Fausto David Hernández Jasso
317000928
fausto.david.hernandez.jasso@ciencias.unam.mx

Cálculo Diferencial e Integral II
Fundamentos de la Integral de Riemann

2024-02-18

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente. Entonces

$$-\text{ínf}\,(-A) = \sup(A)$$

Solución

Demostración. Por definición sabemos que $A \neq \varnothing$ y además existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Sabemos que por definición de **supremo** se cumple que $\sup(A) \leq M$. También sabemos que

$$\begin{aligned} a &\leq M && \forall a \in A \\ (-1)\cdot a &\geq (-1)\cdot M && \forall a \in A \\ -a &\geq -M && \forall a \in A \end{aligned}$$

Recordemos la definición de $-A$

$$-A = \{-a \,:\, a \in A\}$$

De la definición de $-A$, sabemos que $-A \neq \varnothing$. Notemos que $-M$ es una cota inferior del conjunto $-A$ consecuentemente $-A$ está cotado inferiormente. Sea β una cota superior de A entonces por definición de $\sup(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \beta \geq \sup(A) &\geq a && \forall a \in A \\ (-1)\cdot\beta \leq (-1)\cdot\sup(A) &\leq (-1)\cdot a && \forall a \in A \\ -\beta \leq -\sup(A) &\leq -a && \forall a \in A \end{aligned}$$

Lo anterior pasa para cualquier cota superior β y por ende para cualquier cota inferior $-\beta$.
Así notemos que $-\sup(A)$ es una cota inferior de $-A$ y además es la cota inferior más grande, es decir

$$\begin{aligned} \text{ínf}\,(-A) &= -\sup(A) \\ -\text{ínf}\,(-A) &= \sup(A) \end{aligned}$$

$\square$