Fausto David Hernández Jasso
317000928
fausto.david.hernandez.jasso@ciencias.unam.mx

1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Derive cada una de las siguientes funciones

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{e^{e^{e^{x}}}} \\
f(x) &= \log\left(1+\log\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right) \\
f(x) &= (\sin x)^{\sin(\sin x)} \\
f(x) &= e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}\ dt\right)} \\
f(x) &= x^x
\end{aligned}
$$

Solución

Veamos $f(x) = e^{e^{e^{e^{x}}}}$.
Sea $h(x) = e^x$, notemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= (h \circ h)(x) \\
&= h(h(x)) \\
&= e^{e^{x}}
\end{aligned}
$$

Así tenemos que

$$
\begin{aligned}
h_1'(x) &= ((h \circ h)(x))' \\
&= h'(h(x)) \cdot h'(x)
\end{aligned}
$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$, entonces

$$
\begin{aligned}
h_1'(x) &= h'(e^x) \cdot e^x \\
&= e^{e^{x}} \cdot e^x
\end{aligned}
$$

Veamos que

$$
\begin{aligned}
h_2(x) &= (h \circ h_1)(x) \\
&= h(h_1(x)) \\
&= e^{e^{e^{x}}}
\end{aligned}
$$

Así tenemos que

$$
\begin{aligned}
h_2'(x) &= ((h \circ h_1)(x))' \\
&= h'(h_1(x)) \cdot h_1'(x)
\end{aligned}
$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$ y $h_1'(x) = e^{e^{x}} \cdot e^x$, entonces

$$
\begin{aligned}
h_2'(x) &= h'(e^{e^{x}}) \cdot e^{e^{x}} \cdot e^x \\
&= e^{e^{e^{x}}} \cdot e^{e^{x}} \cdot e^x
\end{aligned}
$$

Veamos que

$$
\begin{aligned}
h_3(x) &= (h \circ h_2)(x) \\
&= h(h_2(x)) \\
&= e^{e^{e^{e^{x}}}}
\end{aligned}
$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= ((h \circ h_2)(x))' \\ &= h'(h_2(x)) \cdot h_2'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$ y $h_1'(x) = e^{e^x} \cdot e^x$, entonces

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= h'(e^{e^{e^x}}) \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x \\ &= e^{e^{e^{e^x}}} \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\boxed{\left(e^{e^{e^{e^x}}}\right)' = e^{e^{e^{e^x}}} \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x}}$$

Veamos $f(x) = \log\left(1 + \log\left(1 + \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right)$
Sea $g(x) = e^{1+x}$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (g \circ g)(x) \\ &= g(g(x)) \\ &= e^{1+e^{1+x}} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= ((g \circ g)(x))' \\ &= g'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $g'(x) = e^{1+x}$, entonces

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= g'(e^{1+x}) \cdot e^{1+x} \\ &= e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \end{aligned}$$

Sea $h(x) = \log(1+x)$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (h \circ g_1)(x) \\ &= h(g_1(x)) \\ &= \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= ((h \circ g_1)(x))' \\ &= h'(g_1(x)) \cdot g_1'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ y $g_1'(x) = e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}$, entonces

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= h'(e^{1+e^{1+x}}) \cdot e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \\ &= \left(\frac{1}{1+e^{1+e^{1+x}}}\right) \cdot e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}} \end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} h_2(x) &= (h \circ h_1)(x) \\ &= h(h_1(x)) \\ &= \log\left(1 + \log\left(1 + e^{1+e^{1+x}}\right)\right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= \left(\left(h \circ h_1\right)(x)\right)' \\ &= h'(h_1(x)) \cdot h_1'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ y $h_1'(x) = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}}$, entonces

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= h'\left(\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right) \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}} \\ &= \frac{1}{1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)} \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{1+e^{1+e^{1+x}}} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)} \end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned} h_3\left(x\right) &= \left(h \circ h_2\right)(x) \\ &= h(h_2(x)) \\ &= \log\left(1+\log\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= \left(\left(h \circ h_2\right)(x)\right)' \\ &= h'(h_2(x)) \cdot h_2'(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ y $h_2'(x) = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)}$, entonces

$$\begin{aligned} h_3'(x) &= h'\left(\log\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right) \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\log\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)} \cdot \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)} \\ &= \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left(1+\log\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right)\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\boxed{\left(\log\left(1+\log\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right)\right)' = \frac{e^{e^{1+x}} \cdot e^{1+x}}{\left(1+\log\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\right)\left(1+\log\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)\right)\left(1+e^{1+e^{1+x}}\right)}}}$$

