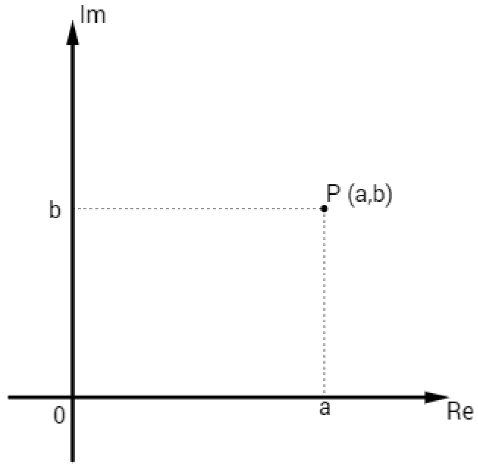
Números Complexos: Forma trigonométrica

Resumo

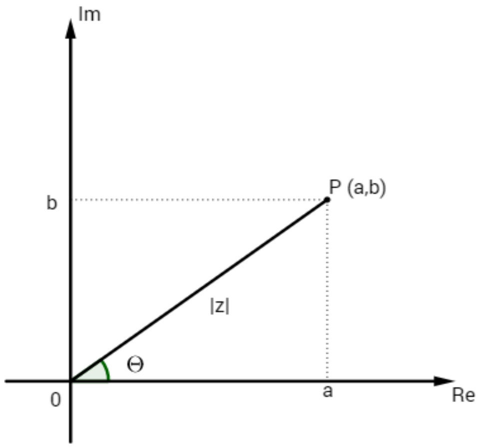
Plano de Argand-Gauss

Os números complexos podem ser representados de diversas formas, até aqui vimos a forma algébrica a + bi. Outra maneira de representar é em um sistema de coordenadas em um plano cartesiano. Esse sistema de coordenadas é chamado de Plano de Argand-Gauss, no eixo horizontal ficam as partes reais dos números complexos e o no eixo vertical, as partes imaginárias.
Diz-se que o ponto P (a,b) é o afixo do número complexo a + bi.



Módulo de um número complexo: $|z| ou\ \rho$

O segmento de reta OP é chamado de módulo do número complexo, representado por |z| ou ρ. O ângulo entre o eixo Ox e o segmento OP é chamado de argumento de Z, representado por θ.



Aplicando o teorema de Pitágoras teremos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Então:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento de Z

No Triângulo retângulo formado pelos vértices AOP, temos que:

$$sen\theta = \frac{b}{\rho} \ e \ cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

Sendo θ o argumento de Z e b = $\rho.sen\theta$ e a= $\rho.cos\theta$

Reescrevendo z = a+b.i ficamos com:

$z = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$

$\boxed{z = \rho\ (cis\theta)}$ e essa é a forma trigonométrica.

Operações na forma trigonométrica

Sendo $z_1 = \rho_1 . cis\theta_1$ e $z_2 = \rho_2 . cis\theta_2$

Multiplicação

$$z_1 . z_2 = \rho_1 . \rho_2 . cis(\theta_1 + \theta_2)$$

Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\ [cis(\theta_1 - \theta_2)]$$

Exercícios

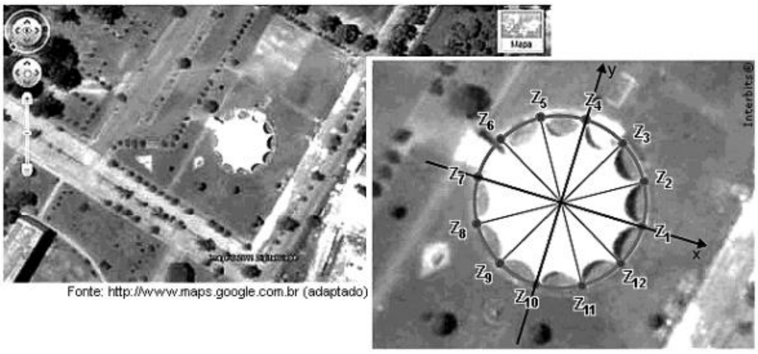
1. Se i é a unidade imaginária, então $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ é um número complexo que pode ser representado no plano de Argand-Gauss no _________ quadrante.

a) primeiro
b) segundo
c) terceiro
d) quarto

2. O número complexo Z = 1 + i representado na forma trigonométrica é

a) $2^{\frac{1}{2}}(\cos 45^o + i\text{sen}45^o)$
b) $2(\cos 90^o + i\text{sen}90^o)$
c) $4(\cos 60^o + i\text{sen}60^o)$
d) $4(\cos 60^o - i\text{sen}60^o)$
e) $2(\cos 90^o - i\text{sen}90^o)$

3. Observe a vista aérea do planetário e a representação, no plano ArgandGauss, dos números complexos $z_1, z_2, ..., z_{12}$, obtida pela divisão do círculo de raio 14 em 12 partes iguais.



