

Introdução ao estudo das funções: Produto Cartesiano, relação, definição de função

Resumo

Antes de definirmos funções, é fundamental que tenhamos conhecimentos prévios sobre alguns pontos importantes, como, por exemplo:

Par ordenado:

Um par ordenado (x, y) é um par de coordenadas que serve para localizar um determinado ponto num sistema de eixos coordenados.

A coordenada **x** se chama **abscissa** e mede a distância do ponto ao **eixo y**. Por convenção, dizemos que o valor de x é positivo quando o ponto está a direita do eixo y e negativa quando está a esquerda.

Já a coordenada **y** se chama **ordenada** e mede a distância do ponto ao **eixo x**. A ordenada y é positiva quando o ponto está acima do eixo x e é negativa quando está abaixo.

Produto Cartesiano:

O Produto cartesiano entre dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) que podem ser formados, sendo x pertencendo a A e y pertencente a B.

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Ex: Sendo $A = \{ 1, 2 \}$ e $B = \{ 3, 4, 5 \}$

$A \times B = \{ (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5) \}$

$B \times A = \{ (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2) \}$

OBS:

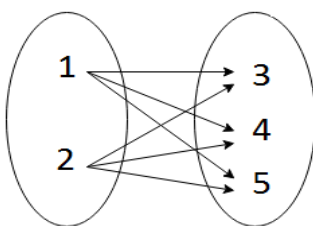
1) Nota-se que o produto cartesiano de $A \times B \neq B \times A$.

2) Nota-se também que a quantidade de pares ordenados do produto cartesiano é a multiplicação da quantidade de elementos de cada conjunto.

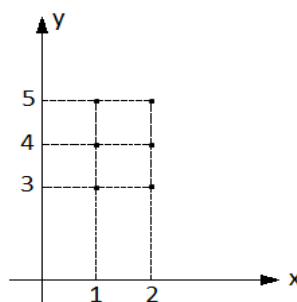
$$n(A \times B) = n(A) \times n(B), \text{ que no nosso exemplo é } 6 = 2 \times 3.$$

Representações:

a) Diagrama



b) Gráfico



Relação:

Uma relação é um conjunto de pares ordenados cujas coordenadas obedecem a uma **lei de formação**.

Ex: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 = y\}$. Assim temos que $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

Função:

Uma função é um caso particular muito especial de relação. Uma relação é dita função de A em B se todos os elementos de A possuírem **exatamente uma imagem** em B. O conjunto A é chamado **Domínio** da função e o conjunto B é chamado **Contradomínio**. Os valores encontrados em B (contradomínio) mediante os cálculos (utilizando a lei de formação) pertencem a um subconjunto de B chamado **Imagem** da função.

Ex: Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e a relação de A em B definida por $f(x) = 2x$. Observe que:

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2$$

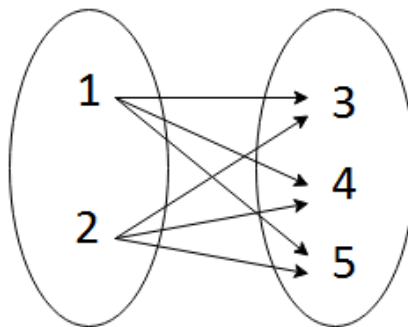
$$x = 2 \rightarrow y = 4$$

$$x = 3 \rightarrow y = 6$$

$$x = 4 \rightarrow y = 8$$

$$\text{Dom}(f) = A; \text{Cd}(f) = B; \text{Im}(f) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

OBS:

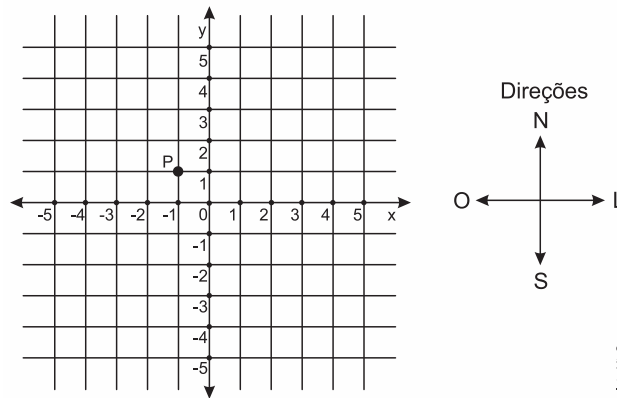


Esta relação, por exemplo, não é uma função, já que todos os elementos do domínio possuem 3 imagens, cada.

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui](#)

Exercícios

1. Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô “anfíbio” que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração.



A direção norte-sul é a mesma do eixo y , sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y , e a direção leste-oeste é a mesma do eixo x , sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x .

Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano.

Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será

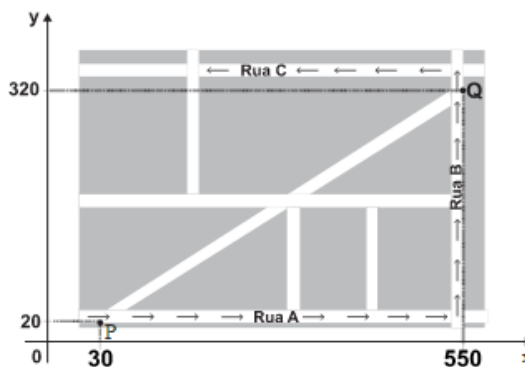
- a) $(0; 2)$.
 - b) $(0; 3)$.
 - c) $(1; 2)$.
 - d) $(1; 4)$.
 - e) $(2; 1)$.
2. Os conjuntos A e B têm, respectivamente, $5 - x$ e $3x$ elementos e $A \times B$ tem $8x + 2$ elementos. Então, se pode admitir como verdadeiro que:
- a) A tem cinco elementos
 - b) B tem quatro elementos
 - c) B tem seis elementos
 - d) A tem mais de seis elementos
 - e) B tem menos de três elementos

3. Considere a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2(x+1), & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Então o valor da razão $\frac{f(3) - f(1)}{f(2) + f(0)}$ é igual a:

- a) 0,5
b) 1,0
c) 1,5
d) 2,0
4. As atividades de comunicação humana são plurais e estão intimamente ligadas às suas necessidades de sobrevivência. O problema de contagem, por exemplo, se confunde com a própria história humana no decorrer dos tempos. Assim como para os índios mundurucus, do sul do Pará, os waimiri-atroari, contam somente de um até cinco, adotando os seguintes vocábulos: *awynimi* é o número 1, *typytyna* é o 2, *takynima* é o 3, *takyninapa* é o 4, e, finalmente, *warenipa* é o 5.
(Texto Adaptado: *Scientific American* – Brasil, “Etnomatática”. Edição Especial, Nº 11, ISSN 1679-5229)
Considere A o conjunto formado pelos números utilizados no sistema de contagem dos *waimiri-atroari*, ou seja, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nestas condições, o número de elementos da relação $R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geq x\}$ é igual a:
a) 5.
b) 10.
c) 15.
d) 20.
e) 25.
5. Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q .

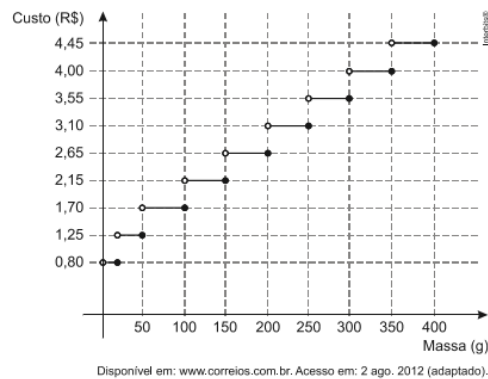


Os estudos indicam que o novo ponto **T** deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes **P** e **Q**, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos **P** e **T** e entre os pontos **T** e **Q** sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são.

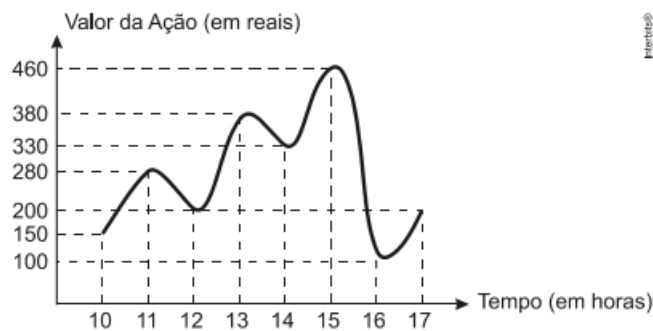
- a) (290,20)
- b) (410,0)
- c) (410,20)
- d) (440,0)
- e) (440,20)

6. Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100g, três de 200g e uma de 350g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de :

- a) 8,35.
 - b) 12,50.
 - c) 14,40.
 - d) 15,35.
 - e) 18,05.
7. O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

| Investidor | Hora da Compra | Hora da Venda |
|------------|----------------|---------------|
| 1 | 10:00 | 15:00 |
| 2 | 10:00 | 17:00 |
| 3 | 13:00 | 15:00 |
| 4 | 15:00 | 16:00 |
| 5 | 16:00 | 17:00 |

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

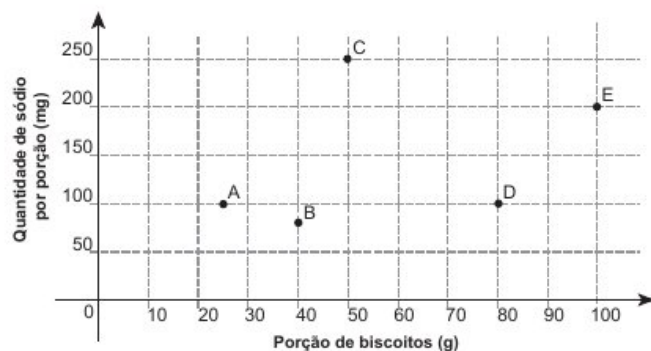
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

