Inscrição e circunscrição de polígonos

Resumo

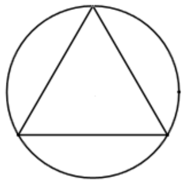
Apótema: Em um polígono regular, o apótema é o segmento de reta que parte do centro e vai até o ponto médio de um lado, sendo perpendicular a ele.

Relação entre apótemas e lados de figuras inscritíveis e circunscritíveis
Sendo L = Lado, A = Apótema e R = Raio, temos:

I) Polígonos inscritos

Todo polígono regular pode ser inscrito numa circunferência. Observe que todos os vértices dos polígonos regulares são pontos da circunferência.

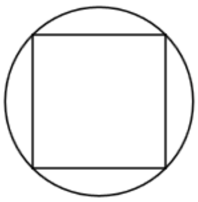
a) Triângulo equilátero



$$L = R\sqrt{3}$$

$$A = \frac{R}{2}$$

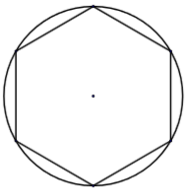
b) Quadrado



$$L = R\sqrt{2}$$

$$A = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

c) Hexágono

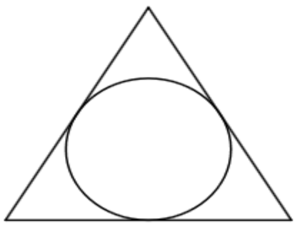


$$L = R$$
$$A = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

II) Polígono circunscrito

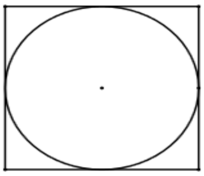
Todo polígono regular pode ser circunscrito à circunferência. A circunferência é tangente (toca em um único pomto) aos lados do polígono.

a) Triângulo equilátero



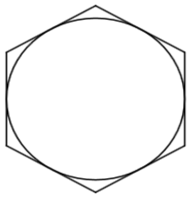
$$A = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$
$$R = A$$

b) Quadrado



$$A = \frac{L}{2}$$
$$R = A$$

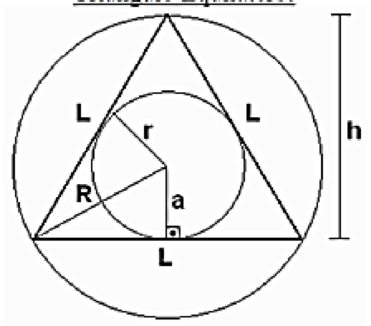
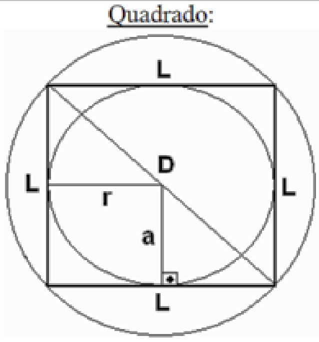
c) Hexágono



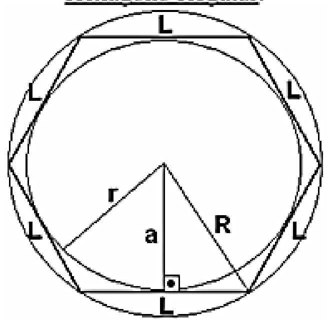
$$A = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$R = A$$

Resumindo:

Figura Geométrica	Fórmulas
Triângulo Eqüilátero:  	Área: $A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ ou $A = \frac{3 \cdot L}{2} \cdot a$ Perímetro: $P = 3L$ Altura: $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ Apótema: $a = \frac{L\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2}$ Raio da circunferência inscrita: $r = \frac{L\sqrt{3}}{6}$ Raio da circunferência circunscrita: $R = \frac{L\sqrt{3}}{3}$
Quadrado:  	Área: $A = L^2$ ou $A = 2 \cdot L \cdot a$ Perímetro: $P = 4L$ Diagonal: $D = L\sqrt{2}$ Apótema: $a = \frac{L}{2}$ Raio da circunferência inscrita: $r = \frac{L}{2}$ Raio da circunferência circunscrita: $R = \frac{D}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2}$

