Cônicas: hipérbole e parábola

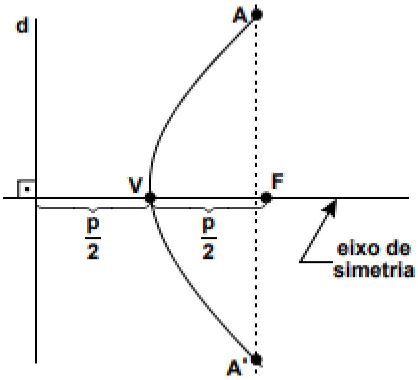
Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Resumo

Parábola

Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa **d,** chamada *diretriz,* e de um ponto fixo **F,** não pertencente à diretriz, chamado *foco.*

Elementos de uma parábola



Denominamos:

F: foco

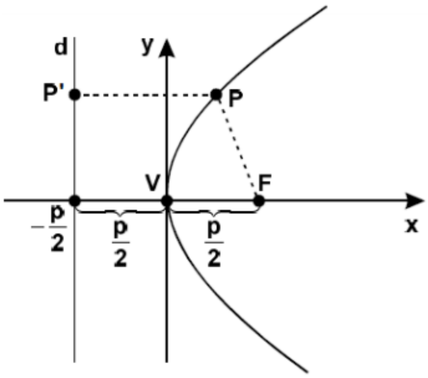
d: diretriz

V: vértice

p: parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz

reta VF: eixo de simetria da parábola.

Eixo de simetria coincide com o eixo x



Por definição:

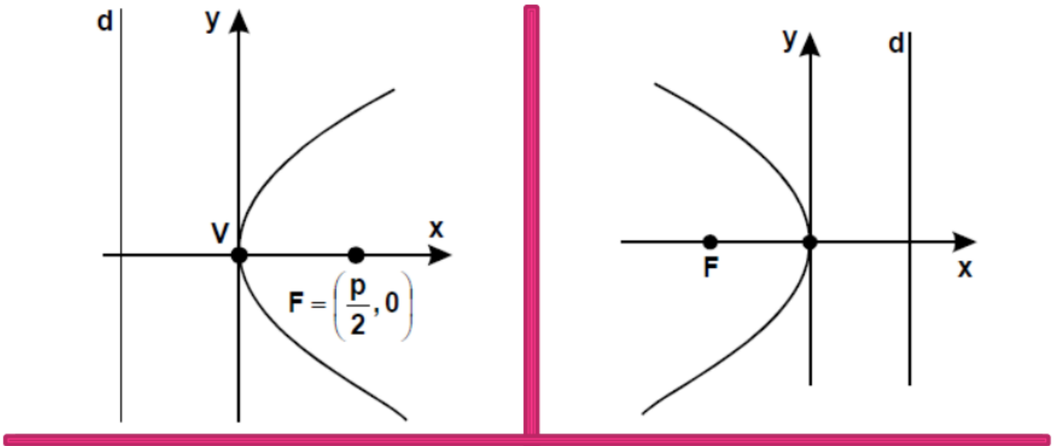
$$d(P,F) = d(P,P')$$

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2 + (y-y)^2}$$

Elevando ambos lados ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$\cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

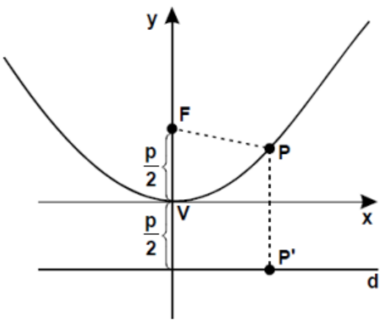
$$y^2 = 2px$$



Se p > 0, a parábola tem concavidade voltada para a direita (voltada para a parte positiva do eixo x)

Se p < 0, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

Eixo de simetria coincide com o eixo y



Por definição:

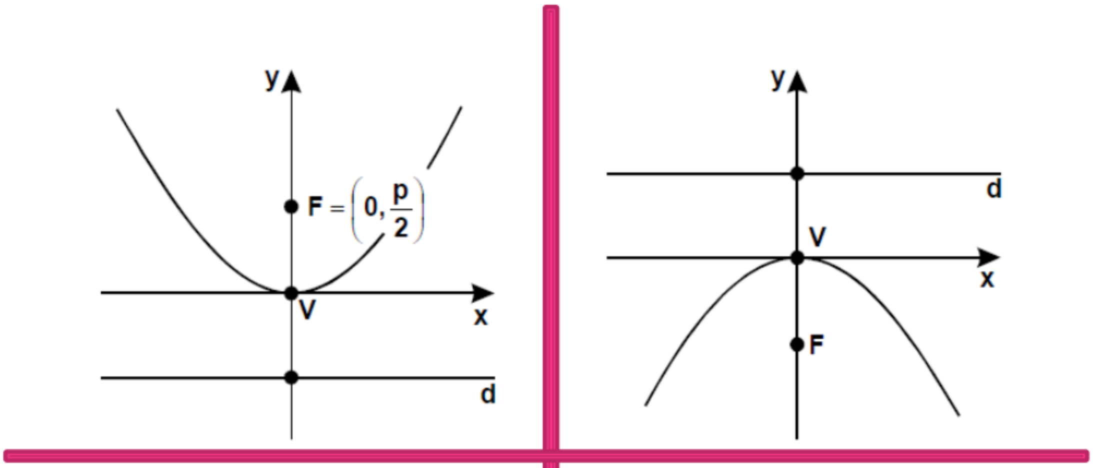
$$d(P,F) = d(P,P')$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+\frac{p}{2})^2}$$

Elevando ambos lados ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$x^2 + \cancel{y^2} - py + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{y^2} + py + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$x^2 = 2py$$



Se p > 0, o parábola tem concavidade voltada para cima (voltada para a parte positiva do eixo y).

Se p < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

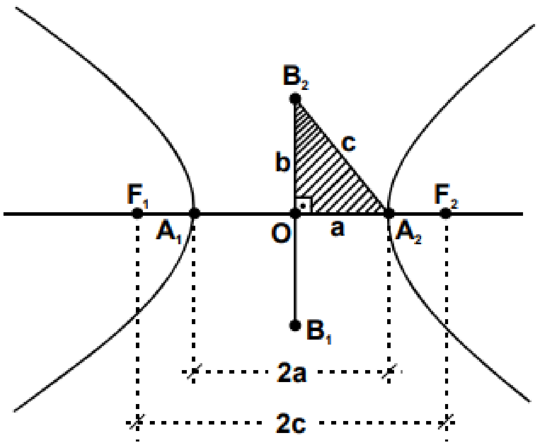
Equação da parábola na forma explícita

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos **P**(x, y) de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ = 2ª onde (2a < 2c), com $F_1 F_2 = 2c$.

Elementos de uma Hipérbole



F_1, F_2: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se **distância focal**.

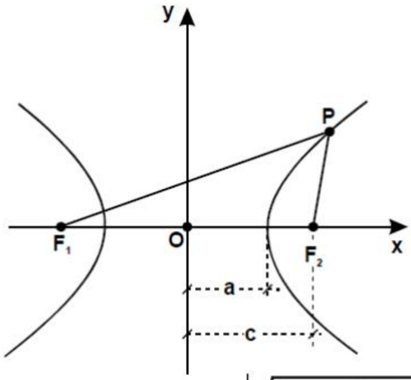
O: Centro da hipérbole; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

A_1, A_2: vértices da hipérbole.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.

Eixo de simetria coincide com o eixo x



Sejam:

P(x,y) um ponto genérico da hipérbole.

$F_1(-c,0)$

$F_2(c,0)$

Por definição:

$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$

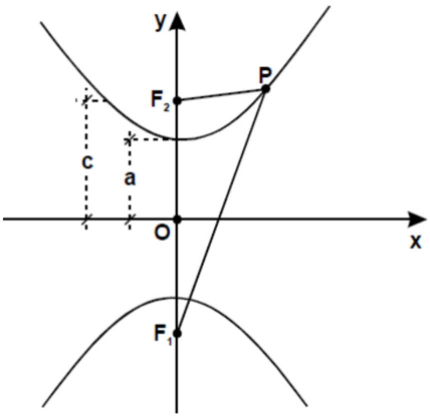
$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right|=2a$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- Considerando o centro **O (x_0, y_0)**

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Eixo de simetria coincide com o eixo y



O posicionamento da hipérbole no sistema cartesiano fornece:

$F_1(0,-c)$

$F_2(0,c)$

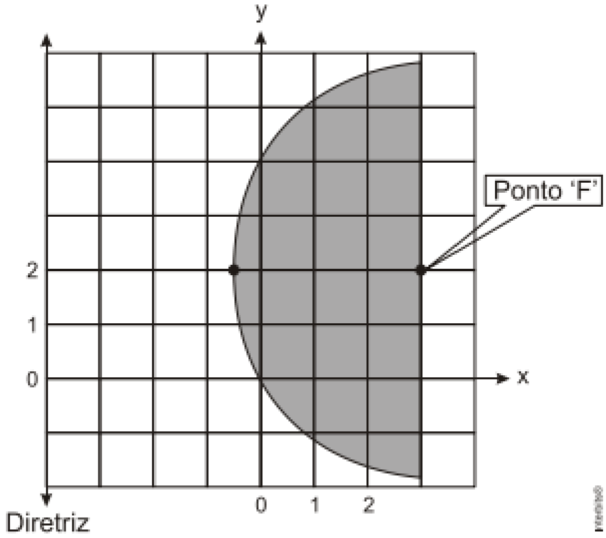
De forma análoga demonstra-se que para um ponto P(x,y) pertencente à elipse tem-se a equação: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

- Considerando o centro **O (x_0, y_0)**

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Exercícios

1. Uma família da cidade de Cajapió – MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida abaixo, coberta com uma folha quadriculada.



Note que a figura projetada na parede é uma cônica. Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será:

a) $(y-2)^2 = 7(2x+1)$.

b) $(y+2)^2 = 7(2x+1)$.

c) $(y-3)^2 = 12(x+1)$.

d) $(y-2)^2 = -7\left(2x-\frac{1}{7}\right)$.

e) $(y+3)^2 = \frac{12}{7}(x-1)$.

2. Uma bola é jogada dentro de uma cesta cuja superfície é obtida girando a parábola $y = x^2$ em torno do eixo y. O centro da bola ocupa um ponto de altura y = 3.O raio da bola é:

a) $\sqrt{11}$

b) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{11}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{11}}{5}$

3. No plano cartesiano, há dois pontos R e S pertencentes à parábola de equação $y = x^2$ e que estão alinhados com os pontos A(0,3) e B(4,0). A soma das abscissas dos pontos R e S é:

a) -0,45

b) -0,55

c) -0,65

d) -0,75

e) -0,85

4. Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.

b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.

d) a abscissa do vértice da parábola é x=-1

e) a abscissa do vértice da parábola é x=-2/3

5. O fisiologista inglês Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade V de contração de um músculo ao ser submetido a um peso p é dada pela equação (p + a) (v +b) = K, com a, b e K constantes.
Um fisioterapeuta, com o intuito de maximizar o efeito benéfico dos exercícios que recomendaria a um de seus pacientes, quis estudar essa equação e a classificou desta forma:

Tipo de curva
Semirreta oblíqua
Semirreta horizontal
Ramo de parábola
Arco de circunferência
Ramo de hipérbole

O fisioterapeuta analisou a dependência entre v e p na equação de Hill e a classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas (p. V). Admita que K> 0.
O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

a) Semirreta oblíqua.

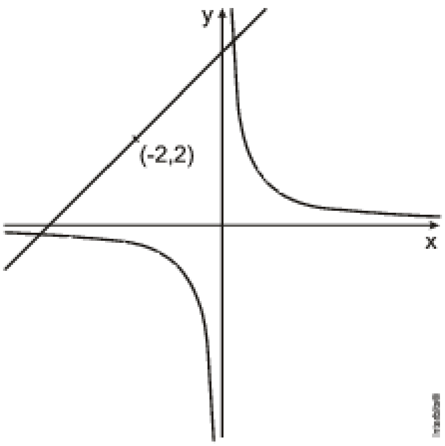
b) semirreta horizontal.

c) ramo de parábola.

d) arco de circunferência.

e) ramo de hipérbole.

6. Considere a hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$ mostrada na figura abaixo:



Quais são os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y - 2 = x + 2$?

a) $(-2+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$ e $(-2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{5})$

b) $(-2+2\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$ e $(-2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{5})$

c) $(-2+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$ e $(-2-2\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$

d) $(-2+2\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$ e $(-2-2\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$

e) $(-\sqrt{5}+2, -\sqrt{5}-2)$ e $(\sqrt{5}+2, \sqrt{5}-2)$

7. Um aluno desenhou, em um plano cartesiano, duas cônicas (elipse ou hipérbole), uma de excentricidade 0,8 e outra de excentricidade 2,4, tendo ambas como foco o par de pontos (-12,0) e (12,0) . Qual alternativa está ERRADA?

a) A cônica de excentricidade 0,8 é uma hipérbole.

b) A cônica de excentricidade 2,4 passa pelo ponto (5,0).

c) As cônicas descritas possuem quatro pontos em comum.

d) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ é uma equação para a cônica de excentricidade 0,8.

e) A cônica de excentricidade 0,8 passa pelo ponto (0,9).

