Lei dos senos e dos cossenos

Resumo

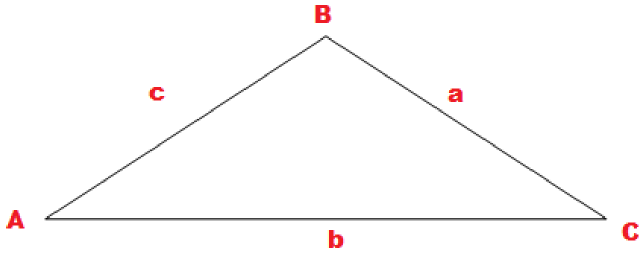
Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles. Ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

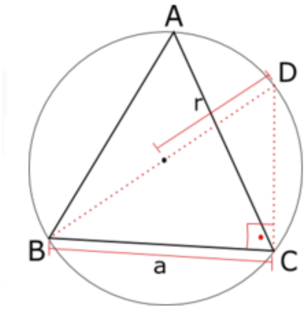
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$



Lei dos senos

Seja um triângulo qualquer, com lados a, b e c, que são os lados opostos aos ângulos A, B e C, respectivamente. O quociente entre a medida de cada lado e o seno do ângulo oposto a este lado é uma constante igual a 2r, em que r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é:

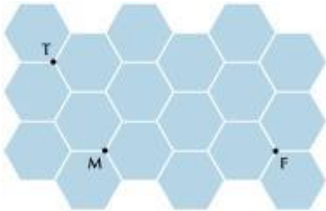
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2r$$



Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Um piso plano é revestido de hexágonos regulares congruentes cujo lado mede 10 cm.
Na ilustração de parte desse piso, T, M e F são vértices comuns a três hexágonos e representam os pontos nos quais se encontram, respectivamente, um torrão de açúcar, uma mosca e uma formiga.



Ao perceber o açúcar, os dois insetos partem no mesmo instante, com velocidades constantes, para alcançá-lo. Admita que a mosca leve 10 segundos para atingir o ponto T. Despreze o espaçamento entre os hexágonos e as dimensões dos animais.
A menor velocidade, em centímetros por segundo, necessária para que a formiga chegue ao ponto T no mesmo instante em que a mosca, é igual a:

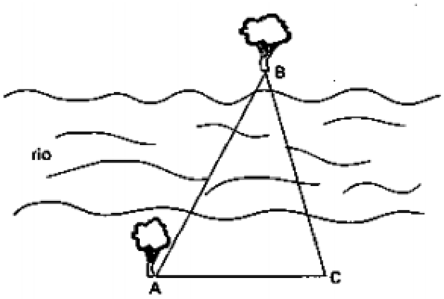
a) 3,5

b) 5,0

c) 5,5

d) 7,0

2. Para se calcular a distância entre duas árvores , representadas pelos pontos A e B, situados em margens opostas de um rio, foi escolhido um ponto C arbitrário, na margem onde se localiza a árvore A. As medidas necessárias foram tomadas , e os resultados obtidos foram os seguintes: AC = 70 m, BAC = 62º e ACB = 74º. Sendo cos 28º = 0,88 , sen 74º = 0,96 e sen 44º = 0,70 , podemos afirmar que a distância entre as árvores é :



a) 48 metros

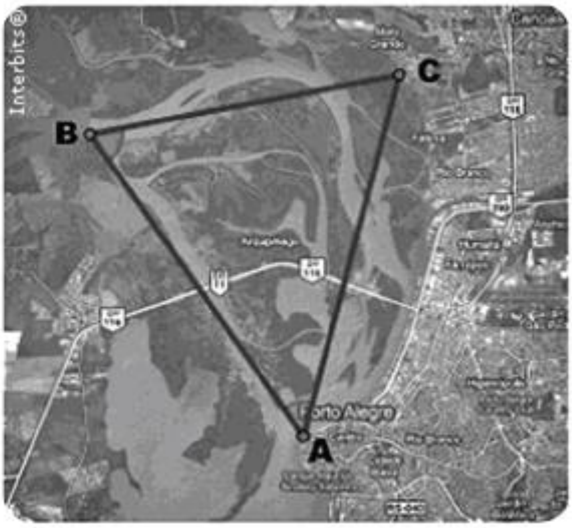
b) 78 metros

c) 85 metros

d) 96 metros

e) 102 metros

3. A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo A mede 45° e o ângulo C mede 75°. Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é

a) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

b) $4\sqrt{6}$

c) $8\sqrt{2}+\sqrt{3}$

d) $8(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

4. No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30°. O seno do ângulo B vale:

a) 1/2

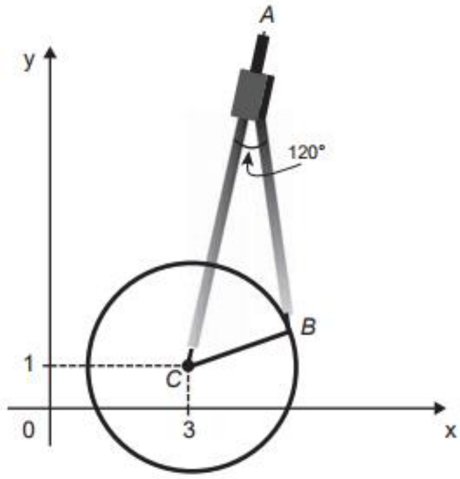
b) 2/3

c) 3/4

d) 4/5

e) 5/6

5. Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120º. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

6. Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de T é:

a) 5/6

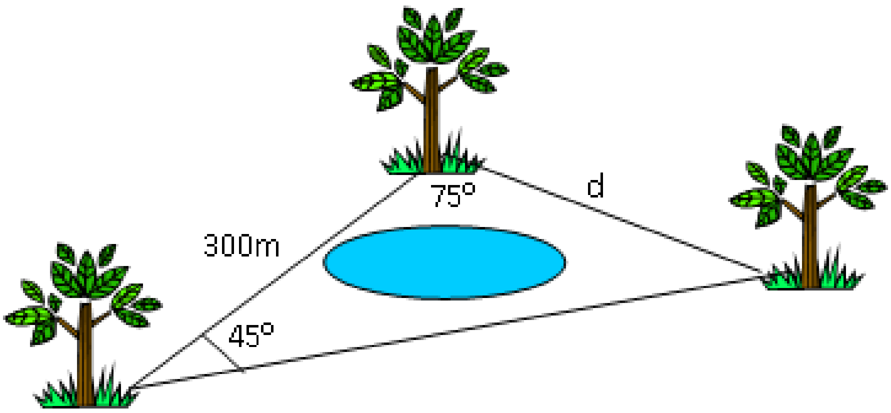
b) 4/5

c) 3/4

d) 2/3

e) 1/8

7. Determine a distância d, em metros, indicada na figura.



a) 50.

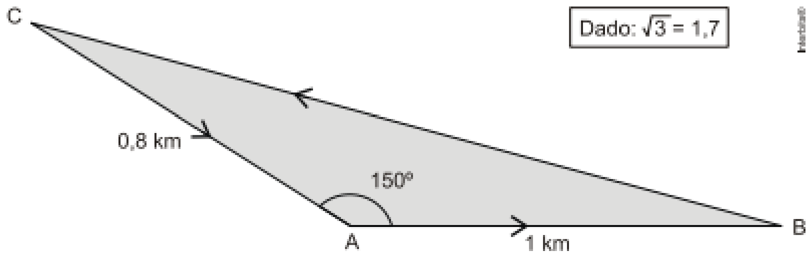
b) 100.

c) $50\sqrt{6}$.

d) $100\sqrt{6}$.

e) 200.

8. A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhora da qualidade de vida. Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura.



Quantos quilômetros ela terá caminhado, se percorrer todo o trajeto?

a) 2,29.

b) 2,33.

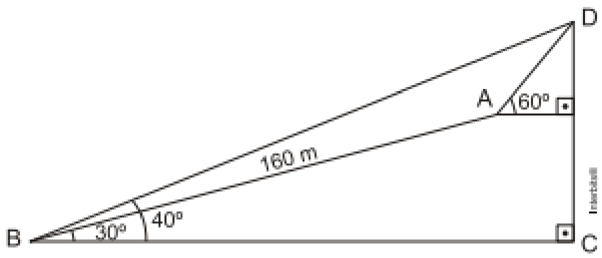
c) 3,16.

d) 3,50.

e) 4,80.

9. Um grupo de escoteiros pretende escalar uma montanha até o topo, representado na figura abaixo pelo ponto D, visto sob ângulos de 40° do acampamento B e de 60° do acampamento A.

