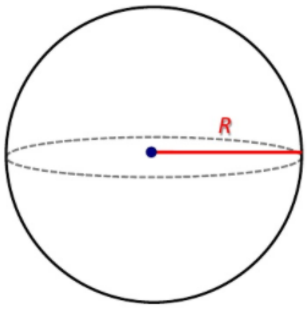
Esfera

Resumo

Esfera

Esfera é um sólido limitado por uma *superfície esférica* fechada e que tem todos os seus pontos à mesma distância de um ponto em seu interior.



Área da superfície esférica:

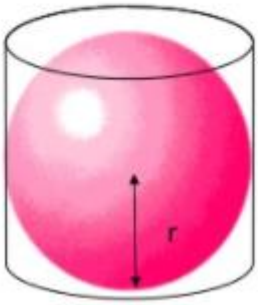
Seja uma esfera de centro O e raio R. A área da superfície esférica é dada pela fórmula:

$$S_{esf} = 4\pi R^2$$

Volume de uma esfera:

Como Arquimedes deduziu a fórmula da esfera?

Arquimedes pegou um cilindro de raio r e encheu-o de líquido. Colocou um recipiente por baixo do cilindro e, em seguida colocou dentro do cilindro uma esfera de raio r. Ao fazê-lo o líquido que estava dentro do cilindro transbordou para o recipiente. Deitou fora o líquido que sobrou (dentro do cilindro) e colocou o líquido do recipiente novamente dentro do cilindro verificou assim que o líquido da esfera ocupava 2/3 do cilindro:



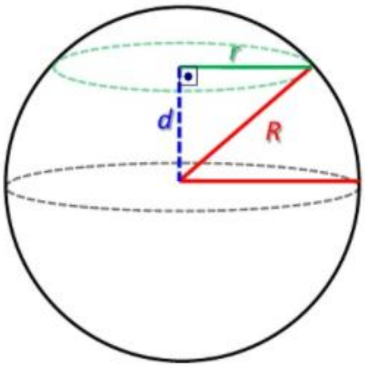
$$V_{esfera} = \frac{2}{3}V_{cilindro} = \frac{2}{3} \times A_b \times h = \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Logo:

$$V_{esf} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Secção em uma esfera:

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Sendo R o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e r o raio da seção, observe:

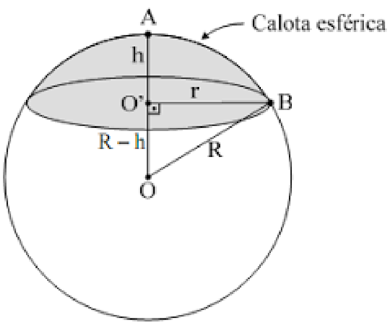


Assim, pelo triângulo pitagórico, temos que:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

Calota esférica

Se cortarmos a esfera por um plano que não contém seu centro, as superfícies formadas se chamarão de calotas esféricas.

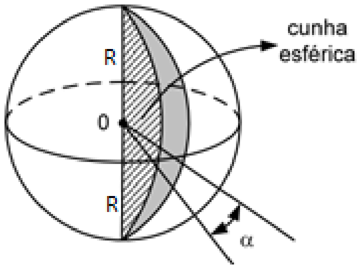


A área da calota esférica é dada pela fórmula $S_{calota} = 2\pi r \cdot h$

O volume da calota esférica é dado pela fórmula $V_{calota} = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right) = \frac{\pi h^2}{3}\left(3R - h\right)$

Fuso e cunha esférica

O fuso esférico é uma parte da superfície esférica que se obtém ao girar uma semicircunferência de um ângulo α em torno de seu eixo:



Já a cunha esférica é a parte da esfera que se obtém ao girar um semicírculo em torno de seu eixo de um ângulo α. A área e o volume do fuso esférico e da cunha esférica, respectivamente, podem ser obtidos por uma regra de três simples:

$$\begin{matrix} 360° & ---- & 4\pi r^2 \\ \alpha & ------ & S_{fuso} \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} 360° & ---- & \dfrac{4\pi r^3}{3} \\ \alpha & ------ & V_{cunha} \end{matrix}$$

