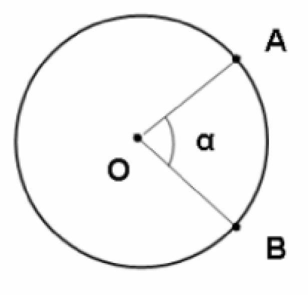
Ângulos na circunferência e propriedades

Resumo

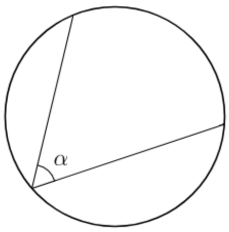
Ângulos na circunferência:

Ângulo central: seu vértice está no centro da circunferência.



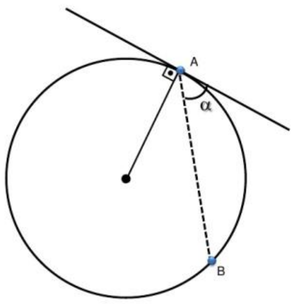
$$\alpha = \widehat{AB}$$

Ângulo inscrito: seu vértice é um ponto da circunferência.



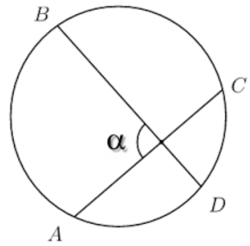
$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Ângulo de segmento: formado por uma corda e uma tangente (com vértice no ponto de tangência).



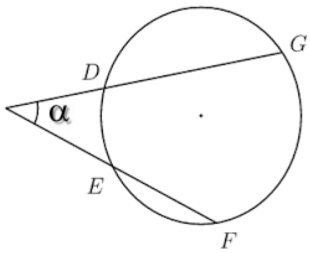
$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Ângulo excêntrico interno: formado por duas cordas.



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Ângulo excêntrico externo: formado por duas retas secantes à circunferência.

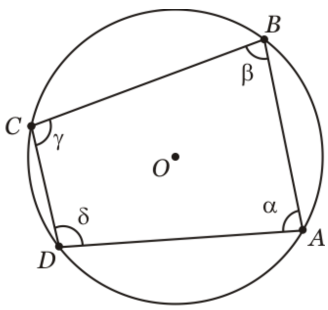


$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{FG} - \overset{\frown}{DE}}{2}$$

Polígonos inscritíveis:

Quadrilátero

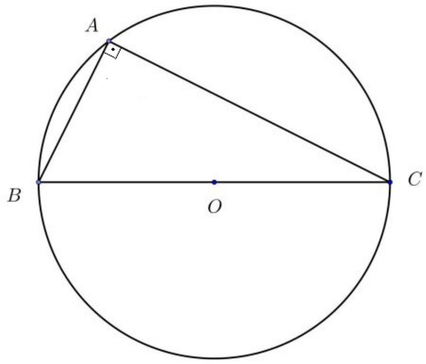
Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.



$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

Triângulo retângulo

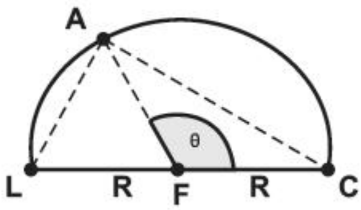
Se um triângulo retângulo é inscrito em meia circunferência, então sua hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência.



Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio **R**, conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra **L**, a chegada está representada pela letra **C** e a letra **A** representa o atleta. O segmento **LC** é um diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra **F**. Sabemos que, em qualquer posição que o atleta esteja na pista, os segmentos **LA** e **AC** são perpendiculares. Seja **θ** o ângulo que o segmento **AF** faz com segmento **FC**.



Quantos graus mede o ângulo θ quando o segmento AC medir R durante a corrida?

a) 15 graus

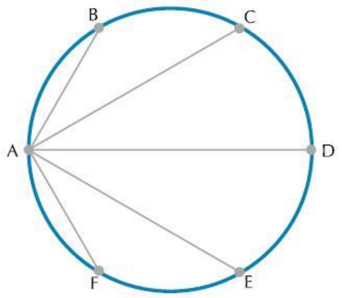
b) 30 graus

c) 60 graus

d) 90 graus

e) 120 graus

2. Um atleta faz seu treinamento de corrida em uma pista circular que tem 400 metros de diâmetro. Nessa pista, há seis cones de marcação indicados pelas letras A, B, C, D, E e F, que dividem a circunferência em seis arcos, cada um medindo 60 graus.
Observe o esquema:



O atleta partiu do ponto correspondente ao cone A em direção a cada um dos outros cones, sempre correndo em linha reta e retornando ao cone A. Assim, seu percurso correspondeu a ABACADAEAFA.

Considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$, o total de metros percorridos pelo atleta nesse treino foi igual a:

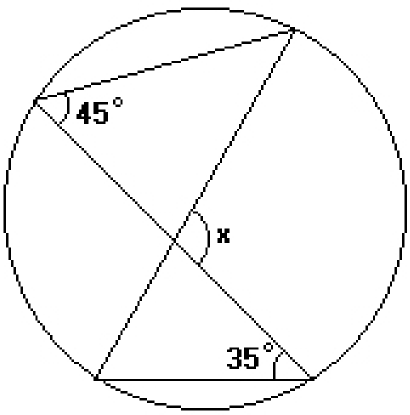
a) 1480

b) 2960

c) 3080

d) 3120

3. O ângulo x, na figura a seguir, mede:



a) 60°.

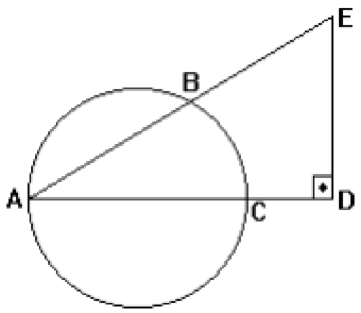
b) 80°.

c) 90°.

d) 100°.

e) 120°.

4. Sabendo que AD = 12cm, AE = 15cm e AB = 8cm, sabendo também que AD passa pelo centro da circunferência, pode-se afirmar que a medida do raio do círculo é:



a) 4 cm

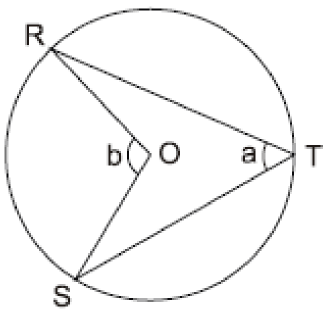
b) 4,5 cm

c) 5 cm

d) 5,5 cm

e) 6 cm

5. Na figura a seguir, R, S e T são pontos sobre a circunferência de centro O. Se x é o número real, tal que a = 5x e b = 3x + 42° são as medidas dos ângulos $R\hat{T}S$ e $R\hat{O}S$, respectivamente, pode-se dizer que:



a) a = 30° e b = 60°.

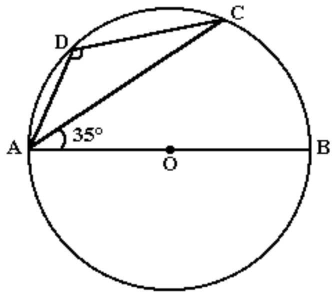
b) a = 80° e b = 40°.

c) a = 60° e b = 30°.

d) a = 40° e b = 80°.

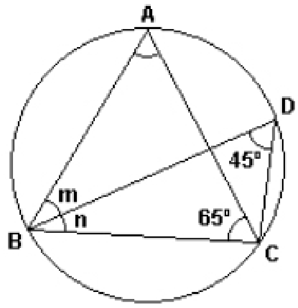
e) a = 30° e b = 80°.

6. A medida do ângulo ADC inscrito na circunferência de centro O é:



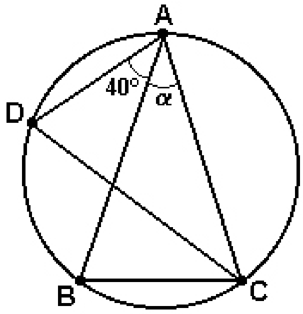
a) 125°
b) 110°
c) 120°
d) 100°
e) 135°

7. Na figura, os triângulos ABC e BCD estão inscritos na circunferência. A soma das medidas m + n, em graus, é:



a) 70.
b) 90.
c) 110.
d) 130.

8. Na figura, A, B, C e D são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$^e as cordas AB e AC têm o mesmo comprimento. Se o ângulo BÂD mede 40°, a medida α do ângulo BÂC é:



a) 10°.

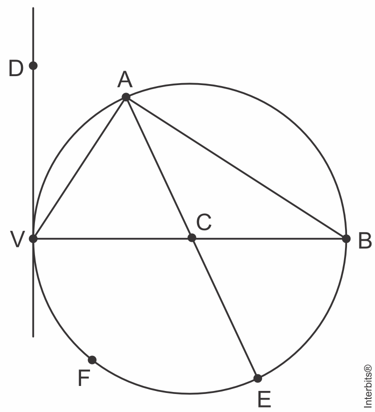
b) 15°.

c) 20°.

d) 25°.

e) 30°.