8. A equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$, no plano xy, representa:

a) Duas retas.

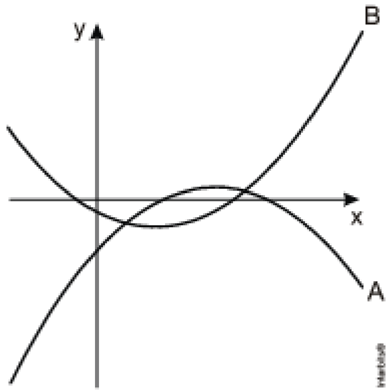
b) Uma circunferência.

c) Uma elipse.

d) Uma hipérbole.

e) Uma parábola.

9. A seguir estão ilustradas partes dos gráficos das parábolas A e B, com equações respectivas $y = -x^2 + 8x - 13$ e $y = x^2 - 4x - 3$



Analise as proposições abaixo, acerca dessa configuração.

I. Um dos pontos de interseção das parábolas A e B tem coordenadas (1, -6).

II. O vértice da parábola A é o ponto (4, 2).

III. A reta que passa pelos pontos de interseção das parábolas A e B tem equação $y = 2x - 6$

IV. A distância entre os vértices das parábolas A e B é $\sqrt{102}$

V. A parábola B intercepta o eixo das ordenadas no ponto com coordenadas (0, -3).

Quais afirmações estão corretas?

a) Apenas a I.

b) I e III.

c) Apenas a V.

d) I, II e IV.

e) I e V.

10. A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por

a) Duas retas concorrentes.

b) Uma circunferência.

c) Uma elipse.

d) Uma parábola.

e) Uma hipérbole.

Gabarito

1. A

Desde que $F = (3, 2)$ e a diretriz da parábola é a reta $x = -4$, temos $p = 3 - (-4) = 7$. Por conseguinte, sendo $V = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, a equação da parábola é

$$(y-2)^2 = 2 \cdot 7 \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow (y-2)^2 = 7(2x+1).$$

2. B

Seja r o raio da bola.

A equação da circunferência de centro $(0, 3)$, tangente à parábola $y = x^2$, é dada por

$x^2 + (y-3)^2 = r^2$. Daí, segue que

$$x^2 + (x^2 - 3)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 9 - r^2 = 0.$$

Tomando $x^2 = t$, obtemos $t^2 - 5t + 9 - r^2 = 0$. Assim, como o discriminante dessa equação deve ser igual a zero, vem

$$\begin{aligned}(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9 - r^2) = 0 &\Leftrightarrow r^2 = \frac{11}{4} \\ &\Rightarrow r = \frac{\sqrt{11}}{2}.\end{aligned}$$

3. D

Seja t a reta que passa por $A(0, 3)$ e $B(4, 0)$. Tem-se que a equação de t é

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

As abscissas de R e S correspondem às abscissas dos pontos de interseção de t com a parábola $y = x^2$. Logo,

$$x^2 = -\frac{3}{4}x + 3 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - 3 = 0.$$

Portanto, pelas Relações de Girard, a soma pedida é $-\frac{3}{4} = -0{,}75.$

4. B

Suponhamos que exista uma reta de equação $y = k$, que seja simultaneamente tangente à parábola e paralela ao eixo Ox. Desse modo, a equação

$$x^2 + (2k-2)x + k^2 + 4k + 1 = 0$$

deve ter uma e somente uma raiz real, isto é,

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\Leftrightarrow (2k-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 + 4k + 1) = 0\\ &\Leftrightarrow 4k^2 - 8k + 4 - 4k^2 - 16k - 4 = 0\\ &\Leftrightarrow k = 0.\end{aligned}$$

