Introdução à geometria espacial

Resumo

Na geometria espacial, trabalhamos em três dimensões.

Postulados de determinação

Determinação da reta:

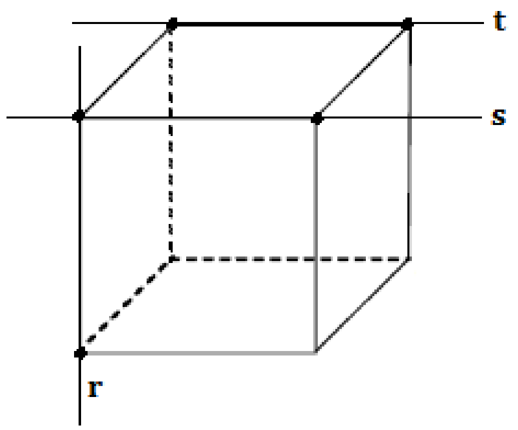
Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Determinação do plano:

- Três pontos não colineares determinam um único plano.
- Uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano.
- Duas retas concorrentes determinam um único plano.
- Duas retas paralelas distintas determinam um único plano.

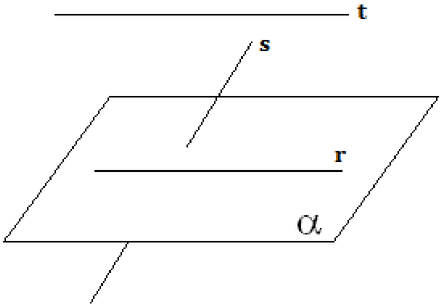
Posições relativas

Entre retas:



$$\text{Retas}\begin{cases}\text{Coplanares}\begin{cases}\text{Paralelas}\begin{cases}\text{Distintas (s, t)}\\ \text{Coincidentes}\end{cases}\\ \text{Concorrentes (r, s)}\end{cases}\\ \text{Não-coplanares}\left\{\text{Reversas (r, t)}\right.\end{cases}$$

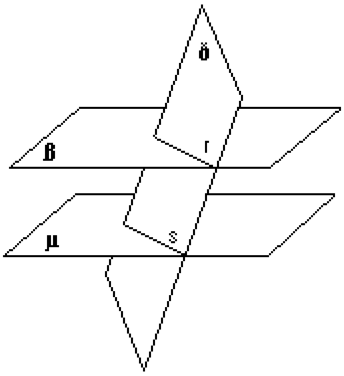
Entre reta e plano



Reta paralela ao plano: t
Reta contida no plano: r
Reta secante ao plano: s

Teorema: Se uma reta possui dois pontos distintos que pertencem a um plano, então ela está contida nesse plano.

Entre planos:

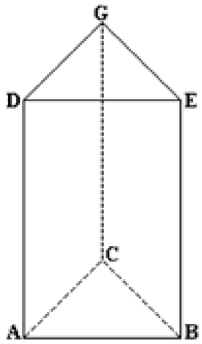


Planos paralelos distintos: μ e β
Planos secantes: δ e μ ou δ e β

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui]

Exercícios

1. Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial.



Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a CG. A formiga chegou ao vértice

a) A

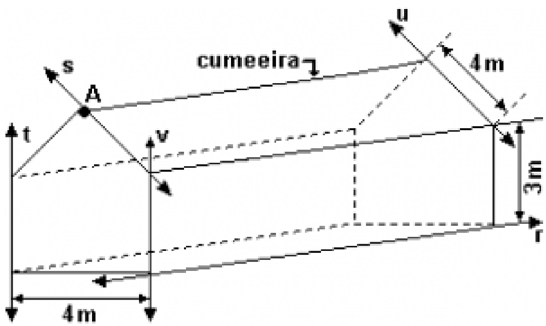
b) B

c) C

d) D

e) E

2. O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede.



Das retas assinaladas podemos afirmar que:

a) t e u são reversas

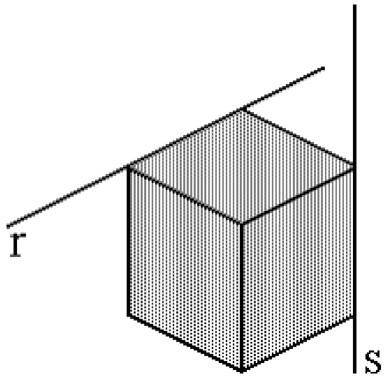
b) s e u são reversas

c) t e u são concorrentes

d) s e r são concorrentes

e) t e r são perpendiculares

3. As retas r e s foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura a seguir.



Sobre a situação dada, assinale a afirmação INCORRETA.

a) r e s são retas paralelas.

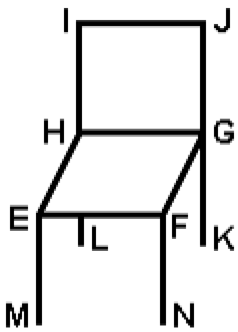
b) r e s são retas reversas.

c) r e s são retas ortogonais.

d) não existe plano contendo r e s

e) $r \cap s = \varnothing$

4. Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



Sendo assim:

a) Os planos EFN e FGJ são paralelos.

b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.

c) Os planos HIJ e EGN são paralelos.

d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

5. Considere uma reta s, contida em um plano α, e uma reta r perpendicular a s. Então, necessariamente:

a) r é perpendicular a α.

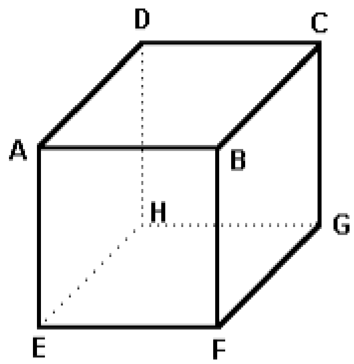
b) r e s são coplanares.

c) r é paralela a α.

d) r está contida em α.

e) Todas as retas paralelas a r interceptam s.

6. Considere o cubo da figura adiante. Das alternativas a seguir, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reversas, é:



a) (A,D); (C,G); (E,H).

b) (A,E); (H,G); (B,F).

c) (A,H); (C,F); (F,H).

d) (A,E); (B,C); (D,H).

e) (A,D); (C,G); (E,F).

7. Duas retas são reversas quando:

a) não existe plano que contém ambas

b) existe um único plano que as contém

c) não se interceptam

d) não são paralelas

e) são paralelas, mas pertencem a planos distintos

8. Seja A um ponto pertencente à reta r, contida no plano α. É verdade que:

a) existe uma única reta que é perpendicular à reta r no ponto A.

b) existe uma única reta, não contida no plano α, que é paralela à reta r.

c) existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano α, que contêm a reta r.

d) existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano α e que contêm a reta r.

e) existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano α e que são paralelas à reta r.

9. Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s, reversas. Seja t a perpendicular comum a r e a s. Então:

a) t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.

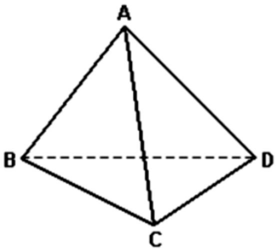
b) t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.

c) t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.

d) t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s.

e) t é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

10. Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares.



Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é

a) 6.

b) 3.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

Gabarito

1. **E**
Saiu de G
Percorreu GC. Está agora em C
Partiu de C e percorreu a diagonal CD. Está agora em D
Partiu de D e percorreu DE (DE é reversa com CG)

Chegou, portando no ponto E.

2. **A**
Retas reversas são aqueles que não estão contidas em um mesmo plano e não têm pontos em comum.
Repare que as retas t e u são reversas.

3. **A**
Por mais que as retas r e s não se toquem, elas não são paralelas, pois não estão no mesmo plano.