Veamos $f\left(x\right) = \left(\sin x\right)^{\sin\left(\sin x\right)}$
Por las propiedades de la función exponencial y de la función logaritmo tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sin x\right)^{\sin\left(\sin x\right)} \\ &= e^{\sin\left(\sin x\right) \cdot \log\left(\sin x\right)} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\sin\left(\sin x\right) \cdot \log\left(\sin x\right)}\right)' \\ &= e^{\sin\left(\sin x\right) \cdot \log\left(\sin x\right)} \cdot \left(\sin\left(\sin x\right) \cdot \log\left(\sin x\right)\right)' \\ &= e^{\sin\left(\sin x\right) \cdot \log\left(\sin x\right)} \cdot \left(\left(\sin\left(\sin x\right)\right)' \cdot \log\left(\sin x\right) + \left(\log\left(\sin x\right)\right)' \cdot \sin\left(\sin x\right)\right) \\ &= e^{\sin\left(\sin x\right) \cdot \log\left(\sin x\right)} \cdot \left(\cos\left(\sin x\right) \cdot \cos x \cdot \log\left(\sin x\right) + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin\left(\sin x\right)\right) \\ &= e^{\sin\left(\sin x\right) \cdot \log\left(\sin x\right)} \cdot \left(\cos\left(\sin x\right) \cdot \cos x \cdot \log\left(\sin x\right) + \cot x \cdot \sin\left(\sin x\right)\right) \\ &= \left(\sin x\right)^{\sin\left(\sin x\right)} \left(\cos\left(\sin x\right) \cdot \cos x \cdot \log\left(\sin x\right) + \cot x \cdot \sin\left(\sin x\right)\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\left((\sin x)^{\sin(\sin x)}\right)' = (\sin x)^{\sin(\sin x)}\left(\cos(\sin x)\cdot\cos x\cdot\log(\sin x) + \cot x\cdot\sin(\sin x)\right)}$$

Veamos $f(x) = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}\ dt\right)}$

Sea $h(x) = e^x$ y $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(h\circ g)(x) &= h(g(x))\\ &= h\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)\\ &= e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= (h(g(x)))'\\ &= h'(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

Sabemos que $h'(x) = e^x$ y $g'(x) = e^{-x^2}$ ya que e^{-t^2} es continua en todo $\mathbb{R}$ y por el **Primer Teorema Fundamental tenemos que** $\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)' = e^{-x^2}$, entonces

$$\begin{aligned}f'(x) &= h'\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)\cdot e^{-x^2}\\ &= e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)}\cdot e^{-x^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\left(e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)}\right)' = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)}\cdot e^{-x^2}}$$

Veamos $f(x) = x^x$ Por las propiedades de la función exponencial y de la función logaritmo tenemos que

$$\begin{aligned}f(x) &= (\sin x)^{\sin(\sin x)}\\ &= e^{x\log x}\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(e^{x\log x}\right)'\\ &= e^{x\log x}(x\log x)'\\ &= e^{x\log x}\left(x\cdot(\log x)' + \log x\cdot x'\right)\\ &= e^{x\log x}\left(x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) + \log x\cdot 1\right)\\ &= e^{x\log x}(1+\log x)\\ &= x^x(1+\log x)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{(x^x)' = x^x(1+\log x)}$$

1.2. Ejercicio 2

- Compruebe que $f'(x) = f(x)\left(\log\left(f(x)\right)\right)'$, sí $f > 0$ y derivable
- Halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones

$$f(x) = (1+x)\left(1+e^{x^2}\right)$$
$$f(x) = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}}x^2}{(1-x)(3+x)^{2^3}}$$
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}$$

Solución

1.3. Ejercicio 3

Hallar los siguientes límites mediante la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2}$$

Solución