1. Anillos

Una anillo es una estructura algebraica $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, 0_R)$, donde $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias que cumplen lo siguiente:

- $+$ es conmutativa,
- $+$ es asociativa,
- $\cdot$ es asociativa,
- Para todo elemento $x \in R$ existe un elemento $-x \in R$ tal que $x + (-x) = 0_R$,
- Para todo elemento $x \in R$ se cumple que $x + 0_R = x$,
- $\cdot$ se distribuye sobre $+$

Lo anterior lo podemos representar con el siguiente conjunto de ecuaciones, al que nombraremos $\mathcal{A}$.
Sean x, y, z cualesquiera elementos de R se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x + 0_R &= x && A1 \\
x + y &= y + z && A2 \\
x + (-x) &= 0_R && A3 \\
(x + y) + z &= x + (y + z) && A4 \\
(x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) && A5 \\
x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z && A6 \\
(x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z && A7
\end{aligned}
$$

Al conjunto de ecuaciones $\mathcal{A}$ lo llamaremos de ahora en adelante "base de datos".
Algunos ejemplos de anillos son:

- $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}})$.
- Los polinomios con coeficientes en los números complejos con la suma, la multiplicación de polinomios usual y el elemento neutro de la multiplicación es el polinomio 0.
- Las matrices de 2×2 con coeficientes reales con la suma y la multiplicación de matrices usual y el elemento neutro de la multiplicación es la matriz cuyas entradas son 0.

Un teorema muy simple en teoría de anillos es el siguiente:
Sea un anillo $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, 0)$ y sea $a \in R$ entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$a \cdot 0 = 0$$

1.1. Demostración usual

Demostración.

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) && \text{por } A1 \\
&= a \cdot 0 + a \cdot 0 && \text{por } A6
\end{aligned}
$$

Por transitividad de la igualdad tenemos que

$$\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a\cdot 0 + a\cdot 0 \\
a\cdot 0 + (-a\cdot 0) &= (a\cdot 0 + a\cdot 0) + (-a\cdot 0) && \text{sumando } -a\cdot 0 \\
0 &= (a\cdot 0 + a\cdot 0) + (-a\cdot 0) && \text{por } A3 \\
0 &= a\cdot 0 + (a\cdot 0 + (-a\cdot 0)) && \text{por } A4 \\
0 &= a\cdot 0 + 0 && \text{por } A3 \\
0 &= a\cdot 0 && \text{por } A1
\end{aligned}$$

Por simetría de la igualdad tenemos que

$$a\cdot 0 = 0$$

□

1.2. Reglas de inferencia de la lógica ecuacional

Antes de entrar a la demostración con lógica ecuacional recordemos las reglas de inferencia:

$$\frac{}{H}\ \text{Hyp} \qquad \frac{}{t=t}\ \text{Refl} \qquad \frac{s=t}{t=s}\ \text{Sym} \qquad \frac{t=r \quad r=s}{t=s}\ \text{Trans} \qquad \frac{t=s}{t\sigma = s\sigma}\ \text{Inst}$$

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \ldots \quad t_n = s_n}{f(t_1,\ldots,t_n) = f(s_1,\ldots,s_n)}\ \text{Congr}$$

Al conjunto anterior de reglas de inferencia es un ejemplo de un sistema de deducción.

1.3. Ejemplos de instancias de las reglas

Recordemos la definición de derivación dada en la nota 9 del curso
Una deducción o derivación de un enunciado $\mathcal{J}$ usando un sistema de deducción, es una secuencia finita $\Pi = \langle \mathcal{J}_1,\ldots,\mathcal{J}_k\rangle$ tal que $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}$ y cada $\mathcal{J}_i$, con $i\in\{1,\ldots,k\}$ es una instancia de una regla del sistema de deducción.
Daremos ejemplos de instancias de cada una de las reglas de inferencia. Tomemos como base la demostración del teorema y la "base de datos".

1.3.1. Ejemplo de la regla Hyp

$$\frac{}{x+y=y+x}\ \text{Hyp}$$

La instancias de la regla Hyp siempre serán alguna de las ecuaciones de nuestra "base de datos".

1.3.2. Ejemplo de la regla Refl

$$\frac{}{-0\cdot a = -0\cdot a}\ \text{Refl}$$

1.3.3. Ejemplo de la regla Sym

Tomando como ejemplo la demostración usual del teorema en la sección 1.1 una instancia de la regla Sym es la siguiente:

$$\frac{0 = a\cdot 0}{a\cdot 0 = 0}\ \text{Sym}$$

1.3.4. Ejemplo de la regla Trans

Tomando como ejemplo la demostración usual del teorema en la sección 1.1 una instancia de la regla Trans es la siguiente:

$$\frac{a\cdot 0 = a\cdot(0+0) \qquad a\cdot(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0}{a\cdot 0 = a\cdot 0 + a\cdot 0}\ \text{Trans}$$

1.3.5. Ejemplo de la regla Trans

$$\frac{x+0=x}{0+0=0}\ \text{Inst}$$

Es decir aquí realizamos una sustitución cambiamos a x por 0.

