Função e inequação logarítma

Resumo

Função Logarítmica

A função logarítmica é uma função que associa cada número real positivo x ao seu logaritmo em uma determinada base a, que deve ser um número real positivo diferente de 1.

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \log_a x$$

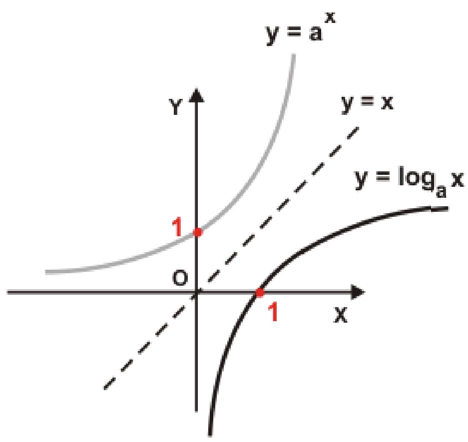
Lembre-se de que o logaritmando é sempre positivo, assim, o domínio dessa função deve ser obrigatoriamente positivo, ou seja, é o conjunto dos números reais positivos.

<u>**Obs:**</u> A função logarítmica é a inversa da função exponencial.

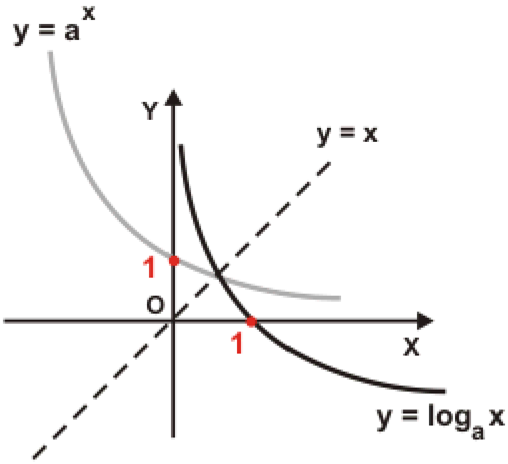
Gráfico

Já que a função logarítmica é a inversa da exponencial, usamos o gráfico da exponencial como base. Assim, como na função exponencial, podemos dividir as funções em dois casos, de acordo com o valor da base.

Função crescente: base > 1



Função decrescente: 0 < base < 1



Inequação logarítmica

O primeiro passo para resolver uma inequação logarítmica é escrever ambos os lados da desigualdade na forma de logaritmos de mesma base. Depois, transformamos a desigualdade entre logaritmos em uma entre os logaritmandos, invertendo ou mantendo o sinal da inequação de acordo com o valor da base. Além disso, não podemos nos esquecer das condições de existência.

1º Caso: base > 1

Mantém-se o sinal da inequação.

$\log_a x > \log_a y \quad \rightarrow \quad x > y$

2º Caso: 0 < base < 1

Inverte-se o sinal da inequação.

$\log_a x > \log_a y \quad \rightarrow \quad x < y$

Exemplo: $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$

CE: $\begin{cases} x-3>0 \Rightarrow x>3 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases} \Rightarrow x > 3$ (I)

Resolvendo a inequação:

$\log_2[(x-3)(x-2)] \leq \log_2 2$

$x^2 - 5x + 6 \leq 2$

$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$ (II)

Fazendo a interseção de I e II, temos a solução da inequação: $\mathbf{3 < x \leq 4}$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Seja f uma função a valores reais, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_{10}(\log_{1/3}(x^2 - x + 1))$, para todo $x \in D$. Qual é o domínio de f?

a) $\{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \ ou \ x \geq 1\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{3} < x < 10\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{1}{3} \ ou \ x \geq 10\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{9} < x < \frac{10}{3}\right\}$

2. As populações de duas cidades, M e N, são dadas em milhares de habitantes pelas funções

$$M(t) = \log_8 (1+t)^6$$
$$N(t) = \log_2 (4t+4)$$

Onde a variável t representa o tempo em anos. Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior do que a da outra. O valor mínimo desse instante t é:

a) –1

b) 0

c) 2

d) 3

e) 4deus, vou me

3. Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f(x) = \log_k x$, com k 0 > e $k \neq 1$. Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de k + p - q é

