Fausto David Hernández Jasso
317000928
fausto.david.hernandez.jasso@ciencias.unam.mx

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Demostrar usando los polinomios de Taylor y el residuo que si $f''(a)$ existe, entonces

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Solución

Demostración. Como $f'(a)$ y $f''(a)$ entonces el polinomio de Taylor de grado 2 de la función f en a es:

$$P_{2,a,f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

Sabemos que por definición tenemos que

$$f(x) = P_{2,a,f}(x) + R_{2,a,f}(x)$$

Evaluando en $x = a+h$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= P_{2,a,f}(a+h) + R_{2,a,f}(a+h)\\
&= f(a) + f'(a)(a+h-a) + \frac{1}{2}f''(a)(a+h-a)^2 + R_{2,a,f}(a+h)\\
&= f(a) + f'(a)(h) + \frac{1}{2}f''(a)(h)^2 + R_{2,a,f}(a+h)\\
&= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_{2,a,f}(a+h)
\end{aligned}$$

Evaluando en $x = a-h$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f(a-h) &= P_{2,a,f}(a-h) + R_{2,a,f}(a-h)\\
&= f(a) + f'(a)(-h) + \frac{1}{2}f''(a)(-h)^2 + R_{2,a,f}(a-h)\\
&= f(a) - f'(a)(h) + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_{2,a,f}(a-h)\\
&= f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_{2,a,f}(a-h)
\end{aligned}$$

Calcularemos $f(a+h) + f(a-h)$

$$\begin{aligned}
f(a+h) + f(a-h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_{2,a,f}(a+h) + f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_{2,a,f}(a-h)\\
&= f(a) + f(a) + f'(a)h - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R_{2,a,f}(a+h) + R_{2,a,f}(a-h)\\
&= 2f(a) + f''(a)h^2 + R_{2,a,f}(a+h) + R_{2,a,f}(a-h)
\end{aligned}$$

Calcularemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2f(a)+f''(a)h^2+R_{2,a,f}(a+h)+R_{2,a,f}(a-h)-2f(a)}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2f(a)-2f(a)+f''(a)h^2+R_{2,a,f}(a+h)+R_{2,a,f}(a-h)}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a)h^2+R_{2,a,f}(a+h)+R_{2,a,f}(a-h)}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a)h^2}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a+h)}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a-h)}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}f''(a)+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a+h)}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a-h)}{h^2}\\
&= f''(a)+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a+h)}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a-h)}{h^2}
\end{aligned}$$

Veamos $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{R_{2,a,f}(a+h)}{h^2}$
Haciendo $x=a+h$ lo anterior es equivalente a $h=x-a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(x)}{(x-a)^2}$$

Recordemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{2,a,f}(x)}{(x-a)^2}=0$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a+h)}{h^2}=0$$

Veamos $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{R_{2,a,f}(a-h)}{h^2}$
Haciendo $x=a-h$ lo anterior es equivalente a $h=a-x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(x)}{(a-x)^2}$$

Notemos que $(a-x)^2=a^2-2ax+x^2=(x-a)^2$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(x)}{(a-x)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(x)}{(x-a)^2}$$

Recordemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{2,a,f}(x)}{(x-a)^2}=0$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a-h)}{h^2}=0$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}
f''(a)+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a+h)}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{R_{2,a,f}(a-h)}{h^2} &= f''(a)+0+0\\
&= f''(a)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

□

1.2. Ejercicio 2

Encuentra el valor de e hasta el primer decimal utilizando polinomios de Taylor.

