Fausto David Hernández Jasso
317000928
fausto.david.hernandez.jasso@ciencias.unam.mx

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente. Entonces

$$-\inf(-A) = \sup(A)$$

Solución

Demostración. Por definición sabemos que $A \neq \varnothing$ y además existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Sabemos que por definición de **supremo** se cumple que $\sup(A) \leq M$. También sabemos que

$$\begin{aligned} a &\leq M && \forall a \in A \\ (-1)\cdot a &\geq (-1)\cdot M && \forall a \in A \\ -a &\geq -M && \forall a \in A \end{aligned}$$

Recordemos la definición de $-A$

$$-A = \{-a \ : \ a \in A\}$$

De la definición de $-A$, sabemos que $-A \neq \varnothing$. Notemos que $-M$ es una cota inferior del conjunto $-A$ consecuentemente $-A$ está cotado inferiormente. Sea β una cota superior de A entonces por definición de $\sup(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \beta \geq \sup(A) &\geq a && \forall a \in A \\ (-1)\cdot\beta \leq (-1)\cdot\sup(A) &\leq (-1)\cdot a && \forall a \in A \\ -\beta \leq -\sup(A) &\leq -a && \forall a \in A \end{aligned}$$

Lo anterior pasa para cualquier cota superior β y por ende para cualquier cota inferior $-\beta$.
Así notemos que $-\sup(A)$ es una cota inferior de $-A$ y además es la cota inferior más grande, es decir

$$\begin{aligned} \inf(-A) &= -\sup(A) \\ -\inf(-A) &= \sup(A) \end{aligned}$$

$\square$

1.2. Ejercicio 2

Suponga que f es creciente. Demuestre que

$$\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f$$

Solución

Del problema sabemos lo siguiente

- f es biyectiva en $[a,b]$ ya que f^{-1} existe y es su inversa.
- Como f es creciente en $[a,b]$ entonces f^{-1} también es creciente en $[f(a), f(b)]$.
- Como f es creciente en $[a,b]$ entonces f es integrable $[a,b]$.
- Como f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$ entonces f^{-1} es integrable $[f(a), f(b)]$.

Demostración. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y sea $P' = \{f^{-1}(t_0), \ldots, f^{-1}(t_n)\}$ una partición del intervalo $[f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$. Mostraremos que

$$\begin{aligned} L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) \\ U\left(f^{-1}, P\right) + L(f, P') &= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) \end{aligned}$$

Seguiremos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\left(\{f(x) \,|x \in [f^{-1}(t_{i-1}), f^{-1}(t_i)]\ \}\right) \\ M_i &= \sup\left(\{f(x) \,|x \in [f^{-1}(t_{i-1}), f^{-1}(t_i)]\ \}\right) \\ m'_i &= \inf\left(\{f^{-1}(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\ \}\right) \\ M'_i &= \sup\left(\{f^{-1}(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\ \}\right) \end{aligned}$$

Veamos $L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$

$$L\left(f^{-1}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} m'_i(t_i - t_{i-1})$$

Como f^{-1} también es creciente tenemos que $m'_i = f^{-1}(t_{i-1})$. consecuentemente

$$\begin{aligned} L\left(f^{-1}, P\right) &= \sum_{i=1}^{n} m'_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$U(f, P') = \sum_{i=1}^{n} M_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1}))$$

Como f es creciente entonces tenemos que $M_i = f\left(f^{-1}(t_i)\right) = t_i$

$$\begin{aligned} U(f, P') &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') &= \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} t_i(f^{-1}(t_i) - f^{-1}(t_{i-1})) \\ &= \left(f^{-1}(t_0)\, t_1 - f^{-1}(t_0)\, t_0\right) + \left(f^{-1}(t_1)\, t_2 - f^{-1}(t_1)\, t_1\right) + \ldots + \left(f^{-1}(t_{n-1})\, t_n - f^{-1}(t_{n-1})\, t_{n-1}\right) \\ &\quad + \left(f^{-1}(t_1)\, t_1 - f^{-1}(t_0)\, t_1\right) + \left(f^{-1}(t_2)\, t_2 - f^{-1}(t_1)\, t_2\right) + \ldots + \left(f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_{n-1})\, t_n\right) \\ &= \left(f^{-1}(t_0)\, t_1 - f^{-1}(t_0)\, t_1\right) + \left(f^{-1}(t_1)\, t_1 - f^{-1}(t_1)\, t_1\right) + \left(f^{-1}(t_1)\, t_2 - f^{-1}(t_1)\, t_2\right) \\ &\quad + \left(f^{-1}(t_2)\, t_2 - f^{-1}(t_2)\, t_2\right) + \ldots + \left(f^{-1}(t_{n-1})\, t_n - f^{-1}(t_{n-1})\, t_n\right) \\ &\quad + \left(f^{-1}(t_{n-1})\, t_{n-1} - f^{-1}(t_{n-1})\, t_{n-1}\right) + \left(f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_0)\, t_0\right) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + \left(f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_0)\, t_0\right) \\ &= f^{-1}(t_n)\, t_n - f^{-1}(t_0)\, t_0 \end{aligned}$$

