Função modular e inequação modular

Resumo

Função modular:

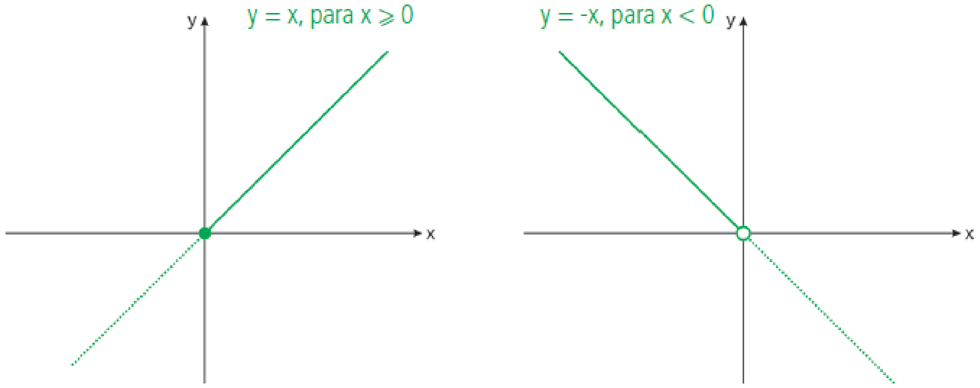
A função modular é uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definida por f(x) = |x|. Para se construir o gráfico dessa função devemos considerar como uma função definida por várias sentenças, ou seja, ela se comporta de maneiras distintas para cada intervalo de x.

Considere a função f(x) = |x|

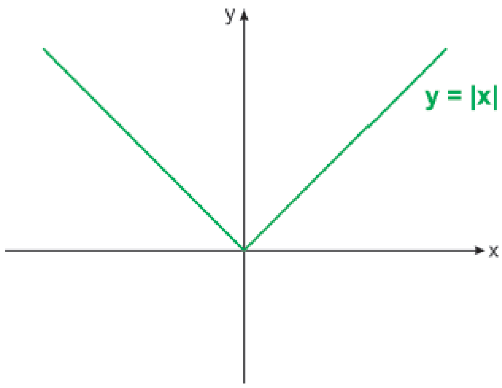
Temos que:

$$f(x)=\begin{cases} x \;=\; |x| \text{ se x} \geq 0 \\ \quad ou \\ -x \;=\; |x| \text{ se x} < 0 \end{cases}$$

Ou seja, para x ≥ 0, a função é y = x e para x < 0, a função é y = - x



Juntando os dois gráficos:

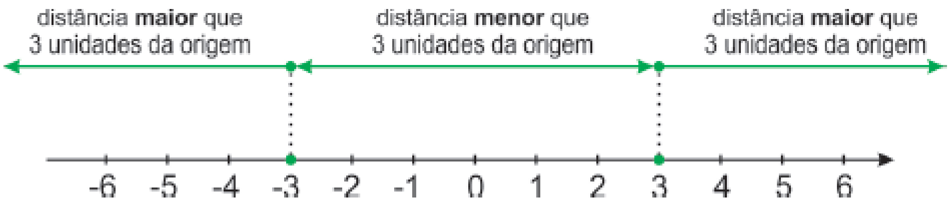


Note que a Imagem é $\mathbb{R}_+$.

Inequação modular

Na equação modular, exemplo |x| = 3, geometricamente, queríamos descobrir quais os valores que distavam 3 unidades da origem, nesse casos S = {-3,3}.

Já nas inequações, exemplo |x| ≤ 3, queremos descobrir intervalo onde os números que distam menos de 3 unidades da origem e |x| ≥ 3, analogamente, o intervalo onde os números distam mais de 3 unidades da origem.



Assim, o conjunto solução de |x| ≤ 3 é -3 ≤ x ≤ 3 e de |x| ≥ 3 é x ≤ 3 ou x ≥ 3

Resumindo:

$\rightarrow |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$\rightarrow |x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Seja f(x) uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, |f(x)|

a) nunca passará pela origem

b) nunca passará pelo 3 ou 4 quadrante

c) intercepta o eixo x somente se f(x) for do primeiro grau

d) intercepta o eixo y somente se f(x) for do segundo grau

2. Seja $f(x) = |x - 3|$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 7

3. O domínio da função real $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ é o intervalo

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1$ ou $x > 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $x \geq 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

4. Considera a função $f(x) = \left|\frac{x^2}{2} - 2\right|$. Para quais valores reais de x temos $f(x) = 1$?

a) $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

b) $S = \{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}\}$

c) $S = \{\sqrt{6}, \sqrt{2}\}$

d) $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

e) $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

5. Considere a função $f(x)=\left|\dfrac{x^2}{2}-2\right|$. Para quais valores reais de x temos $f(x)\leq 1$?

a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-\sqrt{6}\leq x\leq -\sqrt{2}\text{ ou }\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{6}\right\}$

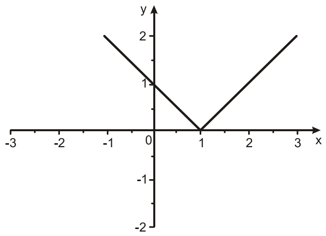
b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-\sqrt{6}\leq x\leq -\sqrt{2}\right\}$

