# Equações logarítmas

## Resumo

### Equações logarítmicas:

São aquelas em que a variável se encontra no logaritmando ou na base de um logaritmo.

**OPA!** Ao resolver equações logarítmicas, não se esqueça das condições de existência (CE). As regras a seguir devem ser utilizadas levando em consideração a validade dessas condições (o logaritmando é sempre maior que 0 e a base, maior que 0 e diferente de 1).

**1º caso**: $\log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

**Ex**: $\log_x(5x+2) = \log_x(3x+4)$

CE: $\begin{cases} x > 0 \; e \; x \neq 1 \\ 5x + 2 > 0 \\ 3x + 4 > 0 \end{cases}$

5x + 2 = 3x + 4 → 2x = 2 → x = 1

Como x = 1 não satisfaz as CE, $S = \emptyset$

**2º caso**: $\log_b f(x) = c \Rightarrow f(x) = b^c$

**Ex**: $\log_{(x-2)}(2x^2 - 11x + 16)$ = 2

CE: $\begin{cases} x - 2 > 0 \; e \; x - 2 \neq 1 \rightarrow x > 2 \; e \; x \neq 3 \\ 2x^2 - 11x + 16 > 0 \end{cases}$

$(x - 2)^2 = 2x^2 - 11x + 16$

$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 11x + 16$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$\left.\begin{matrix} S = 7 \\ P = 12 \end{matrix}\right\} x_1 = 3 \; (não \; serve, pela \; CE) \; e \; x_2 = 4$

Observe que x = 4 satisfaz todas as condições de existência, pois:

4 > 2 e 4 ≠ 3

$2.4^2 - 11.4 + 16 = 32 - 44 + 16 = 4 > 0 \rightarrow S = \{4\}$

**3º caso:** Fazendo mudança de variável

**Ex**: $(\log_4 x)^2 - \log_4 x^2 - 3 = 0$

CE: x > 0

Aplicando a propriedade III: $(\log_4 x)^2 - 2.\log_4 x - 3 = 0$

Fazendo $\log_4 x = y$, temos: $y^2 - 2y - 3 = 0$

$\left.\begin{matrix} S = 2 \\ P = -3 \end{matrix}\right\} y_1 = -1 \; e \; y_2 = 3 \rightarrow \begin{cases} \log_4 x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{4} \\ \log_4 x = 3 \rightarrow x = 64 \end{cases}$

Como os dois valores encontrados atendem às CE, $S = \{\frac{1}{4}, 64\}$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

## Exercícios

**1.** O conjunto solução da equação $\log_4 x + \log_x 4 = \frac{5}{2}$ é tal que a soma de seus elementos é igual a:

**a)** $\frac{5}{2}$

**b)** 2

**c)** 14

**d)** 16

**e)** 18

**2.** A solução de equação logarítmica $\log_4(x-6)-\log_2(2x-16)=-1$ é o número real "m". Desse modo, podemos afirmar que

**a)** m = 7 ou m = 10.

**b)** o logaritmo de m na base 10 é igual a 1.

**c)** m = 10, pois m > 6.

**d)** m = 7, pois m > 6.

**e)** $m^2 = 20$.

**3.** Se x é o logaritmo de 16 na base 2, então o logaritmo de $x^2 - 5x + 5$, na base 2, é igual a

**a)** 2

**b)** 1

**c)** -1

**d)** 0

**e)** -2

**4.** Determine o valor de x na equação $y = 2^{\log_3(x+4)}$, para que y seja igual a 8.

**a)** 21

**b)** 22

**c)** 23

**d)** 24

**e)** 25

**5.** No século XVII, os logaritmos foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar alguns cálculos matemáticos. Com o uso dos logaritmos e com tabelas previamente elaboradas era possível, por exemplo, transformar multiplicações em somas e divisões em subtrações. Com o auxílio dos logaritmos era possível também realizar, de forma muito mais rápida, as operações de radiciação.
A Tabela abaixo é um pequeno exemplo do que era uma tabela de logaritmos.

