Definição de módulo e equações modulares

Resumo

Definição

Dado um número real x, define-se o módulo de x, representado por **|x|** como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se x } \geq 0 \\ -x, \text{ se x} < 0 \end{cases}$$

O módulo também é chamado de valor absoluto.

Uma observação importante é que, se x é negativo então –x é positivo.

Com isso, podemos concluir que $|x| \geq 0$, para todo x real

Exemplos:

| 1 **|** = 1

| -2 **|** = 2

| $\sqrt{2}$ **|** = $\sqrt{2}$

| -1/5 **|** = 1/5

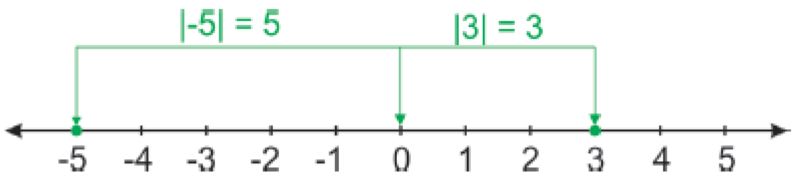
Note que:

| 1 **|** = 1, já que 1 ≥ 0, o resultado é o próprio 1

| -2 **|** = 2, pois – 2 < 0, o resultado será – (-2) = 2

Interpretação geométrica

A interpretação geométrica do módulo de um número real x é a distância desse número até a origem (ponto 0). Observe na reta real:

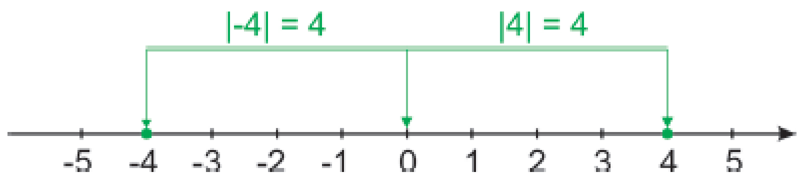


Nesse caso **|** -5**|** = 5 representa que esse número dista 5 da origem.

Exemplo:

| x **|** = 4

Do ponto de vista geométrico, queremos descobrir qual é o número que dista 4 unidades da origem, ou seja,



Logo, existem 2 valores que satisfazem essa condição: -4 e 4. Assim, o conjunto solução S será:
S= {-4,4}

Propriedades

Sejam x e y números reais, então:

$P_1 : |x| \geq 0$

$P_2 : |x \cdot y| = |x||y|$

$P_3 : |x|^2 = x^2$

$P_4 : \sqrt{x^2} = |x|$

Equação modular

Usando como base o exemplo anterior, vamos estudar um caso parecido:

$$| x - 1 | = 4.$$

Como não sabemos se a expressão x – 1 é positiva, devemos estudar os dois casos. Ou seja:

$$x - 1 = 4 \text{ ou } x - 1 = -4$$

Nesse caso, temos como solução:

$$\begin{cases} x-1=4 \Rightarrow x=5 \\ x-1=-4 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$
$$S=\{-3,5\}$$

Existem casos em que ambos os membros da equação possuem módulo, nesse caso, para x e y números reais:

$$|x|=|y| \Rightarrow x=y \quad \text{ou} \quad x=-y$$

Condição de existência

Como dito anteriormente, $|x| \geq 0$ para todo x real, ou seja, o caso | x | = - 2 não possui solução, pois não existe número real tal que diste -2 unidades da origem.
Exemplo:
|x – 5| = -2x + 1

Para que a equação seja verdadeira, temos a seguinte condição:

$$-2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

Então para que a solução seja válida, ela deve ser menor que 1/2.

$$x-5=-2x+1 \Rightarrow \begin{cases} x-5=-2x+1 \Rightarrow x=2 \\ x-5=-(-2x+1) \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

Nesse caso, 2 não é solução pois é maior que ½.

Substituindo x = 2,

|x – 5| = -2.2 + 1

|x – 5| = -3 , o que não é solução válida

Logo S = {-4}

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Simplificando a expressão $A = \frac{|2-x|}{2-x}$, com x > 2, temos que ela vale:

a) 1
b) -1
c) 0
d) 2
e) -2

2. Três números positivos proporcionais a 5, 8 e 9 são tais que a diferença do maior para o menor supera o módulo da diferença entre os dois menores em 5 unidades. Assinale o maior deles.

a) 45
b) 54
c) 63
d) 72
e) 81

3. Considerando-se a equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$, tem-se que a soma de suas raízes é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

4. O número de soluções da equação $\frac{1}{2}|x|.|x-3| = 2.\left|x - \frac{3}{2}\right|$, no conjunto R, é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

5. A soma das raízes reais distintas da equação $||x-2|-2|=2$ é igual a

a) 0
b) 2
c) 4
d) 6
e) 8

6. A soma das raízes da equação modular $||x-2|-7|=6$ é

a) 15
b) 30
c) 4
d) 2
e) 8

7. O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

a) -5
b) -1
c) 1
d) 2
e) 5

8. No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x+2$

a) é vazio
b) é unitário
c) possui dois elementos
d) possui três elementos
e) possui quatro elementos

9. Sobre os elementos do conjunto solução da equação $|x^2| - 4|x| - 5 = 0$, podemos dizer que

a) são um número natural e inteiro.
b) são números naturais.
c) o único elemento é um número natural.
d) um deles é um número racional, o outro é um número irracional.
e) não existem, isto é, o conjunto solução é vazio.

10. Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b$, então, os valores dos números reais a e b são respectivamente

a) -1 e 6

b) 5 e 6

c) 0 e 36

d) 5 e 36

Gabarito

1. B

Como x > 2, então a expressão |2 - x| é negativa, logo |2 - x| = - (2 – x), assim

$$\frac{|2-x|}{2-x}=\frac{-(2-x)}{2-x}=-1$$

2. A

Do enunciado, sejam os números $5x, 8x$ e $9x$, $x > 0$.

$$9x-5x-5=|8x-5x|$$
$$4x-5=|3x|$$

Como $x > 0$,

$$4x-5=3x$$
$$x=5$$

Assim, os números são: $25, 40$ e 45.

Logo, o maior dos números é o 45.

3. E

Se $x \geq 3$, temos a seguinte equação:

$$x^2-5x+6=x-3$$
$$x^2-6x+9=0$$
$$x=\frac{6\pm 0}{2}$$
$$x=3 \text{ (dupla)}$$

Se $x < 3$, temos a seguinte equação:

$$x^2-5x+6=-x+3$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$x=\frac{4\pm 2}{2}$$
$$x=3 \text{ (não convém)}$$
$$x=1$$

Portanto, a soma de suas raízes será $1+3=4$.

4. D

$$\frac{1}{2}|x|\cdot|x-3|=2\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right|\Rightarrow\frac{|x^2-3\cdot x|}{2}=\frac{|2(2x-3)|}{2}\Rightarrow x^2-3x=4x-6 \text{ ou } x^2-3x=-2x+6\Rightarrow$$

$$x^2-7x+6=0 \text{ ou } x^2-x-6=0\Rightarrow x=1 \text{ ou } x=6 \text{ ou } x=-3 \text{ ou } x=2$$

Portanto, a equação possui quatro raízes.

5. D

$$|x-2|-2=2 \text{ ou } |x-2|-2=-2$$
$$|x-2|=4 \text{ ou } |x-2|=0$$
$$x-2=4 \text{ ou } x-2=-4 \text{ ou } x=2$$
$$x=6 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=2$$

Portanto, a soma das raízes será $6+(-2)+2=6$.

6. E

Temos

$$||x-2|-7|=6 \Leftrightarrow |x-2|-7=\pm 6.$$

Logo,

$$|x-2|=13 \Leftrightarrow x-2=\pm 13$$
$$\Leftrightarrow x=15 \text{ ou } x=-11$$

ou

$$|x-2|=1 \Leftrightarrow x-2=\pm 1$$
$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x=1.$$

Portanto, o resultado é $15+(-11)+3+1=8$.

7. A

$x^2 - 3X + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$, temos o produto das raízes igual a 5.
$x^2 - 3x + 2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$, temos o produto das raízes igual a -1.
Logo, o produto total das raízes é -1.5 = -5

8. B

$$\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x+2 \Rightarrow |2x+1| = 3x+2$$
$$\Rightarrow 2x+1=\pm(3x+2)$$
$$\Rightarrow x=-1 \text{ ou } x=-\frac{3}{5}.$$

Mas, para satisfazer a condição de existência, temos que:

$$3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}.$$

Então, o único valor de x que satisfaz a equação dada é $-\frac{3}{5}$.

9. A

$$|x^2| - 4|x| - 5 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| - 5 = 0$$
$$|x| = a$$
$$a^2 - 4a - 5 = 0$$
$$a = 5 \rightarrow |x| = 5 \rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5$$
$$a = -1 \rightarrow |x| = -1 \text{ (não tem solução em } \mathbb{R})$$

10. C

Usando a propriedade, temos que $x^2 = |x|^2$, assim:

$$x^2 - 5|x| - 6 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 5|x| - 6 = 0$$
$$|x| = a$$
$$a^2 - 5x - 6 = 0$$
$$a = 6 \rightarrow |x| = 6 \rightarrow x = 6 \text{ ou } x = -6$$
$$a = -1 \rightarrow |x| = -1 \text{ (não tem solução em } \mathbb{R})$$

Como 6 e -6 são raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então, vale que:

$$\begin{cases} (-6)^2 - a(-6) - b = 0 \\ 6^2 - a.6 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a - b = -36 \\ -6a - b = -36 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 36$$