Operações com Polinômios

Resumo

Definição

Expressão polinomial ou polinômio na variável x é toda expressão da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

→ a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 e a_0 são números denominados coeficientes.
→ n é um número inteiro positivo ou nulo.
→ o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau da expressão.
→ As parcelas do polinômio são chamados de monômios.

Operações

- Adição e subtração:
  Quando dois polinômios apresentam monômios semelhantes, podemos adicioná-los ou subtraí-los. Veja o exemplo:

  Sendo $A(x) = 3x^4 + 2x^2$, $B(x) = -x^4 + 2x^3$ e $C(x) = 2x^3 + 4x^2$, vamos calcular A(x) + B(x) – C(x):
  $A(x)+B(x)-C(x) = (3x^4 + 2x^2) + (-x^4 + 2x^3) - (2x^3 + 4x^2)$
  $= 3x^4 + 2x^2 - x^4 + 2x^3 - 2x^3 - 4x^2$
  $= 2x^4 - 8x^2$.

- Multiplicação:
  Multiplicamos cada termo de um polinômio por todos os termos do outro polinômio, usando a distributiva. Veja o exemplo:

  Sendo $A(x) = (2x - 3)$ e $B(x) = (3x^2 + 4x - 5)$, vamos calcular A(x) x B(x):
  $A(x) \times B(x) = (2x - 3)(3x^2 + 4x - 5) = 6x^3 + 8x^2 - 10x - 9x^2 - 12x + 15$
  Reduzindo os termos semelhantes, temos: $6x^3 - x^2 - 22x + 15$.

- Divisão:
  Dividir o polinômio P(x) pelo polinômio D(x), sendo o grau de P(x) maior do que o de D(x), significa encontrar o quociente Q(x) e o resto R(x), tais que:

  $$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

  → Grau do quociente: Gr(Q) = Gr(P) - Gr(D)
  → Grau do resto: Gr(R) < Gr(D)

Agora, vamos aprender algumas técnicas para dividir polinômios!

Método da chave

Este método consiste em literalmente montar a conta de divisão na chave. Veja o exemplo:
Sejam $f(x)=2x^3-4x^2+3x-8$ e $g(x)=x^2+2x-4$. Iremos **dividir** f(x) por g(x). Primeiro dispomos os polinômios na chave.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-4x^2+3x-8 & \underline{x^2+2x-4} \end{array}$$

O objetivo é encontrar qual termo multiplicado por x^2 irá resulta em $2x^3$. No caso, o termo que faz isso é 2x, pois $2x^3/x^2= 2x$. Ele é colocado no espaço do **quociente.**

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-4x^2+3x-8 & \underline{x^2+2x-4} \\ & 2x \end{array}$$

Agora, distribuímos o 2x por todo o polinômio divisor, **trocando o sinal de cada termo** (para que sejam subtraídos). O resultado é somado ao polinômio dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-4x^2+3x-8 & \underline{x^2+2x-4} \\ \underline{-2x^3-4x^2+8x} & 2x \\ -8x^2+11x-8 & \end{array}$$

Agora, o objetivo é encontrar um termo que multiplica x2 e resulta em $-8x^2$. Neste caso, o termo é −8, não é necessário colocar x pois o grau já é o mesmo. Ele é colocado ao lado do 2x que já estava no quociente:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-4x^2+3x-8 & \underline{x^2+2x-4} \\ \underline{-2x^3-4x^2+8x} & 2x-8 \\ -8x^2+11x-8 & \end{array}$$

Agora distribuímos −8 encontrado pelo divisor. Os resultados novamente são colocados abaixo do dividendo, **com os sinais trocados** (para indicar que serão subtraídos).

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-4x^2+3x-8 & \underline{x^2+2x-4} \\ \underline{-2x^3-4x^2+8x} & 2x-8 \\ -8x^2+11x-8 & \\ \underline{+8x^2+16x+32} & \\ 27x+16 & \end{array}$$

Agora repare que o resto da divisão (27x+16) possui grau 1 e o divisor possui grau 2. Quando o resto possui grau **menor** do que o divisor, a divisão está encerrada. Assim, o **quociente** é 2x−8 e o **resto** é 27x+16.

