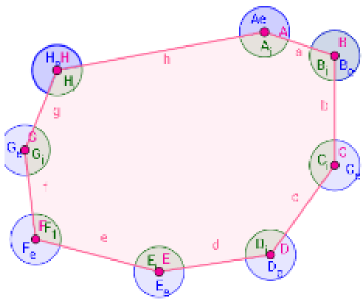
Estudo dos polígonos: Definição, classificação, soma dos ângulos internos e externos, diagonais

Resumo

Classificação:
Chama-se polígono A1A2A3...An a figura formada pela união dos n segmentos consecutivos não colineares.



Vértices do polígono: A, B,C,D,E,F,G,H

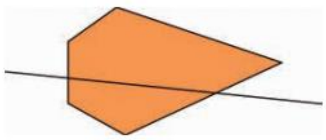
Arestas (lados) do polígono: a,b,c,d,e,f,g,h

Perímetro: 2p=a+b+c+d+e+f+g+h

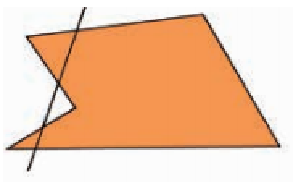
Ângulos internos: A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1,G_1,H_1

Classificação quanto à região:

1. Polígono convexo: uma reta qualquer só corta o polígono em dois pontos.



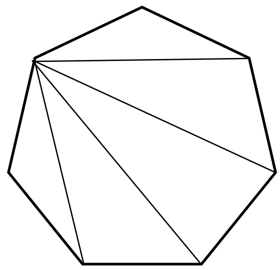
2. Polígono não convexo: uma reta qualquer pode cortar o polígono em mais de dois pontos.



Quanto ao número de lados:

n (lados)	Denominação	n (lados)	Denominação
3	Triângulo	9	eneágono
4	Quadrilátero	10	decágono
5	pentágono	11	undecágono
6	hexágono	12	dodecágono
7	heptágono	15	pentadecágono
8	octógono	20	icoságono

Soma dos ângulos internos de um polígono:



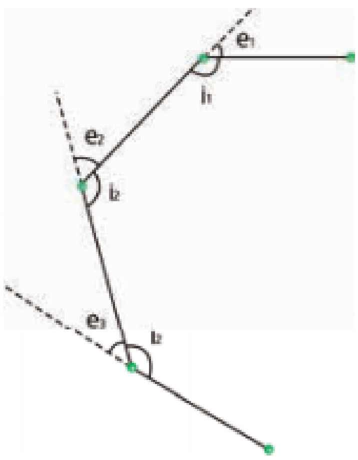
Um polígono de n lados pode ser dividido em n-2 triângulos

$$S_i = (n - 2) \ . \ 180°$$

Se o polígono for regular, todos os ângulos internos são congruentes, portanto, cada ângulo interno ai
Pode ser calculado como:

$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

Soma dos ângulos externos de um polígono:
Sabemos que, num polígono convexo qualquer, a soma do ângulo interno com o externo adjacente é sempre 180°.
Então:



$$+\left\{\begin{array}{l} e_1 + i_1 = 180° \\ e_2 + i_2 = 180° \\ e_3 + i_3 = 180° \\ \quad \vdots \\ e_n + i_n = 180° \end{array}\right.$$

$$\overline{\quad S_i + S_e = 180° \ . \ n \quad}$$

$$S_e = 360°$$

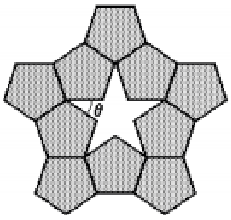
Para polígonos regulares, $a_e = \frac{360°}{n}$

N° de diagonais de um polígono:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Exercícios

1. Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura.



Nestas condições, o ângulo θ mede:

a) 108°.

b) 72°.

c) 54°.

d) 36°.

e) 18°.

2. Um robô, caminhando em linha reta, parte de um ponto A em direção a um ponto B, que distam entre si cinco metros. Ao chegar ao ponto B, gira novamente 60° à esquerda e caminha mais cinco metros, repetindo o movimento e o giro até retornar ao ponto de origem. O percurso do robô formará um polígono regular de

a) 10 lados.

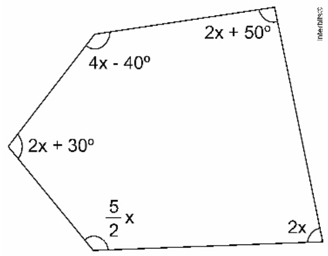
b) 9 lados.

c) 8 lados.

d) 7 lados.

e) 6 lados.

