Operações com arcos

Resumo

Temos como objetivo nessa aula encontrar formas de calcular o valor de arcos desconhecidos, a partir da soma, diferença ou, ainda, do dobro de dois arcos conhecidos.

Exemplo: sen 75º = sen (30º + 45º)

cos 15º = cos (45º - 30º)

tg 105º = tg (45º + 60º)

Cosseno da soma de dois arcos

Considerando dois arcos, *a* e *b*, o cos (a+b) será:

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-sena\cdot senb}$$

Exemplo: Calule o cos 75º.

$$\cos 75^o=\cos(30^o+45^o)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Seno da soma de dois arcos

Considerando dois arcos, *a* e *b*, o sen (a+b) será:

$$\boxed{sen(a+b)=sena\cdot\cos b+senb\cdot\cos a}$$

Exemplo: Calcule o sen 75º

$$sen75^o=sen(45+30)=sen45\cdot\cos 30+sen30\cdot\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Cosseno da diferença de dois arcos

Considerando dois arcos, *a* e *b*, o cos (a-b) será:

$$\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+sena\cdot senb}$$

Exemplo: Calcule o cos 15º

$$\cos 15^o=\cos(45-30)=\cos 45\cdot\cos 30+sen45\cdot sen30=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Seno da diferença de dois arcos

Considerando dois arcos, *a* e *b*, o sen (a-b) será:

$$\boxed{sen(a-b) = sena \cdot \cos b - senb \cdot \cos a}$$

Exemplo: Calcule o sen 15º

$$sen15^\circ = sen(45^\circ - 30^\circ) = sen45 \cdot \cos 30 - sen30 \cdot \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Tangente da soma de dois arcos

Considerando dois arcos, *a* e *b*, o tg (a+b) será:

$$\boxed{tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}}$$

Exemplo: Calcule o tg 75º

$$tg75^\circ = tg(45+30) = \frac{tg45 + tg30}{1 - tg45 \cdot tg30} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

Tangente da diferença de dois arcos

Considerando dois arcos, *a* e *b*, o tg (a-b) será:

$$\boxed{tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}}$$

Exemplo: Calcule o tg 15º

$$tg15^\circ = tg(45-30) = \frac{tg45 - tg30}{1 + tg45 \cdot tg30} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

Arcos duplos

Considerando o arco a, quando duplicado teremos:

Cosseno: $$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a \\ \cos 2a = 1 - 2sen^2 a \\ \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \end{cases}$$

Seno: $sen2a = 2sena \cdot \cos a$

Tangente: $tg(2a) = \dfrac{2tga}{1 - tg^2 a}$

Quer ver este material pelo Dex? Clique aqui

Exercícios

1. O valor de cos(105º) é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2. Sabendo que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $sen(x) = -\frac{1}{3}$, é correto afirmar que sen(2x) é:

a) $-\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{6}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

d) $\frac{1}{27}$

e) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

3. Um caminhão sobe uma ladeira com inclinação de 15°. A diferença entre a altura final e a altura inicial de um ponto determinado do caminhão, depois de percorridos 100 m da ladeira, será de, aproximadamente:

Dados: $\sqrt{3} \cong 1,73$, $sen^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$

a) 7 m.

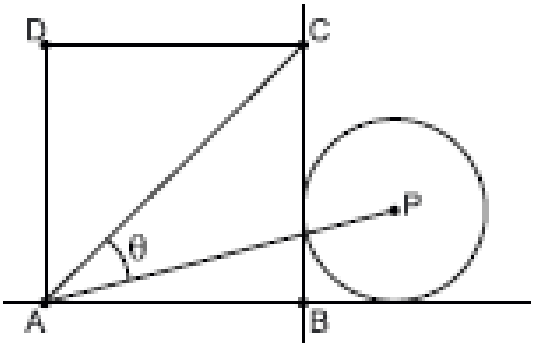
b) 26 m.

c) 40 m.

d) 52 m.

e) 67 m.

4. No esquema abaixo, estão representados um quadrado ABCD e um círculo de centro P e raio r, tangente às retas AB e BC. O lado do quadrado mede 3r.



