Semelhança de polígonos

Resumo

Pegue uma figura e a aumente. Depois, a diminua. Temos 3 figuras com o mesmo desenho, só que de tamanhos diferentes. Dizemos, assim, que elas são semelhantes entre si.
Ex.: O logo do descomplica em tamanhos diferentes.

Agora, vamos formalizar esse conceito.

Semelhança de polígonos

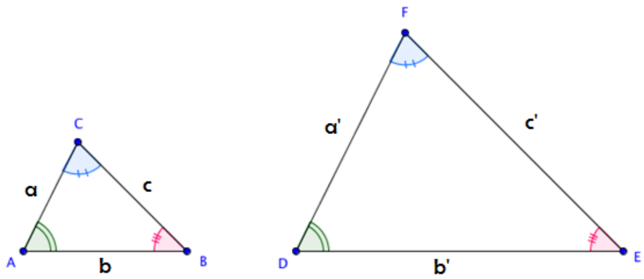
Polígonos são semelhantes quando possuem:

- Ângulos respectivamente iguais.
- Lados homólogos proporcionais.

Vamos estudar o caso mais clássico de semelhança: Triângulos.

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se possuírem os ângulos iguais. Na verdade, se garantirmos que 2 ângulos são iguais, já podemos dizer que são semelhantes, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante igual a 180 graus.

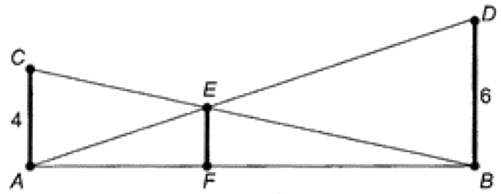


Temos que: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então a razão entre dois elementos homólogos (alturas, por exemplo) também é k. Essa razão também é válida para os perímetros (soma dos lados).

Exercícios

1. O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m

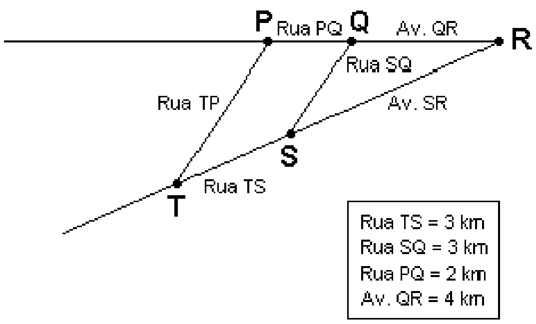
b) 2 m

c) 2,4 m

d) 3 m

e) $2\sqrt{6}$ m

2. O circuito triangular de uma corrida está esquematizado na figura a seguir: As ruas TP e SQ são paralelas. Partindo de S, cada corredor deve percorrer o circuito passando, sucessivamente, por R, Q, P, T, retornando, finalmente, a S. Assinale a opção que indica o perímetro do circuito.



a) 4,5 km

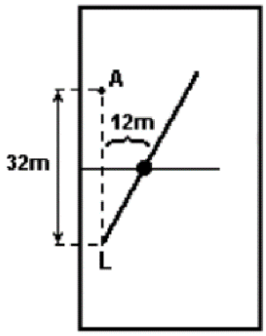
b) 19,5 km

c) 20,0 km

d) 22,5 km

e) 24,0 km

3. Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



a) 18,8m

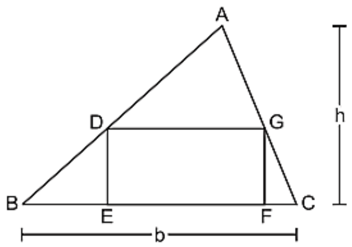
b) 19,2m

c) 19,6m

d) 20m

e) 20,4m

4. O triângulo ABC tem altura h e base b (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retângulo, em função de h e b, é dada pela fórmula:



a) $\dfrac{bh}{b+h}$

b) $\dfrac{2bh}{b+h}$

c) $\dfrac{bh}{2b+h}$

d) $\dfrac{bh}{b+2h}$

e) $\dfrac{bh}{2(b+h)}$

5. A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 metros

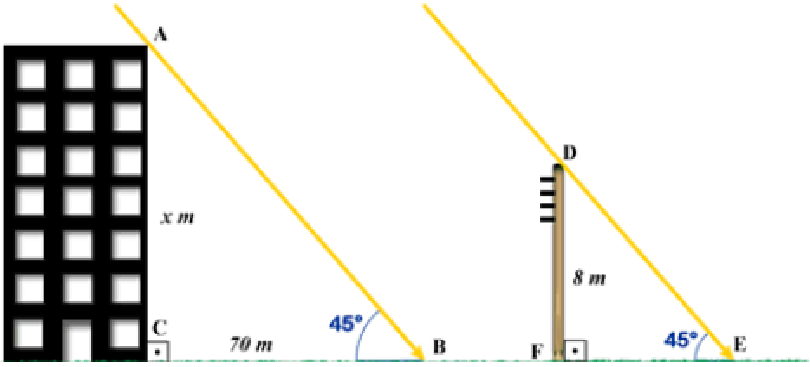
b) 3,0 metros

c) 5,4 metros

d) 5,6 metros

e) 7,04 metros

6. Um prédio tem sombra, pela luz solar, projetada no solo horizontal com 70 m. Simultaneamente um poste de 8m de altura localizado nas proximidades deste prédio também tem sua sombra projetada no solo.



Sabendo que neste instante os raios solares fazem um ângulo de 45° com o solo, calcule a altura do prédio e a sombra do poste que, respectivamente, são:

a) 70 m e 8 m

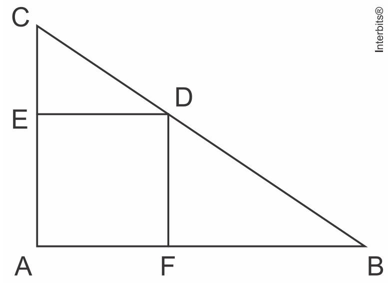
b) 35 m e 8 m

c) 70 m e 4 m

d) 35 m e 4 m

e) 20 m e 8 m

7. Na figura abaixo, temos um quadrado $AEDF$ e $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AB} = 6$.



Qual é o valor do lado do quadrado?

a) 2
b) 2,4
c) 2,5
d) 3
e) 4

8. Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do “pau de sebo”, em metros, é

a) 5,0.

b) 5,5.

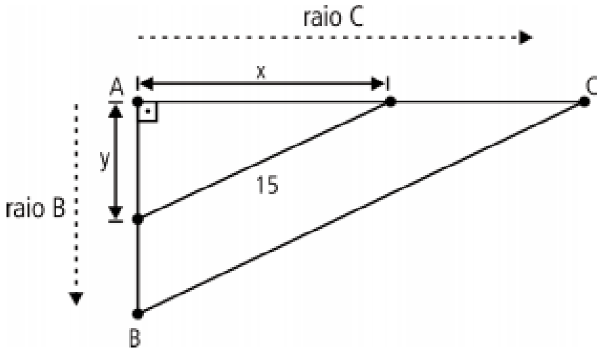
c) 6,0.

d) 6,5.

9. O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,

a) 64 cm e 32 cm.
b) 60 cm e 48 cm.
c) 48 cm e 24 cm.
d) 96 cm e 48 cm.
e) 96 cm e 64 cm.

10. Suponha que dois navios tenham partido ao mesmo tempo de um mesmo porto A em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Sabe-se que a velocidade do navio B é de 18 km/h e que, com 30 minutos de viagem, a distância que o separa do navio C é de 15 km, conforme mostra a figura:



Desse modo, pode-se afirmar que, com uma hora de viagem, a distância, em quilômetros, entre os dois navios e a velocidade desenvolvida pelo navio C, em quilômetros por hora, serão, respectivamente:

a) 30 e 25.

b) 25 e 22.

c) 30 e 24.

d) 25 e 20.

e) 25 e 24.

