1. Significado de los conectivos lógicos

1.1. Negación

- Símbolo utilizado: $\neg$
- Correspondencia con el español: **No**, no es cierto que, es falso que, etc.
- Otros símbolos: $\sim \varphi$, $\overline{\varphi}$.

1.1.1. Tabla de verdad

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

1.2. Disyunción

1.2.1. Descripción

La **disyunción** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \vee \psi$.
Las fórmulas φ, ψ se llaman **disyuntos**.

- Símbolo utilizado: $\vee$
- Correspondencia con el español: ó.
- Otros símbolos: $\varphi + \psi, \varphi \mid \psi$.

1.2.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.3. Conjunción

1.3.1. Descripción

La **conjunción** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \wedge \psi$. Las fórmulas φ, ψ se llaman **conyuntos**.

- Símbolo utilizado: $\wedge$
- Correspondencia con el español: y, pero
- Otros símbolos: $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \cdot \psi$ ó $\varphi\psi$

1.3.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.4. Implicación

1.4.1. Descripción

La **implicación** o **condicional** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \to \psi$. La fórmula φ es el *antecedente* y la fórmula ψ es el *consecuente* de la implicación.

- Símbolo utilizado: $\to$
- Correspondencia con el español: $\varphi \to \psi$ significa: si φ entonces ψ; ψ, si φ; φ sólo si ψ; φ es condición suficiente para ψ; ψ es condición necesaria para φ.
- Otros símbolos: $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \supset \psi$

1.4.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.5. Doble implicación

1.5.1. Descripción

La equivalencia o bicondicional de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$.

- Símbolo utilizado: $\leftrightarrow$
- Correspondencia con el español: φ es equivalente a ψ; φ si y sólo si ψ; φ es condición necesaria y suficiente para ψ.
- Otros símbolos: $\varphi \Leftrightarrow \psi$, $\varphi \equiv \psi$

1.5.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2. Semántica formal de los conectivos

2.1. Semántica formal de los conectivos lógicos

2.1.1. Tipo `Bool`

El tipo de valores booleanos denotado como `Bool` se define como `Bool`$= \{0, 1\}$.

2.1.2. Estado

Un estado o asignación de las variables (proposicionales) es una función

$$\mathcal{I} \,:\, VarP \to \texttt{Bool}$$

Dadas n variables proposicionales existen 2^n estados distintos para estas variables. Lo anterior tiene justificación a través del **principio de la multiplicación**. Supongamos que tenemos una variable entonces por el **principio de tercero excluido**, sabemos que sólo puede tener dos valores $\top$ o $\bot$. Sí tenemos dos variables cada una a su vez tendrá dos posibles valores los cuales serán $\top$ o $\bot$, y tendremos cuatro posibles estados cuando ambas sean $\top$, cuando ambas sean $\bot$ y cuando alguna sea $\bot$ y cuando la otra sea $\top$. Y es por esa razón que cuando tenemos n variables proposicionales tenemos 2^n estados posibles.

2.1.3. Interpretación

Dado un estado de las variables $\mathcal{I} : VarP \to \texttt{Bool}$, definimos la interpretación de las fórmulas con respecto a $\mathcal{I}$ como la función $\mathcal{I}^\star : \texttt{PROP} \to \texttt{Bool}$ tal que:

- $\mathcal{I}^\star(p) = \mathcal{I}(p)$ para $p \in VarP$, es decir $\mathcal{I}^\star|_{VarP} = \mathcal{I}$
- $\mathcal{I}^\star(\top) = 1$
- $\mathcal{I}^\star(\bot) = 0$
- $\mathcal{I}^\star(\neg\varphi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = 0$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \wedge \psi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi) = 1$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \vee \psi) = 0$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi) = 0$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \to \psi) = 0$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = 1$ **e** $\mathcal{I}^\star(\psi) = 0$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi)$.

2.1.4. Sobrecarga de operadores

Obsérvese que dado un estado de las variables $\mathcal{I}$, la interpretación $\mathcal{I}^\star$ generada por $\mathcal{I}$ está determinada de manera única por lo que de ahora en adelante escribiremos simplemente $\mathcal{I}$ en lugar de $\mathcal{I}^\star$.