4. **D**
Vamos avaliar cada uma das alternativas:

a) os planos EFN e FGJ são paralelos. FALSA, porque eles possuem a reta que contém o segmento FN em comum, portanto, são secantes.

b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH. FALSA, dois planos possuem apenas uma reta em comum se são secantes, como neste caso, e a reta é a suporte de EF.

c) os planos HIJ e EGN são paralelos. FALSA, porque eles têm o ponto G em comum, logo, têm uma reta em comum e por isso são secantes.

d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG. VERDADEIRA, como vimos na letra “b”.

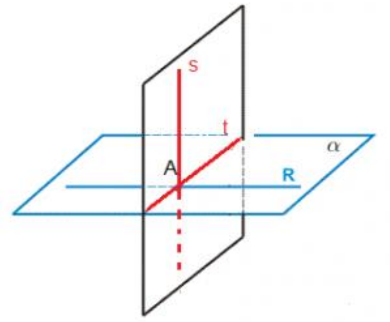
5. **B**
Se as retas r e s são perpendiculares, elas são concorrentes e, portanto, são coplanares (estão num mesmo plano).
Lembre-se: duas retas coplanares são, necessariamente: coincidentes ou paralelas ou concorrentes.
Se forem reversas, não são coplanares.

6. **E**
Retas reversas são aqueles que necessariamente estão em planos diferentes. Sendo assim, arestas de uma mesma face não reversas, já que estão no mesmo plano, o plano da face em que se encontram.
Por isso, o gabarito é letra e.

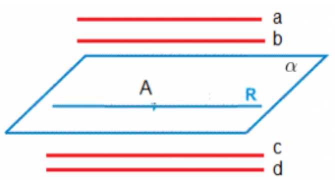
7. **A**
Segue a definição de retas reversas: Duas retas distintas são reversas se, e somente se não existe plano que as contenha.

8. E

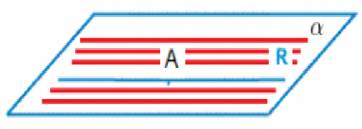
Essa questão assemelha-se a uma de classificar as assertivas em verdadeiras ou falsas, porém, neste caso, temos apenas uma alternativa verdadeira, logo, precisamos analisar uma a uma as opções.
Primeiro Passo: Letra "a": Existe uma única reta perpendicular à reta r no ponto A. FALSA, podemos traçar mais de uma reta, veja o contra exemplo na figura abaixo, na qual tanto s quanto t são perpendiculares à r no ponto A.



Segundo Passo: Letra "b": Existe uma única reta, não contida no plano α, que é paralela à reta r. FALSA, existem infinitas retas não contidas no plano α que são paralelas à r, veja o contra exemplo na figura abaixo na qual a, b, c e d são paralelas à r e não estão contidas em α.



Terceiro Passo: Letra "c": Existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano α que contém a reta r. FALSA, para que exista um plano que seja paralelo ao plano α e contenha a reta r, este plano terá que ser coincidente com o plano α. Portanto, não existe nenhum plano distinto de α paralelo a este que contenha r.
Quarto Passo: Letra "d": Existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano α e que contêm a reta r. FALSA, pela unicidade do perpendicularismo entre reta e plano, por um ponto qualquer pode-se conduzir um único plano perpendicular a um reta dada (r).
Quinto Passo: Letra "e": Existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano α e que são paralelas à reta r. VERDADEIRA, pelos primeiro e segundo postulados de Euclides, podemos deduzir que no plano, bem como fora dele, há infinitas retas. Veja a figura ilustrativa abaixo:



9. C

Dadas duas retas reversas, existe uma única reta que é perpendicular a ambas. Note que a aresta AB é perpendicular as arestas AE e BC ou AD e BF. Então t é a reta perpendicular comum às retas r e s. A reta t é a reta suporte de uma das arestas.

10. B

Repare que cada uma das arestas laterais é reversa à uma aresta da base.
Assim, AB é reversa à CD, AC à BD e AD à BC.