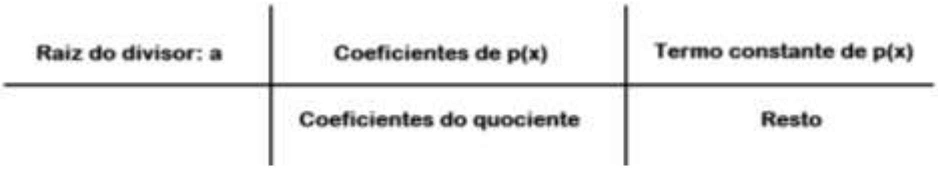
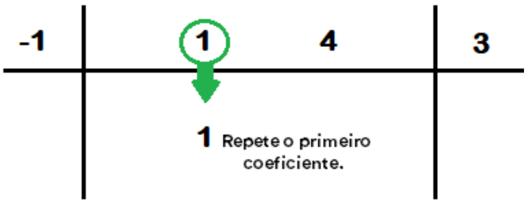
Polinômios: teorema do resto e dispositivo prático de Briot-Ruffini

Resumo

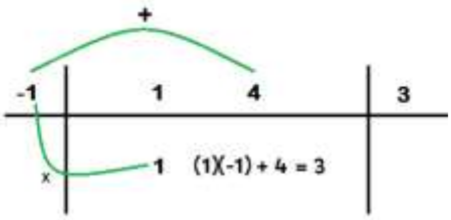
Algoritmo de Briot-Ruffini
Este dispositivo só pode ser utilizado para efetuar uma divisão em que o polinômio divisor é da forma (x - a) Chamemos de p(x) o polinômio a ser dividido e h(x) o divisor no qual h(x) = x - a. Com isso, a estrutura do dispositivo é a seguinte:



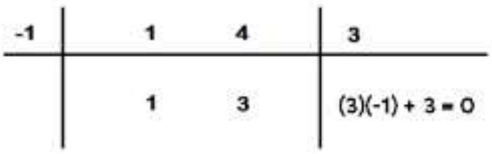
Vejamos um exemplo:
$p(x) = x^2 + 4x + 3$ e $h(x) = x + 1$



Agora, para preencher o restante, multiplique esse termo repetido pela raiz a, ou seja, -1. O resultado será somado ao próximo coeficiente de p(x), ou seja, 4.



Repita o processo até completar toda a parte de baixo do dispositivo.



Assim, obtemos o resto 0 e um quociente q(x) = 1x + 3. Ou seja, podemos reescrever p(x) como (x + 1)(x + 3).

Teorema do Resto

Na divisão de um polinômio p(x) pó rum divisor do primeiro grau d(x) = ax + b, é possível calcular diretamente o resto dessa divisão sem a necessidade de se calcular o quociente. Para tal, substituímos em p(x) o valor da raiz de d(x), ou seja:

$$r(x) = p(-a / b)$$

Ex.: Calculando o resto de p(x) = $x^2 + 4x + 3$ por e h(x) = x + 1, que já sabemos que vale 0.

Primeiro, calculamos a raiz de h(x).

h(x) = 0 = x + 1

x = - 1

Agora, calculamos p(-1).

p(-1) = $(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0$.

Como queríamos, vimos que r = p(-1) = 0.

Exercícios

1. Um polinômio p(x) dividido por x+1 deixa resto 16; por x-1 deixa resto 12, e por x deixa resto -1. Sabendo que o resto da divisão de p(x) por (x+1)(x-1)x é da forma ax^2+bx+c, então o valor numérico da soma das raízes do polinômio ax^2+bx+c é:

a) 3/5
b) 2
c) 2/15
d) 4
e) -2

2. Sabe-se que na equação $x^3+4x^2+x-6=0$, uma das raízes é igual à soma das outras duas. O conjunto solução (S) desta equação é:

a) S={-3,-2,-1}
b) S={-3,-2,+1}
c) S={+1,+2+3}
d) S={-1,+2,+3}
e) S={-2,+1,+3]

3. Se 2 é raiz dupla do polinômio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$, então a soma das outras raízes é

a) -1.
b) -0,5.
c) 0.
d) 0,5.
e) 1.

4. A divisão do polinômio x^3+2x^2-5x-6 por $(x+1)(x-2)$ é igual a:

a) x – 3
b) x + 3
c) x – 6
d) x + 6

5. Qual o valor de <u>**m**</u> para que o polinômio $\mathbf{x^3 + 2x^2 - 3x + m}$ ao ser dividido por **x + 1**, deixe resto **3**?

a) 2
b) -1
c) 3
d) 4

6. Um dos fatores do polinômio $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ é $(x+3)$. Outro fator desse polinômio é:

a) (x+8)

b) (x-5)

c) (x+4)

d) (x-1)

e) (x+1)

7. Considere os polinômios

$$p(x)=x^4+3x^3-2x^2-2x+12,\ r(x)=x+2 \text{ e } q(x)=\frac{p(x)}{r(x)}$$

Sobre as raízes da equação q(x)=0, é correto afirmar que:

a) a soma de todas as raízes é igual a -1.

b) duas raízes são inteiras.

c) duas raízes são números complexos, um localizado no 1° quadrante e outro localizado no 3° quadrante do plano de Argand-Gauss.

d) a soma das raízes inteiras é 2.