2.2. Lema de coincidencia

Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 : VarP \to \texttt{Bool}$ dos estados que coinciden en las variables proposicionales de la fórmula φ, es decir $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in vars(\varphi)$.
Entonces $\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$.

Demostración. La demostración se hará usando el **Principio de Inducción Estructural**
Caso Base
Sea $\varphi \in \texttt{ATOM}$, notemos que solamente tenemos un caso ya que la hipótesis sólo aplica para variables proposicionales y por lo tanto descartamos a las constantes lógicas. Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 : VarP \to \texttt{Bool}$ dos estados, por tales que $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in vars(\varphi)$, como φ es una variable proposicional por suposición, entonces se sigue que $\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$.
Hipótesis de Inducción
Sean $\gamma \in \texttt{PROP}$ y $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 : VarP \to \texttt{Bool}$ dos estados tales que:

- $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in vars(\gamma)$

Entonces

- $\mathcal{I}_1(\gamma) = \mathcal{I}_2(\gamma)$

Paso Inductivo
Caso (1)
Sea $\gamma \equiv \neg\varphi$ para alguna $\varphi \in \texttt{PROP}$. Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 : VarP \to \texttt{Bool}$ dos estados tales que:

- $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in vars(\gamma)$

Definimos a las interpretaciones de la fórmula φ con respecto a $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ como $\mathcal{I}_1^\star$ y como $\mathcal{I}_2^\star$ respectivamente. Entonces por definición de **interpretación** tenemos que:

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\neg\varphi) = 1$
- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\neg\varphi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\neg\varphi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\neg\varphi) = 0$

Aplicando **hipótesis de inducción** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$$

Por la observación que se realizó acerca de la **sobrecarga de operadores**. Sabemos que

- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi)$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$

Así

- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = 0 = \mathcal{I}_1(\varphi)$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\neg\varphi) = 1$
- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = 1 = \mathcal{I}_1(\varphi)$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\neg\varphi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = 0 = \mathcal{I}_2(\varphi)$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\neg\varphi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = 1 = \mathcal{I}_2(\varphi)$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\neg\varphi) = 0$

Independientemente del valor de $\neg\varphi$ y aplicando la observación hecha para la **sobrecarga de operadores** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\neg\varphi) = \mathcal{I}_1^{\star}(\neg\varphi) = \mathcal{I}_2^{\star}(\neg\varphi) = \mathcal{I}_2(\neg\varphi)$$

Caso (2)
Sea $\gamma \equiv \varphi \star \psi$ con $\varphi, \psi \in \texttt{PROP}$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \ : \ VarP \rightarrow \texttt{Bool}$ dos estados tales que:

- $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in vars(\varphi)$
- $\mathcal{I}_1(q) = \mathcal{I}_2(q)$ para toda $q \in vars(\psi)$

Definimos a las interpretaciones de la fórmula φ con respecto a $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ como $\mathcal{I}_1^{\star}$ y como $\mathcal{I}_2^{\star}$ respectivamente.
Conjunción ($\wedge$)
Entonces por definición de **interpretación** tenemos que:

- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_1^{\star}(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_2^{\star}(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = 0$ ó $\mathcal{I}_1^{\star}(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = 0$ ó $\mathcal{I}_2^{\star}(\psi) = 0$

Aplicando **hipótesis de inducción** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$$
$$\mathcal{I}_1(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi)$$

Por la observación que se realizó acerca de la **sobrecarga de operadores**. Sabemos que

- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi)$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$

Así

- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_1^{\star}(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = \mathcal{I}_2^{\star}(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = 0$ ó $\mathcal{I}_1^{\star}(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi \wedge \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = 0$ ó $\mathcal{I}_2^{\star}(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 0$

Independientemente del valor de $\varphi \wedge \psi$ y aplicando la observación hecha para la **sobrecarga de operadores** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi \wedge \psi) = \mathcal{I}_1^{\star}(\varphi \wedge \psi) = \mathcal{I}_2^{\star}(\varphi \wedge \psi) = \mathcal{I}_2(\varphi \wedge \psi)$$

