1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Demuestre que

$$\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2-1}\, dt = \frac{\cosh x \sinh x}{2} - \frac{x}{2}$$

Demostración. Aplicando la siguiente sustitución trigonométrica a la integral indefinida $\int \sqrt{t^2-1}\, dt$.

$$t = \sec\theta$$
$$dt = \sec\theta\tan\theta$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}\int \sqrt{t^2-1}\, dt &= \int \sqrt{(\sec\theta)^2-1}\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ &= \int \sqrt{(\tan\theta)^2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ &= \int \tan\theta\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ &= \int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta\end{aligned}$$

Como $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ entonces

$$\begin{aligned}\int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta &= \int \left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta\, d\theta \\ &= \int \sec^3\theta - \sec\theta\, d\theta \\ &= \int \sec^3\theta\, d\theta - \int \sec\theta\, d\theta\end{aligned}$$

Como

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \log\left(\sec\theta+\tan\theta\right)\right) + C$$
$$\int \sec\theta\, d\theta = \log\left(\sec\theta+\tan\theta\right) + C$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \sec^3\theta\, d\theta - \int \sec\theta\, d\theta &= \frac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \log\left(\sec\theta+\tan\theta\right)\right) - \log\left(\sec\theta+\tan\theta\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\log\left(\sec\theta+\tan\theta\right) + C\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\sec\theta = t$$
$$\tan\theta = \sqrt{t^2-1}$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\log\left(\sec\theta+\tan\theta\right) + C = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) + C$$

Así tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2-1}\, dt &= \left(\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\right)\Big|_1^{\cosh x} \\
&= \left(\frac{1}{2}(\cosh x)\sqrt{(\cosh x)^2-1} - \frac{1}{2}\log\left((\cosh x)+\sqrt{(\cosh x)^2-1}\right)\right) - \\
&\left(\frac{1}{2}1\sqrt{1^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{1^2-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}(\cosh x)\sqrt{(\cosh x)^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(\cosh x+\sqrt{(\cosh x)^2-1}\right)
\end{aligned}
$$

Sabemos que $(\cosh x)^2 - 1 = \sinh^2 x$ entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\cosh x)\sqrt{(\cosh x)^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(\cosh x+\sqrt{(\cosh x)^2-1}\right) &= \frac{1}{2}(\cosh x)\sqrt{(\sinh x)^2} - \frac{1}{2}\log\left(\cosh x+\sqrt{(\sinh x)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cosh x \sinh x - \frac{1}{2}\log\left(\cosh x + \sinh x\right)
\end{aligned}
$$

Recordando la definición de $\sinh x$ y $\cosh x$

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cosh x \sinh x - \frac{1}{2}\log\left(\cosh x + \sinh x\right) &= \frac{1}{2}\cosh x \sinh x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cosh x \sinh x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2e^x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cosh x \sinh x - \frac{1}{2}\log\left(e^x\right) \\
&= \frac{1}{2}\cosh x \sinh x - \frac{1}{2}x \\
&= \frac{\cosh x \sinh x}{2} - \frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2-1}\, dt = \frac{\cosh x \sinh x}{2} - \frac{x}{2}
$$

□

1.2. Ejercicio 2

Demuestre que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f\left(a+b-x\right)dx$$

Demostración. Definimos a $g(x) = a + b - x$, notemos que $g'(x) = -1$ que es continua. Notemos que $\left(f \circ g\right)(x) = f(g(x)) = f(a+b-x)$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(a+b-x)dx &= \int_a^b f(a+b-x)(-1)(-1)dx \\
&= -\int_a^b f(a+b-x)(-1)dx \\
&= -\int_a^b f(a+b-x)g'(x)dx \\
&= -\int_a^b f(g(x))g'(x)dx
\end{aligned}$$

Por el **Teorema de Sustitución** tenemos que:

$$\begin{aligned}
-\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= -\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \\
&= -\int_b^a f(x)dx \\
&= \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

□

1.3. Ejercicio 3

Suponga que f'' es continua y que

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 2$$

Dado que $f(\pi) = 1$, calcule $f(0)$

Demostración. Como f tiene al menos segunda derivada, entonces sabemos que

- f es continua, ya que existe f'.
- f' es continua, ya que existe f''.

Además por hipótesis tenemos que f'' es continua. Sabemos que $\sin x$ y $\cos x$ son funciones continuas, consecuentemente podemos aplicar el teorema de **integración por partes**.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx &= 2 \\
\int_0^\pi f(x) \sin x + f''(x) \sin x dx &= 2 \\
\int_0^\pi f(x) \sin x dx + \int_0^\pi f''(x) \sin x dx &= 2 \\
\int_0^\pi f''(x) \sin x dx &= 2 - \int_0^\pi f(x) \sin x dx
\end{aligned}$$

Aplicaremos integración por partes a la integral $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ donde:

- $u = f(x)$
- $du = f'(x)\ dx$
- $v = -\cos x$
- $dv = \sin x\ dx$

Así

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) \sin x dx &= -f(x) \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) - \cos x dx \\
&= -f(x) \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx
\end{aligned}$$

Aplicaremos integración por partes a la integral $\int_0^\pi f'(x) \cos x dx$ donde:

- $u_1 = f'(x)$
- $du_1 = f''(x)\ dx$
- $v_1 = \sin x$
- $dv_1 = \cos x\ dx$

Así

$$\int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f'(x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$$

Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f''(x) \sin x dx &= 2 - \int_0^\pi f(x) \sin x dx \\
&= 2 - \left[-f(x) \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \right] \\
&= 2 + f(x) \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\
&= 2 + f(x) \cos x \Big|_0^\pi - \left[f'(x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx \right] \\
&= 2 + f(x) \cos x \Big|_0^\pi - f'(x) \sin x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f''(x) \sin x dx
\end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f''(x)\sin x dx &= 2 + f(x)\cos x\Big|_0^\pi - f'(x)\sin x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f''(x)\sin x dx \\
0 &= 2 + f(x)\cos x\Big|_0^\pi - f'(x)\sin x\Big|_0^\pi \\
0 &= 2 + f(\pi)\cos\pi - f(0)\cos 0 - f'(\pi)\sin\pi + f'(0)\sin 0 \\
0 &= 2 + f(\pi)\cos\pi - f(0)\cos 0 - f'(\pi)(0) + f'(0)(0) \\
0 &= 2 + f(\pi)\cos\pi - f(0)\cos 0 - 0 + 0 \\
0 &= 2 + f(\pi)\cos\pi - f(0)\cos 0 \\
0 &= 2 + f(\pi)\cos\pi - f(0)\cos 0 \\
f(0)\cos 0 &= 2 + f(\pi)\cos\pi \\
f(0)(1) &= 2 + f(\pi)(-1) \\
f(0) &= 2 - f(\pi) \\
f(0) &= 2 - 1 \\
f(0) &= 1
\end{aligned}$$

$\square$