Vetores: produto vetorial

Quer ver esse material pelo Dex? Clique aqui.

Resumo

Já estudamos o produto escalar entre dois vetores. Agora, iremos estudar uma outra operação entre dois vetores: o produto vetorial! Antes, é preciso ressaltar duas coisas importantes:

- O produto vetorial é um vetor, ao contrário do produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ que é um escalar, ou seja, um número real.
- Usaremos muitas propriedades dos determinantes, então é importante que a matéria esteja em dia, ok?

Produto Vetorial

Dados dois vetores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$, o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Exemplo:

Calcular $\vec{u}\times\vec{v}$ para $\vec{u}=5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ e $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}$.

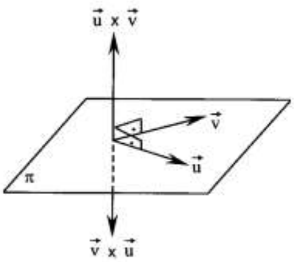
Solução:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}=(4,-2,-4)$$

Características do vetor $\vec{u}\times\vec{v}$

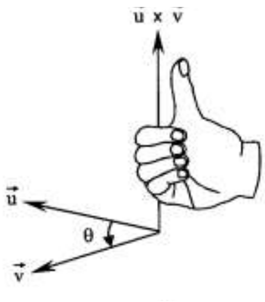
$\rightarrow$ Direção de $\vec{u}\times\vec{v}$

O vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



$\rightarrow$ Sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$

O sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$ poderá ser determinado utilizando-se a “regra da mão direita”. Sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, suponhamos que $\vec{u}$ sofra uma rotação de ângulo θ até coincidir com $\vec{v}$. Se os dedos da mão direita forem dobrados na mesma direção da rotação, então o polegar estendido indicará o sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$.



$\rightarrow$ Comprimento de $\vec{u}\times\vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| sen\theta$$

Propriedades

$\rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = -\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$, ou seja, a ordem dos fatores altera o produto!

$\rightarrow$ Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a área do paralelogramo formado por eles é calculada por $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$.

Exercícios

1. Sejam os vetores $\vec{u} = (1,-1,-4)$ e $\vec{v} = (3,2,-2)$. Determine um vetor que seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

a) (10, -10, 5)
b) (10, -10, 4)
c) (1, -10, 5)
d) (10, -1, 5)
e) (10, -10, -5)

2. Dados os vetores $\vec{u} = (1,-1,1)$ e $\vec{v} = (2,-3,4)$, calcule a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

a) 6 u.a.
b) 5 u.a.
c) 1 u.a.
d) $\sqrt{6}$ u.a.
e) $\sqrt{5}$ u.a.

3. Seja um triângulo equilátero ABC de lado 10. Qual é o valor de $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$?

a) $10\sqrt{3}$
b) $5\sqrt{3}$
c) $50\sqrt{3}$
d) $100\sqrt{3}$

4. Determine o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo $\vec{v} = (2,-1,1)$ e $\vec{u} = (1,1,-1)$

a) (1, 0, -1)
b) (1, 0, 0)
c) (1, 0, 1)
d) (0, 0, -1)

5. Seja $\vec{u}$ um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Se o produto escalar de $\vec{u}$ pelo vetor $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ é igual a -1, podemos afirmar que a soma das componentes de $\vec{u}$ é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) 0

d) $-\frac{1}{2}$

e) -1

6. Calcule z, sabendo que A(2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, z) são vértices de um triângulo de área 6.

a) 0

b) 1

c) -1

d) ±4

e) ± 3

7. Encontre um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R, sabendo que P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0) e R(0, 0, 2), e calcule a área do triângulo formado por esses três pontos.

a) $(6,6,9)$ e $\frac{3\sqrt{17}}{2}$

b) $(6,6,9)$ e $3\sqrt{17}$

c) $(6,9,9)$ e $\frac{3\sqrt{17}}{2}$

d) $(6,9,9)$ e $3\sqrt{17}$

8. Sendo $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 4$ e 45º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule $|2\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) 2

b) 4

c) 8

d) 16

e) 32

9. Determine $\vec{u}.\vec{v}$, sabendo que $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = 12$, $\left|\vec{u}\right| = 13$ e $\vec{v}$ é unitário.

