Funções do 1º e 2º Grau

Resumo

Função do 1º grau

Chama-se função polinomial do 1° grau ou função afim, de qualquer função f dada por uma lei da forma f(x) = ax + b, em que a e b são números reais dados e a ≠ 0.
Na lei f(x) = ax + b, o número a é chamado de coeficiente angular e o número b é chamado de termo independente ou coeficiente linear.

Função Linear:
Um caso particular de função afim é aquele em que **b = 0,** neste caso, temos a função afim de f dada pela lei da função f(x) = ax, que recebe uma denominação especial de função linear.

Raiz ou zero da função:
Chama-se raiz, da função dada por f(x) = ax + b, o número real tal que f(x) = 0. Assim:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Ex: Ache a raiz de f(x) = 2x − 5.

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

O ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ é um dos pontos mais importantes, pois é onde a função corta o eixo x. Uma função de 1° grau só pode ter uma raiz e real.

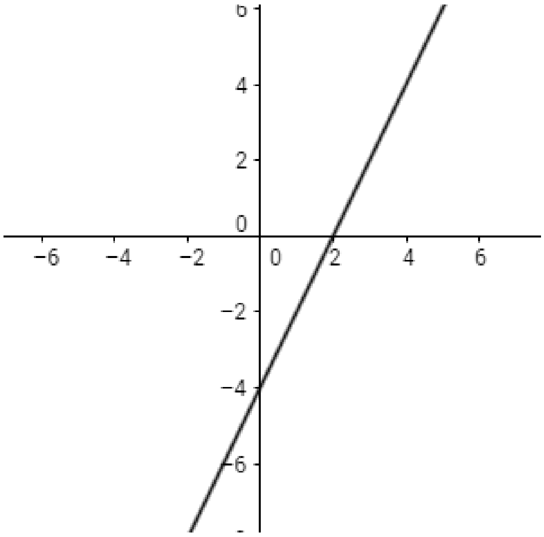
Taxa de crescimento:
Na lei da função f(x) = ax + b dizemos que o coeficiente a é chamado de taxa de variação, ou taxa de crescimento da função. Podemos calcular o coeficiente angular de duas maneiras:

$$a = tg\theta \text{ ou } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Em que θ é o ângulo que a reta da função faz com o eixo x, no sentido anti-horário.

Gráfico:
O gráfico de uma função do 1° grau, dada por y = ax + b, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos 0x e 0y.

Vamos construir o gráfico da função f(x) = 2x – 4.
Como o gráfico é uma reta basta obter dois pontos e ligá-los.
Para x = 0, temos y = 2.0 - 4 = -4. Portanto, um ponto é (0, -4).
Para y = 0, temos 0 = 2x - 4 ↔ x = 2. Portanto, outro ponto é (2, 0).



Reparou que a reta cortou o eixo y no ponto y = -4 e que o coeficiente linear vale exatamente – 4 também? Isso não é coincidência! O gráfico de uma função do 1º grau corta o eixo y justamente no ponto (0, b). Mas, por quê? Ora, veja:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a(0) + b \Leftrightarrow f(0) = b \Rightarrow (0, b) \in f(x)$$

Crescimento e decrescimento da função:
- Se a > 0, temos que a função é crescente e a reta é oblíqua para direita.
- Se a < 0, temos que a função é decrescente e a reta é oblíqua para esquerda.

Função do 2º grau

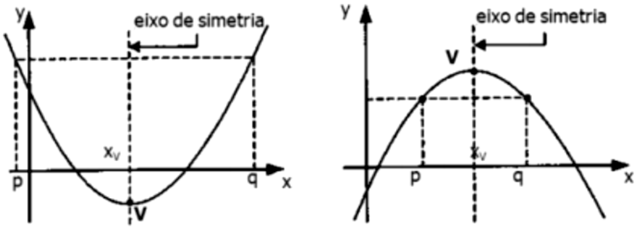
Chama-se função polinomial do 2° grau, ou função quadrática, de qualquer função f dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$.

Zeros ou Raízes da função:
Zeros da função quadrática são os valores de x que anulam a função e podem ser obtidos pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Gráfico:

A função quadrática é representada graficamente por uma parábola, cuja concavidade pode ser voltada para cima (quando a > 0) ou voltada para baixo (quando a < 0).



