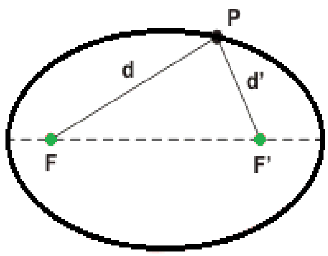
Cônicas: Elipse

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Resumo

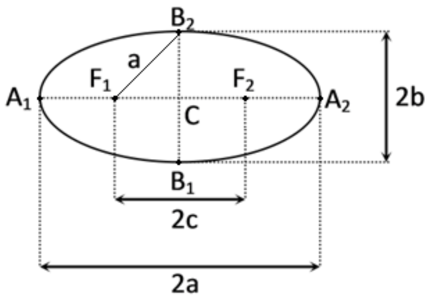
Elipse

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.



d + d' = constante = 2a

Elementos de uma elipse



Focos: são os pontos F_1 e F_2.
Distância focal: é a distância 2c entre os focos.
Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.
Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento 2a.
Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento 2b e perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.

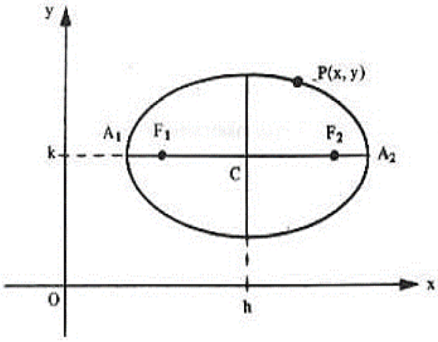
Pela figura, vemos que $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2$**.** Esta igualdade mostra que b < a e c < a.

Excentricidade: é o número real $e = \frac{c}{a}$ (0 < e < 1)

Obs..: A excentricidade é responsável pela “forma” da elipse: elipses com excentricidade perto de 0 são aproximadamente circulares, enquanto que elipses com excentricidade próxima de 1 são “achatadas”.

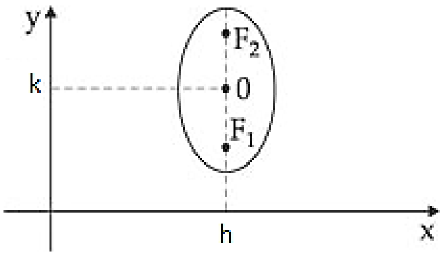
Equação Reduzida

Eixo maior é paralelo ao eixo x:



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

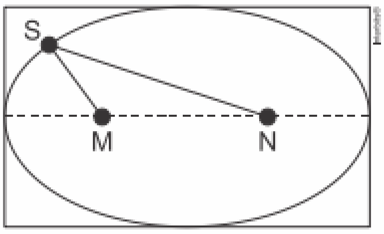
Eixo maior é paralelo ao eixo y:



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Exercícios

1. Bira adquiriu uma cabra que pasta em um campo retangular. Para delimitar o gramado, ele pretende traçar uma elipse inscrita num terreno retangular de 10 m por 8 m. Para isso, ele deve utilizar um fio esticado preso por duas estacas M e N, conforme mostra a figura.



Qual deve ser a distância entre as estacas M e N?

a) 5

b) 4

c) 8

d) 6

e) 9

2. Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.

a) Seu centro é (– 2,1).

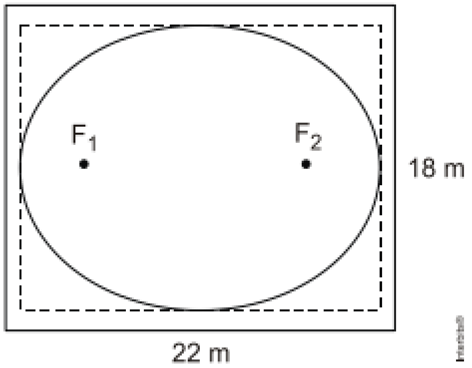
b) A medida do seu eixo maior é 25.

c) A medida do seu eixo menor é 9.

d) A distância focal é 4.

e) Sua excentricidade é 0,8.

3. Um arquiteto projetou, para um salão de dimensões 22 m por 18 m, um teto de gesso em formato de elipse com o eixo maior medindo 20 m e o eixo menor, 16 m, conforme ilustra a figura abaixo.



O aplicador do gesso afirmou que saberia desenhar a elipse, desde que o arquiteto informasse as posições dos focos. Para orientar o aplicador do gesso, o arquiteto informou que, na direção do eixo maior, a distância entre cada foco e a parede mais próxima é de

a) 3 m.

b) 4 m.

c) 5 m.

d) 6 m.

4. Sendo m o maior valor real que x pode assumir na equação analítica $(x-2)^2+4(y+5)^2=36$ e n o maior valor real que y pode assumir nessa mesma equação, então, m+n é igual a

a) 8.

b) 7.

c) 6.

d) 4.

e) 3.

