# Vetores: produto escalar

Quer ver esse material pelo Dex? Clique aqui.

## Resumo

### Definição Algébrica

Chama-se produto escalar de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u}.\vec{v}$, ao número real:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 .$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também $<\vec{u}.\vec{v}>$ e se lê $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$

Exemplo:

Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$, e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ (note que nesse caso $\vec{u} = (3, -5, 8)$), tem-se

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (3).(4) + (-5)(-2) + (8)(-1)\\ &= 12 + 10 - 8 = 14\end{aligned}$$

### Propriedades

Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e o número real α, temos que:

I) $\vec{u} . \vec{v} = \vec{v} . \vec{u}$ Comutativa

II) $\vec{u} . (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} . \vec{v} + \vec{u} . \vec{w}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) . \vec{w} = \vec{u} . \vec{w} + \vec{v} . \vec{w}$ Distributiva e Associativa

III) $\alpha(\vec{u} . \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) . \vec{v} = \vec{u} . (\alpha\vec{v})$

IV) $\vec{u} . \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} . \vec{u} = 0$, se $\vec{u} = \vec{0} = (0, 0, 0)$.

V) $\vec{u} . \vec{u} = |\vec{u}|^2$

### Definição geométrica

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos e $\theta$ e o ângulo entre eles, então

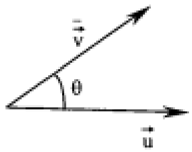
$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

A partir dessa fórmula, temos que:

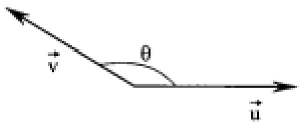
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Obs:

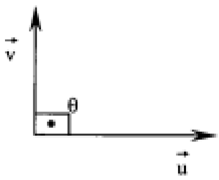
1º) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \theta < 90°$




2º) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow 90° < \theta \leq 180°$




3º) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$




Esse ultimo caso estabelece a condição de **ortogonalidade**

## Exercícios

**1.** Dados os vetores $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -4, -1)$. Qual valor de $(\vec{u} + \vec{v}).(2\vec{u} - \vec{v})$?

**a)** 0
**b)** 2
**c)** -2
**d)** 1
**e)** -1

**2.** Dados os vetores $\vec{u} = (3, 2, 1)$. Qual valor de $\vec{u}.\vec{u}$?

**a)** 12
**b)** 15
**c)** 13
**d)** 14
**e)** 16

**3.** Dados os vetores $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -4, -1)$. Qual valor de $\vec{0}.\vec{u}$?

**a)** 0
**b)** -1
**c)** 1
**d)** -4
**e)** -2

**4.** Sendo $|\vec{u}|$ = 4, $|\vec{v}|$ = 2 e $\vec{u}.\vec{v}$ = 3, qual valor de $(3\vec{u} - 2\vec{v}).(-\vec{u} + 4\vec{v})$?

**a)** -38
**b)** 42
**c)** -48
**d)** 30
**e)** -28

**5.** Sendo $|\vec{u}|$ = 2, $|\vec{v}|$ = 3 e 120° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule $\vec{u}.\vec{v}$.

**a)** 3
**b)** -3
**c)** -1
**d)**1
**e)** 2

**6.** Sendo $|\vec{u}|$ = 2, $|\vec{v}|$ = 3 e 120° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule $|\vec{u}+\vec{v}|$.

**a)** 0
**b)** 9
**c)** $\sqrt{3}$
**d)** 7
**e)** $\sqrt{7}$

**7.** Dado que $\vec{u}=(1,-2,3)$ e $\vec{v}=(4,5,2)$ são ortogonais, calcule $\vec{u}=\vec{v}$:

**a)** 0
**b)** 4
**c)** -10
**d)** 6
**e)** -1

**8.** Os vetores $\vec{a}$ (x, 2x - 1) e $\vec{V}$ (- 2, 4) são ortogonais. Então o valor de x é igual a:

**a)** -3/2
**b)** -2/3
**c)** 2/5
**d)** 2/3
**e)** 3/2

**9.** Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(1,1,4)$ e $\vec{v}=(-1,2,2)$

**a)** 45°
**b)** 60°
**c)** 30°
**d)** 180°
**e)** 225°

**10.** Sabendo que o vetor $\vec{v}$ = (2,1,-1) forma ângulo de 60º com o vetor $\overline{AB}$ determinado pelos pontos A(3,1,-2) e B(4,0,m). Qual o valor de m?

**a)** 4
**b)** -4
**c)** 0
**d)** 2
**e)** -2

## Gabarito

1. **C**

Como $\vec{u} + \vec{v} = (2, -2, 0)$ e

$2\vec{u} - \vec{v} = (6, 4, 2) - (-1, -4, -1) = (7, 8, 3)$, tem-se

$(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2(7) - 2(8) + 0(3) = 14 - 16 + 0 = -2$

2. D

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 3(3) + 2(2) + 1(1) = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 9 + 4 + 1 = 14$$

3. A

$$\vec{0} \cdot \vec{u} = (0, 0, 0) \cdot (3, 2, 1) = 0(3) + 0(2) + 0(1) = 0$$

4. A

$$\begin{aligned}(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) &= 3\vec{u} \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) - 2\vec{v} \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) \\ &= -3\vec{u} \cdot \vec{u} + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 8\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= -3|\vec{u}|^2 + 14\vec{u} \cdot \vec{v} - 8|\vec{v}|^2 \\ &= -3(4)^2 + 14(3) - 8(2)^2 \\ &= -48 + 42 - 32 \\ &= -38\end{aligned}$$

5. B

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos 120° = (2)(3)\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

6. E

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

Então,

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 2^2 + 2(-3) + 3^2 = 7$

e, portanto,

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{7}$

7. **A**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(4) - 2(5) + 3(2) = 4 - 10 + 6 = 0$$

8. **D**

Como são ortogonais

$$\vec{a}.\vec{v} = 0$$
$$(x, 2x-1).(-2, 4) = 0$$
$$-2x + 8x - 4 = 0$$
$$x = 2/3$$

**9. A**

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{(1,1,4)\cdot(-1,2,2)}{\sqrt{1+1+16}\,\sqrt{1+4+4}} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\,\sqrt{9}} = \frac{9}{3\sqrt{2}\,.\,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$\theta = 45°$ $\theta = 315°$

**10. B**

$$\cos 60° = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{v}|\,|\overrightarrow{AB}|}$$

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$ e $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, m+2)$, vem

$$\frac{1}{2} = \frac{(2, 1, -1)\cdot(1, -1, m+2)}{\sqrt{4+1+1}\,\sqrt{1+1+m^2+4m+4}}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{2 - 1 - m - 2}{\sqrt{6}\,\sqrt{m^2+4m+6}}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1 - m}{\sqrt{6m^2+24m+36}}\right)^2$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1+2m+m^2}{6m^2+24m+36}$$

$$6m^2 + 24m + 36 = 4 + 8m + 4m^2$$
$$2m^2 + 16m + 32 = 0$$
$$m^2 + 8m + 16 = 0$$

Portanto, $m = -4$ (raiz dupla)