9. O triângulo ABV está inscrito em uma circunferência de centro C e o segmento $\overline{VD}$ tangencia a circunferência em V, como representado na figura a seguir. Sabendo que a $med(A\hat{V}D) = 30^\circ$ e que a medida do raio da circunferência é igual a $\sqrt{5}$ cm, o comprimento do arco VEF, em cm, é:



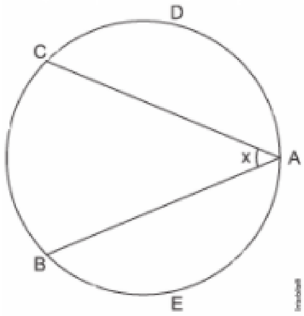
a) $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{5}.$

b) $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{5}.$

c) $\dfrac{\pi}{6}\sqrt{5}.$

d) $2\pi.$

10. A figura a seguir mostra uma circunferência em que os arcos ADC e AEB são congruentes e medem 160° cada um.



A medida em graus, do ângulo x é:

a) 10°

b) 20°

c) 30°

d) 40°

Gabarito

1. **C**

   Se AC=R, temos o triângulo AFC, equilátero. Logo teta = 60°

2. **B**

   Se o raio da circunferência mede 200 m, então as medidas em metros dos segmentos AB,AD E AF são, respectivamente, iguais a 200, 400 e 200.

   Os segmentos AC E AE têm a mesma medida do segmento BF, que corresponde ao dobro da altura h de um triângulo equilátero. Assim,

   $$\overline{BF} = 2h = 2.\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right) = 200\sqrt{3} = 200.(1,7) = 340\text{m}$$

   onde l é a medida do lado do triângulo.

   Ao final do treinamento, o atleta percorreu uma distância d, em metros, que corresponde a duas vezes a soma dos segmentos, considerando os retornos ao cone A. Logo,

   $$d = 2\ (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF})$$
   $$d = 2\ (200 + 340 + 400 + 340 + 200) = 2960$$

3. **B**

   O ângulo x é composto pela soma dos ângulos externos, logo 80.

4. **C**

   $$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$$
   $$12AC = 8\,.\,15$$
   $$12AC = 120$$
   $$AC = 10$$

   Portanto o raio da circunferência é 5 cm.

5. **A**

   De acordo com as propriedades do ângulo inscrito, pode-se escrever que:

   b = 2.a

   3x + 42° = 2.5x

   7x = 42°

   x= 6°

   Logo, a = 5.6° = 30°

   b = 3.6° + 42° = 60°.

6. A

Se CÂB = 35°, então CÔB=70°, pois o ângulo central vale o dobro do ângulo inscrito. O arco CBA mede 180+70=250. Como ADC é um ângulo inscrito ele vale 250/2=125°

7. A

O ângulo central, que determina a medida do ângulo do arco AB tem ângulo com medida 2.65°=130° (ângulo central = 2.ângulo inscrito).
De maneira análoga, a medida do ângulo do arco BC é 2.45°=90°.
A soma dos ângulos dos arcos de uma circunferência é igual a 360°, assim:
Arco AD + Arco CD + Arco BC + Arco AB = 360°
Arco AD + Arco CD = 360° – 220° = 140°
Note que:
Arco AD = 2.m e Arco CD = 2.n
Assim:
2.m + 2.n = 140°
2.(m+n) = 140°
m+n=140/2=70°

8. C

o angulo DÂB transcrito na circunferência é o mesmo de DCB portanto os dois ângulos equivalem a 40°. O ângulo DCB é o mesmo de DCA, portanto os dois equivalem a 40° e juntos equivalem a 80°. O ângulo ABC é o mesmo de BCA, pois são isósceles, portanto os dois equivalem a 80° e juntos equivalem a 160°. A junção dos três ângulos do triangulo ABC deve ser 180 °, se já temos 160°, para 180 falta 20, portanto a(alfa) deverá ser 20°

9. B

Sabendo que todo triângulo inscrito na semicircunferência é retângulo, temos que o triângulo ABV possuirá ângulos: $\hat{A} = 90^\circ, \hat{V} = 60^\circ$ e $\hat{B} = 30^\circ$. Observe que o ângulo $\hat{V} = 60^\circ$ é dado, devido a $med(A\hat{V}D) = 30^\circ$.

Dessa maneira, temos que o ângulo $\hat{A}$ ou CÂB será igual a 30°, pois $AC = CB$ e assim temos que o ângulo $A\hat{C}B = E\hat{C}V = 120^\circ$.

C = 1/3.2.π.$\sqrt{5}$ = $\frac{2\pi\sqrt{5}}{3}$

10. B

O arco de extremos C e B, determinado pelo ângulo x na circunferência mede 2x. Portanto,
2x+160+160=360
2x=40
x=20°