5. No plano, com sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação $x^2+4y^2=4x$ representa:

a) Uma circunferência.

b) Duas retas.

c) Uma parábola.

d) Uma elipse.

6. Os valores reais de n para os quais a reta $(t)y = x + n$ seja tangente à elipse de equação $2x^2 + 3y^2 = 6$ são iguais a:

a) $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

b) $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

c) – 3 e 3.

d) – 2 e 2.

e) – 5 e 5.

7. Com relação as equações $25x^2 + 16y^2 + 150x + 256y - 351 = 0$ e $16x^2 + 25y^2 - 96x - 200y + 144 = 0$, podemos afirmar que:

a) As elipses têm centros coincidentes.

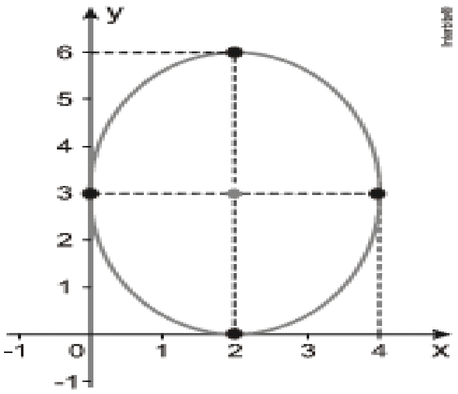
b) As elipses têm a mesma distância focal.

c) As elipses têm a mesma excentricidade.

d) As elipses têm focos sobre o eixo das abcissas.

e) O eivo maior de uma delas é o dobro do eixo menor da outra.

8. Uma figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.



Valendo-se das informações contidas neta representação, qual é a equação reduzida da elipse?

a) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

c) $\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$

d) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{3} = 1$

e) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

9. No plano, com sistema de coordenadas cartesiano usual, a área do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos de interseção das elipses representadas pelas equações $x^2 + 2y^2 = 2$ e $2x^2 + y^2 = 2$ é:

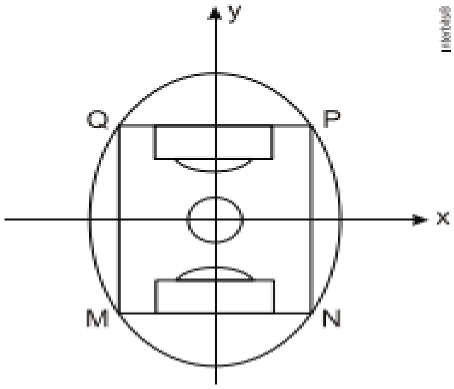
a) 9/2

b) 8/3

c) 7/3

d) 5/3

10. Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo MNPQ, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2}+\frac{y^2}{60^2}=1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo MNPQ.



Assim, a distância entre as retas MN e PQ é:

a) 48 m

b) 68 m

c) 84 m

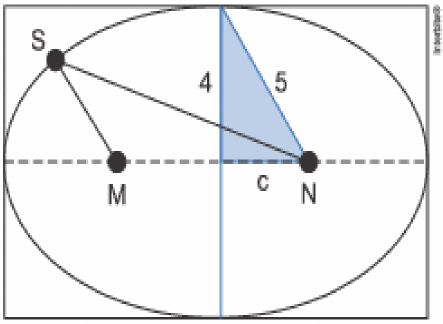
d) 92 m

e) 96 m

Gabarito

1. D

A figura descrita pela cabra é uma elipse com semieixo maior medindo 5 m e semieixo menor medindo 4m.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo assinalado, temos:

$c^2 + 4^2 = 5^2$

$c = 3$

MN = 2.c

MN = 6m.

2. E

$9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$

$9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 2y + 1) = 164 + 36 + 25$

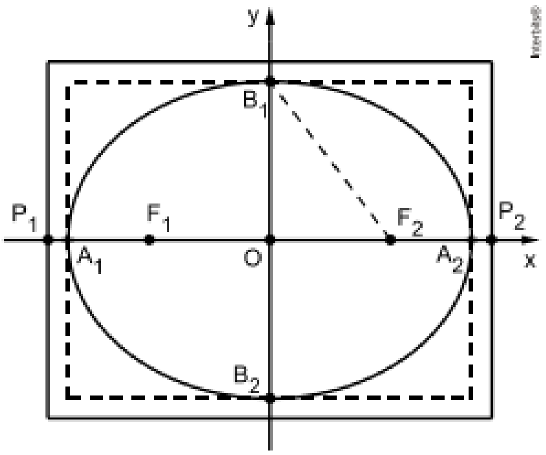
$9(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 225$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Equação de uma elipse com centro no ponto (2, - 1), eixo maior igual a 10, eixo menor igual a 6, distância focal igual a 8 e excentricidade igual a 4/5 = 0,8.

3. C

Adotando convenientemente um sistema de coordenadas cartesianas, com origem no ponto médio do segmento F_1F_2, considere a figura.



