Logarítmos: definição, condição de existência e consequências da definição

Resumo

Logarítmos

Definimos como logaritmo de um número positivo *a* na base *b* o valor do expoente da potência de base *b* que tem como resultado o número *a.* Ou seja:

$$\log_b a = X \leftrightarrow b^x = a$$

Chamamos a de logaritmando, sendo a > 0, e b de base, sendo b > 0 e b ≠ 1

Ex: $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.

Condição de existência:

Para que $\log_b a$ esteja definido duas condições devem ser atendidas:

$$\begin{cases} Base: b > 0 \ e \ b \neq 1 \\ Logaritmando: a > 0 \end{cases}$$

Essas condições são fundamentais na resolução de equações e inequações logarítmicas, bem como para determinar o domínio das funções logarítmicas.

Consequências da definição:

a) $\log_b 1 = 0$.
$\log_b 1 = x \quad \rightarrow \quad b^x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0$

b) $\log_b b = 1$.
$\log_b b = x \quad \rightarrow \quad b^x = b^1 \quad \rightarrow \quad x = 1$

c) $b^{\log_b a} = a$
Fazendo $b^{\mathrm{Log}_b a} = b^x$, temos que $\log_b a = x$ e, da definição desse logaritmo, temos que $b^x = a$. Portanto:
$b^{\mathrm{Log}_b a} = x = a$

Sistemas de logaritmos:

1) Sistema decimal (base 10):
Por convenção, ela pode ser omitida.
Ex: $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$, pois $10^2 = 100$.

2) Sistema neperiano (base e):
   O número e, chamado de número de euler, pertence ao conjunto dos números irracionais e vale, aproximadamente, 2,7.
   $e \cong 2,71828...$
   O logaritmo neperiano, também chamado de logaritmo natural, é o logaritmo de base **e** e é representado por ln:
   $\ln x = \log_e x$

Exercícios

1. Supondo que exista, o logaritmo de a na base b é

a) o número ao qual se eleva a para se obter b.

b) o número ao qual se eleva b para se obter a.

c) a potência de base b e expoente a.

d) a potência de base a e expoente b.

e) a potência de base 10 e expoente a.

2. O valor CORRETO da expressão $E = \log_2 8 + \frac{0,001}{10000} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ é:

a) 10000.

b) 11,0000001.

c) $11 \cdot 10^{-7}$.

d) 11.

e) -1

3. O número $\log_2 7$ está entre

a) 0 e 1.

b) 1 e 2.

c) 2 e 3.

d) 3 e 4.

e) 4 e 5.

4. A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude M_w = 7,3

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_w do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

a) $10^{-5,10}$.

b) $10^{-0,73}$.

c) $10^{12,00}$.

d) $10^{21,65}$.

e) $10^{27,00}$.

5. A acidez de frutas cítricas é determinada pela concentração de íons hidrogênio. Uma amostra de polpa de laranja apresenta pH = 2,3. Considerando log2 = 0,3, a concentração de íons hidrogênio nessa amostra, em mol.L −1 , equivale a:

Obs: pH = - log[H^+]

a) 0,001

b) 0,003

c) 0,005

d) 0,007

6. Uma calculadora tem duas teclas especiais, A e B. Quando a tecla A é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla B é digitada, o número do visor é multiplicado por cinco. Considere que uma pessoa digitou as teclas BAB, nesta ordem, e obteve no visor o número 10.

Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número:

a) 20

b) 30

c) 40

d) 50

7. Calcule o valor de S:

$$S = \log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$$

a) -5/2

b) 5/2

c) 3/2

d) -3/2

8. Calcule o valor de $7^{1+\log_7 4}$:

a) 11

b) 28

c) 35

d) 42

9. Em uma calculadora científica de 12 dígitos, quando se aperta a tecla LOG, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO. Depois de digitar 42 bilhões, o número de vezes que se deve apertar a tecla LOG para que no visor apareça ERRO pela primeira vez é:

a) duas

b) três

c) quatro

d) cinco

e) oito

10. Considerando-se $K = 100^{\log 3} + 1000^{\log 2}$, onde os logaritmos são decimais, é correto afirmar-se que K é

a) Múltiplo de 10.

b) Negativo.

c) Maior que 100.

d) Ímpar.

e) Irracional.

