Função quadrática: estudo do sinal e problemas de máximo e mínimo

Resumo

Máximos e mínimos

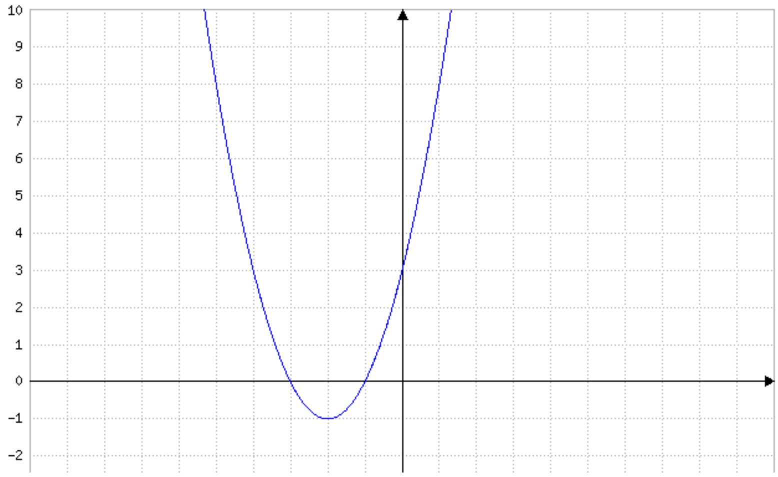
Para sabermos montar o gráfico da função do segundo grau (ax^2+bx+c), além de sabermos achar as raízes e a interseção com o eixo y, precisamos conhecer também sua concavidade e seu valor máximo ou mínimo. Podemos achar as raízes por alguns métodos como a fórmula de Bhaskara ou por soma e produto. Além disso para saber a concavidade da parábola (gráfico da equação do 2° grau) é só conhecer o sinal do a.

a>0, a concavidade é para cima
a<0, a concavidade é para baixo

Lembrando que a é o coeficiente do termo quadrático e é diferente de 0.
O coeficiente c é onde a função corta o eixo y, pois quando o x=0 a equação fica $y=a.0^2 + b.0 + c \rightarrow y = c$. Dessa forma o par ordenado é (0,c), semelhante ao que acontece na função do primeiro grau.

Exemplo: Para montar o gráfico de $x^2 + 4x + 3$ precisamos das raízes. Aplicando a fórmula de Bhaskara($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) descobrimos que -1 e -3 satisfazem a equação $x^2 + 4x + 3 = 0$.

A parábola tem concavidade para cima pois a>0 e corta o eixo y em 3.



Repare que a função cresce indefinidamente, porém ela tem um ponto onde atinge o valor mínimo. Esse ponto é chamado de vértice. Caso o a<0 a concavidade seria para baixo e a função teria ponto de máximo. O vértice possui coordenadas chamadas de x do vértice e y do vértice. O x do vértice é calculado por $\frac{-b}{2a}$ e y do vértice por $\frac{-\Delta}{4a}$, onde Δ (delta) é b^2-4ac. No nosso exemplo x do vértice é -2 e o y do vértice é -1.
É muito importante saber que o x do vértice mostra o valor que faz a função ser máxima (ou mínima) e o y do vértice é o valor máximo (ou mínimo) da função.

Estudo do sinal

O estudo do sinal ocorre para que identifiquemos quando o sinal de uma função é positivo, negativo ou nulo. Para isto precisamos das raízes e da concavidade da parábola.

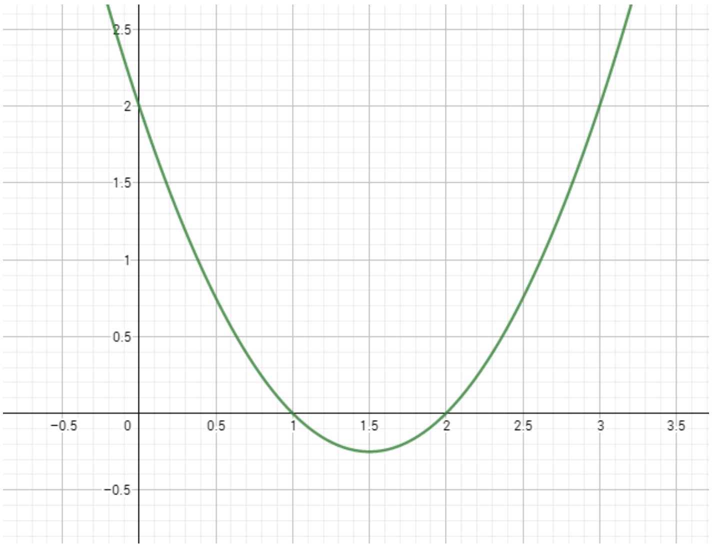
Δ =0 -> Possui duas raízes reais e iguais.

