Função inversa

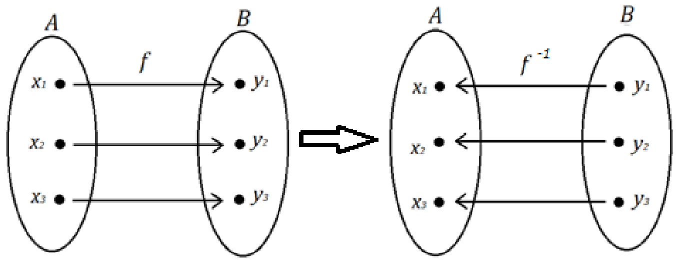
Resumo

Função inversa

Definimos função inversa (f^{-1}) de uma função f do seguinte modo:

$$\forall(a,b) \in f \Leftrightarrow \exists\ (b,a) \in f^{-1}$$

Ou seja, para todo par ordenado (a, b) pertencente à função f, existe um par ordenado (b, a) correspondente na função inversa f^{-1}.



Condição de existência

A relação inversa de f: A → B é uma função f^{-1}: B → A, se e somente se, f é uma função bijetora.

Lei de formação

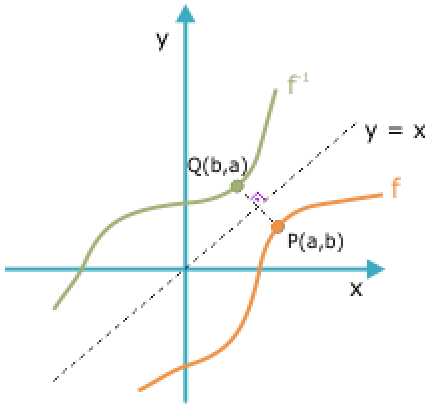
Para encontrarmos a lei de formação de uma função inversa, devemos seguir os seguintes passos:

I. Na lei de formação de f, devemos trocar o y por x e o x por y.
II. Depois, devemos isolar o novo y.

Ex: Vamos achar a inversa de f(x) = x + 1.
y = x + 1
x = y + 1 (trocando x por y e y por x)
y = x − 1 = f^{-1}(x)

Gráfico

O gráfico de uma f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta y = x, chamada de função identidade.



Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui]

Exercícios

1. Sabe-se que a função $f(x)=\dfrac{x+3}{5}$ é inversível. Assim, $f^{-1}(3)$ é

a) 3

b) 4

c) 6

d) 12

2. Seja f(x) uma função do primeiro grau que intercepta os eixos cartesianos nos pontos (0, 4) e (2, 0). O produto dos coeficientes da função inversa de f(x) é

a) 2.

b) − 1.

c) 4.

d) − 2.

3. O conjunto imagem de uma função inversível é igual ao domínio de sua inversa. Sendo $f: A \to B$ tal que $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ uma função real inversível, seu conjunto imagem é:

a) $\mathbb{R}-\{1\}$

b) $\mathbb{R}-\{-1\}$

c) $\mathbb{R}-\{-2\}$

d) $\mathbb{R}-\{0\}$

e) $\mathbb{R}-\{2\}$

4. Se a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}^*$ é definida por $f(x) = \dfrac{5}{2-x}$ e f^{-1} sua inversa, então $f^{-1}(-2)$ é igual a:

a) $-\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{9}{2}$

c) $-\dfrac{9}{2}$

d) $\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{5}{4}$

5. A função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x+1}$ para $x \neq -\dfrac{1}{4}$ é inversível. Sua inversa g pode ser expressa na forma $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, em que a, b,c e d são inteiros.

Nessas condições a soma a + b + c + d é um número inteiro múltiplo de:

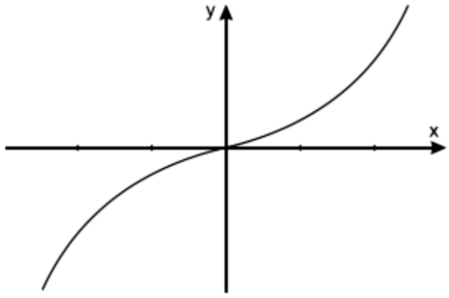
a) 6

b) 5

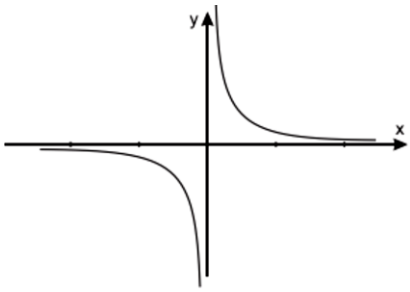
c) 4

d) 3

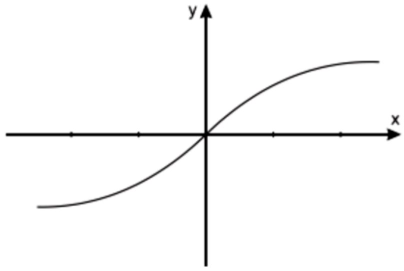
6. Considere o gráfico da função y = f(x) exibido na figura a seguir.