Disyunción ($\vee$)
Entonces por definición de **interpretación** tenemos que:

- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi \vee \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_1^{\star}(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi \vee \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = \mathcal{I}_2^{\star}(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi \vee \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^{\star}(\varphi) = 1$ ó $\mathcal{I}_1^{\star}(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi \vee \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^{\star}(\varphi) = 1$ ó $\mathcal{I}_2^{\star}(\psi) = 1$

Aplicando **hipótesis de inducción** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$$
$$\mathcal{I}_1(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi)$$

Por la observación que se realizó acerca de la **sobrecarga de operadores**. Sabemos que

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi)$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$

Así

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \vee \psi) = \mathcal{I}_1(\varphi \vee \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \vee \psi) = \mathcal{I}_2(\varphi \vee \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \vee \psi) = \mathcal{I}_1(\varphi \vee \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = 1$ ó $\mathcal{I}_1^\star(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \vee \psi) = \mathcal{I}_2(\varphi \vee \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = 1$ ó $\mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 1$

Independientemente del valor de $\varphi \vee \psi$ y aplicando la observación hecha para la **sobrecarga de operadores** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi \vee \psi) = \mathcal{I}_1^\star(\varphi \vee \psi) = \mathcal{I}_2^\star(\varphi \vee \psi) = \mathcal{I}_2(\varphi \vee \psi)$$

Implicación ($\to$)
Entonces por definición de **interpretación** tenemos que:

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \to \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = 1$ e $\mathcal{I}_1^\star(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \to \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = 1$ e $\mathcal{I}_2^\star(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \to \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\psi) = 1$ ó $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\psi) = 0$ ó $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = 0$ e $\mathcal{I}_2^\star(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \to \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\psi) = 1$ ó $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\psi) = 0$ ó $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = 0$ e $\mathcal{I}_2^\star(\psi) = 1$

Aplicando **hipótesis de inducción** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$$
$$\mathcal{I}_1(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi)$$

Por la observación que se realizó acerca de la **sobrecarga de operadores**. Sabemos que

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi)$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$

Así

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \to \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = 1$ e $\mathcal{I}_1^\star(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \to \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = 1$ e $\mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 0$
- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \to \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi) = 1$ ó
  $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi) = 0$ ó
  $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = 0$ e $\mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 1$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \to \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 1$ ó
  $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 0$ ó
  $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = 0$ e $\mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi) = 1$

Independientemente del valor de $\varphi \to \psi$ y aplicando la observación hecha para la **sobrecarga de operadores** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi \to \psi) = \mathcal{I}_1^\star(\varphi \to \psi) = \mathcal{I}_2^\star(\varphi \to \psi) = \mathcal{I}_2(\varphi \to \psi)$$

Doble Implicación ($\leftrightarrow$)
Entonces por definición de **interpretación** tenemos que:

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) \neq \mathcal{I}_1^\star(\psi)$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) \neq \mathcal{I}_2^\star(\psi)$

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\psi)$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\psi)$

Aplicando **hipótesis de inducción** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$$
$$\mathcal{I}_1(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi)$$

Por la observación que se realizó acerca de la **sobrecarga de operadores**. Sabemos que

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi)$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$

Así

- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\varphi) \neq \mathcal{I}_1^\star(\psi) = \mathcal{I}_1(\psi)$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\varphi) \neq \mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}_2(\psi)$
- $\mathcal{I}_1^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_1^\star(\varphi) = \mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_1^\star(\psi) = \mathcal{I}^\star(\psi)$
- $\mathcal{I}_2^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sí y sólo sí $\mathcal{I}_2^\star(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi) = \mathcal{I}_2^\star(\psi) = \mathcal{I}^\star(\psi)$

Independientemente del valor de $\varphi \leftrightarrow \psi$ y aplicando la observación hecha para la **sobrecarga de operadores** tenemos que:

$$\mathcal{I}_1(\varphi \to \psi) = \mathcal{I}_1^\star(\varphi \to \psi) = \mathcal{I}_2^\star(\varphi \to \psi) = \mathcal{I}_2(\varphi \to \psi)$$

