Números complexos: operações na forma trigonométrica e 1º fórmula de Moivre

Resumo

Operações na forma trigonométrica

Sendo $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2)$

Multiplicação

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

1ª lei de moivre

Dados um número complexo não nulo Z = ρ(cosθ + isenθ) e o número n ∈ ℕ. Podemos fazer a seguinte operação:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n \text{ vezes}}$$

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \cdots \cdot \rho}_{n \text{ vezes}} \left[\underbrace{(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \cdot \cdots \cdot (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))}_{n \text{ vezes}}\right]$$

$$z^n = \rho^n \left[\underbrace{(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \cdots (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))}_{n \text{ vezes}}\right]$$

Generalizando, temos que:

$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]}$$

Essa relação é chamada de primeira lei de Moivre em Homenagem ao matemático francês Abragan De Moivre. Ela também, é valida para expoentes inteiros negativos.

Exercícios

1. Dados os números complexos $z_1 = 20(\cos 120° + i sen 120°)$ e $z_2 = 4(\cos 30° + i sen 30°)$, qual é o valor de $\frac{z_1}{z_2}$?

a) $z_1 = 5(\cos 120° + i sen 120°)$

b) $z_1 = 5(\cos 30° + i sen 30°)$

c) $z_1 = 5(\cos 150° + i sen 150°)$

d) $z_1 = 5(\cos 90° + i sen 90°)$

e) $z_1 = 4(\cos 90° + i sen 90°)$

2. Dado o número complexo z = cos $\frac{\pi}{6}$ + i sen $\frac{\pi}{6}$, qual o valor de z^{12}?

a) 1
b) i
c) -1
d) −i

3. Considere o número complexo $z = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$. O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

a) -i
b) 4i
c) i-2
d) i
e) 2i

4. Seja z o conjugado do complexo 1-i. A potência z^{12} é igual a:

a) -64-i
b) -64+i
c) -32-i
d) -32+i
e) -64

5. Determine $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}$, se i² = -1.

a) i

b) -i

c) 1

d) 1+i

e) -1

6. Seja o número complexo $z=-1-\sqrt{3i}$, onde i é a unidade imaginária. O valor de z^8 é:

a) $z=256\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

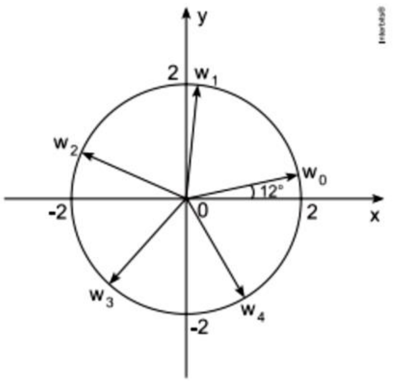
b) $z=256\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z=256\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z=256\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z=256\left(\cos 2\pi+i\text{sen}2\pi\right)$

7. Considere as raízes complexas w_0, w_1, w_2, w_3 e w_4 da equação $w^5 = z$, onde $z \in \mathbb{C}$ representadas graficamente por



O número complexo z é

a) 16i

b) 32i

c) 16 + 16i

d) 16 + 16√3i

e) 32 + 32√3i

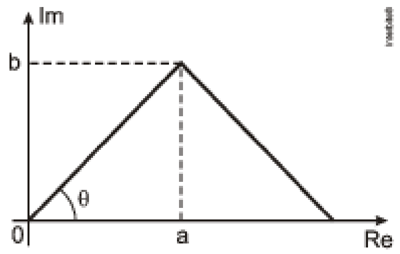
8. O menor número inteiro positivo n para o qual a parte imaginária do número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)^n$ é negativa é

a) 3
b) 4
c) 6
d) 8
e) 9

9. Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1, e n é um número natural maior do que 2, então, pode-se afirmar corretamente que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2i}\right)^n$ é um número real sempre que

a) n for ímpar.
b) n for um múltiplo de 4.
c) n for um múltiplo de 3.
d) n for um múltiplo de 5.