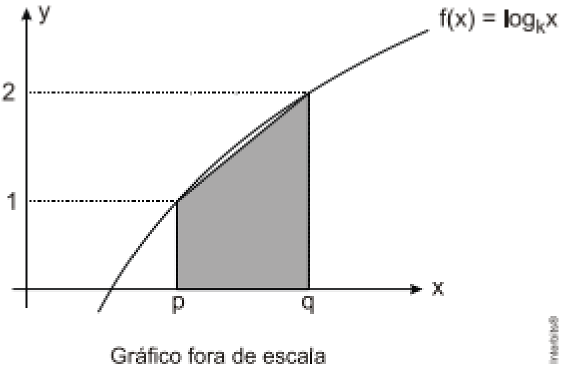


Gráfico fora de escala

a) –20

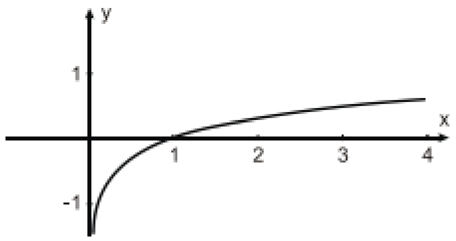
b) –15

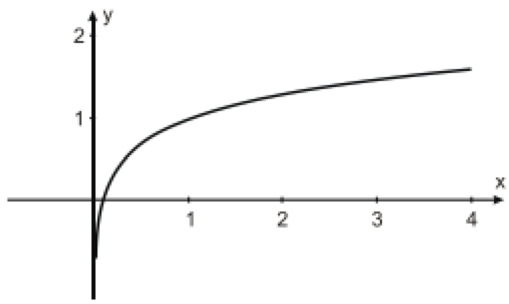
c) 10

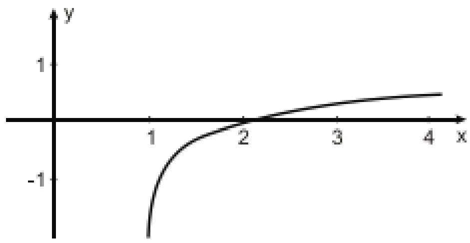
d) 15

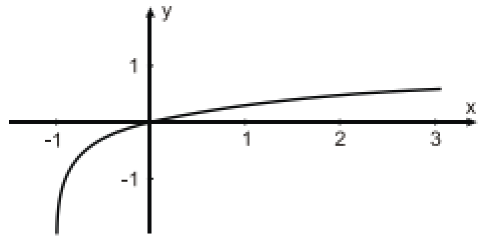
e) 20

4. O gráfico da função y = log(x + 1) é representado por:

a)


c)


b)


d)


5. Assinale, dentre os valores abaixo, um possível valor de x tal $\log_1 x > \log_4 7$

a) 1/14

b) 14/15

c) 1/5

d) √2/2

e) 3/5

6. O conjunto de números reais que representa a interseção entre os domínios das funções

$$f(x) = \sqrt{(-2x^2 - 6x + 8)} \text{ e } g(x) = \log(x + 2)$$

é um intervalo:

a) aberto à direita e fechado à esquerda.

b) aberto nos dois extremos.

c) fechado nos dois extremos.

d) infinito.

e) aberto à esquerda e fechado à direita.

7. Se a função $f: (-1,1) \rightarrow R$, é definida por $f(x) = log_{10} \frac{1+x}{1-x}$, então os valores de x para os quais $f(x) < 1$ são todos os valores que estão no domínio de f e são:

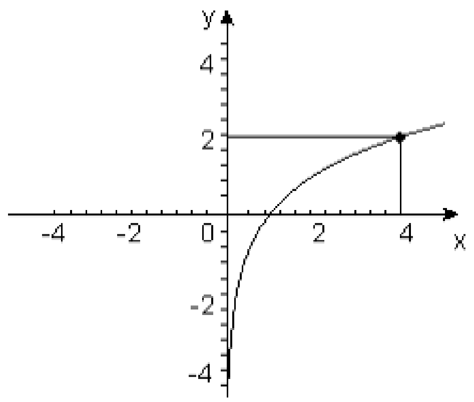
a) menores que $-\frac{9}{11}$.

b) maiores que $-\frac{9}{11}$.

c) menores que $\frac{9}{11}$.

d) maiores que $\frac{9}{11}$.

