Fausto David Hernández Jasso
@FaustoJH
fausto.david.hernandez.jasso@ciencias.unam.mx

1. Anillos

Una anillo es una estructura algebraica $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, 0_R)$, donde $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias que cumplen lo siguiente:

- $+$ es conmutativa,
- $+$ es asociativa,
- $\cdot$ es asociativa,
- Para todo elemento $x \in R$ existe un elemento $-x \in R$ tal que $x + (-x) = 0_R$,
- Para todo elemento $x \in R$ se cumple que $x + 0_R = x$,
- $\cdot$ se distribuye sobre $+$

Lo anterior lo podemos representar con el siguiente conjunto de ecuaciones, al que nombraremos $\mathcal{A}$.
Sean x, y, z cualesquiera elementos de R se tiene que:

$$\begin{aligned} x + 0_R &= x && A1 \\ x + y &= y + z && A2 \\ x + (-x) &= 0_R && A3 \\ (x + y) + z &= x + (y + z) && A4 \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) && A5 \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z && A6 \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z && A7 \end{aligned}$$

Cuando no haya ambigüedad denotaremos a 0_R como simplemente 0.
Al conjunto de ecuaciones $\mathcal{A}$ lo llamaremos de ahora en adelante “base de datos”.
Algunos ejemplos de anillos son:

- $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}})$.
- Los polinomios con coeficientes en los números complejos con la suma, la multiplicación de polinomios usuales y el elemento neutro de la suma de polinomios es el polinomio 0.
- Las matrices de 2×2 con coeficientes reales con la suma y la multiplicación de matrices usuales y el elemento neutro de la suma es la matriz cuyas entradas son 0.

Un teorema muy simple en teoría de anillos es el siguiente:
Sea un anillo $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, 0)$ y sea $a \in R$ entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$a \cdot 0 = 0$$

1.1. Demostración usual

Demostración.

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) && \text{por } A1 \\ &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && \text{por } A6 \end{aligned}$$

Por transitividad de la igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 \\ a \cdot 0 + (-a \cdot 0) &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) && \text{sumando } -a \cdot 0 \\ 0 &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) && \text{por } A3 \\ 0 &= a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) && \text{por } A4 \\ 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{por } A3 \\ 0 &= a \cdot 0 && \text{por } A1 \end{aligned}$$

Por simetría de la igualdad tenemos que

$$a \cdot 0 = 0$$

$\square$

1.2. Reglas de inferencia de la lógica ecuacional

Antes de entrar a la demostración con lógica ecuacional recordemos las reglas de inferencia:

$$\frac{}{H}\ \text{Hyp} \qquad \frac{}{t = t}\ \text{Refl} \qquad \frac{s = t}{t = s}\ \text{Sym} \qquad \frac{t = r \quad r = s}{t = s}\ \text{Trans} \qquad \frac{t = s}{t\sigma = s\sigma}\ \text{Inst}$$

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \dots \quad t_n = s_n}{f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n)}\ \text{Congr}$$

Al conjunto anterior de reglas de inferencia es un ejemplo de un sistema de deducción.

1.3. Ejemplos de instancias de las reglas

Recordemos la definición de derivación dada en la nota 9 del curso.
Una deducción o derivación de un enunciado $\mathcal{J}$ usando un sistema de deducción, es una secuencia finita $\Pi = \langle \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k \rangle$ tal que $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}$ y cada $\mathcal{J}_i$, con $i \in \{1, \dots, k\}$ es una instancia de una regla del sistema de deducción.
Daremos ejemplos de instancias de cada una de las reglas de inferencia. Tomemos como base la demostración usual del teorema en la sección 1.1 y la “base de datos”.

1.3.1. Ejemplo de la regla Hyp

$$\frac{}{x + y = y + x}\ \text{Hyp}$$

La instancias de la regla Hyp siempre serán alguna de las ecuaciones de nuestra “base de datos”. En este ejemplo en concreto las instancias de la regla Hyp solamente pueden ser los axiomas de anillos definidos al inicio de este documento.

1.3.2. Ejemplo de la regla Refl

$$\frac{}{-0 \cdot a = -0 \cdot a}\ \text{Refl}$$

1.3.3. Ejemplo de la regla Sym

Tomando como ejemplo la demostración usual del teorema en la sección 1.1 una instancia de la regla Sym es la siguiente:

$$\frac{0 = a \cdot 0}{a \cdot 0 = 0}\ \text{Sym}$$

1.3.4. Ejemplo de la regla Trans

Tomando como ejemplo la demostración usual del teorema en la sección 1.1 una instancia de la regla Trans es la siguiente:

$$\frac{a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \qquad a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0}{a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0}\ \text{Trans}$$

1.3.5. Ejemplo de la regla Inst

$$\frac{x + 0 = x}{0 + 0 = 0}\ \text{Inst}$$

Es decir aquí realizamos una sustitución cambiamos a x por 0.

1.3.6. Ejemplo de la regla Congr

Tomando como ejemplo la demostración usual del teorema en la sección 1.1 una instancia de la regla Congr es la siguiente:

$$\frac{a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \qquad -0 \cdot a = -0 \cdot a}{(a \cdot 0) + (-0 \cdot a) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-0 \cdot a)}\ \text{Congr}$$

En éste ejemplo en concreto podemos aplicar las regla Congr con dos operaciones *(funciones)*, las cuales son: $+$ y $\cdot$.

