

## Múltiplos e Divisores: MMC e MDC

### Resumo

---

MMC (Mínimo Múltiplo Comum) e MDC (Máximo Divisor Comum) são conceitos fundamentais para a matemática. Para entendê-los, precisamos conhecer os conceitos de divisores e múltiplos. Divisores são quocientes da divisão exata entre dois números.

**Por exemplo:** 5 é divisor de 10 porque 10 dividido por 5 é uma divisão exata (o resto é igual a 0).

O número de divisores de um número é limitado, sendo sempre o menor número o 1 e o maior ele mesmo. Um número é dito primo se possuir como divisores apenas dois divisores naturais o 1 e ele mesmo. Por isso, para sabermos o máximo divisor comum entre dois números ou mais, precisamos conhecer o maior número que divide esses números ao mesmo tempo.

**Por exemplo:** Para sabermos o MDC entre 10 e 20 precisamos conhecer os divisores de 10 e 20.

Os de 10 são: 1,2,5 e 10 e de 20 são: 1,2,4,5,10,20. Logo o conjunto de divisores comuns é {1,2,10}, assim o MDC é 10, ou seja, é o maior número que divide os dois números ao mesmo tempo. Caso os números não possuam  $\text{mdc}=1$  eles são primos entre si.

Um processo prático é fatorar os dois números simultaneamente em fatores primos e ver quais números dividem eles ao mesmo tempo. O produto entre eles será o MDC.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 5 \\ 1 \end{array} \Rightarrow 2 \cdot 5 = 10$$

Já o conceito de múltiplo de um número natural se refere ao produto desse número por outro número natural, incluindo o zero. Vale lembrar que o zero é múltiplo de todos os números (o produto de qualquer número por 0 é igual a 0). Por exemplo: os múltiplos de 5 são: 0,5,10,15... Note que o 5 é divisor de 10 e o 10 é múltiplo de 5 e que o conjunto dos múltiplos é infinito. Para descobrirmos o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números, basta conhecer o primeiro número que sejam múltiplos dos números ao mesmo tempo.

**Por exemplo:** Para descobrirmos o MMC entre 6 e 8 analisaremos seus múltiplos. Os de 6 são:

0,6,12,18,24,... e os de 8 são 0,8,16,24,... Assim o conjunto dos múltiplos em comum é {0,24,...} assim o MMC é 24.

O processo prático é parecido com o do MDC, porém fatoraremos os números em fatores primos até chegarmos a 1. O produto entre eles será o MMC.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \Rightarrow 2.2.2.3 = 24 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{array}$$

---

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui](#)

## Exercícios

---

1. O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:
1. cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
  2. todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
  3. não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

- a) 2.
  - b) 4.
  - c) 9.
  - d) 40.
  - e) 80
2. Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a  $\frac{2}{3}$  do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.
- Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?
- a)  $5X - 3Y + 15 = 0$
  - b)  $5X - 2Y + 10 = 0$
  - c)  $3X - 3Y + 15 = 0$
  - d)  $3X - 2Y + 15 = 0$
  - e)  $3X - 2Y + 10 = 0$

3. Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

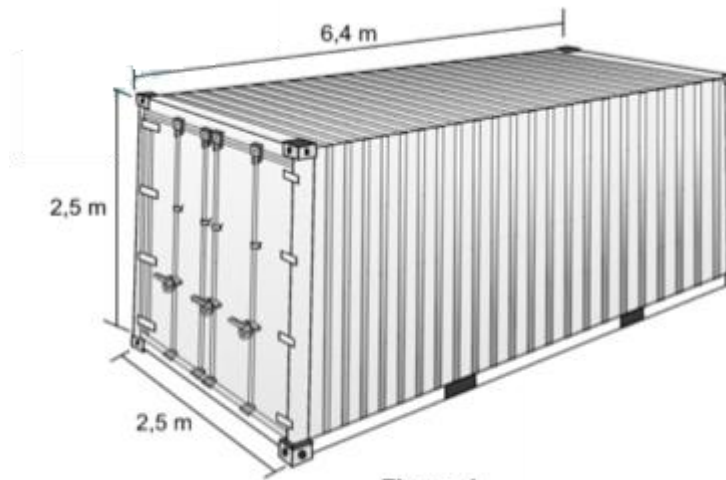


Figura 1

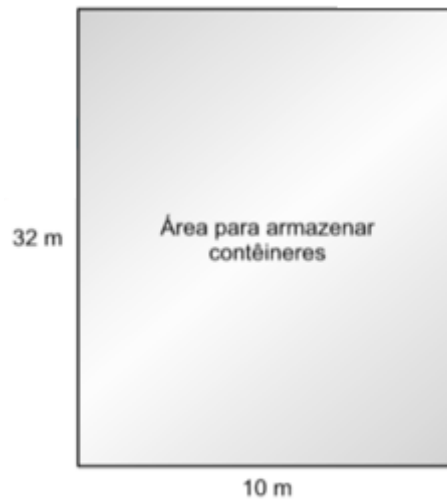


Figura 2

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

- a) 12,5 m.
- b) 17,5 m.
- c) 25,0 m.
- d) 22,5 m.
- e) 32,5 m.

4. Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em peças de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir
- a) 105 peças.
  - b) 120 peças.
  - c) 210 peças.
  - d) 243 peças.
  - e) 420 peças
5. Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número  $N$  é dado pela expressão  $2x \cdot 5y \cdot 7z$ , na qual  $x$ ,  $y$  e  $z$  são números inteiros não negativos. Sabe-se que  $N$  é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7. O número de divisores de  $N$ , diferentes de  $N$ , é:
- a)  $x \cdot y \cdot z$
  - b)  $(x + 1) \cdot (y + 1)$
  - c)  $x \cdot y \cdot z - 1$
  - d)  $(x + 1)(y + 1) \cdot z$
  - e)  $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1) - 1$
6. Nas últimas eleições, três partidos políticos tiveram direito, por dia, a 90 s, 108 s e 144 s de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. A soma do número das aparições diárias dos partidos na TV foi de:
- a) 15
  - b) 16
  - c) 17
  - d) 19
  - e) 21
7. Uma escola deverá distribuir um total de 1260 bolas de gude amarelas e 9072 bolas de gude verdes entre alguns de seus alunos. Cada aluno contemplado receberá o mesmo número de bolas amarelas e o mesmo número de bolas verdes. Se a escola possui 300 alunos e o maior número possível de alunos da escola deverá ser contemplado, qual o total de bolas que cada aluno contemplado receberá?
- a) 38
  - b) 39
  - c) 40
  - d) 41
  - e) 42

8. O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

- a) 32.
  - b) 34.
  - c) 33.
  - d) 35.
  - e) 31
9. Um maquinista de trem ganha R\$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1.º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias. Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?
- a) 37
  - b) 51
  - c) 88
  - d) 89
  - e) 91
10. Os números de identificação utilizados no cotidiano (de contas bancárias, de CPF, de Carteira de Identidade etc) usualmente possuem um dígito de verificação, normalmente representado após o hífen, como em 17326-9. Esse dígito adicional tem a finalidade de evitar erros no preenchimento ou digitação de documentos. Um dos métodos usados para gerar esse dígito utiliza os seguintes passos:
- multiplica-se o último algarismo do número por 1, o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1, e assim por diante, sempre alternando multiplicações por 1 e por 2.
  - soma-se 1 a cada um dos resultados dessas multiplicações que for maior do que ou igual a 10.
  - somam-se os resultados obtidos .
  - calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se assim o dígito verificador.
- O dígito de verificação fornecido pelo processo acima para o número 24685 é
- a) 1.
  - b) 2.
  - c) 4.
  - d) 6.
  - e) 8.

## Gabarito

---

1. C

O número mínimo de escolas beneficiadas ocorre quando cada escola recebe o maior número possível de ingressos. Logo, sendo o número máximo de ingressos igual ao máximo divisor comum de  $400 = 2^4 \cdot 5^2$  e  $320 = 2^6 \cdot 5$ , temos  $\text{mdc}(400, 320) = 2^4 \cdot 5 = 80$ .