Temos $A_1 = (-10, 0)$, $A_2 = (10, 0)$, $B_1 = (0,8)$, $B_2 = (0, -8)$, $F_1 = (0, c)$, com $c > 0$. Logo, da relação fundamental da elipse, vem:

$$\overline{B_1F_2}^2 = \overline{OF_2}^2 + \overline{OB_1}^2 \Leftrightarrow 10^2 = c^2 + 8^2$$
$$\Rightarrow c = 6.$$

Portanto, a distância pedida é dada por

$$\overline{OP_2} - \overline{OF_2} = 11 - 6 = 5\text{ m}.$$

4. C

Reescrevendo a equação $(x-2)^2 + 4(y+5)^2 = 36$, obtemos

$$\frac{(x-2)^2}{6^2} + \frac{(y+5)^2}{3^2} = 1,$$

Que é a equação de uma elipse centrada em (2, -5), com o semieixo maior paralelo ao eixo das abscissas. Logo, como a = 6 e b = 3, temos m = 2+6 = 8 e n = -5 +3 = - 2. Portanto, m + n = 8 + (-2) = 6.

5. D

Completando os quadrados, obtemos:

$$x^2 + 4y^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 4y^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-0)^2}{1^2} = 1.$$

Trata-se de uma elipse com centro em (2, 0) e eixo maior paralelo ao eixo x.

6. A

Resolvendo, inicialmente, um sistema com as equações da reta e da elipse:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 6 \\ y = x + n \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$2x^2 + 3 \cdot (x+n)^2 = 6$$

$$5x^2 + 6nx + 3n^2 - 6 = 0$$

Para a equação tenha duas raízes reais e iguais, ou seja a reta deve ser tangente a elipse, deveremos ter o valor do discriminante (delta) igual a zero.

$$(6n)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \left(3n^2 - 6\right) = 0$$

$$-24n^2 + 120 = 0$$

$$24n^2 = 120$$

$$n^2 = 5$$

$$n = \pm\sqrt{5}$$

7. C

Completando os quadrados, vem

$$25x^2 + 16y^2 + 150x + 256y - 351 = 0 \Leftrightarrow 25(x+3)^2 + 16(y+8)^2 = 1.600$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$$

e

$$16x^2 + 25y^2 - 96x - 200y + 144 = 0 \Leftrightarrow 16(x+3)^2 + 25(y-4)^2 = 400$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1.$$

[A] Falsa. Os centros das elipses são os pontos $(-3, -8)$ e $(-3, 4)$.

[B] Falsa. Com relação à elipse $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$, temos $a = 10$ e $b = 8$. Logo, pela relação fundamental, segue que $c = 6$ e, portanto, $2c = 12$.

Por outro lado, na elipse $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$, temos $a' = 5$ e $b' = 4$. Assim, vem $c' = 3$ e, portanto, $2c' = 6$.

[C] Verdadeira. Com efeito, pois $e = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = e'$.

[D] Falsa. Basta observar que o eixo maior da elipse $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$ é paralelo ao eixo das ordenadas.

[E] Falsa. O eixo maior da elipse $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$ mede $2a = 20$, enquanto que o eixo menor da elipse $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ mede $2b' = 8$.

8. B

Centro da elipse: C(2,3)

Semieixo paralelo ao eixo x: a = 2
Semieixo paralelo ao eixo y: b = 3
Logo, a equação da elipse será dada por:

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

9. B

Desde que $y^2 = 2-2x^2$, temos

$$\begin{aligned} x^2+2y^2=2 &\Leftrightarrow x^2+2(2-2x^2)=2 \\ &\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

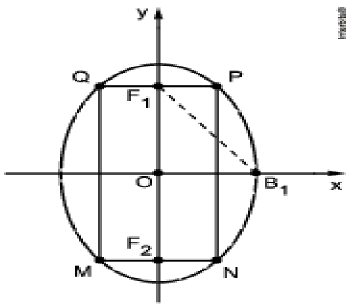
Logo, vem

$$\begin{aligned} y^2=2-2\cdot\frac{2}{3} &\Leftrightarrow y^2=\frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Portanto, como o quadrilátero de vértices $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ é um quadrado de lado $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, segue que a resposta é $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{8}{3}$ u.a.

10. E

Considere a figura.



Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse.
Queremos calcular $\overline{F_1F_2}=2\cdot\overline{OF_1}$.
Sabendo que $\overline{F_1B_1}^2=60^2$ e $\overline{OB_1}^2=36^2$, da relação fundamental, vem

$$\begin{aligned} \overline{F_1B_1}^2=\overline{OB_1}^2+\overline{OF_1}^2 &\Leftrightarrow \overline{OF_1}^2=60^2-36^2 \\ &\Rightarrow \overline{OF_1}=\sqrt{2304} \\ &\Leftrightarrow \overline{OF_1}=48\text{ m}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\cdot\overline{OF_1}=2\cdot 48=96\text{ m}.$$