

1. Significado de los conectivos lógicos

1.1. Negación

- Símbolo utilizado: \neg
- Correspondencia con el español: **No**, no es cierto que, es falso que, etc.
- Otros símbolos: $\sim \varphi$, $\overline{\varphi}$.

1.1.1. Tabla de verdad

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

1.2. Disyunción

1.2.1. Descripción

La **disyunción** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \vee \psi$.
Las fórmulas φ, ψ se llaman **disyuntos**.

- Símbolo utilizado: \vee
- Correspondencia con el español: **ó**.
- Otros símbolos: $\varphi + \psi$, $\varphi \mid \psi$.

1.2.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.3. Conjunción

1.3.1. Descripción

La **conjunción** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \wedge \psi$. Las fórmulas φ, ψ se llaman **conyuntos**.

- Símbolo utilizado: \wedge
- Correspondencia con el español: **y, pero**
- Otros símbolos: $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \cdot \psi$ ó $\varphi\psi$

1.3.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.4. Implicación

1.4.1. Descripción

La **implicación** o **condicional** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$. La fórmula φ es el *antecedente* y la fórmula ψ es el *consecuente* de la implicación.

- Símbolo utilizado: \rightarrow
- Correspondencia con el español: $\varphi \rightarrow \psi$ significa: si φ entonces ψ ; ψ , si φ ; φ sólo si ψ ; φ es condición suficiente para ψ ; ψ es condición necesaria para φ .
- Otros símbolos: $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \supset \psi$

1.4.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.5. Doble implicación

1.5.1. Descripción

La equivalencia o bicondicional de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$.

- Símbolo utilizado: \leftrightarrow
- Correspondencia con el español: φ es equivalente a ψ ; φ si y sólo si ψ ; φ es condición necesaria y suficiente para ψ .
- Otros símbolos: $\varphi \Leftrightarrow \psi$, $\varphi \equiv \psi$

1.5.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2. Semántica formal de los conectivos

2.1. Semántica formal de los conectivos lógicos

2.1.1. Tipo Bool

El tipo de valores booleanos denotado Bool se define como $\text{Bool} = \{0, 1\}$.

2.1.2. Estado

Un estado o asignación de las variables (proposicionales) es una función

$$\mathcal{I} : \text{Var}P \rightarrow \text{Bool}$$

Dadas n variables proposicionales existen 2^n estados distintos para estas variables. Lo anterior tiene justificación a través del **principio de la multiplicación**.

2.1.3. Interpretación

Dado un estado de las variables $\mathcal{I} : VarP \rightarrow Bool$, definimos la interpretación de las fórmulas con respecto a \mathcal{I} como la función $\mathcal{I}^* : PROP \rightarrow Bool$ tal que:

- $\mathcal{I}^*(p) = \mathcal{I}(p)$ para $p \in VarP$, es decir $\mathcal{I}^*|_{VarP} = \mathcal{I}$
- $\mathcal{I}^*(\top) = 1$
- $\mathcal{I}^*(\perp) = 0$
- $\mathcal{I}^*(\neg\varphi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^*(\varphi) = 0$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi \wedge \psi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^*(\varphi) = \mathcal{I}^*(\psi) = 1$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi \vee \psi) = 0$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^*(\varphi) = \mathcal{I}^*(\psi) = 0$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^*(\varphi) = 1$ e $\mathcal{I}^*(\psi) = 0$.
- $\mathcal{I}^*(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^*(\varphi) = \mathcal{I}^*(\psi)$.

2.1.4. Sobrecarga de operadores

Obsérvese que dado un estado de las variables \mathcal{I} , la interpretación \mathcal{I}^* generada por \mathcal{I} está determinada de manera única por lo que de ahora en adelante escribiremos simplemente \mathcal{I} en lugar de \mathcal{I}^* .

2.2. Lema de coincidencia

Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 : VarP \rightarrow Bool$ dos estados que coinciden en las variables proposicionales de la fórmula φ , es decir $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in vars(\varphi)$. Entonces $\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$.