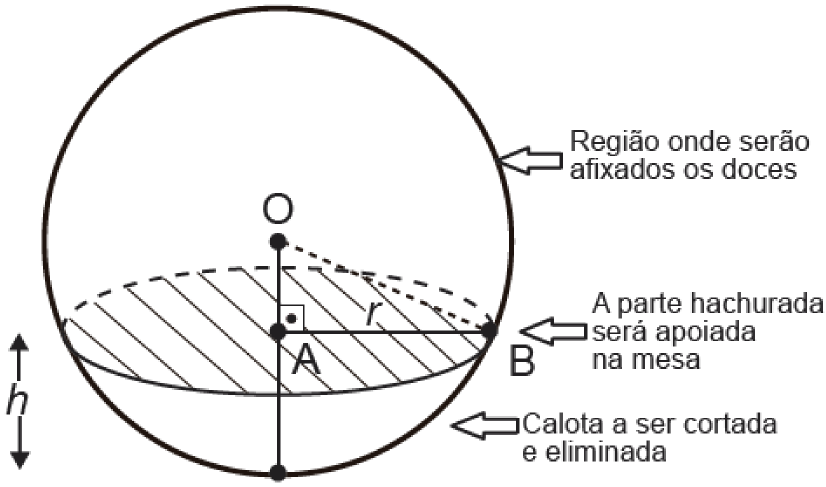
Assim, chegamos nas fórmulas:

$$V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270} \quad \text{e} \quad S_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio *r* da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

a) $5 - \sqrt{91}/2$

b) $10 - \sqrt{91}$

c) 1

d) 4

e) 5

2. Oscar Niemayer é um arquiteto brasileiro, considerado um dos nomes mais influentes na arquitetura moderna internacional. Ele contribuiu, através de uma doação de um croqui, para a construção do planetário da UFSM, um marco arquitetônico importante da cidade de Santa Maria.

Fonte: arquivo COPERVES.

Suponha que a cobertura da construção seja uma semiesfera de 28 m de diâmetro, vazada por 12 partes iguais, as quais são aproximadas por semicírculos de raio 3 m. Sabendo que uma lata de tinta é suficiente para pintar 39 m^2 de área, qual a quantidade mínima de latas de tinta necessária para pintar toda a cobertura do planetário? (Use $\pi = 3$)

a) 20.

b) 26.

c) 40.

d) 52.

e) 60.

3. A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

Suponha que cada esfera tenha 10,5cm de diâmetro e que o bastão tenha 50cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4cm. Se a densidade do ferro é 7,8g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use: $\pi = 22/7$)

a) 8

b) 16

c) 15

d) 12

e) 10

4. Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

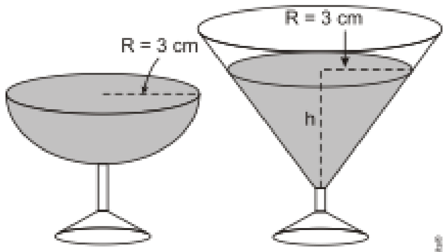


Figura 1 Figura 2

Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33.

b) 6,00.

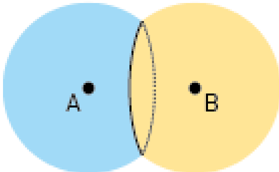
c) 12,00.

d) 56,52.

e) 113,04.

