Inequações trigonométricas

Resumo

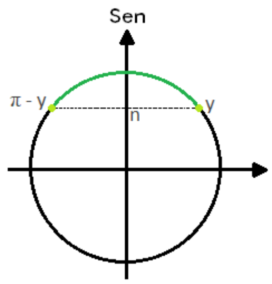
Inequação Trigonométrica

Uma inequação trigonométrica é uma desigualdade, em cujas incógnitas aparecem funções trigonométricas.
Exemplo: sen(x) < 1/2

Ao trabalhar com esse tipo de inequação, normalmente é possível reduzi-la a alguma inequação conhecida, que é chamada de **inequação trigonométrica fundamental**. Dá uma olhada em 6 inequações fundamentais:

I. sen x > n (sen x ≥ n):

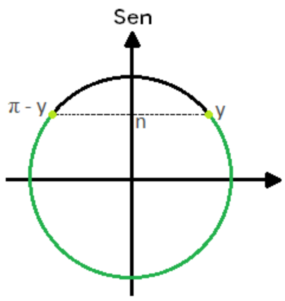
Seja **n** o seno de um arco **y** qualquer, tal que **0 ≤ n < 1**. Se **sen x > n**, então todo **x** entre **y** e **π − y** é solução da inequação, assim como podemos ver na parte destacada de verde na figura a seguir:



A solução dessa inequação pode ser dada, no intervalo de uma só volta, como:
$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid y < x < \pi - y\}$. Para estender essa solução para o conjunto dos reais, podemos afirmar que
$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid y + 2k\pi < x < \pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ **ou** $S = \{ x \mid y + 2k\pi < x < (2k + 1)\pi - y, k \in \mathbb{Z} \}$

II. sen x < n (sen x ≤ n)

Se **sen x < n**, então a solução é dada por dois intervalos. A figura a seguir representa essa situação:

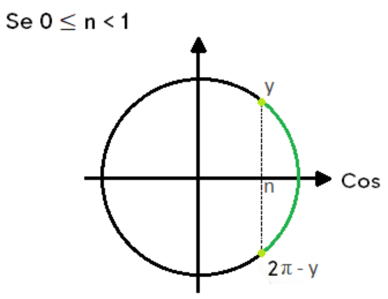


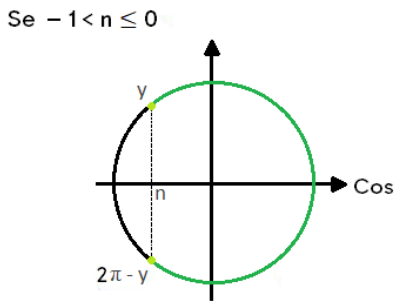
Na primeira volta do ciclo, a solução pode ser dada como $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le y$ **ou** $\pi - y \le x \le 2\pi\}$. No conjunto dos reais, podemos afirmar que
$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \le x < y + 2k\pi$ **ou** $\pi - y + 2k\pi \le x \le (k + 1).2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

III. $\cos x > n$ ($\cos x \geq n$)

Seja **n** o cosseno de um arco **y**, tal que $\mathbf{-1 < n < 1}$. A solução deve ser dada a partir de dois intervalos: $\mathbf{0 \leq n < 1}$ ou $\mathbf{-1 < n \leq 0}$.

Veja a figura a seguir:



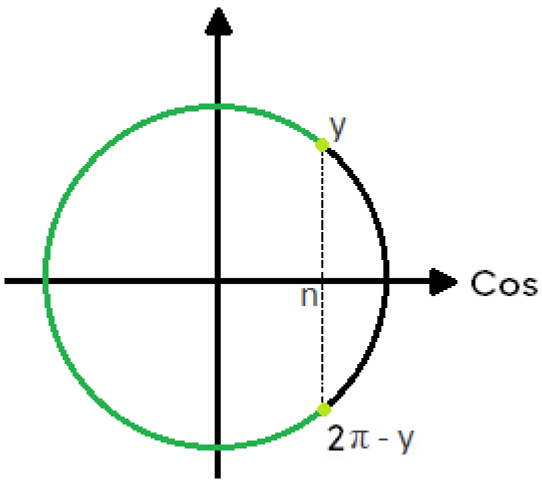


Para que a solução dessa inequação esteja na primeira volta do ciclo trigonométrico, devemos apresentar

$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < y$ **ou** $2\pi - y \leq x < 2\pi \}$. Para estender essa solução para o conjunto dos reais, podemos dizer que $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$ **ou** $2\pi - y + 2k\pi < x < (k + 1).2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

