Polinômios: Relações de Girard

Resumo

Relações de Girard (relações entre coeficientes e raízes)

Algumas relações entre coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes, constituem uma ferramenta importante no estudo das raízes de um polinômio quando conhecemos algumas relações sobre elas.
Vamos construir essas relações para as equações de 2°, 3° e 4° graus e, a partir daí, generalizar para uma equação de grau n.

Equação de 2° grau

A equação $a_0x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ possui como raízes os termos r_1 e r_2, nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 = +\dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

Equação de 3° grau

A equação $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2 e r_3, nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = +\dfrac{a_2}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

Equação de 4° grau

A equação $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2, r_3 e r_4, nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ r_1 . r_2 + r_1 . r_3 + r_1 . r_4 + r_2 . r_3 + r_2 . r_4 + r_3 . r_4 = +\dfrac{a_2}{a_0} \\ r_1\, r_2\, r_3 + r_1\, r_2\, r_4 + r_1\, r_3\, r_4 + r_2\, r_3\, r_4 = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ r_1 . r_2 . r_3 . r_4 = +\dfrac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

Exercícios

1. A equação algébrica $x^3-7x^2+kx+216=0$, em que k é um número real, possui três raízes reais. Sabendo-se que o quadrado de uma das raízes dessa equação é igual ao produto das outras duas, então o valor de k é igual a:

a) -64

b) -42

c) -36

d) 18

e) 24

2. A solução do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+w=7 \\ xy+xz+xw+yz+yw+zw=4 \\ xyz+xyw+xzw+yzw=6 \\ xyzw=1 \end{cases}$$

Pode ser representada pelas raízes do polinômio:

a) x^3+6x^2+4x+7

b) x^3+6x^2+4x-7

c) $2x^4-14x^3+8x^2-12x+2$

d) $7x^4-4x^3+6x^2+x$

e) $x^4+7x^3+4x^2+6x$

3. Considere o polinômio $p(x)=x^3+mx^2+nx+q$, onde $m \neq 1$. Se uma de suas raízes é igual ao produto das outras duas, então essa raiz é igual a:

a) $\frac{q-n}{1+m}$.

b) $\frac{n+q}{1-m}$.

c) $\frac{n-q}{1+m}$.

d) $\frac{n+q}{1+m}$

e) $\frac{n-q}{1-m}$.

4. Podemos dizer que o polinômio $p(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

a) tem três raízes reais

b) tem duas raízes reais e uma imaginária

c) tem uma raiz real e duas imaginárias

d) não tem raiz real

e) tem duas raízes reais e duas imaginárias

5. Se o coeficiente do termo de maior grau de um polinômio de 4° grau é 1 e suas raízes são $x_1 = 2i,\ x_2 = -2i,\ x_3 = 3$ e $x_4 = 4$, então o polinômio em questão é:

a) $x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 28x + 48$

b) $x^4 - 2ix^3 + 2ix^2 + 3x + 4$

c) $x^4 + 16x^3 + 4x^2 - x + 18$

d) $x^4 - 28x^3 + 7x^2 + 48x - 28$

6. Considere o polinômio P(x) tal que $P\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$. A soma de todas as raízes da equação P(3x)=7 é igual a:

a) -1/9

b) -1/3

c) 0

d) 5/9

e) 5/3

7. Seja $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ um polinômio do 3° grau e 2x-1 um de seus fatores. A média aritmética das raízes de P(x) é:

a) 7/2

b) 8/2

c) 9/2

d) 10/2

e) 11/6

8. Considere os polinômios em x pertencente aos reais da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de p(x)=0 constituem uma progressão aritmética de razão ½ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a:

a) $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$.

b) $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$.

c) $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$

d) $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$

e) $\left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)$.

9. Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + x^2 + px + q = 0$, onde p e q são coeficientes reais e $\alpha = 1 - 2i$ é uma das raízes dessa equação, então $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ é igual a:

a) 15

b) 9

c) -15

d) -12

e) -9

10. O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes reais α, $-\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$. Portanto, o valor da soma $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2}$ é

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Gabarito

1. B

Sejam a, b e c as raízes da equação, com $a^2 = bc$. Logo, pelas Relações de Girard, segue que

$$\begin{vmatrix} a+b+c=7 \\ ab+ac+bc=k \\ abc=-216 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+b+c=7 \\ a(b+c)+a^2=k \\ a^3=-216 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b+c=13 \\ -6\cdot 13+36=k \\ a=-6 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b+c=13 \\ k=-42 \\ a=-6 \end{vmatrix}.$$

2. C

Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ o polinômio procurado. Pelas Relações de Girard, vem

$$\begin{cases} x+y+z+w=-\dfrac{b}{a}=7 \\ xy+xz+xw+yz+yw+wz=\dfrac{c}{a}=4 \\ xyz+xyw+xzw+yzw=-\dfrac{d}{a}=6 \\ xyzw=\dfrac{e}{a}=1 \end{cases}$$

Logo, supondo $a > 0$, temos $b < 0$, $c > 0$, $d < 0$ e $e > 0$. O único polinômio que satisfaz essas condições é $2x^4 - 14x^3 + 8x^2 - 12x + 2$.

