Razão, Proporção e Regra de 3

Resumo

Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando, ao variar uma grandeza, a outra também varia na **mesma proporção**. Por exemplo: se uma grandeza dobra, a outra também irá dobrar. Se uma grandeza reduzir-se à metade, a outra também terá o mesmo efeito.

Exemplo: Se o preço da gasolina é R$4,00, 2 litros custarão R$8,00.

$$\begin{array}{ccc} \text{Preço} & & \text{Litro} \\ 4 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 1 \\ \downarrow x & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 2 \downarrow \end{array}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 8$$

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao variar uma grandeza, a outra também variará na **razão inversa**. Ou seja, se uma grandeza dobrar, a outra se reduzirá a metade. Se uma grandeza triplicar, a outra será dividida em três.

Exemplo: A distância entre duas cidades é de 200 km. Se uma pessoa percorrer a uma velocidade média *v* (km/h), o tempo de uma viagem de uma cidade a outra será *d* (em horas).

v	20	40	60	80	100
d	10	5	$\frac{10}{3}$	2,5	2

$$\begin{array}{ccc} \text{Velocidade} & & \text{Tempo} \\ 20 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 10 \\ \uparrow 60 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & x \downarrow \end{array}$$

$$\frac{20}{60} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

Escalas

A escala pode ser definida como a razão entre a medida linear do desenho e a medida linear correspondente na realidade.

$$E = \frac{medida\ do\ desenho}{medida\ no\ tamanho\ real}$$

Exemplo: Uma planta de uma casa foi desenhada na escala 1:100. Isso quer dizer que cada centímetro do desenho corresponde a 100 centímetros da casa.

Existem também **escalas de áreas,** que é o valor da escala ao **quadrado,** e escalas volumétricas, que é o valor da escala ao **cubo.**
OBS.: Escala é adimensional (é um número, sem unidade)!

Regra de 3 Simples

A regra de três é o processo pelo qual podemos relacionar duas grandezas, sejam elas direta ou inversamente proporcionais. É comum termos 3 valores e precisarmos encontrar o quarto valor, por isso o nome regra de 3.

Exemplo: Se em uma banca de jornal vende 20 revistas em uma semana, em duas semanas venderá quantas? Para resolvermos o problema precisamos analisar as grandezas. Quanto mais tempo passar mais revista venderá, logo, as grandezas são diretamente proporcionais assim:

$$\begin{matrix} 1 \to 20 \\ 2 \to x \end{matrix} \quad \text{multiplicando cruzado } x = 2.20 \Rightarrow x = 40$$

Logo, terá vendido 40 revistas.

Obs: Na regra de 3 com grandezas inversamente proporcionais, nós multiplicamos em linha!

Regra de 3 Composta

Para entender sobre regra de três composta vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo: Para confeccionar 1.600 metros de tecido com largura de 1,80m a tecelagem Nortefabril S.A. consome 320 kg de fio. Qual é a quantidade de fio necessária para produzir 2.100 metros do mesmo tecido com largura de 1,50 m?
Esse é um problema que envolve uma grandeza (quantidade de fio) proporcional as outras duas (comprimento do tecido e largura do tecido). Para resolver esse problema, vamos utilizar a regra de três composta.

	A	**B**	**C**
	Quantidade de fio (kg)	Comprimento produzido(m)	Largura (m)
Situação 1	320	1.600	1,80
Situação 2	X	2.100	1,50

Precisamos calcular a grandeza A(quantidade de fio), que depende das grandezas B(comprimento do tecido) e C(largura do tecido).

Podemos verificar que :
→ **A** é diretamente proporcional a **B.** (pois se aumentarmos o comprimento, precisamos de mais quantidade de fio).
→ **A** é diretamente proporcional a **C.** (pois se aumentarmos a largura, precisamos de mais quantidade de fio).
Portanto :

$$\frac{320}{x} = \frac{1600}{2100} \cdot \frac{1,80}{1,50}$$
$$\rightarrow \frac{320}{x} = \frac{2880}{3150}$$
$$\rightarrow x = \frac{3150.320}{2880}$$
$$\rightarrow x = 350kg$$

No exemplo acima, todas as grandezas eram diretamente proporcionais. Vamos estudar agora quando existem grandezas que são <u>inversamente proporcionais</u>.

