

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente. Entonces

$$-\inf(-A) = \sup(A)$$

Solución

Demostración. Por definición sabemos que $A \neq \emptyset$ y además existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Sabemos que por definición de **supremo** se cumple que $\sup(A) \leq M$. También sabemos que

$$\begin{array}{ll} a \leq M & \forall a \in A \\ (-1) \cdot a \geq (-1) \cdot M & \forall a \in A \\ -a \geq -M & \forall a \in A \end{array}$$

Recordemos la definición de $-A$

$$-A = \{-a : a \in A\}$$

De la definición de $-A$, sabemos que $-A \neq \emptyset$. Notemos que $-M$ es una cota inferior del conjunto $-A$ consecuentemente $-A$ está cotado inferiormente. Sea β una cota superior de A entonces por definición de $\sup(A)$ tenemos que

$$\begin{array}{ll} \beta \geq \sup(A) \geq a & \forall a \in A \\ (-1) \cdot \beta \leq (-1) \cdot \sup(A) \leq (-1) \cdot a & \forall a \in A \\ -\beta \leq -\sup(A) \leq -a & \forall a \in A \end{array}$$

Lo anterior pasa para cualquier cota superior β y por ende a cualquier cota inferior $-\beta$.

Así notemos que $-\sup(A)$ es una cota inferior de $-A$ y además es la cota inferior más grande, es decir

$$\begin{array}{l} \inf(-A) = -\sup(A) \\ -\inf(-A) = \sup(A) \end{array}$$

□