

Projeção Ortogonal

Resumo

Definição

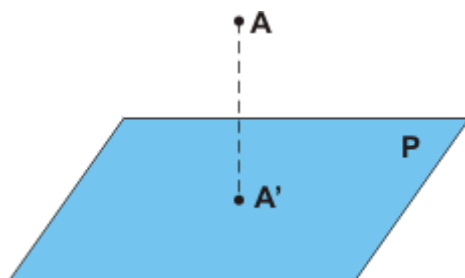
"A Geometria é o ramo da Matemática que se propõe a estudar as figuras existentes na natureza através das propriedades de seus elementos, definindo, caracterizando e padronizando suas formas e dimensões, facilitando assim seu próprio desenvolvimento e o de outras áreas do conhecimento científico e tecnológico." (RABELLO, P.S.B., 2005)

"A projeção ortogonal é a representação de um objeto em um plano de projeção, quando as linhas visuais são perpendiculares a este plano." (HOELSCHER, R.P.; SPRINGER, C.H.; DOBROVOLNY, J.S., 1978)

A projeção ortogonal das figuras geométricas sobre um plano pode ser comparada à sombra desse objeto sob a luz do sol do meio-dia.

Projeção ortogonal de um ponto sobre o plano

A projeção ortogonal do ponto A sobre o plano é exatamente o ponto de encontro entre esse plano e a reta ortogonal a ele que contém o ponto A. A projeção ortográfica de um ponto num plano é sempre um ponto idêntico a ele mesmo.

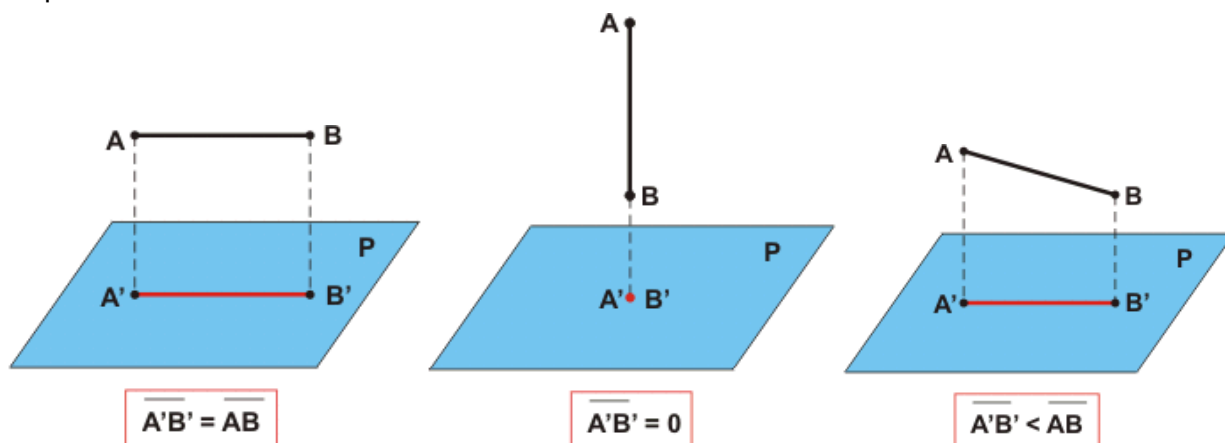


Projeção ortogonal de um segmento de reta sobre o plano

A projeção ortogonal de um segmento de reta sobre o plano pode ser um ponto ou outro segmento de reta, vai depender do ângulo que eles formam com o plano.

