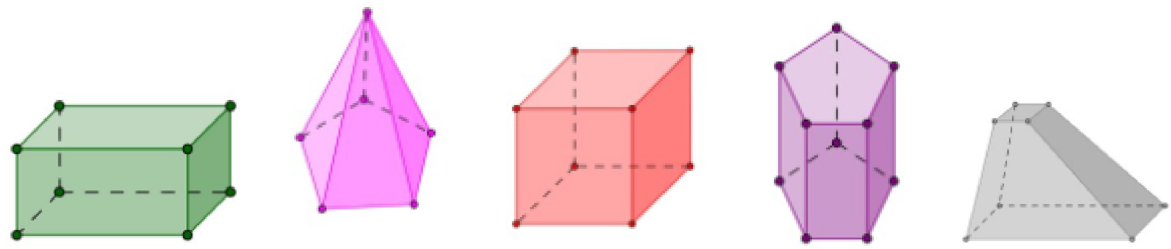
Poliedros

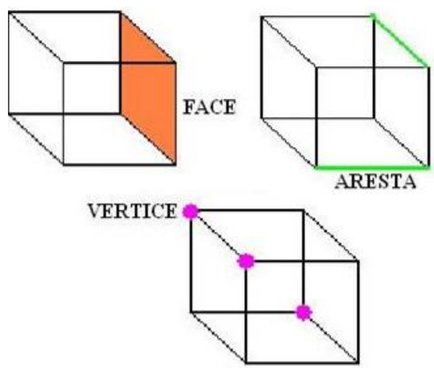
Resumo

Poliedros são sólidos geométricos formados por vértices, arestas e faces, cujas superfícies são polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.). A palavra poliedro vem do grego antigo, em que poli significa "vários" e "edros" significa "faces". Veja alguns exemplos de poliedros:



Relação de Euler

Em um poliedro, como dito antes, podemos distinguir faces, arestas e os vértices. Observe abaixo:



Ou seja:

- faces são as superfícies planas poligonais que limitam o poliedro.
- arestas são as interseções entre as faces do poliedro.
- vértices são os pontos de encontro das arestas.

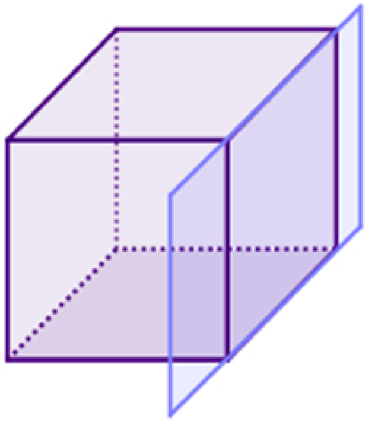
Leonhard Euler foi um matemático suíço que desenvolveu uma expressão matemática que descreve a relação entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Eis a fórmula:

$$V + F = A + 2$$

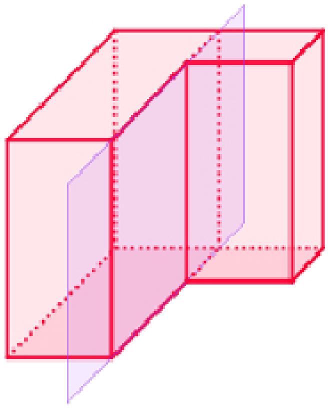
Devemos ter cuidado ao usar essa fórmula, pois ela funciona para qualquer poliedro convexo e para *alguns* poliedros côncavos. Mas o que são poliedros convexos e côncavos?

Um **poliedro** é chamado **convexo** quando o plano que contém cada face deixa todas as outras em um mesmo semiespaço.

