

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Derive cada una de las siguientes funciones

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{e^{e^x}} \\f(x) &= \log \left(1 + \log \left(1 + \log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \\f(x) &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} \\f(x) &= e^{\left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)} \\f(x) &= x^x\end{aligned}$$

Solución

Veamos $f(x) = e^{e^{e^x}}$.

Sea $h(x) = e^x$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= (h \circ h)(x) \\&= h(h(x)) \\&= e^{e^x}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}h'_1(x) &= ((h \circ h)(x))' \\&= h'(h(x)) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$, entonces

$$\begin{aligned}h'_1(x) &= h'(e^x) \cdot e^x \\&= e^{e^x} \cdot e^x\end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}h_2(x) &= (h \circ h_1)(x) \\&= h(h_1(x)) \\&= e^{e^{e^x}}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}h'_2(x) &= ((h \circ h_1)(x))' \\&= h'(h_1(x)) \cdot h'_1(x)\end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$ y $h'_1(x) = e^{e^x} \cdot e^x$, entonces

$$\begin{aligned}h'_2(x) &= h'(e^{e^x}) \cdot e^{e^x} \cdot e^x \\&= e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x\end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}h_3(x) &= (h \circ h_2)(x) \\&= h(h_2(x)) \\&= e^{e^{e^{e^x}}}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h'_3(x) &= ((h \circ h_2)(x))' \\ &= h'(h_2(x)) \cdot h'_2(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$ y $h'_1(x) = e^{e^x} \cdot e^x$, entonces

$$\begin{aligned} h'_3(x) &= h'(e^{e^{e^x}}) \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x \\ &= e^{e^{e^{e^x}}} \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\boxed{\left(e^{e^{e^{e^x}}}\right)' = e^{e^{e^{e^x}}} \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x}}$$

Veamos $f(x) = \log\left(1 + \log\left(1 + \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right)$

Sea $g(x) = e^{1+x}$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (g \circ g)(x) \\ &= g(g(x)) \\ &= e^{1+e^{1+x}} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} g'_1(x) &= ((g \circ g)(x))' \\ &= g'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $g'(x) = e^{1+x}$, entonces

$$\begin{aligned} g'_1(x) &= g'(e^{1+x}) \cdot e^{1+x} \\ &= e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \end{aligned}$$

Sea $h(x) = \log(1+x)$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (h \circ g_1)(x) \\ &= h(g_1(x)) \\ &= \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h'_1(x) &= ((h \circ g_1)(x))' \\ &= h'(g_1(x)) \cdot g'_1(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ y $g'_1(x) = e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}$, entonces

$$\begin{aligned} h'_1(x) &= h'(e^{1+e^{1+x}}) \cdot e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \\ &= \left(\frac{1}{1 + e^{1+e^{1+x}}}\right) \cdot e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1 + e^{1+e^{1+x}}} \end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} h_2(x) &= (h \circ h_1)(x) \\ &= h(h_1(x)) \\ &= \log\left(1 + \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right)\right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= ((h \circ h_1)(x))' \\ &= h'(h_1(x)) \cdot h_1'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ y $h_1'(x) = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}}$, entonces

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= h' \left(\log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}} \\ &= \frac{1}{1+\log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right)} \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left(1 + \log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right)} \end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} h_3(x) &= (h \circ h_2)(x) \\ &= h(h_2(x)) \\ &= \log \left(1 + \log \left(1 + \log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= ((h \circ h_2)(x))' \\ &= h'(h_2(x)) \cdot h_2'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ y $h_2'(x) = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})}$, entonces

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= h' \left(\log \left(1 + \log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})} \\ &= \frac{1}{1+\log \left(1 + \log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right)} \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}})))(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\left(\log \left(1 + \log \left(1 + \log \left(1 + e^{1+e^{1+x}} \right) \right) \right) \right)' = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{(1+\log(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}})))(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}}))(1+e^{1+e^{1+x}})}}$$

Veamos $f(x) = (\sin x)^{\sin(\sin x)}$

Por las propiedades de la función exponencial y de la función logaritmo tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \right)' \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot (\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x))' \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot ((\sin(\sin x))' \cdot \log(\sin x) + (\log(\sin x))' \cdot \sin(\sin x)) \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot \left(\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin(\sin x) \right) \\ &= e^{\sin(\sin x) \cdot \log(\sin x)} \cdot (\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \cot x \cdot \sin(\sin x)) \\ &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} (\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \cot x \cdot \sin(\sin x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left((\sin x)^{\sin(\sin x)} \right)' = (\sin x)^{\sin(\sin x)} (\cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot \log(\sin x) + \cot x \cdot \sin(\sin x))$$

