Exercícios envolvendo logaritmos

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. A fórmula para medir a intensidade de um dado terremoto na escala Richter é $R = \log_{10}(\frac{I}{I_0})$ com I_0 sendo a intensidade de um abalo quase imperceptível e I a intensidade de um terremoto dada em termos de um múltiplo de I_0. Se um sismógrafo detecta um terremoto com intensidade $I = 32000I_0$, qual a intensidade do terremoto na escala Richter? Indique o valor mais próximo. Dado: use a aproximação log 2 ≈ 0,30.

a) 3,0

b) 3,5

c) 4,0

d) 4,5

e) 5,0

2. Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5\,000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.
De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12

b) 14

c) 15

d) 16

e) 17

3. O pH de uma solução mede a acidez da mesma e é definido como $pH = \log(\frac{1}{[H^+]})$, onde $[H^+]$ representa a concentração de íons H^+.

Devido às secas registradas na região nordeste do país, a escassez de água tornou-se uma calamidade pública em algumas cidades. Como atendimentos de urgência, caminhões pipas distribuíram águas retiradas diretamente de açudes entre as famílias atingida, como pH baixíssimo, tornando-se vulneráveis à contaminação com determinadas bactérias prejudiciais à saúde humana. Numa amostra dessas águas foi detectado que $[H^+] = 2{,}5.10^{-9}$.

De acordo com o texto acima, e considerando log 5 = 0,70, o pH dessa água foi de:

a) 9,70

b) 9,68

c) 9,23

d) 8,87

e) 8,60

4. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

a) $\frac{1}{10}$

b) 1

c) 10

d) 100

e) 1 000

5. A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I = \frac{2}{3}\log_{10}(\frac{E}{E_0})$, em que E é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (kwh), e $E_0 = 10^{-3}$ kwh. A cada aumento de uma unidade no valor de I, o valor de E fica multiplicado por:

a) $\sqrt{10}$

b) 10

c) $\sqrt{10^3}$

d) 20/3

6. Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após *t* anos, é calculada pela expressão:

$$M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$$

Onde A é a massa inicial e *k* é uma constante negativa.

Considere log 2 = 0,3. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27

b) 36

c) 50

d) 54

e) 100

7. Se log 2 = x e log 3 = y, então log 72 é igual a:

a) 2x + 3y

b) 3x + 2y

c) 3x – 2y

d) 2x – 3y

e) x + y

8. O conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ é:

a) $\mathbb{R}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 8\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 3\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 8\}$

9. Suponha que a vazão de água de um caminhão de bombeiros se dá pela $v(t) = v_0.2^{-t}$ em que V_0 é o volume inicial de água contido no caminhão e t é o tempo de escoamento em horas. Qual é, aproximadamente, utilizando uma casa decimal, o tempo de escoamento necessário para que o volume de água escoado seja 10% do volume inicial contido no caminhão? (utilize: log 2 ≅ 0,3.)

a) 3h e 30 min.

b) 3h e 12 min.

c) 3h e 18 min.

d) 2h e 15 min.

e) 2h e 12 min.

10. O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude. Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetros, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p, em atm, por $h(p) = 20.\log_{10}(\frac{1}{p})$. Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação log2 = 0,3, a altitude h do avião nesse instante, em quilômetros, era de

a) 5.

b) 8.

c) 9.

d) 11.

e) 12.

Gabarito

1. **D**
Utilizando as informações do enunciado, temos:

$$R = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log\left(\frac{32000 I_0}{I_0}\right) = \log 32000 = \log 32.1000 = \log 32 + \log 1000 = \log 2^5 + \log 10^3$$

$$\log 2^5 + \log 10^3 = 5\log 2 + 3\log 10 = 5(0,3) + 3(1) = 1,5 + 3 = 4,5$$

2. **D**

$$\frac{5.000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{1{,}013^n - 1} \leq 400$$

$$65 \cdot 1{,}013^n \leq 400 \cdot 1{,}013^n - 400$$

$$400 \leq 335 \cdot 1{,}013^n$$

$$1{,}013^n \geq \frac{400}{335}$$

$$\log 1{,}013^n \geq \log\frac{400}{335}$$

$$\mathrm{n} \cdot \log 1{,}013 \geq \log 400 - \log 335$$

$$n \cdot 0{,}005 \geq 2{,}605 - 2{,}525$$

$$n \geq \frac{0{,}077}{0{,}005}$$

$$n \geq 15{,}4$$

$$n = 16$$

3. **E**
Devemos calcular:

$$pH = \log\left(\frac{1}{2,5.10^{-9}}\right) = \log(2,5.10^{-9})^{-1}$$

$$pH = -\log 2,5.10^{-9} = -(\log 2,5 + \log 10^{-9}) = -(\log 25/10 - 9\log 10)$$

$$pH = -(\log 25 - \log 10 - 9\log 10)$$

$$pH = -(\log 5^2 - \log 10 - 9\log 10)$$

$$pH = -(2\log 5 - \log 10 - 9\log 10)$$

$$pH = -(2.0,7 - 1 - 9) = -(-8,6) = 8,6$$

4. D

Primeiro, vamos calcular I_1:

$$80 = 120 + 10\log I_1$$
$$8 = 12 + \log I_1$$
$$\log I_1 = -4$$
$$I_1 = 10^{-4}$$

