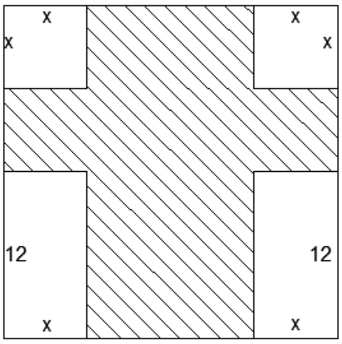
Função quadrática: definição e fómula quadrática, intersecções com os eixos coordenados

Resumo

A exemplo da função de 1º grau, existem muitos problemas práticos que podem ser resolvidos com auxílio da função quadrática.
Exemplo:



A figura ao lado mostra um terreno com 20 metros de lado, onde forma retirados: de cada canto superior um quadrado de lado x metros e de cada canto inferior um retângulo de lados 12 metros e x metros para construção de um estacionamento (área hachurada). Obtenha a área da figura hachurada.

Área do terreno = 20 . 20 = 400 m^2

Área quadrado superior = x . x = x^2

Área retângulo inferior = 12. x = 12x

Área hachurada em função de x será: y = 400 – 2(12x) – 2 (x^2)

Portanto:

A função definida acima é um exemplo de função quadrática.

$$\boxed{y = -2x^2 - 24x + 400}$$

Definimos então, função quadrática ou função polinomial do 2º grau, como qualquer função **f** definida pela lei: **f(x) = ax^2 + bx + c**, em que **a**, **b** e **c** são números reais e **a**≠0.

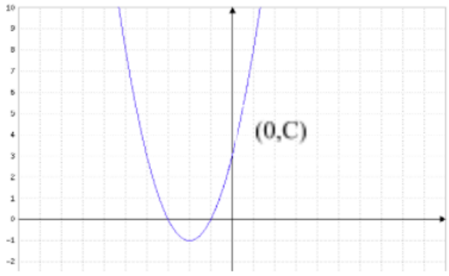
Raízes da função do 2º grau (zeros da função)
Chama-se zeros ou raízes da função do 2º grau , os números reais **x** tais que **f(x)= 0**. Então as raízes da função, são as soluções da equação de 2º de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada Fórmula de Bháskara*:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uma notação importante é que b^2-4ac também é chamado de delta ou Δ. Repare que na equação existem dois sinais antes da raiz sendo um positivo e o outro negativo, por isso existe a possibilidade de existirem duas raízes. As raízes são descobertas quando igualamos a função a zero, se chamarmos as raízes de x1 e x2 os pares ordenados serão (x1,0) e (x2,0). Sobre este delta é importante saber que:

Se Δ**>0**, a função terá duas raízes reais e distintas.
Se Δ**=0**, a função terá duas raízes reais e iguais.
Se Δ**<0**, a função não terá raiz real.
Exemplo: Seja a função x²+2x-3=0. O Δ vale 16 logo a função terá duas raízes reais distintas. A raiz de Δ será igual a 4. Assim, $\frac{-2\pm4}{2} \Rightarrow \frac{-2+4}{2}=1$ ou $\frac{-2-4}{2}=-3$. -3 e 1 são as raízes.

O coeficiente **c** é onde a função intercepta, "corta" o eixo y, pois quando o x=0 a equação fica y=a.0² +b.0 + c → y = c.
Dessa forma o par ordenado é (0,c), semelhante ao que acontece na função do primeiro grau.



As interseções de uma parábola com o eixo x são justamente as suas raízes.

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação q = 400 – 100*p*, na qual *q* representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e *p*, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço *p*, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 ≤ p < R$ 1,50

b) R$ 1,50 ≤ p < R$ 2,50

c) R$ 2,50 ≤ p < R$ 3,50

d) R$ 3,50 ≤ p < R$ 4,50

e) R$ 4,50 ≤ p < R$ 5,50

2. Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

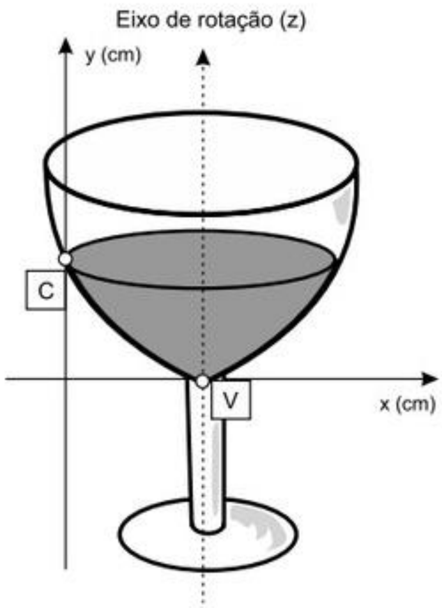
b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

3. A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 5

e) 6

4. Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$.

b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.

c) $V = 15.000 - 50x - x^2$.

d) $V = 15.000 + 50x - x^2$.

e) $V = 15.000 - 50x + x^2$.

5. A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39ºC. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0

b) 19,8

c) 20,0

d) 38,0

e) 39,0

6. Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral.
O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R$ 2,00 por lugar vago.

Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado V(x), em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é

a) V(x) = 902x

b) V(x) = 930x

c) V(x) = 900 + 30x

d) V(x) = 60x + 2x^2

e) V(x) = 900 - 30x - 2x^2

7. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número *f* de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que *t* é expresso em dia e *t* = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.
A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.
A segunda dedetização começou no

a) 19º dia.

b) 20º dia.

c) 29º dia.

d) 30º dia.

e) 60º dia.

