

## Equilíbrio de corpos extensos

### Resumo

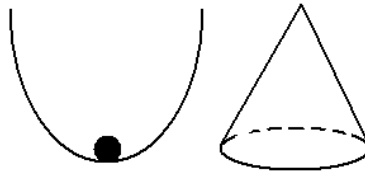
---

A ideia de equilíbrio é para muitos a ideia de ficar parado. Contudo o conceito de equilíbrio para uma partícula compreende o equilíbrio estático e o equilíbrio dinâmico:

- **Equilíbrio estático:** a partícula possui resultante das forças nula e está em repouso em relação a um referencial.
- **Equilíbrio dinâmico:** a partícula possui resultante das forças nula e está em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial.

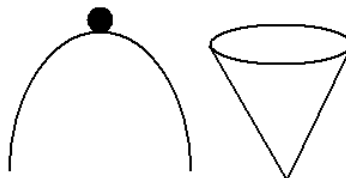
Há ainda situações em que classificamos o equilíbrio:

**Estável:** a partícula/objeto retorna à posição de equilíbrio após uma pequena perturbação.



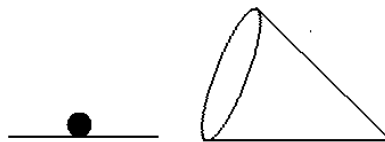
Uma bola no fundo de um poço ou um cone em pé.

**Instável:** a partícula/objeto não retorna à posição, afastando-se cada vez mais da posição de equilíbrio.



Uma bola sobre uma elevação ou um cone de cabeça para baixo.

**Indiferente:** a partícula/objeto fica em nova situação de equilíbrio em outra posição.



Uma bola sobre uma mesa ou um cone deitado.

Para corpos extensos há equilíbrio de translação e rotação como será visto mais a frente.

Antes, vamos entender o que é um ponto material e um corpo extenso.

Quando um corpo é suficientemente pequeno tal que não admite rotação é chamado **ponto material** (assim sua dimensão é pequena em relação a outras medidas relevantes).

Quando um corpo admite rotação ele é chamado de **corpo extenso** (sua dimensão é comparável a outras medidas relevantes).

**Obs.:** É comum pensar apenas no tamanho do objeto para considerá-lo como ponto material ou corpo extenso, por exemplo:

Um trem possui 100m de comprimento. Quando o trem faz uma viagem de 450 km com uma velocidade de 90 km/h (25m/s) leva quanto tempo?

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$90 = \frac{450}{t}$$

$$t = 5h$$

Não se considera o tamanho do trem na conta, o trem pode ser considerado ponto material.

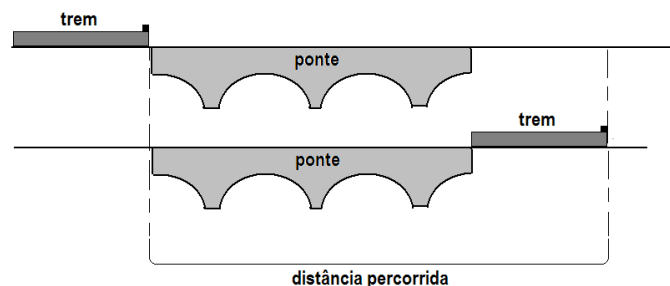
Agora o mesmo trem de 100m vai atravessar uma ponte de 400m com uma velocidade de 90km/h (25m/s), quanto tempo leva?

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$25 = \frac{100 + 400}{t} = \frac{500}{t}$$

$$t = 20s$$

Observe que agora é preciso somar o comprimento do trem ao comprimento da ponte (100 + 400) para resolver o problema.



Agora, ele pode ser considerado corpo extenso.

Um ponto material não possui dimensões relevantes, então as forças que atuam estão sempre localizadas no mesmo ponto.

Para um corpo extenso é preciso conhecer o centro de gravidade ou o centro de massa do corpo.

**Centro de gravidade (CG):** ponto de aplicação da resultante das forças de gravidade que atuam em cada partícula de um sistema. Ponto de aplicação da força peso de um corpo.

