1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Solución

1.2. Ejercicio 2

Se define para todo número real α y para todo entero no negativo n, el coeficiente binomial

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

Demuestra que el polinomio de Taylor de la función $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ en 0 es

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Solución

Demostración. Sea $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \alpha\,(1+x)^{\alpha-1} \\
f^{(2)}(x) &= \alpha\,(\alpha-1)\,(1+x)^{\alpha-2} \\
f^{(3)}(x) &= \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,(1+x)^{\alpha-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

Evaluando todas las derivadas en 0 tenemos que

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= \alpha\,(1)^{\alpha-1} = \alpha \\
f^{(2)}(0) &= \alpha\,(\alpha-1)\,(1)^{\alpha-2} = \alpha\,(\alpha-1) \\
f^{(3)}(0) &= \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,(1)^{\alpha-3} = \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\,(1)^{\alpha-n} = \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)
\end{aligned}$$

Por definición del polinomio de Taylor de f en 0

$$\begin{aligned}
P_{n,0,f}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\
&= 1\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k
\end{aligned}$$

$\square$

1.3. Ejercicio 3

Supongáse que a_i y b_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor en a de f y de g, respectivamente. Hallar los coeficientes c_i de los polinomios de Taylos en a de las siguientes funciones, en términos de a_i y b_i.

- $f+g$
- fg
- f'
- $h(x) = \int_0^x f(t)dt$

Solución

Recordemos que los coeficientes a_i y b_i de los polinomios de Taylor en a de f y g respectivamente están definidos como sigue:

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$$
$$b_i = \frac{g^{(i)}(a)}{i!}$$

Veamos $f+g$
En éste caso por definición de la suma de polinomios, tenemos que

$$c_i = a_i + b_i$$

Veamos fg
Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
(fg)' &= fg' + gf' \\
(fg)'' &= fg'' + f'g' + +f'g' + f''g = fg'' + 2f'g' + f''g \\
(fg)''' &= fg''' + f'g'' + 2f''g' + 2f'g'' + f''g' + f'''g = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \\
&\vdots \\
(fg)^{(n)} &= \binom{n}{0} f^{(n)}g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g^{(1)} + \binom{n}{2} f^{(n-2)}g^{(2)} + \ldots + \binom{n}{n-2} f^{(2)}g^{(n-2)} \binom{n}{n-1} f^{(1)}g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f^{(0)}g^{(n)}
\end{aligned}$$

Por definición del polinomio de Taylor de fg en a, tenemos que

$$P_{n,a,fg} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(fg)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Así tenemos que el $k-$ésimo término del polinomio de Taylor de fg en a es

$$c_k = \frac{(fg)^{(k)}(a)}{k!} = \frac{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(a)g^{(i)}(a)}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{k-i}b_i$$

Veamos f'
Por definición del polinomio de Taylor de f' en a, tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{n,a,f'} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \frac{f^{(1)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(2)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= f^{(1)}(a) + f^{(2)}(a)(x-a)^1 + \frac{f^{(3)}(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$c_k = \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} = (k+1)a_{k+1}$$

Veamos $h(x) = \int_0^x f(t)dt$
Notemos que

$$\begin{aligned} h^{(1)}(x) &= f(x) \\ h^{(2)}(x) &= f^{(1)}(x) \\ h^{(3)}(x) &= f^{(2)}(x) \\ h^{(4)}(x) &= f^{(3)}(x) \\ &\vdots \\ h^{(n)}(x) &= f^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Por definición del polinomio de Taylor de h en a, tenemos que

$$\begin{aligned} P_{n,a,h} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(h)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \int_0^a f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k-1)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^a f(t)dt \\ c_i &= a_{i-1} \end{aligned}$$

Para toda $1 \leq i \leq n$