Fonte: http://www.maps.google.com.br (adaptado)

Considere as seguintes informações:

I. $z_2 = 7\sqrt{3} + 14i$

II. $z_{11} = \overline{z}_3$

III. $z_5 = z_4.\overline{z_{11}}$

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

4. Considere os números complexos $z_1 = -1 - i$, $z_2 = k + i$, com k um número real positivo e $z_3 = z_1 . z_2$. Sabendo que $|z_3| = \sqrt{10}$, é correto afirmar que:

a) $|z_1 + z_2| = \sqrt{7}$

b) $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{-1+i}{2}$

c) O argumento de z_2 é 225°.

d) $z_3.z_2 = -1 + 2i$

5. O módulo e o argumento do número complexo z = (1 + i)(1 – i)² são respectivamente:

a) $\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$

b) $\sqrt{2}$ e $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$

c) $2\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$

d) $2\sqrt{2}$ e $\frac{7\pi}{4}+2k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$

e) $\sqrt{2}$ e $\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$

6. Considere um número complexo z, de módulo 10, tal que z = (K + i)², em que K é um número real. A parte real desse número complexo é igual a

a) 5√3.

b) 8.

c) 5√2.

d) 6.

e) 5.

7. Sendo i a unidade imaginária, considere os números complexos z = 1 + i e w = z² – z. Um argumento de w é:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{3\pi}{4}$

e) $\frac{5\pi}{4}$

8. Sendo z o número complexo obtido na rotação de 90°, em relação à origem, do número complexo 1 + i, determine z³.

a) 1 – i

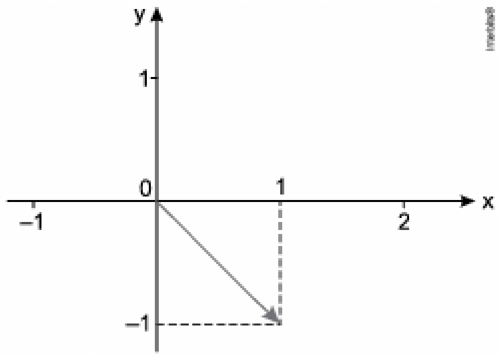
b) - 1 + i

c) - 2i

d) - 1 – 2i

e) 2 + 2i

9. Observe o plano Argand-Gauss a seguir:



Elevando-se a 2015 o número complexo indicado, o afixo do número obtido será um ponto desse plano com coordenadas idênticas e iguais a:

a) $2^{2015} + 2^{2015}i$

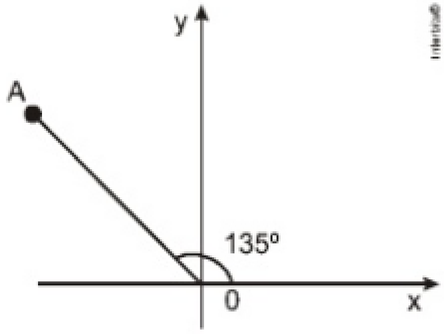
b) $2^{1007} + 2^{1007}i$

c) 1

d) 2^{-2015}

e) -2^{1007}

10. Na figura abaixo, o ponto A é o afixo de um número complexo z no plano de Argand-Gauss



Se a distância do ponto A até a origem O é 4, então a diferença entre z e o seu conjugado é igual a:

a) $-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$

b) $-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

c) $-4\sqrt{2}i$

d) $4\sqrt{2}i$

e) $4\sqrt{2}$

Gabarito

1. B

Sendo

$$2i^3 + 3i^2 + 3i + 2 = -2i - 3 + 3i + 2$$
$$= -1 + i$$
$$= (-1, 1),$$

podemos concluir que a imagem do complexo $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ está situada no segundo quadrante.

2. A

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} \to \rho = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \theta = 45°$$
$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \theta = 45°$$
$$Z = \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \cdot \text{sen}\ 45°) = 2^{1/2} \cdot (\cos 45° + i\,\text{sen}\ 45°)$$

3. B

I. FALSA, pois $Z_2 = 14 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen} 30°) = 7\sqrt{3} + 7i.$

II. VERDADEIRA, pois Z_{11} e Z_3 são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

III. FALSA, pois

$$Z_5 = 14 \cdot (\cos 120° + i \cdot \text{sen} 120°)$$
$$Z_4 = 14 \cdot (\cos 90° + i \cdot \text{sen} 90°)$$
$$\overline{Z_{11}} = Z_3 = 14 \cdot (\cos 60° + i \cdot \text{sen} 60°)$$
$$Z_4 \cdot \overline{Z_{11}} = 14 \cdot 14 \cdot [\cos(60° + 90°) + i \cdot \text{sen}(60° + 90°)] \neq Z_5.$$

Portanto, apenas a afirmação dois é verdadeira.

