

Progressão aritmética: definição, termo geral e termo médio

Resumo

Observe a sequência:

(5, 8, 11, 14, 17, 20...)

Podemos notar que a diferença entre um termo qualquer dessa sequência e seu antecedente é sempre igual a 3.

$$8 - 5 = 3; 11 - 8 = 3; 14 - 11 = 3; 17 - 14 = 3; 20 - 17 = 3; \dots$$

Definimos, Progressão Aritmética (P.A.) como uma sequência numérica de números reais na qual a diferença entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante). Essa constante é a chamada razão da P.A. e é indicada por r .

De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Aritméticas da seguinte forma:

Se $r > 0$, a P.A. será crescente;

Se $r = 0$, a P.A. será constante, com todos os termos de igual valor;

Se $r < 0$, a P.A. será decrescente.

- Termo geral da P.A.

A expressão que nos permite obter um termo qualquer da P.A. é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

a_n : termo da P.A.

a_1 : 1º termo da P.A.

n : posição do termo

r : razão

Exemplo:

Dada a P.A. (-19, -15, -11, ...) calcule o seu décimo primeiro termo.

Primeiro calculamos: $r = a_2 - a_1 \quad r \Rightarrow 15 - (-19) \quad r \Rightarrow 4$

Logo o décimo primeiro termo será:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{11} = -19 + (11 - 1)4$$

$$a_{11} = -19 + 40$$

$$a_{11} = 21$$

Propriedades:

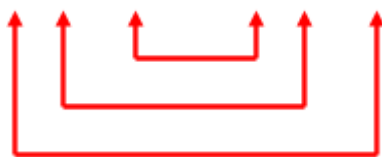
1ª propriedade: soma dos termos equidistantes.

Numa PA, os termos equidistantes, ou seja, os que estão à mesma distância dos termos extremos da PA, têm soma igual à soma dos extremos ($a_1 + a_n$).

Quando a quantidade de termos é ímpar, existe um termo central, que será :

Quando a quantidade de termos é ímpar, existe um termo central, que será $\frac{a_1 + a_n}{2}$

(2, 8, 14, 20, 26, 32, 38)



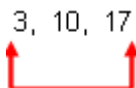
$$2 + 38 = 8 + 32 = 40$$

$$\frac{40}{2}$$

2ª propriedade: média aritmética.

Observe a PA infinita (3, 10, 17, 24, 31, 38, ...)

Se tomarmos três termos consecutivos:



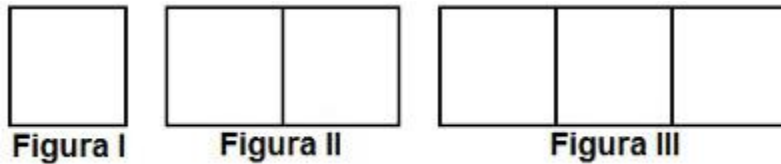
e fizermos $\frac{3+17}{2}$, ou seja, se tirarmos a média aritmética dos termos "da ponta", obteremos

$$\frac{3+17}{2} = 10$$

que é o termo do meio.

Exercícios

1. Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

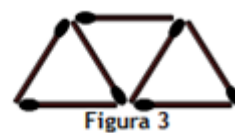
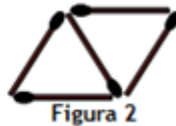


Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

- a) $C = 4Q$.
 - b) $C = 3Q + 1$.
 - c) $C = 4Q - 1$.
 - d) $C = Q + 3$.
 - e) $C = 4Q - 2$.
2. O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?
- a) 38.000
 - b) 40.500
 - c) 41.000
 - d) 42.000
 - e) 48.000

3. Um cliente, ao chegar a uma agência bancária, retirou a última senha de atendimento do dia, com o número 49. Verificou que havia 12 pessoas à sua frente na fila, cujas senhas representavam uma progressão aritmética de números naturais consecutivos, começando em 37.
- Algum tempo depois, mais de 4 pessoas desistiram do atendimento e saíram do banco. Com isso, os números das senhas daquelas que permaneceram na fila passaram a formar uma nova progressão aritmética.
- Se os clientes com as senhas de números 37 e 49 não saíram do banco, o número máximo de pessoas que pode ter permanecido na fila é:
- 6
 - 7
 - 9
 - 12

