

Sequências: lei de formação, lei de recorrência e sequência Fibonacci

Resumo

Lei de recorrência

É uma regra que permite calcular qualquer termo de uma sequência utilizando termos anteriores.

Exemplo 1:

A sequência $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16 \dots\right)$

Pode ser definida recursivamente por
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 2: Sequência de Fibonacci

A sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots)$ também pode ser definida recursivamente. Ou seja, podemos determinar um termo, a partir do terceiro, pela soma dos dois termos imediatamente anteriores, ou seja,

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \end{cases}$$

Essa sequência é conhecida como Sequência de Fibonacci e é uma sequência recorrente.

A contribuição de Fibonacci

Entre valiosas contribuições para o estudo das progressões, poderíamos lembrar as sequências do italiano Leonardo de pisa, mais conhecido como Fibonacci.

Na sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, 13, 21 \dots)$, cada termo a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois termos anteriores; a razão entre dois termos consecutivos, a partir do 8 $(8/5 = 1,6; 13/8 = 1,625; 21/13 = 1,615 \text{ etc})$ nos dá a conhecida RAZÃO DE OURO 1:1,6, que exerceu forte influência na arquitetura e na arte.



O templo de parthenon de Atenas é um exemplo de utilização do retângulo áureo.

O retângulo áureo (em que a relação das medidas dos lados é 1:1,6) é considerado uma forma geométrica agradável para os olhos.

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui](#)

Exercícios

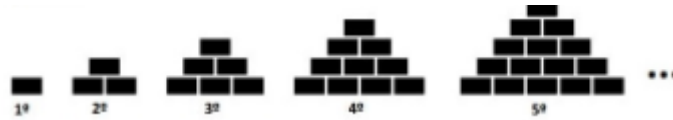
1. Uma fábrica de brinquedos educativos vende uma caixa com fichas pretas e fichas brancas para compor sequências de figuras seguindo padrões. Na caixa, a orientação para representar as primeiras figuras da sequência de barcos é acompanhada deste desenho:

			<p> ♂</p> <p> ♂ ♂</p> <p> ♂ ♂ ♂</p> <p> ♂ ♂ ♂ ♂</p>
♂	♂ ♂	♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♂ ♂
♂ ♂	♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♂ ♂ ♂
	♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♂ ♂ ♂
		♂ ♂ ♂ ♂	♂ ♂ ♂ ♂ ♂
			♂ ♂ ♂ ♂ ♂
1ª figura	2ª figura	3ª figura	4ª figura

Qual é o total de fichas necessárias para formar a 15ª figura da sequência?

- a) 45
b) 87
c) 120
d) 240
e) 360
2. Uma sequência numérica infinita $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots)$ é tal que a soma dos n termos iniciais é igual a $n^2 + 6n$. O quarto termo dessa sequência é igual a
- a) 9
b) 13
c) 17
d) 32
e) 40

3. A sequência diária de fixação de blocos para construção de uma pirâmide segue uma lei de formação, conforme figura abaixo.



Seguindo essa lei, quantos blocos comporão a pirâmide no 50º dia?

- a) 50
- b) 255
- c) 1050
- d) 1275
- e) 1725

4. Para tornar uma mensagem secreta, uma palavra foi codificada de acordo com as instruções a seguir:

I. Você deve substituir cada letra pelo número correspondente da tabela a seguir:

A	10	H	17	O	24	V	31
B	11	I	18	P	25	W	32
C	12	J	19	Q	26	X	33
D	13	K	20	R	27	Y	34
E	14	L	21	S	28	Z	35
F	15	M	22	T	29	θ	36
G	16	N	23	U	30		

- II. Se o número for múltiplo de 3, você deve subtrair duas unidades dele. Se não for, some uma unidade a ele;
- III. Substitua cada novo número pela letra correspondente.

Por exemplo, a palavra PAULO corresponde à sequência 25-10-30-21-24, que após ser modificada será 26-11-28-19-22, formando a palavra codificada QBSJM.

A palavra EGJBO está codificada. Decodificando-a, você obtém

- a) DILAN.
- b) DENIS.
- c) CELSO.
- d) FHKCM.
- e) DFKCO.

5. Observe a sequência de espaços identificados por letras

6								5	
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Cada espaço vazio deverá ser preenchido por um número inteiro e positivo, de modo que a soma dos números de três espaços consecutivos seja sempre igual a 15. Nessas condições, no espaço identificado pela letra g deverá ser escrito o número

- a) 6.
 - b) 7.
 - c) 3.
 - d) 4.
 - e) 5.
6. Considere a sequência infinita IBGEGBIBGEGBIBGEG... A 2016ª e a 2017ª letras dessa sequência são, respectivamente:
- a) BG;
 - b) GE;
 - c) EG;
 - d) GB;
 - e) BI.
7. A senha de meu cofre é dada por uma sequência de seis números, todos menores que 100, que obedece a determinada lógica. Esqueci o terceiro número dessa sequência, mas lembro-me dos demais. São eles: {32, 27, __, 30, 38, 33}. Assim, qual o terceiro número da sequência?
- a) 35
 - b) 31
 - c) 34
 - d) 40
 - e) 28

8. Considere a sequência de números definida abaixo:

- o primeiro termo vale 7;
- o segundo termo vale 4;
- do terceiro em diante, cada termo será a diferença entre os dois termos anteriores, sendo essa diferença sempre expressa com sinal positivo.