Solución

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = e^x$$

Por definición sabemos que

$$f(x) = P_{n,0,f}(x) + R_{n,0,f}(x)$$

En particular,

$$\begin{aligned} e^1 &= f(1) \\ &= P_{n,0,f}(1) + R_{n,0,f}(1) \end{aligned}$$

Lo que buscamos es que

$$|R_{n,0,f}(x)| < 10^{-1}$$

Buscamos 10^{-1} ya que nos solicitan que sean decimales.
Recordando el polinomio de Taylor de grado n en 0 de e^x tenemos que

$$P_{n,0,f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Es decir el término $k-$ésimo del polinomio de Taylor de grado n en 0 tenemos que

$$\frac{x^k}{k!}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \log x &= \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ e^x &= \log^{-1} x \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$e^1 = \log^{-1} 1$$

Lo que implica que

$$\log e^1 = 1$$

Por la definición de la función $\log x$ tenemos que

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Notemos que

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt \leq 1$$

Ya que si consideramos la partición $\{1, 2\}$ del intervalo $[1, 2]$ y como $\frac{1}{x}$ es una función decreciente tenemos que sí nos tomamos la suma superior correspondiente a la partición tenemos que $\sup\{\frac{1}{x} \mid x \in [1, 2]\} = \frac{1}{1} = 1$ así la suma superior es $(2 - 1)(1) = (1)(1) = 1$ y por propiedades de la integral tenemos que $\int_1^3 \frac{1}{t} dt \leq 2$.
Notemos que

$$2 \leq \int_1^4 \frac{1}{t} dt$$

Ya que si consideramos la partición $P = \{1, 2, 3, 4\}$ del intervalo $[1, 4]$ y como $\frac{1}{x}$ es una función decreciente tenemos que sí nos tomamos la suma inferior correspondiente a la partición tenemos que

$$L\left(\frac{1}{t}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

donde

$$m_i = \text{ínf}\left\{\frac{1}{t} \mid t \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = \frac{1}{x_{i-1}} \; \forall \; i \in \{1, \ldots, 8\}$$

Ya que $\frac{1}{x}$ es decreciente. Consecuentemente

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{t}, P\right) &= (1)1 + (1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{3} + (1)\frac{1}{4} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{25}{12} \approx 2.08 \end{aligned}$$

Así

$$2 \leq \int_1^8 \frac{1}{t} dt$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t} dt \leq& 1 \leq \int_1^4 \frac{1}{t} dt \\ \log 2 \leq& 1 \leq \log 4 \\ e^{\log 2} \leq& e^1 \leq e^{\log 4} \\ 2 \leq& e^1 \leq 4 \end{aligned}$$

Como e^x tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, e^x es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. en particular existe $(e^x)^{(n+1)}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Observamos que $(e^x)^{(k)} = e^x$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Sea $y = 1$ y $a = 0$, tenemos que $y \neq a$ Por lo desarrollado anteriormente

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(t)| &= |e^t| \\ &= e^t \\ &\leq e^1 \\ &= e \\ &\leq 4 \end{aligned}$$

para toda $t \in [0, 1]$. Por un corolario del teorema de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned} |R_{n,0,e^x}(x)| &\leq \frac{4}{(n+1)!}|1-0|^{n+1} \\ &\leq \frac{4}{(n+1)!}|1|^{n+1} \\ &\leq \frac{4}{(n+1)!}1^{n+1} \\ &\leq \frac{4}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Entonces lo que buscamos es

$$\frac{4}{(n+1)!} < 10^{-1}$$

La n que nos hace válida la desigualdad es $n = 4$, ya que

$$\frac{4}{(5+1)!} = \frac{4}{(6)!} = \frac{1}{30} \leq \frac{1}{10}$$

Por lo tanto

$$e^1 = e \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{1^k}{k!} = 2.708\overline{3}$$

1.3. Ejercicio 3

Demuestra que el polinomio de Taylor de $f(x) = \cos x^2$ de grado $4n$ en 0 es

$$1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

Solución

Demostración. Primero calcularemos el polinomio de Taylor de $\cos x$. Por definición tenemos que el polinomio de Taylor de grado n de una función f, en 0 es

$$P_{n,0,f} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

donde $f^{(k)}$ es la $k-$ésima derivada de la función f. En éste caso $f(x) = \cos x$, como $\cos x$ tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\cos x$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.
Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x \\
f''(x) &= -\cos x \\
f^{(3)}(x) &= \sin x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \\
f^{(5)}(x) &= -\sin x \\
f^{(6)}(x) &= -\cos x \\
f^{(7)}(x) &= \sin x \\
f^{(8)}(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

