

Métodos de resolução de sistemas lineares

Resumo

Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares é simplesmente um conjunto de equações lineares.

Definição: Um sistema de m equações lineares em n variáveis (ou incógnitas) é um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde a_{ij}, b_k para $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$, são constantes reais, chamados os coeficientes do sistema.

Operações Elementares:

1. Trocar duas equações do sistema de posição.
2. Substituir uma equação pela mesma equação multiplicada por um escalar diferente de 0.
3. Substituir uma equação pela mesma equação somada a outra equação multiplicada por um escalar.

Método de escalonamento

Um sistema linear é dito escalonado se a última linha tiver apenas uma incógnita, a penúltima duas, e assim sucessivamente até a primeira linha onde terão todas as incógnitas. Segue exemplo de um sistema escalonado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Procedimentos para escalonar um sistema

- Fixamos como 1ª equação uma das que possuam o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.
- Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações.
- Anulamos todos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação.
- Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Exemplo:

Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x + 16z = 4 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método de escalonamento.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 & \times (-3) \\ 2x + 3y - z = 0 & \times (2) \\ x - 14z = 0 \end{cases}$$

$$-3x - 6y - 12z = 0$$

$$4x + 6y - 2z = 0$$

$$x - 14z = 0 \text{ (substitua na segunda equação)}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \\ -x + 16z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Método da substituição

Solução de sistemas pelo método da substituição.

Passo 1: Escolher uma incógnita e calcular seu valor algébrico.

Passo 2: Substituir o valor algébrico da incógnita na outra equação.

Passo 3: Calcular o valor numérico de uma das incógnitas.

Passo 4: Substituir o valor numérico de x em qualquer uma das duas equações e encontrar o valor numérico de y.

Exemplo: Encontre a solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 6x + 4y = 38 \end{cases}$$

Solução: Primeiramente, escolha uma incógnita para isolar. Para esse sistema, isolaremos y na primeira equação. Observe os cálculos na seguinte imagem:

$$\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 6x + 4y = 38 \end{cases}$$

$$4x + y = 18$$

$$-y = 18 - 4x$$

$$y = -18 + 4x$$

Por meio dos passos 2 e 3, substitua y na outra equação e encontre o valor numérico de x , como na imagem:

$$6x + 4y = 38$$

$$6x + 4(-18 + 4x) = 38$$

$$6x - 72 + 16x = 38$$

$$6x + 16x = 38 + 72$$

$$22x = 110$$

$$x = \frac{110}{22}$$

$$x = 5$$

Após encontrar o valor numérico de x , escolha uma das equações para cumprir o quarto e último passo: obter o valor numérico de y . Escolhemos, para isso, a primeira equação. Observe:

$$4x - y = 18$$

$$4 \cdot 5 - y = 18$$

$$20 - y = 18$$

$$-y = 18 - 20$$

$$-y = -2$$

$$y = 2$$

A solução desse sistema é $S = \{5, 2\}$.

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções. Podemos ter:

- **Sistema possível e determinado (SPD): tem apenas uma solução.**

O sistema $\begin{cases} -x + y = 5 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$ é possível e determinado pois o par ordenado $(1,6)$ é sua única solução.

- **Sistema possível indeterminado (SPI): tem infinitas soluções.**

O sistema $\begin{cases} 5x - 5y + 5z = 10 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ apresenta infinitas soluções como por exemplo: $(1,1,2)$, $(0,2,4)$, $(1,0,1)$,

- **Sistema Impossível (SI): não tem solução.**

O sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = 5 \end{cases}$ não possui nenhum par ordenado que satisfaça as duas equações ao mesmo tempo.

O processo de escalonamento pode também ser utilizado na discussão de sistemas lineares, porém é mais conveniente utilizar o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes aliado ao escalonamento.