4. B

Se $z_1 = -1 - i, z_2 = k + i$ e $z_3 = z_1 \cdot z_2$, então

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 \cdot z_2 \\ &= (-1-i)\cdot(k+i) \\ &= -k+1+(-k-1)i. \end{aligned}$$

Logo, sendo $k \in \mathbb{R}_+^*$ e $|z_3| = \sqrt{10}$, temos

$$\begin{aligned} (-k+1)^2 + (-k-1)^2 = 10 &\Leftrightarrow k^2 = 4 \\ &\Rightarrow k = 2. \end{aligned}$$

Portanto, segue que $z_2 = 2 + i$ e $z_3 = -1 - 3i$.

[A] Falsa. Temos

$$|z_1 + z_2| = |-1 - i + 2 + i| = |1| = 1 \neq \sqrt{7}.$$

[B] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_3} &= \frac{2+i}{-1-3i} \\ &= \frac{2+i}{-1-3i}\cdot\frac{-1+3i}{-1+3i} \\ &= \frac{-2+6i-i+3i^2}{1-9i^2} \\ &= \frac{-5+5i}{10} \\ &= \frac{-1+i}{2}. \end{aligned}$$

[C] Falsa. Sendo θ o argumento principal de z_2, tem-se que $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2} \neq 1 = \operatorname{tg} 225°$.

[D] Falsa. Na verdade, sabemos que

$$\begin{aligned} z_3 \cdot z_2 &= (-1-3i)\cdot(2+i) \\ &= -2 - i - 6i - 3i^2 \\ &= 1 - 7i. \end{aligned}$$

5. D

Reescrevendo z, vem

$$\begin{aligned} z &= (1+i)(1-i)^2 \\ &= (1+i)(1-i)(1-i) \\ &= 2 - 2i. \end{aligned}$$

Logo, o módulo de z é dado por

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Daí teremos $cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $e\ sen\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ logo $\theta = 315^o = \frac{7\pi}{4}$

6. B

Escrevendo o número complexo z na forma algébrica, obtemos:

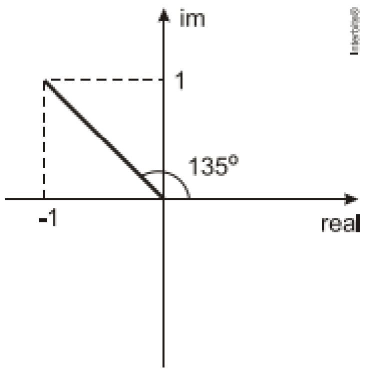
$$z = (k+i)^2 = (k^2 - 1) + 2k \cdot i.$$

Sabendo que $|z| = 10$ e $|z| = |(k+i)^2| = |k+i|^2 = k^2 + 1$, vem

$$k^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow k^2 = 9.$$

Portanto, $Re(z) = k^2 - 1 = 9 - 1 = 8.$

7. D



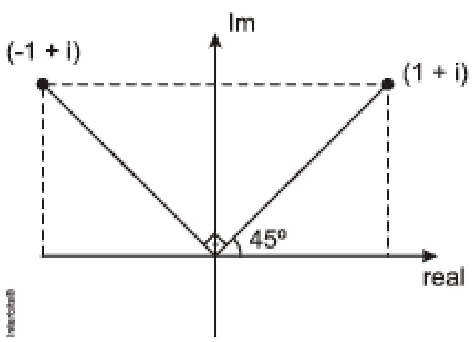
$W = (1 + i)^2 – (1 + i)$

Desenvolvendo, temos:

W = - 1 + i = (=1, i)

Logo, seu argumento será 135° ($90^\circ + 45^\circ$).

8. E



O complexo obtido com a rotação de 90° de 1 + i é $z = -1 + i$

Fazendo: $(-1 + i)^3$, temos:

$$z^3 = (i - 1)^3 = i^3 - 3.i^2.1 + 3.i.1^2 - 1^3 = -i + 3 + 3i - 1 = 2 + 2i$$

9. B

O número complexo representado no plano é igual a z = 1 − i. Assim, tem-se:

$$z^{2015} = (1-i)^{2015} = (1-i)\cdot(1-i)^{2014} = (1-i)\cdot\left((1-i)^2\right)^{1007}$$
$$= (1-i)\cdot(-2i)^{1007} = (1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right)\cdot\left(i^{1007}\right) = (1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right)\cdot\left(i^3\right)$$
$$= (1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right)\cdot(-i) = (-1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right) = -1\cdot(1+i)\cdot\left(-2^{1007}\right)$$
$$= 2^{1007} + 2^{1007}i$$

10. D

De acordo com as informações, segue que $z = 4\cdot(\cos 135° + i\cdot \text{sen}\, 135°) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot i.$ Logo, sendo $\bar{z}$ o conjugado de $z,$ temos

$$z - \bar{z} = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot i - (-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cdot i)$$
$$= 4\sqrt{2}\cdot i.$$