Classificação de sistemas lineares

Resumo

Os sistemas lineares podem ser classificados como **possíveis,** aqueles que possuem conjunto solução, ou **impossíveis,** aqueles que não possuem conjunto solução. Os possíveis ainda se dividem em determinados e indeterminados.

Sistema Possível Determinado (SPD): possui conjunto solução unitário.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$
$$2 - y = 1 \Leftrightarrow y = 1$$

Note que o par (2,1) é a única solução possível para o sistema, ou seja, satisfazem as duas equações ao mesmo tempo.

Sistema Possível Indeterminado (SPI): O conjunto solução é infinito.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$y = 4 - 2x$$
$$4x + 2(4 - 2x) = 8$$
$$4x + 8 - 4x = 8$$
$$0 = 0$$

Nesse caso, satisfazendo a condição y=4-2x, será solução do sistema. Repare que (0,4), (1,2), (2,0) e por ai vai. Portanto tem infinitas soluções. Em geral, o SPI possuem linhas proporcionais, no exemplo, a segunda linha é o dobro da primeira.

Sistema Impossível (SI): O conjunto solução é vazio.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Diminuindo a segunda equação da primeira, temos:

0=4.

O que torna o sistema sem solução, logo impossível.

Sistema homogêneo

Antes de falar sobre o sistema homogêneo, relembraremos alguns conceitos. Considere o seguinte sistema 2x2:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Ele pode ser reescrito da forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{termos independentes}}$$

Um sistema homogêneo é um sistema quando os termos independentes são 0.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Note que o sistema homogêneo sempre é possível, uma vez que (0,0) (no caso 2x2) é sempre solução, essa chamada solução trivial.

Exercícios

1. O sistema de equações $\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$ possui:

a) nenhuma solução.
b) uma solução.
c) duas soluções.
d) três soluções.
e) infinitas soluções.

2. Considerando o sistema $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 3 \\ 15x + 9y + 8z = 6 \\ 20x + 12y + 16z = 12 \end{cases}$ analise as afirmativas abaixo e conclua.

a) O sistema é impossível.
b) O sistema é possível e indeterminado.
c) O sistema é possível e determinado.
d) O sistema admite como solução única x = 4, y = 8, z = −11.
e) O sistema admite como solução, para qualquer valor de x a terna (x, x, 5x).

3. Analise as afirmativas abaixo.

I. O sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ é possível e indeterminado.

II. O sistema $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$ é possível e determinado.

III. O sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ é impossível.

Marque a alternativa correta.

a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é verdadeira.
c) Apenas III é verdadeira.
d) Apenas I é falsa.
e) Apenas III é falsa.

4. Sejam as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\ \text{e}\ B=\begin{bmatrix}k\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$$

Em relação à equação matricial $AX = B$, é correto afirmar que

a) é impossível para $k = \frac{7}{2}$.

b) admite solução única para $k = \frac{7}{2}$.

c) toda solução satisfaz à condição $x_1 + x_2 = 4$.

d) admite a terna ordenada $\left(2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ como solução.

5. Sobre o sistema linear de equações:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

É dito que:

I. O sistema é indeterminado

II. x=1,y=0,z=2 é solução do sistema

III. O sistema possui uma e somente uma solução

IV. Se z=1, então x=1 e y=-1

V. O sistema é homogêneo

São verdadeiras a(s) assertiva(s):

a) I

b) II

c) II e III

d) III e IV

e) V

6. Considere o seguinte problema: Determinar dois números inteiros tais que a diferença entre seus dobros seja igual a 4 e a soma de seus triplos seja igual a 9. Esse problema pode ser resolvido por meio do sistema de equações.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

e a conclusão correta a que se chega é que esse problema

a) não admite soluções.

b) admite infinitas soluções.

c) admite uma única solução, com valores de x e y menores que 5.

d) admite uma única solução, com valores de x e y compreendidos entre 5 e 10.

e) admite uma única solução, com valores de x e y maiores que 10.

