Matrizes: Definição, matriz genérica, matriz transposta

Resumo

Matriz do tipo mxn é a matriz que possui m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Note que ela possui 2 linhas e 3 colunas logo A é uma matriz 2x3.

Exemplo:

Na matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

O elemento $\frac{1}{3}$ está na segunda linha e na segunda coluna logo é indicado como a_{22}. O elemento 5 está na quarta linha e primeira coluna logo é indicado como a_{41}

Matriz Genérica

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uma elemento genérico da matriz A é indicado por a_{ij}, onde i representa a linha e j representa a coluna.Uma matriz pode ser definida por uma lei de formação também. Por exemplo:

A matriz A = $(a_{ij})_{2x3}$ tal que a_{ij} = 2i + j. Os seus elementos na forma genérica são:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

A partir da sua lei de formação podemos descobrir os elementos substituindo-se i e j pelos valores correspondentes:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2.1 + 1 = 3 \\ a_{12} &= 2.1 + 2 = 4 \\ a_{13} &= 2.1 + 3 = 5 \\ a_{21} &= 2.2 + 1 = 5 \\ a_{22} &= 2.2 + 2 = 6 \\ a_{23} &= 2.3 + 2 = 8 \end{aligned}$$

Substituindo os valores, a matriz fica:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Matrizes com denominações especiais

- **Matriz quadrada:** é a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{possui 3 linhas e 3 colunas}$$

- **Matriz transposta:** Dada a matriz A, denomina-se matriz transposta de A à matriz A^T, cujas colunas coincidem ordenadamente com as linhas da matriz A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades:

$$\begin{aligned} &(A^T)^T = A \\ &(A+B)^T = A^T + B^T \\ &(cA)^T = cA^T \\ &(AB)^T = B^T A^T \end{aligned}$$

- **Matriz Triangular:** Tem dois tipos triangular: superior, onde a_{ij} =0 quando i<j e inferior, onde a_{ij} =0 quando i>j

Exercícios

1. A temperatura da cidade de Porto Alegre – RS foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante 6 dias. Cada elemento a_{ij} da matriz A = $\begin{bmatrix} 9{,}4 & 8{,}1 & 12{,}4 & 15{,}7 & 13 & 11{,}7 \\ 12{,}2 & 10{,}5 & 15 & 18{,}2 & 14{,}2 & 13{,}1 \\ 15{,}7 & 13{,}2 & 17{,}5 & 21 & 16{,}3 & 18{,}5 \end{bmatrix}$ corresponde à temperatura observada no tempo i do dia j. Com base nos dados da matriz A, analise as seguintes proposições:

I. A temperatura mínima registrada está na posição a_{12}

II. A maior variação de temperatura registrada entre os tempos 1 e 2 aconteceu no primeiro dia.

III. A temperatura máxima registrada está na posição a_{34}

Estão corretas as afirmativas

a) I e III apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I, II e III.

2. Se A é uma matriz 2x3 definida por $a_{ij} \begin{cases} 3i + j, \text{ se } i \neq j \\ -2i + j, \text{ se } i = j \end{cases}$ é representada por:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -5 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$:

3. Observe a matriz A, quadrada e de ordem três.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,47 & 0,6 \\ 0,47 & 0,6 & x \\ 0,6 & x & 0,77 \end{pmatrix}$$

Considere que cada elemento a_{ij} dessa matriz é o valor do logaritmo decimal de (i + j). O valor de x é igual a:

a) 0,50

b) 0,70

c) 0,77

d) 0,87

4. Anselmo (1), Eloi (2), Pedro (3) e Wagner (4) são matemáticos e, constantemente, se desafiam com exercícios. Com base na matriz D, a seguir, que enumera cada elemento a_{ij} representando o número de desafios que "i" fez a "j", assinale, respectivamente, quem mais desafiou e quem foi mais desafiado.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Anselmo e Pedro.

b) Eloi e Wagner.

c) Anselmo e Wagner.

d) Pedro e Eloi.

e) Wagner e Pedro.

5. A matriz A_{ij} (2x3) tem elementos definidos pela expressão A_{ij} =i³-j². Portanto, a matriz A é

a) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 26 \\ -3 & 4 & 23 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 4 \\ 26 & 23 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz M=(m_{ij}) de ordem 2 x 3. Após o sorteio observou se que esses números obedeceram à regra m_{ij} =4i-j. Assim, a matriz M é igual a______.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

7. A distribuição dos n moradores de um pequeno prédio de apartamentos é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & y \\ 6 & y & x+1 \end{bmatrix}$ onde cada elemento A_{ij} representa a quantidade de moradores do apartamento j do andar i. Sabe-se que, no 1º andar, moram 3 pessoas a mais que no 2º e que os apartamentos de número 3 comportam 12 pessoas ao todo. O valor de n é:

a) 30

b) 31

c) 32

d) 33

e) 34

8. A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz A = [a_{ij}], em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos a_{ij} = 0, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

9. O fluxo de veículos que circulam pelas ruas de mão dupla 1, 2 e 3 é controlado por um semáforo, de tal modo que, cada vez que sinaliza a passagem de veículos, é possível que passem até 12 carros, por minuto, de uma rua para outra. Na matriz $S = \begin{bmatrix} 0 & 90 & 36 \\ 90 & 0 & 75 \\ 36 & 75 & 0 \end{bmatrix}$, cada termo S_{ij} indica o tempo, em segundos, que o semáforo fica aberto, num período de 2 minutos, para que haja o fluxo da rua i para a rua j.

