Números Complexos: Número imaginário, potências de i, forma algébrica

Resumo

Os conjuntos dos números complexos ($\mathbb{C}$) é mais abrangente que o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Esse conjunto surgiu após diversos estudos, principalmente após tentativas de se resolver equações do segundo e do terceiro grau, pois os matemáticos se depararam raízes quadradas de números negativos, que não podem ser expressas no conjunto dos números reais. Para os mais íntimos, dizemos que números complexos são números de duas dimensões. Legal, não é?

Forma Algébrica

Todo número complexo z pode ser escrito de maneira única na forma:

$$\boxed{z = a + bi \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)}$$

Essa é a forma algébrica de se escrever um número complexo. Observe que um número complexo tem duas partes:

Partes real: Re(z) = a Parte imaginária: Im(z) = b

- i é a unidade imaginária, tal que $i^2 = -1$;
- Como $i^2 = -1$, podemos definir i como $i = \sqrt{-1}$;

Potências de i

Usando propriedades já conhecidas de potenciação e sabendo que $i = \sqrt{-1}$, temos:

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases}$$

A partir da potência i^4 as outras vão se repetindo de 4 em 4. Por isso, para calcularmos i^n (n um número inteiro qualquer iremos dividir o expoente n por 4 e o resto será a potência que usaremos.

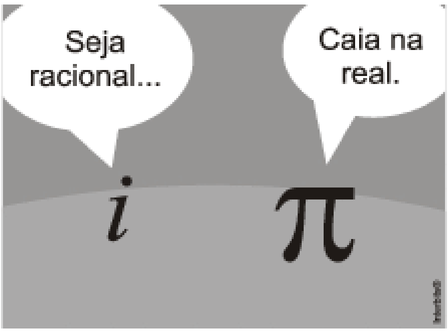
Ex.: Calcule o valor de i^{247}.

Como dito, dividindo 247 por 4, encontramos resto 3. Ou seja:

$i^{247} = 1^3 = -i$

Exercícios

1. A charge ao lado, intitulada “Discussão Matemática”, ilustra números pertencentes a dois conjugados numéricos – o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e o conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$).



Fonte: www.osvigaristas.com.br. Acesso: 13 abr. 2012

Com relação a esses dois números, é **CORRETO** afirmar que

a) $\pi \notin \mathbb{C}$ e $i \in \mathbb{C}$

b) $\pi \in \mathbb{C}$ e $i \notin \mathbb{R}$

c) $\pi \in \mathbb{C}$ e $i^2 \notin \mathbb{R}$

d) $\pi \notin \mathbb{C}$ e $\pi i \in \mathbb{R}$

2. A soma dos quadrados dos números complexos que são as raízes da equação $x^4 - 1 = 0$ é igual a:

a) 8

b) 0

c) 4

d) 2

3. O número $z = (m - 3) + (m^2 - 9)i$ será um número real não nulo para

a) $m = -3$

b) $m < -3$ ou $m > 3$

c) $-3 < m < 3$

d) d)$m = 3$

e) $m > 0$

4. Chamamos de unidade imaginária e denotamos por i o número complexo tal que i² = -1. Então, $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + ... + i^{2013}$ vale

a) 0.
b) 1.
c) i.
d) 1 + i.

5. Determine o valor de k, de modo que $z = \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\right) + i$ seja imaginário puro

a) $-\frac{1}{2}$
b) -1
c) 0
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

6. O valor da potência $(1 - i)^{10}$ é:

a) 11i.
b) 5i.
c) –32i.
d) –50i.
e) 1 5

7. Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1, então, o valor de $5.i^{227} + i^6 - i^{13}$ é igual a:

a) 1 + i
b) 4i – 1
c) -6i – 1
d) -6i

8. A soma e o produto de dois números são, respectivamente, dois e cinco, podemos afirmar corretamente que

a) os dois são números racionais.
b) os dois são números irracionais.
c) um dos números é racional e o outro é irracional.
d) os dois números são complexos não reais

9. Sendo $z = (m^2 - 5m + 6) + (m^2 - 1)i$, os valores de m de modo que z seja um imaginário puro e um número real são, respectivamente:

a) $m = -1$ e $m = 2$

b) $m = 1$ e $m = 3$

c) $m = 2$ ou $m = 3$ e $m = 1$ ou $m = -1$

d) $m = 1$ ou $m = -1$ e $m = 2$ ou $m = 3$.

10. No número complexo $z = -3 - 2i$, é verdade que:

a) $Re(z) = -3$ e $Im(z) = -2$

b) $Re(z) = -2$ e $Im(z) = -3$

c) $Re(z) = -3$ e $Im(z) = 2$

d) $Re(z) = 3$ e $Im(z) = -2$

e) $Re(z) = 3$ e $Im(z) = 2$

Gabarito

1. **B**
Observe:
O π é um número real (todo o irracional é real), logo π é complexo, ou seja, $\pi \in \mathbb{C}$.
A unidade imaginária i não é real, ou seja, $i \notin \mathbb{R}$.
b.

2. **B**
Tem-se que:
$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x + i)(x - i). \end{aligned}$$
Por conseguinte, as raízes da equação são $-1, 1, -i$ e i.

A resposta é $(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 0$.

3. **A**
Observe que se z é um número real, então $m^2 - 9 = 0$, ou seja, m = 3 ou m = -3. Porém, se m = 3, então o z será nulo. Ou seja, m = -3.

4. **D**
Calculando a soma dos 2014 termos de uma P.G de primeiro termo 1 e razão i, temos:
$$i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2013} = \frac{1.(i^{2014} - 1)}{i - 1} = \frac{i^2 - 1}{i - 1} = \frac{-2}{i - 1} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = i + 1$$

5. **E**
Para que z seja imaginário puro, então sua parte real precisa ser nula, ou seja:
$$\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\right) = 0$$
Resolvendo a equação, encontramos k = 1.

6. **C**
Sabendo que
$i^5 = i^4 \cdot i = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = i,$
vem
$$\begin{aligned} (1-i)^{10} &= [(1-i)^2]^5 \\ &= (1 - 2i + i^2)^5 \\ &= (-2i)^5 \\ &= (-2)^5 \cdot i^5 \\ &= -32i. \end{aligned}$$

7. C
Sabemos que:

$$227 = 56 \cdot 4 + 3$$
$$6 = 1 \cdot 4 + 2$$
$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

Portanto,

$$5 \cdot i^{227} + i^{6} - i^{13} = 5 \cdot i^{3} + i^{2} - i = -5i - 1 - i = -6i - 1$$

8. D
Sejam x e y os números. Tem-se que:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x \cdot y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x \cdot (2 - x) = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ (x - 1)^2 = -4 \end{cases}.$$

Logo, sabendo que $(x-1)^2 \geq 0$ para todo x real, podemos concluir que x é um complexo não real. Em consequência, y também é um complexo não real.

9. C
Para que o complexo z seja um imaginário puro, sua parte real deve ser nula ou seja, devemos ter $m^2 - 5m + 6 = 0$, que resolvida encontramos m = 2 ou m = 3.
Agora, para que o complexo z seja um real, sua parte imaginária deve ser nula ou seja, devemos ter $m^2 - 1 = 0$, que resolvida encontramos m = -1 ou m = 1.

10. A
Temos que a parte real é -3 e a parte imaginária é -2.