Introdução ao estudo das funções: Classificação e determinação de Domínio e Imagem

Resumo

Nesta aula iremos dar continuidade ao estudo das funções, vamos classificá-las.

Classificação:

Função sobrejetora: É aquela que tem o conjunto imagem igual ao contradomínio.

Função injetora: É aquela que, para cada elemento da imagem, existe apenas um elemento no domínio. Ou seja, em uma função injetora, elementos distintos do domínio possuem imagens distintas no contradomínio.

Função bijetora: Uma função é bijetora quando é simultaneamente injetora e sobrejetora.

Obs: É importante saber que existem funções que não são nem injetoras, nem sobrejetoras. Elas simplesmente não apresentam classificação sob esse critério.

Função par: Uma função é dita par, se e somente se $f(-x) = f(x)$. Ou seja, valores simétricos de x possuem a mesma imagem.
Dica: o gráfico de uma função par apresenta simetria em relação ao eixo y.

Função ímpar: Uma função é dita par, se e somente se $f(-x) = -f(x)$. Ou seja, valores simétricos de x possuem imagens simétricas.
Dica: o gráfico de uma função par apresenta simetria em relação à origem.

Obs: Existem funções que não podem ser classificadas quanto a paridade, ou seja, não são nem pares nem ímpares.

Elementos de uma função:

Sendo A = {0,1,2,3} e B = = {0,1,2,3,4,5}, definimos função da seguinte forma:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow f(x) = x + 2$$

f: nome da função

A: Domínio da função

B: Contradomínio da função

f(x) = x + 2: lei de formação da função.

Domínio e Imagem:

O conjunto dos elementos que contém as abscissas (x) da relação se chama domínio. Já o conjunto dos elementos que contém as ordenadas (y) da relação se chama imagem. No caso do exemplo anterior, temos: D = {0,1,2,3} e I = {2,3,4,5}

Domínio de uma função:

Algumas funções reais apresentam problemas no cálculo de imagens para certos valores de x. A função $f(x)=\dfrac{3}{x}$, apresenta problema para x = 0, já que não existe divisão por zero. Como o elemento x = 0 não possui imagem, dizemos que ele não está definido no domínio dessa função. Dessa maneira, temos que prestar atenção e calcular o domínio da função com que estamos trabalhando. Temos que observar duas condições necessárias:

a) O denominador de qualquer função é diferente de zero.
b) Radicando de raízes de índice par são sempre positivos.

Função composta:

Função composta é aquela que tem como abscissa a imagem de outra função.

$$h(x) = f[g(x)] = fog$$

Ou seja, a abscissa de f(x) é a imagem de g(x).

- Condição de existência: Para que haja a função composta da função **g** com a função **f**, o domínio de **g** deve ser igual ao contradomínio de **f**.

Função inversa:

Definimos função inversa (f^{-1}) de uma função f do seguinte modo:

$$\forall(a,b)\in f \Leftrightarrow \exists(b,a)\in f^{-1}$$

Ou seja, para todo par ordenado (a,b) pertencente à função f, existe um par ordenado (b,a) correspondente na função inversa f^{-1}.

Dica: A relação inversa de f: A → B é uma função f^{-1}: B → A, se e somente se, f é uma função bijetora.

- Lei de formação: Para encontrarmos a lei de formação de uma função inversa, devemos seguir os seguintes passos:
  I. Na lei de formação de f, devemos trocar o y por x e o x por y.
  II. Depois, devemos isolar o novo y.

  Ex: Vamos achar a inversa de f(x) = x + 1.
  y = x + 1
  x = y + 1 (trocando x por y e y por x)
  y = x − 1 = $f^{-1}(x)$

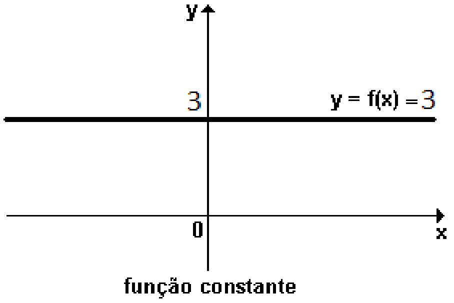
- Gráfico: O gráfico de uma f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta y = x, chamada de função identidade.

