Números complexos: segunda fórmula de Moivre

Resumo

2ª lei de Moivre

Dado um número complexo z = a + bi e o número complexo u tal que $u^n = z$. Chamamos u de raiz de z. Para encontrar seu valor, usando a fórmula:

$$\boxed{z_w = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]}$$

Essa relação é conhecida como 2ª lei de Moivre.

Exercícios

1. Seja z = 1 + i. Calcule o valor de $\sqrt[4]{z}$.

a) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)\right)$, para k = 0, 1, 2 e 3.

b) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)\right)$, para k = 1, 2, 3 e 4.

c) $2\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)\right)$, para k = 0, 1, 2 e 3.

d) $2\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)\right)$, para k = 1, 2, 3 e 4.

e) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)\right)$, para k = 0, 1, 2 e 3.

2. Um matemático, observando um vitral com o desenho de um polígono inscrito em um círculo, verificou que os vértices desse polígono poderiam ser representados pelas raízes cúbicas complexas do número 8. A área do polígono observado pelo matemático equivale a:

a) $\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3}$

3. $w = 2(\cos\frac{\pi}{6} - isen\frac{\pi}{6})$ é uma das raízes cúbicas do complexo z. As demais raízes são:

a) -2i, $-\sqrt[2]{3}$ +i

b) 3i, 5i

c) 2i,8i+6

d) $\sqrt[2]{3}$+7i,5i

4. O conjunto dos números complexos pode ser representado em um plano munido do sistema de coordenadas cartesianas usual. As raízes da equação $x^4 - 9 = 0$, quando representadas no plano, correspondem a pontos que são vértices de um

a) Trapézio.

b) Losango (não quadrado).

c) Paralelogramo cuja medida do maior lado é três vezes a medida do menor.

d) Quadrado.

5. O produto das raízes cúbicas do número complexo z = -1 é igual a

a) $(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3})$

b) $\frac{1-\sqrt{3}i}{4}$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}i$

e) -1

6. Na iluminação da praça, três novas luminárias são instaladas do seguinte modo: uma dessas luminárias é instala na bissetriz do primeiro quadrante; a distância de uma delas ao ponto de encontro das linhas centrais dos dois passeios é 20 metros; a distância entre cada par dessas luminárias é a mesma. Quais números complexos a seguir representam os pontos onde foram instaladas as três luminárias?

a) $z_1 = 20\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right); z_2 = 20\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\right); z_3 = 20\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right)$

b) $z_1 = 20\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right); z_2 = 20\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right); z_3 = 20\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

c) $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}; z_2 = \cos\frac{11\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}; z_3 = \cos\frac{19\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}$

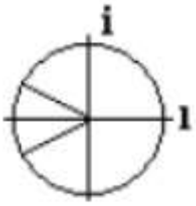
d) $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}; z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}; z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$

e) $z_1 = 20\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right); z_2 = 20(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi); z_3 = 20\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

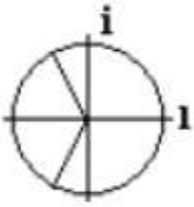
7. Qual é a raiz cúbica do complexo $z = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i sen\frac{3\pi}{2}\right)$?

a) 2i
b) 3i
c) 4i
d) 5i
e) 6i

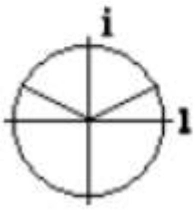
8. O diagrama que melhor representa as raízes cúbicas de -i é:



a)

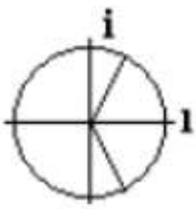


c)



e)

b)



d)

9. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 + 1 = 0$, tomndo como base o conjunto dos números complexos. Ao representarmos geometricamente essas raízes no plano de Argand-Gauss, obtemos um triângulo, cujos vértices são os afixos de x_1, x_2 e x_3.
A área do triângulo é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

10. Três números são representados, no plano complexo, sobre uma circunferência com centro na origem, dividindo-a em três partes iguais.