Hexágono Regular:



Área: $A = \dfrac{6L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3L^2\sqrt{3}}{2}$ ou $A = 3 \cdot L \cdot a$

Perímetro: $P = 6L$

Apótema: $a = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

Raio da circunferência inscrita: $r = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

Raio da circunferência circunscrita: $R = L$

Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui]

Exercícios

1. O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para √3.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

a) 18

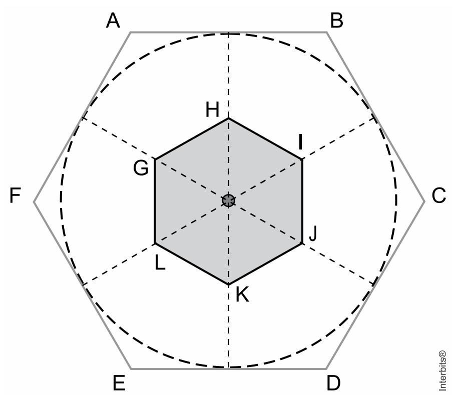
b) 26

c) 30

d) 35

e) 60

2. A figura indica um hexágono regular ABCDEF, de área S_1, e um hexágono regular GHIJKL, de vértices nos pontos médios dos apótemas do hexágono ABCDEF e área S_2.



Nas condições descritas, $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{8}{25}$

c) $\frac{7}{25}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{3}{16}$

3. Um carimbo com o símbolo de uma empresa foi encomendado a uma fábrica. Ele é formado por um triângulo equilátero que está inscrito numa circunferência e que circunscreve um hexágono regular. Sabendo-se que o lado do triângulo deve medir 3 cm, então, a soma das medidas, em cm, do lado do hexágono com o diâmetro da circunferência deve ser:

a) 7

b) $2\sqrt{3}+1$

c) $2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}+1$

e) $\frac{77}{32}$

4. Numa circunferência inscreve-se um triângulo equilátero cujo lado mede $8\sqrt{3}$.
Em seguida, no interior do triângulo constrói-se outro triângulo, também equilátero, cujos lados ficam afastados 0,5 cm dos lados do primeiro. O apótema do triângulo menor, em cm, mede:

a) 3,5

b) $2\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{3}$

5. Tem-se um triângulo equilátero em que cada lado mede 6 cm. O raio do círculo circunscrito a esse triângulo, em centímetros, mede:

a) 3

b) $2\sqrt{3}$

c) 4

d) $3\sqrt{2}$

e) $3\sqrt{3}$

6. A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito em um círculo e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a esse mesmo círculo é:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{8}$

e) n.d.a

7. Qual a razão entre os raios dos círculos circunscrito e inscrito de um triângulo equilátero de lado a?

a) 23

b) 3/2

c) $\sqrt{2}$

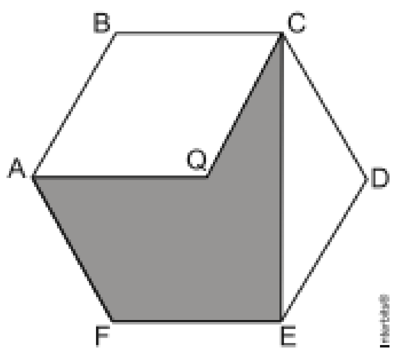
d) 2

e) ½

8. O perímetro de um hexágono regular inscrito em um círculo de $25\pi cm^2$ de área é igual a

a) 150 cm
b) 75 cm
c) 25 cm
d) 15 cm
e) 30 cm

9. Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm, e Q é o centro da circunferência inscrita a ele.



