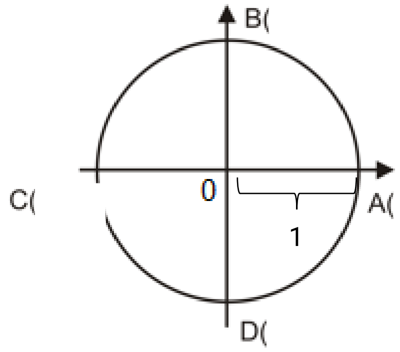
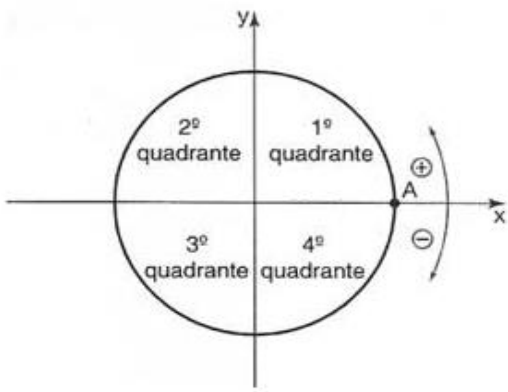
Ciclo trigonométrico

Resumo

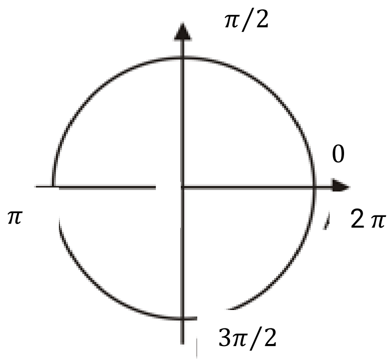
Considere uma circunferência de raio = 1 e centro (0,0). Essa circunferência é chamada de ciclo trigonométrico.



- Convencionou-se como sentido positivo dos arcos o sentido anti-horário.
- Os eixos coordenados dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes:

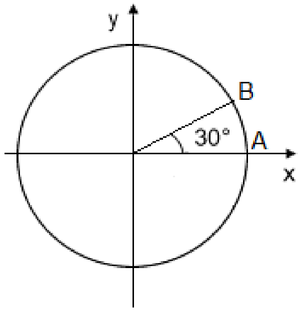


- Cada número real x ($0 \leq x \leq 2\pi$) está associado a um ponto x da circunferência, que será a sua imagem.



Determinação principal

Quando marcamos um arco AB no ciclo, sabemos que o arco tem origem no ponto A e a extremidade no ponto B, mas não temos certeza da quantidade de voltas que foram dadas no ciclo para que, saindo da origem, cheguemos ao ponto B.



Neste caso, AB = 30°. Porém, podemos dizer que AB = 30° + 360° = 390°. Ou então, que AB = 30° - 360° = -330°. Desta forma, dizemos que o arco AB possui infinitas determinações:

(...-330°, 30°, 390°...)

Onde 30º é a primeira determinação positiva.

Arcos côngruos

São arcos que possuem as extremidades num mesmo ponto. Para que isso ocorra, a diferença entre as suas medidas deve ser uma quantidade inteira de voltas, ou seja, ser múltiplo de 360° ou 2π radianos.

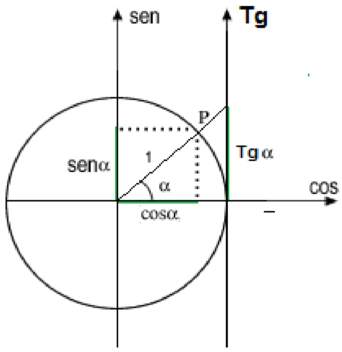
Ex.: acima, vimos que 30º e 390º são arcos côngruos.

Podemos deduzir uma expressão geral dos arcos côngruos:

AB = α + 2πK; α em radianos.
AB = α + 360º . K; α em graus. $(K \in Z)$

Linhas trigonométricas no ciclo

Á partir do ciclo trigonométrico, definem-se as principais linhas trigonométricas: seno, cosseno e tangente, da seguinte maneira:



Percebemos que o sinal do seno, cosseno e tangente de um ângulo mudam de acordo com o quadrante em que o ângulo se encontra.