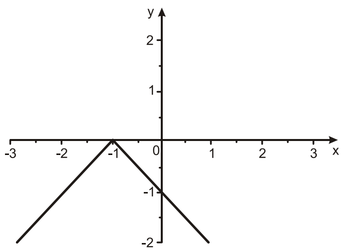
c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{6}\right\}$

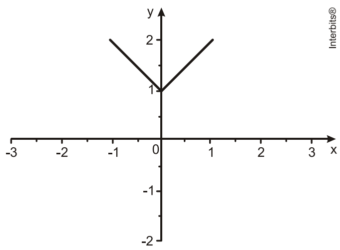
d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-\sqrt{6}\leq x\leq \sqrt{2}\text{ ou }\sqrt{2}\leq x\leq -\sqrt{6}\right\}$

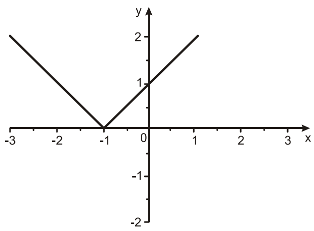
e) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-\sqrt{6}\leq x\leq \sqrt{6}\right\}$

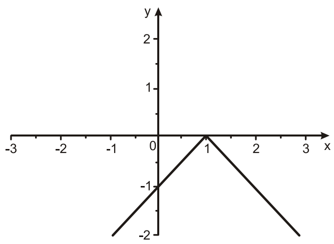
6. Considere a função real $f(x)=|-x+1|$. O gráfico que representa a função é:

a)


c)


e)


b)


d)


7. Qual é o conjunto solução em $\mathbb{R}$ de $5-x\leq x+2$?

a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq-\dfrac{3}{2}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>\dfrac{3}{2}\right\}$

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq-\dfrac{3}{2}\right\}$

e) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq\dfrac{3}{2}\right\}$

8. Qual é o conjunto solução em $\mathbb{R}$ de $|3x+1|<3$?

a) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \,/ -\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$

b) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \,/ -\frac{4}{3} < x\right\}$

c) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < \frac{2}{3}\right\}$

d) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \,/ -\frac{4}{3} \leq x < \frac{2}{3}\right\}$

e) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \,/ -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right\}$

9. A expressão $|x - a| < 16$ também pode ser representada por

a) $x - a < 16$

b) $x + a > 16$

c) $- a - 16 < x < a + 16$

d) $- 16 + a < x < a + 16$

e) $x - a < 16$ ou $x - a > 0$

10. O conjunto solução da inequação $\left||x-4|+1\right| \leq 2$ é um intervalo do tipo [a,b]. O valor de a + b é igual a

a) -8

b) -2

c) 0

d) 2

e) 8

Gabarito

1. B

A alternativa [B] é a correta, pois a função $|f(x)|$ não assumirá valores negativos e, no terceiro e quarto quadrantes, os valores assumidos por qualquer função serão sempre negativos.

2. C

Queremos calcular x de modo que se tenha $f(x) = 2.$ Desse modo, vem

$$\begin{aligned} |x-3| = 2 &\Leftrightarrow x - 3 = \pm 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

O resultado é, portanto, $1 + 5 = 6.$

3. D

$$1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Portanto, o domínio da função será dado por: $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}.$

4. A

Calculando:

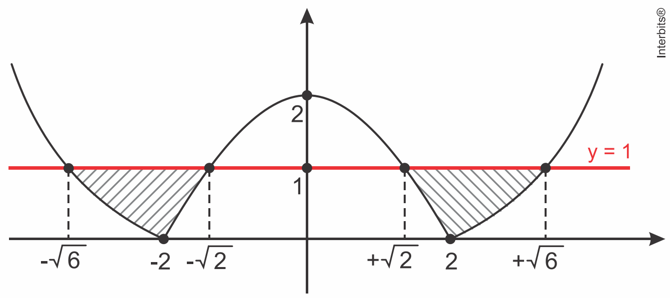
$$\left|\frac{x^2}{2} - 2\right| = 1$$

$$\frac{x^2}{2} - 2 = 1 \to x = \pm\sqrt{6}$$

$$\frac{x^2}{2} - 2 = -1 \to x = \pm\sqrt{2}$$

5. A

Esboçando o gráfico:



Assim: $-\sqrt{6} \leq x \leq -\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{6}.$

6. A

Tem-se que $f(x)=\begin{cases}-x+1, \text{ se } x\le 1\\ x-1, \text{ se } x>1\end{cases}$. Portanto, o gráfico da alternativa [A] é o que representa f.

7. A

$5-x\le x+2\Rightarrow -2x\le -3\Rightarrow x\ge \frac{3}{2}$

$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge\frac{3}{2}\right\}$

8. A

$|3x+1|<3\Rightarrow -3<3x+1<3\Rightarrow -4<3x<2\Rightarrow$

$-\frac{4}{3}<x<\frac{2}{3}$

$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{4}{3}<x<\frac{2}{3}\right\}$

9. D

$|x-a|<16\Rightarrow -16<x-a<16\Rightarrow \boxed{-16+a<x<a+16}$

10. E

De $||x-4|+1|\le 2$,

$-2\le |x-4|+1\le 2$

$-3\le |x-4|\le 1$

$|x-4|\le 1$

$-1\le x-4\le 1$

$3\le x\le 5$

$a=3 \quad \text{e} \quad b=5$

$a+b=8$