Poliedro convexo:



Poliedro côncavo:



Cálculo para quantidade de arestas de um poliedro

Seja um poliedro com f_3 faces triangulares, f_4 faces quadrangulares, f_5 pentagonais etc.
Podemos calcular a quantidade de arestas (A) desse poliedro usando a fórmula:

$$2A = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \ldots$$

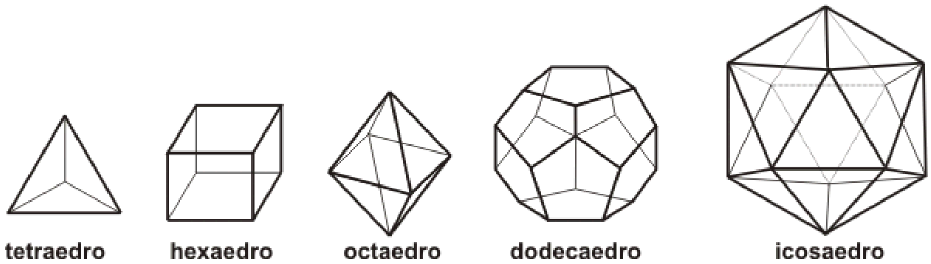
Poliedros de Platão

O filósofo Platão criou um teorema que nos diz que existem 5, e apenas 5, poliedros regulares. Esses 5 poliedros são chamados poliedros de Platão.

Para que possa ser um poliedro de Platão, é necessário que o poliedro obedeça às seguintes disposições:

- todas as faces devem ter a mesma quantidade n de arestas;
- todos os vértices devem ser formados pela mesma quantidade m de arestas;

Estes são os poliedros de Platão:



Exercícios

1. O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces. Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

a) 10.

b) 12.

c) 25.

d) 42.

e) 50.

2. Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

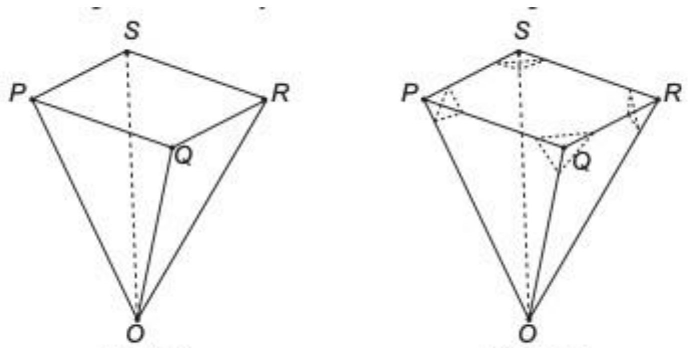


Figura 1 Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.

b) 9, 24 e 13.

c) 7, 15 e 12.

d) 10, 16 e 5.

e) 11, 16 e 5.

3. Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.

Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo.

A soma V + F + A é igual a:

a) 102

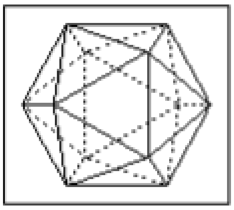
b) 106

c) 110

d) 112

e) 114

4. Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

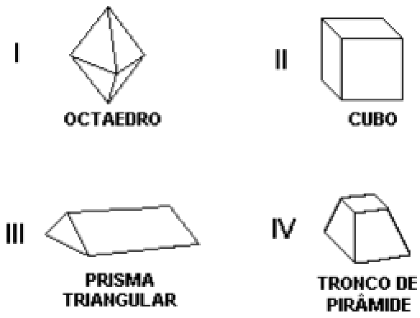
a) 7,0 m

b) 6,3 m

c) 4,9 m

d) 2,1 m

5. Indique quantas faces possuem, respectivamente, nessa ordem, os sólidos numerados como I, II, III e IV a seguir:



a) 8, 6, 5, 6.

b) 8, 6, 6, 5.

c) 8, 5, 6, 6.

d) 5, 8, 6, 6.

e) 6, 18, 6, 5.

6. Sobre as sentenças:

I. Um octaedro regular tem 8 faces quadradas.
II. Um dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.
III. Um icosaedro regular tem 20 faces triangulares.

É correto afirmar que a

a) I é verdadeira.

b) II é verdadeira.

c) III é verdadeira.

d) I e II são verdadeiras.

e) II e III são verdadeiras.

7. Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares é cinco.

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

8. Um poliedro convexo possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. O número de vértices deste poliedro é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 9

e) 10

9. Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler $V - A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.
Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?

a) $2V - 4F = 4$

b) $2V - 2F = 4$

c) $2V - F = 4$

d) $2V + F = 4$

e) $2V + 5V = 4$

10. Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é

a) 100

b) 120

c) 90

d) 80

Gabarito

1. **B**
Usamos a relação de Euler:
V + F = A + 2
20 + F = 30 + 2
F = 12

2. **A**
Podemos ver que, para cada corte, teremos 3 vértices novos, 3 arestas novas e 1 nova face.
Como são 4 cortes teremos 12 novos vértices, 12 novas arestas e 4 novas faces.
Assim, teremos:
12 + 8 arestas = 20
1 + 12 vértices = 13
5 + 4 faces = 9

3. **D**
Cada dodecaedro regular possui 30 arestas. Observe:
$2 \times A_{dodecaedro} = 5 \times F_5$ (sendo F_5 a quantidade e faces pentagonais)
$2 \times A_{dodecaedro} = 5 \times 12$
$A_{dodecaedro} = 30$
Segundo a relação de Euler:
$V_{dodecaedro} + F_{dodecaedro} = A_{dodecaedro} + 2$
$V_{dodecaedro} + 12 = 30 + 2$
Logo, o dodecaedro possui 20 vértices.
A justaposição de duas faces congruentes dos dois dodecaedros regulares impede a visualização de 5 arestas e de 5 vértices (porque passam a coincidir) e de 2 faces (que ficam ocultas). No novo sólido, portanto, as quantidades V de vértices, F de faces e A de arestas são:
V= 20 + 20 − 5 = 35
F = 12 + 12 − 2 = 22
A = 30 + 30 − 5 = 55
A soma V + F + A é igual a 112.

4. **B**
De cada vértices partem 5 arestas, logo as pirâmides retiradas foram pentagonais e em números de 12. Com isto a bola passa a ter 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais formadas nas faces triangulares após as retiradas. Logo o número de arestas será: $A = \frac{12(5) + 20(6)}{2} = \frac{180}{2} = 90$.
As costuras são justamente as arestas. Como em cada uma se gasta 7cm, ao final das 90 arestas gastará (7cm).(90) = 630cm = 6,3m.

5. **A**
Nesta questão, temos que contar as faces olhando para o poliedro.

6. E

I. é falsa, pois sabemos que um octaedro é formado por faces triangulares.

II. é verdadeira.

III. é verdadeira.

7. B

Considerando x o número de faces triangulares e aplicando a fórmula do número de arestas em função do número de faces, temos:

$$\begin{cases} \text{número de faces quadrangulares: } 5 \\ \text{número de faces triangulares: } x \\ A = 4x \end{cases}$$

$$A = 4x = \frac{3x + 4(5)}{2} \Leftrightarrow x = 4$$

Total de faces: 5 + 4 = 9

8. E

Calculando o número de arestas, temos:

$$2A = 4.5 + 2.5 = 30 \Leftrightarrow A = 15$$

Por fim, pela relação de Euler:

V + F = 2 + A

V + 7 = 15 + 2

V = 10

9. C

Poliedro de faces triangulares $\Rightarrow \frac{3F}{2} = A$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - \frac{3F}{2} + F = 2 \Rightarrow V - \frac{F}{2} = 2 \Rightarrow 2V - F = 4$$

10. C

Sabendo que o poliedro possui 32 vértices, tem-se $V = 32$. Por conseguinte, sendo F e A, respectivamente, o número de faces e o número de arestas, pelo Teorema de Euler, vem

$V + F = A + 2 \Leftrightarrow 32 + F = A + 2 \Leftrightarrow F = A - 30.$

Daí, como o poliedro possui apenas faces triangulares, temos $3F = 2A$ e, portanto,

$3(A - 30) = 2A \Leftrightarrow A = 90.$