Progressão geométrica: definição, termo geral e termo médio

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Resumo

Definição:
Progressão geométrica (Pg) é a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual o produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada de razão da PG. e é indicada por q

Temos então que: em uma pg (a_1,a_2,a_3...)

Então sua razão $q= a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3$...

Classificação:
Há quatro categorias em uma Pg, são elas:
1. Crescente ocorre quando:
- a1>0 e q>0; ou
- a1<0 e 0<q<1.

2. Decrescente ocorre quando:
- a1>0 e 0<q<1, ou
- a1<0 e q>1.

3. Constante:
- q = 1

4. Alternada ou oscilante: os termos dão alternadamente positivos e negativos.
- q < 0

Termo geral da Pg:
Essa expressão nos permite calcular qualquer termo de uma p.g conhecendo apenas o primeiro termo e a razão.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Propriedades da Progressão Geométrica
1) O produto dos termos extremos é igual ao produto dos termos equidistantes dos extremos.
Ex: Na PG (2,4,8,16,32): Os termos extremos são 2 e 32 e o produto será 2 . 32 = 64, além disso, 4 e 16 são os termos equidistantes dos extremos e o produto 4 . 16 = 64

2) O quadrado de um termo central é igual ao produto dos equidistantes dele.
Ex: Na PG (2,4,8,16,32): O termo central é 8 e 8² = 64, como vimos o produto dos extremos também é 64

Exercícios

1. Pesquisas indicam que o número de bactérias X é duplicado a cada quarto de hora. Um aluno resolveu fazer uma observação para verificar a veracidade dessa afirmação. Ele usou uma população inicial de 10^5 bactérias X e encerrou a observação ao final de uma hora. Suponha que a observação do aluno tenha confirmado que o número de bactérias X se duplica a cada quarto de hora.

Após uma hora do início do período de observação desse aluno, o número de bactérias X foi de

a) $2^{-2} \times 10^5$

b) $2^{-1} \times 10^5$

c) $2^2 \times 10^5$

d) $2^3 \times 10^5$

e) $2^4 \times 10^5$

2. Para testar o efeito da ingestão de uma fruta rica em determinada vitamina, foram dados pedaços desta fruta a macacos. As doses da fruta são arranjadas em uma sequência geométrica, sendo 2 g e 5 g as duas primeiras doses. Qual a alternativa correta para continuar essa sequência?

a) 7,5 g; 10,0 g; 12,5 g ...

b) 125 g; 312 g; 619 g ...

c) 8 g; 11 g; 14 g ...

d) 6,5 g; 8,0 g; 9,5 g ...

e) 12,500 g; 31,250 g; 78,125 g ...

3. Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com 2n competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final. Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas. Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

a) 2 X 128

b) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2

c) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

d) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2

e) 64 + 32 + 16 + 8+ 4 + 2+ 1

4. Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é:

a) 75%

b) 80%

c) 83.33%

d) 87.5%

5. Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida de lado, em centímetro, é:

a) 14

b) 12

c) $7\sqrt{2}$

d) $6 + 4\sqrt{2}$

e) $6 + 2\sqrt{2}$

6. Para fazer a aposta mínima na Megassena uma pessoa deve escolher 6 números diferentes em um cartão de apostas que contém os números de 1 a 60. Uma pessoa escolheu os números de sua aposta, formando uma progressão geométrica de razão inteira. Com esse critério, é correto afirmar que

a) essa pessoa apostou no número 1.

b) a razão da PG é maior do que 3.

c) essa pessoa apostou no número 60.

d) a razão da PG é 3.

e) essa pessoa apostou somente em números ímpares.

7. A Copa do Mundo, dividida em cinco fases, é disputada por 32 times. Em cada fase, só metade dos times se mantém na disputa pelo título final. Com o mesmo critério em vigor, uma competição com 64 times iria necessitar de quantas fases?

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

8. Um garrafão contém 3 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea. Retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água, e assim por diante. A quantidade de vinho, em litros, que resta no garrafão, após 5 dessas operações, é aproximadamente igual a

a) 0,396

b) 0,521

c) 0,676

d) 0,693

e) 0,724

9. Suponha que o preço de um automóvel se desvaloriza 10% ao ano nos seus 5 primeiros anos de uso. Se este automóvel novo custou R$ 10.000,00, qual será o seu valor em reais após os 5 anos de uso?

a) 5.550,00

b) 5.804,00

c) 6.204,30

d) 5.904,90

e) 5.745,20

10. Em uma progressão geométrica estritamente crescente, com razão igual ao triplo do primeiro termo, na qual o quarto termo é igual a 16 875, é correto afirmar que:

a) O terceiro termo é igual a nove vezes o primeiro termo.

b) A soma dos três primeiros termos é igual a 241 vezes o primeiro termo

c) O segundo termo é igual a 9 vezes o quadrado do primeiro termo .

d) A soma do primeiro e do terceiro termo é igual a 25 vezes o segundo termo.

e) Os termos também estão em progressão aritmética.