Por lo tanto, queda demostrado el lema. □

2.3. Estado modificado o actualizado

Sean $\mathcal{I} : VarP \to \texttt{Bool}$ un estado de las variables, p una variable proposicional y $v \in \texttt{Bool}$. Definimos la actualización de $\mathcal{I}$ en p por v, denotado $\mathcal{I}[p/v]$ como sigue:

$$\mathcal{I}[p/v](q) = \begin{cases} v & \text{si } q = p \\ q & \text{si } q \neq p \end{cases}$$

2.4. Lema de sustitución

Sean $\mathcal{I}$ una interpretación, p una variable proposicional y ψ una fórmula tal que $\mathcal{I}^\star(\psi) = v$. Entonces

$$\mathcal{I}(\varphi[p := \psi]) = \mathcal{I}[p/v](\varphi)$$

3. Conceptos Semánticos Básicos

3.1. Tautología

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda interpretación $\mathcal{I}$ decimos que φ es una tautología o fórmula válida y escribimos $\models \varphi$.

3.2. Satisfacible

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para alguna interpretación $\mathcal{I}$ decimos que φ es satisfacible, que φ es verdadera en $\mathcal{I}$ y escribimos $\mathcal{I} \models \varphi$.

3.3. Insatisfacible

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ para alguna interpretación $\mathcal{I}$ decimos que φ es insatisfacible o es falsa en $\mathcal{I}$ y escribimos $\mathcal{I} \not\models \varphi$.

3.4. Contradicción

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ para toda interpretación $\mathcal{I}$ decimos que φ es una contradicción o una fórmula no satisfacible.

3.5. Conjunto de fórmulas

Sea Γ es un conjunto de fórmulas decimos que:

- Γ es satisfacible si tiene un modelo, es decir, si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$. Lo cual denotamos a veces, abusando de la notación, con $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$.
- Γ es insatisfacible o no satisfacible si no tiene un modelo, es decir, si no existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

3.6. Proposición

Sea Γ un conjunto de fórmulas, $\varphi \in \Gamma$, τ una tautología y χ una contradicción. Si Γ es satisfacible entonces

1. $\Gamma \setminus \{\varphi\}$ es satisfacible.
2. $\Gamma \cup \{\tau\}$ es satisfacible.
3. $\Gamma \cup \{\chi\}$ es insatisfacible.

Si Γ es insatisfacible, con $\tau \in \Gamma$ entonces

1. $\Gamma \cup \{\psi\}$ es insatisfacible, para cualquier $\psi \in \texttt{PROP}$.
2. $\Gamma \setminus \{\tau\}$ es insatisfacible.

Veamos (1)

Demostración. Definimos a Γ como sigue:

$$\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varphi\}$$

Como Γ es satisfacible, entonces existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\kappa) = 1$ para toda $\kappa \in \Gamma$.
Sea $\Gamma' = \Gamma \setminus \{\varphi\}$, entonces definimos a $\mathcal{I}'$ como

$$\mathcal{I}'(\kappa) = \mathcal{I}(\kappa)$$

Para toda $\kappa \in \Gamma'$. Por definición de $\mathcal{I}$ tenemos que

$$\mathcal{I}'(\kappa) = 1$$

Para toda $\kappa \in \mathcal{I}'$. Por lo tanto Γ' es satisfacible □

Veamos (2)

Demostración. Definimos a Γ como sigue:

$$\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varphi\}$$

Como Γ es satisfacible, entonces existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\kappa) = 1$ para toda $\kappa \in \Gamma$.
Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\tau\}$, entonces como

$$\mathcal{I}(\tau) = 1$$

ya que τ es tautología. Por lo tanto Γ' es satisfacible bajo $\mathcal{I}$. □

Veamos (3)

Demostración. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\chi\}$, entonces como

$$\mathcal{I}(\chi) = 0$$

para cualquier interpretación $\mathcal{I}$, entonces el conjunto Γ' no es satisfacible. Ya que en particular χ siempre se evaluará en 0. □

3.7. Proposición

Sea $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Γ es satisfacible sí y sólo sí $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ es satisfacible.
2. Γ es insatisfacible sí y sólo sí $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ es una contradicción.