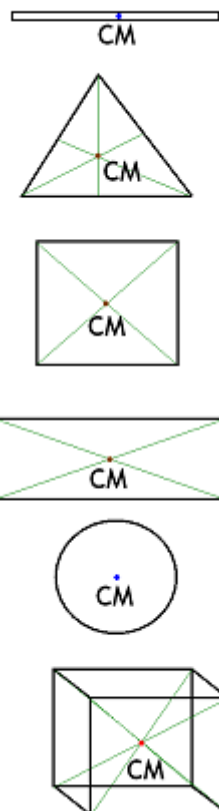
**Centro de massa (CM):** ponto em que pode-se admitir que a massa está concentrada.

Nos campos gravitacionais uniformes, o centro de gravidade coincide com o centro de massa. Os objetos homogêneos e com formatos geométricos simétricos possuem o centro de massa no “centro”.

Por exemplo, o centro de massa de um quadrado é no encontro de suas diagonais, do círculo é no seu centro e no triângulo é no baricentro.

O centro de massa pode ser calculado para uma figura linear, plana ou volumétrica.

Observe o centro de massa de algumas geometrias regulares.



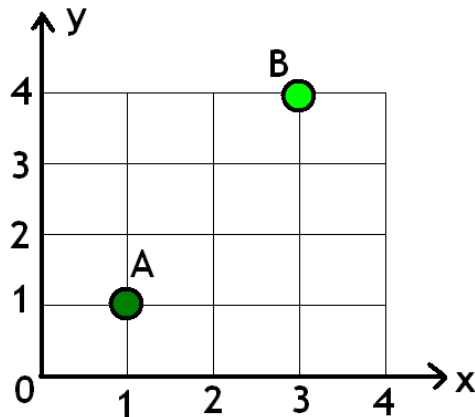
- Cálculo do Centro de massa  
Para duas partículas (A e B) em duas dimensões (x e y)

$$X_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$Y_{CM} = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B}$$

**Obs.:** Por analogia em três dimensões basta inserir a componente Z.

Exemplo: Considere uma massa A de 2,0 kg e uma massa B de 3,0 kg no plano XY abaixo.



Calcule as coordenadas da posição do centro de massa dos sistemas formados pelas duas partículas.

$$X_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$X_{CM} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = \frac{7}{3} = 2,3$$

$$Y_{CM} = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B}$$

$$Y_{CM} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

Coordenadas  $x = 2,3$  e  $y = 3$

- Condições de equilíbrio**

Equilíbrio da partícula

Condições:

- Somatório das forças que atuam sobre a partícula é nulo.
- Não sobram forças – a Primeira Lei de Newton é suficiente para garantir o equilíbrio.

Equilíbrio do corpo extenso

- Somatório das forças é igual a zero;

$$\sum F = 0$$

A força resultante ser número garante o equilíbrio de translação, isto é, o corpo não vai andar.

- Somatório dos torques é igual a zero;

$$\sum M = 0$$

O torque resultante igual a zero garante o equilíbrio de rotação, isto é, o corpo não vai girar.

- Momento de uma Força ou Torque**

O momento da força ou torque é a grandeza vetorial que produz rotação. Para que se possa rodar algum objeto é preciso um ponto de apoio e de uma força. A grandeza torque é o produto da força pela distância entre a reta suporte da força e o ponto de apoio considerado.


Contudo é necessário usar apenas a parte escalar do torque nas análises que costumamos aplicar no ensino médio.

Assim o torque é resumido a

$$M = Fd.$$

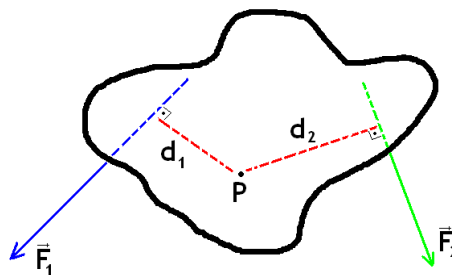
Costuma-se atribuir um sinal ao sentido da rotação:

Geralmente costuma-se usar



para o sentido de rotação

Considere a figura plana abaixo onde estão aplicadas duas forças.



Em relação ao ponto P

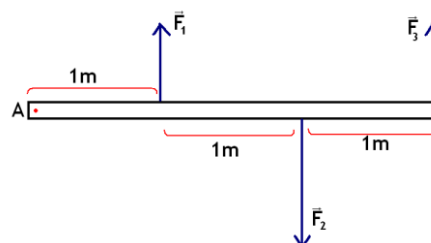
$$M_1 = +F_1 d_1$$

$$M_2 = -F_2 d_2$$

Vamos fazer um exemplo numérico

Uma haste de massa desprezível em repouso na horizontal recebe as três forças abaixo.

