Escalonamento

Resumo

Escalonamento é um método de classificar, resolver e discutir sistemas lineares. Seja S um sistema genérico, ele é dito escalonado, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo aumenta de equação para equação.

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ \quad 2y - 3z = -1 \\ \qquad z = -5 \end{cases}$$

Relembrando, esse sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A matriz 3x3 é chamada matriz dos coeficientes. E a matriz coluna após o sinal de matriz dos termos independentes.

A matriz aumentada do sistema é formada pelos coeficientes e termos independentes:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que cada uma das 3 primeiras colunas representa uma das incógnitas e a ultima representa os termos independentes (T.I.)

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & T.I. \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente:

Se dois sistemas são ditos equivalentes, então admitem a mesma solução:

Seja $S_1 = \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$. Eles são equivalentes, pois admitem o mesmo conjunto solução (2,3). Notação $S_1 \sim S_2$

Resolução de escalonamento por eliminação de Gauss-Jordan:

O método de eliminação de Gauss-Jordan é um dos métodos mais eficazes para escalonar. Para entende-lo melhor, é necessário saber as operações elementares:

Operações elementares: são operações que podem ser realizadas e sistemas lineares a fim de transformá-lo em um sistema mais simples. As três operações são: trocar a posição de duas linhas do sistema, multiplicar uma linha por um escalar (número) e somar duas linhas.

Obs: Combinando a 2ª operação elementar com a 3ª implica em multiplicar uma linha por um escalar e somar com outra.

Roteiro para eliminação de Gauss-Jordan:

1° Tome a matriz ampliada do sistema;
2° Aplique alguma transformação elementar e torne o primeiro elemento da primeira linha igual a 1;
3° Aplique transformações lineares para anular os termos abaixo dele;
4° Continue o processo no segundo elemento da segunda linha;

Obs: O objetivo de escalonar é obter uma matriz com a diagonal formada por 1 e os outros elementos igual a 0.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como cada uma das 3 primeiras colunas representam uma incógnita e a ultima os termos independentes concluímos que

X=5

Y=1

Z=-1

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

Note que o sistema não está escalonado.

Representaremos L1 como a linha 1, L2 como a linha 2 e L3 como a linha 3

Tomando a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} L1 \leftrightarrow L2$$

A primeira operação será trocar a segunda linha com a primeira (as operações podem ser feita em outras ordens)

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L2 = L2 - 2L1 \\ L3 = L3 - 3L1 \end{matrix}$$

Agora vamos anular os elementos abaixo do 1° elemento da matriz (lembrando as operações elementares são aplicadas em todos os elementos da linha).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} L2 = -\frac{1}{4}L2$$

Nessa operação tornaremos o -4 em 1 e repetiremos o processo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L1 = L1 - L2 \\ L3 = L3 + 3L2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} L3 = -\frac{4}{5}L3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Logo: } \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix}$$

O escalonamento poderia ter sido feito aplicando as operações elementares no sistema sem necessitar da matriz aumentada.

Exercícios

1. Escalonando o sistema abaixo, o conjunto solução obtido é:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

a) (1,2,3)
b) (1,3,2)
c) (2,3,1)
d) (2,1,3)

2. Qual a soma dos elementos do conjunto solução?

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = -3 \end{cases}$$

a) 3
b) 2
c) -8
d) 6

3. Qual o valor de x no sistema abaixo?

$$\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ y - z - t = 1 \\ 3z + 2t = 2 \\ 9t = 36 \end{cases}$$

a) 1
b) -1
c) 3
d) -2

4. Se a solução do sistema: $\begin{cases} x+y+z+2w=1 \\ x+y+2z+w=4 \\ x+2y+z+w=2 \\ 2x+y+z+w=3 \end{cases}$ é (x,y,z,w) então o valor de $x^y + z^w$ é:

a) -2

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) $\frac{3}{2}$

5. Considere o sistema linear nas variáveis reais $x,\ y,\ z$ e $w,$

$$\begin{cases} x-y=1, \\ y+z=2, \\ w-z=3. \end{cases}$$

Logo, a soma $x+y+z+w$ é igual a

a) $-2.$

b) 0.

c) 6.

d) 8.

6. Resolvendo o sistema a seguir, obtém-se para z o valor:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=1 \\ 6y+3z=-12 \end{cases}$$

a) - 3

b) - 2

c) 0

d) 2

e) 3

7. A solução do sistema de equações lineares representado abaixo é:

$$\begin{cases} x-2y-2z=-1 \\ x-2z=3 \\ y-z=1 \end{cases}$$

a) x = -5, y = -2 e z = -1.

b) x = -5, y = -2 e z = 1.

c) x = -5, y = 2 e z = 1.

d) x = 5, y = 2 e z = -1.

e) x = 5, y = 2 e z = 1.

8. Resolvendo o sistema de equações lineares $\begin{cases} 3x-y+2x=7 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$, encontramos y igual a:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 2
e) 4

9. Se a terna (a,b,c) é solução do sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ y-z=4 \\ 4x+z=1 \end{cases}$, então:

a) a+c=-1
b) a+b=1
c) b+c=2
d) 2a=2
e) 3b=3

10. Determine o valor de b no sistema:

$$\begin{cases} a + b + 3c + d = 1 \\ -b + 7c - d = 2 \\ 10c - d = -3 \\ 3d = 39 \end{cases}$$

a) -22
b) -8
c) -4
d) 4
e) 8

Gabarito

1. B

A matriz aumentada do sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.Efetuando as operações elementares, chega-se em $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Logo x=1, y=3 e z=2.

2. B

A matriz aumentada do sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.Efetuando as operações elementares, chega-se em $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Logo x=5, y=-2 e z=-1.

3. A

A matriz aumentada do sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 36 \end{bmatrix}$.Efetuando as operações elementares, chega-se em $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Logo x=1.

4. E

A matriz aumentada do sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.Efetuando as operações elementares, chega-se em $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto, x=1, y=0, z=2 e w=-1 Assim $x^y + z^w = 1^0 + 2^{-1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

5. D

Somando todas as equações do sistema, vem x+w=6. Logo, somando essa equação à segunda, obtemos x+y+z+w=6+2=8.

6. D

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -12 \end{bmatrix}$. Aplicando as operações elementares conclui-se que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Logo z=2

7. E

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando as operações elementares conclui-se que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, x=5, y=2 e z=1.

8. D

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Aplicando as operações elementares conclui-se que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Portanto, y=2

9. C

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando as operações elementares conclui-se que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Logo B+C=2.

10. B

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 39 \end{bmatrix}$. Aplicando as operações elementares conclui-se que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \end{bmatrix}$. Logo y=-8