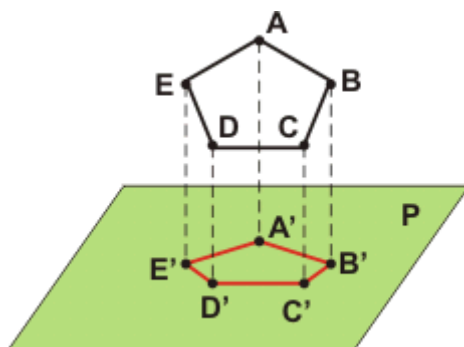
- Se o segmento de reta já for ortogonal ao plano (formar um ângulo de 90°), a sua projeção ortogonal será apenas um **ponto**.
- Se o segmento de reta não for ortogonal ao plano, sua projeção ortogonal será o **segmento de reta** cujas extremidades são as projeções de suas extremidades sobre o plano.

Exemplos:



Projeção ortogonal de uma figura geométrica

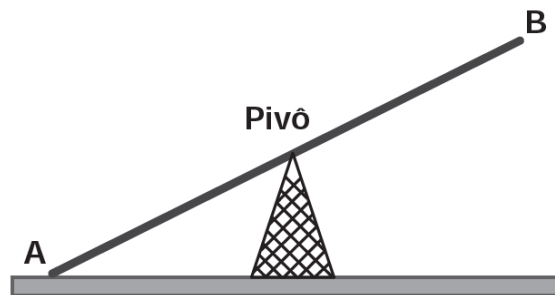
Dado o plano P e a figura $ABCDE$, a projeção ortogonal de $ABCDE$ sobre P será o conjunto de pontos formado pelas projeções ortogonais de todos os pontos de $ABCDE$ sobre P .



Quer ver este material pelo Dex? Clique [aqui](#)

Exercícios

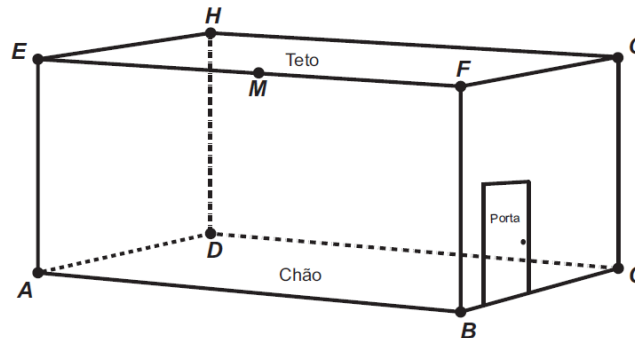
1. Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.
- Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

- a) **A** **B**
- b) **A** **B**
- c) **A** **B**
- d) **A** **B**
- e) **A** **B**

2. Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

3. Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade num parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto em que foram usadas hastes metálicas.



Figura 1

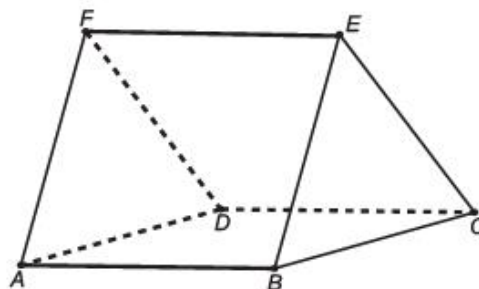
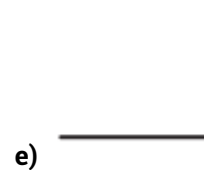
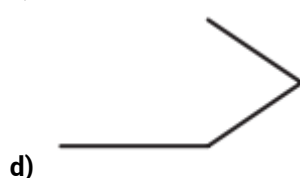
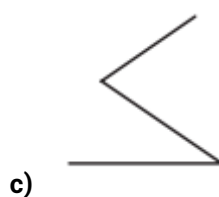
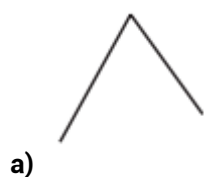


Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C.

Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os pontos.

A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base ABCD é dada por.



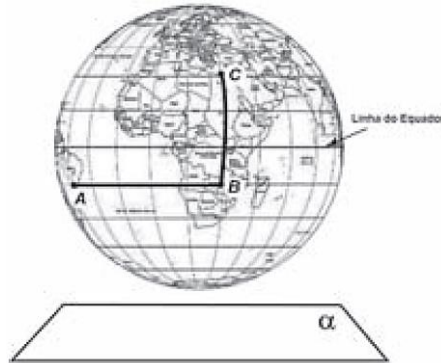
4. Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.