A medida θ do ângulo CÂP pode ser determinada a partir da seguinte identidade trigonométrica:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha) \times tg(\beta)}$$

O valor da tangente de θ é igual a:

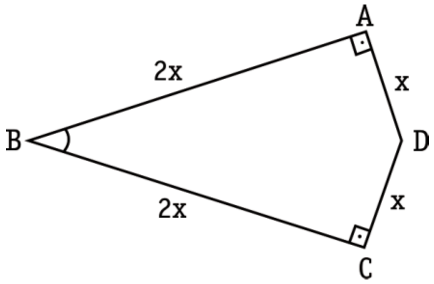
a) 0,65.

b) 0,60.

c) 0,55.

d) 0,50

5. No quadrilátero ABCD onde os ângulos A e C são retos e os lados têm as medidas indicadas, o valor de sen B é:



a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{2}$

6. Se tg (x + y) = 33 e tg x = 3, então tg y é igual a:

a) 0,2

b) 0,3

c) 0,4

d) 0,5

e) 0,6

7. Se $sen(x) = -\frac{2}{3}$, cos(2x).sen(-x) é:

a) $\frac{2}{9}$

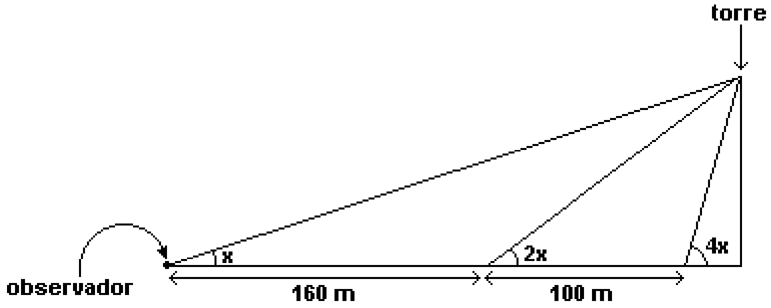
b) $\frac{2}{27}$

c) $-\frac{2}{9}$

d) $-\frac{2}{27}$

e) $-\frac{9}{27}$

8. Considere o ângulo segundo o qual um observador vê uma torre. Esse ângulo duplica quando ele se aproxima 160 m e quadruplica quando ele se aproxima mais 100 m, como mostra o esquema a seguir.



A altura da torre, em metros, equivale a:

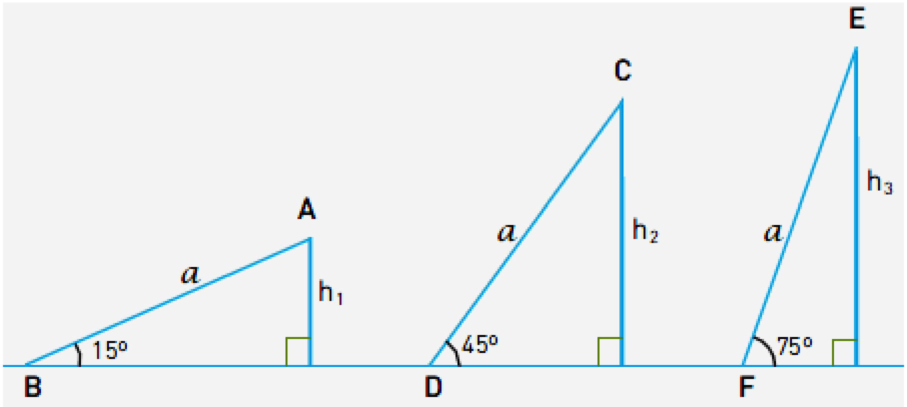
a) 96.

b) 98.

c) 100.

d) 102.