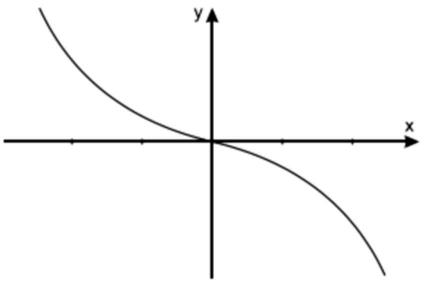
O gráfico da função inversa $y = f^{-1}(x)$ é dado por



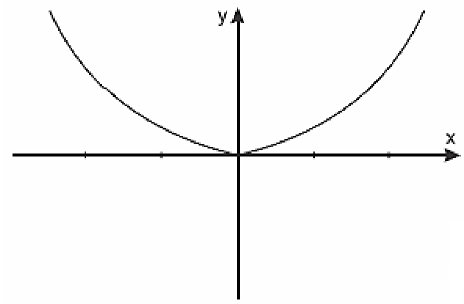
a)



c)



b)



d)

7. A função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ é inversível. Se f^{-1} é sua inversa, então, o valor de $\left[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1) \right]^2$ é

a) 1
b) 4
c) 9
d) 16

8. Seja f : A → B uma função dada por f(x) = 2 − 2x, em que A = [-2, 4] e B = [-6, 6]. É verdade afirmar que

a) a função f(x) não possui inversa.

b) o domínio de f(x) é B.

c) f(x) é bijetora.

d) f(-2) = -6.

e) a função inversa de f(x) é $f^{-1}(x) = 2x - 2$

9. Dada a função bijetora $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, o domínio de $f^{-1}(x)$ é

a) $\mathbb{R} - \{3\}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{R} - \{1\}$

d) $\mathbb{R} - \{-1\}$

e) $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

10. Considere a função $g(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$. O domínio de g(x) e a função inversa de g(x) são, respectivamente:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -\dfrac{1}{2} \text{ e } x \neq 3\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{-x-3}{2x-1}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{-x-3}{2x-1}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -\dfrac{1}{2} \text{ e } x \neq -3\right\}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{-2x+1}$

Gabarito

1. D

Se f possui inversa, então queremos calcular x tal que $f(x) = 3$. Assim, vem

$$\frac{x+3}{5} = 3 \Leftrightarrow x = 12.$$

2. B

Seja $f(x) = ax + b$ a lei da função afim cujo gráfico intersecta os eixos cartesianos nos pontos $(0, 4)$ e $(2, 0)$. Como o gráfico de f intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 4)$, segue que $b = 4$. Por outro lado, se $(2, 0)$ é o ponto de interseção com o eixo das abscissas, então

$$0 = a \cdot 2 + 4 \Leftrightarrow a = -2.$$

Daí, $f(x) = -2x + 4$ e, assim, a lei da função f^{-1} é tal que

$$x = -2y + 4 \Leftrightarrow 2y = -x + 4 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Portanto, o produto pedido é igual a $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1.$

3. E

Lembrando que é possível definir tantas funções quanto queiramos por meio da lei $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, vamos supor que o domínio de f seja o conjunto dos números reais x, tal que $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} y = \frac{2x-1}{x+1} &\Rightarrow yx + y = 2x - 1 \\ &\Rightarrow x(y-2) = -(y+1) \\ &\Rightarrow x = \frac{y+1}{2-y}. \end{aligned}$$

Portanto, sendo $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2-x}$ a lei da inversa de f, podemos afirmar que a imagem de f é o conjunto dos números reais y tal que $y \in \mathbb{R} - \{2\}$.

4. B

Impondo $f(x) = -2$, temos

$$-2 = \frac{5}{2-x} \Leftrightarrow 2x - 4 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}.$$

Portanto, segue que $f^{-1}(-2) = \frac{9}{2}.$

5. C

Se $f(x)=\frac{2x+3}{4x+1}$, então

$$y=\frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow 4xy+y=2x+3$$
$$\Leftrightarrow x(4y-2)=-y+3$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{y-3}{-4y+2}.$$

Portanto, temos $g(x)=\frac{x-3}{-4x+2}$ e, assim, desde que $1-3-4+2=(-1)\cdot(4)$, podemos afirmar que a soma $a+b+c+d$ é um número inteiro múltiplo de 4.

6. C

Lembrando que o gráfico de uma função e o de sua inversa são simétricos em relação à reta $y=x$, segue-se que o gráfico de $y=f^{-1}(x)$ é o da alternativa [C].

7. C

Tem-se que

$$y=\frac{x+2}{x-2} \Rightarrow yx-2y=x+2$$
$$\Rightarrow (y-1)x=2y+2$$
$$\Rightarrow x=\frac{2y+2}{y-1}.$$

Portanto, sendo $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\}$, a inversa de f é $f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}$, com $f^{-1}(x)=\frac{2x+2}{x-1}$.

Daí, como $f(0)=-1$, $f^{-1}(0)=-2$ e $f^{-1}(-1)=0$, vem

$$[f(0)+f^{-1}(0)+f^{-1}(-1)]^2=(-1+(-2)+0)^2=9.$$

8. C

[A] **Falsa**, a função admite inversa, pois é bijetora.
[B] **Falsa**, o domínio de f(x) é A.
[D] **Falsa**, pois f(-2) = 6.
[E] **Falsa**, pois a função inversa de f é $f^{-1}(x) = (-x + 2)/2$.

9. A

Se $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, com $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, então

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = 3x+2$$
$$\Leftrightarrow x(y-3) = y+2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y+2}{y-3}.$$

Portanto, $y-3 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 3$ e, assim, $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{3\}$.

10. C

O domínio da função g é o conjunto de valores de x para os quais

$$2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2},$$

ou seja, $D = \left\{x \in \mathbb{R};\ x \neq -\frac{1}{2}\right\}$.

A função inversa de g é tal que

$$y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow x = \frac{y-3}{2y+1}$$
$$\Rightarrow 2yx - y = -x - 3$$
$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-x-3}{2x-1}.$$