3. O valor de x no pentágono abaixo é igual a:



a) 25º.

b) 40º.

c) 250º.

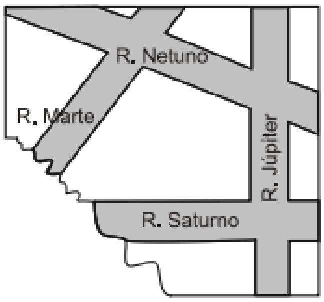
d) 540º.

e) 1.000º.

4. De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais.
Então a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

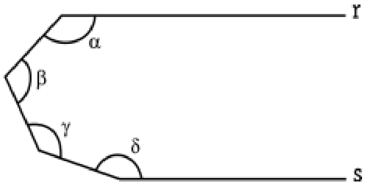
a) 63.
b) 65.
c) 66.
d) 70.
e) 77.

5. Uma pessoa pegou um mapa rasgado em que constava um terreno delimitado por quatro ruas.
Na parte visível do mapa, vê-se que o angulo formado pela rua Saturno e pela rua Júpiter e 90°; o ângulo formado pela rua Júpiter e pela rua Netuno e 110° e o ângulo formado pela rua Netuno e pela rua Marte e 100°. Nessas condições, a medida de um ângulo formado pelas ruas Marte e Saturno, na parte rasgada do mapa, é de:



a) 50°.
b) 60°.
c) 70°.
d) 80°.
e) 90°.

6. Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas.A soma α + β + γ + δ das medidas dos ângulos indicados na figura é:



a) 180°.

b) 270°.

c) 360°.

d) 480°.

e) 540°.

7. A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é:

a) 60°

b) 45°

c) 36°

d) 83°

e) 51°

8. A sequência a seguir representa o número de diagonais d de um polígono regular de n lados:

n	3	4	5	6	7	...	13
d	0	2	5	9	$\frac{1}{4}$		x

O valor de x é:

a) 44.

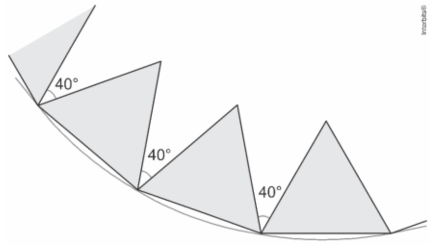
b) 60.

c) 65.

d) 77.

e) 91.

9. Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura abaixo.



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de $40°$, como indicado na figura.

Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

a) 10.

b) 12.

c) 14.

d) 16.

e) 18.

10. Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

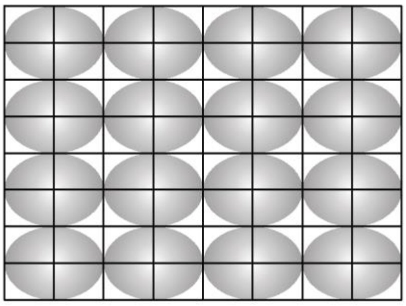


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

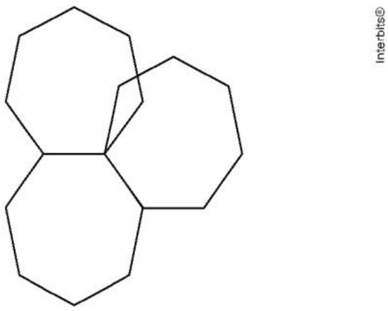
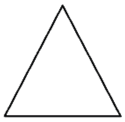
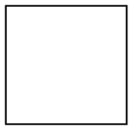
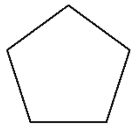
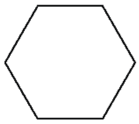
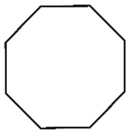
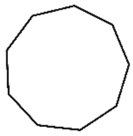


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono
Figura			
Ângulo interno	60°	90°	108°

Nome	Hexágono	Octágono	Eneágono
Figura			
Ângulo interno	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo.

b) quadrado.

c) pentágono.

d) hexágono.

e) eneágono.