En general tenemos que

$$\begin{aligned}
f^{(4n)}(x) &= \cos x \\
f^{(4n+1)}(x) &= -\sin x \\
f^{(4n+2)}(x) &= -\cos x \\
f^{(4n+3)}(x) &= \sin x
\end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
f^{(4n)}(0) &= 1 \\
f^{(4n+1)}(0) &= 0 \\
f^{(4n+2)}(0) &= -1 \\
f^{(4n+3)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Consecuentemente todos los términos impares nos van a quedar siempre 0. Para facilitar el desarrollo del polinomio de Taylor eligiremos un grado par que son los términos que no son 0. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P_{2n,0,\cos x} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= f(0) + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} \\
&= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!)} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!)}
\end{aligned}$$

Por definición tenemos que

$$\cos_x = P_{2n,0,\cos x}(x) + R_{2n,0,\cos x}(x)$$

Sabemos que si f es una función tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen. Si P es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n, igual a f hasta el orden n en a, entonces $P = P_{n,a,f}$. Como $\cos x$ tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\cos x$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, entonces $\cos^{(0)} x, \cos^{(1)} x, \ldots, \cos^{(2n)} x$ existen, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - P_{2n,0,\cos x}(x)}{x^{2n}} &= \lim_{x\to 0} \frac{R_{2n,0,\cos x}(x)}{x^{2n}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ya que $P_{2n,0,\cos x}$ es el polinomio de Taylor de $\cos x$.
Lo anterior implica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{2n,0,\cos x}(x^2)}{(x^2)^{2n}} = 0$$

Esto por definición es

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2) - P_{2n,0,\cos x}(x^2)}{x^{4n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - P_{2n,0,\cos x}(x^2)}{x^{4n}}$$

Sabemos que si f es una función tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen. Si P es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n, igual a f hasta el orden n en a, entonces $P = P_{n,a,f}$. Por lo tanto

$$P_{4n,0,\cos x^2}(x) = P_{2n,0,\cos x}(x^2)$$

Consecuentemente

$$P_{4n,0,\cos x^2}(x) == 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n!)}$$

$\square$

1.4. Ejercicio 5

Aproximar los siguientes números con sumas cuyo error sea menor al indicado

- $\sin 1$, error $< 10^{-9}$.
- e^2, error $< 10^{-5}$

Solución

Veamos $\sin 1$.
Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \sin x$$

Por definición sabemos que

$$f(x) = P_{n,0,f}(x) + R_{n,0,f}(x)$$

En particular,

$$\begin{aligned} \sin 1 &= f(1) \\ &= P_{n,0,f}(1) + R_{n,0,f}(1) \end{aligned}$$

Lo que buscamos es que

$$|R_{n,0,f}(x)| < 10^{-9}$$

Recordando el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ en 0 tenemos que

$$P_{2n+1,0,f}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Es decir el término $k-$ésimo del polinomio de Taylor de grado $2n+1$ en 0 tenemos que

$$\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Como $\sin x$ tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\sin x$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. en particular existe $\sin^{(n+1)} x$, además sea $y = 1$ y $a = 0$, se tiene que $y \geq a$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \\ f^{(6)}(x) &= -\sin x \\ f^{(7)}(x) &= -\cos x \\ f^{(8)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

En general tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= \sin x \\ f^{(4n+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4n+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4n+3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

Así tenemos que $|f^{(n+1)}(t)| \leq 1$ para toda $t \in [a, y]$ por un corolario del Teorema de Taylor tenemos que

$$|R_{n,0,f}(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|1|^n = \frac{1}{(n+1)!}$$

