

Progressão geométrica: soma dos finitos e infinitos termos

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui](#)

Resumo

Soma dos termos de uma progressão geométrica:

Soma dos n primeiros termos (S_n).

Seja uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 , razão q e n termos. Usamos esta fórmula para calcular a soma de finitos termos de uma PG.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Soma dos infinitos termos (S_∞).

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Atenção: Só podemos usar a fórmula se $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$

Produto dos n primeiros termos (P_n).

$$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

Exercícios

1. O paradoxo de Zenão

O filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.

Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

"Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um décimo; Aquiles corre esse décimo, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la."

Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

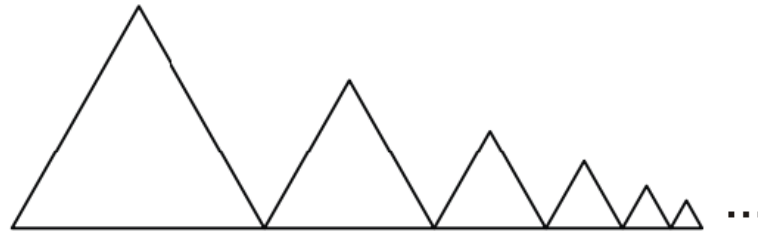
É correto afirmar que:

- a) $d = \infty$
- b) $d = 11,11$
- c) $d = 91/9$
- d) $d = 12$
- e) $d = 100/9$

2. Um menino propôs a seu pai que lhe desse R\$1,00 no dia 1º de dezembro e fosse, a cada dia, dobrando o valor da quantia diária, até o dia 24 de dezembro. No dia 25 de dezembro, ele daria ao pai, com o dinheiro acumulado, um presente de natal. O pai aceitou a proposta, desde que o filho lhe desse um presente que custasse o dobro da quantia que o filho recebesse no dia 24. Se o acordo entre os dois for firmado, o menino dará ao pai um presente com, exatamente, o seguinte valor:

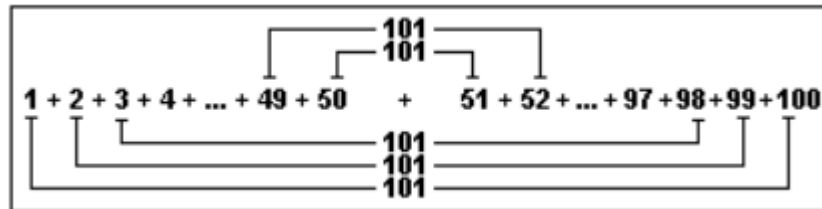
- a) metade do que receber
- b) o dobro do que receber
- c) toda a quantia recebida
- d) toda a quantia recebida mais R\$1,00

3. A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.



A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é

- a) 9.
b) 12.
c) 15.
d) 18.
e) 21.
4. Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Aos 10 anos de idade, ele apresentou uma solução genial para somar os números inteiros de 1 a 100. A solução apresentada por Gauss foi 5050, obtida multiplicando-se 101 por 50, como sugere a figura abaixo.



Usando a ideia de Gauss como inspiração, responda quanto vale o produto:

$$1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32 \times 64 \times 128$$

- a) 4^{129}
b) 4^{128}
c) 129^4
d) 128^4

5. Dudu quer se tornar um youtuber famoso, mas, em seu primeiro vídeo, ele obteve apenas 5 inscritos em seu canal. Obstinado que é, Dudu pretende, a cada novo vídeo, dobrar a quantidade de inscritos em seu canal. Se no primeiro mês ele postar 10 vídeos e conseguir atingir a meta estabelecida, ao fim deste mês, seu canal terá
- a) 1024 inscritos
 - b) 5120 inscritos
 - c) 5115 inscritos
 - d) 1023 inscritos
 - e) 310 inscritos
6. Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por $0,3; 0,03; 0,003; \dots$ é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:
- a) $1/3$
 - b) $2/3$
 - c) 1
 - d) 2
 - e) $\frac{1}{2}$
7. Vamos empilhar 5 caixas em ordem crescente de altura. A primeira caixa tem 1m de altura, cada caixa seguinte tem o triplo da altura da anterior. A altura da nossa pilha de caixas será:
- a) 121 m
 - b) 81 m
 - c) 32 m
 - d) 21 m
 - e) 15 m
8. Um sociólogo que estuda, há anos, a população de uma favela do Rio de Janeiro, chegou à conclusão de que a população dobra anualmente, devido aos problemas sociais e de migração interna. Sabendo-se que, em 1997, essa população era de 520 habitantes, e que a condição geográfica do local só suporta um máximo 10000 habitantes, essa mesma população deverá ser removida, no máximo, no ano de:
- a) 1999
 - b) 2000
 - c) 2001
 - d) 2002
 - e) 2003