Gabarito

1. **D**
   Veja que a soma dos 3 ângulos internos dos pentágonos com o ângulo θ é igual a 360º (uma volta completa).
   Logo, temos que descobrir a medida dos ângulos internos de um pentágono regular.
   Sabemos que a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono regular é:

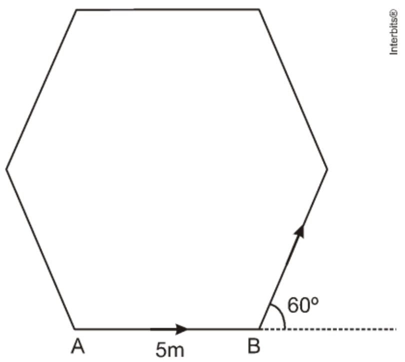
   $$\boxed{S_i = (n-2) * 180^o}$$

   Onde 'n' é a quantidade de lados do polígono.
   O pentágono tem 5 lados, então:
   $S_i = (5-2) * 180^o$
   $S_i = 3 * 180^o$
   $S_i = 540^o$

   Veja que a soma de 5 ângulos internos congruentes é igual a 540º, logo a medida de um ângulo interno desse pentágono será 540º divididos por 5:
   $a_i = 540^o/5$
   $a_i = 108^o$

   Agora, só fazer a soma de 3 ângulos com medida 108º mais o ângulo θ e igualar essa soma a 360º.
   $108^o + 108^o + 108^o + \theta = 360^o$
   $324^o + \theta = 360^o$
   $\theta = 360^o - 324^o$
   $\theta = 36^o$

2. **E**



   O trajeto do robô será um polígono regular de lado 5m e ângulo externo 60°. Como 360° : 6 = 60°, concluímos que o polígono pedido possui 6 lados.

3. **B**
A soma dos ângulos internos de um polígono convexo pode ser calculada através da fórmula a seguir, onde n é o número de lados do polígono. Ou seja:
$S_i = 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot (5 - 2) = 180° \cdot 3 \to S_i = 540°$

Assim, sabendo que a soma dos ângulos internos é $540°$, pode-se escrever:
$$540 = 2x + 30 + \frac{5}{2}x + 2x + 2x + 50 + 4x - 40$$
$$540 = 10x + \frac{5}{2}x + 40 \to 1000 = 25x \to x = 40°$$

4. **B**
O que tem n lados tem $d = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonais. O que tem n+6 lados tem $d = \frac{n(n-3)}{2} + 39$ diagonais pelo enunciado e $d = \frac{(n+6)(n+6-3)}{2}$ pela fórmula.
Então, $d = \frac{(n+6)(n+6-3)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + 39$.

$$n(n-3)+78=(n+6)(n+3)$$

$$n^2-3n+78=n^2+9n+18$$

$$78-18=9n+3n$$

$$60=12n$$

Por fim, n = 5, pentágono que tem 5 diagonais. O outro polígono tem 6 lados e 39 diagonais a mais, logo, a soma geral é
5 + 5 + 6 + 5 + 5 + 39 = 65.

5. **B**
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é 360 graus. Assim:
90 + 110 + 100 + x = 360.
x = 60 graus.

6. **E**

   Trace um reta perpendicular à r e s.

   Temos um hexágono, determinemos então a soma de seus ângulos internos:

   Sn = 180º(n - 2)

   S6 = 180º(6 - 2)

   S6 = 720º

   Portanto,

   α+β+γ+δ + 90º + 90º = 720º

   α+β+γ+δ = 540º

7. **E**

   Usaremos a fórmula do ângulo interno de um polígono regular:

   $$a_i = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = \frac{(7-2).180}{7} = \frac{5.180}{7} \cong 128,5$$

   Por fim, temos que o ângulo externo é o suplemento:

   180 - 128.5 = 51.5

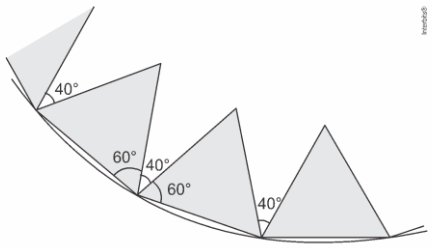
8. **C**

   Usaremos a fórmula das diagonais de polígonos:

   $$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

   $$d = \frac{13(13-3)}{2} = 65$$

9. **E**

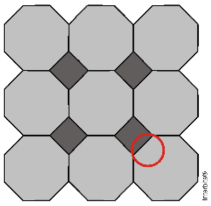
   A medida de cada um dos ângulos internos do polígono será $60^\circ + 60^\circ + 40^\circ = 160^\circ.$

   Portanto, cada um de seus ângulos externos será de $20^\circ.$ Admitindo que n é o número de lados do polígono regular, podemos escrever:

   $$\frac{360^\circ}{n} = 20^\circ \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{20^\circ} \Rightarrow n = 18$$

   Logo, o número de triângulos será igual ao número de lados, ou seja $18.$

10. **B**



Cada ângulo interno do octógono regular mede 135° e cada ângulo interno do quadrado mede 90°. Somando 135° + 135° + 90° = 360°. Portanto, o polígono pedido é o quadrado.