Exercícios

1. Se $A(x) = x^2 - x + 1$, $B(x) = (x - 2)^2$ e $C(x) = -3x$, calcule $A(x) + B(x).C(x)$.

a) $-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1$

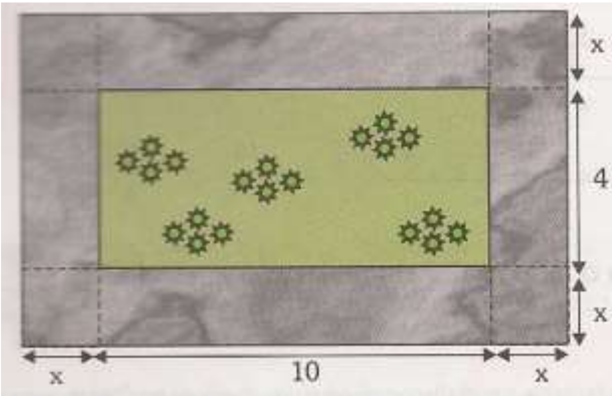
b) $3x^3 + 13x^2 + 13x + 1$

c) $-3x^3 - 13x^2 - 13x - 1$

d) $3x^3 + 13x^2 + 13x + 1$

e) $-3x^3 + 13x^2 - 13x - 1$

2. Ao redor do jardim da casa de Carlos, vai ser construída uma calçada revestida de pedra. As medidas estão em metros.



Escreva, na forma reduzida, um polinômio que expresse a área ocupada pela calçada.

a) $4x^2 - 28x$

b) $x^2 + 28x$

c) $4x^2 + x$

d) $x^2 - 28x$

e) $4x^2 + 28x$

3. Seja p(x) um polinômio divisível por (x-2). Se dividirmos o polinômio P(x) por (x^2+2x), obteremos como quociente o polinômio (x^2-2) e resto igual a R(x). Se R(3)=6, então, a soma de todos os coeficientes de P(x) é igual a:

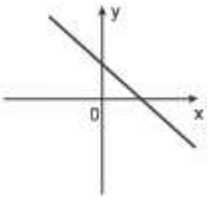
a) -38

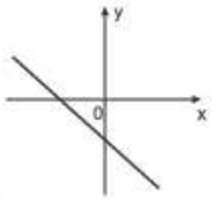
b) -41

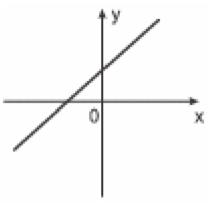
c) 91

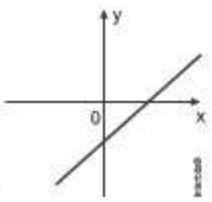
d) 79

4. Sejam Q(x) e R(x) o quociente e o resto, respectivamente, da divisão do polinômio $x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ pelo polinômio $x^2 - 5x + 6$, em que x pertence aos reais.
O gráfico que representa a função real definida por P(x) = Q(x) + R(x) é:

a) 

c) 

b) 

d) 

5. Qual é o polinômio que ao ser multiplicado por $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$ tem como o resultado o polinômio $h(x) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$?

a) $x^3 + x^2 + x.$
b) $x^3 + x^2 - x.$
c) $x^3 + 3x^2 + x$
d) $x^3 + 3x^2 + 2x.$
e) $x^3 + 3x^2 - x.$

6. O termo independente de x no desenvolvimento da expressão algébrica $(x^2 - 1)^3 (x^2 + x + 2)^2$ é:

a) 4
b) -4
c) 8
d) -8

7. Considerando-se que o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem 1 como raiz dupla e 3 como raiz simples, é correto afirmar que o resto da divisão de P(x) por (x+1) é:

a) -20
b) -18
c) -16
d) -14
e) -2

8. O resto da divisão de $\left(2^{64}+1\right)$ por $\left(2^{32}+1\right)$ é igual a:

a) 1
b) 0
c) 4
d) 2

9. Se uma das raízes do polinômio $P(x)=x^4-8x^2+ax+b$ é 2 e P(1) = 9, então o valor de a^5-4b é:

a) -64
b) -28
c) 16
d) 24

10. O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x + 3$ são, respectivamente:

a) x − 2 e 5
b) x + 2 e 6
c) x − 3 e 2
d) x + 1 e 0
e) x − 1 e −2

Gabarito

1. A

$B(x) = x^2 - 4x + 4$

$B(x).C(x) = -3x.(x^2 - 4x + 4) = -3x^3 + 12x^2 - 12x$

$A(x) + B(x).C(x) = x^2 - x + 1 - 3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x^3 + 13x^2 - 13x + 1$