Função constante:

É aquele que, qualquer que seja o valor da abscissa, terá sempre a mesma ordenada.

Ex: f(x) = 3.

No exemplo acima fica claro que a função independe da variável x, ou seja, qualquer que seja o valor de x, a função sempre valerá 3.



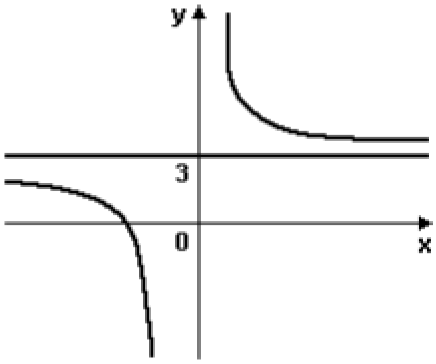
Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Durante um programa nacional de imunização contra uma forma virulenta de gripe, representantes do ministério da Saúde constataram que o custo de vacinação de "x" por cento da população era de, aproximadamente, $f(x) = \frac{150x}{200-x}$ milhões de reais. O domínio da função f é:

a) todo número real x
b) todo número real x, exceto os positivos
c) todo número real x, exceto os negativos
d) todo número real x, exceto x = 200
e) todo número real x, exceto x $\geq$ 200

2. Determine o domínio e o conjunto - imagem de f.



a) D(f) = IR e Im(f) = IR
b) D(f) = IR e Im(f) = 3
c) D(f) = IR – {0} e Im(f) = IR – {3}
d) D(f) = IR – {0} e Im(f) = IR
e) D(f) = IR e Im(f) = IR – {3}

3. Se a função real definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}}$$

possui conjunto domínio D e conjunto imagem B, e se D-B=]a, b], então a + b vale:

a) 11
b) 9
c) 8
d) 7
e) 5

4. O domínio da função real $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2 - 8x + 12}$ é:

a)]2, ∞[.

b)]2, 6[.

c)]− ∞, 6].

d)]−2, 2].

e)]− ∞, 2[.

5. Se f : R → R é uma função definida pela expressão f(x-1) = 3x , então o valor de f(3) é igual a:

a) 0

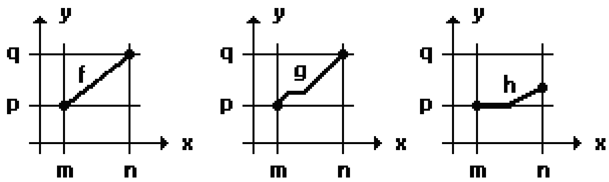
b) 1

c) 6

d) 15

e) 64

6. Considere as funções f, g e h, todas definidas em [m, n] com imagens em [p, q] representadas através dos gráficos a seguir:



Pode-se afirmar que:

a) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.

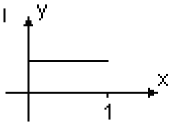
b) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.

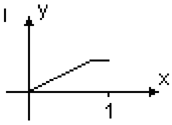
c) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.

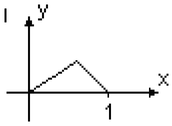
d) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.

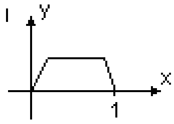
e) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

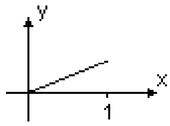
7. Há funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade: “Para valores distintos de x correspondem valores distintos de y”. Tais funções são chamadas de injetoras. Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

8. Para a função f: $IN^* \rightarrow IN^*$ que a cada número natural não nulo associa o seu número de divisores, considere as afirmativas:

I. existe um natural não nulo tal que f(n) = n.
II. f é crescente.
III. f não é injetiva.

Assinale a opção que contém a(s) afirmativa(s) correta(s).