7. Na peça “Um xadrez diferente”, que encenava a vida de um preso condenado por crime de “colarinho branco”, foi utilizado como cenário um mosaico formado por retângulos de três materiais diferentes, nas cores verde, violeta e vermelha. Considere que x, y e z são, respectivamente, as quantidades, em quilos, dos materiais verde, violeta e vermelho utilizados na confecção do painel e que essas quantidades satisfazem o sistema linear.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 250 \\ 2x + 5y + 3z = 420 \\ 3x + 5y + 2z = 430 \end{cases}$$

Sobre a solução desse sistema e a quantidade dos materiais verde, violeta e vermelho utilizada no painel, afirma-se:

I. O sistema tem solução única e $x + y + z = 120$, isto é, a soma das quantidades dos três materiais empregados é 120 quilo.

II. O sistema não tem solução, é impossível determinar a quantidade de cada material empregado.

III. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é diferente de zero e $x = 2y$ e $y = 3z$.

IV. O determinante da matriz dos coeficientes a qual está associada ao sistema é zero. O sistema tem solução, porém, para determinar a quantidade dos materiais utilizados, é necessário saber previamente a quantidade de um desses materiais.

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e III.

e) apenas IV.

8. É dado o sistema $\begin{cases} x + my = m - 1 \\ 2x + 6y = m^2 - 1 \end{cases}$. Determine o valor de m para que o sistema seja homogêneo

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

9. Dado o sistema $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1)y = 0 \end{cases}$, para que valores de m o sistema admite somente a solução trivial:

a) $m = -1$
b) $m \neq -1$
c) $m = 2$
d) $m \neq 2$

10. Considere o sistema S seguinte: $S\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 6y + z = 5 \\ 6x + 9y + 3z = 8 \end{cases}$

a) S possui uma única solução
b) S possui uma infinidade de soluções
c) S não possui soluções
d) S possui exatamente duas soluções
e) S possui exatamente três soluções

Gabarito

1. B

$$\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ 3x - 4y = 18 \end{cases}$$

$$8x = 16$$

$$x = 2$$

$$10 + 4y = -2 \rightarrow y = -3$$

2. B

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 3 \\ 15x + 9y + 8z = 6 \\ 20x + 12y + 16z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y + 4z = 3 \\ 15x + 9y + 8z = 6 \\ 5x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y + 4z = 3 \\ 15x + 9y + 8z = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Note que temos 2 equações e 3 incógnitas logo pelo menos uma das incógnitas ficará em função das outras. Como as linhas não são múltiplas o sistema não é impossível. Logo é possível e indeterminado.

3. B

I é falso, pois $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ tem uma única solução (2,3)

II é verdadeiro, $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$,pois

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 2z = -8 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$-x=-1 \rightarrow x=1$$

$$\begin{cases} 1 + y - z = 4 \\ 2 - 3y + z = -5 \\ 1 + 2y - 2z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - z = 3 \\ -3y + z = -7 \\ 2y - 2z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - z = 3 \\ -3y + z = -7 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3y - 3z = 9 \\ -3y + z = -7 \end{cases} \rightarrow -2z = 2 \rightarrow z = -1$$

$$y+1=3 \leftrightarrow y=2$$

(1,2,-1) é solução única.

III é falso, pois $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ admite infinitas soluções, pois as linhas são proporcionais.

Logo apenas a II é verdadeira.

4. **C**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Somando a segunda equação com a terceira, temos:

$2 \cdot (x_1 + x_2) = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4.$

5. **D**

Somando as duas primeiras equações, temos: 3x=3, logo x=1. Substituindo esse valor nas demais equações

$y - z = -2$

$-y + 2z = 3$

$z = 1$

$1 - y + 1 = 3$

$y = -1$

Analisando as letras, apenas a III e IV são verdadeiras, as outras são falsas.

6. **A**

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 12 \\ 6x + 6y = 18 \end{cases}$$

$\rightarrow 12x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

$2.\frac{5}{2} - 2y = 4 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

Como é exigido que eles sejam inteiros e nem x nem y são, logo não tem solução.

7. **E**

A matriz aumentada do sistema será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 250 \\ 2 & 5 & 2 & 420 \\ 3 & 5 & 2 & 430 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z = k$

$x = 10 + k$

$y = 80 - k$

O determinante da matriz dos coeficientes será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$10 + 27 + 20 - 12 - 15 - 30 = 0$

8. B

$m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

$m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -1$

9. B

Para admitir apenas a solução trivial, x=0 e y=0. Para isso, $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

10. B

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \\ 6x + 9y = 11 \end{cases}$$

Os coeficientes são proporcionais, mas os termos independentes não. Logo não possui soluções