Gabarito

1. **B**

Dados dois números reais a e b positivos e b diferente de 1.
Denotamos o logaritmo de a na base b por
$\log_b(a)$
em que b é a base do logaritmo e a é o logaritmando.
Esse logaritmo é o expoente ao qual devemos elevar a base b para se obter a como resultado:
$x = \log_b(a) \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a$
É o número ao qual se eleva b para se obter a.

2. **B**

$$E = \log_2 8 + \frac{0,001}{10000} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$E = 3 + \frac{10^{-3}}{10^4} + 2^3$$

$$E = 3 + 10^{-3-4} + 8$$

$$E = 11 + 10^{-7}$$

$$E = 11 + 0,0000001$$

$$E = 11,0000001.$$

3. **C**

$$\log_2 7 = x \Rightarrow 2^x = 7 \Rightarrow 2 < x < 3.$$

4. **E**

Basta substituir na fórmula as informações dadas no enunciado:
$M_W = 7,3$.
Substituindo na equação das escalas, vamos obter, 7,3 = -10,7 + 2/3 log(M_0). Operando:
7,3 + 10,7 = 2/3 log(M_0)
18 = 2/3 log(M_0)
9= 1/3 log(M_0)
27 = log(M_0)
Agora, podemos aplicar a definição de logarítmo:
$10^{27} = M_0$

5. **C**
A concentração de íons hidrogênio dessa fruta pode ser denotada como $[H^+]$.
Portanto:

$$\begin{aligned} pH &= -\log_{10}[H^+] \\ 2,3 &= -\log_{10}[H^+] \\ -2,3 &= \log_{10}[H^+] \\ 10^{-2,3} &= [H^+] \\ 10^{-0,3} \times 10^{-2} &= [H^+] \\ \frac{1}{10^{0,3}} \times \frac{1}{100} &= [H^+] \end{aligned}$$

Como $\log_{10} 2 = 0,3$, tem-se $10^{0,3} = 2$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{1}{100} &= [H^+] \\ [H^+] &= \frac{1}{200} \\ [H^+] &= 0,005 \text{ mol} \times L^{-1} \end{aligned}$$

6. **A**
Número inicial no visor = x
Tecla B = 5x
Tecla A = $\log_{10}(5x)$

$$\text{Tecla B} = 5 \cdot (\log_{10}(5x)) = 10 \rightarrow \log_{10}(5x) = 2 \rightarrow 5x = 10^2 \rightarrow x = \frac{100}{5} = 20$$

7. **A**

$$S = \log_4 2 + \log_2 \frac{1}{4} + \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} + (-2) + (-1)$$

$$S = \frac{1}{2} - 3$$

$$S = -\frac{5}{2}$$

8. **B**
$7^1 . 7^{\log_7 4} = 7 . 4 = 28$

9. **D**
O número 42 bilhões pode ser escrito como 42×10^9. Apertando a tecla LOG uma vez será feita a operação:

$$\log\left(42 \times 10^9\right) = \log 42 + 9.\log 10 = \log 42 + 9.(1) = \log 42 + 9$$

Como Log(100) = 2, temos que Log(42) < 2. Logo, Log(42) + 9 < 11.

Como Log(10) = 1, apertando a tecla pela 2ª vez, temos Log(11) = 1 < N < 2. É possível apertar a tecla pela 3ª vez.
Como Log(1) = 0, o Log(N) mostrará resultado será N' tal que 0 < N' < 1. O Logaritmo de número entre 0 e 1 é negativo.

Logo, apertando a tecla pela 4ª vez aparecerá um número negativo. Na 5ª vez aparecerá ERRO.

10. D

$$K = 100^{\log 3} + 1000^{\log 2} = \left(10^{\log 3}\right)^2 + \left(10^{\log 2}\right)^3 = 3^2 + 2^3 = 17 \text{ (ímpar)}.$$