IV. $\cos x < n$ ($\cos x \leq n$)

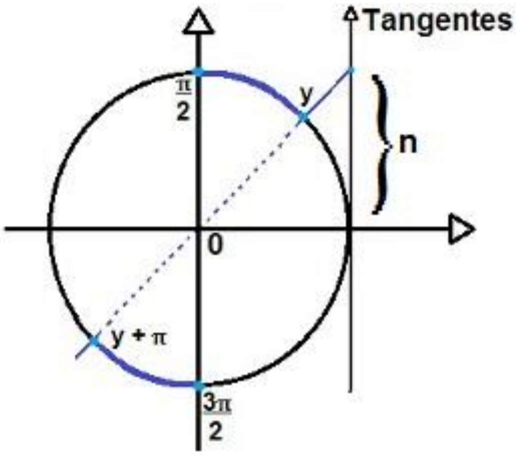
Nesses casos, há apenas um intervalo e uma única solução. Observe a figura a seguir:



Na primeira volta do ciclo, a solução é $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid y < x < 2\pi - y\}$. No conjunto dos reais, a solução é $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid y + 2k\pi < x < 2\pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

V. tg x > n (tg x ≥ n)

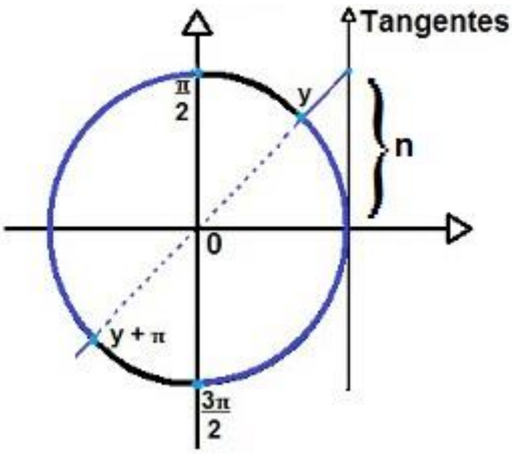
Seja **n** a tangente de um arco **y** qualquer, tal que **n > 0**. Se **tg x > n**, há duas soluções como podemos ver na figura:



A solução dessa inequação pode ser dada no conjunto dos reais como **S = { x ϵ ℝ | y + 2kπ < x < $^{\pi}/_{2}$ + 2kπ** ou **y + π + 2kπ < x < $^{3\pi}/_{2}$ + 2kπ}**. Na primeira volta do ciclo, temos: **S = { x ϵ ℝ | y < x < $^{\pi}/_{2}$** ou **y + π < x < $^{3\pi}/_{2}$, k ϵ ℤ }.**

VI. tg x < n (tg x ≤ n)

Esse caso é semelhante ao anterior. Se **n > 0**, temos:



Na primeira volta do ciclo, temos como solução: S = { x ϵ ℝ | 0 ≤ x < y **ou** $^{\pi}/_{2}$ < x < y + π **ou** $^{3\pi}/_{2}$ < x < 2π}. No conjunto dos reais a solução é S = { x ϵ ℝ | kπ ≤ x < y + kπ **ou** $^{\pi}/_{2}$ + kπ < x < (k + 1).π, k ϵ ℤ }.

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui]

Exercícios

1. O conjunto solução da inequação $sen(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, x ∈ [0, 2π], é:

a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

b) $0 < x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x < 2\pi$

c) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

d) $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

2. Se x ϵ [0, 2π], então $\cos(x) > \frac{1}{2}$ se, e somente se, x satisfazer à condição:

a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\pi < x < 2\pi$

d) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

e) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi$

3. A inequação $tg(x) > 1$ tem como conjunto solução:

a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

d) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

e) $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)$, para $k \in \mathbb{Z}$

4. O conjunto solução (S) para a inequação $2\cos^2 x + \cos(2x) > 2$ em que $0 < x < \pi$ é dado por:

a) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

e) $S = \{x \in (0, \pi)\}$

5. O conjunto solução da inequação $2sen^2x - \cos x - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{10\pi}{6}\right]$

6. A inequação $sen(x)\cos(x) \leq 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$ e x real, possui conjunto solução

a) $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

b) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

c) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$

d) $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

e) $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$

7. A solução da inequação $0 < \dfrac{2sen^2x + sen2x}{1+tgx} < 1$, para $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, é o conjunto

a) $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

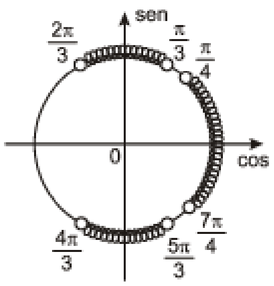
b) $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

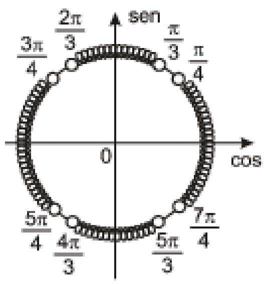
d) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