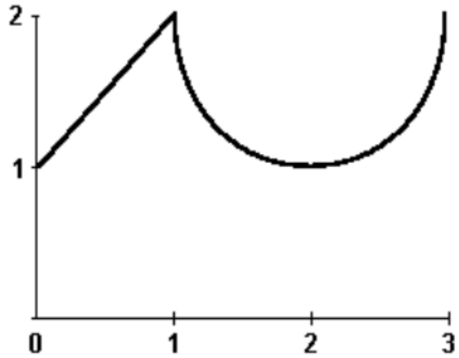
a) Apenas II
b) Apenas I e III
c) I, II, III
d) Apenas I
e) Apenas I e II.

9. Considere os conjuntos A e B: A = {−30, −20, −10, 0, 10, 20, 30} e B = {100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000}, e a funcao f: A é B, $f(x) = x^2 + 100$.

O conjunto imagem de f é:

a) {−30, −20, −10, 0, 10, 20, 30}.
b) {100, 200, 500, 1000}.
c) {300, 400, 600, 700, 800, 900}.
d) {100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800,900, 1000}.
e) conjunto vazio

10. A função f(x) com domínio no intervalo [0,3] tem seu gráfico esboçado a seguir. O gráfico é composto do segmento com extremos nos pontos (0,1) e (1,2) e da semicircunferência passando pelos pontos (1,2), (2,1) e (3,2).



Considerando esses dados, analise as afirmações abaixo.

( ) A imagem da função f é o intervalo [0,2].

( ) O valor máximo de f é 3.

( ) O comprimento do gráfico de f é $\sqrt{2}+\pi$

( ) Para x no intervalo [1, 3] temos $f(x)=2+\sqrt{1-(x-2)^2}$

( ) A área da região limitada pelo gráfico de f, os eixos coordenados e a reta $x=3$ é $\frac{11-\pi}{2}$

a) VVFVV

b) FFVFF

c) FVFVF

d) FFVFV

e) FVVVF

Gabarito

1. D

Para analisar o domínio não podemos ter absurdo como $1/0$, logo analisamos para onde o denominador zera que é em 200 – x = 0, logo x não pode ser 200.

2. C

O domínio da função f é dado por: D (f) = IR- { 0 }, pois o valor 0 não possui imagem.
O conjunto-imagem de f é dado por: Im (f) = IR - { 3}, pois nenhum valor do domínio possui 3 como imagem.

3. B

Condição de existência

$\sqrt{x-2} \geq 0$ e $\sqrt{6-x} \geq 0$

Logo,o domínio é [2;6]

Para x =2----->f(2)=$\frac{1}{2}$

Para x=6------>f(6)=3

então, a imagem é [$\frac{1}{2}$;3]

Fazendo-se D-I,ou seja, todos elementos pertencentes ao domínio que não pertencem a imagem

Então, resultará em]3;6]

a+b=9

4. E

Para o numerador:

$$\sqrt{2-x} \geq 0$$
$$2-x \geq 0$$
$$-x \geq -2$$
$$x \leq 2$$

Para o denominador:

$$x^2 - 8x + 12 \neq 0$$
$$\triangle = b^2 - 4ac$$
$$\triangle = 64 - 48$$
$$\sqrt{\triangle} = 4$$
$$x \neq \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$$
$$x \neq \frac{8 \pm 4}{2} \begin{cases} x \neq 6 \\ x' \neq 2 \end{cases}$$

S:]– ∞, 2[.

5. C

f(x - 1) = 3x

f(3-1) = 3x

f(2) = 3x

f(2) = 6

Então f(3) = 6

6. A

Das afirmativas temos:

I. Função f: bijetora, pois cada x possui seu próprio y e não sobra nenhum valor do contradomínio

II. Função g: Sobrejetora , pois seu gráfico apresenta um intervalo constante (reta paralela ao eixo x). Logo há mais de um x com a mesma imagem. Além disso, todo o intervalo [p,q] possui correspondente;

III. Função h: Possui também uma reta paralela ao eixo x, entretanto, há elementos do intervalo [p,q] sem correspondentes. Logo não é injetiva.

