Função quadrática: construção do gráfico e forma fatorada

Resumo

Gráfico
Temos que uma função do 2° grau obedece a lei $f(x)=ax^2+bx+c$. Logo para a construção do gráfico devemos nos atentar a esta lei, pois é com ela que conseguiremos valores para nosso gráfico, temos também alguns detalhes muito importantes que devemos nos atentar:

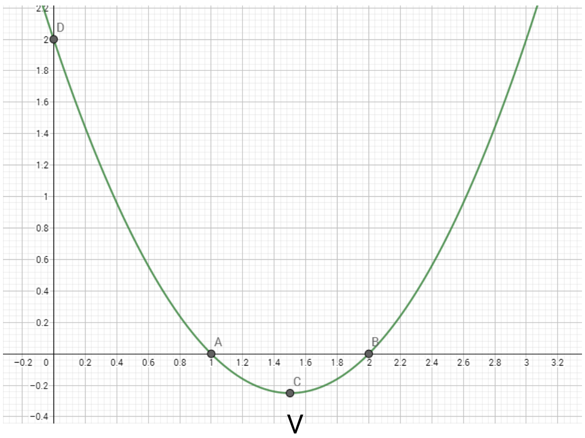
1. **Concavidade**.
   Se $a>0$ a parábola está sorrindo, ou seja, concavidade para cima.
   Se $a<0$ a parábola está triste, ou seja, concavidade para baixo.

2. **Pontos importantes**:
   Para a construção de um bom gráfico é necessário que tenhamos a maior quantidade de pontos possíveis, porém temos que os seguintes pontos são extremamente necessários .
   - Os pontos onde a parábola corta o eixo x: basta encontrar as raízes, igualando a função a zero.
   - O ponto (0,c), onde c é o termo independente da função.
   - O vértice, que pode ser encontrado através da seguinte fórmula -> $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Ex: Contrua o gráfico da seguinte função:

a) $f(x)=x^2-3x+2$

1. Raízes: A e B são os pontos onde a parábola corta o eixo x.
   (1,0) e (2,0)
2. O ponto (0,2) (D) : é o ponto que corta o eixo y.
3. O vértice (V) : Através da fórmula temos que V=(3/2;-1/4)

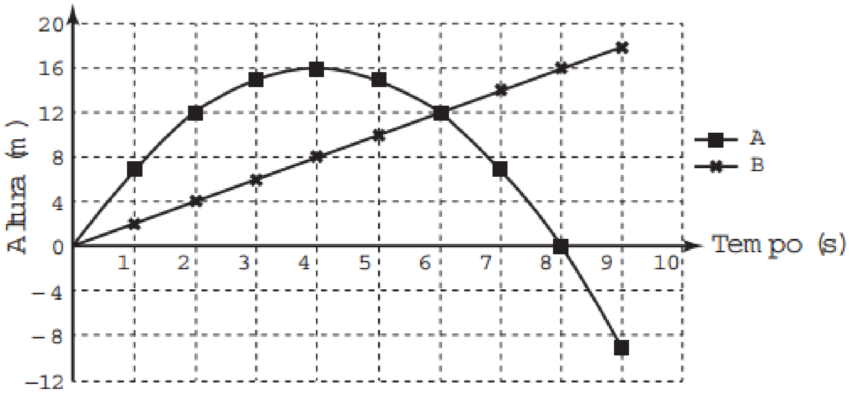


- Forma fatorada:
  Toda função quadrática pode ser escrita da forma:
  $f(x) = a\,.\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)$, sendo x_1 e x_2 as raízes da equação.

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.

b) diminuir em 4 unidades.

c) aumentar em 2 unidades.

d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

2. O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a base da montanha no eixo das abscissas.

Para que fique mais adequada essa representação, devemos ter :

a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

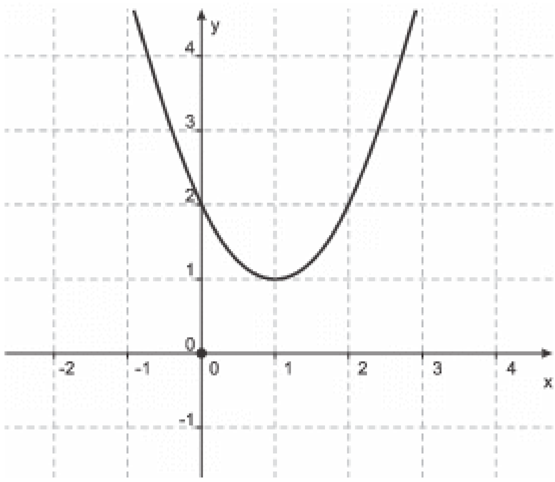
b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

e) $a < 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

3. A parábola, representada na figura ao lado, é o esboço do gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se a parábola $y = 2 - f(x+3)$ tem vértice $V = (p, q)$ e intersecta o eixo y no ponto $P = (0, r)$, qual é o valor $(p - q)/r$?



a) 1/3

b) 1

c) - 1/3

d) - 1

e) - 2

4. Suponha que para um trem trafegar de uma cidade à outra seja necessária a construção de um túnel com altura e largura iguais a 10 m. Por questões relacionadas ao tipo de solo a ser escavado, o túnel deverá ser tal que qualquer seção transversal seja o arco de uma determinada parábola, como apresentado na Figura 1. Deseja-se saber qual a equação da parábola que contém este arco .Considere um plano cartesiano com centro no ponto médio da base da abertura do túnel, conforme Figura 2.