Veamos (1)

Demostración. (Ida)
Como Γ es satisfacible, entonces existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que para toda $\varphi_i \in \Gamma$ con $1 \leq i \leq n$. Entonces tenemos que se cumple que:

- $\mathcal{I}(\varphi_1) = 1$ y
- $\mathcal{I}(\varphi_2) = 1$ y
- ...
- $\mathcal{I}(\varphi_n) = 1$.

Entonces tenemos que
$$\mathcal{I}(\varphi_1) = \mathcal{I}(\varphi_2) = \ldots = \mathcal{I}(\varphi_n) = 1$$
Consecuentemente
$$\mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$$
Por lo tanto
$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$$
es satisfacible bajo $\mathcal{I}$.
(Vuelta)
Como
$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$$
es satisfacible bajo $\mathcal{I}$. Entonces
$$\mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$$
que implica que
$$\mathcal{I}(\varphi_1) = \mathcal{I}(\varphi_2) = \ldots = \mathcal{I}(\varphi_n) = 1$$
lo anterior es equivalente a lo siguiente:

- $\mathcal{I}(\varphi_1) = 1$ y
- $\mathcal{I}(\varphi_2) = 1$ y
- ...
- $\mathcal{I}(\varphi_n) = 1$.

Por lo tanto tenemos que Γ es satisfacible. $\square$

4. Ejercicios

4.1. Ejercicio 1

Defina utilizando los conectivos lógicos vistos en clase el operador $\oplus$ (ó exclusivo), cuya propiedad es:
$$\mathcal{I}(\varphi \oplus \psi) = 1$$
sí y sólo sí
$$\mathcal{I}(\varphi) \neq \mathcal{I}(\psi)$$

4.2. Solución

Sabemos que

$$\mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \qquad \text{sí y sólo sí}$$
$$\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}(\varphi)$$

Entonces por **contra-positiva** tenemos que

$$\mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0 \qquad \text{sí y sólo sí}$$
$$\mathcal{I}(\varphi) \neq \mathcal{I}(\varphi)$$

Sabemos que

$$\mathcal{I}(\gamma) = 0 \qquad \text{sí y sólo sí}$$
$$\mathcal{I}(\neg\gamma) = 1$$

Consecuentemente

$$\mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0 \qquad \text{sí y sólo sí}$$
$$\mathcal{I}(\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$$

Por lo tanto

$$\mathcal{I}(\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 \qquad \text{sí y sólo sí}$$
$$\mathcal{I}(\varphi) \neq \mathcal{I}(\varphi)$$

Podemos concluir que:

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \varphi \oplus \psi$$

Por equivalencias lógicas

$$\begin{aligned}
\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) &\equiv \neg((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)) && \text{Eliminación de } \leftrightarrow \\
&\equiv \neg((\neg\varphi \lor \psi) \land (\neg\psi \lor \varphi)) && \text{Eliminación de } \to \\
&\equiv \neg(\neg\varphi \lor \psi) \lor \neg(\neg\psi \lor \varphi) && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\neg\neg\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\neg\psi \land \neg\varphi) && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\psi \land \neg\varphi) && \text{Doble Negación} \\
&\equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi) && \text{Conmutatividad}
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\varphi \oplus \psi \equiv \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$$

Por transitividad podemos concluir que

$$\varphi \oplus \psi \equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$$

4.2.1. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4.3. Ejercicio 2

Demuestre que si Γ es insatisfacible, con $\tau \in \Gamma$ entonces

1. $\Gamma \cup \{\psi\}$ es insatisfacible, para cualquier $\psi \in \texttt{PROP}$.

τ es una **tautología**.

Demostración. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi\}$, entonces como

$$\mathcal{I}(\chi) = 0$$

para alguna $\chi \in \Gamma$, entonces al agregar ψ, seguirá sin existir una interpretación $\mathcal{I}$ que haga verdadera tanto a χ como a ψ, por lo tanto Γ' es insatisfacible. $\square$

4.4. Ejercicio 3

Sea $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas. Demuestra Γ es insatisfacible sí y sólo sí $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ es una contradicción.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior. $\square$