	1ºQ	2ºQ	3ºQ	4ºQ
seno	+	+	–	–
cosseno	+	–	–	+
tangente	+	–	+	–

Observe que $\begin{cases} -1 \leq sen\alpha \leq 1 \\ -1 \leq cos\alpha \leq 1 \end{cases}$ e

	$0/2\pi$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	∄	0	∄

Relações Trigonométricas

Analisando o ciclo, podemos deduzir algumas relações:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (Relação fundamental)

$tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$

$cotg^2\alpha + 1 = cossec^2\alpha$

Relembrando:

tangente = $\dfrac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$

cotangente = $\dfrac{1}{\text{tangente}} = \dfrac{cos}{sen}$

cossecante = $\dfrac{1}{seno}$

secante = $\dfrac{1}{\text{cosseno}}$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, os skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho" conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominada "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

a) uma volta completa.

b) uma volta e meia.

c) duas voltas completas.

d) duas voltas e meia.

e) cinco voltas completas.

2. A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.

Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (*NO*) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

a) 75° no sentido horário.

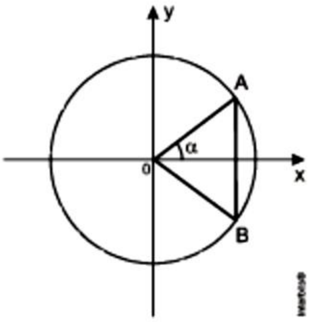
b) 105° no sentido anti-horário.

c) 120° no sentido anti-horário.

d) 135° no sentido anti-horário.

e) 165° no sentido horário.

3. Na figura a seguir, estão representados o ciclo trigonométrico e um triângulo isósceles OAB.



Qual das expressões abaixo corresponde à área do triângulo OAB em função do ângulo α ?

a) $tg\alpha \times sen\alpha$

b) $\frac{1}{2}tg\alpha \times \cos\alpha$

c) $sen\alpha \times \cos\alpha$

d) $\frac{1}{2}tg\alpha \times sen\alpha$

e) $tg\alpha \times \cos\alpha$

4. Considerando os valores de θ, para os quais a expressão $\frac{sen\theta}{\cos\sec\theta}+\frac{\cos\theta}{\sec\theta}$ é definida, é CORRETO afirmar que ela está sempre igual a

a) 1

b) 2

c) sen θ

d) cos θ

5. Considere dois ângulos agudos cujas medidas a e b, em graus, são tais que a + b = 90° e 4sen(a) - 10sen(b) = 0. Nessas condições é correto concluir que

a) tg a = 1 e tg b = 1.

b) tg a = 4 e tg b =1/4.

c) tg a = 1/4 e tg b = 4.

d) tg a =2/5 e tg b =5/2.

e) tg a = 5/2 e tg b = 2/5.

6. Assinale a alternativa correta:

a) sen(1000°) < 0

b) sen(1000°) > 0

c) sen(1000°) = cos(1000°)

d) sen(1000°) = - sen(1000°)

e) sen(1000°) = - cos(1000°)

7. O seno de um arco de medida 2340° é igual a:

a) -1

b) -1/2

c) 0

d) ½

8. Sobre os ângulos 150°, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{16\pi}{9}$ e, é correto afirmar que suas tangentes possuem valores, respectivamente:

a) negativo, positivo, negativo.

b) positivo, positivo, negativo.

c) negativo, negativo, negativo.

d) negativo, positivo, positivo.

e) positivo, negativo, negativo.

9. Se sen(x) – cos(x) = 1/2, o valor de sen(x).cos(x). é igual a:

a) $-\frac{3}{16}$

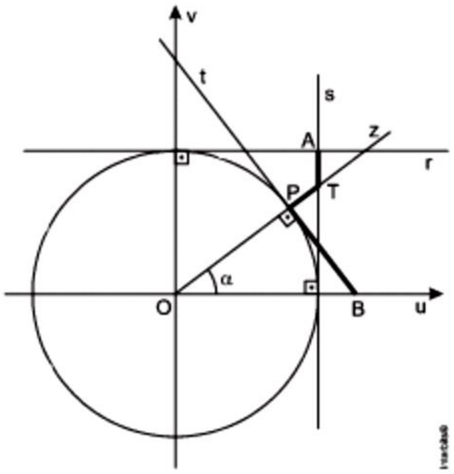
b) $-\frac{3}{8}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

10. No ciclo trigonométrico da figura abaixo, acrescentou-se as retas r, s, t e z.



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT, TP e PB, pode ser calculado, como função de α, por

a) $\sec\alpha$

b) $\cos\sec\alpha$

c) $tg\alpha + \text{cotg}\alpha$

d) $\cos\sec\alpha + \sec\alpha$

Gabarito

1. **D**

Como $900° = 2 \cdot 360° + 180°$, segue que o atleta girou duas voltas e meia.

