Fausto David Hernández Jasso
317000928
fausto.david.hernandez.jasso@ciencias.unam.mx

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente. Entonces

$$-\inf(-A) = \sup(A)$$

Solución

Demostración. Por definición sabemos que $A \neq \varnothing$ y además existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Sabemos que por definición de **supremo** se cumple que $\sup(A) \leq M$. También sabemos que

$$\begin{aligned} a &\leq M && \forall a \in A \\ (-1) \cdot a &\geq (-1) \cdot M && \forall a \in A \\ -a &\geq -M && \forall a \in A \end{aligned}$$

Recordemos la definición de $-A$

$$-A = \{-a \ : \ a \in A\}$$

De la definición de $-A$, sabemos que $-A \neq \varnothing$. Notemos que $-M$ es una cota inferior del conjunto $-A$ consecuentemente $-A$ está cotado inferiormente. Sea β una cota superior de A entonces por definición de $\sup(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \beta \geq \sup(A) &\geq a && \forall a \in A \\ (-1) \cdot \beta \leq (-1) \cdot \sup(A) &\leq (-1) \cdot a && \forall a \in A \\ -\beta \leq -\sup(A) &\leq -a && \forall a \in A \end{aligned}$$

Lo anterior pasa para cualquier cota superior β y por ende para cualquier cota inferior $-\beta$.
Así notemos que $-\sup(A)$ es una cota inferior de $-A$ y además es la cota inferior más grande, es decir

$$\begin{aligned} \inf(-A) &= -\sup(A) \\ -\inf(-A) &= \sup(A) \end{aligned}$$

$\square$

1.2. Ejercicio 2

Suponga que f es creciente. Demuestre que

$$\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f$$

Solución

Del problema sabemos lo siguiente

- f es biyectiva en $[a, b]$ ya que f^{-1} existe y es su inversa.
- Como f es creciente en $[a, b]$ entonces f^{-1} también es creciente en $[f(a), f(b)]$.
- Como f es creciente en $[a, b]$ entonces f es integrable $[a, b]$.
- Como f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$ entonces f^{-1} es integrable $[f(a), f(b)]$.

Demostración. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sea $P' = \{f^{-1}(t_0), \ldots, f^{-1}(t_n)\}$ una partición del intervalo $[f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$. Mostraremos que

$$L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$$
$$U\left(f^{-1}, P\right) + L(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$$

Seguiremos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
m_i &= \text{ínf}\left(\{f(x) \mid x \in [f^{-1}(t_{i-1}), f^{-1}(t_i)]\}\right) \\
M_i &= \sup\left(\{f(x) \mid x \in [f^{-1}(t_{i-1}), f^{-1}(t_i)]\}\right) \\
m_i' &= \text{ínf}\left(\{f^{-1}(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}\right) \\
M_i' &= \sup\left(\{f^{-1}(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}\right)
\end{aligned}$$

Veamos $L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$

$$L\left(f^{-1}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i - t_{i-1})$$

Como f^{-1} también es creciente tenemos que $m_i' = f^{-1}(t_{i-1})$. consecuentemente

$$\begin{aligned}
L\left(f^{-1}, P\right) &= \sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

$$U(f, P') = \sum_{i=1}^{n} M_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1}))$$