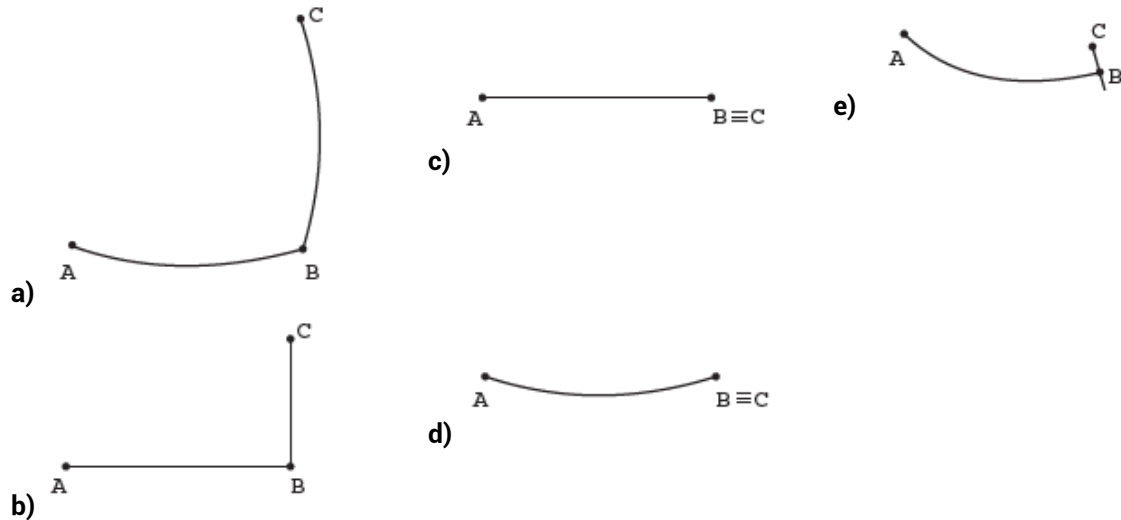
Qual é o esboço obtido pelos alunos?



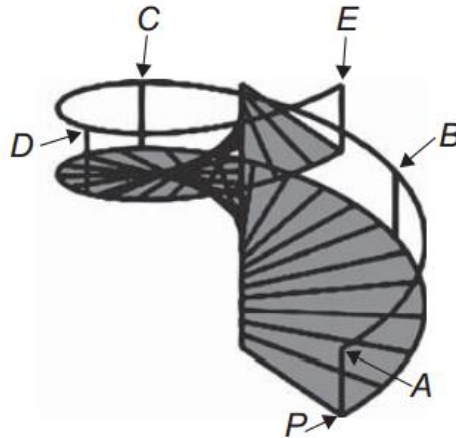
5. A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



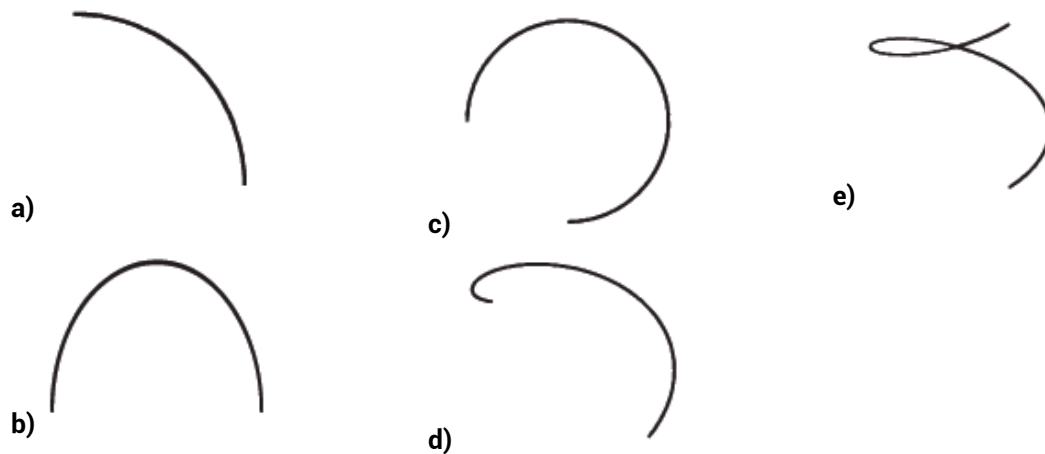
A projeção ortogonal, no plano α , do caminho traçado no globo pode ser representada por