Veamos $f(x) = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)}$

Sea $h(x) = e^x$ y $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (h \circ g)(x) &= h(g(x)) \\ &= h\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right) \\ &= e^{\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= (h(g(x)))' \\ &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$ y $g'(x) = e^{-x^2}$ ya que e^{-t^2} es continua en todo \mathbb{R} y por el **Primer Teorema Fundamental** tenemos que $\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)' = e^{-x^2}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right) \cdot e^{-x^2} \\ &= e^{\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)} \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(e^{\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)} \right)' = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)} \cdot e^{-x^2}$$

Veamos $f(x) = x^x$ Por las propiedades de la función exponencial y de la función logaritmo tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} \\ &= e^{x \log x} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x \log x})' \\ &= e^{x \log x} (x \log x)' \\ &= e^{x \log x} (x \cdot (\log x)' + \log x \cdot x') \\ &= e^{x \log x} \left(x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \log x \cdot 1 \right) \\ &= e^{x \log x} (1 + \log x) \\ &= x^x (1 + \log x) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(x^x)' = x^x (1 + \log x)$$

1.2. Ejercicio 2

1. Compruebe que $f'(x) = f(x) (\log(f(x)))'$, si $f > 0$ y derivable
2. Halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones

$$f(x) = (1+x) (1+e^{x^2})$$

$$f(x) = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}} x^2}{(1-x)(3+x)^{2^3}}$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}$$

Solución

Veamos (1)

Sabemos que $f(x) > 0 \forall x \in D_f$ entonces $\log f(x)$ está bien definido, también tenemos por hipótesis que $f'(x)$ existe, también sabemos que $\log x$ es derivable así $\log(f(x))$ es derivable. Consecuentemente:

$$\begin{aligned} (\log(f(x)))' &= \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

Despejando $f'(x)$ tenemos que

$$f'(x) = (\log(f(x)))' \cdot f(x)$$

Veamos (2)

Veamos $f(x) = (1+x) (1+e^{x^2})$.

Obteniendo log de ambos lados

$$\begin{aligned} \log(f(x)) &= \log((1+x) (1+e^{x^2})) \\ &= \log(1+x) + \log(1+e^{x^2}) \end{aligned}$$

Derivando de ambos lados

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{2x \cdot e^{x^2}}{1+e^{x^2}} \end{aligned}$$

Los anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x \cdot e^{x^2}}{1+e^{x^2}} \right) \\ f'(x) &= (1+x) (1+e^{x^2}) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x \cdot e^{x^2}}{1+e^{x^2}} \right) \end{aligned}$$

Veamos $f(x) = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}} x^2}{(1-x)(3+x)^8} = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}} x^2}{(1-x)(3+x)^8}$

Obteniendo log de ambos lados

$$\begin{aligned}\log(f(x)) &= \log\left(\frac{(3-x)^{\frac{1}{3}} x^2}{(1-x)(3+x)^8}\right) \\ &= \log\left((3-x)^{\frac{1}{3}} x^2\right) - \log((1-x)(3+x)^8) \\ &= \log\left((3-x)^{\frac{1}{3}}\right) + \log(x^2) - (\log(1-x) + \log((3+x)^8)) \\ &= \frac{1}{3} \log(3-x) + 2 \log(x) - (\log(1-x) + 8 \log(3+x)) \\ &= \frac{1}{3} \log(3-x) + 2 \log(x) - \log(1-x) - 8 \log(3+x)\end{aligned}$$

Derivando de ambos lados

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3-x}\right) + 2 \left(\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{1-x}\right) - 8 \left(\frac{1}{3+x}\right) \\ &= -\frac{1}{3(3-x)} + \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{8}{3+x}\end{aligned}$$

Lo anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}f'(x) &= f(x) \left(-\frac{1}{3(3-x)} + \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{8}{3+x}\right) \\ f'(x) &= \left(\frac{(3-x)^{\frac{1}{3}} x^2}{(1-x)(3+x)^8}\right) \left(-\frac{1}{3(3-x)} + \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{8}{3+x}\right)\end{aligned}$$

Veamos $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}$

Obteniendo log de ambos lados

$$\begin{aligned}\log(f(x)) &= \log\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}\right) \\ &= \log(e^x - e^{-x}) - \log(e^{2x}(1+x^3)) \\ &= \log(e^x - e^{-x}) - (\log(e^{2x}) + \log(1+x^3)) \\ &= \log(e^x - e^{-x}) - \log(e^{2x}) - \log(1+x^3) \\ &= \log(e^x - e^{-x}) - 2x - \log(1+x^3)\end{aligned}$$

Derivando de ambos lados

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \left(\frac{1}{e^x - e^{-x}}\right) (e^x + e^{-x}) - 2 - \left(\frac{1}{1+x^3}\right) (3x^2) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 2 - \frac{3x^2}{1+x^3}\end{aligned}$$

Lo anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}f'(x) &= f(x) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 2 - \frac{3x^2}{1+x^3}\right) \\ f'(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}\right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 2 - \frac{3x^2}{1+x^3}\right)\end{aligned}$$

1.3. Ejercicio 3

Hallar los siguientes límites mediante la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2}$$

Solución