Como f es creciente entonces tenemos que $M_i = f\left(f^{-1}(t_i)\right) = t_i$

$$\begin{aligned}
U(f, P') &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} t_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') &= \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} t_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1})) \\
&= \left(f^{-1}(t_0)\, t_1 - f^{-1}(t_0)\, t_0\right) + \left(f^{-1}(t_1)\, t_2 - f^{-1}(t_1)\, t_1\right) + \ldots + \left(f^{-1}(t_{n-1})\, t_n - f^{-1}(t_{n-1})\, t_{n-1}\right) \\
&+ \left(f^{-1}(t_1)\, t_1 - f^{-1}(t_0)\, t_1\right) + \left(f^{-1}(t_2)\, t_2 - f^{-1}(t_1)\, t_2\right) + \ldots + \left(f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_{n-1})\, t_n\right) \\
&= \left(f^{-1}(t_0)\, t_1 - f^{-1}(t_0)\, t_1\right) + \left(f^{-1}(t_1)\, t_1 - f^{-1}(t_1)\, t_1\right) + \left(f^{-1}(t_1)\, t_2 - f^{-1}(t_1)\, t_2\right) \\
&+ \left(f^{-1}(t_2)\, t_2 - f^{-1}(t_2)\, t_2\right) + \ldots + \left(f^{-1}(t_{n-1})\, t_n - f^{-1}(t_{n-1})\, t_n\right) \\
&+ \left(f^{-1}(t_{n-1})\, t_{n-1} - f^{-1}(t_{n-1})\, t_{n-1}\right) + \left(f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_0)\, t_0\right) \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + \left(f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_0)\, t_0\right) \\
&= f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_0)\, t_0
\end{aligned}$$

Recordando que $t_0 = a$ y $t_n = b$ entonces

$$f^{-1}(b)\, b - f^{-1}(a)\, a = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$$

Así

$$L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$$

Veamos $U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)$

$$U\left(f^{-1},P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i'(t_i-t_{i-1})$$

Como f^{-1} también es creciente tenemos que $M_i'=f^{-1}\left(t_i\right)$. consecuentemente

$$\begin{aligned}U\left(f^{-1},P\right)&=\sum_{i=1}^{n}M_i'(t_i-t_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}f^{-1}\left(t_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)\end{aligned}$$

$$L\left(f,P'\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))$$

Como f es creciente entonces tenemos que $m_i=f\left(f^{-1}\left(t_{i-1}\right)\right)=t_{i-1}$

$$\begin{aligned}L\left(f,P'\right)&=\sum_{i=1}^{n}m_i(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))\\&=\sum_{i=1}^{n}t_{i-1}(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)&=\sum_{i=1}^{n}f^{-1}\left(t_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)+\sum_{i=1}^{n}t_{i-1}(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))\\&=(f^{-1}\left(t_1\right)t_1-f^{-1}\left(t_1\right)t_0)+\left(f^{-1}\left(t_2\right)t_2-f^{-1}\left(t_2\right)t_1\right)+\ldots+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_n\right)t_{n-1}\right)\\&\quad++\left(f^{-1}\left(t_1\right)t_1-f^{-1}\left(t_0\right)t_1\right)+\left(f^{-1}\left(t_2\right)t_2-f^{-1}\left(t_1\right)t_2\right)+\ldots+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_n\right)\\&=\left(f^{-1}\left(t_0\right)t_1-f^{-1}\left(t_0\right)t_1\right)+\left(f^{-1}\left(t_1\right)t_1-f^{-1}\left(t_1\right)t_1\right)+\left(f^{-1}\left(t_1\right)t_2-f^{-1}\left(t_1\right)t_2\right)\\&\quad+\left(f^{-1}\left(t_2\right)t_2-f^{-1}\left(t_2\right)t_2\right)+\ldots+\left(f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_n-f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_n\right)\\&\quad+\left(f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_{n-1}-f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_{n-1}\right)+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_0\right)t_0\right)\\&=0+0+0+0+\ldots+0+0+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_0\right)t_0\right)\\&=f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_0\right)t_0\end{aligned}$$

Recordando que $t_0=a$ y $t_n=b$ entonces

$$f^{-1}\left(b\right)b-f^{-1}\left(a\right)a=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)$$

Así

$$U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)$$

$$\begin{aligned}L\left(f^{-1},P\right)+U\left(f,P'\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)\\U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)\\&\Rightarrow\\L\left(f^{-1},P\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)-U\left(f,P'\right)\\U\left(f^{-1},P\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)-L\left(f,P'\right)\end{aligned}$$

Como f^{-1} es integrable entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= \sup\left(L\left(f^{-1}, P\right)\right) \\
&= \sup\left(bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - U(f, P')\right) \\
&= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) + \sup\left(-U(f, P')\right) \\
&= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \text{ínf}\left(U(f, P')\right) \\
&= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f
\end{aligned}$$

□