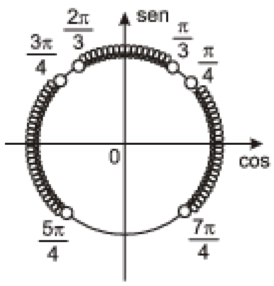
8. Sendo $x \in [0, 2\pi]$, a interpretação gráfica no ciclo trigonométrico para o conjunto solução da inequação $-8sen^4x + 10sen^2x - 3 < 0$ é dada por



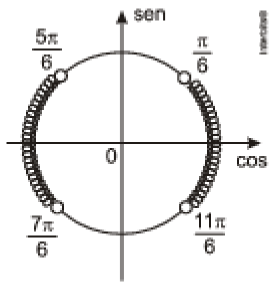
a)



b)



c)



d)

9. O conjunto dos valores reais de x que tornam verdadeiras a desigualdade

$$\cos^2(x-\pi) \geq \pi$$

a) $\left(-\infty, \sqrt{\pi}\right]$

b) $\left[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right]$

c) $\mathbb{R}$

d) $\varnothing$

10. Resolva a inequação $\frac{1}{4} \leq \cos x.senx < \frac{\sqrt{2}}{2}$, em que $x \in [0, \pi]$.

a) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right)$

b) $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{3}\right[$

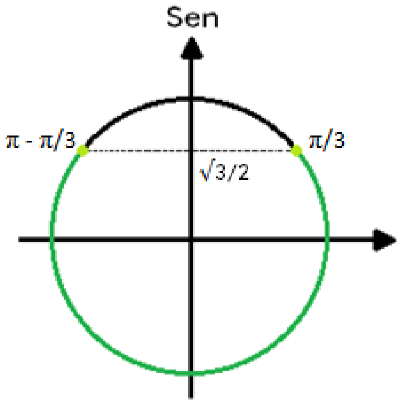
c) $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$

Gabarito

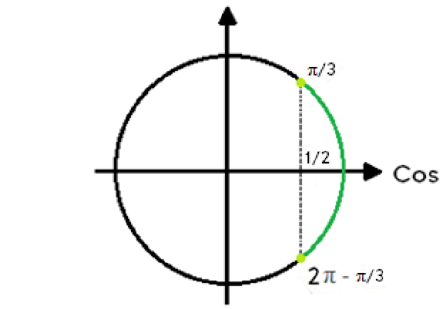
1. A

Observe:



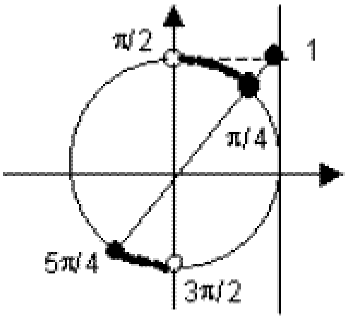
Assim, temos que que S = { x ϵ ℝ | 0 ≤ x ≤ π/3 ou 2 π/3 ≤ x ≤ 2π }

2. Sabemos que cos(π/3) = ½, sendo assim, observe:



Por isso, temos que o gabarito é a letra e.

3. E



$$S=\left\{x\in R\,/\,\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$$

$$\text{ou}\quad \frac{5\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

4. A

Observe:

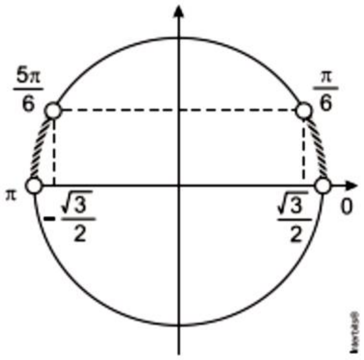
$2\cos^2 x + \cos(2x) > 2$

$2\cos^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x > 2$

$2\cos^2 x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) > 2$

$4\cos^2 x - 3 > 0$

$\cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Logo, o conjunto solução será: $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

5. C

$2\text{sen}^2 x - \cos x - 1 \geq 0$

$2 \cdot (1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \geq 0$

$2 - 2\cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0$

$-2\cos^2 x - \cos x + 1 \geq 0$

Resolvendo a equação $-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$,

Daí,

$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = -2 \cdot (\cos x + 1) \cdot \left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)$

Dessa forma,

$-2\cos^2 x - \cos x + 1 \geq 0$

$-2 \cdot (\cos x + 1) \cdot \left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) \geq 0$

$(\cos x + 1) \cdot (-2\cos x + 1) \geq 0$

Note que $\cos x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo,

$-2\cos x + 1 \geq 0$

$\cos x \leq \dfrac{1}{2}$

Como $0 < x \leq 2\pi$ e $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$

Assim, sendo S o conjunto solução da inequação $2\text{sen}^2 x - \cos x - 1 \geq 0, 0 < x \leq 2\pi$,