Gabarito

1. **C**

Os triângulos **FEB e ACB são semelhantes por apresentarem ângulos congruentes entre si, assim:**

$$\frac{EF}{AC}=\frac{EF}{4}=\frac{FB}{AB}$$

Os triângulos FEA e BDA também são semelhantes pela mesma razão, assim:

$$\frac{EF}{BD}=\frac{EF}{6}=\frac{FE}{AB}$$

Somando as equações encontradas a partir das semelhanças, tem-se que:

$$\frac{EF}{4}+\frac{EF}{6}=1$$

Como FB + FE = AB, $\frac{EF}{4}+\frac{EF}{6}=\frac{5}{12}EF=1$. Resolvendo a equação, encontramos EF = 2,4.

2. **B**

(PR) = **(PQ) + (QR)**

(PR) = 6

O triângulo TPR é semelhante ao triângulo SQR, então:

(PR)/(QR) = (TR)/(SR)

6/4 = (3 + SR)/(SR)

6(SR) = 12 + 4(SR)

(SR) = 6km

(SQ)/(TP) = (QR)/(PR)

3/(TP) = 4/6

(TP) = 4,5km

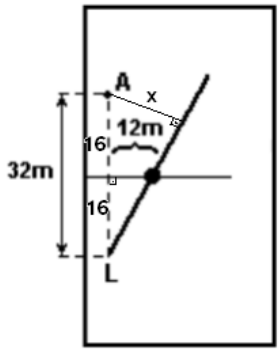
Perímetro = (SR) + (QR) + (QP) + (PT) + (TS)

Perímetro = 6km + 4km + 2km+ 4,5km + 3km

Perímetro = 19,5km.

3. **B**

Observe **a figura:**



O triângulo grande e o pequeno são semelhantes, mas, antes de calcular o valor de x por semelhança, precisamos calcular a hipotenusa do triângulo menor. Por Pitágoras:

$h^2 = 16^2 + 12^2$

h = 20.

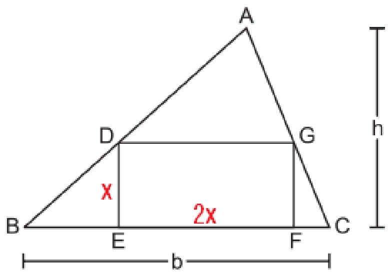
Agora sim, podemos fazer semelhança:

$$\frac{20}{32} = \frac{12}{x}$$

Resolvendo a equação, encontramos x = 19,2.

4. **D**

Primeiramente, vamos colocar as informações que o exercício nos deu no triângulo. A base é o dobro da altura, então vamos chamar de x a altura do retângulo e 2x sua base (já que é o dobro, como mostra o exercício). Veja como fica.



Repare agora que o triângulo ABC é semelhante do triângulo ADG, ou seja o segmento de um deles sobre o segmento correspondente no outro é uma constante. Assim podemos montar uma relação entre a altura do triângulo ABC e do ADG e também de suas bases.

Veja: Altura do triângulo ABC = h

Altura do triângulo ADG = h-x (ou seja, a altura do triângulo ABC menos a altura do retângulo)

Base do triângulo ABC = b

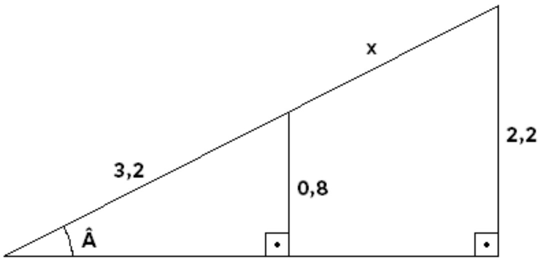
Base do triângulo ADG = 2x

Assim, podemos montar e resolver a seguinte equivalência:

$$\frac{h-x}{h}=\frac{2x}{b}$$
$$2hx=b(h-x)$$
$$2hx=bh-bx$$
$$2hx+bx=bh$$
$$x(2h+b)=bh$$
$$x=\frac{bh}{2h+b}$$