2. **E**

Considerando *NO* a origem e o sentido anti-horário o dos arcos positivos, tem-se que inicialmente a posição da câmera é $45°$. Desse modo, após as três mudanças, a câmera estará na posição $45° + 135° - 60° + 45° = 165°$. Em consequência, a resposta é $165°$ no sentido horário.

3. **C**

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{2\text{sen}\alpha \times \cos\alpha}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \text{sen}\alpha \times \cos\alpha .$$

4. **A**

$$x = \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{cossec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$$

Temos que:

- $\text{cossec}\,\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$

- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

Substituindo

$$x = \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{cossec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$$

$$x = \frac{\text{sen}\,\theta}{\left(\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$x = \text{sen}\,\theta \times \frac{\text{sen}\,\theta}{1} + \cos\theta \times \frac{\cos\theta}{1}$$

$$x = \text{sen}\,\theta \times \text{sen}\,\theta + \cos\theta \times \cos\theta$$

$$x = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$$

Pela relação fundamental temos que:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{para qualquer } \theta$$

Então, concluímos que

X=1

5. E

$a + b = 90°$ ==> $senb = cosa$ e $cosb = sena$

$senb = sen(90° - a) = sen90cosa - cos90sena = cosa$

$4sena - 10senb = 0$

$2sena = 5cosa$

$sena / cosa = 5/2$ ==> $tga = 5/2$

$senb / cosb = 2/5$ ==> $tgb = 2/5$

6. A

Note que $1000° = 2 \cdot 360° + 280°$. Por conseguinte, sendo $280°$ um arco do quarto quadrante, vem que $\text{sen}(1000°) = \text{sen}(280°) < 0$.

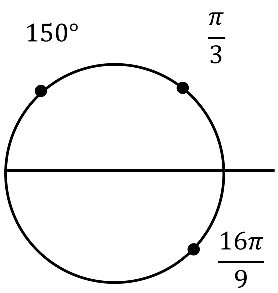
7. C

$2340º = 360º \,.\, 6 + 180º$

Sem 2340º = sem 180º =

8. A

Pelo ciclo trigonométrico temos que os ângulos estão representados respectivamente :



9. C

Elevando os dois lados ao quadrado temos:

$$(sen\ x - cos\ x)^2 = (1/2)^2$$

Desenvolvendo:

$$(sen\ x)^2 - 2.sen\ x.cos\ x + (cos\ x)^2 = 1/4$$
$$sen^2 x - 2sen\ x.cos\ x + cos^2 x = 1/4$$
$$(sen^2 x + cos^2 x) - 2sen\ x.cos\ x = 1/4$$

Logo podemos concluir, utilizando do teorema fundamental:

$$1 - 2sen\ x.cos\ x = 1/4$$
$$1 = (1/4) + 2sen\ x.cos\ x$$
$$2sen\ x.cos\ x = 1 - (1/4)$$
$$2sen\ x.cos\ x = (4/4) - (1/4)$$
$$2sen\ x.cos\ x = (4-1)/4$$
$$2sen\ x.cos\ x = 3/4$$
$$4 * 2sen\ x.cos\ x = 3$$
$$8 * sen\ x.cos\ x = 3$$

que $sen\ x.cos\ x = \frac{3}{8}$

10. A

Sabendo que o raio da circunferência é igual a 1 (ciclo trigonométrico) e considerando F o ponto de interseção da reta s com o eixo u, pode-se escrever:

Raio $= OP = 1$

$AT = AF - TF \Rightarrow AT = 1 - tg\alpha$

$PT = OT - OP = OB - 1 \Rightarrow PT = sec\alpha - 1$

$PB = OP \cdot tg\alpha \Rightarrow PB = tg\alpha$

$AT + PT + PB = 1 - tg\alpha + sec\alpha - 1 + tg\alpha \Rightarrow AT + PT + PB = sec\alpha$