Tabela de logaritmos

| | |
|---|---|
| log 1,50 | 0,176 |
| log 1,52 | 0,181 |
| log 1,54 | 0,187 |
| log 1,56 | 0,193 |
| log 1,58 | 0,198 |
| log 2 | 0,301 |
| log 3 | 0,477 |
| log 4 | 0,602 |
| log 5 | 0,699 |
| log 6 | 0,778 |
| log 7 | 0,845 |
| log 8 | 0,903 |
| log 9 | 0,954 |

Com base nas informações da tabela acima, pode-se concluir que o valor aproximado para $\sqrt[8]{35}$ é

**a)** 1,50

**b)** 1,56

**c)** 1,52

**d)** 1,54

**e)** 1,58

**6.** Uma pessoa irá escolher dois números reais positivos A e B. Para a maioria das possíveis escolhas, o logaritmo decimal da soma dos dois números escolhidos não será igual à soma de seus logaritmos decimais. Porém, se forem escolhidos os valores A = 4 e B = r, tal igualdade se verificará. A qual intervalo pertence o número r?

**a)** [1,0; 1,1]

**b)** [1,1; 1,2]

**c)** [1,2; 1,3]

**d)** [1,3; 1,4]

**e)** [1,4; 1,5]

**7.** No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ancara, na Turquia, com registro de 5,9 graus na escala Richter e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 graus na escala Richter. Considere que $m_1$ e $m_2$ medem a energia liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, $r_1$ e $r_2$, respectivamente. Sabe-se que estes valores estão relacionados pela fórmula $r_1 - r_2 = \log_{10}(m_1 / m_2)$.

Considerando-se que $r_1$ seja o registro do terremoto da Turquia e $r_2$ o registro do terremoto do Japão, pode-se afirmar que $(m_1 / m_2)$ é igual a:

**a)** $10^{-1}$

**b)** $\sqrt[10]{10}$

**c)** $(0,1)^{10}$

**d)** $\dfrac{10}{0,1}$

**e)** $\dfrac{1}{0,1}$

**8.** Um médico, apreciador de logaritmos, prescreveu um medicamento a um de seus pacientes, também, apreciador de logaritmos, conforme a seguir:
"Tomar x gotas do medicamento de 8 em 8 horas. A quantidade de gotas y diária deverá ser calculada pela fórmula $\log_8 y = \log_2 6$"

Considerando log 2 = 0,3 e log 3 = 0,48, é corretor afirmar que $\log_2 x$ é um número do intervalo

**a)** ]3, 4[

**b)** ]4, 5[

**c)** ]5, 6[

**d)** ]6, 7[

**e)** ]7, 8[

**9.** O conjunto solução da equação $\log_2(x^2 - 7x + 10) - \log_2(x - 5) = \log_2 10$ é

**a)** $\{5,12\}$

**b)** $\{12\}$

**c)** $\{5\}$

**d)** $\varnothing$

**10.** Se x é a solução, nos reais, da equação $2-\log_x 2-\log_2 x=0$, então

**a)** $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

**b)** $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$

**c)** $\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$

**d)** $\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$

## Gabarito

**1. E**

CE: x > 0 e x ≠ 1

Passando $\log_x 4$ para a base 4, temos: $\log_4 x + \frac{1}{\log_4 x} = \frac{5}{2}$

Considerando $\log_4 x = y$, temos: $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0$

Resolvendo a equação anterior, temos: y = 2 ou y = ½. Logo:

$\log_4 x = 2 \ \rightarrow x = 16$

$\log_4 x = \frac{1}{2} \ \rightarrow x = 2$

Portanto: 16 + 2 = 18

**2. B**

Condição de existência: $x - 6 > 0$ e $2x - 16 > 0 \ \Rightarrow \ x > 8$

$$\frac{\log_2(x-6)}{2} - \log_2(2x-16) = -1 \ \ (x2)$$

$$\log_2(x-6) - 2 \cdot \log_2(2x-16) = -2$$

$$\log_2 \frac{(x-6)}{(2x-16)^2} = -2$$

$$\frac{(x-6)}{(2x-16)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 - 68x + 280 = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ ou } x = 7 \text{ (não convém)}$$

Portanto, m = 10 e log10 = 1.

