Números Complexos: Operações com números complexos na forma algébrica, conjugado

Resumo

Adição de números complexos

Para a adição de números complexos, somamos as partes reais de cada número e depois as partes imaginárias.

Se $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, a soma de z_1 e z_2 será:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)$$
$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

Subtração de números complexos

Para a subtração de números complexos, diminuímos as partes reais de cada número e depois as partes imaginárias.

Se $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, a subtração de z_1 e z_2 será:

$$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)$$
$$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$$

Multiplicação de números complexos

Para a multiplicação dos números complexos, multiplicamos cada termo do primeiro número por todos os membros do segundo número.

Assim: Se $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, a multiplicação de z_1 e z_2 será:

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)$$
$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Conjugado de um número complexo

Seja um número complexo: $z=a-bi$, seu conjugado será $\bar{z}$ = $\overline{a-bi}$, para obtê-lo apenas trocamos o sinal da parte imaginária do número, ou seja, a parte real permanece igual e as imaginárias são simétricas. Assim, o conjugado de z é dado por $a+bi$.

$$z=a+bi \text{ será } \bar{z}=a-bi.$$

Divisão de números complexos

Para a divisão de números complexos, multiplicamos o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor.

Obs: Quando multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado, o denominador será um número real.

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, a divisão de z_1 e z_2 será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi).(c-di)}{c^2-(di)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd)+(ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

Exercícios

1. Sejam x e y números reais tais que $x + yi = \sqrt{3+4i}$ onde i é a unidade imaginária. O valor de xy é igual a:

a) –2.

b) –1.

c) 1.

d) 2.

2. Sendo $\overline{Z}$ o conjugado do número complexo Z e *i* a unidade imaginária, o número complexo Z que satisfaz à condição $Z + 2\overline{Z} = 2 - Zi$ é

a) z = 0 + 1i

b) z = 0 + 0i

c) z = 1 + 0i

d) z = 1 + i

e) z = 1 – i

3. Se os números complexos z e w estão relacionados pela equação z + wi = i e se $z = 1 - \frac{1}{i}$, então w é igual a:

a) i

b) 1 - i

c) -i

d) 1 + i

4. Considere o número complexo $z = \frac{1+ai}{a-i}$, em que a é um número real e i é a unidade imaginária, isto é $i^2 = -1$. O valor de z^{2016} é igual a

a) a^{2016}

b) 1

c) 1 + 2016i

d) i.

5. Se y = 2x, sendo $x = \frac{1+i}{1-i}$ e $i = \sqrt{-1}$, o valor de $(x+y)^2$ é

a) $9i$
b) $-9+i$
c) -9
d) 9
e) $9-i$

6. Determine x de modo que o complexo z = 2 + (x - 4i) (2 + xi) seja real.

a) $\pm 2\sqrt{2}$
b) $\pm \frac{1}{3}$
c) ± 2
d) $\pm \sqrt{2}$
e) $\pm \sqrt{3}$

7. Sendo i a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$, são dados os números complexos $z_1 = 9 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$. Ao calcular corretamente o produto $z_1.z_2$, obtemos o número

a) 21 - 6i.
b) -18 - 6i.
c) –18 + 3i.
d) 18 - 3i.
e) –21 + 3i.

8. Escrevendo o número complexo $z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i}$ na forma algébrica obtemos:

a) 1 – i
b) 1 – i
c) 1 + i
d) i
e) 1

9. A forma algébrica do número complexo $z = \frac{1+3i}{2-i}$ é:

a) $\frac{3i-1}{2}$

b) $\frac{7i+5}{3}$

c) $\frac{7i-1}{5}$

d) $\frac{4i+3}{5}$

10. Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2 - 2i$. Se $w = (z_1 - z_2)^2$, então:

a) w = 10 - 6i

b) w = - 8 - 6i

c) w = - 8 + 6i

d) w = 10 + 6i

Gabarito

1. D

Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, vem:

$$(x+yi)^2=(\sqrt{3+4i})^2 \Leftrightarrow (x^2-y^2)+2xyi=3+4i.$$

Portanto, temos $2xy=4$ se, e somente se, $xy=2$.

2. D

Se $z=a+bi$, com a e b reais, então $\bar{z}=a-bi$. Desse modo,

$$\begin{aligned} z+2\bar{z}=2-zi &\Leftrightarrow a+bi+2\cdot(a-bi)=2-(a+bi)\cdot i \\ &\Leftrightarrow 3a-bi=(b+2)-ai. \end{aligned}$$

Logo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 3a=b+2 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}.$$

Portanto, o número complexo z que satisfaz a condição dada é $z=1+i$.

3. A

Substituindo o valor de z na equação dada e resolvendo:

$$z+wi=i \rightarrow 1-\frac{1}{i}+wi=i$$

$$i-1+wi^2=i^2$$

$$i-1+w\cdot(-1)=(-1)$$

$$i-1-w=-1$$

$$w=i$$

4. B

Tem-se que:

$z=\dfrac{1+ai}{a-i}=\dfrac{1+ai}{a-i}\cdot\dfrac{a+i}{a+i}=\dfrac{a+i+a^2i-a}{a^2+1}=i.$ Portanto, o valor de z^{2016} é $i^{2016}=i^0=1$.

5. C

$$x=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{i^2+2i-i^2}{1^2-i^2}\;\frac{2i}{2}=i \text{ e } y=2i$$

$$(x+y)^2=(i+2i)^2=(3i)^2=9i^2=-9$$

6. A

Primeiro, faremos a multiplicação:

$$z = 2 + (2x + x^2 i - 8i - 4xi^2) = 2 + (2x + 4x + x^2 i - 8i) = (2 + 6x) + (x^2 - 8)i$$

Para que z seja real, então x² - 8 = 0.

Resolvendo a equação, encontramos x = ± 2√2.

7. E

$$(9 + 3i) \cdot (-2 + i) = -18 + 9i - 6i + 3i^2 = -18 + 3i + 3 \cdot (-1) = -21 + 3i$$

8. E

Vamos fazer mmc entre as frações para poder somá-las:

$$z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1-i} . \frac{1+i}{1+i} + \frac{1}{1+i} . \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+i+1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{2}{1^2 - i^2} = \frac{2}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

9. C

Como já sabemos, devemos fazer divisão de números complexos da seguinte maneira:

$$z = \frac{1+3i}{2-i} . \frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{2+i+6i+3i^2}{2^2 - i^2} = \frac{2+7i-3}{4-(-1)} = \frac{7i-1}{5}$$

10. B

$$w = [1 + i - (2 - 2i)]^2 = [1 + i - 2 + 2i]^2$$

$$w = (3i - 1)^2 = (3i)^2 - 2(3i)(1) + 1^2 = -9 - 6i + 1 = -8 - 6i$$