Inequação produto e inequação quociente

Resumo

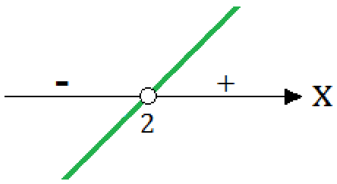
Inequação produto

É toda inequação na qual há um produto de termos.

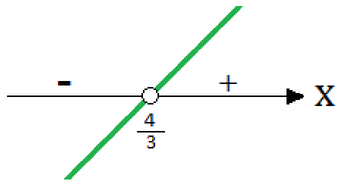
Ex: Resolva a inequação $(x-2)(3x-4)<0$

Para resolver essa desigualdade, devemos olhar para as funções x -2 e 3x – 4 separadamente e fazer o estudo de sinais de ambas as funções.
Tirando as raízes das funções e fazendo o estudo de sinais temos:

$x - 2 = 0$
$x = 2$



$3x - 4 = 0$
$x = 4/3$



Como a inequação precisa ser menor que zero, as raízes não entram no nosso conjunto solução, pois elas zeram as funções.
Agora, podemos montar nosso quadro:

		$\frac{4}{3}$		2	
x - 2	−		−		+
3x - 4	−		+		+
(x - 2)(3x - 4)	+		−		+

Assim, nossa inequação $(x-2)(3x-4)<0$ tem como solução $\frac{4}{3}<x<2$.

Inequação quociente

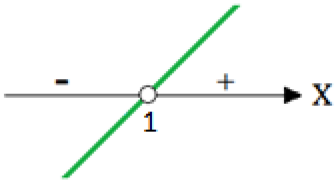
É toda inequação na qual há uma divisão de termos.

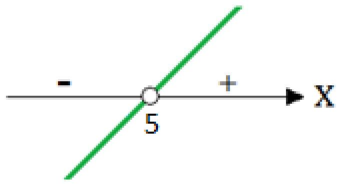
Ex: Resolva a inequação $\frac{x-1}{x-5}>0$.

Tirando as raízes das funções e fazendo o estudo de sinais temos:

$x - 1 = 0$ $x - 5 = 0$

$x = 1$ $x = 5$





Como a inequação precisa ser menor que zero, as raízes não entram no nosso conjunto solução, pois elas zeram as funções.
Agora, podemos montar nosso quadro:

		1		5	
x - 1	−		+		+
x - 5	−		−		+
(x - 1)/(x - 5)	+		−		+

Assim, nossa inequação $\frac{x-1}{x-5} > 0$ tem como solução $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. A desigualdade $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10}>0$ se verifica para todos os números reais x tais que:

a) $-1<x$ ou $-3<x<-2$ ou $x<-5$

b) $x<1$ ou $2<x<3$ ou $x>5$

c) $1<x<2$ ou $3<x<5$

d) $x>1$ ou $2<x<5$

e) $1<x<3$ ou $2<x<5$

2. O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-14}{x}>3 \\ x\leq 12 \end{cases}$$

Pode se afirmar que:

a) $0\leq k<2$

b) $2\leq k<4$

c) $4\leq k<6$

d) $6\leq k<8$

e) $k\geq 8$

3. O conjunto solução S, nos reais, da inequação $-4(2x-1)\left(\dfrac{x}{3}-1\right)>0$ é

a) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,1<x<2\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{1}{2}<x<3\right\}$

c) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<1 \text{ ou } x>2\}$

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<\dfrac{1}{2} \text{ ou } x>3\right\}$

4. A soma das soluções da inequação $\frac{-x+3}{2x-1} > 0$, onde x pertence ao conjunto dos naturais é:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 8

5. A soma de todos os números inteiros que satisfazem simultaneamente a inequação-produto $(3x-7)(x+4) < 0$ e a inequação-quociente $\frac{2x+1}{5-x} > 0$ é

a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

6. O conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação $(5x^2-6x-8)(2-2x) < 0$ é

a) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup]-\infty, 1[$

b) $S =]2, +\infty[\cup \left]-\frac{4}{5}, 1\right[$

c) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup]1, +\infty[$

d) $S = \left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[\cup]1, 2[$

e) $S = \left]-\frac{4}{5}, 1\right[\cup]2, +\infty[$

7. O número de soluções inteiras da inequação $\frac{2x+6}{14-2x} \geq 0$ é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) infinito

8. A função $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio o conjunto solução

a) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-3<x\leq-2 \text{ ou } 1\leq x<3\}$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-3\leq x<-2 \text{ ou } 1<x\leq 3\}$

c) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-3\leq x<-2 \text{ ou } 1\leq x\leq 3\}$

d) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-2<x\leq 1 \text{ ou } 1\leq x\leq 3\}$

e) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-2\leq x<-1 \text{ ou } 1<x\leq 3\}$

9. Sobre a inequação-produto $(-4x^2+2x-1)(x^2-6x+8)\geq 0$, nos reais, é correto afirmar que

a) Não existe solução nos reais.