para cada $t \in [a, y]$.
Entonces lo que buscamos es que
$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-9}$$
La n que cumple con lo solicitado es $n = 11$, ya que
$$\frac{1}{(11+1)!} = \frac{1}{(12)!} = 1.6059 \times 10^{-10} < 10^{-9}$$
Así
$$\sin 1 \approx P_{11,0,f}(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} = 0.841470984808$$
Veamos e^2.
Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = e^x$$
Por definición sabemos que
$$f(x) = P_{n,0,f}(x) + R_{n,0,f}(x)$$
En particular,
$$\begin{aligned} e^2 &= f(2) \\ &= P_{n,0,f}(2) + R_{n,0,f}(2) \end{aligned}$$
Lo que buscamos es que
$$|R_{n,0,f}(x)| < 10^{-5}$$
Recordando el polinomio de Taylor de grado n en 0 de e^x tenemos que
$$P_{n,0,f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
Es decir el término $k-$ésimo del polinomio de Taylor de grado n en 0 tenemos que
$$\frac{x^k}{k!}$$
Recordemos que
$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$
$$e^x = \log^{-1} x$$
Así tenemos que
$$e^2 = \log^{-1} 2$$
Lo que implica que
$$\log e^2 = 2$$
Por la definición de la función $\log x$ tenemos que
$$\int_1^{e^2} \frac{1}{t} dt = 2$$
Notemos que
$$\int_1^3 \frac{1}{t} dt \leq 2$$
Ya que si consideramos la partición $\{1, 3\}$ del intervalo $[1, 3]$ y como $\frac{1}{x}$ es una función decreciente tenemos que sí nos tomamos la suma superior correspondiente a la partición tenemos que $\sup\{\frac{1}{x} \mid x \in [1, 3]\} = \frac{1}{1} = 1$ así la suma superior es $(3-1)(1) = (2)(1) = 2$ y por propiedades de la integral tenemos que $\int_1^3 \frac{1}{t} dt \leq 2$. Notemos que
$$2 \leq \int_1^8 \frac{1}{t} dt$$

Ya que si consideramos la partición $P = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ del intervalo $[1,8]$ y como $\frac{1}{x}$ es una función decreciente tenemos que sí nos tomamos la suma inferior correspondiente a la partición tenemos que

$$L\left(\frac{1}{t},P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

donde

$$m_i = \text{ínf}\left\{\frac{1}{t} \mid t \in [x_{i-1},x_i]\right\} = \frac{1}{x_{i-1}} \ \forall\, i \in \{1,\dots,8\}$$

Ya que $\frac{1}{x}$ es decreciente. Consecuentemente

$$\begin{aligned}
L\left(\frac{1}{t},P\right) &= (1)1 + (1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{3} + (1)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{5} + (1)\frac{1}{6} + (1)\frac{1}{7} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \\
&= \frac{363}{140} \approx 2.59
\end{aligned}$$

Así

$$2 \leq \int_1^8 \frac{1}{t}dt$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{t}dt \leq &2 \leq \int_1^8 \frac{1}{t}dt \\
\log 3 \leq &2 \leq \log 8 \\
e^{\log 3} \leq &e^2 \leq e^{\log 8} \\
3 \leq &e^2 \leq 8
\end{aligned}$$

Como e^x tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, e^x es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. en particular existe $(e^x)^{(n+1)}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Observamos que $(e^x)^{(k)} = e^x$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Sea $y = 2$ y $a = 0$, tenemos que $y \neq a$ Por lo desarrollado anteriormente

$$\begin{aligned}
|f^{(n+1)}(t)| &= |e^t| \\
&= e^t \\
&\leq e^2 \\
&\leq 8
\end{aligned}$$

para toda $t \in [0,2]$.
Por un corolario del teorema de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned}
|R_{n,0,e^2}(x)| &\leq \frac{8}{(n+1)!}|2-0|^{n+1} \\
&\leq \frac{8}{(n+1)!}|2|^{n+1} \\
&\leq \frac{8}{(n+1)!}2^{n+1} \\
&\leq \frac{2^3}{(n+1)!}2^{n+1} \\
&\leq \frac{2^3 2^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{2^{n+4}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Entonces lo que buscamos es

$$\frac{2^{n+4}}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

La n que nos hace válida la desigualdad es $n = 13$, ya que

$$\begin{aligned}\frac{2^{13+4}}{(13+1)!} &= \frac{2^{17}}{(14)!} \\ &\approx 1.504 \times 10^{-6} \\ &< 10^{-5}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$e^2 \approx \sum_{k=0}^{13} \frac{2^k}{k!} = 7.38905$$