Recordando que $t_0 = a$ y $t_n = b$ entonces

$$f^{-1}(b)\, b - f^{-1}(a)\, a = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$$

Así

$$L\left(f^{-1}, P\right) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a)$$

Veamos $U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)$

$$U\left(f^{-1},P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i'(t_i-t_{i-1})$$

Como f^{-1} también es creciente tenemos que $M_i'=f^{-1}\left(t_i\right)$. consecuentemente

$$\begin{aligned}U\left(f^{-1},P\right)&=\sum_{i=1}^{n}M_i'(t_i-t_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}f^{-1}\left(t_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)\end{aligned}$$

$$L\left(f,P'\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))$$

Como f es creciente entonces tenemos que $m_i=f\left(f^{-1}\left(t_{i-1}\right)\right)=t_{i-1}$

$$\begin{aligned}L\left(f,P'\right)&=\sum_{i=1}^{n}m_i(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))\\&=\sum_{i=1}^{n}t_{i-1}(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)&=\sum_{i=1}^{n}f^{-1}\left(t_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)+\sum_{i=1}^{n}t_{i-1}(f^{-1}\left(t_i\right)-f^{-1}\left(t_{i-1}\right))\\&=(f^{-1}\left(t_1\right)t_1-f^{-1}\left(t_1\right)t_0)+\left(f^{-1}\left(t_2\right)t_2-f^{-1}\left(t_2\right)t_1\right)+\ldots+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_n\right)t_{n-1}\right)\\&\quad++\left(f^{-1}\left(t_1\right)t_1-f^{-1}\left(t_0\right)t_1\right)+\left(f^{-1}\left(t_2\right)t_2-f^{-1}\left(t_1\right)t_2\right)+\ldots+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_n\right)\\&=\left(f^{-1}\left(t_0\right)t_1-f^{-1}\left(t_0\right)t_1\right)+\left(f^{-1}\left(t_1\right)t_1-f^{-1}\left(t_1\right)t_1\right)+\left(f^{-1}\left(t_1\right)t_2-f^{-1}\left(t_1\right)t_2\right)\\&\quad+\left(f^{-1}\left(t_2\right)t_2-f^{-1}\left(t_2\right)t_2\right)+\ldots+\left(f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_n-f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_n\right)\\&\quad+\left(f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_{n-1}-f^{-1}\left(t_{n-1}\right)t_{n-1}\right)+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_0\right)t_0\right)\\&=0+0+0+0+\ldots+0+0+\left(f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_0\right)t_0\right)\\&=f^{-1}\left(t_n\right)t_n-f^{-1}\left(t_0\right)t_0\end{aligned}$$

Recordando que $t_0=a$ y $t_n=b$ entonces

$$f^{-1}\left(b\right)b-f^{-1}\left(a\right)a=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)$$

Así

$$U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)$$

$$\begin{aligned}L\left(f^{-1},P\right)+U\left(f,P'\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)\\U\left(f^{-1},P\right)+L\left(f,P'\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)\\&\Rightarrow\\L\left(f^{-1},P\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)-U\left(f,P'\right)\\U\left(f^{-1},P\right)&=bf^{-1}\left(b\right)-af^{-1}\left(a\right)-L\left(f,P'\right)\end{aligned}$$

Como f^{-1} es integrable entonces

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f &= \sup\left(L\left(f^{-1}, P\right)\right) \\
&= \sup\left(bf^{-1}\left(b\right) - af^{-1}\left(a\right) - U\left(f, P'\right)\right) \\
&= bf^{-1}\left(b\right) - af^{-1}\left(a\right) + \sup\left(-U\left(f, P'\right)\right) \\
&= bf^{-1}\left(b\right) - af^{-1}\left(a\right) - \text{ínf}\left(U\left(f, P'\right)\right) \\
&= bf^{-1}\left(b\right) - af^{-1}\left(a\right) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f
\end{aligned}
$$