2.3. Estado modificado o actualizado

Sean $\mathcal{I} : VarP \rightarrow Bool$ un estado de las variables, p una variable proposicional y $v \in Bool$. Definimos la actualización de \mathcal{I} en p por v , denotado $\mathcal{I}[p/v]$ como sigue:

$$\mathcal{I}[p/v](q) = \begin{cases} v & \text{si } q = p \\ q & \text{si } q \neq p \end{cases}$$

2.4. Lema de sustitución

Sean \mathcal{I} una interpretación, p una variable proposicional y ψ una fórmula tal que $\mathcal{I}^*(\psi) = v$. Entonces

$$\mathcal{I}(\varphi[p := \psi]) = \mathcal{I}[p/v](\varphi)$$

3. Conceptos Semánticos Básicos

3.1. Tautología

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda interpretación \mathcal{I} decimos que φ es una tautología o fórmula válida y escribimos $\models \varphi$.

3.2. Satisfacible

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para alguna interpretación \mathcal{I} decimos que φ es satisfacible, que φ es verdadera en \mathcal{I} y escribimos $\mathcal{I} \models \varphi$.

3.3. Insatisfacible

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ para alguna interpretación \mathcal{I} decimos que φ es insatisfacible o es falsa en \mathcal{I} y escribimos $\mathcal{I} \not\models \varphi$.

3.4. Contradicción

Si $\mathcal{I}(\varphi) = 0$ para toda interpretación \mathcal{I} decimos que φ es una contradicción o una fórmula no satisfacible.

3.5. Conjunto de fórmulas

Sea Γ es un conjunto de fórmulas decimos que:

- Γ es satisfacible si tiene un modelo, es decir, si existe una interpretación \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$. Lo cual denotamos a veces, abusando de la notación, con $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$.
- Γ es insatisfacible o no satisfacible si no tiene un modelo, es decir, si no existe una interpretación \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

3.6. Proposición

Sea Γ un conjunto de fórmulas, $\varphi \in \Gamma$, τ una tautología y χ una contradicción. Si Γ es satisfacible entonces

1. $\Gamma \setminus \{\varphi\}$ es satisfacible.
2. $\Gamma \cup \{\tau\}$ es satisfacible.
3. $\Gamma \cup \{\chi\}$ es insatisfacible.

Si Γ es insatisfacible, con $\tau \in \Gamma$ entonces

1. $\Gamma \cup \{\psi\}$ es insatisfacible, para cualquier $\psi \in \text{PROP}$.
2. $\Gamma \setminus \{\tau\}$ es insatisfacible.

Veamos (1)

Demostración. Definimos a Γ como sigue:

$$\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \varphi\}$$

Como Γ es satisfacible, entonces existe una interpretación \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(\kappa) = 1$ para toda $\kappa \in \Gamma$.

Sea $\Gamma' = \Gamma \setminus \{\varphi\}$, entonces definimos a \mathcal{I}' como

$$\mathcal{I}'(\kappa) = \mathcal{I}(\kappa)$$

Para toda $\kappa \in \Gamma'$. Por definición de \mathcal{I} tenemos que

$$\mathcal{I}'(\kappa) = 1$$

Para toda $\kappa \in \Gamma'$. Por lo tanto Γ' es satisfacible □

Veamos (2)

Demostración. Definimos a Γ como sigue:

$$\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \varphi\}$$

Como Γ es satisfacible, entonces existe una interpretación \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(\kappa) = 1$ para toda $\kappa \in \Gamma$.

Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\tau\}$, entonces como

$$\mathcal{I}(\tau) = 1$$

ya que τ es tautología. Por lo tanto Γ' es satisfacible bajo \mathcal{I} . □

Veamos (3)

Demostración. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\chi\}$, entonces como

$$\mathcal{I}(\chi) = 0$$

para cualquier interpretación \mathcal{I} , entonces el conjunto Γ' no es satisfacible. Ya que en particular χ siempre se evaluará en 0. □

3.7. Proposición

Sea $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Γ es satisfacible sí y sólo sí $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ es satisfacible.
2. Γ es insatisfacible sí y sólo sí $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ es una contradicción.