1º) Calcula-se o determinante;

- Se o determinante for diferente de zero, temos as condições dos parâmetros para que o sistema seja SPD;

2º) Assumimos o determinante igual a zero e substituímos no sistema;

3º) Escalonamos o sistema obtido até a última linha;

Exemplo:

Discuta o sistema $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$

1º) Calculamos o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = a - 2$$

Se $D \neq 0 \rightarrow a \neq 2$, teremos SPD (Sistema Possível e Determinado)

2º) Assume $D=0$, logo $a=2$ e substituímos no sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$$

Resolvendo temos que $b = 1/2$

Logo, temos

$a \neq 2 \rightarrow$ SPD

$a = 2$ e $b = 1/2 \rightarrow$ SPI

$a = 2$ e $b \neq 1/2 \rightarrow$ SI

Exercícios

1. Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R\$ 3 800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R\$ 3 400,00. A televisão mais a estante sairiam por R\$ 4 200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista. O valor total, em real, pago pelo cliente foi de

- a) 3 610,00.
- b) 5 035,00.
- c) 5 415,00.
- d) 5 795,00.
- e) 6 100,00.

2. Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A , B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

- a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
- b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
- c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
- d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
- e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

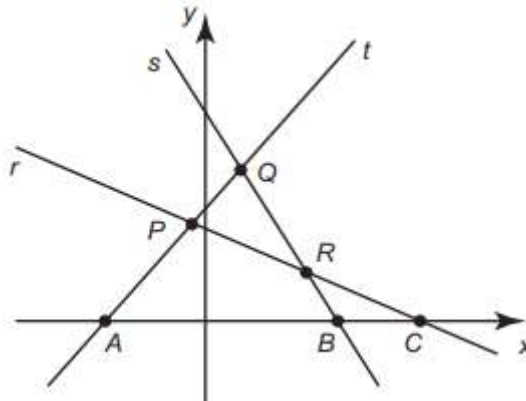
3. Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores.

Disponível em: www.techlider.com.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é

- a) 200.
 - b) 209.
 - c) 270.
 - d) 340
 - e) 475.
4. A prefeitura de uma cidade detectou que as galerias pluviais, que possuem seção transversal na forma de um quadrado de lado 2m, são insuficientes para comportar o escoamento da água em caso de enchentes. Por essa razão, essas galerias foram reformadas e passaram a ter seções quadradas de lado igual ao dobro das anteriores, permitindo uma vazão de $400\text{m}^3/\text{s}$. O cálculo da vazão V (em m^3/s) é dado pelo produto entre a área por onde passa a água (em m^2) e a velocidade da água (em m/s). Supondo que a velocidade da água não se alterou, qual era a vazão máxima?
- a) $25\text{m}^3/\text{s}$
 - b) $50\text{m}^3/\text{s}$
 - c) $100\text{m}^3/\text{s}$
 - d) $200\text{m}^3/\text{s}$
 - e) $300\text{m}^3/\text{s}$

5. Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C s pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

- possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.
 - possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.
 - possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.
 - não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.
 - possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.
6. Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função

$$T(h) = A + B \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right),$$

, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

- A = 18 e B = 8
- A = 22 e B = -4
- A = 22 e B = 4
- A = 26 e B = -8
- A = 26 e B = 8

7. Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R\$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R\$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R\$100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

- a) 30
- b) 36
- c) 50
- d) 60
- e) 64

8. Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

- a) $5X - 3Y + 15 = 0$
- b) $5X - 2Y + 10 = 0$
- c) $3X - 3Y + 15 = 0$
- d) $3X - 2Y + 15 = 0$
- e) $3X - 2Y + 10 = 0$

9. Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes a seca. Em média, para cada 100g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias do dois micronutrientes para uma pessoa é de aproximadamente 12,25mg de ferro e de 10mg de zinco.

Disponível em <http://www.empraba.br>. Acesso em: 29 de abril de 2010. (adaptado)

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os nutrientes oriundos desses alimentos. Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

- a) 58 g e 456 g.
- b) 200 g e 200 g.
- c) 350 g e 100 g.
- d) 375 g e 500 g.
- e) 400 g e 89 g.

