Discussão de sistemas lineares

Resumo

A partir do escalonamento, é possível classificar os sistemas. Para isso, basta observar a última linha, pois dado um sistema com n linhas ele deverá possuir n incógnitas. No exemplo acima, temos 3 linhas e 3 incógnitas. É possível que a na última linha haja:

- Uma equação com uma incógnita (z=-5; w=-8...): o sistema será possível e determinado.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ \quad 2y - 3z = -1 \\ \qquad z = -5 \end{cases}$$

Dado que z=-5, substituindo na segunda equação:

$$\begin{aligned} &2y - 3(-5) = -1 \Leftrightarrow 2y + 15 = -1 \\ &\Leftrightarrow 2y = -16 \Leftrightarrow y = -8 \end{aligned}$$

Com o valor de z e y é possível descobrir o valor de x

$$\begin{aligned} &3x - (-8) - 5 = 2 \Leftrightarrow 3x + 8 - 5 = 2 \\ &\Leftrightarrow 3x + 3 = 2 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Logo o conjunto solução: $\left(-\frac{1}{3}, -8, -5\right)$.

Usando a matriz aumentada do sistema e operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

- Uma igualdade que seja verdadeira (0=0; 8=8...): O sistema será possível e indeterminado

$$\begin{cases} x + y + 2z + w = 4 \\ -y + 3z + w = 3 \\ -z - w = 1 \\ 0w = 0 \end{cases}$$

O sistema já está escalonado e a ultima linha nos dá 0=0. A incógnita que não aparece no começo das equações é chamada incógnita livre, nesse caso w. Para obtermos a solução geral, atribuiremos um valor genérico, também chamado de parâmetro, simbolizado por uma letra. Nesse caso, w=k, com $k \in \mathbb{R}$. Agora colocaremos a solução do sistema em função de k.

Substituindo na terceira equação: $-z - k = 1 \to -z = 1 + k \to z = -1 - k$

Substituindo na segunda equação: $\begin{array}{l} -y + 3(-1-k) + k = 3 \to -y - 3 - 3k + k = 3 \\ \to -y = 3 + 3 + 2k \to -y = 6 + 2k \to y = -6 - 2k \end{array}$

Substituindo na primeira equação: $\begin{array}{l} x - 6 - 2k + 2(-1-k) + k = 4 \to x - 6 - 2k - 2 - 2k + k = 4 \\ \to x - 8 - 3k = 4 \to x = 12 + 3k \end{array}$

Note que achamos uma solução geral para o sistema em função do parâmetro atribuído à variável livre.

O conjunto solução será {(12+3k,-6-2k,-1-k,k), $k \in \mathbb{R}$ }

Usando a matriz aumentada do sistema e operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observação: $k \in \mathbb{R}$ significa que qualquer valor real atribuído ao k irá gerar uma solução. Por exemplo: Se k=0 temos como solução (12,-6,-1,0), isto é, onde tem k substituímos por 0.

Usando a matriz aumentada do sistema e operações elementares:

- Um igualdade falsa (0=9,2=7): O sistema será impossível:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ y + z = 2 \\ 0z = 9 \end{cases}$$

Pela última equação temos: 0=9 o que torna o sistema impossível.

Através de escalonamento conseguimos descobrir informações como qual valor tornaria o sistema possível (determinado ou indeterminado) ou impossível

Exemplo:

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Usando a matriz aumentada do sistema e aplicando operações elementares:

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} L2 = L2 - L1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1-a & 1 \end{bmatrix}$$

Olhando para a ultima linha:

Se a=0:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Temos um SPD}$$

Se a=-1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Temos um SI}$$

O determinante da matriz dos coeficientes também é importante para a discussão dos sistemas lineares. Caso ele seja diferente de 0 indica que o sistema é possível e determinado. Caso ele seja 0, ele pode ser possível e determinado ou impossível.

Exercícios

1. Se o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ x + 2y + 7z = 3 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$$

É impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a=6$ e $b\neq 4$.

b) $a\neq 6$ e $b\neq 4$.

c) $a\neq 6$ e $b=4$.

d) $a=6$ e $b=4$.

e) a é arbitrário e $b \neq 4$.

2. No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$, nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar:

a) No caso em que $a = 1$, o sistema tem solução se, e somente se, $m = 2$.

b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

c) No caso em que $m = 2$, o sistema tem solução se, e somente se, $a = 1$.

d) O sistema só tem solução se $a = m = 1$.

e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

3. Sejam o número real k e o sistema linear

$$\begin{cases} (/ \ - \ \mathrm{i}\ )\mathrm{v} \ - \ 0\mathrm{x} \ = \ 0 \\ ky = 4 \\ 0\mathrm{v} \ + \ (\mathrm{i} \ - \ 2)\mathrm{x} \ = \ / \end{cases}$$

, nas incógnitas x, y e z.

Uma condição necessária e suficiente sobre k para que o sistema seja possível e determinado é:

a) k = 1 ou k = 3.

b) k = 0 ou k = 5.

c) k ≠ 2 e k ≠ 6.

d) k ≠ 1 e k ≠ 3.

e) k ≠ 0 e k ≠ 5.