8. O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é:

- a) $y = 4300x$
- b) $y = 884905x$
- c) $y = 872005 + 4300x$
- d) $y = 876305 + 4300x$
- e) $y = 880605 + 4300$

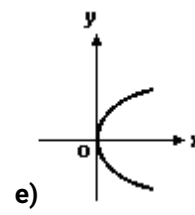
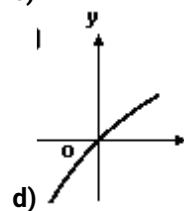
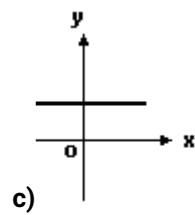
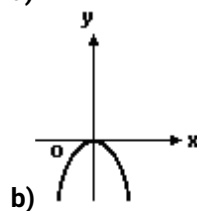
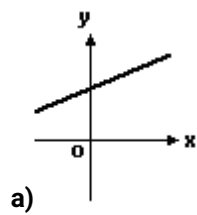
9. O sódio está presente na maioria dos alimentos industrializados, podendo causar problemas cardíacos em pessoas que ingerem grandes quantidades desses alimentos. Os médicos recomendam que seus pacientes diminuam o consumo de sódio. Com base nas informações nutricionais de cinco marcas de biscoitos (A, B, C, D e E), construiu-se um gráfico, que relaciona quantidades de sódio com porções de diferentes biscoitos.



Qual das marcas de biscoito apresentadas tem a menor quantidade de sódio por grama do produto?

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

10. Qual dos seguintes gráficos não representa uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?



Gabarito

1. C

Tem-se que $P = (-1, 1)$. Portanto, após realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será $(-1 + 2, 1 + 4 - 3) = (1, 2)$.

2. C

Sendo $x \in \mathbb{R}$ e sabendo que $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$, temos:

$$8x + 2 = (5 - x) \cdot 3x \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \\ \Rightarrow x = 2.$$

Portanto, $n(B) = 3 \cdot 2 = 6$.

3. A

$f(3) = 8$; $f(1) = 3$; $f(2) = 6$; $f(0) = 4$

Logo: $\frac{8-3}{6+4} = \frac{5}{10} = 0,5$

4. C

É fácil ver que o resultado pedido é dado por $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

5. E

Temos os pontos $P(30, 20)$ e $Q(550, 320)$. A distância percorrida pelo ônibus foi de: $(550 - 30) + (320 - 20) = 820$.

O ponto T deve dividir a trajetória ao meio, logo, a distância percorrida P e T deve ser 410, assim, as coordenadas desse ponto será de $T(30 + 410, 20) = T(440, 20)$.

6. D

A partir do gráfico é possível observar que a postagem de uma carta de 100 g custa R\$ 1,70, de uma carta de 200 g custa R\$ 2,65 e de uma carta de 350 g custa R\$ 4,00.

Então, a postagem de duas cartas de 100g, três de 200g e uma de 350g, será:

$$2 \cdot 1,70 + 3 \cdot 2,65 + 1 \cdot 4 = 3,40 + 7,95 + 4 = 15,35.$$

7. A

Calcula-se o ganho por ação de cada investidor através da diferença entre o valor da venda e o da compra. Os valores de compra e venda são retirados do gráfico de acordo com a hora em que foram efetuados. Aquele cujo valor for maior é o que fez o melhor negócio, uma vez que todos venderam a mesma quantidade de ações.

Investidor 1: $460 - 150 = 310$

Investidor 2: $200 - 150 = 50$

Investidor 3: $460 - 380 = 80$

Investidor 4: $100 - 460 = -360$ (prejuízo de R\$ 360,00)

Investidor 5: $150 - 50 = 100$

O maior valor é 310 reais, obtido pelo investidor 1.

8. C

A expressão que relaciona a quantidade y de trabalhadores e o número de meses x a partir de janeiro é:

$$y = (880\,605 - 4\,300) + 4300 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 872\,005 + 4300x.$$

9. D

Analisando o gráfico, temos que a quantidade de sódio por grama é no produto

A igual a $100/25 = 4$

B igual a $80/40 = 2$

C igual a $250/50 = 5$

D igual a $100/80 = 1,25$

E igual a $200/100 = 2$

A marca que tem, menos quantidade de sódio por grama é a D.

10. E

Para ser função, todo valor de x deve ter um único correspondente em y . Se ao passar uma reta vertical no gráfico e mais de dois pontos interceptarem a curva não é função. Isso ocorre na alternativa E