4. Com palitos iguais constrói-se uma sucessão de figuras planas, conforme sugerem os desenhos abaixo:



O número de triângulos congruentes ao da figura 1 existentes em uma figura formada com 135 palitos é:

- 59
 - 60
 - 65
 - 66
 - 67
5. Os números $a_1 = 5x - 5$, $a_2 = x + 14$ e $a_3 = 6x - 3$ estão em PA. A soma dos 3 números é igual a:
- 48
 - 54
 - 72
 - 125
 - 130

6. A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1 380 metros da praça. Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é
- R\$512 000,00.
 - R\$520 000,00.
 - R\$528 000,00.
 - R\$552 000,00.
 - R\$584 000,00.
7. Nos jogos Pan-americanos de 2015, o Brasil ficou com o terceiro lugar no quadro geral de medalhas, conforme apresentado na Tabela.

Tabela – Número de Medalhas obtidas no PAN/2015					
Lugar	País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1º	EUA	103	81	81	265
2º	Canadá	A	B	70	217
3º	Brasil	41	40	C	141

Sabe-se que a diferença entre o número total de medalhas obtidas pelo Brasil e o número de medalhas de ouro dos EUA é igual ao número de medalhas de ouro obtidas pelo Canadá menos o número de medalhas de prata obtidas pelo Brasil. Então, nesta ordem, com relação aos números A, B e C, indicados na Tabela 1, é correto afirmar que:

- formam uma progressão aritmética crescente.
- formam uma progressão geométrica crescente.
- formam uma progressão aritmética decrescente.
- formam uma progressão geométrica decrescente.
- não formam progressão aritmética nem progressão geométrica.

8. No primeiro semestre de 2015, a empresa "Aço Firme" fabricou 28.000 chapas metálicas em janeiro; em fevereiro sua produção começou a cair como uma progressão aritmética decrescente, de forma que em julho a sua produção foi de 8.800 chapas.

Nessas condições, a produção da empresa nos meses de maio e junho totalizou

- a) 33.600 chapas
- b) 32.400 chapas
- c) 27.200 chapas
- d) 24.400 chapas
- e) 22.600 chapas

9.



Adaptado de leceblog.blogspot.com.

Na situação apresentada nos quadrinhos, as distâncias, em quilômetros, d_{AB} , d_{BC} e d_{CD} formam, nesta ordem, uma progressão aritmética.

O vigésimo termo dessa progressão corresponde a:

- a) -50
- b) -40
- c) -30
- d) -20

- 10.** A Meia Maratona Shopping da Bahia Farol a Farol foi criada pela Personal Club e mais uma vez contará com a parceria do Shopping da Bahia. Tradicional no mês de outubro, a maior e mais esperada corrida de rua da Bahia, que já se encontra em sua sexta edição e será realizada nos percursos de 5 km, 10 km e 21 km, com largada no Farol de Itapuã e chegada no Farol da Barra, dois dos principais cartões postais da cidade de Salvador.

Extraído de: <http://www.meiamaratonafarolafarol.com.br/> em 26/08/2016

Um atleta, planejando percorrer o percurso de 21 km, fez um plano de treinamento, que consistia em correr 1.000 m no primeiro dia e, a cada dia subsequente, percorreria a distância do dia anterior acrescida de 400 m. Sendo assim, esse atleta irá atingir a distância diária de 21 km no:

- a) 54º dia
- b) 53º dia
- c) 52º dia
- d) 51º dia
- e) 50º dia

Gabarito

1. B

O número de canudos segue de acordo com os termos da progressão aritmética (4; 7; 10; ...), de razão 3 e primeiro termo 4. Os termos dessa progressão seguem a lei de formação $C = 4 + (Q - 1) \cdot 3 = 3Q + 1$, em que Q é a quantidade de quadrados, que coincide com o número da figura ou índice do termo da P.A.