8. Dividindo-se o polinômio $p(x)=3x^4-2x^3+mx+1$ por (x – 1) ou por (x + 1), os restos são iguais. Nesse caso, o valor de m é igual a

a) -2

b) -1

c) 1

d) 2

e) 3

9. O polinômio $p(x)=ax^3+bx^2+cx$, nos reais, é divisível por (x – 1). Podemos afirmar que p(p(1)) é

a) -1

b) 0

c) 1

d) a + b + c

e) − a + b − c

10. Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$. Se p(2) = 0 e p(-2) = 0, então as raízes de p(x) são

a) – 2, 0, 1 e 2

b) – 2, - 1, 2 e 3

c) – 2, - 1, 1 e 2

d) – 2, - 1, 0 e 2

e) – 3, - 2, 1 e 2

Gabarito

1. C

Tem-se, pelo Teorema do Resto, que $p(-1)=16$, $p(1)=12$ e $p(0)=-1$. Além disso, sabemos que

$$p(x)=(x+1)(x-1)x\cdot q(x)+ax^2+bx+c,$$

com $q(x)$ sendo o quociente da divisão de $p(x)$ por $(x+1)(x-1)x$.

Desse modo, temos

$$p(-1)=a-b+c \Leftrightarrow a-b+c=16,$$

$$p(1)=a+b+c=12$$

e

$$p(0)=c \Leftrightarrow c=-1.$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações $a-b=17$ e $a+b=13$, concluímos que $a=15$, $b=-2$.

Portanto, vem $ax^2+bx+c=15x^2-2x-1$ e, assim, o resultado pedido é $-\frac{-2}{15}=\frac{2}{15}$.

2. B

Sejam r, s e t as raízes da equação $x^3+4x^2+x-6=0$ e considere que r = s + t.
Utilizando a relação de soma de Girard, temos:

$$r+s+t=-\frac{4}{1}$$
$$r+r=-4$$
$$r=-2$$

Concluímos então que dois é uma de suas raízes.

Dividindo, agora x^3+4x^2+x-6 por $(x+2)$

-2	1	4	1	-6
	1	2	-3	0

$$x^3+4x^2+x-6=(x+2)\cdot(x^2+2x-3)=0$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$
$$x^2+2x-\ 3 \Rightarrow x=-3 \text{ ou } x=1$$

Logo, S = {– 3, – 2, + 1}.

3. B

Aplicando Dispositivo Prático de Briot-Rufini, temos:

2	2	-7	3	8	-4
2	2	-3	-3	2	0
	2	1	-1	0	

Obtemos:

$2x^2 + 1x - 1 = 0 \Rightarrow$ raízes $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$, cuja soma vale $-0,5$.

4. B

Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtemos

−1	1	2	−5	−6
2	1	1	−6	0
	1	3	0	

Logo, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-2)(x+3)$ e, portanto, a divisão do polinômio $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ por $(x+1)(x-2)$ é igual a $x+3$.

5. B

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

− 1	1	2	− 3	m
	1	1	− 4	4 + m

Como o resto deve ser 3, temos: 4 + m = 3 => m = 3 − 4 = − 1.

6. E

Como um dos fatores de $P(x)$ é $x+3$, $x=-3$ é uma raiz de $P(x)$.
Assim, usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

-3	1	2	-5	-6
	1	-1	-2	0

Dessa forma,
$P(x) = (x+3) \cdot (x^2 - x - 2)$

Calculando as raízes de $x^2 - x - 2 = 0$, obtemos
$x_2 = 2$ e $x_3 = -1$,

logo,
$x^2 - x - 2 = (x-2) \cdot (x-(-1))$
$x^2 - x - 2 = (x-2) \cdot (x+1)$

Voltando ao polinômio $P(x)$, obtemos:
$P(x) = (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x+1)$

Dessa maneira, os fatores de $P(x)$ são $(x+3)$, $(x-2)$ e $(x+1)$.

7. A

Determinando o polinômio q(x) = p(x) / r(x)

-2	1	3	-2	-2	12
	1	1	-4	6	0

x

Portanto, $q(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$ e a soma de suas raízes serão dadas por $S = -\frac{1}{1} = -1$.

8. D

Pelo teorema do resto, temos:

$P(1) = P(-1)$
$3.1^4 - 2.1^3 + m.1 + 1 = 3.(-1)^4 - 2.(-1) = m.(-1) + 1$
$3 - 2 + m + 1 = 3 + 2 - m + 1$
$2m = 4$
$m = 2$

9. B

Se $p(x)$ é divisível por $(x - 1)$, então, $p(1) = 0$.
Logo,
$p(p(1)) = p(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 = 0.$

10. E

Sabendo que 2 e -2 são raízes de p(x), temos:

2	1	2	-7	-8	12
-2	1	4	1	-6	0
	1	2	-3	0	

$p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0$

Resolvendo a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$, temos $x = -3$ ou $x = 1$.

Portanto, as raízes da equação são -3, -2, 1 e 2.