5. D

Observe a figura:



O triângulo grande e o pequeno são semelhantes pois têm os mesmos ângulos. Assim, podemos calcular por semelhança o valor de x:

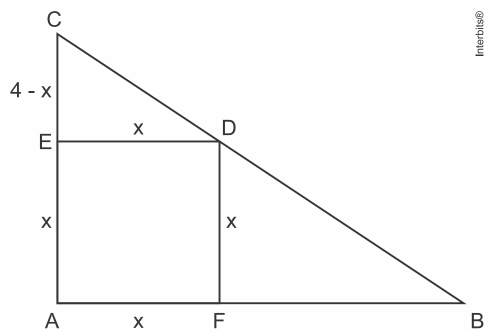
$$\frac{0,8}{2,2}=\frac{3,2}{3,2+x}$$

Resolvendo a equação, encontramos x = 5,6.

6. A

Podemos fazer esta questão por semelhança, mas é interessante notar que os dois triângulos possuem um ângulo de 90° e um ângulo de 45°. Ou seja, estamos falando do famoso triângulo que é a metade de um quadrado, pois o terceiro ângulo é de 45°. Dessa maneira, os dois catetos possuem a mesma medida! Assim, AC = 70 e EF = 8.

7. B



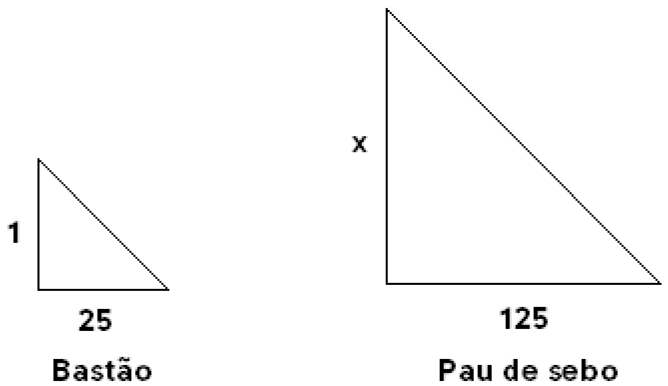
Considerando x a medida do lado do quadrado, temos:

$\Delta CED \sim \Delta CAB$

$$\frac{4-x}{4}=\frac{x}{6}$$
$$4x=24-6x$$
$$10x=24$$
$$x=2,4$$

8. A

Observe a figura:



O triângulo grande e o pequeno são semelhantes pois têm os mesmos ângulos. Assim, podemos calcular por semelhança o valor de x:

$$\frac{1}{x} = \frac{25}{125}$$

Resolvendo a equação, encontramos x = 5.

9. D

Sendo x o maior lado e y o menor lado do triângulo DEF, pode-se escrever:

$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$

34 —— 204

16 —— x

$x = 96$

34 —— 204

8 —— y

$y = 48$

10. C

Se B está a 18 km/h e já se passou 30min, então y = 18/2 = 9 km.

Por Pitágoras,temos que $x^2 + y^2 = 15^2$.

$x^2 + 9^2 = 15^2$

x = 12.

Após 1 hora, a medida do segmento “raio B” medirá 18 km.

Para descobrir a hipotenusa do triângulo maior, cujo cateto já sabemos que mede 18, usaremos semelhança de triângulos.

$$\frac{15}{BC} = \frac{9}{18}$$

Resolvendo a equação, encontramos BC = 30 km.

Como podemos ver, o triângulo maior tem o dobro das medidas do triângulo menor, assim, AC = 24.