1. Ejercicios

1.1. Ejercicio 1

Demuestra que el polinomio de Taylor de $f(x) = \sin x^2$ de grado $4n+2$ en 0 es

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Solución

La definición del polinomio de Taylor en 0 de grado $2n+1$ de la función $\sin x$

$$P_{2n+1,0,\sin x}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Por definición tenemos que

$$\sin x = P_{2n+1,0,\sin x}(x) + R_{2n+1,0,\sin x}(x)$$

Sabemos que si f es una función tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen. Si P es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n, igual a f hasta el orden n en a, entonces $P = P_{n,a,f}$. Como $\sin x$ tiene derivadas en todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\sin x$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, entonces $\sin^{(0)} x, \sin^{(1)} x, \ldots, \sin^{(2n+1)} x$ existen, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - P_{2n+1,0,\sin x}(x)}{x^{2n+1}} &= \lim_{x \to 0} \frac{R_{2n+1,0,\sin x}(x)}{x^{2n+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ya que $P_{2n+1,0,\sin x}$ es el polinomio de Taylor de $\sin x$.
Lo anterior implica que

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_{2n+1,0,\sin x}(x^2)}{(x^2)^{2n+1}} = 0$$

Esto por definición es

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2 - P_{2n+1,0,\sin x}(x^2)}{x^{4n+2}} = 0$$

Sabemos que si f es una función tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen. Si P es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n, igual a f hasta el orden n en a, entonces $P = P_{n,a,f}$. Por lo tanto

$$P_{4n+2,0,\sin x^2}(x) = P_{2n,0,\sin x}(x^2)$$

Consecuentemente

$$P_{4n+2,0,\sin x^2}(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

1.2. Ejercicio 2

Se define para todo número real α y para todo entero no negativo n, el coeficiente binomial

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

Demuestra que el polinomio de Taylor de la función $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ en 0 es

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Solución

Demostración. Sea $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \alpha \, (1 + x)^{\alpha - 1} \\
f^{(2)}(x) &= \alpha \, (\alpha - 1) \, (1 + x)^{\alpha - 2} \\
f^{(3)}(x) &= \alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2) \, (1 + x)^{\alpha - 3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1) \, (1 + x)^{\alpha - n}
\end{aligned}$$

Evaluando todas las derivadas en 0 tenemos que

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= \alpha \, (1)^{\alpha - 1} = \alpha \\
f^{(2)}(0) &= \alpha \, (\alpha - 1) \, (1)^{\alpha - 2} = \alpha \, (\alpha - 1) \\
f^{(3)}(0) &= \alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2) \, (1)^{\alpha - 3} = \alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= \alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1) \, (1)^{\alpha - n} = \alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)
\end{aligned}$$

Por definición del polinomio de Taylor de f en 0

$$\begin{aligned}
P_{n,0,f}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha \, (\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha \, (\alpha - 1) \, (\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n \\
&= 1 \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k
\end{aligned}$$

$\square$

1.3. Ejercicio 3

Supongáse que a_i y b_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor en a de f y de g, respectivamente. Hallar los coeficientes c_i de los polinomios de Taylos en a de las siguientes funciones, en términos de a_i y b_i.

- $f+g$
- fg
- f'
- $h(x) = \int_0^x f(t)dt$

Solución

Recordemos que los coeficientes a_i y b_i de los polinomios de Taylor en a de f y g respectivamente están definidos como sigue:

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$$
$$b_i = \frac{g^{(i)}(a)}{i!}$$

Veamos $f+g$
En éste caso por definición de la suma de polinomios, tenemos que

$$c_i = a_i + b_i$$

Veamos fg
Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
(fg)' &= fg' + gf' \\
(fg)'' &= fg'' + f'g' + +f'g' + f''g = fg'' + 2f'g' + f''g \\
(fg)''' &= fg''' + f'g'' + 2f''g' + 2f'g'' + f''g' + f'''g = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \\
&\vdots \\
(fg)^{(n)} &= \binom{n}{0} f^{(n)}g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g^{(1)} + \binom{n}{2} f^{(n-2)}g^{(2)} + \ldots + \binom{n}{n-2} f^{(2)}g^{(n-2)} \binom{n}{n-1} f^{(1)}g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f^{(0)}g^{(n)}
\end{aligned}$$

Por definición del polinomio de Taylor de fg en a, tenemos que

$$P_{n,a,fg} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(fg)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Así tenemos que el $k-$ésimo término del polinomio de Taylor de fg en a es

$$c_k = \frac{(fg)^{(k)}(a)}{k!} = \frac{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(a)g^{(i)}(a)}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{k-i}b_i$$

Veamos f'
Por definición del polinomio de Taylor de f' en a, tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{n,a,f'} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \frac{f^{(1)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(2)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= f^{(1)}(a) + f^{(2)}(a)(x-a)^1 + \frac{f^{(3)}(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$c_k = \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} = (k+1)a_{k+1}$$

Veamos $h(x) = \int_0^x f(t)dt$
Notemos que

$$\begin{aligned}
h^{(1)}(x) &= f(x) \\
h^{(2)}(x) &= f^{(1)}(x) \\
h^{(3)}(x) &= f^{(2)}(x) \\
h^{(4)}(x) &= f^{(3)}(x) \\
&\vdots \\
h^{(n)}(x) &= f^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

Por definición del polinomio de Taylor de h en a, tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{n,a,h} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(h)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \int_0^a f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k-1)}(a)}{k!}(x-a)^k
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
c_0 &= \int_0^a f(t)dt \\
c_i &= a_{i-1}
\end{aligned}$$

Para toda $1 \leq i \leq n$