

Permutação circular e combinação completa

Quer ver esse material pelo Dex? Clique [aqui](#).

Resumo

Permutação Circular

Permutação circular é um tipo de permutação composta por n elementos distintos em ordem cíclica (formando uma circunferência).

$$PC_n = \frac{n!}{n} \quad \text{ou} \quad PC_n = (n-1)!$$

Exemplo: Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa?

$$PC_6 = (6-1)! = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Essas pessoas podem sentar de 120 maneiras diferentes envolta da mesa.

Combinações Completas

Combinações completas de n elementos, tomados p a p , são combinações de n elementos não necessariamente distintos. Em vista disso, quando vamos calcular as combinações completas devemos levar em consideração as combinações com elementos distintos (combinações simples) e as combinações com elementos repetidos.

$$CR_{n,p} = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \cdot p!} = C_{n+p-1}^p$$

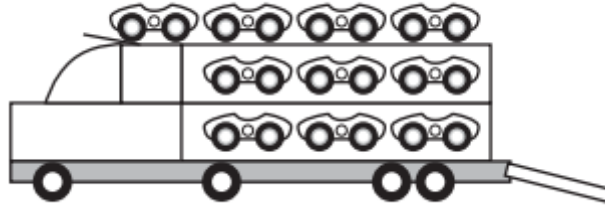
Exemplo: De quantos modos podemos comprar 4 salgadinhos em uma lanchonete que oferece 7 opções de escolha de salgadinhos?

$$CR_{7,4} = P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!4!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$$

Podemos comprar 4 salgadinhos de 210 modos diferentes.

Exercícios

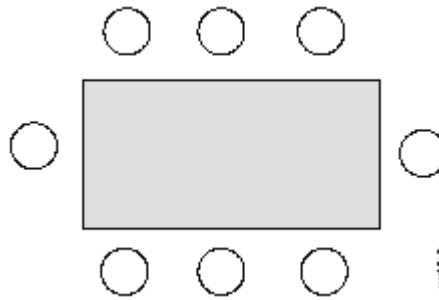
1. Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

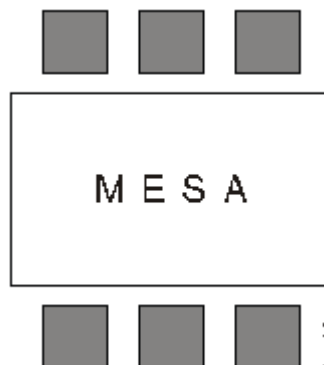
- a) $C_{6,4}$
 b) $C_{9,3}$
 c) $C_{10,4}$
 d) 6^4
 e) 4^6
2. Uma criança possui um cofre com 45 moedas: 15 de dez centavos, 15 de cinquenta centavos e 15 de um real. Ela vai retirar do cofre um grupo de 12 moedas ao acaso. Há vários modos de ocorrer essa retirada. Admita que as retiradas são diferenciadas apenas pela quantidade de moedas de cada valor. Determine quantas retiradas distintas, desse grupo de 12 moedas, a criança poderá realizar.
- a) 91
 b) 80
 c) 95
 d) 87
 e) 72

3. Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se numa mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados em frente um do outro?

- a) 1 440
b) 1 920
c) 2 016
d) 4 032
e) 5 760
4. Em cada ingresso vendido para um show de música, é impresso o número da mesa onde o comprador deverá se sentar. Cada mesa possui seis lugares, dispostos conforme o esquema a seguir:

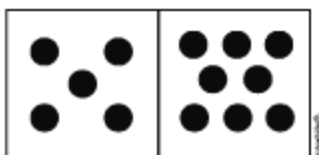


O lugar da mesa em que cada comprador se sentará não vem especificado no ingresso, devendo os seis ocupantes entrar em acordo. Os ingressos para uma dessas mesas foram adquiridos por um casal de namorados e quatro membros de uma mesma família. Eles acordaram que os namorados poderiam sentar-se um ao lado do outro. Nessas condições, o número de maneiras distintas em que as seis pessoas poderão ocupar os lugares da mesa é:

- a) 96.
b) 120.
c) 192.
d) 384.
e) 720.

5. Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que possui três sabores de sorvete: chocolate, morango e uva. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?
- 4
 - 6
 - 9
 - 12
 - 15

6. As pedras de um dominó usual são compostas por dois quadrados, com 7 possíveis marcas (de zero pontos até 6 pontos). Quantas pedras terá um dominó se cada quadrado puder ter até 9 pontos?



