Função exponencial

Resumo

Função exponencial

A função exponencial é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ que associa a todo número real x ao resultado da potência a^x, em que a, chamada base da função exponencial é um número real positivo e diferente de 1.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \to a^x$$

Cuidado! Precisamos tomar alguns cuidados em relação à base a.

Se a base fosse negativa, nem sempre o resultado da função não seria um número real. Observe o exemplo:

$f(x) = (-2)^x$

$f(0,5) = (-2)^{0,5} = \sqrt{-2}$

Sabemos que esse resultado não existe no conjunto dos números reais.

Se a base for igual a zero, também poderá nos trazer problemas. Observe o exemplo:

$f(x) = o^x$

$f(-1) = (0)^{-1} = \frac{1}{0}$

Sabemos que divisão por 0 é indeterminado.

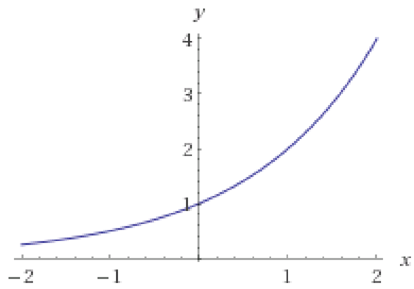
Se a base for igual a 1, o resultado da função seria sempre 1, o que a tornaria uma função constante e não exponencial.

Gráfico

Sendo respeitadas todas as restrições, construiremos o gráfico da função exponencial. Dividiremos em casos:

1º caso: a > 1

Ex: $f(x) = 2^x$

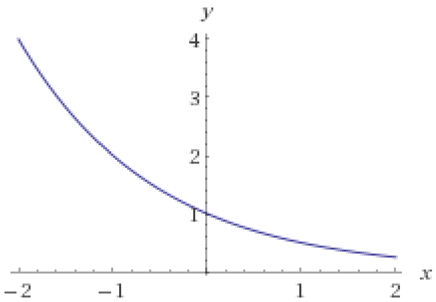


Podemos observar algumas coisas importantes:

- A função é crescente, pois a base é maior do que 1.
- A curva nunca corta o eixo x, pois é impossível que uma potência de base diferente de zero dê 0.
- A curva corta o eixo y em y = 1, pois, quando x = 0, temos que $f(0) = a^0 = 1\ (a \neq 0)$.

2º caso: 0 < a < 1

Ex: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Podemos observar algumas coisas importantes:

- A função é decrescente, pois a base está entre 0 e 1.
- A curva nunca corta o eixo x, pois é impossível que uma potência de base diferente de 0 dê 0.
- A curva corta o eixo y em y = 1, pois, quando x = 0, temos que $f(0) = a^0 = 1$ (a ≠ 0).

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \times 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e p(t) é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.

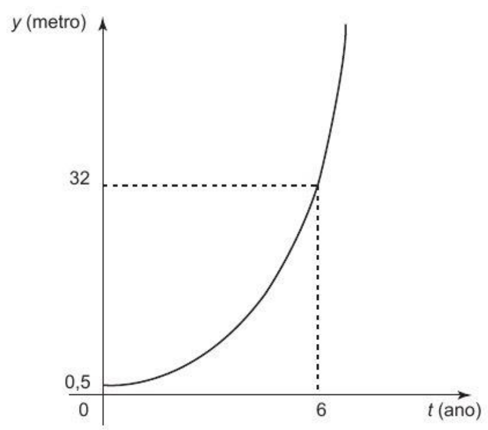
b) reduzida à metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

2. Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

a) 3.

b) 4.

c) 6.

d) $\log_2 7$.

e) $\log_2 15$.

3. O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é s(t) = 1800 X $(1{,}03)^t$. De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,

a) 7.416,00.

b) 3.819,24.

c) 3.709,62.

d) 3.708,00.

e) 1.909,62.

4. Em um experimento uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

a) Afim

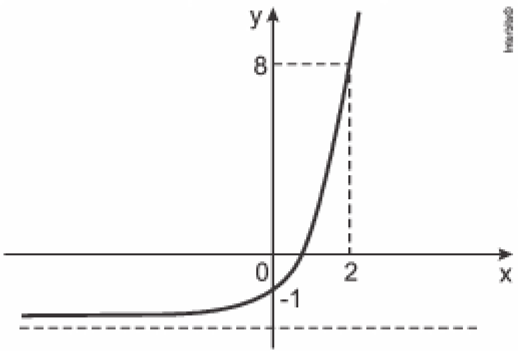
b) Seno

c) Cosseno

d) logarítmica crescente

e) exponencial

5. A função real f definida por $f(x) = a3^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



Pode-se afirmar que o produto (a.b) pertence ao intervalo real:

a) $[-4, -1[$

b) $[-1, 2[$

c) $[2, 5[$

d) $[5, 8]$

e) $]8, 10]$

6. Em um plano cartesiano o ponto P(a,b), com a e b reais, é o ponto máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Se a função $g(x) = 3^{-2x+k}$, com k um número real, é tal que g(a) = b, o valor de k é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 1

e) 0

7. Em 1798, Thomas Malthus, no trabalho “An Essay on the Principle of Population”, formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo. Esse modelo, utilizado para acompanhar o crescimento de populações ao longo do tempo t, fornece o tamanho N(t) da população pela lei $N(t) = N_0 \times e^{kt}$, onde N_0 representa a população presente no instante inicial e k, uma constante que varia de acordo com a espécie de população. A população de certo tipo de bactéria está sendo estudada em um laboratório, segundo o modelo de Thomas Malthus. Inicialmente foram colocadas 2000 bactérias em uma placa de Petri e, após 2 horas, a população inicial havia triplicado. A quantidade de bactérias presente na placa 6 horas após o início do experimento deverá aumentar:

a) 6 vezes

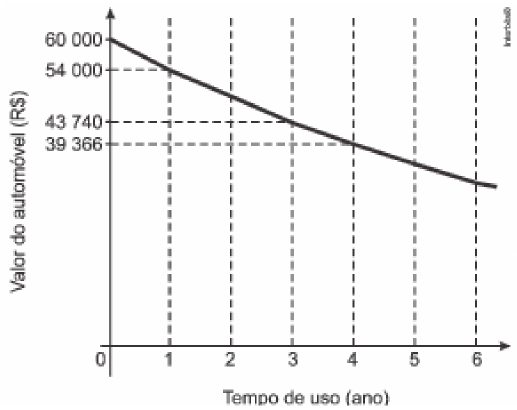
b) 8 vezes

c) 18 vezes

d) 27 vezes

e) 30 vezes

8. Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b.a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

a) 48000

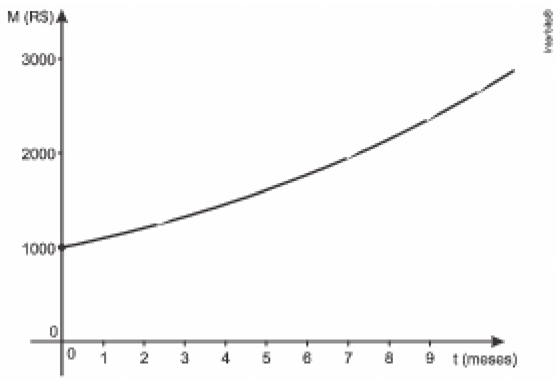
b) 48114

c) 48600

d) 48870

e) 49683

9. Uma aplicação bancária é representada graficamente conforme figura a seguir.



M é o montante obtido através da função exponencial M = C.$(1,1)^t$, C é o capital inicial e t é o tempo da aplicação. Ao final de 04 meses o montante obtido será de :

a) R$ 121,00

b) R$ 146,41

c) R$ 1210,00

d) R$ 1310,00

e) R$ 1464,10

10. A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1000 \times 2^{0,0625t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

a) 8

b) 12

c) 16

d) 24

e) 32

Gabarito

1. D

Desde que $20\text{min} = \frac{1}{3}\text{h}$, vem

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 80.$$

Portanto, após 20 min, a população será duplicada

2. B

Sendo $y(0) = 0,5$, temos

$a^{0-1} = 0,5 \Leftrightarrow a = 2.$

Assim, queremos calcular o valor de t para o qual se tem $y(t) = 0,5 + 7,5 = 8$, ou seja,

$2^{t-1} = 8 \Leftrightarrow t = 4.$

3. E

Fazendo os cálculos:

$$s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$$
$$s(2) = 1.800 \cdot (1,03)^2$$
$$s(2) = 1909,62$$

4. E

O número de bactérias $N(t)$, em função do tempo t, em horas, pode ser modelado por uma função do tipo $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t}$, com N_0 sendo a população inicial. A função N é exponencial.

5. A

Calculando:

$$f(x) = a \cdot 3^x + b$$
$$f(0) = -1 \to a \cdot 3^0 + b = -1 \to a + b = -1 \to b = -1 - a$$
$$f(2) = 8 \to a \cdot 3^2 + b = 8 \to 9a + b = 8 \to 9a - 1 - a = 8 \to \left\langle \begin{array}{l} a = \frac{9}{8} \\ b = -\frac{17}{8} \end{array} \right\} \to a \cdot b = \frac{-153}{64} \in [-4, -1[$$

6. C

Calculando a abscissa do vértice da parábola, temc

$$x_V = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$$

A ordenada do vértice será dada por:

$$y_V = -1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 9$$

Considerando , agora, que $g(1) = 9$, temos:

$$3^{-2 \cdot 1 + k} = 9 \Rightarrow 3^{k-2} = 3^2 \Rightarrow k = 4$$

7. D

Após 2 horas, teremos:

$$3 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{2t} \Rightarrow e^{2t} = 3$$

Após 6 horas, teremos:

$$N(6) = N_0 \cdot e^{6t} = N_0 \cdot \left(e^{2t}\right)^3 = N_0 \cdot (3)^3 = 27 \cdot N_0$$

Portanto, a resposta correta será a alternativa [D], 27 vezes.

8. C

Se $f(0) = 60000$, então $b = 60000$. Ademais, sabendo que $f(1) = 54000$, vem

$$54000 = 60000 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{10}.$$

Por conseguinte, a resposta é

$$f(2) = 60000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \text{R\$ } 48.600{,}00.$$

9. E

Para obter o montante obtido ao final de quatro meses basta aplicar $t = 4$ na função $M(t) = C \cdot (1{,}1)^t$. Porém, deve-se observar o que o valor do capital inicial (C), segundo o gráfico, é $C = 1000$, pois é o primeiro valor da curva exponencial. Desta forma, temos:

$$M(t) = C \cdot (1{,}1)^t$$
$$M(t) = 1000 \cdot (1{,}1)^t$$
$$M(4) = 1000 \cdot (1{,}1)^4$$
$$M(4) = 1000 \cdot 1{,}4641$$
$$M(4) = 1464{,}10 \text{ reais}$$

10. C

Para $t = 0 \Rightarrow V(0) = 1000 \cdot 2^{0,0625 \cdot (0)} = 1000$

Logo,

Para $t = ? \Rightarrow V(t) = 2000$

$\Rightarrow 2000 = 1000 \cdot 2^{0,0625 \cdot (t)}$

$\Rightarrow 2^{0,0625 \cdot (t)} = 2$

$\Rightarrow 0,0625 \cdot (t) = 1$

$\Rightarrow t = 16$