

## 1. Ejercicios

### 1.1. Ejercicio 1

Derive cada una de las siguientes funciones

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{e^{e^x}} \\f(x) &= \log \left( 1 + \log \left( 1 + \log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \\f(x) &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} \\f(x) &= e^{\left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)} \\f(x) &= x^x\end{aligned}$$

#### Solución

Veamos  $f(x) = e^{e^{e^x}}$ .

Sea  $h(x) = e^x$ , notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= (h \circ h)(x) \\&= h(h(x)) \\&= e^{e^x}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}h'_1(x) &= ((h \circ h)(x))' \\&= h'(h(x)) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

Sabemos que  $h'(x) = e^x$ , entonces

$$\begin{aligned}h'_1(x) &= h'(e^x) \cdot e^x \\&= e^{e^x} \cdot e^x\end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}h_2(x) &= (h \circ h_1)(x) \\&= h(h_1(x)) \\&= e^{e^{e^x}}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}h'_2(x) &= ((h \circ h_1)(x))' \\&= h'(h_1(x)) \cdot h'_1(x)\end{aligned}$$

Sabemos que  $h'(x) = e^x$  y  $h'_1(x) = e^{e^x} \cdot e^x$ , entonces

$$\begin{aligned}h'_2(x) &= h'(e^{e^x}) \cdot e^{e^x} \cdot e^x \\&= e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x\end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}h_3(x) &= (h \circ h_2)(x) \\&= h(h_2(x)) \\&= e^{e^{e^{e^x}}}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h'_3(x) &= ((h \circ h_2)(x))' \\ &= h'(h_2(x)) \cdot h'_2(x) \end{aligned}$$

Sabemos que  $h'(x) = e^x$  y  $h'_1(x) = e^{e^x} \cdot e^x$ , entonces

$$\begin{aligned} h'_3(x) &= h'(e^{e^{e^x}}) \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x \\ &= e^{e^{e^{e^x}}} \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\boxed{\left(e^{e^{e^{e^x}}}\right)' = e^{e^{e^{e^x}}} \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x}}$$

Veamos  $f(x) = \log\left(1 + \log\left(1 + \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right)$   
Sea  $g(x) = e^{1+x}$ , notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (g \circ g)(x) \\ &= g(g(x)) \\ &= e^{1+e^{1+x}} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} g'_1(x) &= ((g \circ g)(x))' \\ &= g'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que  $g'(x) = e^{1+x}$ , entonces

$$\begin{aligned} g'_1(x) &= g'(e^{1+x}) \cdot e^{1+x} \\ &= e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \end{aligned}$$

Sea  $h(x) = \log(1+x)$ , notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (h \circ g_1)(x) \\ &= h(g_1(x)) \\ &= \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h'_1(x) &= ((h \circ g_1)(x))' \\ &= h'(g_1(x)) \cdot g'_1(x) \end{aligned}$$

Sabemos que  $h'(x) = \frac{1}{1+x}$  y  $g'_1(x) = e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}$ , entonces

$$\begin{aligned} h'_1(x) &= h'(e^{1+e^{1+x}}) \cdot e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \\ &= \left(\frac{1}{1 + e^{1+e^{1+x}}}\right) \cdot e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1 + e^{1+e^{1+x}}} \end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} h_2(x) &= (h \circ h_1)(x) \\ &= h(h_1(x)) \\ &= \log\left(1 + \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right)\right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h'_2(x) &= ((h \circ h_1)(x))' \\ &= h'(h_1(x)) \cdot h'_1(x) \end{aligned}$$

Sabemos que  $h'(x) = \frac{1}{1+x}$  y  $h'_1(x) = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}}$ , entonces

$$\begin{aligned} h'_2(x) &= h' \left( \log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}} \\ &= \frac{1}{1+\log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right)} \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left( 1 + \log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right)} \end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} h_3(x) &= (h \circ h_2)(x) \\ &= h(h_2(x)) \\ &= \log \left( 1 + \log \left( 1 + \log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h'_3(x) &= ((h \circ h_2)(x))' \\ &= h'(h_2(x)) \cdot h'_2(x) \end{aligned}$$

Sabemos que  $h'(x) = \frac{1}{1+x}$  y  $h'_2(x) = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})}$ , entonces

$$\begin{aligned} h'_3(x) &= h' \left( \log \left( 1 + \log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})} \\ &= \frac{1}{1+\log \left( 1 + \log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right)} \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}})))(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left( \log \left( 1 + \log \left( 1 + \log \left( 1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \right)' = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}})))(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})}$$

Veamos  $f(x) = (\sin x)^{\sin(\sin x)}$

Por las propiedades de la función exponencial y de la función logaritmo tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \right)' \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot (\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x))' \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot ((\sin(\sin x))' \cdot \log(\sin x) + (\log(\sin x))' \cdot \sin(\sin x)) \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot \left( \cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin(\sin x) \right) \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot (\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \cot x \cdot \sin(\sin x)) \\ &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} (\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \cot x \cdot \sin(\sin x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left( (\sin x)^{\sin(\sin x)} \right)' = (\sin x)^{\sin(\sin x)} (\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \cot x \cdot \sin(\sin x))$$

## 1.2. Ejercicio 2

- Compruebe que  $f'(x) = f(x) (\log(f(x)))'$ , si  $f > 0$  y derivable
- Halle  $f'(x)$  para cada una de las siguientes funciones

$$f(x) = (1+x) \left(1 + e^{x^2}\right)$$

$$f(x) = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}} x^2}{(1-x)(3+x)^{23}}$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}$$

**Solución**

## 1.3. Ejercicio 3

Hallar los siguientes límites mediante la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2}$$

**Solución**