Δ >0->Possui duas raízes reais e distintas.

Δ < 0, nenhuma raiz real.

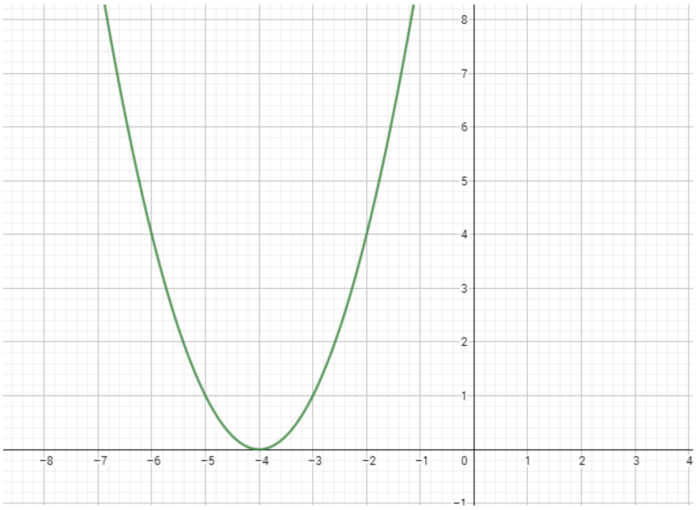
Nos exemplos a seguir veremos alguns tipos possíveis de configuração para avaliar o sinal de uma função, de maneira geral, é sempre da mesma forma portanto vejamos:

1. $f(x)=x^2-3x+2$
$x^2-3x+2<0$ -> Bom neste momento identificamos que o exemplo quer saber os valores para os quais esta função é negativa. Logo analisando o gráfico:



Vemos que possui duas raízes x=1 e x=2
Podemos ver que graficamente esta função está abaixo do eixo x, ou seja negativa, para todos os valores de x entre 1 e 2.

2. $f(x)=x^2+8x+16$
$x^2+8x+16>0$

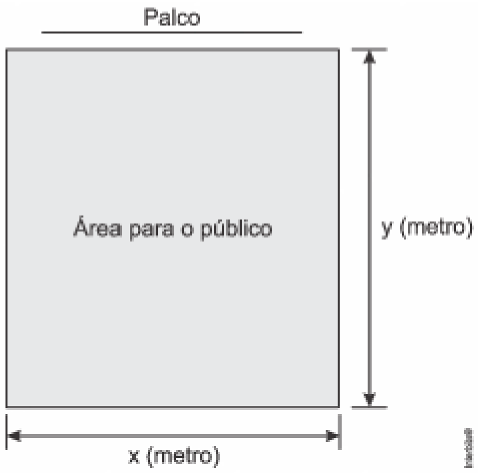


Analizando o gráfico e o problema vemos que:
Queremos os valores para os quais esta função é positiva.
O gráfico em nenhum momento passa para parte abaixo do eixo x, ou seja não tem valores negativos para y.
Logo esta função é positiva para todos os valores de x $\neq -4$.

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R$ 5,00.

A empresa dispõe de R$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público.

A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

a) 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.

b) 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.

c) 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.

d) 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.

e) 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

2. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela

função $f(t)=-2t2+120t$ (em que t é expresso em dia e t 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.
A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

a) 19º dia.

b) 20º dia.

c) 29º dia.

d) 30º dia.

e) 60º dia.