Na figura as forças valem:



$$F_1 = 4 \text{ N}$$

$$F_2 = 10 \text{ N}$$

$$F_3 = 6 \text{ N}$$

O corpo possui uma força resultante que vale zero. As forças para cima somam o mesmo valor que as somas para baixo.

Contudo o torque resultante não é zero.

Vamos fazer o torque resultante em relação ao ponto A da barra.

Usando a convenção de rotação:

Horário = negativo

Anti-horário = positivo

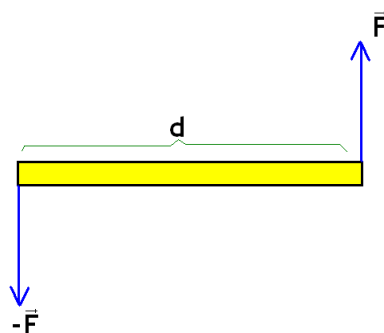
$$M_{\text{RES}} = +F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

$$M_{\text{RES}} = 4 \times 1 - 10 \times 2 + 6 \times 3$$

$$M_{\text{RES}} = 2 \text{ Nm}$$

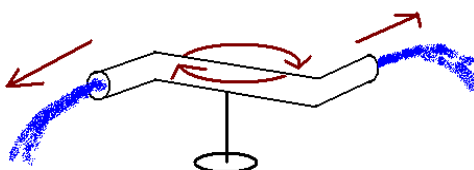
O torque resultante teve sinal positivo, isto significa que a barra vai girar no sentido anti-horário em relação ao ponto A

Um caso interessante que não terá torque nulo é o chamado binário.



$$M = \pm Fd$$

Binários são úteis quando deseja-se que o corpo fique girando, por exemplo, irrigadores de jardim.



---

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui](#)

---

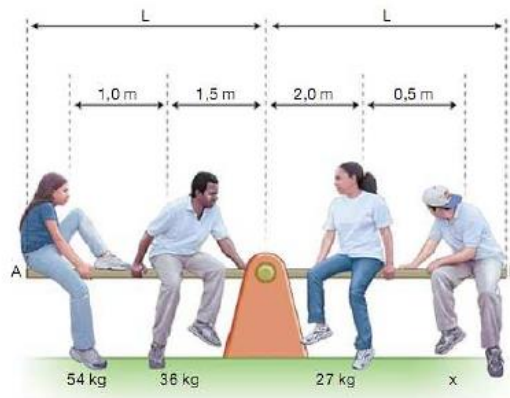
## Exercícios

1. Uma barra de peso desprezível está em equilíbrio na posição horizontal, conforme o esquema a seguir.



As massas de 90kg e 1,5kg se encontram em sua extremidade, sendo que o ponto de apoio está a 40cm da extremidade direita. Qual o valor da distância "x", do apoio até a extremidade esquerda, para manter a barra em equilíbrio?

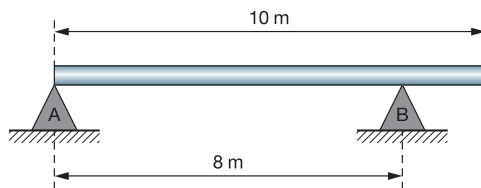
- 240cm
  - 120cm
  - 1,5cm
  - 2/3cm
2. Após uma aula sobre o "Princípio das Alavancas", alguns estudantes resolveram testar seus conhecimentos num playground, determinando a massa de um deles. Para tanto, quatro sentaram-se estrategicamente na gangorra homogênea da ilustração, de secção transversal constante, com o ponto de apoio em seu centro, e atingiram o equilíbrio quando se encontravam sentados nas posições indicadas na figura.



