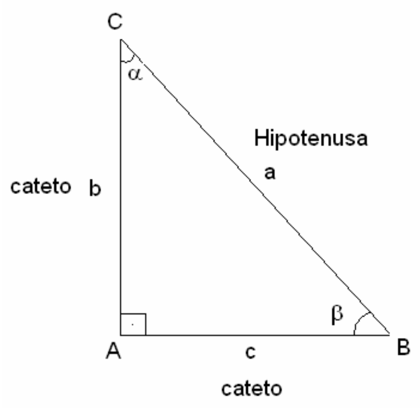
Trigonometria – Gourmet

Resumo

Consideramos um triângulo retângulo ABC.



Podemos definir algumas relações que envolvem os ângulos do triângulo retângulo. São elas: o seno, o cosseno e a tangente. Definimos essas linhas (ou razões) trigonométricas da seguinte forma:

- seno = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
- cosseno = $\dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
- tangente = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$
- cotangente = $\dfrac{1}{\text{tangente}}$
- cossecante = $\dfrac{1}{seno}$
- secante = $\dfrac{1}{\text{cosseno}}$

Ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

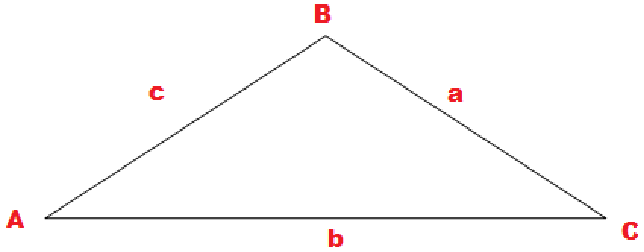
Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles. Ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}$$

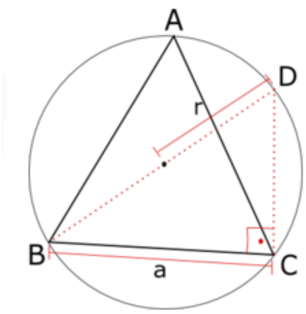
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}$$



Lei dos senos

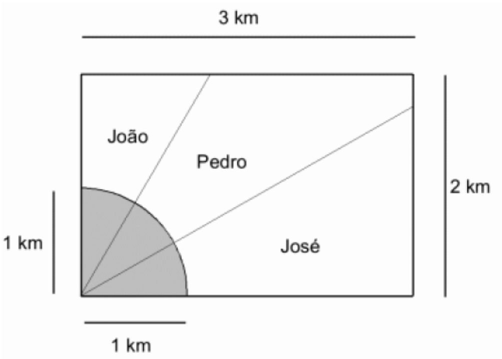
Seja um triângulo qualquer, com lados a, b e c, que são os lados opostos aos ângulos A, B e C, respectivamente. O quociente entre a medida de cada lado e o seno do ângulo oposto a este lado é uma constante igual a 2r, em que r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2r$$



Exercícios

1. Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3km × 2km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

$\left(\text{considere } \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58\right)$

a) 50%.

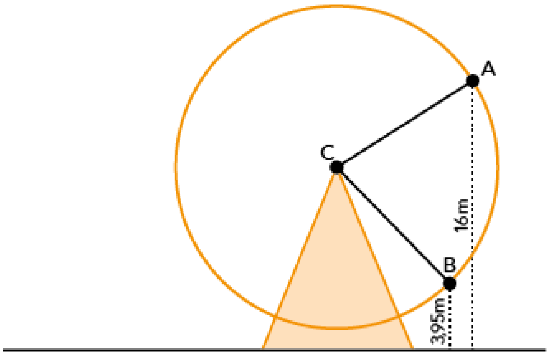
b) 43%.

c) 37%.

d) 33%.

e) 19%

2. O raio de uma roda gigante de centro C mede $\overline{CA} = \overline{CB} = 10$ m. Do centro C ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11 m. Os pontos A e B, situados no mesmo plano vertical, ACB, pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16 m e 3,95 m do plano do chão. Observe o esquema e a tabela:

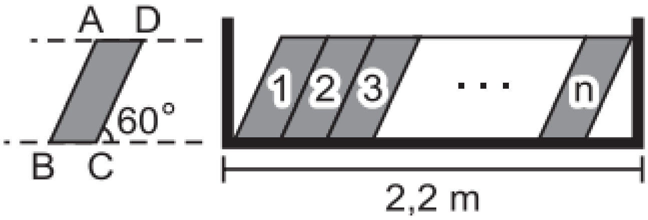


θ (graus)	sen θ
15°	0,259
30°	0,500
45°	0,707
60°	0,866

A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo $\hat{ACB}$ corresponde a:

a) 45
b) 60
c) 75
d) 105

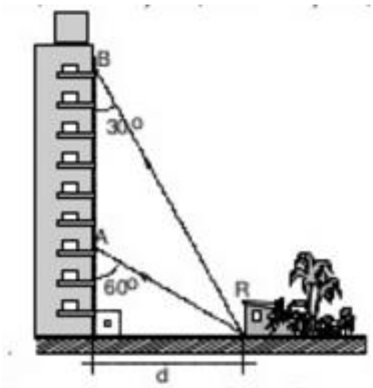
3. A figura representa uma fileira de n livros idênticos, em uma estante de 2 metros e 20 centímetros de comprimento:



$$\overline{AB} = \overline{DC} = 20cm \text{ e } \overline{AD} = \overline{BC} = 6cm$$

Nas condições dadas, n é igual a:
a) 32
b) 33
c) 34
d) 35
e) 36

4. Patrik Onom Étrico, um jovem curioso, observada janela do seu quarto (A) uma banca de revistas (R), bem em frente ao seu prédio, segundo um ângulo de 60º com a vertical.Desejando avaliar a distância do prédio à banca, Patrik sobe seis andares (aproximadamente 16 metros) até o apartamento de um amigo seu, e passa a avistar a banca (do ponto B) segundo um ângulo de 30º com a vertical.



Calculando a distância "d", Patrik deve encontrar, aproximadamente, o valor:
(**Dados**: $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$)

a) 8,0

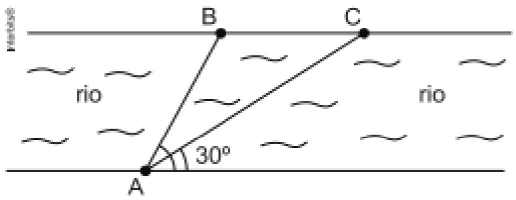
b) 11,2

c) 12,4

d) 13,6

e) 15,0

5. A figura abaixo representa um rio plano com margens retilíneas e paralelas. Um topógrafo situado no ponto A de uma das margens almeja descobrir a largura desse rio. Ele avista dois pontos fixos B e C na margem oposta. Os pontos B e C são visados a partir de A, segundo ângulos de 60° e 30°, respectivamente, medidos no sentido anti-horário a partir da margem em que se encontra o ponto A. Sabendo que a distância de B até C mede 100 m, qual é a largura do rio?



a) $50\sqrt{3}$ m

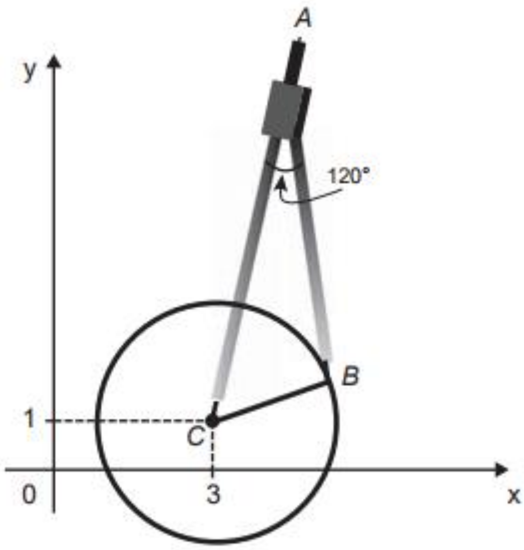
b) $75\sqrt{3}$ m

c) $100\sqrt{3}$ m

d) $150\sqrt{3}$ m

e) $200\sqrt{3}$ m

6. Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120º. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