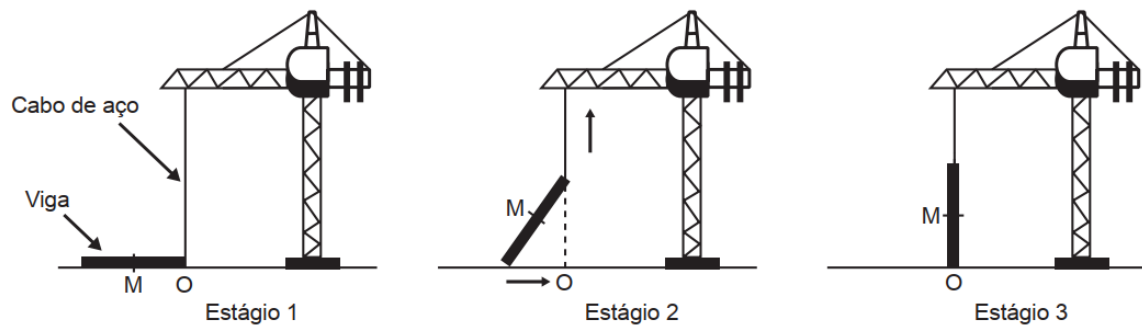
6. O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.



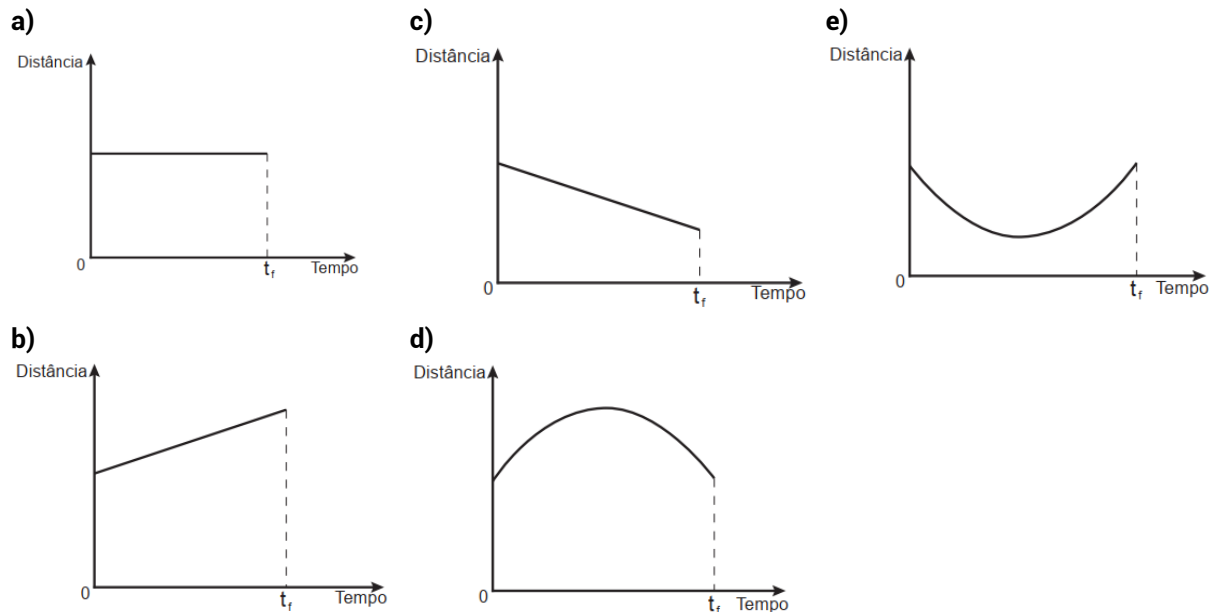
A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:



7. Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste içava uma viga de aço que se encontra inicialmente no solo.