b) O conjunto admite infinitas soluções nos reais.

c) O conjuntos solução é $S=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,2\leq x\leq 4\}$

d) O conjuntos solução é $S=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,x\leq 2 \text{ ou } x\geq 4\}$

10. Tem-se (x+2).(x - 1) < 0 se e somente se:

a) x < 1

b) x > - 2

c) - 2 < x < 0

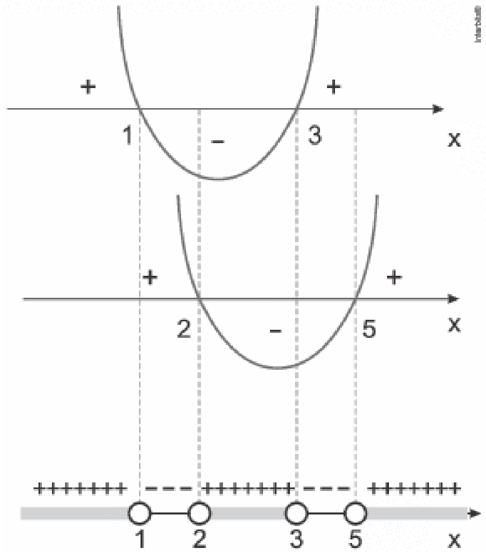
d) x ≠ 2 e x = 1

e) - 2 < x < 1

Gabarito

1. B

Fazendo o estudo do sinal de cada uma das funções e depois o sinal do quociente entre elas, temos:



Portando a solução da inequação quociente será dada por:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$.

2. D

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 14}{x} > 3 \\ x \leq 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x - 14}{x} < 0 \\ x \leq 12 \end{cases}$$

Resolvendo e fazendo os diagramas de sinais, temos: $\begin{cases} x > 7 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$

Logo,

$$\left\{\begin{matrix} 7 < x \leq 12 \\ -2 < x < 0 \end{matrix}\right\rangle \text{Inteiros} \rightarrow S = \{-1, 8, 9, 10, 11, 12\} \rightarrow k = 6$$

3. B

Tem-se que

$$-4 \cdot (2x - 1) \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 3) < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 3.$$

Portanto,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}.$$

4. A

Tem-se que

$$\frac{-x+3}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 3.$$

Logo, as soluções naturais da inequação são $x = 1$ e $x = 2$. Em consequência, o resultado pedido é igual a $1+2=3$.

5. A

Temos que

$$(3x-7)\cdot(x+4) < 0 \Leftrightarrow 3\cdot\left(x-\frac{7}{3}\right)\cdot(x+4) < 0$$
$$\Leftrightarrow -4 < x < \frac{7}{3}$$

e

$$\frac{2x+1}{5-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)}{-(x-5)} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+\frac{1}{2}}{x-5} < 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 5.$$

Logo, os números reais x que satisfazem simultaneamente as inequações são tais que $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$, e, portanto, a soma pedida é igual a $0+1+2=3$.

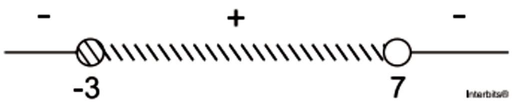
6. E

Tem-se que

$$(5x^2-6x-8)(2-2x) < 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{5}\right)(x-1)(x-2) > 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{4}{5} < x < 1 \text{ ou } x > 2.$$

7. C

Fazendo o estudo do sinal, temos:



Logo, a solução da equação será dada por $S = \{x \in R / -3 \leq x \leq 7\}$ com os seguintes números inteiros:

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Dez no total.

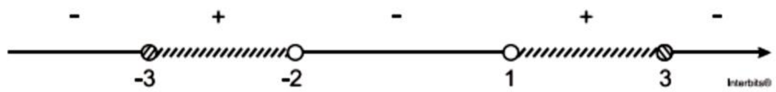
8. B

O domínio da função será a solução da seguinte inequação $\dfrac{9-x^2}{x^2+x-2} \geq 0.$

$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

de $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 1$

Estudando o sinal de $\dfrac{9-x^2}{x^2+x-2}$, temos:



Resolvendo a inequação, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < -2 \quad \text{ou} \quad 1 < x \leq 3\}$

9. C

Reescrevendo a inequação, obtemos

$$(-4x^2 + 2x - 1)(x^2 - 6x + 8) \geq 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 2x + 1)(x^2 - 6x + 8) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-2)(x-4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } 2 \leq x \leq 4.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação, em $\mathbb{Z}$, é $S = \{x \in \mathbb{Z};\ 2 \leq x \leq 4\}$.

10. E

A função x + 2 é positiva quando x > -2. Já a função x – 1 é positiva quando x > 1. Fazendo o quadro, temos:

		-2	1
x + 2	-	+	+
x - 1	-	-	+
(x + 2)(x - 1)	+	-	+

Ou seja, como queremos que (x + 2)(x – 1) seja menor que zero, temos que -2 < x < 1.