Sabendo que um dos números é $\sqrt{3}-i$, quais são os outros dois?

a) $-\sqrt{3}-i$ e $2i$

b) $\sqrt{3}+i$ e $2i$

c) $-\sqrt{3}-i$ e $-2i$

d) $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ e i

e) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ e i

Gabarito

1. A

Tem-se que:

$$u_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right) =$$
$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)\right).$$

Dessa forma,

$$u_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{2}}{2}(1+i);$$
$$u_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{2}}{2}(-1+i);$$
$$u_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{2}}{2}(1+i);$$
$$u_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt[8]{2}}{2}(1-i);$$

2. C

$x^3 - 8 = 0$.

Por Briot – Ruffini:

$(x – 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

Resolvendo para a segunda equação, usando Bhaskara, temos:

$(x – 2)[x – (-1 - i\sqrt{3})](x - (-1 + i\sqrt{3})) = 0$

Agora, vamos calcular a área do triângulo cujos vértices são os pontos:

A(2, 0); B(-1, √3); C(-1, -√3).

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 6\sqrt{3}$$

$$A = \frac{|D|}{2} = 3\sqrt{3}$$

3. A

Como dito no enunciado, $z = w^3$. Calculando w^3:

$$w^3 = 2^3(\cos\frac{3\pi}{6} + i\text{sen}\frac{3\pi}{6}) = 8(\cos 90^o + i\text{sen}90^o) = 8i$$

Agora, calculamos as raízes cúbicas de $z = 8(\cos 90^o + i\text{sen}90^o)$.

Usando a segunda fórmula de Moivre, temos:

$$w = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Fazendo k = 0, 1 e 2, encontramos os valores: -2i, √3 + i e -√3 + i.

4. D

Sendo $x = \sqrt[4]{9}$, tem-se que o número complexo 9 possui 4 raízes de ordem 4. As imagens dessas raízes dividem a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ em quatro arcos congruentes. Portanto, tais imagens correspondem aos vértices de um quadrado.

5. E

O produto das raízes cúbicas do número complexo $z = -1$ corresponde ao produto das raízes da equação algébrica $x^3 + 1 = 0$. Portanto, das Relações de Girard, segue que o resultado pedido é $-\frac{1}{1} = -1$.

6. A

Os pontos dividem a circunferência de raio 20 em 3 partes iguais, portanto, cada arco que separa duas luminárias deverá medir 120° ou $\frac{2\pi}{3}$rad. Logo, a resposta correta é a letra A, pois os argumentos apresentados $\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}$ e $\frac{19\pi}{12}$ formam uma P.A de razão $\frac{2\pi}{3}$rad.

7. A

A raiz quadrada do complexo z é dada pela segunda fórmula da Moivre, com n = 3:

$$u = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

Para k = 0, temos:

$$u = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3i$$

8. B

Escrevendo –i na forma trigonométrica, temos $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}$.

Pela segunda fórmula de moivre, podemos fazer:

$$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

Para k = 0, temos $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

Para k = 1, temos $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Para k = 2, temos $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Assim, a o diagrama correto é o da letra B.

9. D

$$x^3+1=0$$
$$x_1=-1\Rightarrow(-1;0)$$
$$x_2=-1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x_3=-1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot \text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)\Rightarrow x_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$A=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1\\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

10. A

Escrevendo o número $\sqrt{3}-i$ na forma trigonométrica, temos:

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos 330°+isen330°\right)$$

Aplicando a terceira lei de moivre, temos que as raízes estão separadas por 120°, assim, as outras duas raízes são:

$\rightarrow 2\left(\cos\left(330°+120°\right)+isen\left(330°+120°\right)\right)=2\left(\cos\left(90°\right)+isen\left(90°\right)\right)=2i$

$\rightarrow 2\left(\cos\left(330°+240°\right)+isen\left(330°+240°\right)\right)=2\left(\cos\left(210°\right)+isen\left(210°\right)\right)=-\sqrt{3}-i$