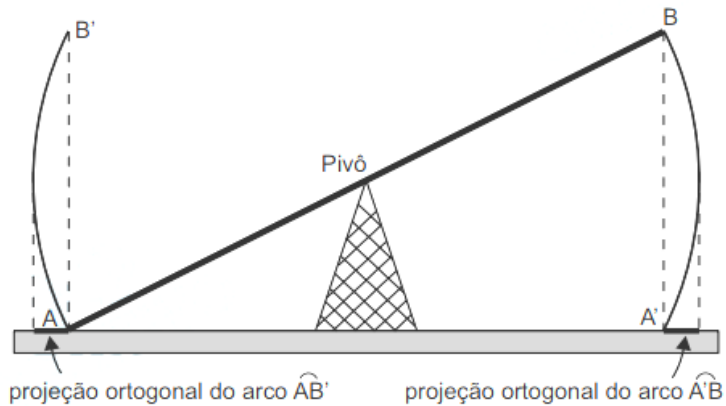
Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo $t = 0$ (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga. O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre $t = 0$ e t_f , é:



8. Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α , a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α . No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos. Com relação a um plano qualquer fixado, pode-se dizer que:
- a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semi-reta.
 - b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
 - c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
 - d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
 - e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.
9. O ponto A pertence à reta r, contida no plano α . A reta s, perpendicular a α , o intercepta no ponto B. O ponto C pertence a s e dista $2\sqrt{5}$ cm de B. Se a projeção ortogonal de \overline{AB} em r mede 5 cm e o ponto B dista 6 cm de r, então a distância de A a C, em centímetros, é igual a:
- a) $9\sqrt{5}$
 - b) 9
 - c) 7
 - d) 4
 - e) $3\sqrt{5}$
10. Considere-se uma barraca de camping que tem a forma de uma pirâmide retangular com arestas laterais congruentes e altura igual a um metro. Assim sendo, a única alternativa FALSA é:
- a) A projeção ortogonal do vértice da pirâmide coincide com o centro da base.
 - b) Se a altura e as medidas dos lados da base da pirâmide forem aumentadas em 10%, então o volume aumentará 33,1%.
 - c) Se o piso da barraca tem área máxima entre as áreas de todos os retângulos com perímetro igual a 8 metros, então o piso tem a forma de um quadrado. 10
 - d) Se a base da pirâmide tem a forma de um quadrado com lados medindo 2 metros, então o volume é igual a $\frac{4}{3}$ metros cúbicos.
 - e) Suponha-se que a barraca está montada sobre um terreno horizontal, e sua base é um quadrado com lados medindo 2 metros. Se, em determinado instante, os raios solares formam um ângulo de 45° com o solo, então algum ponto da barraca será projetado pelos raios solares num ponto do solo situado fora da região coberta pelo piso da barraca.

Gabarito

1. B



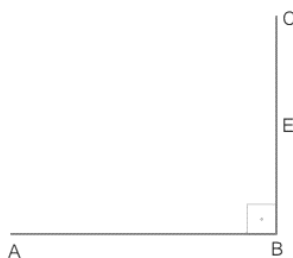
As trajetórias dos pontos A e B são dois arcos de circunferência, com centro no pivô, localizados num mesmo plano perpendicular ao plano do chão. Assim, suas projeções ortogonais sobre o plano do chão é um par de segmentos da reta de intersecção desse tal plano com o plano do chão, conforme ilustrado na figura acima.

