Fausto David Hernández Jasso
317000928
fausto.david.hernandez.jasso@ciencias.unam.mx

Cálculo Diferencial e Integral II
Tarea-Examen Parcial 4

2024-05-29

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Demostrar usando los polinomios de Taylor y el residuo que si $f''(a)$ existe, entonces

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Solución

1.2. Ejercicio 2

Encuentra el valor de e hasta el primer decimal utilizando polinomios de Taylor.

Solución

1.3. Ejercicio 3

Demuestra que el polinomio de Taylor de $f(x) = \cos x^2$ de grado $4n$ en 0 es

$$1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

Solución

Demostración. Primero calcularemos el polinomio de Taylor de $\cos x$. Por definición tenemos que el polinomio de Taylor de grado n de una función f, en 0 es

$$P_{n,0,f} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

donde $f^{(k)}$ es la $k-$ésima derivada de la función f. En éste caso $f(x) = \cos x$, como $\cos x$ tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\cos x$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.
Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x \\
f''(x) &= -\cos x \\
f^{(3)}(x) &= \sin x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \\
f^{(5)}(x) &= -\sin x \\
f^{(6)}(x) &= -\cos x \\
f^{(7)}(x) &= \sin x \\
f^{(8)}(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

En general tenemos que

$$\begin{aligned}
f^{(4n)}(x) &= \cos x \\
f^{(4n+1)}(x) &= -\sin x \\
f^{(4n+2)}(x) &= -\cos x \\
f^{(4n+3)}(x) &= \sin x
\end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(0) &= 1 \\ f^{(4n+1)}(0) &= 0 \\ f^{(4n+2)}(0) &= -1 \\ f^{(4n+3)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Consecuentemente todos los términos impares nos van a quedar siempre 0. Para facilitar el desarrollo del polinomio de Taylor eligiremos un grado par que son los términos que no son 0. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_{2n,0,\cos x} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!)} \end{aligned}$$

Por definición tenemos que

$$\cos_x = P_{2n,0,\cos x}(x) + R_{2n,0,\cos x}(x)$$

Sabemos que si f es una función tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen. Si P es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n, igual a f hasta el orden n en a, entonces $P = P_{n,a,f}$. Como $\cos x$ tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\cos x$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, entonces $\cos^{(0)} x, \cos^{(1)} x, \ldots, \cos^{(2n)} x$ existen, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - P_{2n,0,\cos x}(x)}{x^{2n}} &= \lim_{x \to 0} \frac{R_{2n,0,\cos x}(x)}{x^{2n}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ya que $P_{2n,0,\cos x}$ es el polinomio de Taylor de $\cos x$.
Lo anterior implica que

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_{2n,0,\cos x}(x^2)}{(x^2)^{2n}} = 0$$

Esto por definición es

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2) - P_{2n,0,\cos x}(x^2)}{x^{4n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x^2 - P_{2n,0,\cos x}(x^2)}{x^{4n}}$$

Sabemos que si f es una función tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen. Si P es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n, igual a f hasta el orden n en a, entonces $P = P_{n,a,f}$. Por lo tanto

$$P_{4n,0,\cos x^2}(x) = P_{2n,0,\cos x}(x^2)$$

Consecuentemente

$$P_{4n,0,\cos x^2}(x) = = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n!)}$$

$\square$

1.4. Ejercicio 4

Supongamos que f es dos veces derivable en $(0, \infty)$ y que $|f(x)| \leq M_0$ para todos los $x > 0$ mientras que $|f''(x)| \leq M_2$. Demuestra que

- Para todo $x > 0$ y todo $h > 0$ se cumple

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$$

- Concluir que $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$

Solución

1.5. Ejercicio 5

Aproximar los siguientes números con sumas cuyo error sea menor al indicado

- $\sin 1$, error $< 10^{-9}$.
- e^2, error $< 10^{-5}$

Solución

Veamos $\sin 1$.
Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \sin x$$

Por definición sabemos que

$$f(x) = P_{n,0,f}(x) + R_{n,0,f}(x)$$

En particular,

$$\begin{aligned} \sin 1 &= f(1) \\ &= P_{n,0,f}(1) + R_{n,0,f}(1) \end{aligned}$$

Lo que buscamos es que

$$|R_{n,0,f}(x)| < 10^{-9}$$

Recordando el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ en 0 tenemos que

$$P_{2n+1,0,f}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Es decir el término $k-$ésimo del polinomio de Taylor de grado $2n+1$ en 0 tenemos que

$$\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Como $\sin x$ tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\cos x$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. en particular existe $\sin^{(n+1)} x$, además sea $y = 1$ y $a = 0$, se tiene que $y \leq a$, notemos además lo siguiente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \\ f^{(6)}(x) &= -\sin x \\ f^{(7)}(x) &= -\cos x \\ f^{(8)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

En general tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= \sin x \\ f^{(4n+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4n+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4n+3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

Así tenemos que $|f^{(n+1)}(t)| \leq 1$ para toda $t \in [a, y]$ por un corolario del Teorema de Taylor tenemos que

$$|R_{n,0,f}(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|1|^n = \frac{1}{(n+1)!}$$

para cada $t \in [a, y]$.
Entonces lo que buscamos es que

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-9}$$

La n que cumple con lo solicitado es $n = 11$, ya que

$$\frac{1}{(11+1)!} = \frac{1}{(12)!} = 1.6059 \times 10^{-10} < 10^{-9}$$

Así

$$\sin 1 \approx P_{11,0,f}(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} = 0.841470984808$$