Dado: $\text{sen } 20° = 0,342$



Considerando que o percurso de 160 m entre A e B e realizado segundo um angulo de 30° em relação a base da montanha, então, a distância entre B e D, em m, e de, aproximadamente,

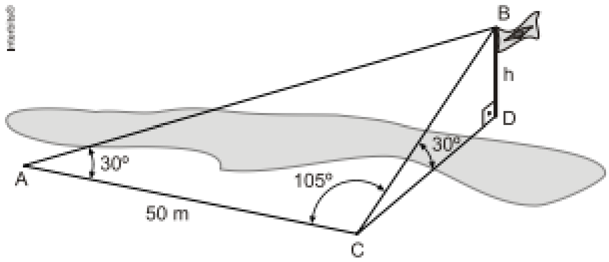
a) 190.

b) 234.

c) 260.

d) 320.

10. Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos BÂC e BCD valem 30°, e o ACB vale 105°, como mostra a figura:



a) 12,5.

b) $12,5\sqrt{2}$.

c) 25,0.

d) $25,0\sqrt{2}$.

e) 35,0.

Gabarito

1. **D**
Como queremos a distância mínima temos que :

$$\overline{FT}^2 = \overline{TM}^2 + \overline{MF}^2 - 2 \times \overline{TM} \times \overline{MF} \times \cos \hat{M}$$

$$\overline{FT}^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \cos 120° = 4900 \quad \Rightarrow \quad \overline{FT} = 70 \text{ cm}$$

Como queremos a velocidade:

$$v = \frac{70}{10} = 7 \text{ cm / s.}$$

2. **D**

$$\frac{70}{sen44°} = \frac{AB}{sen74°}$$

$$\frac{70}{0,70} = \frac{AB}{0,96}$$

$$AB = \frac{67,2}{0,70}$$

$$AB = 96$$

3. **B**

$$\frac{AC}{sen60°} = \frac{8}{sen45°}$$

$$\frac{AC.\sqrt{2}}{2} = \frac{8.\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = 4\sqrt{6}$$

4. **B**

$$\frac{6}{sen30°} = \frac{8}{senB°}$$

$$6senB = 8.sen30°$$

$$6senB = 4$$

$$senB = 4/6$$

$$senB = 2/3$$

5. D

O compasso forma, com a superfície do papel, um triângulo isóscele de lados $10, 10$ e R (raio), e ângulos $120, 30$ e 30 graus. Sabendo-se disto, pode-se calcular o raio R:

$$\frac{R}{\text{sen}\,120°} = \frac{10}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow R \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 10\sqrt{3} = 17\text{cm} \Rightarrow 15 < R \leq 21$$

6. E

Em um triângulo, o maior ângulo está oposto ao maior lado. Seja β o maior ângulo de T. Temos:

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.cos\beta$$

$$36 = 16 + 25 - 40cos\beta$$

$$40cos\beta = 5 \rightarrow cos\beta = \frac{1}{8}$$

7. D

$$\frac{300}{\text{sen}60º} = \frac{d}{\text{sen}45º}$$

$$300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$300\sqrt{2} = d\sqrt{3}$$

$$d = \frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{300\sqrt{6}}{3}$$

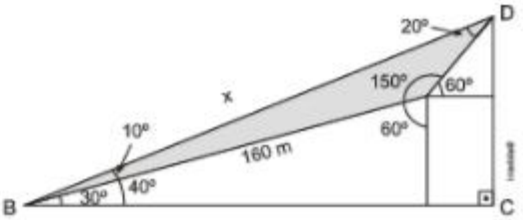
$$d = 100\sqrt{6}\,cm$$

8. D

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos B\hat{A}C \\ &= (0,8)^2 + 1^2 - 2 \cdot 0,8 \cdot 1 \cdot \cos 150° \\ &= 0,64 + 1 - 2 \cdot 0,8 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\cong 1,64 + 0,8 \cdot 1,7 \\ &\cong 3.\end{aligned}$$

Logo, $\overline{BC} \cong 1,7$ e, portanto, o resultado é $1 + 0,8 + 1,7 = 3,5$.

9. B



Aplicando o teorema dos senos no triângulo assinalado, temos:

$$\frac{x}{\text{sen}150^\circ} = \frac{160}{0{,}342}$$

$$0{,}342.x = 160.\text{sen}150^\circ$$

$$0{,}342x = 80$$

$$x = 233{,}9$$

Aproximadamente 234m.

10. B

No triângulo ABC $A\hat{B}C = 45^\circ$, aplicando o teorema dos senos, temos:

$$\frac{50}{\text{sen}45^\circ} = \frac{BC}{\text{sen}30^\circ} \Leftrightarrow BC.\sqrt{2} = 50 \Leftrightarrow BC = 25\sqrt{2}$$

No triângulo BDC, temos:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{h}{25\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{25\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = 12{,}5\sqrt{2}$$