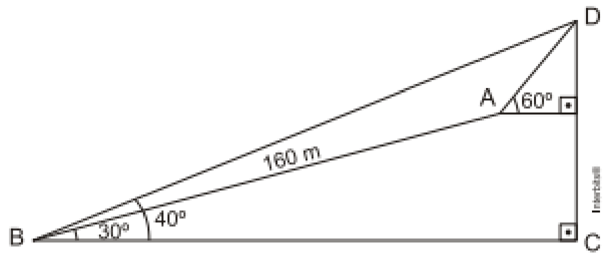
Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

7. Um grupo de escoteiros pretende escalar uma montanha até o topo, representado na figura abaixo pelo ponto D, visto sob ângulos de 40° do acampamento B e de 60° do acampamento A.

Dado: $\text{sen } 20^\circ = 0{,}342$



Considerando que o percurso de 160 m entre A e B e realizado segundo um angulo de 30° em relação a base da montanha, então, a distância entre B e D, em m, e de, aproximadamente,

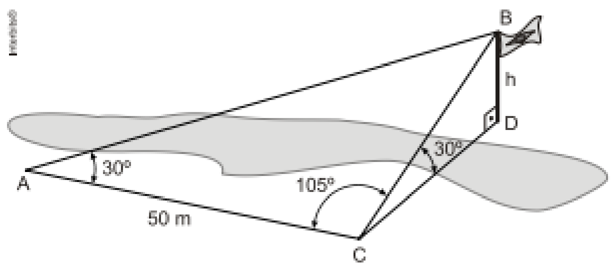
a) 190.

b) 234.

c) 260.

d) 320.

8. Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos BÂC e BCD valem 30°, e o ACB vale 105°, como mostra a figura:



a) 12,5.

b) $12{,}5\sqrt{2}$.

c) 25,0.

d) $25{,}0\sqrt{2}$.

e) 35,0.

9. Dois navios deixam um porto ao mesmo tempo. O primeiro viaja a uma velocidade de 16 km/h em um curso de 45° em relação ao norte, no sentido horário. O segundo viaja a uma velocidade 6 km/h em um curso de 105° em relação ao norte, também no sentido horário. Após uma hora de viagem, a que distância se encontrarão separados os navios, supondo que eles tenham mantido o mesmo curso e velocidade desde que deixaram o porto?

a) 10 km.

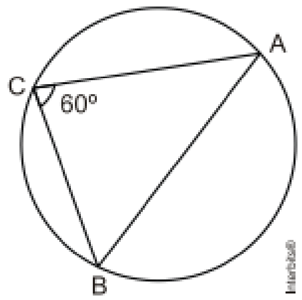
b) 14 km.

c) 15 km.

d) 17 km.

e) 22 km.

10. Uma praça circular de raio R foi construída a partir da planta a seguir:



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que $\overline{AB} = 80\ m$. De acordo com a planta e as informações dadas, é CORRETO afirmar que a medida de *R* é igual a

a) $\frac{160\sqrt{3}}{3}$ m

b) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ m

c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ m

d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

Gabarito

1. E

No primeiro triângulo de joão temos:

Tg 30°=x/2 -> x=2$\sqrt{3}$/3=2.0,58=1,16

Área=1,16.2/2=1,16

Em porcentagem temos que : 1,16/6= 19%

2. C

Sen a=5/10=1/2 => a=30°

Sen b = 7,05/10 = 0,705=b=45°

Portanto AÔB=30° + 45°= 75°

3. D

O livro n tem a sua base a uma distância CE da lateral da estante.