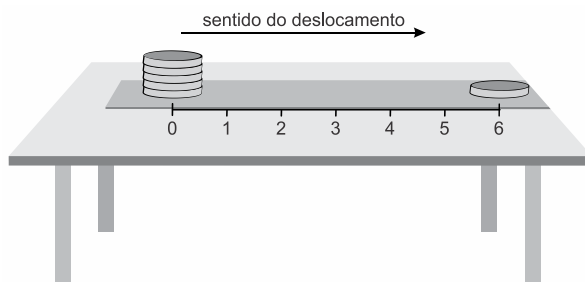
Dessa forma, se esses estudantes assimilaram corretamente o tal princípio, chegaram à conclusão de que a massa desconhecida, do estudante sentado próximo à extremidade B, é:

- indeterminável, sem o conhecimento do comprimento da gangorra.
- 108kg
- 63kg
- 54kg
- 36kg

3. A barra homogênea de peso  $P=2000\text{N}$  está em equilíbrio sobre dois apoios. A força de reação no ponto B vale:



- a)  $2000\text{N}$   
b)  $1000\text{N}$   
c)  $1500\text{N}$   
d)  $1250\text{N}$   
e)  $2250\text{N}$
4. Um sistema é constituído por seis moedas idênticas fixadas sobre uma régua de massa desprezível que está apoiada na superfície horizontal de uma mesa, conforme ilustrado abaixo. Observe que, na régua, estão marcados pontos equidistantes, numerados de 0 a 6.

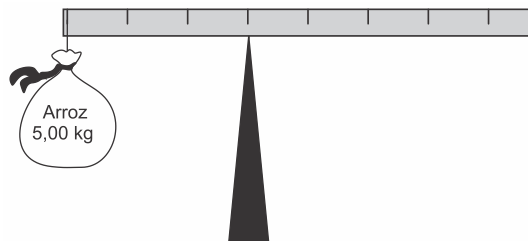


Ao se deslocar a régua da esquerda para a direita, o sistema permanecerá em equilíbrio na horizontal até que determinado ponto da régua atinja a extremidade da mesa. De acordo com a ilustração, esse ponto está representado pelo seguinte número:

- a) 4  
b) 3  
c) 2  
d) 1

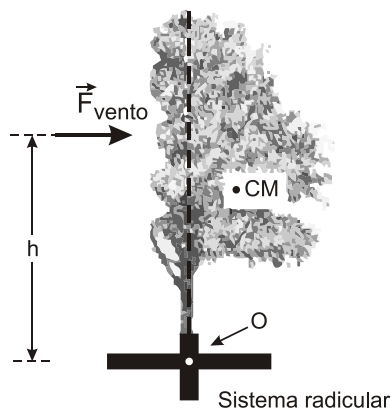


5. Em um experimento, um professor levou para a sala de aula um saco de arroz, um pedaço de madeira triangular e uma barra de ferro cilíndrica e homogênea. Ele propôs que fizessem a medição da massa da barra utilizando esses objetos. Para isso, os alunos fizeram marcações na barra, dividindo-a em oito partes iguais, e em seguida apoiaram-na sobre a base triangular, com o saco de arroz pendurado em uma de suas extremidades, até atingir a situação de equilíbrio.



Nessa situação, qual foi a massa da barra obtida pelos alunos?

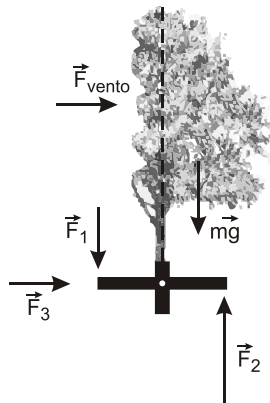
- a) 3,00 kg
  - b) 3,75 kg
  - c) 5,00 kg
  - d) 6,00 kg
  - e) 15,00 kg
6. A figura a seguir mostra uma árvore que sofreu uma poda drástica e perdeu a parte esquerda da sua copa. Após a poda, o centro de massa (**CM**) da árvore passou a ser à direita do eixo do tronco. Uma forte rajada de vento exerce uma força horizontal  $\vec{F}_{\text{vento}}$  sobre a árvore, atuando ao longo de uma linha que fica a uma altura  $h$  da raiz.



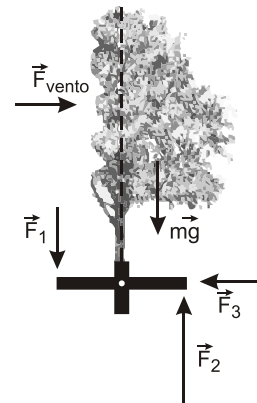
Para que a árvore permaneça em equilíbrio estático é necessário que tanto a força quanto o torque resultante na árvore sejam nulos. O torque de uma força com relação a um ponto **O** é dado pelo produto do módulo da força pelo seu braço, que é a distância do ponto **O** à linha de ação da força.