Exemplo: Para alimentar 12 porcos durante 20 dias são necessários 400kg de farelo. Quantos porcos podem ser alimentados com 600 kg de farelo durante 24 dias ?
Temos que:

A	**B**	**C**
Número de porcos	Quantidade de farelo (kg)	número de dias
12	400	20
x	600	24

Podemos concluir que:

- **A** é diretamente proporcional a **B.** (Pois se aumentarmos a quantidade de farelo mais porcos poderão se alimentar)
- **A** é inversamente proporcional a **C.**(Pois se aumentarmos o número de dias menos porcos poderão se alimentar). Portanto temos que inverter a razão de número de dias).
  Então:

$$\frac{12}{x} = \frac{400}{600} \cdot \frac{24}{20}$$
$$\rightarrow \frac{12}{x} = \frac{9600}{12000} \therefore x = 15$$

Exercícios

1. Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala $1:400,$ e que seu volume é de $25\ \text{cm}^3.$

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

a) 100.

b) 400.

c) 1.600.

d) 6.250.

e) 10.000.

2. Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X.

Os valores possíveis para X são, apenas,

a) $X > 1\,500.$

b) $X < 3\,000.$

c) $1\,500 < X < 2\,250.$

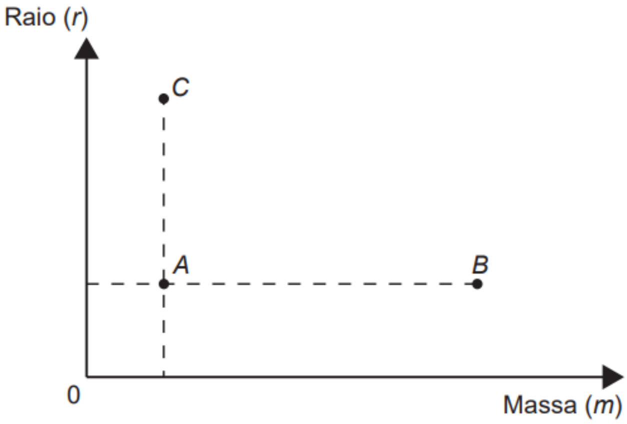
d) $1\,500 < X < 3\,000.$

e) $2\,250 < X < 3\,000.$

3. De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional F que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa m do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio r da órbita, ou seja,

$$F = \frac{km}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto (m ; r) cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.



Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades F_A, F_B e F_C da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites A, B e C, respectivamente.
As intensidades F_A, F_B e F_C expressas no gráfico satisfazem a relação

a) $F_C = F_A < F_B$

b) $F_A = F_B < F_C$

c) $F_A < F_B < F_C$

d) $F_A < F_C < F_B$

e) $F_C < F_A < F_B$

4. Os tipos de prata normalmente vendidos são 975, 950 e 925. Essa classificação é feita de acordo com a sua pureza. Por exemplo, a prata 975 é a substância constituída de 975 partes de prata pura e 25 partes de cobre em 1 000 partes da substância. Já a prata 950 é constituída de 950 partes de prata pura e 50 de cobre em 1 000; e a prata 925 é constituída de 925 partes de prata pura e 75 partes de cobre em 1 000. Um ourives possui 10 gramas de prata 925 e deseja obter 40 gramas de prata 950 para produção de uma joia.
Nessas condições, quantos gramas de prata e de cobre, respectivamente, devem ser fundidos com os 10 gramas de prata 925?

a) 29,25 e 0,75

b) 28,75 e 1,25

c) 28,50 e 1,50

d) 27,75 e 2,25

e) 25,00 e 5,00

5. Uma empresa deseja iniciar uma campanha publicitária divulgando uma promoção para seus possíveis consumidores. Para esse tipo de campanha, os meios mais viáveis são a distribuição de panfletos na rua e anúncios na rádio local. Considera-se que a população alcançada pela distribuição de panfletos seja igual à quantidade de panfletos distribuídos, enquanto que a alcançada por um anúncio na rádio seja igual à quantidade de ouvintes desse anúncio. O custo de cada anúncio na rádio é de R$ 120,00, e a estimativa é de que seja ouvido por 1 500 pessoas. Já a produção e a distribuição dos panfletos custam R$ 180,00 cada 1 000 unidades. Considerando que cada pessoa será alcançada por um único desses meios de divulgação, a empresa pretende investir em ambas as mídias.
Considere X e Y os valores (em real) gastos em anúncios na rádio e com panfletos, respectivamente. O número de pessoas alcançadas pela campanha será dado pela expressão.