Portanto, a parábola admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

5. E

Como v é a velocidade de contração do músculo ao ser submetido a um peso p, temos $v \geq 0$ e $p \geq 0$.
Assim, da equação $(p + a) \cdot (v + b) = K$, com a, b e K constantes, vem:

$$pv + pb + av + ab = K \Rightarrow v \cdot (p + a) = K - pb - ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v \cdot (p + a) = K - b \cdot (p + a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{K}{p + a} - b\text{, que é um ramo de hipérbole.}$$

6. A

Temos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y - 2 = x + 2 \Rightarrow y = x + 4 \end{cases}$$

Daí temos:

$$x + 4 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = -2 + \sqrt{5} \text{ ou } x = -2 - \sqrt{5}$$

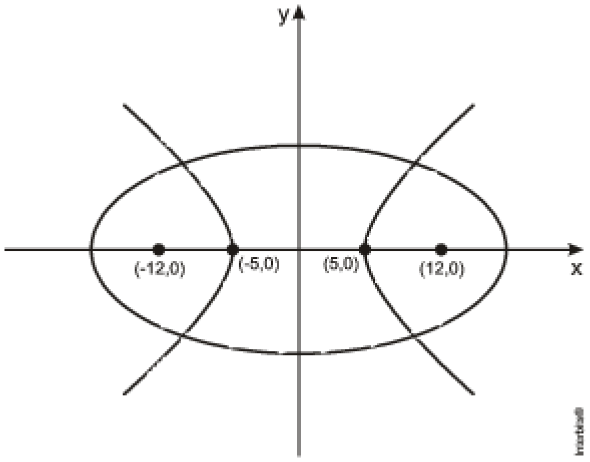
$$x = -2 + \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{1}{-2 + \sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2$$

$$x = -2 - \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{1}{-2 - \sqrt{5}} = -\sqrt{5} + 2$$

Portanto, os pontos de intersecção são:
$\left(-2 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\right)$ e $\left(-2 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}\right)$

7. A

02 + 04 + 08 + 16 = 30.



Elipse (excentricidade $0 < e < 1$)

$\frac{12}{a} = 0{,}8 \Rightarrow a = 15$ (semi eixo maior) e b(semi eixo menor) = 9

$\frac{12}{a} = 2{,}4 \Rightarrow a = 5$ (semi eixo real)

[01] Falsa. A elipse é que possui excentricidade entre 0 e 1.

[02] Verdadeira. (5,0) é um dos vértices da elipse (figura).

[04] Verdadeira. Ver figura.

[08] Verdadeira, pois $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1.$

[16] Verdadeira, pois o semi eixo menor da elipse mede 9.

8. D

$4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$

$4x^2 - 32x + 64 - (y^2 - 8y + 16) = -52 + 64 - 16 \Leftrightarrow 4(x-4)^2 - (y-4)^2 = 4 \Leftrightarrow -(x-4)^2 + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

Que representa a equação de uma hipérbole.

9. E

V – F – F – F – V.

Resolvendo o sistema formado pelas equações das parábolas, encontramos:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 13 \\ y = x^2 - 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ e } y = -6 \\ x = 5 \text{ e } y = 2 \end{cases}.$$

Logo, os pontos de interseção das parábolas são $(1, -6)$ e $(5, 2)$.

A reta que passa pelos pontos de interseção das parábolas tem por equação

$$y - 2 = \frac{-6 - 2}{1 - 5} \cdot (x - 5) \Leftrightarrow y = 2x - 8 \neq 2x - 6.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$y_A = -x^2 + 8x - 13 = -(x - 4)^2 + 3,$$

donde concluímos que o vértice da parábola A é o ponto $(4, 3) \neq (4, 2)$.

Completando o quadrado, vem

$$y_B = x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7.$$

Daí, segue que o vértice da parábola B é o ponto $(2, -7)$.

A distância entre os vértices das parábolas A e B é dada por

$$\sqrt{(4 - 2)^2 + [3 - (-7)]^2} = \sqrt{104} \neq \sqrt{102}.$$

A parábola B intersecta o eixo das ordenadas no ponto em que $x = 0$, ou seja, $(0, -3)$.

10. E

Completando os quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} 9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11 &\Leftrightarrow 9(x^2 - 4x) - (y^2 + 8y) = -11 \\ &\Leftrightarrow 9[(x - 2)^2 - 4] - [(y + 4)^2 - 16] = -11 \\ &\Leftrightarrow 9(x - 2)^2 - (y + 4)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{1^2} - \frac{(x - 2)^2}{3^2} = 1, \end{aligned}$$

que é a equação de uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo Ox.