Assim, qual é o conjunto de forças agindo nas raízes dessa árvore que poderia garantir seu equilíbrio estático?

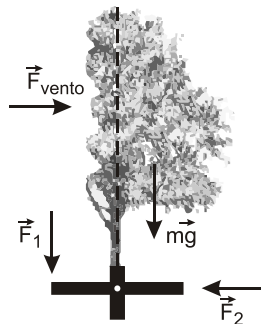
a)



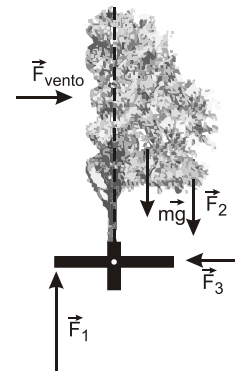
c)



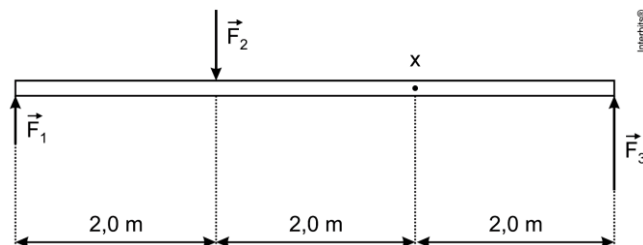
b)



d)



7.



A barra homogênea, de peso desprezível, está sob a ação de três forças de intensidades  $F_1 = 20 \text{ N}$ ,  $F_2 = 40 \text{ N}$  e  $F_3 = 60 \text{ N}$ . A rotação produzida na barra em torno do ponto  $x$  é

- no sentido anti-horário com um momento resultante de  $1,2 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$ .
- no sentido horário com um momento resultante de  $1,2 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$ .
- no sentido anti-horário com um momento resultante de  $1,6 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$ .
- no sentido horário com um momento resultante de  $1,6 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$ .
- Inexistente.

8. Em Física, um determinado corpo, ao ser analisado, pode ser considerado como sendo um ponto material ou um corpo extenso. Considerar um corpo como ponto material equivale a admitir que, na situação física em que está sendo analisado, ele só poderá apresentar movimento de translação, uma vez que não se pode admitir o movimento de rotação para um único ponto. Por outro lado, o corpo extenso pode apresentar tanto movimento de translação quanto movimento de rotação.

Com base no texto e em seus conhecimentos, analise as afirmativas a seguir:

- I. Um corpo extenso está em equilíbrio de translação apenas quando seu centro de massa está em repouso em relação a um determinado referencial inercial.
- II. A condição de equilíbrio de translação de um corpo extenso é que a soma das forças externas que atuam no corpo seja nula.
- III. A condição de equilíbrio de rotação de um corpo extenso sob a ação de um conjunto de forças coplanares é que o momento resultante em relação a qualquer eixo perpendicular ao plano das forças seja nulo.

Está(ão) correta(s) apenas a(s) afirmativa(s):

- a) I.
  - b) II.
  - c) I e III.
  - d) II e III.
9. Marcelo decidiu construir uma gangorra para poder brincar com seu filho. Sobre um cavalete, ele apoiou uma tábua de modo que, quando ambos se sentassem, estando cada um em um dos extremos da tábua e sem tocar os pés no chão, a gangorra pudesse ficar equilibrada horizontalmente, sem pender para nenhum dos lados. Considerou também o fato de que seu peso era três vezes maior que o de seu filho, e que a distância entre os locais onde ele e o filho deveriam se sentar era de 3,2 m.

De acordo com essas considerações, a distância entre o ponto onde o filho de Marcelo deve se sentar e o ponto de apoio da tábua no cavalete é, aproximadamente, de:

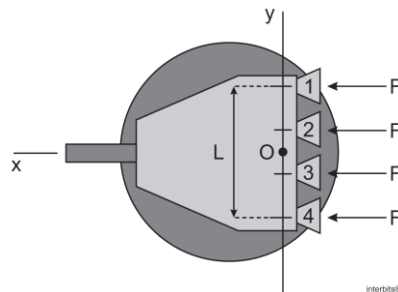
Despreze o peso da tábua, bem como as dimensões dos corpos de Marcelo e de seu filho.