10. O número complexo z = a + bi é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura abaixo:



É correto afirmar que o conjugado de z² tem afixo que pertence ao

a) 1º quadrante.
b) 2º quadrante.
c) 3º quadrante.
d) 4º quadrante.

Gabarito

1. D

Temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{20}{4} \cdot [\cos(120^o - 30^o) + i \cdot sen\,(120^o - 30^o) = 5(\cos 90^o + i \cdot sen\, 90^o)$$

2. A

Usando a primeira fórmula de Moivre, temos:

$$z^{12} = 1^{12}\left[\cos\left(\frac{12\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{12\pi}{6}\right)\right] = \cos 360^o + i\text{sen}360^o = 1 + 0 = 1$$

3. D

Usando a primeira lei de Moivre, calcularemos as potências:

$$z^3 = 1^3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right] = \cos 90^o + i\text{sen}90^o = 0 + i = i$$

$$z^6 = 1^6\left[\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right] = \cos 180^o + i\text{sen}180^o = -1 + 0 = -1$$

$$z^{12} = 1^{12}\left[\cos\left(\frac{12\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{12\pi}{6}\right)\right] = \cos 360^o + i\text{sen}360^o = 1 + 0 = 1$$

Por fim:

$$z^3 + z^6 + z^{12} = i - 1 + 1 = i$$

4. E

Queremos calcular $(1 - i)^{12}$.

$$(1-i)^{12} = ((1-i)^2)^6 = (1^2 - 2.1.i + i^2)^6 = (1 - 2i - 1)^6 = -2i^6 = -64$$

5. E

Primeiro, resolvemos a divisão de complexos:

$$\frac{1+i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

Agora, calcular a potência:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102} = i^{102} = i^2 = -1$$

6. **D**
Observe:

O módulo de z é $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Logo, se θ é o argumento de z, então $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Em consequência, temos $\theta = \frac{4\pi}{3}$rad. Daí, a forma trigonométrica de z é

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right).$$

Portanto, pela Primeira Fórmula de Moivre, segue que

$$\begin{aligned} z^8 &= 2^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{4\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(8\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\ &= 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

7. **D**
Observe:

Tem-se que $w_0 = 2\cdot(\cos 12° + i\cdot\operatorname{sen} 12°)$. Logo, sabendo que $w^5 = z$, pela Primeira Fórmula de Moivre, vem

$$\begin{aligned} z &= 2^5\cdot(\cos 60° + i\cdot\operatorname{sen} 60°) \\ &= 32\cdot\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 16 + 16\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

8. **E**
Observe:

$$\left(\cos\frac{\pi}{8} + i.sen\frac{\pi}{8}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{8} + isen\frac{n\pi}{8}$$

Portanto $sen\frac{n\pi}{8} < 0$ logo $\pi < \frac{n\pi}{8} < 2\pi$

O menor inteiro positivo deverá ser nove

9. B

Sendo $|z|$ e θ, respectivamente, o módulo e o argumento principal de $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, temos

$$|z|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$$

e

$$\text{tg}\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \text{tg}\theta=1\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}\text{rad}.$$

Assim, vem $z=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e, portanto, pela Primeira Fórmula de Moivre, encontramos

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n &= z^n\\ &= 2^n\cdot\left(\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

Desse modo, $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$ é um número real sempre que $\text{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)=0$, ou seja, sempre que $n=4\cdot(2k)$ ou $n=4\cdot(2k+1)$, com $k\in\mathbb{Z}$. Em outras palavras, z^n é um número real sempre que n for um múltiplo de 4.

10. C

$$\theta=60°$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$z^2=|z|[\cos 60°+i\cdot\text{sen}60°]$$

$$z^2=|z|^2[\cos(2\cdot 60°)+i\cdot\text{sen}(2\cdot 60°)]$$

$$\bar{z}^{\,2}=|z|^2[\cos(240°)+i\cdot\text{sen}(240°)]$$

Portanto, o conjugado de z^2 pertence ao terceiro quadrante.