3. A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

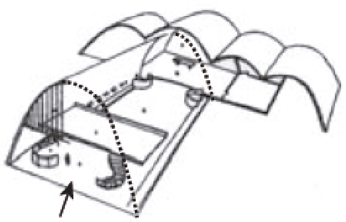


Figura 1

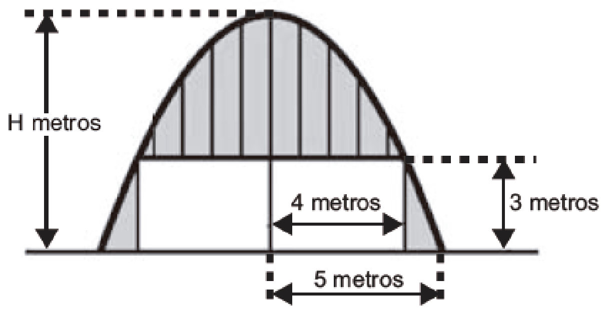


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

a) 16/3

b) 31/5

c) 25/4

d) 25/3

e) 75/2

4. O apresentador de um programa de auditório propôs aos participantes de uma competição a seguinte tarefa: cada participante teria 10 minutos para recolher moedas douradas colocadas aleatoriamente em um terreno destinado à realização da competição. A pontuação dos competidores seria calculada ao final do tempo destinado a cada um dos participantes, no qual as moedas coletadas por eles seriam contadas e a pontuação de cada um seria calculada, subtraindo do número de moedas coletadas uma porcentagem de valor igual ao número de moedas coletadas. Dessa forma, um participante que coletasse 60 moedas teria sua pontuação calculada da seguinte forma: pontuação = 60 – 36 (60% de 60) = 24. O vencedor da prova seria o participante que alcançasse a maior pontuação.

Qual será o limite máximo de pontos que um competidor pode alcançar nessa prova?

a) 0

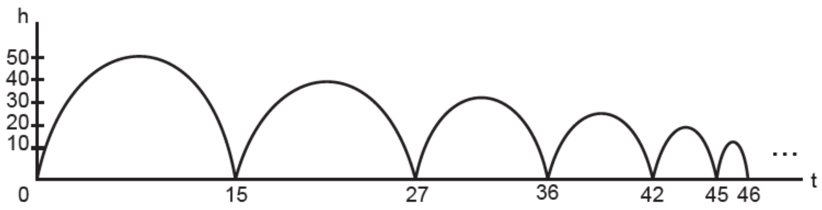
b) 25

c) 50

d) 75

e) 100

5. Um jovem lança uma bola de borracha para observar sua trajetória e altura **h** (em metros) atingida ao longo de um certo intervalo de tempo **t** (em segundos). Nesse intervalo, a bola quica no chão algumas vezes, perdendo altura progressivamente. Parte de sua trajetória está descrita na figura a seguir.



Em suas observações, quantas vezes o jovem pôde constatar que a bola atingiu a marca de 35 metros?

a) Nenhuma

b) Uma vez

c) Duas vezes

d) Quatro vezes

e) Cinco vezes

6. A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo.

A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é

a) 10

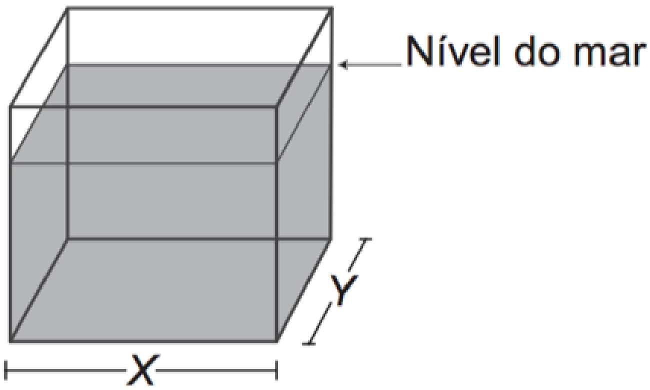
b) 30

c) 58

d) 116

e) 232

7. Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49

b) 1 e 99

c) 10 e 10

d) 15 E 25

e) 50 E 50

8. Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa.

b) baixa.

c) média.

d) alta.

e) muito alta.

9. Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

A nota zero permanece zero.

A nota 10 permanece 10.