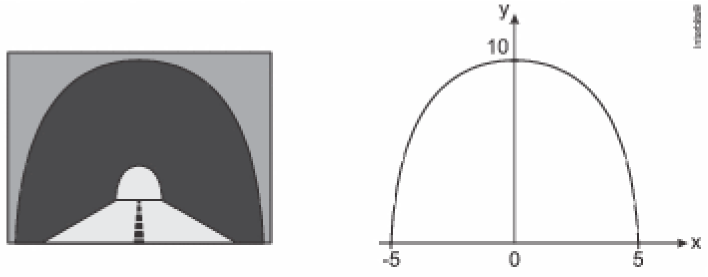


Figura 1 (Túnel) Figura 2

A equação que descreve a parábola é:

a) $y = -\frac{2}{5}x^2 + 10$

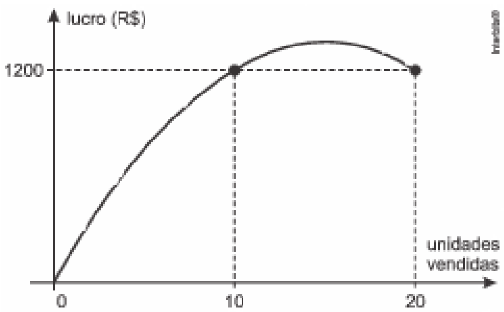
b) $y = \frac{2}{5}x^2 + 10$

c) $y = -x^2 + 10$

d) $y = x^2 - 25$

e) $y = -x^2 + 25$

5. O lucro de uma pequena empresa é dado por uma função quadrática cujo gráfico está representado na figura abaixo:



Podemos concluir que o lucro máximo é de:

a) R$ 1280,00

b) R$ 1400,00

c) R$ 1350,00

d) R$ 1320,00

e) R$ 1410,00

6. Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que f(x) pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a:

a) −12.

b) −6.

c) −10.

d) −5.

e) −9.

7. Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio. Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é:

a) 430m²

b) 440m²

c) 460m²

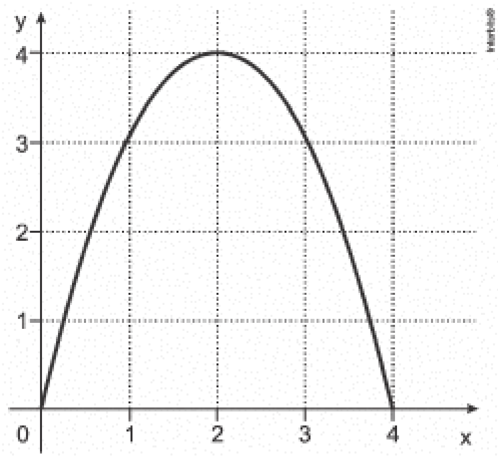
d) 470m²

e) 450 m²

8. Em um famoso jogo eletrônico de arremessar pássaros, a trajetória do lançamento corresponde a parte de uma parábola, como a da figura.

Considere que um jogador fez um lançamento de um pássaro virtual cuja trajetória pode ser descrita pela função $h(x) = -x^2 + 4x$, com x variando entre 0 e 4.

O gráfico mostra essa trajetória. O ponto de lançamento do pássaro coincide com a origem do plano cartesiano.



Analisando o gráfico, é correto afirmar que o pássaro começa a :

a) cair a partir do ponto (2, 4)

b) cair a partir do ponto (4, 2)

c) subir a partir do ponto (2, 4)

d) subir a partir do ponto (4, 2)

e) subir a partir do ponto (3, 3)

9. Sabendo que a parábola da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a,b e c são constantes reais, passa pelos pontos (- 3, - 2), (- 1, 2) e (0 , 7), determine o valor de f(1).

a) 10

b) 14

c) 7

d) -7

e) -14

10. A única fonte de renda de um cabelereiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R$10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.

Para que a renda do cabelereiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de:

a) 10 reais

b) 10,50 reais

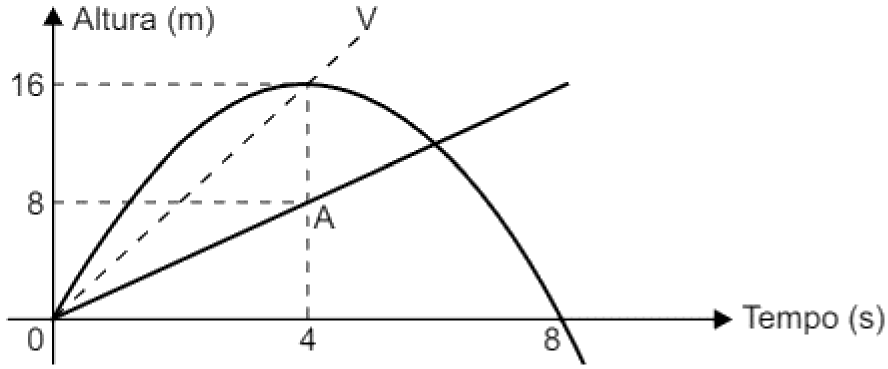
c) 11 reais

d) 15 reais

e) 20 reais

Gabarito

1. C



O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{OA}$ dada é

$$m_{\overleftrightarrow{OA}} = \frac{8-0}{4-0} = 2$$

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{OV}$, que passa no vértice da parábola, é

