Exercícios sobre números complexos

Exercícios

1. Sendo i a unidade imaginária, então $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$ é igual a

a) -1024
b) -1024i
c) 0
d) 1024
e) 1024i

2. A medida do argumento dos números complexos z = x + yi pertencentes à reta y = x , em radianos, é

a) $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

c) $-\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

3. Se y = 2x, sendo $x=\frac{1+i}{1-i}$ e $i=\sqrt{-1}$, o valor de $(x+y)^2$ é

a) 9i
b) -9 + 1
c) -9
d) 9
e) 9 – i

4. No conjunto dos números complexos, o número 1 apresenta três raízes cúbicas: $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Os pontos que correspondem às representações desses três números no plano de Argand Gauss são vértices de um triângulo de área

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

d) $\sqrt{3}$

e) 1

5. No sistema de coordenadas cartesianas usual com origem no ponto O, considere os números complexos, na forma trigonométrica, dados por z = 2(cos60° + isen60°) e w = 2(cos30° + isen30°). Os pontos do plano que representam estes números e a origem O são vértices de um triângulo cuja medida da área é

a) 1,0 u.a.

b) 0,5 u.a.

c) 2,0 u.a.

d) 1,5 u.a.

6. O módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a

a) $\sqrt{2}$

b) 0

c) $\sqrt{3}$

d) 1

7. Se os números complexos z e w estão relacionados pela equação z + wi = i e se $z = 1 - \frac{1}{i}$, então w é igual a

a) i

b) 1 – i

c) –i

d) 1 + i

8. Considere os números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = -b + ai$ e $z_3 = -b + 3i$, com a e b número inteiros.

Sabendo que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, o valor de $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ é igual a

a) 1
b) -1
c) –i
d) I
e) 0

9. Considere θ um número real qualquer. Sobre os números complexos $z = \cos 2\theta + isen\theta$ e $w = \cos\theta + isen2\theta$, pode-se afirmar que

a) $|z| + |w| = 1$
b) $z^2 - w^2 = 0$
c) $z = \overline{w}$
d) $z - iw = 0$
e) $|z|^2 + |w|^2 = 2$

10. O número complexo z, tal que $5z + \overline{z} = 12 + 16i$, é igual a:

a) -2 + 2i
b) 2 – 3i
c) 3 + i
d) 2 + 4i
e) 1 + 2i

Gabarito

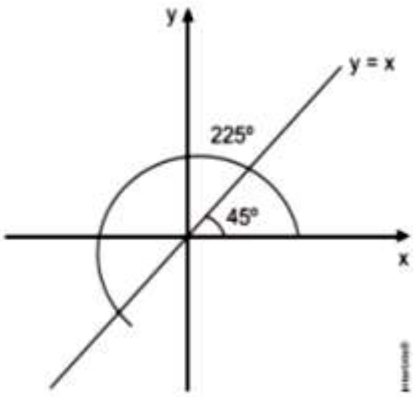
1. C

$$(1+i)^{20} = ((1+i)^2)^{10} = (1+2i+i^2)^{10} = (2i)^{10} = 1024.i^2$$

$$(1-i)^{20} = ((1-i)^2)^{10} = (1-2i+i^2)^{10} = (-2i)^{10} = 1024.i^2$$

$$\text{logo } (1+i)^{20} - (1-i)^{20} = 0$$

2. A



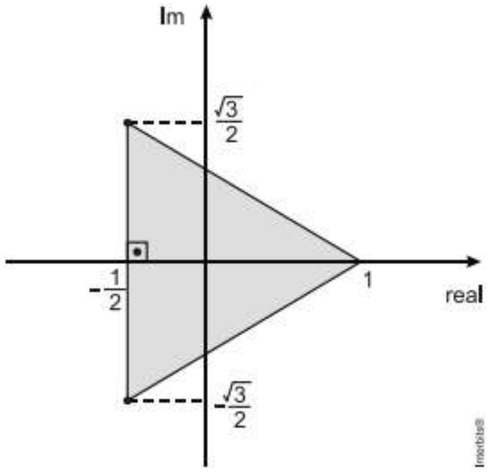
$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ e } 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

3. C

$$x = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{i^2 + 2i - i^2}{1^2 - i^2} \frac{2i}{2} = i \text{ e } y = 2i$$

$$(x+y)^2 = (i + 2i)^2 = (3i)^2 = 9i^2 = -9$$

4. C



Localizando os afixos no plano complexo, temos o triângulo da figura.

Calculando sua área:

$$A = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2}$$

$$A = \frac{3.\sqrt{3}}{4}$$

5. A

Sejam P e Q, respectivamente, as imagens de z e w. Tem-se que

$$\begin{aligned}(OPQ) &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \text{sen}(\arg z - \arg w) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen}\,30^\circ \\ &= 1 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

6. **A**

Como $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, vem

$$\begin{aligned} z &= i^{2014} - i^{1987} \\ &= i^{4\cdot 503+2} - i^{4\cdot 496+3} \\ &= (i^4)^{503} \cdot i^2 - (i^4)^{496} \cdot i^3 \\ &= -1+i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|z| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

7. **A**

Substituindo o valor de z na equação dada e resolvendo:

$$z + wi = i \rightarrow 1 - \frac{1}{i} + wi = i$$

$$i - 1 + wi^2 = i^2$$

$$i - 1 + w \cdot (-1) = (-1)$$

$$i - 1 - w = -1$$

$$w = i$$

8. **C**

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow (a - 2b) + (a + b + 3) \cdot i = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ a + b + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:
$a = -2$ e $b = -1$

Portanto:

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \left(\frac{1-2i}{-2-i}\right)^3 = \left(\frac{1-2i}{-2-i} \cdot \frac{-2+i}{-2+i}\right)^3 = \left(\frac{-2+i+4i-2i^2}{5}\right)^3 = i^3 = -i$$

9. E

Tomando $\theta = 0$, vem $z = 1$ e $w = 1$. Logo, segue que $|z| + |w| = 2$ e $z - iw = 1 - i$.

Por outro lado, para $\theta = \frac{\pi}{4}$rad, temos $z = \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$. Desse modo, é fácil ver que $z^2 - w^2 = \sqrt{2}i$ e $z \neq \overline{w}$.

Finalmente, sendo
$|z| = \sqrt{\cos^2 2\theta + \text{sen}^2\,\theta}$

e
$|w| = \sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\,2\theta}$,

encontramos
$|z|^2 + |w|^2 = \cos^2 2\theta + \text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\,2\theta = 2$.

10. D

Suponha que $z = a + bi$, então $\overline{z} = a - bi$.

Logo, $5(a + bi) + (a - bi) = 12 + 16i \Rightarrow 6a + 4bi = 12 + 16i \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Portanto,
$z = 2 + 4i$.