

Função Seno, Cosseno e Tangente

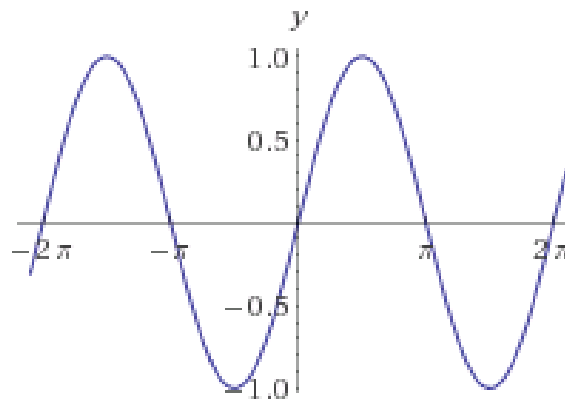
Resumo

Função Seno

A função seno é $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e associa cada número real ao seu seno, ou seja, $f(x) = \text{sen}(x)$. Para montar o seu gráfico, é importante saber que o seno varia de -1 a 1, ou seja sua imagem é o intervalo $[-1,1]$, e os valores notáveis:

Ângulo (em radianos)	Seno
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Dessa forma o gráfico, chamado senoide, é da forma:



A função seno é periódica, cujo período principal é igual a 2π .

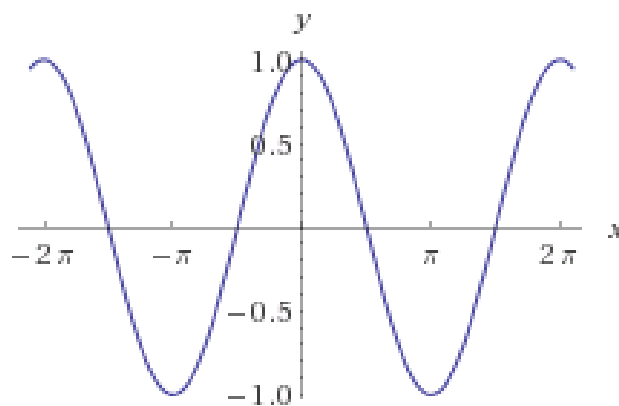
A lei de formação geral da função é $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$.

Função Cosseno

Assim como a função seno, a função cosseno é $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e associa cada número real ao seu cosseno, ou seja, $f(x) = \cos(x)$. O cosseno também varia entre -1 e 1, ou seja, sua imagem é o intervalo $[-1,1]$, e seus valores notáveis são:

Ângulo (em radianos)	Cosseno
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Dessa forma o gráfico é uma cossenóide:



Pelo mesmo motivo da função seno, a função cosseno também é periódica e tem período principal 2π . A lei de formação geral da função é $f(x) = a + b \cos(cx + d)$.

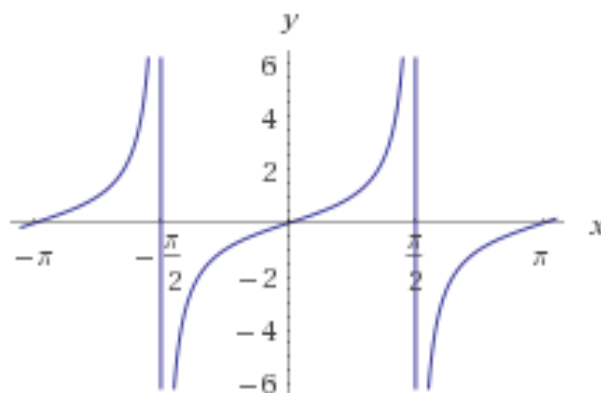
Função Tangente

A função tangente associa cada número real ao seu cosseno, ou seja, $f(x) = \tan(x)$. A tangente varia de $-\infty$ a ∞ , ou seja a imagem é \mathbb{R} . Há restrições para x, pois como a tangente é a razão entre seno e cosseno, logo onde o cosseno é 0 a tangente não existe, ou seja quando nos ângulos de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e seus arcos cômruos. Logo

seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ é

Ângulo (em radianos)	Tangente
0	0
$\frac{\pi}{2}$	\nexists
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	\nexists
2π	0

Dessa forma o gráfico, chamado tangentoide, fica:



A curva também pode ser estendida para valores menores que 0 e maiores que 2π . A função tangente é periódica e seu período é π .

A lei de formação geral da função é $f(x) = a + b \operatorname{tg}(cx + d)$.