$$m_{\overleftrightarrow{OV}} = \frac{16-0}{4-0} = 4$$

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta dada deverá aumentar $m_{\overleftrightarrow{OV}} - m_{\overleftrightarrow{OA}} = 4 - 2 = 2$ unidades.

2. D

Desde que a parábola apresenta concavidade para baixo e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, temos $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$.

3. B

Determinando a equação da parábola, utilizando a forma canônica do trinômio do segundo grau.

$f(x) = a \cdot (x-1)^2 + 1$

Utilizando o ponto $(0, 2)$, temos:

$2 = a \cdot (-1)^2 + 1 \Rightarrow a = 2$ e

$f(x) = (x-1)^2 + 1$

Portanto,

$y = 2 - [(x+3-1)^2 + 1] \Rightarrow y = -(x+2)^2 + 1$

Então, $p = -2$ e $q = 1$.

$r = -(0+2)^2 + 1 = -3$

Concluímos que:

$(p-q)/r = \dfrac{-2-1}{-3} = 1.$

4. A

Desde que o gráfico intersecta o eixo x nos pontos de abscissa -5 e $5,$ e sendo $(0,10)$ o vértice da parábola, temos

$$10 = a \cdot (0^2 - 0 \cdot 0 - 25) \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}.$$

Portanto, segue que o resultado é

$$y = -\frac{2}{5} \cdot (x^2 - 0 \cdot x - 25) = -\frac{2}{5}x^2 + 10.$$

5. C

Seja $L = ax^2 + bx + c,$ com L sendo o lucro obtido com a venda de x unidades. É fácil ver que $c = 0.$ Ademais, como a parábola passa pelos pontos $(10,1200)$ e $(20,1200),$ temos

$$\begin{cases} 100a + 10b = 1200 \\ 400a + 20b = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 180 \end{cases}.$$

Portanto, segue que

$$L = -6x^2 + 180x = 1350 - 6(x - 15)^2.$$

O lucro máximo ocorre para $x = 15$ e é igual a R$ 1.350,00.

6. D

Se $f(2) - f(3) = 1,$ então

$$2^2 + b \cdot 2 + c - (3^2 + b \cdot 3 + c) = 1 \Leftrightarrow b = -6.$$

Logo, se $f(1) = -1,$ então

$$-1 = 1^2 + (-6) \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = 4.$$

Portanto, temos

$$f(x) = x^2 - 6x + 4 = -5 + (x - 3)^2.$$

Em consequência, o menor valor que f pode assumir é $-5,$ quando $x = 3.$

7. E

Calculando:

$$y + 2x = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$$

$$S_{retângulo} = x \cdot y = x \cdot (60 - 2x) = 60x - 2x^2$$

$$x_{máx} = \frac{-60}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_{máx} = 15 \Rightarrow y_{máx} = 30$$

$$S_{retângulo} = 15 \cdot 30 = 450\ m^2$$

8. A

Pelo gráfico, o pássaro começa a cair a partir do ponto $(2, 4),$ que é o vértice da parábola.

9. B

Deve-se obter os valores das constantes, logo, deve-se aplicar cada ponto na função.

$$\begin{cases} f(-3) = 9a - 3b + c = -2 \\ f(-1) = a - b + c = 2 \\ f(0) = c = 7 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação nas duas primeiras para resolver o sistema temos:

$$\begin{cases} 9a - 3b + 7 = -2 \\ a - b + 7 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a - 3b = -9 \\ a - b = -5 \quad (\times -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} 9a - 3b = -9 \\ -3a + 3b = 15 \end{cases} + \\ \hline a = 1 \end{array}$$

Logo temos: $a - b = -5 \Rightarrow 1 - b = -5 \Rightarrow b = 6$

Nossa função será $f(x) = x^2 + 6x + 7 \Rightarrow f(1) = 1 + 6 + 7 = 14$

10. D

Seja x o número de reais cobrados a mais pelo cabeleireiro. Tem-se que a renda, r, obtida com os serviços realizados é dada por

$$\begin{aligned} r(x) &= (10 + x)(200 - 10x) \\ &= -10x^2 + 100x + 2.000. \end{aligned}$$

Em consequência, o número de reais cobrados a mais para que a renda seja máxima é $-\frac{100}{2 \cdot (-10)} = 5$ e, portanto, ele deverá cobrar por serviço o valor de $10 + 5 = \text{R\$ } 15{,}00$.