1.3.6. Ejemplo de la regla Congr

Tomando como ejemplo la demostración usual del teorema en la sección 1.1 una instancia de la regla Trans es la siguiente:

$$\frac{a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \qquad -0 \cdot a = -0 \cdot a}{(a \cdot 0) + (-0 \cdot a) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-0 \cdot a)}\ \text{Congr}$$

1.4. Demostración con lógica ecuacional

Ahora que hemos dado un ejemplo de instancias de cada una las reglas comencemos a realizar la demostración con lógica ecuacional de la igualdad $a \cdot 0 = 0$.
En la primera igualdad de la 1.1 utilizamos implícitamente cinco reglas la regla de Refl, Hyp, Inst, Sym y Congr.
Para lograr la igualdad $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$ es necesario lo siguiente en lógica ecuacional:

1.	$a = a$	Refl
2.	$x + 0 = x$	Hyp
3.	$0 + 0 = 0$	Inst (2)
4.	$0 = 0 + 0$	Sym (3)
5.	$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$	Congr $\cdot$ (1)(4)

Para obtener la ecuación $a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ utilizamos implícitamente las reglas de Hyp e Inst

6.	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Hyp$A6$
7.	$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Inst (6)

Para obtener la ecuación $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ utilizamos implícitamente la regla de Trans

8.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Trans (5)(7)

Para obtener la ecuación $(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$ utilizamos implícitamente las reglas de Refl y Congr

9.	$-a \cdot 0 = -a \cdot 0$	Refl
10.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Congr + (8)(9)

Para obtener la ecuación $(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = 0$ utilizamos implícitamente las reglas de Hyp e Inst

11.	$x + (-x) = 0$	Hyp
12.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = 0$	Inst (11)

Para obtener la ecuación $0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$ utilizamos implícitamente las reglas de Sym y Trans

13.	$0 = (a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Sym (12)
14.	$0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Trans (13)(10)

Para obtener la ecuación $0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$ utilizamos implícitamente las reglas de Hyp, Ints y Trans

15.	$(x + y) + z = x + (y + z)$	Hyp $A2$
16.	$(a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Inst (15)
17.	$0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Trans (14)(16)

Para obtener la ecuación $a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0$ utilizamos implícitamente las reglas de Refl y Congr

18.	$a \cdot 0 = a \cdot 0$	Refl
19.	$a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0$	Congr + (18)(12)

Para obtener la ecuación $0 = a \cdot 0 + 0$ utilizamos implícitamente la regla de Trans

20.	$0 = a \cdot 0 + 0$	Trans (17)(19)

Para obtener la ecuación $a \cdot 0 = 0$ utilizamos implícitamente las reglas de

21.	$a \cdot 0 + 0 = 0$	Sym (20)
22.	$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$	Inst (2)
23.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Sym (22)
24.	$a \cdot 0 = 0$	Trans (23)(21)

Por lo tanto queda demostrada la igualdad.
La demostración sin el análisis anterior quedaría de la siguiente manera:

1.	$a = a$	Refl
2.	$x + 0 = x$	Hyp
3.	$0 + 0 = 0$	Inst (2)
4.	$0 = 0 + 0$	Sym (3)
5.	$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$	Congr $\cdot$ (1)(4)
6.	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Hyp$A6$
7.	$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Inst (6)
8.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Trans (5)(7)
9.	$-a \cdot 0 = -a \cdot 0$	Refl
10.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Congr + (8)(9)
11.	$x + (-x) = 0$	Hyp
12.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = 0$	Inst (11)
13.	$0 = (a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Sym (12)
14.	$0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Trans (13)(10)
15.	$(x + y) + z = x + (y + z)$	Hyp $A2$
16.	$(a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Inst (15)
17.	$0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Trans (14)(16)
18.	$a \cdot 0 = a \cdot 0$	Refl
19.	$a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0$	Congr + (18)(12)
20.	$0 = a \cdot 0 + 0$	Trans (17)(19)
21.	$a \cdot 0 + 0 = 0$	Sym (20)
22.	$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$	Inst (2)
23.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Sym (22)
24.	$a \cdot 0 = 0$	Trans (23)(21)

Sin el análisis anterior la demostración parecería sacada de la manga o al menos muy “esotérica”.

1.5. Conclusión

Tanto la demostración usual como la demostración con lógica ecuacional son equivalentes y de hecho hicimos explícito el hecho de que al momento de demostrar de la forma usual es decir haciendo la secuencia de axiomas implícitamente estamos usando las reglas de la lógica ecuacional.