9. Seja um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médios de cada lado, temos um segundo quadrado. Unindo os pontos médios do segundo quadrado, temos um terceiro quadrado, e assim sucessivamente. O produto das áreas dos dez primeiros quadrados é

a) $2^{-\frac{9}{2}}$

b) $2^{-\frac{25}{2}}$

c) $2^{-\frac{45}{2}}$

d) 2^{-45}

e) 2^{-25}

10. O resultado da adição indicada $0,001 + 0,000001 + 0,000000001 + \dots$ é:

a) $1/9$

b) $1/10$

c) $1/99$

d) $1/100$

e) $1/999$

Gabarito

1. E

Temos uma PG de $a_1 = 10$ e $r = 1/10$

Assim, calculamos a soma infinita

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{\frac{9}{10}} = \frac{100}{9}$$

2. D

O problema relata uma PG de 24 termos e razão = 2 e 1º termo = 1 e $a_n = 24^\circ$ termo.

Observe que no 24º dia o filho receberia 8 338 608 reais.

veja:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{23} = 2^{23}$$

Caso o acordo fosse firmado, o presente deveria ter o dobro desse valor, que seria:

$2 \times 2^{23} = 2^{24}$. Para saber o quanto essa quantia representa do valor recebido durante os 24 dias, precisa - se fazer a soma dos 24 termos dessa PG:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times (2^{24} - 1)}{2 - 1} = 2^{24} - 1$$

valor recebido durante o período R\$ $2^{24} - 1$

valor do presente R\$ 2^{24}

Então, o valor do presente deveria ter o valor de toda quantia recebida pelo filho, mais R\$ 1,00.

3. A

Observe:

A soma pedida é igual a

$$3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 9.$$

4. D

Repare que os termos equidistantes, ao serem multiplicados, tem como resultado 128.

$$1 \times 128 = 128$$

$$2 \times 64 = 128$$

$$4 \times 32 = 128$$

$$8 \times 16 = 128$$

Assim, temos 128^4

5. C

O número de inscritos no canal de Dudu cresce em Progressão Geométrica de razão 2.
Para solucionar a questão devemos considerar a soma dos 10 primeiros termos das P.G. abaixo:
(5, 10, 20, 40, 80, ...)

$$S_{10} = \frac{5 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 5115 \text{ inscritos.}$$

6. C

a pg (0,3; 0,03; 0,003...) Tem $a_1 = 0,3$ e $r = 0,1$.

A formula da soma nesse caso é $S = a_1 / (1 - q) = 0,3 / (1 - 0,1) = 1/3$

$1/3$ é portanto o segundo termo da PA, e por definição:

$$1/3 = (a_1 + a_3) / 2$$

$$a_1 + a_3 = 2/3$$

$$\text{Portanto, a soma é } a_1 + a_2 + a_3 = 2/3 + 1/3 = 3/3 = 1$$

7. A

A altura da pilha é igual a $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121m$.

8. C

A situação proposta pode ser representada por uma progressão geométrica (P.G.), onde o primeiro termo (a_1) vale 520 e razão (q) vale 2.

Assim, teremos:

ano 1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003

Pop. 520 1040 2080 4160 8320 16640 33280

Podemos observar, pelos dados da tabela, que durante o ano de 2001 a população atingirá o máximo previsto de 10.000 habitantes, devendo ser removida, portanto, até esse ano.

9. E

Tem-se que as áreas dos quadrados constituem a progressão geométrica (4, 2, 1,...). Por conseguinte, a resposta é

$$4^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10 \cdot (10-1)}{2}} = 2^{20} \cdot 2^{-45} = 2^{-25}.$$

10. E

Observe:

$$0,001 + 0,000001 + 0,000000001 + \dots = 10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + \dots$$

$$= \frac{10^{-3}}{1 - 10^{-3}}$$

$$= \frac{1}{10^3 - 1}$$

$$= \frac{1}{999}.$$