8. A representação



é da função dada por y = f(x) = $\log_n$ (x) O valor de $\log_n$ (n^3 +8) é

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

9. A expectativa de vida em anos em uma região, de uma pessoa que nasceu a partir de 1900 no ano x (x ≥ 1900), é dada por:

$$L(x) = 12.(199.\log x - 651)$$

Considerando log 2 = 0,3, uma pessoa dessa região que nasceu no ano 2000 tem expectativa de viver:

a) 48,7 anos.

b) 54,6 anos.

c) 64,5 anos.

d) 68,4 anos.

e) 72,3 anos.

10. A solução da inequação logarítmica $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x-2) > -3$ é

a) $S = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} / x > 4\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$

Gabarito

1. A

Como $x^2 - x + 1 > 0$ para todo x real, segue que os valores de x para os quais f está definida são tais que

$$\begin{aligned}\log_{1/3}(x^2 - x + 1) > 0 &\Leftrightarrow \log_{1/3}(x^2 - x + 1) > \log_{1/3} 1\\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 1\\ &\Leftrightarrow x \cdot (x - 1) < 0\\ &\Leftrightarrow 0 < x < 1.\end{aligned}$$

2. D

Supondo M(t) N(t), > para algum t real positivo, vem

$$\begin{aligned}\log_8(1+t)^6 > \log_2(4t+4) &\Leftrightarrow \log_{2^3}(1+t)^6 > \log_2 4 + \log_2(1+t)\\ &\Leftrightarrow \frac{6}{3} \cdot \log_2(1+t) - \log_2(1+t) > \log_2 4\\ &\Leftrightarrow \log_2(1+t) > \log_2 4\\ &\Leftrightarrow t > 3.\end{aligned}$$

Portanto, após 3 anos, a população da cidade M será sempre maior do que a da cidade N.

3. B

Como a função f passa pelos pontos (p,1) e (q, 2), segue que

$$\log_k p = 1 \Leftrightarrow k = p$$

e

$$\log_k q = 2 \Leftrightarrow k^2 = q.$$

Sabendo que a área do trapézio é igual a 30 u.a, vem:

$$\frac{1+2}{2} \cdot (q - p) = 30 \Leftrightarrow q - p - 20 = 0.$$

Daí, obtemos:

$K^2 - k - 20 = 0$

$K = -4$ ou $k = 5$.

Portanto, como $k > 0$, temos que

$k + p - q = 5 + 5 - 25 = -15$

4. D

A raiz da função $y = \log(x + 1)$ é tal que

$\log(x + 1) = 0$

$x + 1 = 10^0$

$x = 0$.

Daí, o gráfico intersecta o eixo das abscissas no ponto (0, 0). Portanto, a alternativa correta é a [D], cujo gráfico passa pela origem.

5. A

$$\log_{\frac{1}{4}} x > \log_4 7$$

$$\log_{\frac{1}{4}} x > \frac{\log_{\frac{1}{4}} 7}{\log_{\frac{1}{4}} 4}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{7}$$

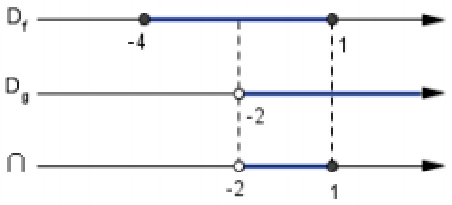
$$x < \frac{1}{7}$$

Logo, de acordo com as alternativas, o único valor possível para x é ¼.

6. E

$$-2x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) \leq 0$$

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$



7. C

Domínio da função: $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}/-1 < x < 1\}$

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow log\frac{1+x}{1-x} < log\,10 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} < 10 \Leftrightarrow \frac{-9+11x}{1-x} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{9}{11} ou x > 1.$$

8. B

$$f(4) = 2 \Rightarrow 2 = \log_a 4 \Rightarrow a = 2.$$

$$\log_2(a^3 + 8) = \log_2 2^4 = 4.$$

9. D

L(x) = 12(199 . log x - 651)

x = 2000

L(2000) = 12(199 . log 2000 - 651)

L(2000) = 12(199 . log 2.1000 - 651)

L(2000) = 12(199 . (log 2 + log 1000) - 651)
L(2000) = 12(199 . (0,3 + 3) - 651)
L(2000) = 12(199 . 3,3 - 651)
Log(2000) = 12(5,7)
Log(2000) = 68,4

10. C

Pelas condições de existência dos logaritmos, devemos ter $x > 2$. Logo,

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x-2) > -3 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \cdot (x-2) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}.$$