Além disso, lembra que na função do 1º grau o gráfico cortava o eixo y no ponto (0, b)? Então, aqui, na função do segundo grau, a parábola corta o eixo y no ponto (0, c). Repare:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = a(0)^2 + b(0) + c \Leftrightarrow f(0) = c \Rightarrow (0, c) \in f(x)$

Vértice da parábola:

É a intersecção da parábola com o eixo de simetria. As coordenadas do vértice são dadas por $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Exercícios

1. Um produtor de maracujá usa uma caixa-d'água, com volume V, para alimentar o sistema de irrigação de seu pomar. O sistema capta água através de um furo no fundo da caixa a uma vazão constante. Com a caixa-d'água cheia, o sistema foi acionado às 7 h da manhã de segunda-feira. Às 13 h do mesmo dia, verificou-se que já haviam sido usados 15% do volume da água existente na caixa. Um dispositivo eletrônico interrompe o funcionamento do sistema quando o volume restante na caixa é de 5% do volume total, para reabastecimento.
Supondo que o sistema funcione sem falhas, a que horas o dispositivo eletrônico interromperá o funcionamento?

a) Às 15 h de segunda-feira.

b) Às 11 h de terça-feira.

c) Às 14 h de terça-feira.

d) Às 4 h de quarta-feira.

e) Às 21 h de terça-feira.

2. O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) $y = 4300x$

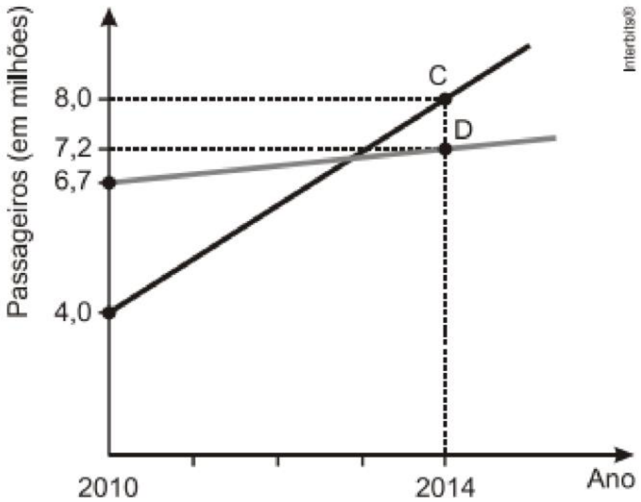
b) $y = 884\,905x$

c) $y = 872\,005 + 4300x$

d) $y = 876\,305 + 4300x$

e) $y = 880\,605 + 4300x$

3. Os aeroportos brasileiros serão os primeiros locais que muitos dos 600 mil turistas estrangeiros, estimados para a Copa do Mundo FIFA 2014, conhecerão no Brasil. Em grande parte dos aeroportos, estão sendo realizadas obras para melhor receber os visitantes e atender a uma forte demanda decorrente da expansão da classe média brasileira.



O gráfico mostra a capacidade (C), a demanda (D) de passageiros/ano em 2010 e a expectativa/projeção para 2014 do Aeroporto Salgado Filho (Porto Alegre, RS), segundo dados da Infraero – Empresa Brasileira de Infraestrutura Aeronáutica. De acordo com os dados fornecidos no gráfico, o número de passageiros/ano, quando a demanda (D) for igual à capacidade (C) do terminal, será, aproximadamente, igual a

a) sete milhões, sessenta mil e seiscentos.

b) sete milhões, oitenta e cinco mil e setecentos.

c) sete milhões, cento e vinte e cinco mil.

d) sete milhões, cento e oitenta mil e setecentos.

e) sete milhões, cento e oitenta e seis mil.

4. Os consumidores X, Y e Z desejam trocar seus planos de internet móvel na tentativa de obterem um serviço de melhor qualidade. Após pesquisarem, escolheram uma operadora que oferece cinco planos para diferentes perfis, conforme apresentado no quadro.

Plano	Franquia	Preço mensal de assinatura	Preço por MB excedente
A	150 MB	R$ 29,90	R$ 0,40
B	250 MB	R$ 34,90	R$ 0,10
C	500 MB	R$ 59,90	R$ 0,10
D	2 GB	R$ 89,90	R$ 0,10
E	5 GB	R$ 119,90	R$ 0,10

Dado: 1 GB = 1.024 MB

Em cada plano, o consumidor paga um valor fixo (preço mensal da assinatura) pela franquia contratada e um valor variável, que depende da quantidade de MB utilizado além da franquia. Considere que a velocidade máxima de acesso seja a mesma, independentemente do plano, que os consumos mensais de X, Y e Z são de 190 MB, 450 MB e 890 MB, respectivamente, e que cada um deles escolherá apenas um plano.