Então, o número máximo de automóveis que podem passar da rua 2 para a rua 3, das 8h às 10h de um mesmo dia, é:

a) 1100
b) 1080
c) 900
d) 576
e) 432

10. No projeto Sobremesa musical, o Instituto de Cultura Musical da PUC-RS realiza apresentações semanais gratuitas para a comunidade universitária.O número de músicos que atuaram na apresentação de número j do i-ésimo mês da primeira temporada de 2009 está registrado como elemento aij da matriz a seguir:

$$\begin{bmatrix} 43 & 12 & 6 & 6 & 5 \\ 43 & 5 & 5 & 12 & 12 \\ 43 & 13 & 20 & 13 & 0 \\ 3 & 5 & 54 & 43 & 43 \end{bmatrix}$$

A apresentação na qual atuou o maior número de músicos ocorreu na _______ , semana do ________ mês.

a) quinta - segundo
b) quarta - quarto
c) quarta - terceiro
d) terceira - quarto
e) primeira - terceiro

Gabarito

1. D

- **I.** Correta, o a_{12} (8,1) é o menor valor da matriz
- **II.** Correta, a maior variação é 2,8 e respectivo ao primeiro dia
- **III.** Correta, o a_{34} (21) é o maior valor da matriz

2. D

$a_{11} = -2.1 + 1 = -1$
$a_{12} = 3.1 + 2 = 5$
$a_{13} = 3.1 + 3 = 6$
$a_{21} = 3.2 + 1 = 7$
$a_{22} = -2.2 + 2 = -2$
$a_{23} = 3.2 + 3 = 9$

3. B

O x representa o elemento na 2ª linha e 3ª coluna e o elemento na 3ª linha e 2ª coluna. Usando a lei de formação

$\log(i + j) = \log(3 + 2) = \log 5$

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$

$(\log 2 = \log(1 + 1) = 0,3)$

$\log 10 - \log 2 \Rightarrow 1 - 0,3 = 0,7$

$x = 0,7$

4. A

Numero de quem mais desafia= i = linha, Número de mais desafiado = j = coluna. Somando os elementos das linhas e das colunas

Linha 1 $\rightarrow$ 0 + 5 + 2 + 7 = 14 Coluna 1 $\rightarrow$ 0 + 6 + 1 + 2 = 9
Linha 2 $\rightarrow$ 6 + 0 + 4 + 1 = 11 Coluna 2 $\rightarrow$ 5 + 0 + 7 + 1 = 13
Linha 3 $\rightarrow$ 1 + 7 + 0 + 3 = 11 Coluna 3 $\rightarrow$ 2 + 4 + 0 + 8 = 14
Linha 4 $\rightarrow$ 2 + 1 + 8 + 0 = 11 Coluna 4 $\rightarrow$ 7 + 1 + 3 + 0 = 11

Maior soma nas linhas (quem mais desafia) = linha 1 = Ancelmo. Maior soma nas colunas (quem mais é desafiado) = coluna 3 = Pedro

5. **A**

$a_{ij} = i^3 - j^2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^3-1^2) & (1^3-2^2) & (1^3-3^2) \\ (2^3-1^2) & (2^3-2^2) & (2^3-3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

6. **C**

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 1-1 & 4\cdot 1-2 & 4\cdot 1-3 \\ 4\cdot 2-1 & 4\cdot 2-2 & 4\cdot 2-3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. **C**

Nos apartamentos de número 3 comportam 12 pessoas ao logo, logo

5+y+x+1=12, logo x+y=6. Sendo assim, o valor de N é

$$4+1+6+x+3+y+5+y+x+1=$$
$$4+1+6+6+3+5+6+1=32$$

8. **A**

A soma dos elementos da linha i dará a quantidade total de transferências do banco i.

Linha 1 (banco 1): 0 + 2 + 0 + 2 + 2 = 6

Linha 2 (banco 2): 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3

Linha 3 (banco 3): 1 + 2 + 0 + 1 + 1 = 5

Linha 4 (banco 4): 0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 4

Linha 5 (banco 5): 3 + 0 + 1 + 1 + 0 = 5

Logo, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco 1

9. **C**

Se a cada minuto podem passar até 12 carros, temos que em 75 (s_{23}) segundos podem passar até

$$\frac{75\ s\cdot 12\ carros}{60\ s} = 15\ carros.$$

Como de 8 h às 10 h existem $\frac{120}{2} = 60$ períodos de 2 minutos, segue que podem passar até $15\cdot 60 = 900$ automóveis no período considerado.

10. **D**

O maior número de músicos (54) aparece na quarta linha e na terceira coluna.

Como i indica o mês e j a semana, esta apresentação ocorreu no quarto mês e na terceira semana.