2. D

O número de passageiros nos meses de janeiro, fevereiro, março etc. do ano passado são os termos da progressão aritmética (33 000, 34 500, 36 000, ...), cujo a_1 é 33 000 e razão é 1 500. O número de passagens vendidas no mês de julho é o sétimo termo dessa progressão e vale $33\,000 + (7 - 1) \cdot 1\,500 = 42\,000$.

3. B

A sequência formada pelos números das senhas das pessoas que estavam na fila, incluindo a do último cliente que chegou ao banco, correspondia à seguinte progressão aritmética: (37, 38, 39, ..., 49)

Após a desistência de algumas pessoas, formou-se a seguinte P.A., de razão R e número de termos n: (37, a_2 , a_3 , a_4 , ..., 49)

$$49 = 37 + (n - 1)R$$

$$12 = (n - 1)R \Rightarrow n - 1 = \frac{12}{R}$$

$$n = \frac{12}{R} + 1$$

A P.A. tem menos de 13 elementos. Assim, para o valor de n ser máximo, R deve ser igual a 2. Logo, $n = 7$.

4. E

O número de palitos utilizados forma uma progressão aritmética de razão 2. A "enésima" figura conterá os 135 palitos. Calculando, temos:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 5 \Rightarrow r = 2 \\ a_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = 3 + (n - 1)2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1 \\ a_n = 135 \end{cases} \Rightarrow 135 = 2n + 1 \Leftrightarrow n = 67$$

5. B

Considerando a P.A. na ordem dada, temos:

P.A. $(5x - 5, x + 14, 6x - 3)$

Utilizando a propriedade de uma P.A, temos:

$$x + 14 = \frac{5x - 5 + 6x - 3}{2} \Rightarrow 2x + 28 = 11x - 8 \Rightarrow -9x = -36 \Rightarrow x = 4$$

Logo, a P.A. será $(15, 18, 21)$.

Portanto, a soma dos três números será:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15 + 18 + 21 = 54.$$

6. C

Considere o termo geral da PA

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$1380 = 80 + (n-1)20$$

$$n = 66$$

Portanto, o maior valor que a prefeitura poderá gastar com a colocação dos postes é:

$$66 \cdot 8000 = \text{R\$ } 528.000,00$$

7. C

Do enunciado depreende-se que:

$$141 - 103 = A - 40 \Rightarrow A = 78$$

Da tabela fornecida, conclui-se que:

$$B = 217 - 70 - A = 217 - 70 - 78 = 69$$

$$C = 141 - 40 - 41 = 60$$

Logo, os números A, B e C, respectivamente 78, 69 e 60, formam, nessa ordem, uma progressão aritmética decrescente, pois $B - A = C - B$ e $A > B > C$.

8. C

Considerando que a_n representa o número de chapas metálicas fabricadas no mês n , e que $n = 1$ indica o mês de janeiro, $n = 2$ o mês de fevereiro e assim por diante, temos:

$$a_7 = a_1 + 6 \cdot r$$

$$8800 = 28000 + 6r$$

$$-19200 = 6r$$

$$r = -3200$$

Logo:

$$a_5 = a_1 + 4r = 28000 + 4 \cdot (-3200) = 15200$$

$$a_6 = a_1 + 5r = 28000 + 5 \cdot (-3200) = 12000$$

Portanto, a soma pedida será:

$$a_5 + a_6 = 15200 + 12000 = 27200 \text{ chapas.}$$

9. A

$$d_{AB} = x$$

$$d_{BC} = x - 10$$

$$d_{CD} = x - 20$$

De acordo com a informação dos quadrinhos:

$$x + (x - 10) + (x - 20) = 390$$

$$3x = 420$$

$$x = 140$$

Sabe-se que x é o primeiro termo da P.A. ($a_1, a_2, \dots, a_{20}, \dots$) de razão r . Logo:

$$a_{20} = a_1 + 19r$$

$$a_{20} = 140 + 19(-10)$$

$$a_{20} = -50$$

10. D

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1000 \\ a_2 = 1400 \\ a_3 = 1800 \end{array} \right\} \Rightarrow PA \Rightarrow r = 400$$

$$a_n = 21000 = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 21000 = 1000 + (n-1) \cdot 400 \Rightarrow 20400 = 400n \Rightarrow n = 51$$