9. Um skatista treina em três rampas planas de mesmo comprimento a, mas com inclinações diferentes. As figuras abaixo representam as trajetórias retilíneas AB = CD = EF, contidas nas retas de maior declive de cada rampa. Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida A, C e E são, respectivamente, h_1, h_2 e h_3, conclui-se que $h_1 + h_2$ é igual a:



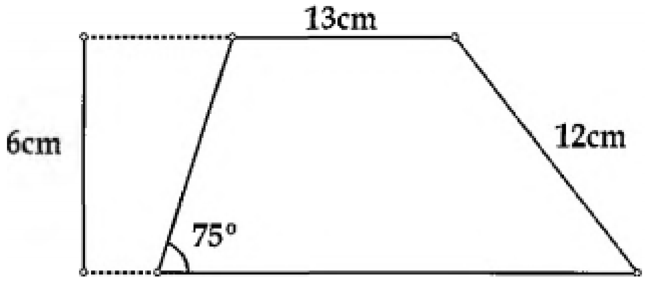
a) $h_3\sqrt{3}$

b) $h_3\sqrt{2}$

c) $2h_3$

d) h_3

10. Observe a figura a seguir.



A figura acima representa o trapézio escaleno de altura 6cm, com base menor medindo 13cm, um dos ângulos internos da base maior medindo 75° e lado transversal oposto a esse ângulo igual a 12cm. Qual é a área, em cm^2, desse trapézio?

a) 120

b) 118

c) 116

d) 114

e) 112

Gabarito

1. **E**

$$cos\ (45 + 60) = (\sqrt{2}/2) \times (1/2) - (\sqrt{2}/2) \times (\sqrt{3}/2)$$

$$cos\ (45 + 60) = \sqrt{2}/4 - \sqrt{6}/4$$

$$cos\ (45 + 60) = (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$$

$$portanto\ cos\ de\ 105\ é\ (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$$

2. **E**

$$Se\,\pi < x < 3\pi/2\ ,\ então\ senx < 0\ e\ cosx < 0$$

$$sen^2x + cos^2 x = 1$$

$$=> (-1/3)^2 + cos^2x = 1$$

$$=> cos^2x = 1 - 1/9$$

$$=> cos^2x = (9-1)/9cos^2x = 8/9$$

$$=> cosx = -2\sqrt{2}/3$$

$$=> sen2x = 2senx\ cosx = 2(-1/3)(-2\sqrt{2}/3) = 4\sqrt{2}/9$$

3. **B**

Considere a figura, em que h é a diferença pedida.

Sabendo que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vem

$$sen^2\left(\frac{30°}{2}\right) = \frac{1-\cos 30°}{2} \Leftrightarrow sen^2 15° = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow sen^2 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{0{,}27}{4} = \frac{27}{400}$$

$$\Rightarrow sen15° = \sqrt{\frac{27}{400}} = \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{3\,.\,1{,}73}{20} \cong 0{,}26$$

Portanto,

$h = 100 \cdot sen15° \cong 100 \cdot 0{,}26 = 26$ m.

4. B

$\alpha = C\hat{A}B \rightarrow tg\,\alpha = \frac{3r}{3r} = 1$

$\beta = P\hat{A}B \rightarrow tg\,\beta = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4}$

$\theta = \alpha - \beta \rightarrow tg\,\theta = tg\,(\alpha - \beta) = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{4}} \rightarrow tg\,\theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \rightarrow tg\,\theta = \frac{3}{5} = 0{,}6$

5. C

$x^2 + 4x^2 = (BD)^2 \Rightarrow (BD)^2 = 5x^2 \Rightarrow BD = x\sqrt{5}$

$sen\alpha = \frac{x}{x\sqrt{5}} \Rightarrow sen\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$cos\alpha = \frac{2x}{x\sqrt{5}} \Rightarrow cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$B = 2\alpha$

$sen2\alpha = 2sen\alpha.cos\alpha$

Substituindo teremos:

$sen2\alpha = 2.\frac{\sqrt{5}}{5}.\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow sen2\alpha = \frac{4}{5}$

6. B

$Tg(X+Y) = \frac{tgX + tgY}{1 - tgX.tgY}$ $\quad trocando\ tg(x+y) = 33\ e\ tgx = 3$

$33 = \frac{3 + tgY}{1 - 3tgY}$

$33(1 - 3tgY) = 3 + tgY$

$33 - 99tgY = 3 + tgY$

$33 - 3 = 99tgY + tgY$

$30 = 100tgY$

$\frac{30}{100} = tgY$

$0,3 = tgY$

7. B

Pela relação fundamental temos que:

$$\cos^2 x + (-2/3)^2 = 1$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Utilizando a fórmula de arcos duplos temos que:

$$\cos(2x) = (\frac{\sqrt{5}}{3})^2 - (\frac{-2}{3})^2$$

$$\cos(2x) = \frac{1}{9}$$

E finalmente :

$$\cos(2x).sen(-x) = \frac{1}{9}.\frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