4. Sendo n um número real, então o sistema de equações

$$\begin{cases} \mathrm{l}\ v + w = / \\ \mathrm{l}\ w + x = / \\ v + \mathrm{l}\ x = / \end{cases}$$

não possui solução se, e somente se, n é igual a

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

5. O sistema $\begin{cases} ax + 4y = a^2 \\ x + ay = -2 \end{cases}$, em x e y, é possível e indeterminado se, e somente se:

a) $a \neq -2$

b) $a \neq 2$

c) $a = \pm 2$

d) $a = -2$

e) $a = 2$

6. O sistema linear abaixo, nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 3y = m \\ 2x - py = 2 \end{cases}$$

Será impossível quando:

a) Nunca

b) $p \neq -6$ e $m = 1$

c) $p \neq -6$ e $m \neq 1$

d) $p = -6$ e $m = 1$

e) $p = -6$ e $m \neq 1$

7. Para que o sistema linear $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+5y-3z=b \end{cases}$, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de $a+b$ é igual a

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

e) 14

8. No sistema linear $\begin{cases} ax-y=1 \\ y+z=1 \\ x+z=m \end{cases}$, nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar:

a) No caso em que $a=1$, o sistema tem solução se, e somente se, $m=2$.

b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

c) No caso em que $m=2$, o sistema tem solução se, e somente se, $a=1$.

d) O sistema só tem solução se $a=m=1$.

e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

$c = 1 \; e \; a \neq \frac{7b}{3}$.

9. Relativas ao sistema $\begin{cases} kx+4ky=0 \\ 3x+ky=8 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$, considere as afirmações I, II e III abaixo.

I. Apresenta solução única para, exatamente, dois valores distintos de k.

II. Apresenta mais de 1 solução para um único valor de k.

III. É impossível para um único valor de k.

Dessa forma,

a) somente I está correta.

b) somente II e III estão corretas.

c) somente I e III estão corretas.

d) somente III está correta.

e) I, II e III estão corretas.

10. O sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} v - 0w = 5 \\ 0v + k\,w = 0 \\ 1v - w = 4 \end{cases}$$

a) é determinado qualquer que seja m.

b) é indeterminado para m = $\frac{2}{3}$.

c) é impossível para m ≠ $\frac{2}{3}$.

d) é determinado para m ≠ $\frac{2}{3}$.

e) é impossível qualquer que seja m.

Gabarito

1. A

Usando a matriz aumentada do sistema e aplicando as operações elementares temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & a-12 & b-6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a-6 & b-4 \end{bmatrix}$$

Como queremos o sistema impossível:

$$a-6=0 \Leftrightarrow a=6$$

$$b-4 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 4$$

2. A

Usando a matriz aumentada do sistema e efetuando as operações elementares temos:

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & 1 & m-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 & m-2 \end{bmatrix}$$

O sistema só tem solução única se $1-a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$. Caso a=1 , o sistema só terá solução se:

$$m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

3. E

O sistema é possível e determinado se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & k-4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2(k-5) \neq 0 \Rightarrow k \neq 0 \ e \ k \neq 3,$$

4. A

$$\text{Det}\begin{bmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 1 & 0 & n \end{bmatrix} = n^3 + 1$$

Supondo que seja SPD:

$$n^3 + 1 \neq 0$$

$$n^3 \neq -1 \Leftrightarrow n \neq -1$$

Caso n=-1

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema é impossível.

5. D

$$\det\begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & a \end{bmatrix} \neq 0$$

$$a^2 - 4 \neq 0$$

$$a^2 \neq 4$$

$a = 2$ ou a=-2

Se a=2,

Substituindo na matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$. Temos um SI

Se a=-2

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$. Temos um SPI

6. E

Se D = 0 Û SPI ou SI

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -p - 6 = 0 \Leftrightarrow p = -6$$

Fazendo p = -6, temos na matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & m \\ 0 & 0 & 2-2m \end{bmatrix}$$

$$2 - 2m \neq 0$$

$$m \neq 1$$

7. B

Para que o sistema seja possível e determinado é necessário que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -6 + 5a + 2 - 4a - 5 + 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 6$$

Usando a=6 na matriz aumentada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & b \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{bmatrix}$$

$$b - 5 = 0$$

$$b = 5$$

a+b= 5+6=11

8. A

O determinante da matriz dos coeficientes é igual a

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 1.$$

Para ser SI ou SPI:

a-1=0, logo a=1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & m-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{bmatrix}$$

Para não ter solução:

$$m - 2 \neq 0$$

$$m \neq 2$$

9. B

$\begin{vmatrix} k & 4k \\ 3 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow k^2 - 12k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ c i ≠ / 0 **(o sistema possui solução única)**

Se k = 0 temos $\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 3x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$ c wnmbc qcpos_joscppc_j*jmemmqqgrck _ nmqqsgg dg g_q qmjsg⁵ cq,

Se k = 12 temos $\begin{cases} 12x + 48y = 0(:4) \\ 3x + 12y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 12y = 0 \\ 3x + 12y = 8 \end{cases}$ (qqgrck _ gk nmqq1 cj)

- **I.** Falsa. Possui solução única para infinitos valores de k.
- **II.** Verdadeira, se k = 0 o sistema apresenta infinitas soluções.
- **III.** Verdadeira, é impossível se k = 12

10. C

Usando a primeira e a terceira equação:

$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \rightarrow x = 1; y = -3$, logo o sistema é possível e determinado

Substituindo na segunda equação:

$$2x - my = 0 \Leftrightarrow 2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Logo para o sistema ser impossível: $m \neq \frac{2}{3}$