O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a:

a) 4 + 2

b) 4 + $\sqrt{3}$

c) 6

d) 4 + 5

e) 2(2 + 2)

10. Qual o comprimento de uma circunferência inscrita em um quadrado cuja diagonal mede 20 cm?

a) $7\pi\sqrt{2}\ cm$

b) $9\pi\sqrt{2}\ cm$

c) $10\pi\sqrt{3}\ cm$

d) $10\pi\sqrt{2}\ cm$

e) $5\pi\sqrt{2}\ cm$

Gabarito

1. A

O raio r do círculo circunscrito a um triângulo equilátero de lado $30\,cm$ é dado por

$$r = \frac{30}{2 \cdot \operatorname{sen} 60°} = \frac{30}{\sqrt{3}} \cong 17{,}6\,cm.$$

Portanto, dentre os tampos disponíveis, o proprietário deverá escolher o de raio igual a $18\,cm$.

2. E

Calculando:

$$\text{apótema} \Rightarrow a_1 = \frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\ell_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\ell_1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{3}{16}$$

3. B

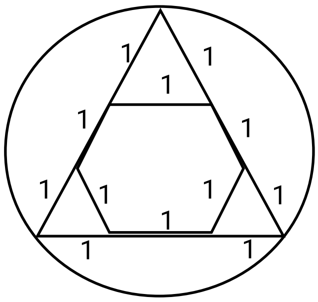
Triângulo equilátero inscrito na circunferência $l_3 = r\sqrt{3}$

Para $l_3 = 3$ temos:

$$l_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \; 3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \; r = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \; r = \sqrt{3}$$

O diâmetro vale: d=2r $\Rightarrow$ $d = 2\sqrt{3}$

Como o lado do hexágono mede 1cm; $2\sqrt{3} + 1$



4. A

É importante reparar que o apótema do triângulo menor mede 0,5 cm a menos do que o do triângulo maior.

Então, calculando o apótema do triângulo maior:

$$\boxed{a_p = \frac{l\sqrt{3}}{6}}$$

$$a_p = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} \Rightarrow \boxed{a_p = 4}$$

Sabendo que:

$$\boxed{a'_p = a_p - 0,5}$$

Logo:

$$a'_p = 4 - 0,5 \Rightarrow \boxed{\boxed{a'_p = 3,5 \text{ cm}}}$$

5. **B**

O raio de um circulo circunscrito a um triângulo equilátero é $L\frac{\sqrt{3}}{3}$, então, como o lado do triângulo mede 6cm, o raio irá medir $6\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

6. **D**

Seja R o raio da circunferência, então:

$$\frac{\text{Área do triângulo}}{\text{Área do hexágono}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{2\sqrt{3}R^2} = \frac{3}{8}$$

7. **D**

Raio da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero: $R = \frac{L\sqrt{3}}{3}$

Raio da circunferência inscrita a um triângulo equilátero: $R' = \frac{L\sqrt{3}}{6}$

Portanto, R/R' = 2.

8. **E**

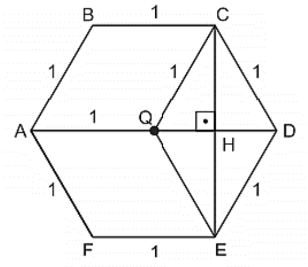
Área do círculo = $\pi R^2 \rightarrow \pi R^2 = 25\pi \rightarrow R^2 = 25 \rightarrow R = 5\ cm$

Como l = R, l = 5 cm

2p = 5 x 6 = 30 cm

9. **B**

Observe a figura:



Como o hexágono é regular, CQD e EQD são triân gulos equiláteros de lado 1 dm e, portanto,

$$CE = 2\frac{1.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Assim, o perímetro do polígono AQCEF é $4.1 + \sqrt{3} = (4 + \sqrt{3})$

10. D

$10\pi\sqrt{2}\ cm$

$d = l\sqrt{2} \ \rightarrow l\sqrt{2} = 20 \ \rightarrow l = 10\sqrt{2}\ cm$

$R = \dfrac{l}{2} = 5\sqrt{2}$

$C = 2\pi R = 2\pi.5\sqrt{2} = 10\pi\sqrt{2}\ cm$