Agora, vamos calcular I_2:

$$60 = 120 + 10\log I_2$$
$$6 = 12 + \log I_2$$
$$\log I_2 = -6$$
$$I_2 = 10^{-6}$$

Queremos I_1/I_2, assim: $\frac{10^{-4}}{10^{-6}} = \frac{10^{6}}{10^{4}} = 100$

5. C

Vamos colocar E em função de I:

I = (2/3).$\log_{10}$(E/Eo)

3I/2 = $\log_{10}$(E/Eo), usando a propriedade do logaritmo da divisão,

3I/2 = $\log_{10}$E - $\log_{10}$Eo

3I/2 = $\log_{10}$E - $\log_{10}10^{-3}$

3I/2 = $\log_{10}$E - (-3)

3I/2 = $\log_{10}$E + 3

3I/2 - 3 = $\log_{10}$E, aplicando a definição de logaritmo,

E = $10^{3I/2 - 3}$

Agora se acrescentarmos uma unidade em I, obteremos outro valor de E, que chamarei de E'. O valor de E' será:

E = $10^{3I/2 - 3}$

E' = $10^{3(I + 1)/2 - 3}$

E' = $10^{(3I + 3)/2 - 3}$

E' = $10^{(3I + 3 - 6)/2}$

E' = $10^{(3I - 3)/2}$

O problema pergunta por quanto o valor de E fica multiplicado quando aumentamos uma unidade em I, ou seja, por quanto temos que multiplicar E para chegar em E'. Digamos que tenhamos que multiplicar E po x para chegar em E':

E.x = E'

$10^{(3I/2 - 3)}$.x = $10^{(3I - 3)/2}$

x = ($10^{(3I - 3)/2}$)/($10^{3I/2 - 3}$)

Na divisão de duas potências de mesma base, subtraímos os expoentes:

x = $10^{(3l - 3)/2 - (3l/2 - 3)}$

x = $10^{3l/2 - 3/2 - 3l/2 + 3}$

x = $10^{-3/2 + 3}$

x = $10^{3/2}$

Resposta: "C" fica multiplicado por $10^{3/2}$ (isso é igual à raiz quadrada de 1000).

6. E

Como a meia-vida do césio-137 é 30 anos: $M(30) = \frac{A}{2}$ e sendo a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, tem-se $\frac{A}{2} = A.(2,7)^{30k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = (2,7)^{30k}$.

Aplicando-se logaritmo decimal aos dois membros desta igualdade:

$\log 2^{-1} = \log 2,7^{30k} \Rightarrow \log 2,7^{30k} = -\log 2 \Rightarrow \log 2,7^{30k} = -0,3 \Rightarrow 2,7^{30k} = 10^{-0,3}$ **(I)**

A situação-problema está questionando: "Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?"

$M(t) = A \times (2,7)^{kt} = \frac{1}{10} \times A \Rightarrow (2,7)^{kt} = 10^{-1}$

Elevando os dois membros desta igualdade ao expoente 0,3, vem: $10^{-0,3} = (2,7)^{0,3kt}$.

Como por **(I)**, $10^{-0,3} = 2,7^{30k}$, tem-se $(2,7)^{0,3kt} = 2,7^{30k} \Rightarrow 0,3kt = 30k \Rightarrow t = 100$.

7. B

Observe:

$$\log 72 = \log(8.9) = \log 8 + \log 9 = \log 2^3 + \log 3^2 = 3\log 2 + 2\log 3$$

Substituindo log2 = x e log3 = y, temos:

$$\log 72 = 3x + 2y$$

8. E

Temos uma inequação exponencial de base menor do que 1. Assim, comparamos os expoentes, mas com o sinal trocado:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\log_2 x > 3$$

Quando nos deparamos com uma inequação logarítmica, temos que ter log nos dois lados.

$$\log_2 x > 3$$

$$\log_2 x > 3\log_2 2$$

$$\log_2 x > \log_2 2^3$$

$$\log_2 x > \log_2 8$$

$$x > 8$$

9. C

Segundo o enunciado, temos que calcular V = 10%V_0. Substituindo na fórmula, temos:

$$0{,}1v_0 = v_0.2^{-t}$$
$$0{,}1 = 2^{-t}$$
$$\log 0{,}1 = \log 2^{-t}$$
$$\log 1/10 = -t\log 2$$
$$\log 1 - \log 10 = -t\log 2$$
$$0 - 1 = -t.0{,}3$$
$$1 = 0{,}3t$$
$$t = 3{,}\overline{3} = 3 + 0{,}\overline{3} = 3 \text{ horas e } 18 \text{ minutos.}$$

10. B

Substituindo os valores fornecidos no enunciado, temos:

$$h(0,4) = 20.\log_{10}(\frac{1}{0,4}) = 20\log(0,4)^{-1} = 20(-\log 0,4)$$
$$h(0,4) = 20(-\log 4/10) = 20[-(\log 4 - \log 10)] = 20[-(\log = 2^2 - \log 10)]$$
$$h(0,4) = 20[-(2\log 2 - \log 10) = 20[-(2.0,3-1)] = 20[-(0,6-1)]$$
$$h(0,4) = 20[-(-0,4)] = 20.0,4 = 8 \text{ atm}$$