# Equação e inequação exponencial

## Resumo

**Equação exponencial**

Uma equação exponencial é aquela em que a variável a ser encontrada aparece como expoente de uma base constante ou variável. Um método usado para resolução de equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação a potência de mesma base *a* (0 < a ≠ 1). Feito isso, igualamos os expoentes. Ou seja:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Separamos as equações exponenciais em 3 casos:

**1º caso**: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, para $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Exemplo:

$2^{2x-1} = 8^{3-x}$

$2^{2x-1} = (2^3)^{3-x}$

$2x - 1 = 9 - 3x$

$x = 2$

**2º caso**: Mudança de variável

Exemplos:

1) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$

$2^x.2^{-1} + 2^x + 2^x.2 - 2^x.2^2 + 2^x.2^3 = 120$

Substituindo $2^x$ por y, temos:

$\frac{y}{2} + y + 2y - 4y + 8y = 120 \Rightarrow 15y = 240 \Rightarrow y = 16$

$2^x = 16$

$x = 4$

2) $4^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0$

$4^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0 \Rightarrow (2^2)^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0 \Rightarrow 2^{2x+2} - 9.2^x + 2 = 0 \Rightarrow 2^{2x}.2^2 - 9.2^x + 2 = 0$

$\begin{cases} \mathbf{2^x = y} \\ \mathbf{2^{2x} = y^2} \end{cases}$

$4y^2 - 9.y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(4)(2)}}{2(4)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8}$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{9+7}{8} = 2 \\ y = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = 2^{-2} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Casos particulares:

**I)** $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ f(x) = 0 \end{cases}$ , para $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$$x^{x^2+1} = 3^{x^2+1}$$

$x = 3$ ou $x^2 + 1 = 0$, o que não convém.

**II)** $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \text{ ou} \\ f(x) = 0 \text{ e } g(x) \neq 0 \text{ e } h(x) \neq 0 \text{ ou} \\ f(x) = 1 \end{cases}$

$$x^{x^2-6x+11} = x^3$$

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x^2 - 6x + 11 = 3$

$x = 0$

$x = 1$

$x = 2$

$x = 4$

## Inequação exponencial

Uma inequação exponencial deve ser resolvida da seguinte forma:

- Primeiro, temos que colocar ambos os lados da inequação na mesma base.
- Depois, transformamos a inequação entre as potências em uma inequação entre os expoentes. Para isso, temos dois casos a serem estudados.

**1º caso**: base >1 (exponencial crescente)

O sentido da desigualdade se mantém.

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$$

**2º caso**: 0 < base < 1 (exponencial decrescente)

Invertemos o sinal da inequação.

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$$

## Exercícios

**1.** Quanto vale a soma de todas as soluções reais da equação abaixo?

$$\left(5^x\right)^2 - 26.5^x + 25 = 0$$

**a)** 0
**b)** 1
**c)** 2
**d)** 3
**e)** 4

**2.** Se $\left(4^x\right)^2 = 16.2^{x^2}$, o valor de $x^x$ é:

**a)** 27
**b)** 4
**c)** 1 /4
**d)** 1
**e)** -1/ 27

**3.** A inequação $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11\,111$ em que x é um número real,

**a)** não tem solução.
**b)** tem apenas uma solução.
**c)** tem apenas soluções positivas.
**d)** tem apenas soluções negativas.
**e)** tem soluções positivas e negativas.

**4.** Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = \sqrt{(25)^x - 2.5^x - 15}$ e $g(x) = x^2 - x - \dfrac{35}{4}$. A é o conjunto que representa o domínio da função f e B $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq 0\}$, então o conjunto $A^c \cap B$ é:

**a)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{2} \leq x \leq \dfrac{7}{2}\right\}$

**b)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \dfrac{7}{2}\right\}$

**c)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\dfrac{5}{2} \text{ ou } x > \dfrac{7}{2}\right\}$

**d)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{2} \leq x < 1\right\}$

**e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x \geq 5\}$

**5.** Se $\frac{m}{n}$ é a fração irredutível que é solução da equação exponencial $9^x - 9^{x-1} = 1944$, então, m – n é igual a:

