1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Sean A, B matrices en $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Demuestra que

$$det\left(AB - BA\right) = \frac{1}{3} Tr\left[\left(AB - BA\right)^3\right]$$

Solución

Demostración. Como $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ entonces $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ y $BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Como $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ es un subespacio de $\mathcal{M}_n(F)$ entonces tenemos que $AB - BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Sabemos que el polinomio característico de $C \in \mathcal{M}_n(F)$ es de la forma

$$\chi_C(X) = X^n - Tr(C) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n det(C)$$

En particular, haciendo $C = AB - BA, F = \mathbb{C}$ y $n = 3$ tenemos que

$$\chi_{AB-BA}(X) = X^3 - Tr(AB - BA) X^2 + \ldots - det(AB - BA)$$

Como $\chi_{AB-BA}(X) \in \mathbb{C}[X]$ entonces por el teorema fundamental del álgebra χ_{AB-BA} se divide sobre $\mathbb{C}$, ya que recordemos que las entradas de ambas matrices están en $\mathbb{C}$. Sean a, b y c eigenvalores de χ_{AB-BA}, y como sabemos que χ_{AB-BA} se divide sobre $\mathbb{C}$ ésto por definición es que

$$\chi_{AB-BA}(X) = r(X-a)(X-b)(X-c)$$

con r, a, b y c en $\mathbb{C}$, como el polinomio característico es mónico se sigue que $r = 1$, entonces

$$\chi_{AB-BA}(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$$

Consecuntemente

$$\begin{aligned}
\chi_{AB-BA}(X) &= (X-a)(X-b)(X-c) \\
&= X^3 - cX^2 - bX^2 - aX^2 + bcX + acX + abX - abc \\
&= X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ac)X - abc
\end{aligned}$$

Como el polinomio característico es único entonces

$$X^3 - Tr(AB - BA) X^2 + \ldots - det(AB - BA) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ac)X - abc$$

Así obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
Tr(AB - BA) &= a + b + c \\
det(AB - BA) &= abc
\end{aligned}$$

Notemos que $Tr(AB - BA) = 0$ ya que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}$$

Calculando AB

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_7 & a_1b_2 + a_2b_5 + a_3b_8 & a_1b_3 + a_2b_6 + a_3b_9 \\ a_4b_1 + a_5b_4 + a_6b_7 & a_4b_2 + a_5b_5 + a_6b_8 & a_4b_3 + a_5b_6 + a_6b_9 \\ a_7b_1 + a_8b_4 + a_9b_7 & a_7b_2 + a_8b_5 + a_9b_8 & a_7b_3 + a_8b_6 + a_9b_9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calculando BA

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_4b_2 + a_7b_3 & a_2b_1 + a_5b_2 + a_8b_3 & a_3b_1 + a_6b_2 + a_9b_3 \\ a_1b_4 + a_4b_5 + a_7b_6 & a_2b_4 + a_5b_5 + a_8b_6 & a_3b_4 + a_6b_5 + a_9b_6 \\ a_1b_7 + a_4b_8 + a_7b_9 & a_2b_7 + a_5b_8 + a_8b_9 & a_3b_7 + a_6b_8 + a_9b_9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Calculando $AB - BA$

$$
\begin{matrix} a_2b_4+a_3b_7-a_4b_2-a_7b_3 & a_1b_2-a_2b_1+a_2b_5+a_3b_8-a_5b_2-a_8b_3 & a_1b_3+a_2b_6-a_3b_1+a_3b_9-a_6b_2-a_9b_3 \\ -a_1b_4+a_4b_1-a_4b_5+a_5b_4+a_6b_7-a_7b_6 & -a_2b_4+a_4b_2+a_6b_8-a_8b_6 & -a_3b_4+a_4b_3+a_5b_6-a_6b_5+a_6b_9-a_9b_6 \\ -a_1b_7-a_4b_8+a_7b_1-a_7b_9+a_8b_4+a_9b_7 & -a_2b_7-a_5b_8+a_7b_2+a_8b_5-a_8b_9+a_9b_8 & -a_3b_7-a_6b_8+a_7b_3+a_8b_6 \end{matrix}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
Tr(AB - BA) &= a_2b_4 + a_3b_7 - a_4b_2 - a_7b_3 - a_2b_4 + a_4b_2 + a_6b_8 - a_8b_6 - a_3b_7 - a_6b_8 + a_7b_3 + a_8b_6 \\
&= (a_2b_4 - a_2b_4) + (a_3b_7 - a_3b_7) + (a_4b_2 - a_4b_2) + (a_7b_3 - a_7b_3) + (a_6b_8 - a_6b_8) + (a_8b_6 - a_8b_6) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

También sabemos que

$$Tr(AB - BA) = a + b + c$$

Así

$$a + b + c = 0$$

Por el teorema de **Cayley-Hamilton** tenemos que

$$\chi_{AB-BA}(AB - BA) = O_3$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
(AB - BA)^3 - Tr(AB - BA)(AB - BA)^2 + (ab + bc + ac)(AB - BA) - det(AB - BC)I_3 = O_3 \\
(AB - BA)^3 - Tr(AB - BA)(AB - BA)^2 + (ab + bc + ac)(AB - BA) = O_3 + det(AB - BC)I_3 \\
(AB - BA)^3 - Tr(AB - BA)(AB - BA)^2 + (ab + bc + ac)(AB - BA) = det(AB - BC)I_3
\end{aligned}
$$

Como $Tr(AB - BA) = 0$ entonces

$$(AB - BA)^3 + (ab + bc + ac)(AB - BA) = det(AB - BC)I_3$$

Sacando la traza de ambos lados

$$
\begin{aligned}
Tr((AB - BA)^3 + (ab + bc + ac)(AB - BA)) &= Tr(det(AB - BC)I_3) \\
Tr((AB - BA)^3) + Tr((ab + bc + ac)(AB - BA)) &= Tr(det(AB - BC)I_3) \\
Tr((AB - BA)^3) + Tr((ab + bc + ac)(AB - BA)) &= det(AB - BC)Tr(I_3) \\
Tr((AB - BA)^3) + (ab + bc + ac)Tr(AB - BA) &= det(AB - BC)Tr(I_3) \\
Tr((AB - BA)^3) + (ab + bc + ac)0 &= det(AB - BC)Tr(I_3) \\
Tr((AB - BA)^3) &= det(AB - BC)Tr(I_3) \\
Tr((AB - BA)^3) &= det(AB - BC)(3) \\
Tr((AB - BA)^3) &= 3det(AB - BC) \\
\frac{1}{3}Tr((AB - BA)^3) &= det(AB - BC)
\end{aligned}
$$

$\square$