Determinantes: Ordem 2 e Ordem 3

Resumo

Definição:
É um número associado a uma matriz **quadrada**, ou seja, é uma característica da matriz.

Como calcular:
Matriz quadrada de ordem 1: é o valor único da matriz.

$A = [a_{11}]$ → $\det A = a_{11}$

Matriz quadrada de ordem 2: é a diferença entre o produto dos termos das diagonais principal e secundária.

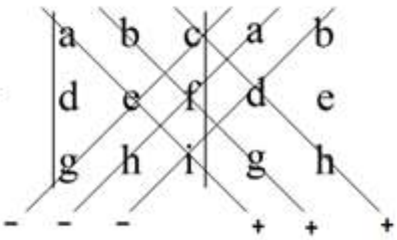
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, detA= 2.1-3.1=2-3=-1

Matriz quadrada de ordem 3: usamos a regra de Sarrus.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$



Det A = aei + bfg + cdh – ceg – afh – bdi

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Pela regra de Sarrus: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$,

det A= (1.0.2)+(3.1.1)+(4.0.1)-(4.0.1)-(1.1.1)-(3.0.2) = 0+3+0-0-1-0=2

Exercícios

1. É dada a matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, onde a e b são números reais. Se $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \end{pmatrix}$, então o determinante de A é igual a:

a) $3b + 4a$.

b) $2b^2 + a^2$.

c) $b^2 + 5$.

d) $5a + 2$.

e) $5a$.

2. Sendo $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 8$, o valor positivo de x é:

a) um múltiplo de 4

b) um divisor de 10

c) o mínimo múltiplo comum de 3 e 5

d) o máximo divisor comum de 6 e 9

3. Uma matriz é dita singular quando seu determinante é nulo. Então os valores de c que tornam singular a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ são:

a) 1 e 3.

b) 0 e 9.

c) -2 e 4.

d) -3 e 5.

e) -9 e -3.

4. O valor do determinante abaixo:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{pmatrix}$$ é:

a) 1.

b) cos 2x.

c) sen 2x.

d) tg 2x.

e) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

5. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ a diferença entre os valores de x, tais que det(A · B) = 3x, pode ser igual a:

a) 3.

b) −2.

c) 5.

d) −4.

e) 1.

6. Considerando-se log2 = 0,3, o valor do determinante abaixo é igual a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 4 & \log 16 & \log 400 \\ (\log 2)^2 & (\log 4)^2 & (\log 20)^2 \end{pmatrix}$$

a) 0,36.

b) 0.

c) 3.

d) 0,74.

e) 0,42.

7. Se o determinante da matriz A = $\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & -1 & 3 \end{pmatrix}$ é nulo, então:

a) x = −3.

b) x = $-\frac{7}{4}$.

c) x = −1.

d) x = 0.

e) x = $\frac{7}{4}$.

8. Calcule o valor de x que resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} \log_8 x & \log_4 x & \log_{16} x \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$$

a) 128

b) 64

c) 32

d) 16

e) 256

9. Considere a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Os valores de K que tornam nulo o determinante da matriz M − K.I, sendo I a matriz identidade, são:

a) 0 e 4

b) 4 e 5

c) -3 e 5

d) -3 e 4

e) 0 e 5

10. Sendo $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$, o valor de $\begin{vmatrix} 3x+1 & 8 \\ 3y+1 & 8 \end{vmatrix}$ é:

a) 6.

b) 8.

c) 24.

d) 128.

e) 144

Gabarito

1. E

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ 3a+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$b = 2$$

$$3a + 5.2 = 22$$

$$3a = 12$$

$$a = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{DetA} = 20 = 5a$$

2. D

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 8$$

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$x' = 3$$

$$x'' = -3$$

Como deseja-se o valor positivo, x=3 que é o mdc entre 6 e 9

3. D

Calculando-se o determinante pela regra de sarrus e igualando a 0:

$$27 + c + c - 9 - c^2 - 3 = 0$$

$$-c^2 + 2c + 15 = 0$$

$$c^2 - 2c - 15 = 0$$

$$c' = -3$$

$$c'' = 5$$

4. A

Calculando o determinante temos $\cos^2x-(-\text{sen}^2x)=\cos^2x+\text{sen}^2x=1$ (relação fundamental da trigonometria)

5. C

Efetuando o produto de a.b = $\begin{pmatrix} x-2 & x^2+4 \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$. Como det (a.b)=3x,

$$x^2-4=3x$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$x'=-1$$
$$x''=4$$
$$x'-x''=4-(-1)=5$$

6. E

Usando as propriedades de log, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\log 2 & 4\log 2 & 2\log 2+2\log 10 \\ (\log 2)^2 & (2\log 2)^2 & (\log 2+\log 10)^2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.0,3 & 4.0,3 & 0,6+2 \\ (0,3)^2 & (2.0,3)^2 & (0,3+1)^2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,6 & 1,2 & 2,6 \\ 0,09 & 0,36 & 1,69 \end{pmatrix}$$

Assim o determinante será:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,6 & 1,2 & 2,6 \\ 0,09 & 0,36 & 1,69 \end{vmatrix}=0,42$$

7. E

Aplicando a regra de sarrus temos

$$-3x+4x-1+2x+x-6=0$$
$$x=\frac{7}{4}$$

8. B

Aplicando a regra de sarrus temos,

$$2\log_8 x + \log_4 x + 2\log_{16} x - \log_{16} x - 2\log_8 x - 2\log_4 x = -\frac{3}{2}$$

$$-\log_4 x + \log_{16} x = -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x = -\frac{3}{2}$$

$$-\log_2 x = -6$$

$$\log_2 x = 6$$

$$x = 2^6 = 64$$

9. C

Seja i a identidade de ordem 2

$$K.I = K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

$$M - K.I = \begin{pmatrix} -3-K & 0 \\ 4 & 5-K \end{pmatrix}$$

Para det (m-k.i)=0

-3-k=0 ou 5-k=0

Logo k=-3 ou k=5

10. E

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow x - y = 6$$

$$\begin{vmatrix} 3x+1 & 8 \\ 3y+1 & 8 \end{vmatrix} \rightarrow 24x + 8 - 24y - 8 = 24(x-y) = 24.6 = 144$$