□

1.3. Ejercicio 3

La función de Tomae se define como

$$
t(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}
$$

Demuestra que t es integrable y calcula $\int_0^1 t$

Solución

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N+1} < \frac{\epsilon}{2}$, definimos al conjutno A como sigue:

$$
A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\right\}
$$

es decir,

$$
A = \left\{x \in [0,1] \mid x = \frac{p}{q} \text{ y } \frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}
$$

Sí $x \in A$ entonces $t\left(x\right) \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{N}\right\}$, así sabemos que $t\left(x\right) \leq 1$.
Sí $x \notin A$ entonces $t\left(x\right) \leq \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Notemos que A es finito. Sea $|A| = k$, y sea $n > k$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4k}$. Sea P una partición del invervalo $[0,1]$ definida como

$$
P = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = 1\}
$$

y además cumple con que $t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
Veamos $L\left(t(x), P_n\right)$
Por densidad de los números irracionales sabemos que

$$
[t_{i-1}, t_i] \cap \mathbb{I} \neq \varnothing
$$

consecuentemente existe un $x \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $t\left(x\right) = 0$, por lo tanto $m_i = 0\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Así

$$
\begin{aligned}
L\left(t(x), P\right) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 0(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Veamos $U\left(t(x), P_n\right)$
Por definición tenemos que

$$
U\left(t(x), P_n\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(t_i - t_{i-1}\right)
$$

Notemos que lo anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}U\left(t(x),P_n\right) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)\\ &= \sum_{[t_{i-1},t_i]\cap A=\varnothing} M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)+\sum_{[t_{i-1},t_i]\cap A\neq\varnothing} M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)\end{aligned}$$

Sea $i\in\{1,\dots,n\}$ tal que $[t_{i-1},t_i]\cap A\neq\varnothing$ entonces existe $x\in[t_{i-1},t_i]$ tal que $t\left(x\right)\in\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{N}\right\}$, así $t(x)\leq 1\ \forall x\in[t_{i-1},t_i]$ consecuentemente $M_i\leq 1$. Hacemos la observación de que A interseca a lo más a $2k$ intervalos de P, recordemos que $|A|=k$, entonces se puede dar el caso en el que cada elemento de A sea igual a t_i para k elementos de P, así ese elemento de A está en el intervalo $[t_{i-1},t_i]$ y $[t_i,t_{i+1}]$. Así

$$\begin{aligned}\sum_{[t_{i-1},t_i]\cap A\neq\varnothing} M_i\left(t_i-t_{i-1}\right) &\leq \sum_{[t_{i-1},t_i]\cap A\neq\varnothing} 1\left(t_i-t_{i-1}\right)\\ &< \sum_{[t_{i-1},t_i]\cap A\neq\varnothing}\frac{\epsilon}{4k}\\ &= \frac{\epsilon}{4k}\sum_{[t_{i-1},t_i]\cap A\neq\varnothing} 1\\ &\leq \frac{\epsilon}{4k}\sum_{j=1}^{2k}1\\ &= \frac{\epsilon}{4k}(2k)\\ &= \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{[t_{i-1},t_i]\cap A\neq\varnothing} M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)<\frac{\epsilon}{2}$$

Así tenemos que

$$U\left(t(x),P\right)-L\left(t(x),P\right)=U\left(t(x),P\right)-0=U\left(t(x),P\right)-L\left(f,P\right)=U\left(f,P\right)<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Por el **Criterio de Integrabilidad** tenemos que t es integrable. $\square$

Calcularemos $\int_0^1 t$
Sea $\varepsilon>0$, por lo anterior sabemos que existe P una partición del intervalo $[0,1]$ tal que

$$U\left(t(x),P\right)-L\left(t(x),P\right)<\varepsilon$$

Sabemos que $\int_0^1 t$ cumple lo siguiente

$$L\left(t(x),P\right)\leq\int_0^1 t\leq U\left(t(x),P\right)$$

Pero ya hemos calculado tanto $L\left(t(x),P\right)$ y $U\left(t(x),P\right)$

$$0=L\left(t(x),P\right)\leq\int_0^1 t\leq U\left(t(x),P\right)<\varepsilon$$

Como lo anterior pasa para cualquier $\varepsilon>0$ entonces

$$\int_0^1 t=0$$