Então: CE=CD.cos60°=20.1/2=10cm

Como temos n livros na base 6 cm e o comprimento da estante é de 220cm, temos que :

6n+10=220

N=35

4. D

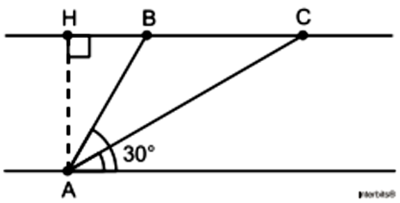
Sen60° = d/16

d/16 = $\sqrt{3}$/2

d = 8$\sqrt{3}$, que é a, aproximadamente, 13,6.

5. A

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$.



Queremos calcular $\overline{AH}$.

Temos que $C\hat{A}B = B\hat{A}H = 30°$. Logo, do triângulo AHB, vem

$$\text{tg}B\hat{A}H = \frac{\overline{HB}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{AH}.$$

Por outro lado, do triângulo AHC, obtemos

$$\begin{aligned}\text{tg}C\hat{A}H = \frac{\overline{HB}+\overline{BC}}{\overline{AH}} &\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{AH} + 100 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \overline{AH} = 100 \\ &\Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{150}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}\text{ m.}\end{aligned}$$

6. D

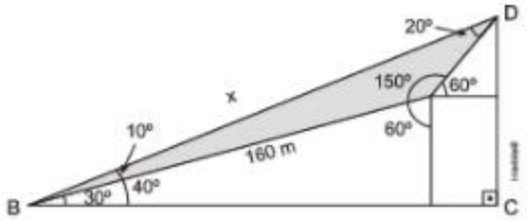
Utilizando lei dos cossenos no triângulo ABC:

$BC^2=10^2+10^2-2.10.10.COS120º$

BC=10.1,7

BC=17

7. B



Aplicando o teorema dos senos no triângulo assinalado, temos:

$$\frac{x}{\text{sen}150^\circ} = \frac{160}{0{,}342}$$

$$0{,}342.x = 160.\text{sen}150^\circ$$

$$0{,}342x = 80$$

$$x = 233{,}9$$

Aproximadamente 234m.

8. B

No triângulo ABC $A\hat{B}C = 45^\circ$, aplicando o teorema dos senos, temos:

$$\frac{50}{\text{sen}45^\circ} = \frac{BC}{\text{sen}30^\circ} \Leftrightarrow BC.\sqrt{2} = 50 \Leftrightarrow BC = 25\sqrt{2}$$

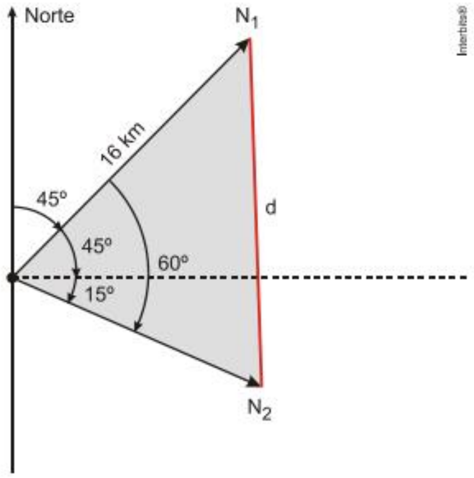
No triângulo BDC, temos:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{h}{25\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{25\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = 12{,}5\sqrt{2}$$

9. B

Depois de uma hora de viagem o navio 1 (N_1) terá percorrido 16 km e o navio 2 (N_2) terá percorrido 6 km.

Temos, então, a seguinte figura:



Sendo d a distância entre os navios, temos:

$$d^2 = 16^2 + 6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

$$d^2 = 256 + 36 - 192 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$d^2 = 196$$

$$d = 14\text{km}$$

10. B

Pela Lei dos Senos, segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\,60^\circ} = 2R \Leftrightarrow 2R = \frac{80}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow R = \frac{80}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{80\sqrt{3}}{3}\text{ m.}$$