$S = \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

6. A

Tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}x\cos x \le 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x \le 0\\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}2x \le 0\\ &\Leftrightarrow \pi + 2k\pi \le 2x \le 2\pi + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \pi + k\pi,\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, como para $k = 0$ vem $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$, e para $k = 1$ temos $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$, segue que o conjunto solução da inequação no intervalo $[0, 2\pi]$ é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi\right\}.$$

7. B

Lembrando que $\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$, temos

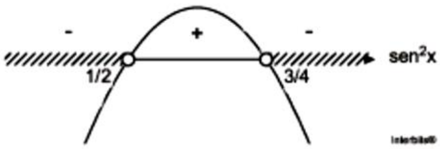
$$\begin{aligned}0 < \frac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}2x}{1 + \operatorname{tg}x} < 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{2\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x\cos x}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}} < 1\\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{2\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x + \cos x)}{\dfrac{\cos x + \operatorname{sen}x}{\cos x}} < 1\\ &\Rightarrow 0 < 2\operatorname{sen}x\cos x < 1\\ &\Rightarrow \operatorname{sen}0 < \operatorname{sen}2x < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Portanto, o resultado pedido é $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

8. B

$-8\,\text{sen}^4 x + 10\,\text{sen}^2 x - 3 < 0$

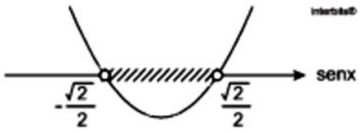
Resolvendo a inequação na incógnita $\text{sen}^2 x$ temos as raízes: $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}$ ou $\text{sen}^2 x = \dfrac{3}{4}$.



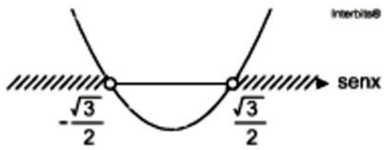
$\text{sen}^2 x < \dfrac{1}{2}$ ou $\text{sen}^2 x > \dfrac{3}{4}$.

Resolvendo as inequações acima, temos:

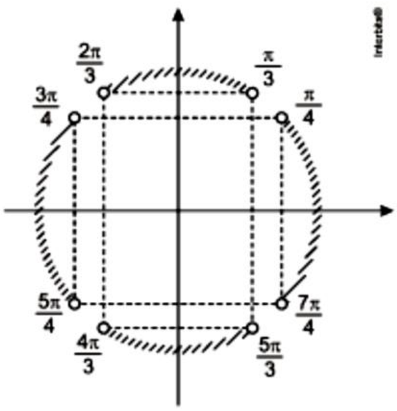
$\text{sen}^2 x < \dfrac{1}{2}$



$\text{sen}^2 x > \dfrac{3}{4}$.



Representando estas inequações na circunferência trigonométrica, temos:



9. D

Usando que:

$$\cos 2X = \cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X$$

Para X = x - π, temos

$$\begin{gathered}\cos(2x-2\pi)=\cos^2(x-\pi)-\operatorname{sen}^2(x-\pi)=1-2\cos^2(x-\pi)\\ \therefore\ \cos^2(x-\pi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x-2\pi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\end{gathered} \qquad \text{(I)}$$

Resolvendo a inequação dada usando (I)

$$\cos^2(x-\pi)\geq\pi$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\geq\pi$$
$$\cos 2x\leq 1-2\pi$$

Como 1 - 2π < -1 a inequação proposta não apresenta solução real — porque não existe número real x para que cos2x < -1.

10. D

$$\frac{1}{4} \leq \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} \leq 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x < 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

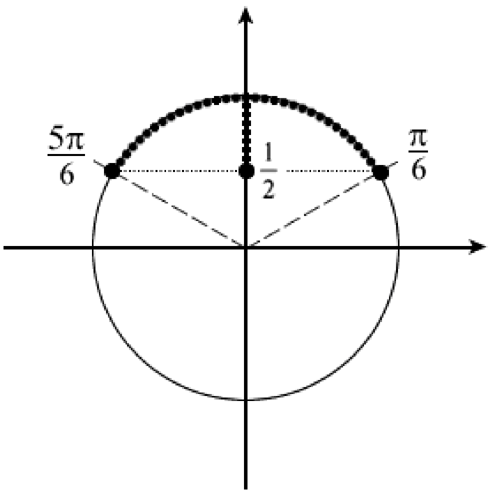
$$\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} 2x < \sqrt{2}$$

Considerando que

$$\operatorname{sen} 2x \leq 1,$$

temos que:

$$\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} 2x \leq 1$$



$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$$