A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x.$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x.$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2.$

e) $y = x.$

10. A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0

b) 19,8

c) 20,0

d) 38,0

e) 39,0

Gabarito

1. D

Queremos calcular os valores de $2x$ e de $2y$, de tal modo que a área $A = x \cdot y$ seja máxima e $40x + 10y = 5000$, isto é, $y = 500 - 4x$. Daí, como $A = -4x(x - 125)$ atinge um máximo para $x = \frac{0 + 125}{2} = 62{,}5\,m$, temos $y = 500 - 4 \cdot 62{,}5 = 250$ e, portanto, segue que $2x = 125\,m$ e $2y = 500\,m$.

2. B

Queremos calcular o valor de t para o qual se tem $f(t) = 1600$. Logo, temos

$$\begin{aligned} -2t^2 + 120t = 1600 &\Leftrightarrow t^2 - 60t = -800 \\ &\Leftrightarrow (t - 30)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow t = 20 \text{ ou } t = 40. \end{aligned}$$

Portanto, como o número de infectados alcança 1600 pela primeira vez no 20º dia, segue o resultado.

3. D

Calculando:

Parábola $\Rightarrow$ Pontos $(5, 0)$ e $(4, 3)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$b = 0 \Rightarrow$ parábola simétrica ao eixo y

$f(0) = c = H$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (5)^2 + H \\ 3 = a \cdot (4)^2 + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 25a + H \\ -3 = -16a - H \end{cases} \Rightarrow -3 = 9a \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow H = \frac{25}{3}$$

4. B

Considerando x o numero de moedas douradas coletadas, a pontuação seria dada por:

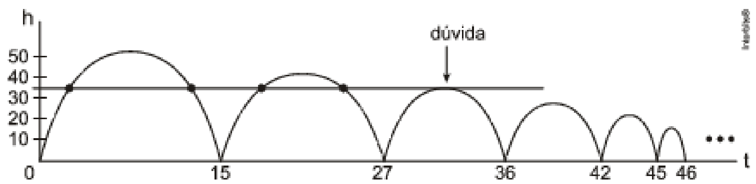
$$P(x) = x - \frac{x}{100} \cdot x \Rightarrow P(x) = -\frac{x^2}{100} + x$$

Logo, o valor máximo de P(x) será dado por:

$$P_{máximo} = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} = -\frac{1}{4 \cdot \left(\frac{-1}{100}\right)} = 25.$$

Portanto, o limite de pontos que um competidor poderá alcançar nesta prova é 25.

5. D



O jovem pode constatar com certeza que a bola atingiu 35m em quatro pontos mostrados pela intersecção de sua trajetória com a reta h = 35.
No ponto assinalado como dúvida, o jovem não pode afirmar com certeza que a bola atingiu 35m.

6. B

Vamos admitir que $3x^2 + 232$ seja o custo de produção de x unidades e que $180x - 116$ seja o valor de venda destas x unidades. Considerando que L(x) seja a função do lucro, temos:

$L(X) = 180x - 116 - (3x^2 + 232)$
$L(x) = -3x^2 + 180x - 348$

Determinando o x vértice, temos o valor de x para o qual o lucro é máximo:

$X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-180}{2.(-3)} = 30$

7. D

Calculando:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x \cdot y = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ x \cdot y = S \end{cases} \Rightarrow x \cdot (50 - x) = S \Rightarrow x_{máx} = y_{máx} = 25$$

8. D

Escrevendo a lei de T na forma canônica, vem

$$\begin{aligned} T(h) &= -h^2 + 22h - 85 \\ &= -(h^2 - 22h + 85) \\ &= -[(h-11)^2 - 36] \\ &= 36 - (h-11)^2. \end{aligned}$$

Assim, a temperatura máxima é $36\,°C$, ocorrendo às 11 horas. Tal temperatura, segundo a tabela, é classificada como alta.

9. A

Seja $f : [0, 10] \to [0, 10]$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Desse modo, temos

$$\begin{vmatrix} f(0) = 0 \\ f(5) = 6 \\ f(10) = 10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} c = 0 \\ 25a + 5b = 6 \\ 100a + 10b = 10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = -\frac{1}{25} \\ b = \frac{7}{5} \\ c = 0 \end{vmatrix}.$$

Portanto, segue que $f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

10. D

O tempo mínimo de espera, em minutos, ocorre quando a temperatura atinge 39°C, ou seja,

$$-\frac{t^2}{4} + 400 = 39 \Leftrightarrow t^2 = 361\ .\ 4$$

t = 19 . 2 = 38, pois t>0