Gabarito

1. **E**

Uma hora corresponde a $\frac{4}{4}$ de hora. Logo, ao fim de uma hora, o número de bactérias X foi de $2^4 \cdot 10^5$.

2. **E**

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

$$q = \frac{a_1}{a_2} = 2,5$$

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2,5^{n-1}$$

$$a_3 = 12,5$$

$$a_4 = 31,25$$

$$a_5 = 78,125$$

3. **E**

O número de partidas disputadas decresce segundo uma progressão geométrica de primeiro termo 128/2 = 64 e razão ½. Portanto, a resposta é 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

4. **D**

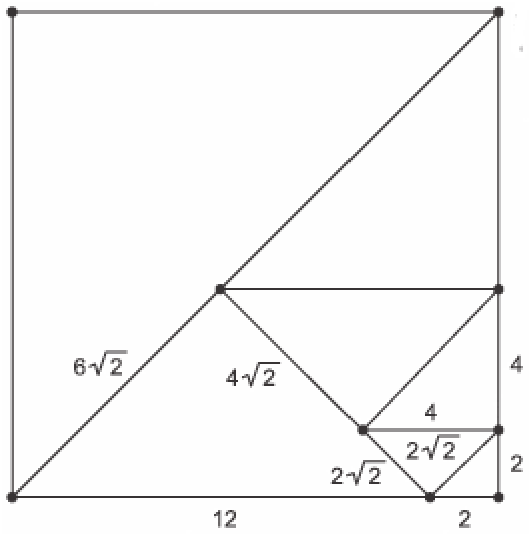
Como nós não temos conhecimento da quantidade inicial de coelhos, podemos afirmar que esse valor é **x**. Sendo assim, passados **quatro meses**, a população de coelhos tornou-se **2x**; passados **oito meses**, já havia **4x**; após **12 meses,** a polução de coelhos era de **8x**. Isso pode ser representado como uma PG **(x, 2x, 4x, 8x)** de razão **2**.

Conforme o enunciado, atualmente o criador de coelhos possui **8x** animais. Se ele deseja voltar a ter apenas a quantidade inicial **(x)**, ele deverá vender **7x**. Podemos calcular a porcentagem da criação que ele venderá através do quociente entre **7x** e **8x**:

$$\frac{7x}{8x} = \frac{7}{8} = 0,875 = 87,5\%$$

5. **A**

Observe que as hipotenusas dos triângulos retângulos crescem segundo uma P.G. de primeiro termo $2\sqrt{2}$ e razão $\sqrt{2}$.



Portanto, de acordo com a figura, a resposta é $12 + 2 = 14\,\text{cm}$.

6. **A**

A única PG que obedece às condições da questão é (1, 2, 4, 8, 16, 32). Portanto, com certeza esta pessoa apostou no número 1.

7. **B**

O número de times em cada fase corresponde aos termos da progressão geométrica $(64, 32, \ldots, 2)$. Logo, sendo n o número de fases pedido, temos:

$$2 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow 2^{1-n} = 2^{-5} \Leftrightarrow n = 6.$$

8. **A**

Como o volume retirado da mistura é sempre igual a $\frac{1}{3}$ do volume presente, segue que a quantidade de vinho diminui segundo uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ e primeiro termo igual a 2. Logo, a resposta é $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{32}{81} \cong 0{,}395\,\text{L}$.

9. **D**

Se o automóvel desvaloriza-se **10%** ao ano, podemos afirmar que a cada ano seu valor passa a ser apenas **90%** do que era anteriormente. Para determinar esse valor a cada ano, basta multiplicar o valor anterior por **0,9** (que equivale a 90%). Dessa forma, há uma progressão geométrica com razão **0,9,** por isso utilizaremos a fórmula do termo geral da PG para resolver a questão.

Para tanto, consideremos **a_1 = 10.000, q = 0,9** e **n = 6** (observe que utilizamos 6 porque, no primeiro ano, não houve desvalorização e só após 5 anos o carro será vendido).

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$
$$a_6 = a_1 \times q^5$$
$$a_6 = 10000.(0,9)^5$$
$$a_6 = 5904,9$$

10. B

Segundo as informações do enunciado, temos:

$$\begin{cases} q = 3a_1 \\ a_1 = \dfrac{q}{3} \end{cases}$$
$$a_4 = a_1.q^3$$
$$16875 = \frac{q}{3}.q^3 = \frac{q^4}{3}$$
$$q = 15$$
$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 75$$
$$a_3 = 1125$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1205 = 241.5 = 5.a_1$$