**a)** 2.

**b)** 3.

**c)** 4.

**d)** 5.

**e)** 6.

**6.** O Conjunto solução da inequação $\left[\sqrt[3]{\left(2^{x-2}\right)}\right]^{x+3} > 4^x$ é:

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 6\}$

**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 1\}$

**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 6\}$

**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 1\}$

**e)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6}\}$

**7.** O conjunto solução da equação $64^{x^2} = 16^{x^2+2x-2}$ é o conjunto

**a)** S = {2}.

**b)** S = {4}.

**c)** S = {−2, 2}.

**d)** S = {2, 4}.

**8.** Considere a equação exponencial $2.3^{x-4} = 150$. Sobre o valor de x, é verdade afirmar que

**a)** $x \in [4, 6[$

**b)** $x \in [6, 8[$

**c)** $x \in [8,10[$

**d)** $x \in [10,13[$

**9.** A solução real da equação $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-3} - 3^{x-4} = 56$ é :

**a)** 0

**b)** 1

**c)** 3

**d)** 4

**10.** No intervalo [-1, 8], o número de soluções inteiras da inequação $2^x - 7 > 2^{3-x}$ é:

**a)** 2

**b)** 3

**c)** 4

**d)** 5

**e)** 6

## Gabarito

**1. C**

Completando o quadrado, vem

$$\begin{aligned}(5^x)^2 - 26\cdot 5^x + 25 = 0 &\Leftrightarrow (5^x - 13)^2 = 144\\ &\Leftrightarrow 5^x - 13 = \pm 12\\ &\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}5^x = 5^2\\ \text{ ou}\\ 5^x = 5^0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0.\end{aligned}$$

Portanto, a resposta é $0 + 2 = 2.$

**2. B**

Como

$$\begin{aligned}(4^x)^2 = 16\cdot 2^{x^2} &\Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{x^2+4}\\ &\Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2,\end{aligned}$$

segue-se que $x^x = 2^2 = 4$

**3. D**

Resolvendo a inequação, obtemos:

$$\begin{gathered}10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111 \Leftrightarrow\\ 10^x\cdot(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) < 11111 \Leftrightarrow\\ 10^x\cdot 11111 < 11111 \Leftrightarrow\\ 10^x < 10^0 \Leftrightarrow\\ x < 0.\end{gathered}$$

Portanto, a inequação dada tem apenas soluções negativas.

**4. D**

Os valores reais de x para os quais a função f é definida são tais que

$$\begin{aligned}(25)^x - 2\cdot(5)^x - 15 \geq 0 &\Leftrightarrow (5^x - 5)\cdot(5^x + 3) \geq 0\\ &\Leftrightarrow 5^x - 5 \geq 0\\ &\Leftrightarrow 5^x \geq 5\\ &\Leftrightarrow x \geq 1.\end{aligned}$$

Desse modo, $A^c = ]-\infty, 1[$.

Por outro lado,

$$g(x) = x^2 - x - \frac{35}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}.$$

Daí, $B = \left[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ e, portanto

$$A^c \cap B = \left]-\infty, 1\right[ \cap \left[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right] = \left[-\frac{5}{2}, 1\right[.$$

**5. D**

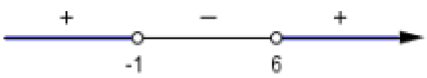
Resolvendo a equação, encontramos:

$$9^x - 9^{x-1} = 1944 \Leftrightarrow 9^{x-1}(9-1) = 1944$$
$$\Leftrightarrow 3^{2x-2} = 3^5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Por conseguinte, temos m - n = 7 − 2 = 5

**6. C**

$$\left(\sqrt[3]{2^{(x-2)}}\right)^{x+3} > 4^x \Rightarrow 2^{\frac{(x-2)(x+3)}{3}} > 2^{2x} \Rightarrow (x+1)(x-6) > 0$$




**7. A**

Tem-se que

$$64^{x^2} = 16^{x^2+2x-2} \Leftrightarrow 4^{3x^2} = 4^{2x^2+4x-4}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 = 2x^2 + 4x - 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Portanto, S = {2}.

**8. B**

$2 \cdot 3^{x-4} = 150$

$3^{x-4} = 75$

Como 27 < 75 < 81, podemos escrever:

$$27 < 3^{x-4} < 81$$
$$3^3 < 3^{x-4} < 3^4$$
$$3 < x-4 < 4$$
$$7 < x < 8$$

A alternativa correta é a [B], pois [6, 8[ contém o intervalo ]7, 8[

**9. D**

Pode-se reescrever a equação acima utilizando as propriedades da potenciação:

$$3^x - \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{3^3} - \frac{3^x}{3^4} = 56$$
$$\frac{81 \cdot 3^x - 27 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x - 3^x}{81} = \frac{4536}{81}$$
$$81 \cdot 3^x - 27 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x - 3^x = 4536$$

Fazendo $3^x = y$, pode-se escrever:

$$81y - 27y + 3y - y = 4536$$
$$56y = 4536$$
$$y = 81$$

Como $3^x = y$ tem-se:

$$y = 3^x = 81$$
$$x = 4$$

**10. D**

Observe:

$$2^x - 7 > 2^{3-x} \Leftrightarrow 2^x - 7 > \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 7.2^x > 2^3$$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - 7y > 2^3 \Leftrightarrow y^2 - 7y - 8 > 0$$

Resolvendo a inequação do segundo grau, encontramos que $y < -1$ ou $y > 8$

Como $y < -1$ não convém, temos:

$$y > 8 \Leftrightarrow 2^x > 8 \Rightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$$

Como $x \in [-1, 8]$, temos um total de 5 soluções inteiras.