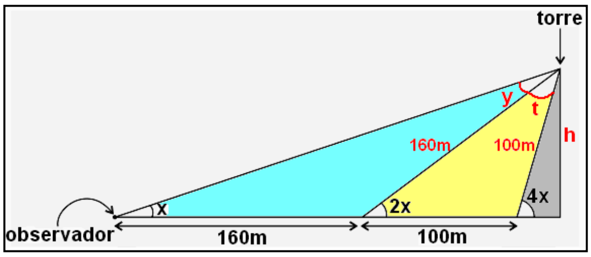
8. A

I. O ângulo (2x) é externo e vale a soma de (x + y).

Logo, 2x = x + y => x = y.

Esse triângulo é isósceles.

II. O ângulo (4x) é externo e vale a soma de (2x + t).



Logo, 4x = 2x + t => 2x = t. Esse triângulo também é isósceles.

III. Utilizando os senos de (2x) e (4x),temos:

$$\text{i)} \begin{cases} sen(4x) = 2sen(2x).cos(2x) \\ sen(2x) = \dfrac{h}{160} \\ sen(4x) = \dfrac{h}{100} \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{100} = 2\left(\frac{h}{160}\right)cos(2x) \Rightarrow \frac{h}{100} = \left(\frac{h}{80}\right)cos(2x) \Rightarrow cos(2x) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} cos(2x) = \dfrac{4}{5} \\ sen(2x) = \sqrt{1-cos^2(2x)} \end{cases} \Rightarrow sen(2x) = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{iii)}\ sen(2x) = \frac{h}{160} \Rightarrow \frac{h}{160} = \frac{3}{5} \Rightarrow h = \frac{(3).(160)}{5} = \frac{480}{5} = 96$$

9. D

Como

$$\begin{aligned}\text{sen}15° &= \text{sen}(45° - 30°)\\ &= \text{sen}45°\cos30° - \text{sen}30°\cos45°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Então:

$$\text{sen}15° = \frac{h_1}{a} \Leftrightarrow h_1 = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}.$$

Além disso,

$$\text{sen}45° = \frac{h_2}{a} \Leftrightarrow h_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Então:

$$\begin{aligned}h_1 + h_2 &= \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

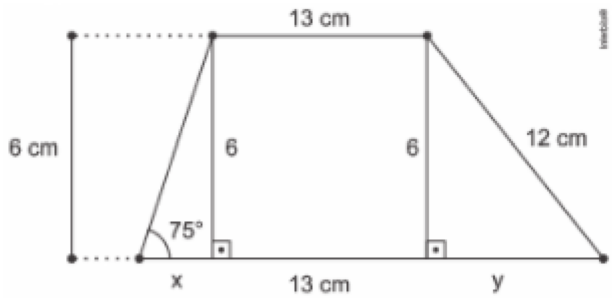
$$\begin{aligned}\text{sen}75° &= \text{sen}(45° + 30°)\\ &= \text{sen}45°\cos30° + \text{sen}30°\cos45°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Então:

$$\text{sen}75° = \frac{h_3}{a} \Leftrightarrow h_3 = \frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}.$$

Portanto, $h_1 + h_2 = h_3$.

10. D



Na figura acima, temos:

$$tg75° = \frac{6}{x}$$

$$tg(45° + 30°) = \frac{6}{x}$$

$$\frac{tg45° + tg30°}{1 - tg30° \cdot tg45°} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{6}{x}$$

$$x = \frac{6 \cdot (3 - \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}}$$

$$x = 12 - 6 \cdot \sqrt{3}$$

Calculando, agora, o valor de y, temos:

$$y^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow y = 6 \cdot \sqrt{3}$$

Portanto, a medida da base maior do trapézio será dada pela soma abaixo:

$$x + 13 + y = 12 - 6 \cdot \sqrt{3} + 13 + 6 \cdot \sqrt{3} = 25$$

ÁREA = $\frac{(25+13).6}{2}$

ÁREA = 114 cm^2