2. E

$A(total) = (2x + 10) \cdot (2x + 4)$

$A(total) = 4x^2 + 8x + 20x + 40$

$A(total) = 4x^2 + 28x + 40$

$A(calçada) = A(total) - A(jardim)$

$A(calçada) = 4x^2 + 28x + 40 - 40$

$A(calçada) = 4x^2 + 28x$

3. B

Calculando:

$P(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2) + R(x)$

$R(x) = ax + b$

$P(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2) + ax + b$

$P(2) = 0$

$P(2) = (2^2 + 2 \cdot 2) \cdot (2^2 - 2) + 2a + b = 16 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -16$

$R(3) = 6$

$R(3) = 3a + b = 6$

$$\begin{cases} 2a + b = -16 \\ 3a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 22 \\ b = -60 \end{cases}$$

$P(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2) + 22x - 60$

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 18x - 60$

$\text{Soma coeficientes} = 1 + 2 - 2 + 16 - 60 = -41$

4. A

Efetuando a divisão dos polinômios, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^3-6x^2+9x-3 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} -x^3+5x^2-6x & x-1 \\ \hline -x^2+3x-3 & \\ \quad x^2-5x+6 & \\ \hline \quad -2x+3 & \end{array}$$

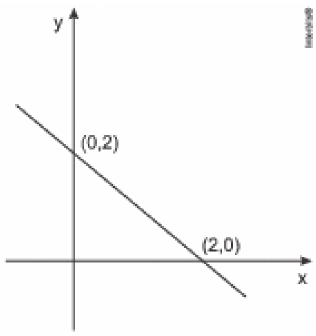
Portanto,

$P(x)=x-1-2x+3$

$P(x)=-x+2$

Construindo o gráfico de $P(x)$, temos:

x	y
0	2
2	0



Portanto, a melhor opção é a letra [A].

5. E

Calculando:

$$\left(3x^3+2x^2+5x-4\right)\cdot\left(ax^3+bx^2+cx\right)=3x^6+11x^5+8x^4+9x^3-17x^2+4x$$

$$3ax^6+$$

$$+\left(3bx^5+2ax^5\right)+$$

$$+\left(3cx^4+2bx^4+5ax^4\right)+$$

$$+\left(2cx^3+5bx^3-4ax^3\right)+$$

$$+\left(5cx^2-4bx^2\right)+$$

$$+(-4cx)=3x^6+11x^5+8x^4+9x^3-17x^2+4x$$

$$3ax^6=3x^6\Rightarrow a=1$$

$$3bx^5+2ax^5=3bx^5+2x^5=11x^5\Rightarrow 3bx^5=9x^5\Rightarrow b=3$$

$$3cx^4+2bx^4+5ax^4=3cx^4+6x^4+5x^4=8x^4\Rightarrow 3cx^4=-3x^4\Rightarrow c=-1$$

Assim:

$$ax^3+bx^2+cx=x^3+3x^2-x$$

6. B

Para determinar o termo independente de um polinômio, devemos admitir $x = 0$. Portanto, o termo independente de $(x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 + x + 2)^2$ será dado por:
$(0^2 - 1)^3 \cdot (0^2 + 0 + 2)^2 = -1 \cdot 4 = -4$

7. C

As raízes são 3, 3 e 1, portanto o polinômio poderá ser escrito na forma fatorada por:
$P(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

Portanto, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 1)$ será dado por $P(-1)$.
$P(-1) = 1 \cdot (-1 - 1) \cdot (-1 - 1) \cdot (-1 - 3) = -16$

8. D

Considerando que $2^{32} = x$ podemos escrever a divisão acima através de uma divisão de polinômios: $(x^2 + 1)$ por $(x + 1)$.

O resto R da divisão de $x^2 + 1$ por $(x + 1)$ é o valor numérico de $x^2 + 1$ para $x = -1$ (Teorema do Resto), ou seja: $R = (-1)^2 + 1 = 2$.

9. A

Se $P(2) = 0$, então
$2^4 - 8 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 16$.

Ademais, sendo $P(1) = 9$, vem
$1^4 - 8 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 9 \Leftrightarrow a + b = 16$.

Resolvendo o sistema em x e y, obtemos $a = 0$ e $b = 16$.

Portanto, a resposta é
$a^5 - 4b = 0^5 - 4 \cdot 16 = -64$.

10. A

Desde que $x^2 + x - 1 = (x + 3)(x - 2) + 5$, segue o resultado.