Logarítmos: propriedades dos logarítmos

Resumo

Temos algumas propriedades que serão fundamentais na resolução de problemas que envolvem logaritmos. Dá só uma olhada!

Propriedades:

I. $\log_b (p.q) = \log_b p + \log_b q$

II. $\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$

Ex: Considerando log 2 = 0,3 e log 3 = 0,48, determine:

a) log 6

b) log 5

Resolução:

a) $\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3 + 0,48 = 0,78$

b) $\log 5 = \log (10 \div 2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3 = 0,7$

III. $\log_b a^{\alpha} = \alpha.\log_b a$

IV. $\log_{b^{\beta}} a = \frac{1}{\beta} . \log_b a$

Ex: $\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3} \log_3 3 = \frac{4}{3}$

V. Mudança de base: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Cuidado! O número C é o número que você quiser.

VI. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

VII. $\log_b b^a = a$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.
Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm² de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

a) 1999

b) 2002

c) 2022

d) 2026

e) 2146

2. Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = (2/3)\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

sendo *E* a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0, uma constante real positiva. Considere que E_1, e E_2, representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.
Qual é a relação entre E_1, e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$

b) $E_1 = 10^2 . E_2$

c) $E_1 = 10^3 . E_2$

d) $E_1 = 10^{9/7} . E_2$

e) $E_1 = 9/7 . E_2$

3. Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir.

– A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.

– O nível de toxidez T(x), após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$T(x) = T_0(0,5)^{0,1x}$$

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.
Sendo log 2 = 0,3, o valor de D é igual a:

a) 30

b) 32

c) 34

d) 36

4. Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação. Admita um filtro que deixe passar $\frac{4}{5}$ da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar *n* filtros.
Considerando log 2 = 0,301, o menor valor de *n* é igual a:

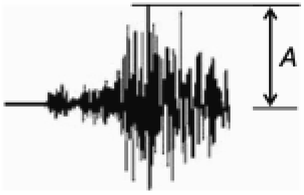
a) 9

b) 10

c) 11

d) 12

5. Quando ocorre um terremoto, o sismógrafo registra o tremor de terra em um gráfico como o apresentado a seguir.



A altura máxima A, que aparece no desenho é chamada de amplitude da onda sísmica e é medida em milímetros. A magnitude do terremoto a uma distância de 200 km do local onde ele ocorreu é um número calculado por
m = log10A + 2,5.

Notícia No dia 13 de agosto de 2011 foi registrado na costa sudeste do México, um terremoto com epicentro a cerca de 200 km de Salinas Cruz, onde o sismógrafo mostrou ondas de amplitude máxima de 160mm. (Serviço Sismológico Nacional, Brasília).

Usando log2= 0,3, a magnitude desse terremoto foi de:

a) 4,6

b) 5,0

c) 5,4

d) 5,7

e) 6,1

6. Pedro estudava para uma prova de Matemática, quando se deparou com a seguinte questão:

"Se $\log_c a = 10$ e $\log_c b = 2$, então quanto vale $\log_b a^\pi$?"

Ele a resolveu da seguinte forma:

Passo	Expressão
0	$\log_b a^\pi$
1	$\pi \cdot \log_b a$
2	$\pi \cdot \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$
3	$\pi \cdot (\log_c a - \log_c b)$
4	$\pi \cdot (10 - 2) = 8\pi$

Em sua resposta, Pedro

a) acertou completamente a questão.

b) errou a questão entre os passos 0 e 1.

c) errou a questão entre os passos 1 e 2.

d) errou a questão entre os passos 2 e 3.

e) errou a questão entre os passos 3 e 4.

7. Se n é um número inteiro maior do que 2, o valor de $\log_n\left[\log_n\left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}}\right)\right]$ é

a) 3
b) -4
c) 4
d) -3

8. Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão $S = \frac{1}{2\log_2 2016} + \frac{1}{5\log_3 2016} + \frac{1}{10\log_7 2016}$. O valor de S é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{1}{7}$
e) $\frac{1}{10}$

9. Sendo log 2 = m e log 3 = n, aplicando as propriedades de logaritmo, escreve-se log 3,6 em função de m e n como

a) $2mn$
b) $\frac{m^2n^2}{10}$
c) $\frac{m+n}{10}$
d) $2(m+n)-1$

10. Sendo log 2 = a e log 3 = b, o valor de $\log_9 160$ é igual a

a) $\dfrac{4a+b}{2}$

b) $\dfrac{4a+1}{2b}$

c) $\dfrac{2a+3b}{2}$

d) $\dfrac{4b+2}{a}$

e) $\dfrac{a+1}{3b}$

Gabarito

1. **C**

Atualmente: 400000T

Queremos: 100.10^9T

$T(a) = 400000.2^a$

$100.10^9 = 400000.2^a$

$10^6 = 4.2^a$

$10^6 = 2^{a+2}$

$\log 10^6 = \log 2^{a+2}$

$6 = (a+2).(0,3)$

$6 = 0,3a + 0,6$

$a = 18$

Ou seja, se dobramos 18 vezes, quer dizer que se passaram 36 anos

2. **C**

$$\text{Temos} \left| \begin{array}{l} \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = 9 \\ \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) = 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = \frac{27}{2} \\ \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) = \frac{21}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{E_1}{E_0} = 10^{\frac{27}{2}} \\ \frac{E_2}{E_0} = 10^{\frac{21}{2}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\frac{E_1}{E_0}}{\frac{E_2}{E_0}} = 10^{\frac{27}{2} - \frac{21}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{6}{2}} = 10^3 \Leftrightarrow E_1 = 10^3 \cdot E_2.$$