5. Na fotografia abaixo, observam-se duas bolhas de sabão unidas.

Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:



Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio R, unidas de tal modo que a distância entre seus centros A e B é igual ao raio R.
A parede de contato dessas bolhas é um círculo cuja área tem a seguinte medida:

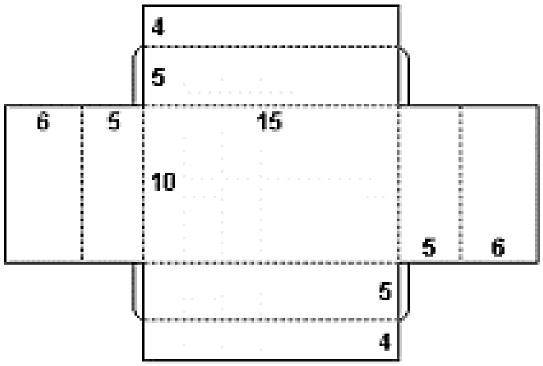
a) $\frac{\pi R^2}{2}$

b) $\frac{3\pi R^2}{2}$

c) $\frac{3\pi R^2}{4}$

d) $\frac{4\pi R^2}{3}$

6. Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de

I. um cone reto de altura 1cm e raio da base 1,5cm.

II. um cubo de aresta 2cm.

III. uma esfera de raio 1,5cm.

IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2cm, 3cm e 4cm.

V. um cilindro reto de altura 3cm e raio da base 1cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

a) I, II e III.

b) I, II e V.

c) I, II, IV e V.

d) II, III, IV e V.

e) III, IV e V.

7. Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.

a) 3

b) 9

c) 18

d) 21

e) 27

8. Um frasco de perfume de forma esférica, com raio de 4 cm, contém perfume em 1/4 de seu volume total. Se uma pessoa utilizar, todos os dias, 2 mL, do perfume, das alternativas abaixo, a que indicará o maior período de tempo de duração do perfume será: (considere π = 3)

a) 16 dias

b) 32 dias

c) 26 dias

d) 54 dias

e) 43 dias

9. Tem-se um recipiente cilíndrico, de 3 cm de raio, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha nesse recipiente, o nível da água sobe cerca de 1,2 cm. Sabe-se então, que o raio da bolinha, desprezando-se as casas decimais, vale:

a) 1 cm

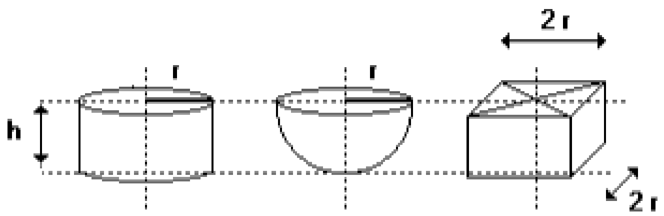
b) 1,5 cm

c) 2 cm

d) 2,5 cm

e) 3cm

10. Na figura estão representados três sólidos de mesma altura h - um cilindro, uma semi-esfera e um prisma - cujos volumes são V1, V2, e V3, respectivamente.



A relação entre V1, V2, e V3 é:

a) V3 < V2 < V1

b) V2 < V3 < V1

c) V1 < V2 < V3

d) V3 < V1 < V2

e) V2 < V1 < V3

Gabarito

1. **C**
   Observando o triângulo pitagórico OAB, temos $\overline{OA} = 4$.
   Logo, h + 4 = 5.
   h = 1.

2. **B**
   Observe:

   A = área da semiesfera de raio 14 m: $A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 14^2}{2} = 392\pi \text{ m}^2$.

   A' = área de cada semicírculo lateral: $A' = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2} \text{ m}^2$.

   Área que será pintada: $A - A' = 392\pi - 12 \cdot \frac{9\pi}{2} = 338\pi^2$

   $1014(\pi = 3)$.

   Número de latas de tinta: $\frac{1014}{39} = 26$.