8. A empresa SWK produz um determinado produto x, cujo custo de fabricação é dado pela equação de uma reta crescente, com inclinação dois e de variável x. Se não tivermos nenhum produto produzido, a despesa fixa é de R$ 7,00 e $-2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84$ é a função venda de cada unidade x. Tendo em vista uma crise financeira, a empresa fez algumas demissões. Com isso, caiu em 12% o custo da produção de cada unidade produzida. Nessas condições, a função lucro da empresa pode ser expressa como:

a) $L(x) = -2x^2 + 228x - 448{,}00$

b) $L(x) = -2x^2 + 227{,}76x - 448{,}84$

c) $L(x) = -2x^2 + 228x - 441{,}84$

d) $L(x) = -2x^2 + 229{,}76x - 441{,}84$

e) $L(x) = -2x^2 + 227{,}76x - 448{,}96$

9. Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18

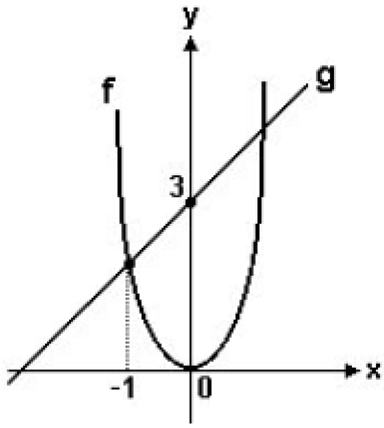
b) 20

c) 36

d) 45

e) 54

10. Na figura temos os gráficos das funções f e g.



Se $f(x)=2x^2$, então $g(3)$ vale:

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

Gabarito

1. A

A arrecadação é dada pelo preço de cada pão multiplicado pela quantidade de pães vendidos e essa arrecadação é de 300, assim, temos:

$(400 – 100p).p = 300$

$p^2 – 4p + 3 = 0.$

Resolvendo essa equação do segundo grau temos que p = 3 ou p = 1, logo, o pão deverá ter seu preço reduzido para 1 real.

2. A

Temos que $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a função que muda da nota *x* para a nota f(x). Assim, temos:

$f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 0$, logo, $c = 0$

$f(10) = a.10^2 + b.10 + c = 10 \Rightarrow 10.a + b = 1$

$f(5) = a.5^2 + b.5 + c = 6 \Rightarrow 25.a + 5.b = 6$

Resolvendo o sistema:

$10.a + b = 1$

$25.a + 5.b = 6$

$a = – 1/25$

$b = 7/5$

Logo, a função f(x) é dada por:

$y = – 1/25\ x^2 + 7/5.x$

3. E

Como podemos ver pelo gráfico, a função possui apenas 1 raiz real (Ponto V), portanto $\Delta = 0$, assim:

$b^2 – 4ac = 0$

$(-6)^2 – 4.(3/2).\ C = 0$

$36 – 6C = 0$

$C = 6$

4. D

Do enunciado temos:

$V = (1,50 – x/100)(10\,000 + 100x)$

$V = (150 – x) \cdot (100 + x)$

$V = 15000 + 50x – x^2$

5. D

O tempo mínimo de espera ocorre quando a temperatura chega à 39°C, assim:

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400$$

$$39 - 400 = -\frac{t^2}{4}$$

$$-361 = -\frac{t^2}{4}$$

$$361 = \frac{t^2}{4}$$

$$t^2 = 1444$$

$$t = 38$$

Repare que o tempo não pode ser negativo, por isso descartamos a raiz negativa.

6. E

x pessoas não compareceram para a excursão.
Pagamento pelos lugares ocupados: $60(15 - x) = 900 - 60x$.

Cada passageiro que compareceu vai pagar mais R$ 2,00 por lugar vago: $2x$.

Total de pagamento pelos lugares vagos: $2x(15 - x) = 30x - 2x^2$.

Valor arrecadado $V(x)$, em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é:

$V(x) = 900 - 60x + 30x - 2x^2 = 900 - 30x - 2x^2$

7. B

Queremos calcular o valor de t para o qual se tem $f(t) = 1600.$ Logo, temos

$$\begin{aligned} -2t^2 + 120t = 1600 &\Leftrightarrow t^2 - 60t = -800 \\ &\Leftrightarrow (t-30)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow t = 20 \text{ ou } t = 30. \end{aligned}$$

Portanto, como o número de infectados alcança 1600 pela primeira vez no 20º dia, segue o resultado.

8. A

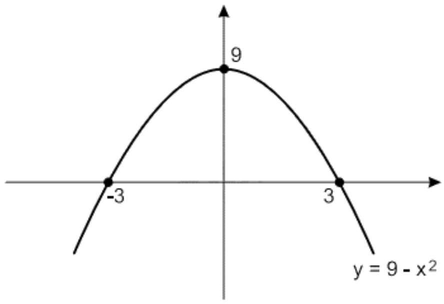
A função custo $C(x)$ é uma função afim da forma $C(x) = 2x + 7$, pois a despesa fixa será o coeficiente linear.
Com a queda de 12%, o custo passou a ser 88% do anterior.
Isto é, $(0,88).C(x) = (0,88).(2x + 7) = 1,76x + 6,16$.

Como $L(x) = V(x) - C(x)$, temos:

$L(x) = (-2x^2 + 229,76x - 441,84) - (1,76x + 6,16) = -2x^2 + 229,76x - 441,84 - 1,76x - 6,16)$

$L(x) = -2x^2 + 228x - 448,00.$

9. C



A área pedida é $\frac{2}{3}.6.9=36$

10. A

Pelo gráfico:

g(x)= ax+3 [passa pelo ponto(0,3)]

Determinando f(-1):

f(-1)= 2(-1)^2=2

Determinando o coeficiente angular de g(x):

g(-1)=f(-1)=2 ==> -a+3=2 ==> a=1 ==> g(x)= x+3

Determinandog(3):

g(3)=3+3=6