Funções Trigonômétricas Compostas

Sabemos que a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tem período 2π . Então, qual seria o período da função $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, por exemplo?

O fato de a abscissa estar multiplicada por 2 faz com que seja necessária uma variação duas vezes menor na variável para que a função complete seu ciclo. Portanto, o período dessa função é:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

De maneira geral, o período de uma função trigonométrica composta é calculado dividindo-se o período da função trigonométrica que a origina pelo módulo da constante que multiplica a variável x . Ou seja:

$$T = \frac{2\pi}{|c|}$$

Com relação à construção do gráfico de uma função trigonométrica composta, devemos entender a importância de cada constante que compõe a lei de formação dessa função.

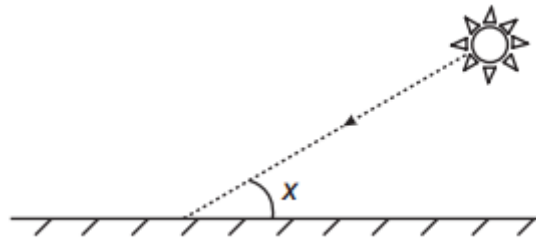
$$f(x) = a + b\sin(cx + d) \text{ ou } f(x) = a + b\cos(cx + d)$$

- a: desloca a função para baixo ou para cima a unidades.
- b: altera a amplitude da função; atenção no caso de b ser negativo, pois, além da mudança de amplitude, haverá, também, uma rotação em torno do eixo x.
- c: altera o período da função.
- d: desloca a função para a esquerda ou direita $\frac{d}{c}$ unidades.

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui](#)

Exercícios

1. Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo X com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \sin(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que X está entre 0° e 90° .



Quando $x = 30^\circ$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- a) 33%
 - b) 50%
 - c) 57%
 - d) 70%
 - e) 86%
2. Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cos(kt)$ em que A , B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

- a) $P(t) = 99 + 21 \cos(3\pi t)$
- b) $P(t) = 78 + 42 \cos(3\pi t)$
- c) $P(t) = 99 + 21 \cos(2\pi t)$
- d) $P(t) = 99 + 21 \cos(t)$
- e) $P(t) = 78 + 42 \cos(t)$

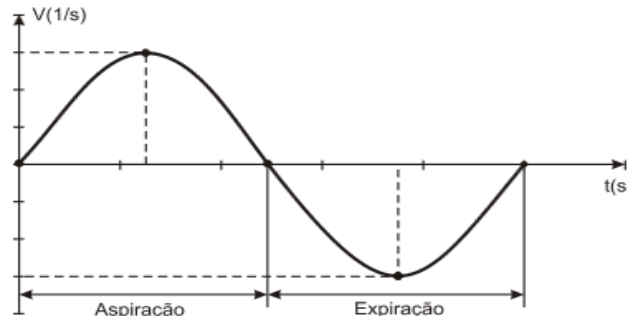
3. Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por:

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot \cos(0,06t)}$$

Uma cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r , no apogeu e no perigeu, representada por S . O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

- a) 12 765 km.
- b) 12 000 km.
- c) 11 730 km.
- d) 10 965 km.
- e) 5 865 km.

4. Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 l/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

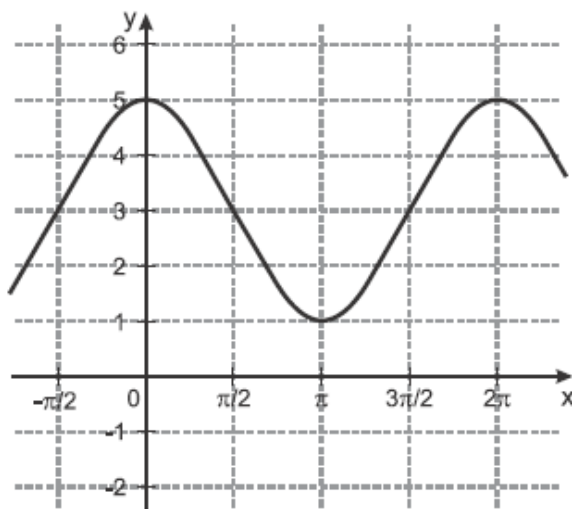
- a) $V(t) = \frac{2\pi}{5} \sin\left(\frac{3}{5}t\right)$
- b) $V(t) = \frac{3}{5} \sin\left(\frac{5}{2\pi}t\right)$
- c) $V(t) = 0,6 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$
- d) $V(t) = 0,6 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$
- e) $V(t) = \frac{5}{2\pi} \cos(0,6t)$
5. Em muitas cidades, os poluentes emitidos em excesso pelos veículos causam graves problemas a toda a população. Durante o inverno, a poluição demora mais para se dissipar na atmosfera, favorecendo o surgimento de doenças respiratórias. Suponha que a função:

$$N(x) = 180 - 54 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 1)\right)$$

represente o número de pessoas com doenças respiratórias registrado num Centro de Saúde, com $x = 1$ correspondendo ao mês de janeiro, $x = 2$, o mês de fevereiro e assim por diante. A soma do número de pessoas com doenças respiratórias registrado nos meses de janeiro, março, maio e julho é igual a:

- a) 693.
- b) 720.
- c) 747.
- d) 774.
- e) 936.

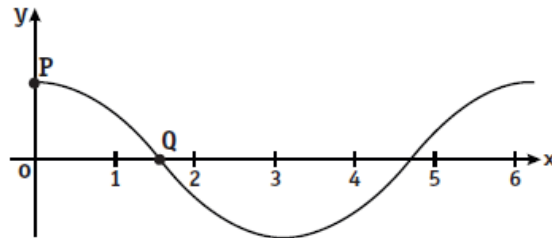
6. O esboço do gráfico da função $f(x) = a + b \cos(x)$ é mostrado na figura seguinte.



Nessa situação, o valor de $a \cdot b$ é:

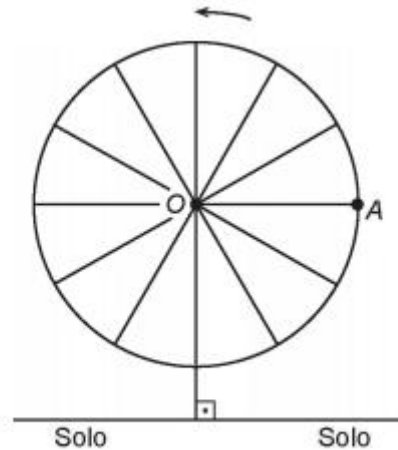
- a) 2.
 - b) 3.
 - c) 5.
 - d) 6.
7. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2^{\sin x} + 1$, então o produto do maior valor pelo menor valor que f assume é igual a:
- a) 4,5.
 - b) 3,0.
 - c) 1,5.
 - d) 0.

8. Considerando o esboço do gráfico da função $f(x) = \cos x$, entre 0 e 2π a reta que passa pelos pontos P e Q define com os eixos coordenados um triângulo de área:



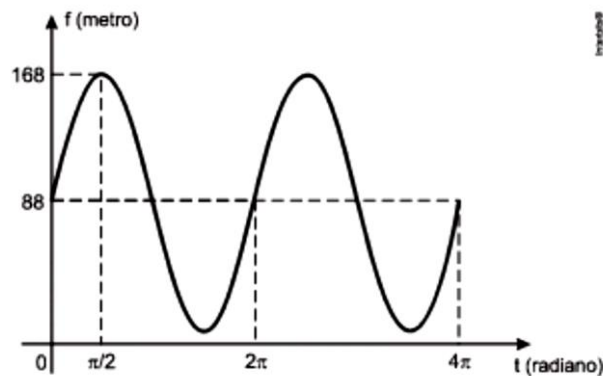
- a) $\frac{\pi}{2}$
- b) $\frac{\pi}{4}$
- c) π
- d) $\frac{\pi}{8}$
- e) $\frac{\pi}{6}$
9. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T , em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \sin(12(h - 12))$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C , a mínima 18°C , e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.
- Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?
- a) $A = 18$ e $B = 8$
- b) $A = 22$ e $B = -4$
- c) $A = 22$ e $B = 4$
- d) $A = 26$ e $B = -8$
- e) $A = 26$ e $B = 8$

10. Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: <http://en.wikipedia.org>. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O . Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A , em relação ao solo, em função de t . Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

- a) $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$
- b) $f(t) = 80\text{cos}(t) + 88$
- c) $f(t) = 88\text{cos}(t) + 168$
- d) $f(t) = 168\text{sen}(t) + 88\text{cos}(t)$
- e) $f(t) = 88\text{sen}(t) + 168\text{cos}(t)$

Gabarito

1. **B**

O valor máximo será quando $x = 90^\circ$, então $i = k \cdot 1 = k$

Quando $x = 30^\circ$, teremos $i = k \cdot (\frac{1}{2}) = k/2$

Logo, a variação será de 50%

2. **A**

Substituindo o cosseno de cada opção por 1 e -1, percebemos que as opções compatíveis com os valores de máximo e mínimos apresentados são letra a, c ou d. Como são 90 batimentos a cada 60 segundos temos, $2/3$ de batimentos por segundo. Como o enunciado diz que o tempo entre dois valores máximos é o tempo de 1 batimento percebemos que o período deve ser igual a $2/3$. Numa função trigonométrica $p = 2 / |k|$, por isso $2/3 = 2 / |k|$, concluindo que $k = 3$.