2. B

Sendo B, A e M coplanares, a projeção ortogonal do deslocamento de A para M está contida no segmento AB. Ademais, a projeção ortogonal do deslocamento de M para H sobre o chão do quarto corresponde a um segmento de reta oblíquo em relação a AB, cuja origem é o ponto M', médio de AB, e cuja extremidade é o ponto D, projeção de H sobre o plano ABC.

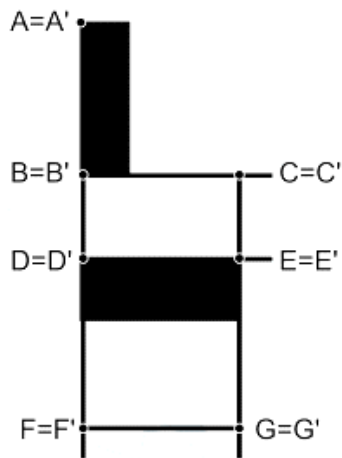
3. E

A projeção é



4. C

Os pontos A, B, C, D, E, F, G, A', B', C', D', E', F' e G' tomarão as seguintes posições no esboço da vista lateral:



5. E

Sabemos que:

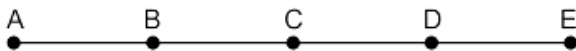
- I. A projeção ortogonal de uma parte de um paralelo sobre o plano α , paralelo ao plano equatorial é um arco de circunferência.
- II. A projeção ortogonal de uma parte de um meridiano sobre o mesmo plano α é um segmento de reta.

Consideremos o ponto D, intersecção entre o meridiano e a linha do equador. Assim, a projeção ortogonal, do caminho traçado no globo pode ser representado por:

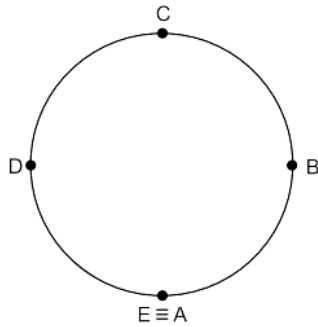


6. C

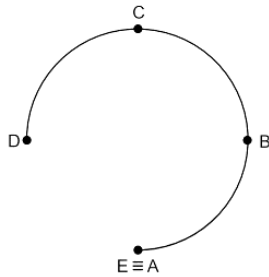
Se os 5 pontos, A, B, C, D, E, estão igualmente espaçados, o corrimão planificado é um segmento de reta dividido em 4 partes iguais.



A projeção ortogonal do corrimão completo sobre o piso (plano) é uma circunferência.

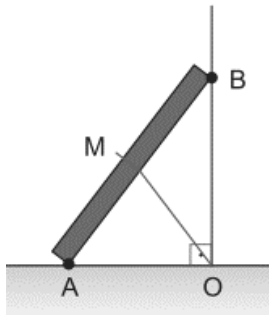


A projeção do ponto A ao ponto D corresponde a $\frac{3}{4}$ da circunferência.



7. A

No primeiro e no terceiro estágios é fácil observar que a distância de M até O é igual a metade do comprimento da viga de aço. No segundo estágio, temos um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice O e cuja hipotenusa é a viga.



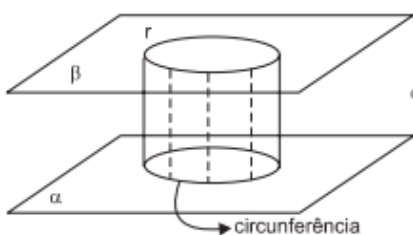
Assim, a distância de M até O é metade do comprimento da viga de aço, pois M é circuncentro do triângulo AOB (ponto médio da hipotenusa).