- a) 0,8 m.
- b) 1,2 m.
- c) 1,6 m.
- d) 2,0 m.
- e) 2,4 m.

- 10.** Sonda New Horizons liga para casa e avisa que está tudo bem em Plutão
- A sonda New Horizons, que chegou ao ponto mais próximo de Plutão nesta terça-feira (14), está funcionando e indo na direção do cinturão de Kuiper, na fronteira do Sistema Solar. Às 21h53 da terça, no horário de Brasília, chegou à NASA o sinal enviado pela espaçonave confirmando o sucesso do rasante que fez sobre o planeta anão. “A espaçonave está saudável, registrou dados do sistema de Plutão e está de saída”, anunciou Alice Bowman, chefe de operações da missão, que recebeu os sinais positivos de todos os sistemas da New Horizons, além de conseguir definir a localização exata da sonda.

Disponível em: <http://info.abril.com.br/noticias/ciencia/2015/07/sonda-new-horizonsliga-para-casa-e-avisa-que-esta-tudo-bem-em-plutao.shtml>. Acessado em: 16 de julho de 2015.

Suponha que essa sonda possua quatro pequenos motores que promovem a impulsão da nave na direção  $x$  com forças de módulo  $F$ . Os motores estão igualmente separados em uma distância total  $L$ , conforme mostra a figura a seguir. Havendo uma pane que faça o motor 2 parar de funcionar, é possível ajustar da Terra uma nova força a ser desenvolvida no motor 1, de forma que a nave não gire em torno do ponto  $O$ , no plano  $xy$ .



Essa nova força deve ser

- a)  $2F$
- b)  $4F$
- c)  $F/2$
- d)  $2F/3$
- e)  $4F/3$

## Gabarito

1. D

Pelo princípio do momento de força em relação ao eixo temos:  $M = F \cdot d$ 

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

$$90 \cdot x = 1,5 \cdot 40$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

2. D

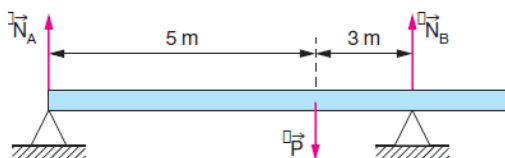
Pelo princípio do momento de força em relação ao eixo temos:  $M = F \cdot d$ 

$$M_1 + M_2 = M_3 + M_4$$

$$54 \cdot 2,5 + 36 \cdot 1,5 = 27 \cdot 2,0 + x \cdot 2,5$$

$$x = 54 \text{ kg}$$

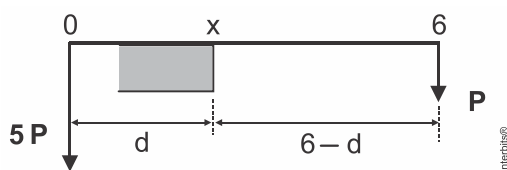
3. D



$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_A = 0 \quad N_B \cdot 8 + N_A \cdot 0 - P \cdot 5 &= 0 \\ N_B \cdot 8 &= 2\,000 \cdot 5 \\ N_B &= 1\,250 \text{ N} \end{aligned}$$

4. D

A figura representa a situação quando a régua está na iminência de tombar.

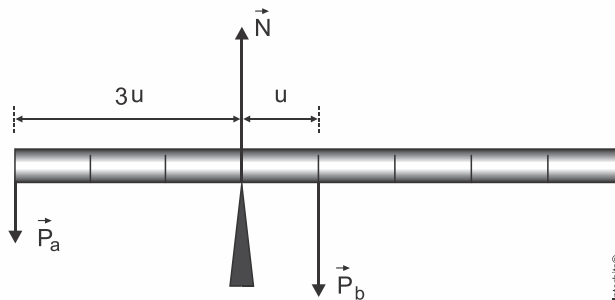


No equilíbrio:

$$M_P = M_{5P} \Rightarrow 5P \cdot d = P \cdot (6 - d) \Rightarrow 5d = 6 - d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1.}$$

## 5. E

Na barra agem as três forças mostradas na figura: peso do saco arroz ( $\vec{P}_a$ ), o peso da barra ( $\vec{P}_b$ ), agindo no centro de gravidade pois a barra é homogênea e a normal ( $\vec{N}$ ), no ponto de apoio.



