1. Significado de los conectivos lógicos

1.1. Negación

- Símbolo utilizado: $\neg$
- Correspondencia con el español: **No**, no es cierto que, es falso que, etc.
- Otros símbolos: $\sim \varphi$, $\overline{\varphi}$.

1.1.1. Tabla de verdad

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

1.2. Disyunción

1.2.1. Descripción

La **disyunción** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \vee \psi$.
Las fórmulas φ, ψ se llaman **disyuntos**.

- Símbolo utilizado: $\vee$
- Correspondencia con el español: ó.
- Otros símbolos: $\varphi + \psi, \varphi \mid \psi$.

1.2.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.3. Conjunción

1.3.1. Descripción

La **conjunción** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \wedge \psi$. Las fórmulas φ, ψ se llaman **conyuntos**.

- Símbolo utilizado: $\wedge$
- Correspondencia con el español: y, pero
- Otros símbolos: $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \cdot \psi$ ó $\varphi\psi$

1.3.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.4. Implicación

1.4.1. Descripción

La **implicación** o **condicional** de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \to \psi$. La fórmula φ es el *antecedente* y la fórmula ψ es el *consecuente* de la implicación.

- Símbolo utilizado: $\to$
- Correspondencia con el español: $\varphi \to \psi$ significa: si φ entonces ψ; ψ, si φ; φ sólo si ψ; φ es condición suficiente para ψ; ψ es condición necesaria para φ.
- Otros símbolos: $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \supset \psi$

1.4.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.5. Doble implicación

1.5.1. Descripción

La equivalencia o bicondicional de las fórmulas φ, ψ es la fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$.

- Símbolo utilizado: $\leftrightarrow$
- Correspondencia con el español: φ es equivalente a ψ; φ si y sólo si ψ; φ es condición necesaria y suficiente para ψ.
- Otros símbolos: $\varphi \Leftrightarrow \psi$, $\varphi \equiv \psi$

1.5.2. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2. Semántica formal de los conectivos

2.1. Semántica formal de los conectivos lógicos

2.1.1. Tipo `Bool`

El tipo de valores booleanos denotado `Bool` se define como `Bool`$= \{0, 1\}$.

2.1.2. Estado

Un estado o asignación de las variables (proposicionales) es una función

$$\mathcal{I} \; : \; VarP \to \texttt{Bool}$$

Dadas n variables proposicionales existen 2^n estados distintos para estas variables. Lo anterior tiene justificación a través del **principio de la multiplicación**.

2.1.3. Interpretación

Dado un estado de las variables $\mathcal{I} : VarP \to \texttt{Bool}$, definimos la interpretación de las fórmulas con respecto a $\mathcal{I}$ como la función $\mathcal{I}^\star : \texttt{PROP} \to \texttt{Bool}$ tal que:

- $\mathcal{I}^\star(p) = \mathcal{I}(p)$ para $p \in VarP$, es decir $\mathcal{I}^\star|_{VarP} = \mathcal{I}$
- $\mathcal{I}^\star(\top) = 1$
- $\mathcal{I}^\star(\bot) = 0$
- $\mathcal{I}^\star(\neg\varphi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = 0$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \wedge \psi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi) = 1$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \vee \psi) = 0$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi) = 0$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \to \psi) = 0$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = 1$ **e** $\mathcal{I}^\star(\psi) = 0$.
- $\mathcal{I}^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sí y solamente sí $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi)$.

2.1.4. Sobrecarga de operadores

Obsérvese que dado un estado de las variables $\mathcal{I}$, la interpretación $\mathcal{I}^\star$ generada por $\mathcal{I}$ está determinada de manera única por lo que de ahora en adelante escribiremos simplemente $\mathcal{I}$ en lugar de $\mathcal{I}^\star$.

2.2. Lema de coincidencia

Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 : VarP \to \texttt{Bool}$ dos estados que coinciden en las variables proposicionales de la fórmula φ, es decir $\mathcal{I}_1(p) = \mathcal{I}_2(p)$ para toda $p \in vars(\varphi)$.
Entonces $\mathcal{I}_1(\varphi) = \mathcal{I}_2(\varphi)$.

2.3. Estado modificado o actualizado

Sean $\mathcal{I} : VarP \to \texttt{Bool}$ un estado de las variables, p una variable proposicional y $v \in \texttt{Bool}$. Definimos la actualización de $\mathcal{I}$ en p por v, denotado $\mathcal{I}[p/v]$ como sigue:

$$\mathcal{I}\left[p/v\right](q) = \begin{cases} v & \text{si } q = p \\ q & \text{si } q \neq p \end{cases}$$

2.4. Lema de sustitución

Sean $\mathcal{I}$ una interpretación, p una variable proposicional y ψ una fórmula tal que $\mathcal{I}^\star(\psi) = v$. Entonces

$$\mathcal{I}\left(\varphi\left[p := \psi\right]\right) = \mathcal{I}\left[p/v\right](\varphi)$$

3. Ejercicios

3.1. Ejercicio 1

Defina utilizando los conectivos lógicos vistos en clase el operador $\oplus$ (ó exclusivo), cuya propiedad es:

$$\mathcal{I}\left(\varphi \oplus \psi\right) = 1$$

sí y sólo sí

$$\mathcal{I}\left(\varphi\right) \neq \mathcal{I}\left(\psi\right)$$

3.2. Solución

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 & \qquad \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}(\varphi) & \end{aligned}$$

Entonces por **contra-positiva** tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0 & \qquad \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\varphi) \neq \mathcal{I}(\varphi) & \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\gamma) = 0 & \qquad \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\neg\gamma) = 1 & \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0 & \qquad \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 & \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 & \qquad \text{sí y sólo sí} \\ \mathcal{I}(\varphi) \neq \mathcal{I}(\varphi) & \end{aligned}$$

Podemos concluir que:

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \varphi \oplus \psi$$

Por equivalencias lógicas

$$\begin{aligned} \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) &\equiv \neg((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)) && \text{Eliminación de } \leftrightarrow \\ &\equiv \neg((\neg\varphi \lor \psi) \land (\neg\psi \lor \varphi)) && \text{Eliminación de } \to \\ &\equiv \neg(\neg\varphi \lor \psi) \lor \neg(\neg\psi \lor \varphi) && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\neg\neg\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\neg\psi \land \neg\varphi) && \text{De Morgan} \\ &\equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\psi \land \neg\varphi) && \text{Doble Negación} \\ &\equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi) && \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\varphi \oplus \psi \equiv \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$$

Por transitividad podemos concluir que

$$\varphi \oplus \psi \equiv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$$

3.2.1. Tabla de verdad

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0