Veamos (1)

Demostración. (Ida)

Como Γ es satisfacible, entonces existe una interpretación \mathcal{I} tal que para toda $\varphi_i \in \Gamma$ con $1 \leq i \leq n$. Entonces tenemos que se cumple que:

- $\mathcal{I}(\varphi_1) = 1$ y
- $\mathcal{I}(\varphi_2) = 1$ y
- ...
- $\mathcal{I}(\varphi_n) = 1$.

Entonces tenemos que

$$\mathcal{I}(\varphi_1) = \mathcal{I}(\varphi_2) = \dots = \mathcal{I}(\varphi_n) = 1$$

Consecuentemente

$$\mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$$

Por lo tanto

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

es satisfacible bajo \mathcal{I} .

(Vuelta)

Como

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

es satisfacible bajo \mathcal{I} . Entonces

$$\mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$$

que implica que

$$\mathcal{I}(\varphi_1) = \mathcal{I}(\varphi_2) = \dots = \mathcal{I}(\varphi_n) = 1$$

lo anterior es equivalente a lo siguiente:

- $\mathcal{I}(\varphi_1) = 1$ y
- $\mathcal{I}(\varphi_2) = 1$ y
- ...
- $\mathcal{I}(\varphi_n) = 1$.

Por lo tanto tenemos que Γ es satisfacible. □

4. Ejercicios

4.1. Ejercicio 1

Defina utilizando los conectivos lógicos vistos en clase el operador \oplus (ó exclusivo), cuya propiedad es:

$$\mathcal{I}(\varphi \oplus \psi) = 1$$

sí y sólo sí

$$\mathcal{I}(\varphi) \neq \mathcal{I}(\psi)$$

4.2. Solución

Sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= 1 & \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\varphi) &= \mathcal{I}(\psi)\end{aligned}$$

Entonces por **contra-positiva** tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= 0 & \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\varphi) &\neq \mathcal{I}(\psi)\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\neg\varphi) &= 1 - \mathcal{I}(\varphi) \\ \mathcal{I}(\neg\neg\varphi) &= \mathcal{I}(\varphi)\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= 0 & \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) &= 1\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) &= 1 & \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\varphi) &\neq \mathcal{I}(\psi)\end{aligned}$$

Podemos concluir que:

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \varphi \oplus \psi$$

Por equivalencias lógicas

$$\begin{aligned}\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) &\equiv \neg((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) & \text{Eliminación de } \leftrightarrow \\ &\equiv \neg((\neg\psi \vee \varphi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi)) & \text{Eliminación de } \rightarrow \\ &\equiv \neg(\neg\psi \vee \varphi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \psi) & \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg\neg\psi \wedge \neg\varphi) \vee (\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) & \text{De Morgan} \\ &\equiv (\psi \wedge \neg\varphi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi) & \text{Doble Negación} \\ &\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) & \text{Conmutatividad}\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\varphi \oplus \psi \equiv \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$$

Por transitividad podemos concluir que

$$\varphi \oplus \psi \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$$

4.2.1. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4.3. Ejercicio 2

Demuestre que si Γ es insatisfacible, con $\tau \in \Gamma$ entonces

1. $\Gamma \cup \{\psi\}$ es insatisfacible, para cualquier $\psi \in \text{PROP}$.

τ es una **tautología**.

Demostración. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi\}$, entonces como

$$\mathcal{I}(\tau) = 1$$

para alguna $\chi \in \Gamma$, entonces al agregar ψ , seguirá sin existir una interpretación \mathcal{I} que haga verdadera tanto a χ como a ψ , por lo tanto Γ' es insatisfacible. \square

4.4. Ejercicio 3

Sea $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas. Demuestra Γ es insatisfacible sí y sólo sí $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ es una contradicción.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior.

□