3. **C**

Considerando Ti o nível inicial de toxidez, conclui-se que T0 = 10Ti. Substituindo os valores na equação, temos:

$$\begin{cases} T_0 = 10.T_i \Rightarrow T_i = \frac{T_0}{10} \\ T(x) = T_0.(0,5)^{0,1x} \\ T(x) = T_i \end{cases} \Rightarrow T_i = T_0.(0,5)^{0,1x} \Rightarrow \frac{T_0}{10} = T_0.(0,5)^{0,1x} \Rightarrow \frac{1}{10} = (0,5)^{0,1x} \Rightarrow 0,1x = \log_{0,5}\frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,1x = \frac{\log\frac{1}{10}}{\log\frac{1}{2}} \Rightarrow 0,1x = \frac{\log 1 - \log 10}{\log 1 - \log 2} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{0-1}{0-0,3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{1}{0,3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{100}{3} \cong 33,3$$

O valor mínimo será 34, pois 33 dias não serão suficientes para retornar ao nível inicial.

4. C

Como cada filtro deixa passar 4/5 da intensidade da luz que nele incide, usando *n* filtros, passará $(4/5)^n$ da luz incidente.

O objetivo é reduzir essa intensidade a menos de 10% da original. Logo:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{10}{100}$$
$$\left(\frac{8}{10}\right)^n < \frac{1}{10}$$
$$\log\left(\frac{8}{10}\right)^n < \log\frac{1}{10}$$
$$n(\log 8 - \log 10) < \log 1 - \log 10$$
$$n(3\log 2 - 1) < 0 - 1$$
$$n(-0{,}097) < -1$$
$$n > \frac{1}{0{,}097}$$
$$n > 10{,}3$$

Portanto, o menor valor de *n* é 11.

5. D

Como A = 160 mm, substituímos ele na equação dada:

M = log10A +2,5

M = log(10 x 160) + 2,5

m = log10 + log 160 +2,5

Fatorando o 160, temos 160 = 2 x 2 x 2 x 2 x 10. Assim:

M = log10 + log(2^4 x 10) + 2,5

M = log10 + log2^4 +log10 + 2,5

M = log10 + 4log2 + log10 + 2,5

M = 1 + 4(0,3) + 1 + 2,5

M = 1 + 1,2 + 1 + 2,5

M **=** 5,7

Logo, a magnitude do local foi 5,7.

6. D

Ele errou entre os passos 2 e 3, pois ele não soube utilizar a propriedade de mudança de base de logaritmos. A propriedade nos diz que $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$, só que a questão nos diz que $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_c a - \log_c b$.

7. B

Calculando:

$$x = \log_n\left[\log_n\left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}}\right)\right] = \log_n\left[\log_n\left(\sqrt[n^4]{n}\right)\right] = \log_n\left[\log_n n^{\frac{1}{n^4}}\right] = \log_n\left[\frac{1}{n^4}\right] = \log_n n^{-4} \Rightarrow x = -4$$

8. E

Lembrando que $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, $\log_b a^c = c \cdot \log_b a$ e $\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b$, com a, b e c reais positivos diferentes de 1, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2 \cdot \log_2 2016} + \frac{1}{5 \cdot \log_3 2016} + \frac{1}{10 \cdot \log_7 2016} \\ &= \frac{1}{10} \cdot (5 \cdot \log_{2016} 2 + 2 \cdot \log_{2016} 3 + \log_{2016} 7) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \log_{2016} 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ &= \frac{1}{10} \cdot \log_{2016} 2016 \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

9. D

$$\log 3{,}6 = \log\frac{36}{10} = \log 36 - \log 10 = \log(2^2 \cdot 3^2) - 1 = \log 2^2 + \log 3^2 - 1 = 2\log 2 + 3\log 3 - 1 =$$

$$= 2 \cdot (m + n) - 1$$

10. B

Sabendo que $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, temos que

$$\begin{aligned} \log_9 160 &= \frac{\log 160}{\log 9} \\ &= \frac{\log 2^4 + \log 10}{\log 3^2} \\ &= \frac{4 \cdot \log 2 + 1}{2 \cdot \log 3} \\ &= \frac{4a + 1}{2b}. \end{aligned}$$