$$MO = MA = MB = \frac{AB}{2}$$

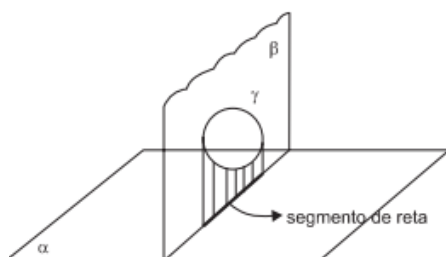
8. E

Temos três casos:

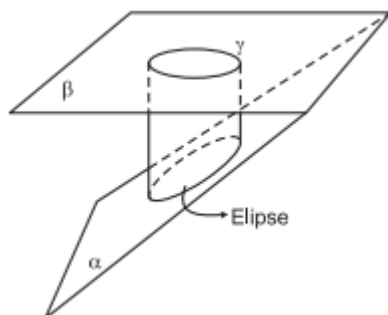
1) Os planos paralelos:



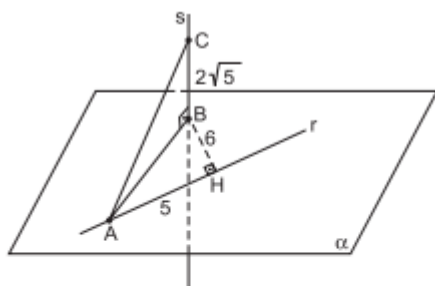
2) Os planos perpendiculares:



3) Os planos secantes e não perpendiculares:

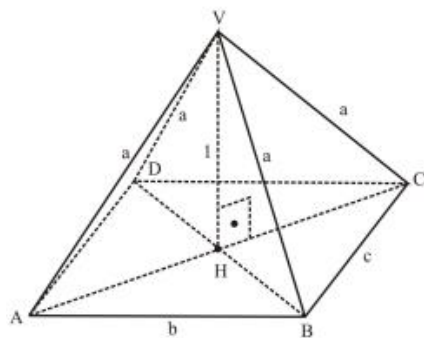


9. B



Seja \overline{AH} a projeção ortogonal de \overline{AB} sobre a reta r . Como $m(\widehat{AHB}) = 90^\circ$, por Pitágoras, $(AB)^2 = 5^2 + 6^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{61}$ cm. Temos ainda que $s \perp \alpha$. Logo o triângulo ABC é retângulo em B e $(AC)^2 = (\sqrt{61})^2 + (2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow AC = 9$ cm.

10. E



a) Verdadeira

VH é a altura dos triângulos isósceles VAC e VBD, então H é o ponto médio das diagonais BD e AC, logo H, projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre a base é o centro dessa base.

b) Verdadeira

$$V_o = \frac{bc}{3}; V_1 = \frac{1,1b \times 1,1c \times 1,1}{3} = 1,331 \left(\frac{bc}{3} \right) = 1,331V_o = v_o + 33,1\% V_o \text{ Se a altura e as medidas dos}$$

c) Verdadeira

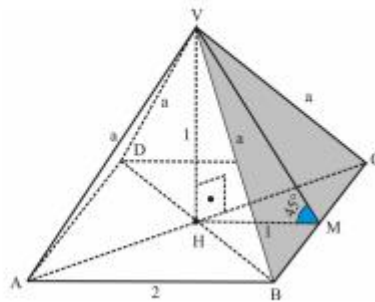
$$b + c = 8 \Rightarrow b = 8 - c \Rightarrow S_{\text{PISO}} = c(8 - c) = -c^2 + 8c.$$

$$S_{\text{PISO}} \text{ atinge valor máximo para } c = \frac{-8}{-2} = 4 \text{ metros} \Rightarrow b = (8 - 4) = 4 \text{ metros} \Rightarrow c = b, \text{ então o piso tem a}$$

forma de um quadrado.

d) Verdadeira

$$V = \frac{2^2 \times 1}{3} = \frac{4}{3} \text{ metros cúbicos.}$$



e) Falsa

O triângulo VHM é isósceles, logo nenhum ponto da barraca será projetado pelos raios solares num ponto do solo situado fora da região coberta pelo piso da barraca.