- 10.** Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano.

O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:

- a) 20
- b) 30
- c) 40
- d) 50
- e) 60

Gabarito

1. D

Sejam t , s e e , respectivamente, o preço de uma televisão, o preço de um sofá e o preço de uma estante. Logo, vem

$$\begin{cases} t + s = 3800 \\ s + e = 3400 \\ t + e = 4200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + s = 3800 \\ t - s = 800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2300 \\ s = 1500 \end{cases}$$

A resposta é

$$0,95 \cdot (2 \cdot 2300 + 1500) = \text{R\$ } 5.795,00.$$

2. A

Calculando:

$$P(t) = A + B \cos(kt)$$

$$\begin{cases} A + B \cdot \cos(kt) = 120 \\ A - B \cdot \cos(kt) = 78 \end{cases} \Rightarrow 2A = 198 \Rightarrow A = 99$$

$$P_{\text{máx}} \Rightarrow \cos(kt) = 1$$

$$99 + B = 120 \Rightarrow B = 21$$

$$\frac{90 \text{ batimentos}}{60 \text{ segundos}} = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{6}{9} \text{ s} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$$

Assim :

$$P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$$

3. C

Sejam x a memória ocupada por um minuto de vídeo e y a memória ocupada por uma foto. Logo, temos $10x + 190y = 15x + 150y \Leftrightarrow x = 8y$.

Portanto, a capacidade total do disco é $10 \cdot 8y + 190y = 270y$ e, assim, o resultado é 270.

4. B

$$\left. \begin{aligned} V_i &= v \cdot \ell^2 = v \cdot 2^2 \Rightarrow V_i = 4v \\ V_f &= 400 = v \cdot (2\ell)^2 \Rightarrow 400 = 16v \Rightarrow v = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_i = 4 \cdot 25 = 100 \text{ m}^3/\text{s}$$

5. D

É imediato que o sistema não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

6. B

Substituindo os valores na equação por 26°C pela manhã, às 6h e 18°C às 18h, tem-se:

$$T(h) = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$$

$$T(6) = 26 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(6-12)\right) \rightarrow 26 = A + B \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 26 = A - B$$

$$T(18) = 18 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(18-12)\right) \rightarrow 18 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 18 = A + B$$

$$\begin{cases} A - B = 26 \\ A + B = 18 \end{cases}$$

$$2A = 44 \rightarrow A = 22 \rightarrow B = -4$$

7. A

Seja x o número de acertos e y o número de erros, montando um sistema de equações, tem-se:

$$\begin{cases} 20x - 10y = 100 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

$$20x - 10 \cdot (80 - x) = 100$$

$$20x - 800 + 10x = 100$$

$$30x = 900$$

$$x = 30$$

8. B

Seja Z o tempo que a luz vermelha fica acesa. Logo, temos

$$X = \frac{2Z}{3} \Leftrightarrow Z = \frac{3X}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} Y = 5 + X + Z &\Leftrightarrow Y = 5 + X + \frac{3X}{2} \\ &\Leftrightarrow 5X - 2Y + 10 = 0. \end{aligned}$$

9. C

Sejam a e f , respectivamente, os números de porções de 100 gramas de arroz e de feijão que deverão ser ingeridas.

De acordo com o enunciado, obtemos o sistema $\begin{cases} 1,5a + 7f = 12,25 \\ 2a + 3f = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a + 28f = 49 \\ -6a - 9f = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3,5 \\ f = 1 \end{cases}$.

Portanto, as quantidades de arroz e feijão que deverão ser ingeridas são, respectivamente, $3,5 \cdot 100 = 350 \text{ g}$ e $1 \cdot 100 = 100 \text{ g}$.

10. B

x = número de carros roubados da marca X

y = número de carros roubados da marca Y

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = \frac{60}{100} \cdot 150 \end{cases}$$

$$2y + y = 90 \Leftrightarrow y = 30$$

Portanto, o número de carros roubados da marca Y é 30.