3. **E**

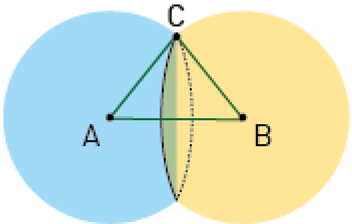
   O volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10,5}{2}\right)^2 \cong 606,37 \text{ cm}^3$ e o volume do bastão é

   $\pi.\left(\frac{1,4}{2}\right)^2.50 \cong 77,00 \text{ cm}^3$. Assim o haltere tem volume igual a 606,37 · 2 + 77,00 = 1 289,74 cm³ e que

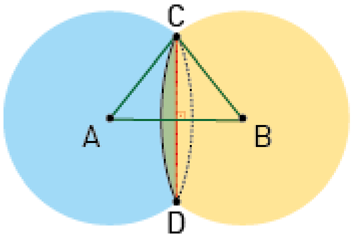
   corresponde a 1 289,74 · 7,8 ≅ 10 kg .

4. **B**
   Sendo o volume E de uma semiesfera igual a e o volume C de um cone igual a, e tendo os noivos solicitado que ambos os formatos de taça tenham o mesmo volume, tem-se: $\frac{4\pi R^3}{6} = \frac{\pi R^2}{3}$
   Substituindo na equação os dados fornecidos pela questão, obtém-se h = 6 cm.

5. **C**
   Considerando um ponto C pertencente à circunferência de contato das duas bolhas, têm-se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = R$ e o triângulo equilátero ABC.



Prolongando-se a altura relativa ao vértice C até o ponto D da mesma circunferência, tem-se o diâmetro CD do círculo de contato. O raio X desse círculo corresponde à altura do triângulo equilátero ABC.

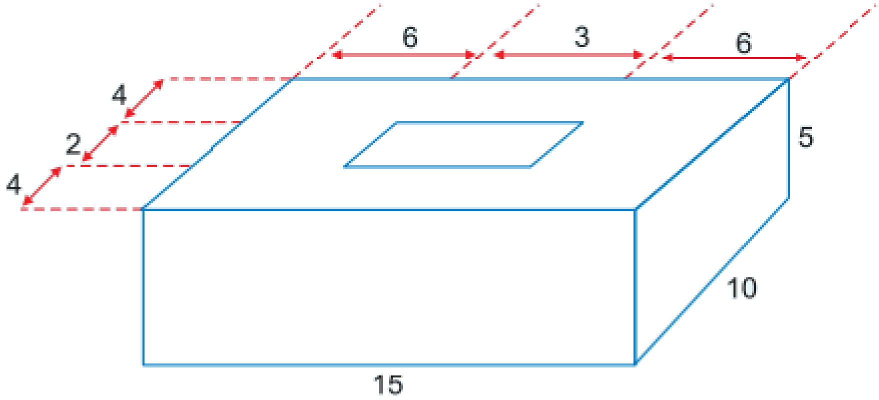


Assim, $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, a área do círculo é $S = \pi . x^2 = \pi\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3\pi R^2}{4}$

6. C

A caixa tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões: 15cm x 10cm x 5cm. A abertura em sua tampa é um retângulo de dimensões 3cm x 2cm.



Assim, dos sólidos que são fabricados, só não passa por essa abertura a esfera de raio 1,5cm (sólido III).

7. E

Primeiro, calculamos o volume da esfera maior e depois calculamos o volume da esfera menor:

$$V_{maior} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{menor} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3 = V_{maior} = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{27}$$

Por fim, dividimos uma pela outra:

$$\frac{V_{maior}}{V_{menor}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{27}} = 27$$

8. B

Volume da esfera total = $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volume da esfera total = $\frac{4.3.4^3}{3}$ = 4 x 64 = 256 ml

$$\frac{V_{total}}{4} = 64 \text{ mL}$$

Por fim, fazemos regra de 3:

1 dia --- 2 ml

x --- 64 ml

x = 32 dias

9. C

Temos que o o volume da esfera é justamente o desnível da água, ou seja:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3} = \pi 3^2(1,2)$$

Resolvendo a equação, temos que R ≈ 2.

10. E

Observe:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi r^3$$

$$V_{semiesfera} = \frac{4\pi r^3}{6}$$

$$V_{paralelepípedo} = (2r)(2r)(h) = 4r^2 h = 4r^3$$

Assim, V3 > V1 > V2, ou V2 < V1 < V3