Adotando o polo no ponto de apoio, chamando de  $u$  o comprimento de cada divisão e fazendo o somatório dos momentos, temos:

$$M_{\vec{P}_b} = M_{\vec{P}_a} \Rightarrow m_b g (u) = m_a g (3u) \Rightarrow m_b = 3(5) \Rightarrow \boxed{m_b = 15 \text{ kg.}}$$

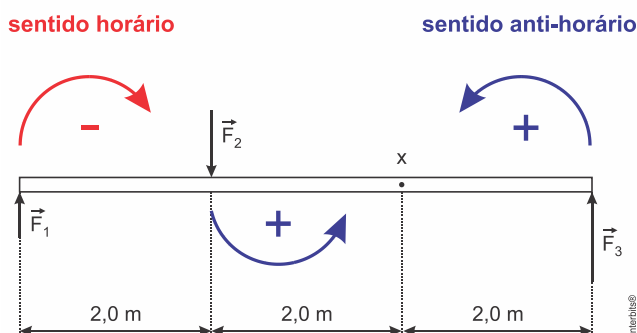
## 6. C

Como é uma situação de equilíbrio de um corpo extenso, temos que considerar equilíbrio de translação (a resultante das forças deve ser nula) e equilíbrio de rotação (o momento resultante deve ser nulo). Analisando cada uma das opções:

- a) Falsa. A resultante das forças na direção horizontal é não nula.
- b) Falsa. A resultante das forças na direção vertical é não nula.
- c) Correta.
- d) Falsa. O momento resultante é não nulo, provocando rotação no sentido horário.

## 7. A

O momento resultante, usando a convenção de sinais para os momentos conforme figura abaixo será:  
convenção de sinais para cálculo do momento



$$M_{\text{resultante}} = M_{F_1} + M_{F_2} + M_{F_3} = -F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3$$

$$M_{\text{resultante}} = -20 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} + 40 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 60 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow M_{\text{resultante}} = -80 \text{ Nm} + 200 \text{ Nm}$$

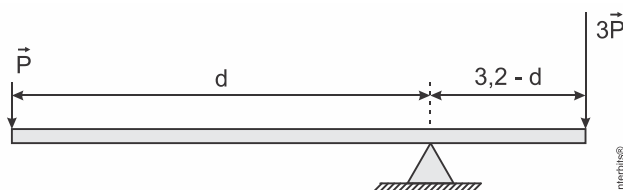
$$M_{\text{resultante}} = 120 \text{ Nm} = 1,2 \cdot 10^2 \text{ Nm (anti-horário)}$$

8. D

- I. Incorreta. Para estar em equilíbrio de translação, a resultante das forças externa sobre o corpo deve ser nula. Assim, o centro de massa do corpo está em repouso ou em MRU.
- II. Correta. Justificada no item anterior.
- III. Correta. Para haver equilíbrio de rotação, o torque resultante das forças externas deve ser nulo.

9. E

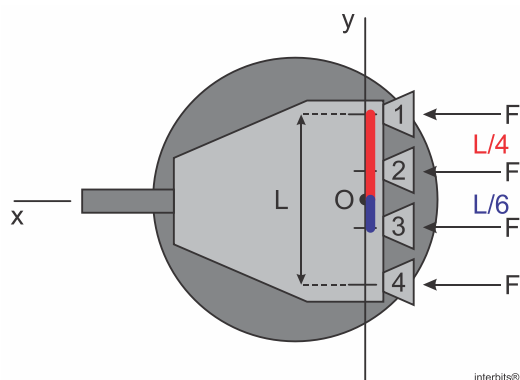
O enunciado sugere a figura a seguir.



Para haver equilíbrio de rotação, o momento horário é igual ao momento anti-horário.

$$M_{\vec{P}} = M_{3\vec{P}} \Rightarrow P d = 3P (3,2 - d) \Rightarrow d = 9,6 - 3d \Rightarrow 4d = 9,6 \Rightarrow d = 2,4 \text{ m.}$$

10. E



$$\tau_{\text{horário}} = \tau_{\text{anti-horário}}$$

$$F_1 \cdot \frac{L}{2} = F \cdot \frac{L}{6} + F \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow F_1 = \frac{4}{3} F$$