7. E

Como já explicado no enunciado, uma função injetora possui somente um valor de x para cada valor de y e vice e vera; e isso só pode ser encontrado na opção e, pois, todas as outras possuem 2 valores de x para um y ou 2 valores de y para um x.

8. D

a) f(1) > 0 Verdadeiro

Quando o x for 1 o Y é maior que 0

b) f(0) = 3 Verdadeiro

Quando o x for 0 o Y = 3

c) - 4 não pertence ao domínio da função Verdadeiro

Pois no gráfico o -4 aparece com uma bolinha aberta, logo ele não pertence ao domínio de F

e) f(2) = f(4) = 0 Verdadeiro

Quando x = 2 e quando x = 4, o Y = 0d) f(1) < f(2) Falso

f(1) > 0

f(2) = 0

Logo f(1) > f(2)

9. B

Em uma função $f : A \rightarrow B$ "TODOS" os elementos do conjunto A devem ter um valor correspondente no conjunto B, então:

$f(-10) = f(10) = (\pm 10)^2 + 100 = 100 + 100 = 200$

$f(-20) = f(20) = (\pm 20)^2 + 100 = 400 + 100 = 500$

$f(-20) = f(20) = (\pm 20)^2 + 100 = 400 + 100 = 500$

$f(-30) = f(30) = (\pm 30)^2 + 100 = 900 + 100 = 1000$

$f(0) = (0)^2 + 100 = 100$

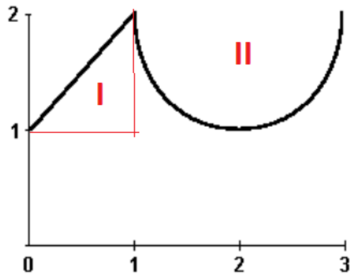
Logo, o conjunto imagem é: Im = {100, 200, 500 1000}

10. D

a) Falsa, Imagem é [0,3]

b) Falsa, Valor máximo de f (olha na reta y) é 2.

c) Verdadeiro, pois, aplicando Teorema de Pitágoras em I, descobrimos que a reta vale $\sqrt{2}$ e descobrindo metade do comprimento da circunferência, que é a II, temos $C = 2\pi r$, metade disso é $C = \pi r$, como o raio é 1, logo $C = \pi$.



d) Falso, pois

$$f(x) = 2 + \sqrt{1-(x-2)^2}$$
$$(f(x)-2)^2 = 1-(x-2)^2$$
$$f(x)^2 - 4f(x) + (x-2)^2 = 1$$

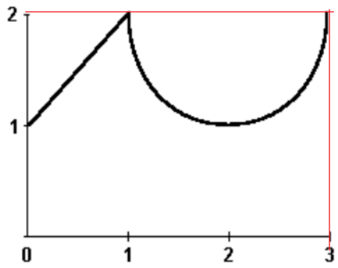
Como f(x) = y, só para simplificar,

$$y^2 - 4y + (x-2)^2 = 1$$
$$(y-2)^2 + (x-2)^2 = 1+4$$
$$(y-2)^2 + (x-2)^2 = 5$$

E o raio da circunferência é 1.

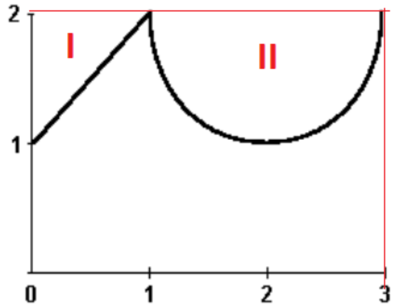
e) Verdadeiro, pois,

Fazendo a área do retângulo:



$$A_{retângulo} = 3.2 = 6$$

Encontrando as áreas I e II



$$A_I = \frac{b.h}{2} = \frac{1.1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_{II} = \frac{\pi.r^2}{2} = \frac{\pi.1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Fazendo a área do retângulo menos as áreas I e II, temos

$$A_{retângulo} - (A_I + A_{II}) = 6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{11-\pi}{2}$$