**3. D**

Do enunciado, temos:

$$x = \log_2 16$$
$$x = \log_2 2^4$$
$$x = 4 \cdot \log_2 2$$
$$x = 4$$

Substituindo $x = 4$ em $x^2 - 5x + 5$, temos: $4^2 - 5 \cdot 4 + 5 = 1$

Assim,

$$\log_2\left(x^2 - 5x + 5\right) = \log_2 1 = 0$$

**4. C**

$2^{\log_3(x+4)} = 2^3$ (equação exponencial)

$\log_3(x+4) = 3, com\ x > -4\ (condição\ de\ existência)$

$x + 4 = 3^3$

$x = 27 - 4$

$x = 23$

**5. B**

Seja $\alpha = \sqrt[8]{35}$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \log\alpha = \log\sqrt[8]{35} &\Leftrightarrow \log\alpha = \log(7\cdot 5)^{\frac{1}{8}} \\ &\Leftrightarrow \log\alpha = \frac{1}{8}\cdot(\log 7 + \log 5) \\ &\Rightarrow \log\alpha \cong \frac{1}{8}\cdot(0{,}845 + 0{,}699) \\ &\Rightarrow \log\alpha \cong 0{,}193 \\ &\Rightarrow \log\alpha \cong \log 1{,}56 \\ &\Rightarrow \alpha \cong 1{,}56. \end{aligned}$$

**6. D**

O número $r$ é tal que

$$\begin{aligned} \log(4+r) = \log 4 + \log r &\Leftrightarrow \log(4+r) = \log 4r \\ &\Leftrightarrow 4 + r = 4r \\ &\Leftrightarrow r = \frac{4}{3} \cong 1{,}33. \end{aligned}$$

Portanto, $r \in ]1{,}3; 1{,}4]$.

**7. B**

$R_1 = 5{,}9$

$R_2 = 5{,}8$

$R_1 - R_2 = \log 10\ (m1/m2)$

$5{,}9 - 5{,}8 = \log 10\ (m1/m2)$

$0{,}1 = \log 10\ (m1/m2)$

$m_1/m_2 = 10^{0{,}1}$

**8. D**

Mudando para a base 2, temos:

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 8} = \log_2 6$$

$$\frac{\log_2 y}{3} = \log_2 6$$

$$\log_2 y = 3.\log_2 6$$

$$\log_2 y = \log_2 6^3$$

$$y = 216$$

Logo $x = 216/3 = 72$ gotas.
Então $6 < \log_2 72 < 7$.

**9. B**

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \text{(condição de existência)}$$

$$\log_2 \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \log_2 10$$

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = 10$$

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$x = 12 \text{ ou } x = 5 (\text{ não convém})$$

S = {12}

**10. B**

Usando a propriedade de mudança de base, temos:

$$2 - \frac{\log 2}{\log x} - \frac{\log x}{\log 2} = 0$$

$$2 - \frac{0,3}{\log x} - \frac{\log x}{0,3} = 0$$

$$2 - \frac{0,3}{\log x} = \frac{\log x}{0,3}$$

$$\frac{2\log x - 0,3}{\log x} = \frac{\log x}{0,3}$$

Multiplicando cruzado, temos:

$$(\log x)^2 = 0,6 \log x - 0,09$$

$$(\log x)^2 - 0,6 \log x + 0,09 = 0$$

Fazendo log x = y, temos:

$$y^2 - 0,6y + 0,09 = 0$$

Cuja raiz é 0,3. Ou seja, log x = 0,3. Como sabemos, log 2 = 0,3. Assim, x = 2.