Com base nos dados do quadro, as escolhas dos planos com menores custos para os consumidores X, Y e Z, respectivamente, são

a) A, C e C.

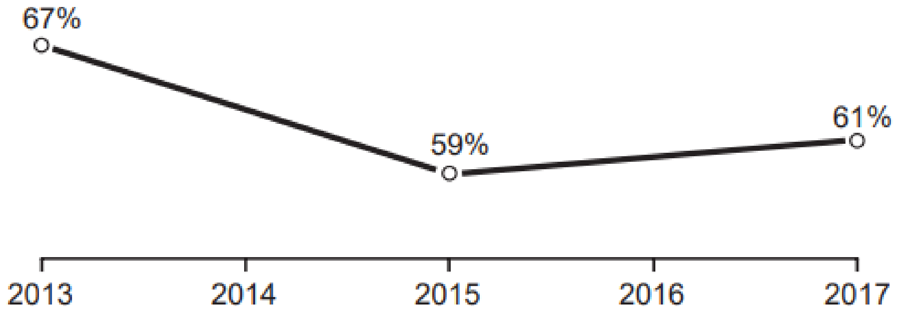
b) A, B e D.

c) B, B e D.

d) B, C e C.

e) B, C e D.

5. A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.



Disponível em: http://pni.datasus.gov.br. Acesso em: 5 nov. 2017.

Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

a) 62,3%

b) 63,0%

c) 63,5%

d) 64,0%

e) 65,5%

6. Um estudo das condições ambientais na região central de uma grande cidade indicou que a taxa média diária (C) de monóxido de carbono presente no ar é de $C(p) = 0{,}5p + 1$ partes por milhão, para uma quantidade de (p) milhares de habitantes. Estima-se que, daqui a *t* anos, a população nessa região será de $p(t) = 2t^2 - t + 110$ milhares de habitantes. Nesse contexto, para que a taxa média diária de monóxido de carbono ultrapasse o valor de 61 partes por milhão, é necessário que tenham sido transcorridos no mínimo:

a) 2 anos

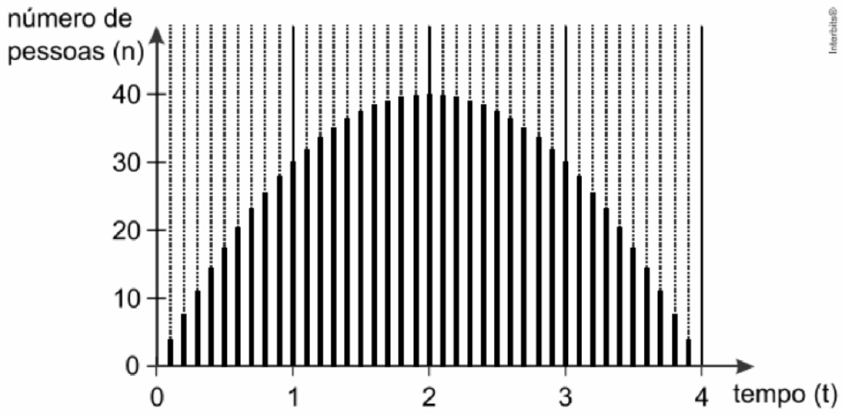
b) 2 anos e 6 meses

c) 3 anos

d) 3 anos e 6 meses

e) 4 anos

7. O número n de pessoas presentes em uma festa varia ao longo do tempo t de duração da festa, em horas, conforme mostra o gráfico a seguir.



Das opções abaixo, aquela que melhor descreve a função n(t) é

a) $n(t) = -10t^2 + 4t + 50$

b) $n(t) = -10t^2 + 40t + 50$

c) $n(t) = -10t^2 + 4t$

d) $n(t) = t^2 + 40t$

e) $n(t) = -10t^2 + 40t$

8. Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$.

b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.

c) $V = 15.000 - 50x - x^2$.

d) $V = 15.000 + 50x - x^2$.

e) $V = 15.000 - 50x + x^2$.

9. Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é

a) $y=-\frac{1}{25}x^2+\frac{7}{5}x$

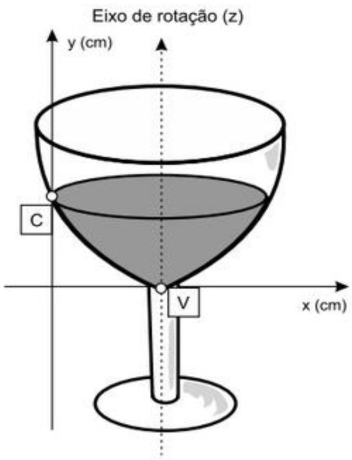
b) $y=-\frac{1}{10}x^2+2x$

c) $y=\frac{1}{24}x^2+\frac{7}{12}x$

d) $y=\frac{4}{5}x+2$

e) $y=x$

10. A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

Gabarito

1. E

A taxa de variação do volume de água presente na caixa-d'água é dada por
$\frac{0,85-1}{13-7}=-0,025.$

Logo, se $p(t)=1-0,025\cdot t$ é a porcentagem do volume inicial de água, presente na caixa-d'água, após t horas, segue que o dispositivo interromperá o funcionamento do sistema após um tempo t dado por
$0,05=1-0,025\cdot t \Leftrightarrow t=38\text{ h}.$

Portanto, como o sistema foi acionado às 7 h da manhã de segunda-feira, a interrupção se dará às 21 h de terça-feira.

2. C

Admitido um crescimento constante, temos uma função de primeiro grau dada por:
$y=ax+b,$ onde $a=4300$ (taxa constante) e $b=880605-2\cdot 4300=872005.$
Logo, $y=4300x+872005.$

3. B

Função da demanda: $y=\frac{7,2-6,7}{2014-2010}\cdot x+6,7 \Rightarrow y=\frac{1}{8}\cdot x+6,7$

Função da capacidade: $y=\frac{8-4}{2014-2010}\cdot x+4 \Rightarrow y=x+4$

Resolvendo um sistema com as duas equações, temos $y\simeq 7,085$ milhões.

4. C

O gasto do consumidor X, no plano A, seria de $29,9+40\cdot 0,4=\text{R\$ }45,90.$ Logo, ele deve optar pelo plano B.
O gasto do consumidor Y, no plano B, seria de $34,9+200\cdot 0,1=\text{R\$ }54,90$ e, portanto, esta deve ser sua escolha.
O gasto do consumidor Z, no plano B, seria de $34,9+640\cdot 0,1=\text{R\$ }98,90$ e, no plano C, seria de $59,9+390\cdot 0,1=\text{R\$ }98,90.$ Por conseguinte, sua escolha deve recair no plano D.

5. B

Sendo 2014 o ponto médio do intervalo $[2013, 2015],$ e sabendo que a cobertura da campanha variou de forma linear, podemos concluir que a resposta é
$\frac{67\%+59\%}{2}=63\%.$

6. **B**

De acordo com as informações do problema, podemos escrever:
$61=0{,}5\ p + 1 \Leftrightarrow p = 120$ mil habitantes.

Fazendo $p(t) = 120$ na segunda função, temos:
$120 = 2t^2 - t + 110 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2{,}5$ ou $t = -2$ (não convém).

Logo, t é, no mínimo, 2 anos e 6 meses.

7. **E**

Seja $n: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a função dada por $n(t) = a \cdot (t - t_1) \cdot (t - t_2)$, com t_1 e t_2 sendo os zeros da função n. Logo, sabendo que $t_1 = 0$, $t_2 = 4$ e $(2, 40)$ pertence ao gráfico de n, vem
$40 = a \cdot (2-0)(2-4) \Leftrightarrow a = -10.$

Portanto, a lei de n é
$n(t) = -10 \cdot (t-0)(t-4) = -10t^2 + 40t.$

8. **D**

V= (1,5 −x/10). (1000 + 100x)

$V = 15000 + 50x - x^2$

9. **A**

Seja $f: [0, 10] \to [0, 10]$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Desse modo, temos

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(5) = 6 \\ f(10) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 25a + 5b = 6 \\ 100a + 10b = 10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{25} \\ b = \dfrac{7}{5} \\ c = 0 \end{cases}.$$

Portanto, segue que $f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

10. **E**

A abscissa do vértice da parábola $y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ é igual a $-\dfrac{(-6)}{2 \cdot \frac{3}{2}} = 2.$

Por outro lado, sabendo que o vértice da parábola pertence ao eixo das ordenadas, temos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow 0 = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot C}{4 \cdot \frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 6C - 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow C = 6.$$

Portanto, segue-se que o resultado pedido é $f(0) = C = 6\text{cm}.$