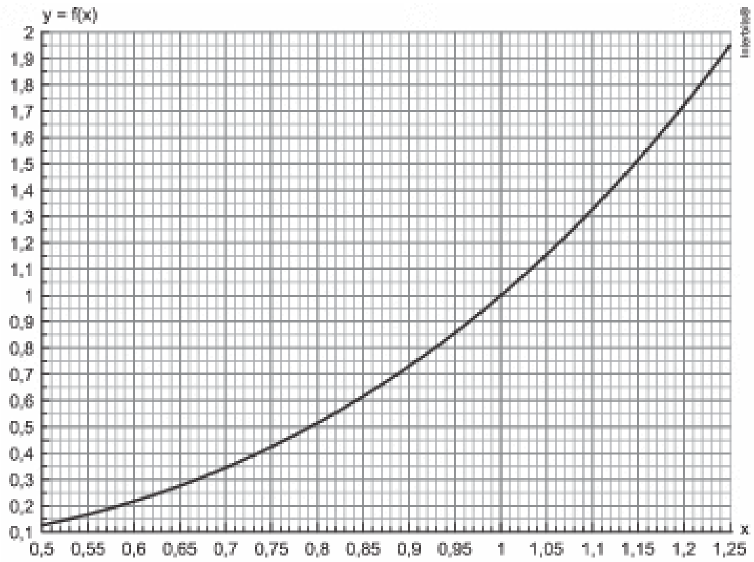
b) 17

c) 19

d) 21

e) 18

10. Leia o texto abaixo para responder as perguntas:
A figura a seguir exibe um trecho do gráfico da função f cuja lei é $f(x) = x^3$.



Um veículo, após ser retirado da concessionária, passa a sofrer uma desvalorização de 5% ao ano. Dessa forma 9 anos após a saída da concessionária, a desvalorização total do veículo terá sido de, aproximadamente,

a) 50%

b) 40%

c) 30%

d) 20%

e) 10%

Gabarito

1. C

Do gráfico, tem-se que o saldo devedor inicial é $R\$\ 500,00.$ Além disso, como a capitalização é composta, podemos concluir que a parcela mensal de juros é variável. Finalmente, supondo uma taxa de juros constante e igual a 10% ao mês, teríamos, ao final de 6 meses, um saldo devedor igual a $500 \cdot (1,1)^6 \cong R\$\ 885,78.$ Portanto, comparando esse resultado com o gráfico, podemos afirmar que a taxa de juros mensal é superior a $10\%.$

2. A

Calculando:
$\text{Parcela} = P$

No ato da 6ª parcela:

$$P + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} = P \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

3. A

Considerando juros simples o montante M pode ser escrito como uma função do primeiro grau
A partir do número de meses x.

$$M(x) = 5000 + \frac{3}{100}x$$

Logo seu gráfico será parte de uma reta, conforme indica a figura a.

4. E

Para obter o valor do empréstimo deve-se calcular quanto 30% representa de $R\$\ 1.368,00.$ Ou seja:
$1368 \times 0,3 = 410,40 \text{ reais}$

Sabendo o valor do empréstimo, basta aplicar a fórmula de juros compostos:
$M = C \cdot (1+i)^t$

Onde M representa o montante final, C representa o capital inicial, i representa a taxa de juros, t representa o tempo de aplicação. Sabendo que o valor do empréstimo representa capital inicial, temos:

$$M = C \cdot (1+i)^t$$
$$M = (410,4) \cdot (1+2\%)^2$$
$$M = (410,4) \cdot (1+0,02)^2 = (410,4) \cdot (1,02)^2$$
$$M = 426,98 \text{ reais}$$

5. A

Sendo $i = 10\% = 0,1$ e $n = 3,$ vem

$$53240 = C(1+0,1)^3 \Leftrightarrow C = \frac{53240}{1,331}$$
$$\Leftrightarrow C = R\$\ 40.000,00.$$

6. E

Seja C o capital aplicado. Logo, sabendo que o montante resgatado foi de R\$ 65.536,00, temos

$$65536 = C \cdot (1{,}01)^4 \cdot (1{,}02)^4 \Leftrightarrow C = \frac{4^8}{1{,}0302^4}$$
$$\Leftrightarrow C = \left(\frac{4}{\sqrt{1{,}0302}}\right)^8$$
$$\Rightarrow C \cong 3{,}94^8.$$

Por conseguinte, podemos afirmar que o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a $3{,}96^8$.

7. A

Como ambas as situações estão sob juros simples temos um juros de 320 reais em quatro meses na primeira situação:
Aplicando a fórmula de juros simples temos:
$J = c \times i \times t \Rightarrow 320 = 1000 \times i \times 4 \Rightarrow i = 0{,}08 = 8\%$

Na segunda situação temos:
$J = c \times i \times t \Rightarrow 600 = 1200 \times i \times 5 \Rightarrow i = 0{,}1 = 10\%$

8. C

$$M = 1000000 \cdot (1 + 8{,}5\%)^{15}$$
$$M = 1000000 \cdot (1{,}085)^{15} = 1000000 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5 = 1000000 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5$$
$$M = 3375000 = 3{,}375 \text{ milhões}$$

9. C

Do enunciado, sendo i a taxa anual de juros compostos, temos:
$250000 = C \cdot (1+i)^{28}$, onde C é o capital aplicado há 28 anos.

Ainda do enunciado, sendo x um capital aplicado à mesma taxa i por um período de sete anos, temos:

$$2x = x \cdot (1+i)^7$$
$$(1+i)^7 = 2$$
$$\left[(1+i)^7\right]^4 = 2^4$$
$$(1+i)^{28} = 16$$

Substituindo $(1+i)^{28} = 16$ na equação $250000 = C \cdot (1+i)^{28}$,
$250000 = C \cdot 16$
$C = 15625$

A soma dos algarismos de C é dada por:
$1 + 5 + 6 + 2 + 5 = 19$

10. B

Sendo p o valor do veículo antes de ser retirado da concessionária.

Após 9 anos, com uma desvalorização de 5% ao ano, o valor do carro será p', de modo que:

$$p' = p \cdot (1 - 0{,}05)^9$$
$$p' = p \cdot 0{,}95^9$$
$$p' = p \cdot \left(0{,}95^3\right)^3$$

Do gráfico,

$$0{,}95^3 = 0{,}85$$

Então,

$$p' = p \cdot 0{,}85^3$$

Mais uma vez do gráfico,

$$0{,}85^3 = 0{,}6$$

Logo,

$$p' = p \cdot 0{,}6$$
$$p' = (1 - 0{,}4)p$$

Dessa maneira, a desvalorização total do carro foi de $0{,}4 \cdot 100\% = 40\%$.