a) 0
b) ± 1
c) ± 2
d) ± 4
e) ± 5

10. Sabendo que $\left|\vec{u}\right| = 6$, $\left|\vec{v}\right| = 4$ e 30º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determine a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

Gabarito

1. A

Observe:

Sabe-se que o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como multiplicar um vetor por um número real não altera a sua direção, todos os vetores do tipo $\alpha(\vec{u} \times \vec{v})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, são também ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, este problema tem infinitas soluções.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (10, -10, 5)$$

Logo, as infinitas soluções são

$\alpha(10, -10, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. D

Observe:

Sabemos de (7) que a área A é dada por

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1)$$

tem-se

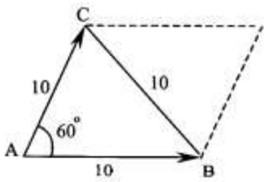
$A = |(-1, -2, -1)| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ u.a (unidades de área).

3. C

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}| \text{ sen } \hat{A}$

Como $\hat{A} = 60^\circ$, vem

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = (10)(10)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 50\sqrt{3}$.



4. **C**

Observe:

Como $\vec{x} \perp 0y$, ele é da forma $\vec{x} = (x, 0, z)$.

Então, $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$ equivale a

$$(1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & 0 & z \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$(1, 1, -1) = (z, -x + 2z, -x)$.

Pela condição de igualdade de dois vetores resulta o sistema

$$\begin{cases} z = 1 \\ -x + 2z = 1 \\ -x = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $x = 1$ e $z = 1$.

Portanto, $\vec{x} = (1, 0, 1)$.

5. **E**

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k} \to \vec{u} = b\vec{i} - b\vec{j} - b\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -1 \to (b\vec{i} - b\vec{j} - b\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -1 \to b - 2b = -1 \to b = 1$$

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \to \text{soma componentes} = 1 - 1 - 1 = -1$$

6. **D**

Encontrando o lado AB, temos (0 – 2, 2 – 0, 0 – 0). Ou seja, AB = (-2, 2, 0).

De maneira análoga, encontramos o lado AC = (-2, 0, z).

Agora, usamos o produto vetorial, visto que a área desse triângulo vale 6.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & z \end{vmatrix} = (2z, 2z, 4)$$

A metade do módulo desse vetor vale a área do triângulo:

$$\frac{|\vec{u} \text{ x } \vec{v}|}{2} = \sqrt{\frac{(2z)2+(2z)2+(4)2}{2}} = 6$$

$4z^2 + 4z^2 + 16 = 144$

$8z^2 = 128$

$Z^2=16$

$z= \pm 4$

7. A

Primeiro, temos que achar os lados PQ e PR:

PQ = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0)
PR = (0, 0, 2) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 2)
Agora, para acharmos o vetor ortogonal, faremos o produto vetorial:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 2\end{vmatrix}=(6,6,9)$$

Por fim, calculando a área do triângulo, temos:

$$S_{\Delta}=\frac{\sqrt{6^2+6^2+9^2}}{2}=\frac{\sqrt{153}}{2}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

8. D

Como sabemos,

$$\left|2\vec{u}\times\vec{v}\right|=2\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|sen\theta$$

$$\left|2\vec{u}\times\vec{v}\right|=2.2\sqrt{2}.4.sen45^{o}=16\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=16$$

9. E

|u x v| = |u|. |v| . sen(θ)

12 = 13 . 1 . sen(θ)

Sen(θ) = $\frac{12}{13}$

Cos(θ) = $\frac{\pm 5}{13}$

Cos(θ)= $\vec{u}\ .\vec{v}\,/\,|\vec{u}\,|\,|\vec{v}\,|$

$\frac{\pm 5}{13}$ = $\frac{\vec{u}\ .\vec{v}}{13\ .1}$

$\vec{u}\ .\ \vec{v}$ = ± 5

10. A

Sabendo que $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|sen\theta$, temos:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|sen\theta=6.4.\frac{1}{2}=12$$

Por fim, $S_{\Delta}=\frac{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}{2}=\frac{12}{2}=6$