3. E

Sejam α, β e γ as raízes de p, com $\alpha = \beta\gamma$. Logo, pelas Relações de Girard, vem

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma=-m \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=n \\ \alpha\beta\gamma=-q \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta+\gamma=-m-\alpha \\ \alpha(\beta+\gamma+1)=n \\ \alpha^2=-q \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta+\gamma=-m-\alpha \\ \alpha^2=-q \\ \alpha(1-m-\alpha)=n \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta+\gamma=-m-\alpha \\ \alpha^2=-q \\ \alpha(1-m)-\alpha^2=n \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta+\gamma=-m-\alpha \\ \alpha^2=-q \\ \alpha(1-m)+q=n \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{n-q}{1-m}.$$

4. A

Aplicando as relações de Girard temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{(I)}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5 \quad \text{(II)}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a} = \frac{-6}{1} = -6 \quad \text{(III)}$$

Sabendo que 1 é raiz, pois $p(1) = 0$, temos de (I) e (III):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 \cdot x_3 = -6 \end{cases}$$

Chegamos a um caso de soma e produto, onde a soma das duas raízes vale 1 e o produto vale -6, logo, $x_2 = 3$ e $x_3 = -2$.

Portando, o polinômio possui três raízes reais.

5. A

Tem-se que a soma das raízes do polinômio é igual a $2i + (-2i) + 3 + 4 = 7$. Logo, sabendo que o coeficiente do termo de 4º grau é 1, pelas Relações de Girard, segue que o polinômio só pode ser $x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 28x + 48$.

6. A

Tem-se que

$$P(3x) = (9x^2) + 9x + 1 = 81x^2 + 9x + 1.$$

Logo, vem

$$P(3x) = 7 \Leftrightarrow 81x^2 + 9x + 1 = 7 \Leftrightarrow 81x^2 + 9x - 6 = 0.$$

Pelas Relações de Girard, segue que a resposta é $-\frac{9}{81} = -\frac{1}{9}$.

7. E

Pelas Relações de Girard, sabemos que a soma das raízes de P é $-\frac{-(11)}{2} = \frac{11}{2}$. Portanto, o resultado pedido é $\frac{\frac{11}{2}}{3} = \frac{11}{6}$.

8. C

Sejam $\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+1, \alpha+\frac{3}{2}$ e $\alpha+2$ as raízes de $p(x)$.

Podemos escrever $p(x)$ sob a forma

$$p(x) = x^5 + 0x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Assim, das Relações de Girard, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha+\frac{1}{2}+\alpha+1+\alpha+\frac{3}{2}+\alpha+2 = \frac{0}{1} &\Leftrightarrow 5\alpha+5=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = -1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}p(x) &= x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1) \\ &= x(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) \\ &= x^5-\frac{5}{4}x^3+\frac{1}{4}x\end{aligned}$$

implica em $(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$.

9. C

Se $\alpha = 1-2i$ é raiz, então $\beta = 1+2i$. Logo,

$$\begin{aligned}x^3+x^2+px+q &= (x-1+2i)(x-1-2i)(x-\gamma) \\ &= (x^2-2x+5)(x-\gamma) \\ &= x^3-(\gamma+2)x^2+(2\gamma+5)x-5\gamma.\end{aligned}$$

Desse modo, $\gamma+2=-1 \Leftrightarrow \gamma=-3$ e, portanto, pelas Relações de Girard, obtemos

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = -\frac{q}{1} = -(-5\gamma) = -15.$$

10. A

Das Relações de Girard tem-se que a soma das raízes é igual ao coeficiente de x^2 dividido pelo coeficiente de x^3 multiplicado por -1. Ou seja:

$$\alpha - \alpha + \frac{1}{\alpha} = -\frac{a}{1} \to \frac{1}{\alpha} = -\frac{a}{1} \to a = -\frac{1}{\alpha}$$

Substituindo as outras raízes da equação, tem-se:

$$x^3 - \frac{1}{\alpha}x^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^3 - \frac{1}{\alpha}\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \\ -\alpha^3 - \frac{1}{\alpha}\alpha^2 - b\alpha + c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha^3 - \alpha + b\alpha + c = 0 \\ -\alpha^3 - \alpha - b\alpha + c = 0 \end{cases}$$

$$-2\alpha + 2c = 0 \to c = \alpha$$

$$2\alpha^3 + 2b\alpha = 0 \to b = -\alpha^2$$

Assim, substituindo os valores e a, b e c na expressão dada, tem-se:

$$b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2} = -\alpha^2 + \alpha^2 + \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \alpha + \frac{\left(-\alpha^2\right)}{\alpha^2} \to -1 - 1 = -2$$