a) $\frac{50X}{4}+\frac{50Y}{9}$

b) $\frac{50X}{9}+\frac{50Y}{4}$

c) $\frac{4X}{50}+\frac{4Y}{50}$

d) $\frac{50}{4X}+\frac{50}{9Y}$

e) $\frac{50}{9X}+\frac{50Y}{4Y}$

6. Um banco de sangue recebe 450 mL de sangue de cada doador. Após separar o plasma sanguíneo das hemácias, o primeiro é armazenado em bolsas de 250 mL de capacidade. O banco de sangue aluga refrigeradores de uma empresa para estocagem das bolsas de plasma, segundo a sua necessidade. Cada refrigerador tem uma capacidade de estocagem de 50 bolsas. Ao longo de uma semana, 100 pessoas doaram sangue àquele banco. Admita que, de cada 60 mL de sangue, extraem-se 40 mL de plasma. O número mínimo de congeladores que o banco precisou alugar, para estocar todas as bolsas de plasma dessa semana, foi

a) 2

b) 3

c) 4

d) 6

e) 8

7. Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3’ 0” a leste do Meridiano de Greenwich.
Dado: 1° equivale a 60’ e 1’ equivale a 60”.

PAVARIN, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é

a) 124,02°.

b) 124,05°.

c) 124,20°.

d) 124,30°.

e) 124,50°

8. A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma “caneta” na qual pode ser inserido um refil contendo 3mL de insulina como mostra a imagem.

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01 mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar. A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite. Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

a) 25

b) 15

c) 13

d) 12

e) 8

9. Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal. O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de

a) 0,624.

b) 52,0.

c) 156,0.

d) 750,0.

e) 1 201,9.

10. Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

a) 920 kg.

b) 800 kg.

c) 720 kg.

d) 600 kg.

e) 570 kg.

Gabarito

1. C

Supondo as dimensões da miniatura como sendo $1, 1$ e 25 centímetros, pode-se calcular:

Miniatura $\Rightarrow$ dimensões $\Rightarrow 1, 1$ e 25

Convertendo usando a escala $\Rightarrow 400, 400$ e $25 \cdot 400$

$V_{monumento} = 400^2 \cdot (25 \cdot 400) = 1.600.000.000 \text{ cm}^3 = 1.600 \text{ m}^3$

2. C

Sendo $15 \text{ m} = 1500 \text{ cm}$ e $90 \text{ m} = 9000 \text{ cm}$, temos

$$\frac{1}{X} \cdot 9000 > 4 \Leftrightarrow X < 2250.$$

e

$$\frac{1}{2} < 1500 \cdot \frac{1}{X} < 1 \Leftrightarrow 1500 < X < 3000.$$

Portanto, das duas condições, segue que $1500 < X < 2250$.

3. E

Sejam $A = (m_A, r_A), B = (m_B, r_B)$ e $C = (m_C, r_C)$. Logo, sendo $m_A = m_C < m_B$ e $r_A = r_B < r_C$, temos

$$\frac{km_C}{r_C^2} < \frac{km_A}{r_A^2} < \frac{km_B}{r_B^2} \Leftrightarrow F_C < F_A < F_B.$$

4. B

Em 40 gramas de prata 950 temos $40 \cdot \frac{950}{1000} = 38 \text{ g}$ de prata pura e $40 - 38 = 2 \text{ g}$ de cobre. Logo, a resposta é

$38 - 10 \cdot \frac{925}{1000} = 28{,}75 \text{ g}$ de prata pura e $30 - 28{,}75 = 1{,}25 \text{ g}$ de cobre.

5. A

Se o número de anúncios na rádio é igual a $\frac{X}{120}$, e o número, em milhares, de panfletos produzidos e distribuídos é $\frac{Y}{180}$, então a resposta é

$$\frac{X}{120} \cdot 1500 + \frac{Y}{180} \cdot 1000 = \frac{50X}{4} + \frac{50Y}{9}.$$

6. B

O volume total de sangue doado foi de $450 \cdot 100 = 45.000 \text{mL} = 45 \text{ L}$. Desse total, $\frac{2}{3} \cdot 45 = 30 \text{ L}$ correspondem ao volume de plasma que será estocado. Logo, como cada congelador pode armazenar no máximo $50 \cdot 250 = 12.500 \text{mL} = 12{,}5 \text{ L}$, segue que a resposta é $\left\lceil \frac{30}{12{,}5} \right\rceil = 3$.

Observação: $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que supera x.

7. B

$3' = (3/60)° = 0{,}05°$

$124° \, 3' \, 0'' = 124{,}05°$

8. A

Em cada aplicação de 10 unidades são consumidas 12 unidades. Assim, o resultado pedido é dado por $\frac{3}{12 \cdot 0{,}01} = 25.$

9. B

A dose diária, em miligramas, que esse felino devera receber é de $250 \cdot 0{,}208 = 52.$

10. A

Alunos	dias	horas	Alimento(kg)
20	10	3	120g
50	20	4	x

$$\frac{120}{20.10.3} = \frac{x}{50.20.4} \Leftrightarrow x = 800kg$$

Total arrecadado = 800 + 120 = 920kg