Determinantes: propriedades

Resumo

Propriedades dos determinantes

Matriz transposta:

Det A^t = det A

Casos em que o determinante é nulo:

- Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

- Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

- Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} a & b & 2a + 3b \\ c & d & 2c + 3d \\ e & f & 2e + 3f \end{vmatrix} = 0$$

Troca de fileiras:

Ao trocarmos duas fileiras de uma matriz quadrada, seu determinante fica multiplicado por -1.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = K \qquad \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -K$$

Multiplicação de uma fila por uma constante:

Multiplicando toda uma fileira por uma constante real, o determinante dessa matriz fica multiplicado pela mesma constante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = K \qquad \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha K$$

Já se multiplicarmos todos os elementos da matriz por uma constante real α, temos que:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$$

em que n é a ordem da matriz.

- $\det(A.B) = \det A \cdot \det B$
- $\det(A^n) = (\det A)^n$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Ou seja, o determinante da matriz inversa é o inverso do determinante da matriz.

Sendo assim, fica fácil reparar que, se uma determinada matriz tiver determinante valendo 0, então ela não é inversível.

Exercícios

1. Sejam A, B e C matrizes reais 3x3, tais que A.B = C^{-1}, B = 2A e det C = 8. Então, |det A| vale:

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{8}$

c) 1

d) 8

e) 16

2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

É correto afirmar que o determinante da matriz A.B é

a) 32

b) 44

c) 51

d) 63

3. Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 com det(A) = 3 e se k é um número real tal que det(kA) = 192, então o valor de k é:

a) 4

b) 8

c) 32

d) 64

e) 96

4. Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} \cos\theta & 2 & \operatorname{sen}\theta \\ 3 & 1 & 3 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$. Sabendo-se que $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$, em que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, o determinante da matriz inversa de A, indicado por Det A^{-1}, vale:

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) -5.

5. M é uma matriz quadrada de ordem 3, e seu determinante é det M = 2.
O valor da expressão det M + det (2M) + det (3M) é:

a) 12
b) 15
c) 36
d) 54
e) 72

6. Sejam A e B matrizes 3 × 3 tais que detA = 3 e detB = 4. Então det(A.2B) é igual a:
a) 32.
b) 48.
c) 64.
d) 80.
e) 96.

7. Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 com determinante maior que zero e A^{-1} a sua inversa. Se $16.\text{Det } A^{-1} = \text{Det } (2A)$, então o determinante de A vale:
a) 4.
b) 6.
c) 8.
d) 2.
e) 16.

8. A Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 6, qual o valor de x na equação $\det(2A.A^{-1}) = 4x$?
a) 72
b) 18
c) 12
d) 2
e) $\frac{1}{2}$

9. A é uma matriz quadrada de ordem 2 e det(A) = 7. Nessas condições, det(3A) e det(A^{-1}) valem, respectivamente:

a) 7 e –7.

b) 21 e 1/7.

c) 21 e –7.

d) 63 e –7.

e) 63 e 1/7.

10. Considere a matriz quadrada de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\text{sen}x \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$, onde x é um número real.

Podemos afirmar que:

a) A não é invertível para nenhum valor de x.

b) A é invertível para um único valor de x.

c) A é invertível para exatamente dois valores de x.

d) A é invertível para todos os valores de x.

Gabarito

1. **B**

Se B = 2A, então Det B = Det 2A.

Como A é de ordem 3, então $\text{Det } 2A = 2^3 \text{Det A} = 8\text{Det A}$, logo B=8Det A

Se Det C = 8, então $\text{Det } C^{-1} = \frac{1}{8}$.

Se A.B= C^{-1}, então

$$\text{Det}(A.B) = \text{Det } C^{-1}$$
$$\text{Det A.Det B} = \text{Det } C^{-1}$$
$$\text{Det A.8Det A} = \frac{1}{8}$$
$$\text{Det}^2 A = \frac{1}{64}$$
$$\text{Det A} = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} = \pm\frac{1}{8}$$

Como se deseja |det A|= $\frac{1}{8}$.

2. **B**

$$\text{Det}(A.B) = \text{Det A.Det B}$$

Det A= 11, Det B = 4

Det (A.B)=11.4=44

3. **A**

$$\text{Det}(k.A) = k^3.\text{DetA} = k^3.3 = 192$$
$$k^3 = 64$$
$$k = 4$$

4. **C**

Calculando o determinante pela Regra de Sarrus:

$$\text{DetA} = \cos^2\theta - 6\text{sen}\theta + 0 + \text{sen}^2\theta - 6\cos\theta$$
$$\text{sen}\theta = -\cos\theta$$
$$\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$$
$$1 + 6\text{sen}\theta - 6\text{sen}\theta = 1$$
$$\text{DetA}^{-1} = \frac{1}{\text{DetA}} = 1$$

5. **E**
$\text{Det } M = 2$
$\text{Det } 2M = 2^3.2 = 16$
$\text{Det } 3M = 3^3.2 = 54$
$54 + 16 + 2 = 72$

6. **E**
$\text{Det}(A.2B) = \text{Det } A.\text{Det } 2B$
$3.2^3.4 = 96$

7. **D**
Sabendo que $\text{Det } A^{-1} = \dfrac{1}{\text{Det } A}$
$16.\text{Det } A^{-1} = \text{Det } (2A)$
$16.\dfrac{1}{\text{Det } A} = 2^2.\text{Det } A$
$\text{Det}^2 A = 4$
$\text{Det } A = 2$

8. **D**
$\det(2A.A^{-1}) = 4x$
$\det\ 2A.\ \det A^{-1} = 4x$
$2^3.6.\dfrac{1}{6} = 4x$
$8 = 4x$
$x = 2$

9. **E**
$\text{Det} A = 7$
$\text{Det } 3A = 3^2.7 = 63$
$\text{Det } A^{-1} = \dfrac{1}{\text{Det } A} = \dfrac{1}{7}$

10. **D**
Calculando o determinante pela regra de Sarrus
$$\begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\text{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix} \begin{matrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \\ \text{sen} x & 0 \end{matrix}$$
$\cos^2 x + 0 + 0 + \text{sen}^2 x + 0 + 0 = 1$

Como $\det A \neq 0$, para todos os valores de x, logo é invertível para todos os valores de x.