3. **B**

$$1) r_{\text{máximo}} = 5\,865 / [1 + 0,15 \cdot (-1)] = 5\,865 / (1 - 0,15) = 6\,900$$

$$2) r_{\text{mínimo}} = 5\,865 / [1 + 0,15 \cdot (1)] = 5\,865 / (1 + 0,15) = 5\,100$$

$$S = r_{\text{máximo}} + r_{\text{mínimo}} = 6\,900 + 5\,100 = 12\,000$$

4. **D**

$$\text{O período da função é } \frac{|2\pi|}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

Como as taxas de inalação e exalação são 6, temos a função:

$$y = 0,6 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$$

A função não poderia ser $y = 0,6 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$, pois, se x for zero, y deveria ser 0,6.

5. **B**

Podemos ver neste caso que os meses solicitados tem algo em comum:

Meses: {1, 3, 5, 7}

Todos eles quando substituímos na forma de $\cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 1)\right)$

Obtemos algo em comum:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(1 - 1)\right) = \cos(0) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(3 - 1)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(5 - 1)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0,5$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(7 - 1)\right) = \cos(\pi) = -1$$

Então veja que o mês de janeiro cancela com o mês de julho, sobrando somente o primeiro termo da equação. E com março e maio, acontece a mesma coisa.

Portanto a resposta é $4 \times 180 = 720$

6. D

Separando alguns pontos do gráfico, podemos formar um sistema:

$$(0,5) \Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow a + b \cos(0) = 5 \Leftrightarrow a + b = 5$$

$$(\pi,1) \Rightarrow f(\pi) = 1 \Rightarrow a + b \cos(\pi) = 1 \Leftrightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $a = 3$ e $b = 2$. Portanto, $a.b = 6$.

7. B

Como sabemos, o menor valor do seno de qualquer ângulo é sempre -1, e o maior, 1.

$$f_{MÁX} = 2^1 + 1 = 3$$

$$f_{MÍN} = 2^{-1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Assim o produto é $3/2 \times 3 = 3$.

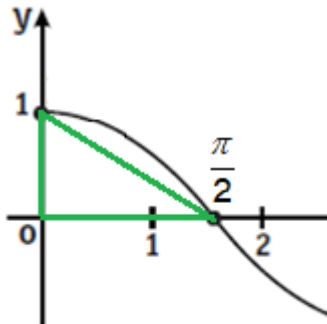
8. B

Primeiro, precisamos descobrir quais são os pontos P e Q. Repare que P é o ponto em que $x = 0$ e Q é o ponto em que $y = 0$.

$$(0,P) \Rightarrow f(0) = P \Rightarrow P = \cos(0) \Leftrightarrow P = 1$$

$$(Q,0) \Rightarrow f(Q) = 0 \Rightarrow 0 = \cos(Q) \Leftrightarrow Q = \frac{\pi}{2}$$

Agora, observe a figura:



Temos um triângulo de altura $h = 1$ e base $b = \pi/2$. Assim, a área será $\frac{b.h}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

9. B

Substituindo os valores na equação por 26°C pela manhã, às 6h e 18°C às 18h, tem-se:

$$T(h) = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$$

$$T(6) = 26 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(6 - 12)\right) \rightarrow 26 = A + B \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 26 = A - B$$

$$T(18) = 18 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(18 - 12)\right) \rightarrow 18 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 18 = A + B$$

$$\begin{cases} A - B = 26 \\ A + B = 18 \end{cases}$$

$$2A = 44 \rightarrow A = 22 \rightarrow B = -4$$

10. A

Pelo gráfico, vemos que f é uma função seno, com período 2π , da forma $f(t) = A + B\sin(t)$. Ademais, pelo ponto $f(0) = 88$, temos que $A = 88$ e, pelo ponto $f(\pi/2) = 168$, temos que $B = 80$. Por fim, temos que a $f(t) = 80\sin(t) + 88$.