Portanto, como  $400 = 5 \cdot 80$  e  $320 = 4 \cdot 80$ , segue que a resposta é  $5 + 4 = 9$ .

2. Em cada ciclo Y:

Luz vermelha acesa : V segundos

Luz verde acesa: X segundos e  $\frac{2}{3}$  de V

Luz amarela acesa: 5 segundos

$$X = \frac{2}{3} \cdot V \Leftrightarrow V = \frac{3X}{2}$$

$$X + Y + V = Y \Leftrightarrow X + 5 + \frac{3X}{2} = Y \Leftrightarrow 5X - 2Y + 10 = 0$$

3. A

A altura mínima é atingida quando toda a área é ocupada pelos contêineres. A única maneira de fazer isso, é dispor os contêineres de modo que  $10 = 4 \cdot 2,5$  e  $32 = 5 \cdot 6,4$ . Logo, serão dispostos  $4 \cdot 5 = 20$  contêineres em cada nível e, portanto, a resposta é  $\frac{100}{20} \cdot 2,5 = 12,5$  m.

4. E

Sendo  $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ ,  $810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$  e  $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ , vem que o máximo divisor comum desses números é  $2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$ . Contudo, se o comprimento das novas peças deve ser menor do que 200 centímetros, então queremos o maior divisor comum que seja menor do que 200, ou seja,  $3^3 \cdot 5 = 135$ .

Em consequência, a resposta é

$$40 \cdot \frac{540}{135} + 30 \cdot \frac{810}{135} + 10 \cdot \frac{1080}{135} = 420.$$

5. E

O número de divisores **positivos** de N, diferentes de N, é dado por  $(x+1)(y+1)(z+1)-1$ , com  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  e  $z = 0$ .

**Observação:** Considerando o enunciado rigorosamente, a resposta seria  $2 \cdot (x+1) \cdot (y+1) - 1$ , com  $x \geq 1$  e  $y \geq 1$ .

6. D

O MDC entre o tempo de aparição de cada pol[ítico é:

$$\text{MDC}(90, 108, 144) = 18$$

Encontrado o tempo de aparição de cada político, 18 segundos, é preciso agora descobrir quantas aparições cada um deles realizou.

$$90 : 18 = 5 \text{ aparições}$$

$$108 : 18 = 6 \text{ aparições}$$

$$144 : 18 = 8 \text{ aparições}$$

Somando as aparições de cada um, encontramos  $5 + 6 + 8 = 19$  aparições.

## 7. D

A partir do enunciado temos:

$$\text{MDC}(9072, 1260) = 252$$

Dividindo as bolas de cada cor pelo mdc encontrado teremos;

$$9072 : 252 = 36$$

$$1260 : 252 = 5$$

Cada aluno receberá um total de  $36 + 5 = 41$  bolas de gude.

## 8. A

A duração de cada ciclo é igual a  $1765 - 1755 + 1 = 11$  anos. Como de 1755 a 2101 se passaram  $2101 - 1755 + 1 = 347$  anos e  $347 = 11 \cdot 31 + 6$ , segue-se que em 2101 o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número 32.

## 9. C

De 1º de janeiro a 31 de maio temos  $31 + 28 + 31 + 30 + 31 = 151$  dias. Logo, como  $151 = 37 \cdot 4 + 3$ , e supondo que a duração de cada viagem seja de 4 dias, segue que o maquinista poderá fazer, no máximo, 37 viagens até o início das suas férias. Após o período de férias, restarão  $365 - (151 + 10) = 204$  dias para viajar. Como  $204 = 51 \cdot 4$ , segue que ele poderá fazer, no máximo, 51 viagens, totalizando, assim,  $37 + 51 = 88$  viagens no ano.

**Observação:** Se cada viagem tiver duração inferior a 4 dias, ele poderá realizar ainda outra viagem no dia 29 de junho, totalizando, portanto, 89 viagens.

## 10. E

De acordo com os passos descritos, temos

$$5 \cdot 1 + (8 \cdot 2 + 1) + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 38 = 3 \cdot 10 + 8.$$

Portanto, o dígito de verificação do número 24685 é 8.