- 55
 - 60
 - 62
 - 57
7. O número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z=6$ é igual a:
- 30
 - 24
 - 28
 - 26
8. De quantas maneiras podem sentar-se três homens e três mulheres em uma mesa redonda, isto é, em cabeceira, de modo a se ter sempre um homem entre duas mulheres e uma mulher entre dois homens?
- 72
 - 12
 - 216
 - 720
 - 360

9. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?
- a) 36
 - b) 42
 - c) 48
 - d) 21
10. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?
- a) 24
 - b) 12
 - c) 48
 - d) 36

Gabarito

1. B

Sabendo-se que cada caminhão cegonha possui 10 carros e que é preciso ao menos um carrinho de cada cor, então restam 6 carrinhos nos quais as cores podem ser permutadas.
Sendo a, b, c e d a quantidade de carrinhos brancos, laranjas, amarelos e verdes, além dos 4 já pintados (um de cada cor), tem-se:
 $a + b + c + d = 6$

A quantidade de soluções inteiras não negativas dessa equação de quatro variáveis será:

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = C_{9,3}$$

2. A

Sejam x, y e z , respectivamente, o número de moedas de dez centavos, o número de moedas de cinquenta centavos e o número de moedas de um real, de tal sorte que $x + y + z = 12$.
Queremos calcular o número de soluções inteiras não negativas dessa equação. Tal resultado corresponde ao número de combinações completas de 3 objetos tomados 12 a 12, isto é,

$$CR_3^{12} = \binom{3+12-1}{12} = \frac{14!}{12! \cdot 2!} = 91.$$

3. E

Existem 4 escolhas para os acentos em que sentarão Amaro e Danilo. Definidos os assentos que eles ocuparão, ainda podemos permutá-los de 2 maneiras. Além disso, as outras seis pessoas podem ser dispostas de 6! maneiras. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, segue que o resultado pedido é

$$4 \cdot 2 \cdot 6! = 5.760.$$

4. C

Existem 2 maneiras de escolher um dos lados da mesa. Escolhido o lado, os três lugares que o casal e um dos membros da família irão ocupar podem ser definidos de $P_2 = 2! = 2$ maneiras. O casal ainda pode trocar de lugar de $P_2 = 2! = 2$ modos, e a família pode ocupar os 4 lugares de $P_4 = 4! = 24$ maneiras.

Portanto, pelo PFC, segue que o resultado pedido é dado por $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 = 192$.

5. E

Considere x o número de bolas de chocolate, y o número de bolas de morango e z o número de bolas de uva. Logo, $x + y + z = 4$. Agora devemos determinar o número de soluções inteiras da equação.

Permutação das bolas vermelhas e barras azuis:



O Número de soluções inteiras da equação é da por $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

6. A

O número de pedras de um dominó de 9 pontos é dado pelo número de combinações completas de 10 objetos tomados 2 a 2, ou seja,

$$CR_{10}^2 = C_{10+2-1}^2 = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55.$$

7. C

Correto. O número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z = 6$ é igual a

$$CR_{3,6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28.$$

8. B

Na permutação circular, fixa-se o primeiro, e a permutação é feita entre os restantes.

Assim, o valor pedido fica : $P_2.P_3 = 2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

Não importa se o primeiro fixo é homem ou mulher, voce poderá permutar os outros dois nas duas posições alternadas, e depois permutar os outros tres nas tres posições entre as 3 posições restantes.

9. C

Sabendo que pai e mãe devem ficar juntos, vamos amarrar os dois e tratá-los como se fossem um único elemento.

Ao tratar o pai e mãe como um único elemento, passamos a ter somente 5 elementos. Portanto, utilizando a permutação circular de 5 elementos, calculamos o número de possibilidades desta família sentar-se ao redor da mesa com pai e mãe juntos sendo que o pai está à esquerda da mãe.

Permutação circular (Pc) de 5 elementos calcula-se:

$$Pc5 = (5-1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Portanto, para o pai a esquerda da mãe, temos 24 posições diferentes. Mas o pai pode estar a direita da mãe, como na figura 2, e então teremos mais 24 posições diferentes para contar (novamente Pc5). Portanto, o número total de disposições é 48.

10. B

No total temos 5 elementos para dispor em círculo, ou seja, novamente utilizaremos Permutação Circular. Mas agora a restrição é diferente, os dois meninos NÃO podem ficar juntos. Para esta situação, iremos calcular o número total de disposições (sem restrição) e diminuir deste resultado o número de disposições em que os meninos estão juntos (para calcular o número de disposições deles juntos, fazemos como no exercício 1). O número total de disposições é $Pc5 = (5 - 1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$.

Agora, para calcular o número de disposições com os meninos juntos, devemos amarrá-los e tratá-los como um único elemento, lembrando que podemos ter duas situações: menino 1-menino2 ou menino 2- menino 1

O número total de disposições com os meninos juntos é $2.Pc4$ (4 elementos pois os meninos estão juntos e valem por 1). Calculando este valor:

$$2.Pc4 = 2.(4-1)! = 2.3! = 2.3.2.1 = 12$$

Portanto, o número de disposições em que os meninos não estão juntos é $24-12=12$.