1.4. Demostración con lógica ecuacional

Ahora que hemos dado un ejemplo de instancias de cada una las reglas comencemos a realizar la demostración con lógica ecuacional de la igualdad $a \cdot 0 = 0$.
En la primera igualdad de la 1.1 utilizamos implícitamente cinco reglas la regla de Refl, Hyp, Inst, Sym y Congr.
Para lograr la igualdad $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$ es necesario lo siguiente en lógica ecuacional:

1.	$a = a$	Refl
2.	$x + 0 = x$	Hyp $A1$
3.	$0 + 0 = 0$	Inst (2)
4.	$0 = 0 + 0$	Sym (3)
5.	$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$	Congr $\cdot$ (1)(4)

Para obtener la ecuación $a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ utilizamos implícitamente las reglas de Hyp e Inst:

6.	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Hyp $A6$
7.	$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Inst (6)

Para obtener la ecuación $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ utilizamos implícitamente la regla Trans:

8.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Trans (5)(7)

Para obtener la ecuación $(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$ utilizamos implícitamente las reglas de Refl y Congr:

9.	$-a \cdot 0 = -a \cdot 0$	Refl
10.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Congr + (8)(9)

Para obtener la ecuación $(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = 0$ utilizamos implícitamente las reglas de Hyp e Inst:

11.	$x + (-x) = 0$	Hyp $A3$
12.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = 0$	Inst (11)

Para obtener la ecuación $0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$ utilizamos implícitamente las reglas de Sym y Trans:

13.	$0 = (a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Sym (12)
14.	$0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Trans (13)(10)

Para obtener la ecuación $0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$ utilizamos implícitamente las reglas de Hyp, Inst y Trans:

15.	$(x + y) + z = x + (y + z)$	Hyp $A2$
16.	$(a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Inst (15)
17.	$0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Trans (14)(16)

Para obtener la ecuación $a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0$ utilizamos implícitamente las reglas de Refl y Congr

18.	$a \cdot 0 = a \cdot 0$	Refl
19.	$a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0$	Congr + (18)(12)

Para obtener la ecuación $0 = a \cdot 0 + 0$ utilizamos implícitamente la regla de Trans

20.	$0 = a \cdot 0 + 0$	Trans (17)(19)

Para obtener la ecuación $a \cdot 0 = 0$ utilizamos implícitamente las reglas de Sym, Inst y Trans:

21.	$a \cdot 0 + 0 = 0$	Sym (20)
22.	$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$	Inst (2)
23.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Sym (22)
24.	$a \cdot 0 = 0$	Trans (23)(21)

Por lo tanto queda demostrada la igualdad.
La demostración sin el análisis anterior quedaría de la siguiente manera:

1.	$a = a$	Refl
2.	$x + 0 = x$	Hyp
3.	$0 + 0 = 0$	Inst (2)
4.	$0 = 0 + 0$	Sym (3)
5.	$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$	Congr $\cdot$ (1)(4)
6.	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Hyp $A6$
7.	$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Inst (6)
8.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Trans (5)(7)
9.	$-a \cdot 0 = -a \cdot 0$	Refl
10.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Congr + (8)(9)
11.	$x + (-x) = 0$	Hyp $A3$
12.	$(a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = 0$	Inst (11)
13.	$0 = (a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Sym (12)
14.	$0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$	Trans (13)(10)
15.	$(x + y) + z = x + (y + z)$	Hyp $A2$
16.	$(a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Inst (15)
17.	$0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$	Trans (14)(16)
18.	$a \cdot 0 = a \cdot 0$	Refl
19.	$a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0$	Congr + (18)(12)
20.	$0 = a \cdot 0 + 0$	Trans (17)(19)
21.	$a \cdot 0 + 0 = 0$	Sym (20)
22.	$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$	Inst (2)
23.	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Sym (22)
24.	$a \cdot 0 = 0$	Trans (23)(21)

Sin el análisis anterior la demostración parecería sacada de la manga o al menos muy “esotérica”.
Durante el análisis mencionamos la palabra implícitamente cada vez que derivamos una ecuación de la demostración usual en la sección 1.1 porque son reglas que estamos usando también en la demostración usual pero por convención no las escribimos porque se dan por hecho que el lector sabe esos detalles.
La prueba anterior en su forma de árbol de derivación se construye de abajo hacia arriba, partimos de que la raíz es $a \cdot 0 = 0$ y a partir de ahí vamos aplicando las reglas de inferencia de abajo hacia arriba. En el caso de las reglas Trans y Congr que en la demostración en forma de lista vienen de dos ecuaciones anteriores, la primera corresponde a la rama izquierda del árbol, mientras que la segunda corresponde a su rama derecha.
Ejemplificando:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0}}{a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0}\,\text{Sym} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{0 = a \cdot 0 + 0}}{a \cdot 0 + 0 = 0}\,\text{Sym}}{a \cdot 0 = 0}\,\text{Trans}$$

Sucede lo análogo cuando venimos de una regla Congr.

1.5. Conclusión

Tanto la demostración usual como la demostración con lógica ecuacional son equivalentes y de hecho hicimos explícito el hecho de que al momento de demostrar de la forma usual es decir haciendo la secuencia de axiomas implícitamente estamos usando las reglas de la lógica ecuacional.

1.6. Ejercicios de práctica

Para practicar las demostraciones en lógica ecuacional puedes realizar las siguientes demostraciones en lógica ecuacional:

- $-a = (-1) \cdot a$
- $(-a)(-b) = ab$

Se recomienda ampliamente hacer la demostración de sucesión de axiomas y de ahí guiarse para hacer la demostración en lógica ecuacional.