O 8º termo dessa sequência vale:

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 1.
- e) 0.

9. Duas sequências são construídas conforme descrito abaixo:

Sequência 1: primeiro termo igual a 10 e qualquer outro termo, a partir do segundo, igual ao anterior acrescido de duas unidades.

Sequência 2: primeiro termo igual a 1 e qualquer outro termo, a partir do segundo, igual ao anterior acrescido do número de termos do primeiro até este termo anterior.

Um termo da sequência 1 que é igual a um termo da sequência 2 é

- a) 18.
- b) 20.
- c) 22.
- d) 24.
- e) 26.

10. Qual é a definição por lei de recorrência para a sequência $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

- a) $a_n = a_{n-1} + 1$
- b) $a_n = (-1) \cdot a_{n-1}$
- c) $a_n = (a_{n-1})^{-1}$
- d) $a_n = a_{n-1} - 1$

Gabarito

1. E

Observando a figura fornecida, vemos que a parte superior apresenta o número de fichas que variam de 1 até o número da figura:

figura 1: 1 ficha

figura 2: $1+2=3$ fichas

figura 3: $1+2+3=6$ fichas

.

figura 1: $1+2+3+4+\dots+13+14+15=120$ fichas

Já parte inferior possui para cada figura n a quantidade de $(n+1) \cdot n$ fichas;

figura 1: $(1+1) \cdot 1 = 2$ fichas

figura 2: $(2+1) \cdot 2 = 6$ fichas

figura 3: $(3+1) \cdot 3 = 12$ fichas

figura 4: $(4+1) \cdot 4 = 20$ fichas

.

figura 15: $(15+1) \cdot 15 = 240$ fichas

Portanto o total será: $120 + 240 = 360$ fichas.

2. B

Para $n=4$, soma dos quatro termos iniciais temos $4^2+6 \cdot 4=16+24=40$

Para $n=3$, soma dos três termos iniciais temos $3^2+6 \cdot 3=9+18=27$

Logo o quarto termo é a diferença de ambos $=40-27=13$

3. D

Nesta questão será estudado números triangulares.

Fórmula de Números Triangulares:

$$T_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \rightarrow T_{50} = \frac{50 \cdot (50 + 1)}{2} \rightarrow T_{50} = \frac{50 \cdot 51}{2} \rightarrow T_{50} = 1275$$

4. A

Vamos fazer o inverso:

EGJBO corresponde a 14-16-19-11-24

Se o número é do tipo múltiplo de três mais um, então ele era múltiplo de 3 e foram subtraídas duas unidades

Se o número for múltiplo de três ou do tipo múltiplo de três mais dois, então foi somada uma unidade.

$14 = 3.4 + 2$, logo o número era 13

$16 = 3.5 + 1$, logo o número era 18

$19 = 3.6 + 1$, logo o número era 21

$11 = 3.3 + 2$, logo o número era 10

$24 = 3.8$, logo o número era 23

13-18-21-10-23 corresponde a DILAN

5. A

Observe que a soma dos algarismos sobre as letras B e C deve ser igual a 9, pois somados ao 6 que está sobre a letra A temos $6+9 = 15$. Como a soma dos números sobre B, C e D deve ser também igual a 15, note que o número sobre a letra D deve ser também igual a 6. Isto porque a soma dos números sobre B e C é igual a 9, e com mais 6 temos novamente 15.

Como o número sobre D deve ser 6, os números sobre E e F devem somar 9 (seguindo o mesmo raciocínio, para que D, E, F somem 15). Assim, o número sobre G deve ser 6 (para que os números sobre E, F e G somem 15). Portanto, o número sobre a letra G é 6.

6. E

Perceba que a sequência sempre repete as 6 letras IBGEGB.

Como $6 \times 336 = 2016$, a letra B ocupa a posição 2016 e a letra I ocupa a posição 2017.

7. A

$32 \ggg 27$ (-5 unidades)

$27 \ggg N$ (não sei)

$N \ggg 30$ (não sei)

$30 \ggg 38$ (+8 unidades)

$38 \ggg 33$ (-5 unidades)

Observe os dois últimos (+8 e -5) <<< essa é a sequência, já que começa com -5 a sequência:

$32 - 5 = 27$

$27 + 8 = 35$

$35 - 5 = 30$

$30 + 8 = 38$

$38 - 5 = 33$

8. E

Temos que esta sequência está toda em módulo, logo:

$$A_3 = 4 - 7 = 3$$

$$A_4 = 3 - 4 = 1$$

$$A_5 = 1 - 3 = 2$$

$$A_6 = 2 - 1 = 1$$

$$A_7 = 1 - 2 = 1$$

$$A_8 = 1 - 1 = 0$$

9. C

1ª sequência: (10, 12, 14, 16...)

2ª sequência: (1, 1+1, 2+2, 4+3, 7+4, 11+5, 16+6, 17+7)

(1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29...)

Logo presentes nas duas sequências temos o 16 e o 22 porém o 16 não aparece nas alternativas, logo a resposta é 22.

10. B

$$a_n = (-1) \cdot a_{n-1}$$

Perceba que os sinais de cada termo estão intercalando, logo precisamos colocar uma multiplicação por (-1).