UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

FACULTAD DE INGENIERÍA EN CIENCIAS APLICADAS

ESCUELA DE INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

TRABAJO DE GRADO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TITULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA

TEMA:

“ALGORITMO PARA DISMINUCIÓN DE DEGRADACIÓN DEL RENDIMIENTO EN SISTEMAS DE CONTROL CON ACTUACIÓN PERIÓDICA”

AUTOR: FAUSTO ISRAEL ORTEGA SALAS

DIRECTOR: CARLOS XAVIER ROSERO CHANDI

IBARRA-ECUADOR
DICIEMBRE-2020

Dedicatoria

Dedicado a mi familia

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Próximamente

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo de grado ha sido realizado con el *Grupo de Investigación en Sistemas Inteligentes de la Universidad Técnica del Norte (GISI-UTN).*

1.1. Problema

El uso de sistemas controlados por computador tiene un incremento drástico en la vida diaria. Procesador y microcontroladores son incrustados cada ves mas en los dispositivos que se usan en la cotidianidad. Debido a las restricciones de costo, muchos de estos dispositivos que corren aplicaciones de control son diseñados con bajo espacio, peso y restricciones de energía.[1]

El desarrollo de algoritmos de control efectivo para varios sistemas dinámicos sigue siendo relevante para la teoría de control moderna.[2] Durante las ultimas décadas, la programación del tiempo de procesador ha sido un área de investigación muy activa y se han desarrollado varios métodos y modelos de programación diferentes.[3]

Las características de tiempo real en tareas con comportamiento dinámico, junto con restricciones de costo y recursos, crea nuevos problemas que deben abordarse en el diseño de dichos sistemas, en diferentes niveles de arquitectura[4]. Algunos investigadores sugieren que se deben usar nuevas formas de control para distribuir los recursos adecuadamente en base a regulaciones de control orientadas a los recursos como el control disparado por eventos y el control auto-disparado[5].

Para muchos sistemas de control, el rendimiento depende en gran medida de las variaciones de retardo en las tareas de control. Dichas variaciones pueden provenir de numerosas fuentes, incluidas la prioridad de las tareas, las variaciones en las cargas de trabajo de las tareas, errores de medición y las perturbaciones en el entorno físico, y pueden causar un rendimiento del sistema de control degradado, como una respuesta lenta y un comportamiento erróneo[6]. Además las propiedades de los algoritmos de programación en tiempo real pueden causar repuestas inesperadas del sistema de control en la implementación de sistemas controlados por procesador en tiempo real. Después de que una tarea ha sido lanzada, tiene que retazar su inicio de ejecución, la acción de control también puede ser remplazada o bloqueada al intentar acceder a recursos compartidos del procesador, esto significa que los instantes de tiempo de ejecución de la tarea de control no son equidistas en el tiempo de ejecución[7].

1.2. Alcance

En el presente proyecto se considerara un modelo en espacio de estados que represente cualquier tipo de planta, donde las matrices de la dinámica se encuentran en función del tiempo de muestreo y el retardo. Ante esto se propone un modelo que considere que el tiempo de muestreo no se mida entre tomas de datos de los sensores sino entre puntos de actuación manteniendo la periodicidad, donde el modelo en espacio de estados discreto depende del tiempo de muestreo, de los retardos y el tiempo entre actuación, permitiendo que a pesar de que existan retardos siempre se tenga un buen desempeño, es decir robustez. Se evaluara el modelo de control con simulaciones a través de software matemático.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Diseñar un algoritmo para disminución de degradación del rendimiento en sistemas de control considerando actuación periódica.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Proponer un modelo de control para disminución de degradación del rendimiento en sistemas de control, basado en la literatura.
- Desarrollar un algoritmo para la implementación del modelo de control.
- Evaluar el desempeño del método propuesto.

1.4. Justificación

Los sistemas de control digital constituyen una gran parte de todos los sistemas en tiempo real. A pesar de esto, sorprendentemente se ha hecho poco esfuerzo para estudiar su comportamiento oportuno cuando se implementa como tareas periódicas en su computador. Para muchos sistemas ciber-físicos, la coordinación de inteligencia entre el diseño de control y la implementación de su computadora correspondiente pueden llevar a su mejor rendimiento de control y/o una reducción de costos. La mayoría de los dispositivos integrados interactúan con el entorno y tienen especificaciones de calidad exigentes, cuya satisfacción requiere que el sistema reaccione de manera oportuna a eventos externos y ejecute actividades computacionales dentro de restricciones de tiempo precisas.

Los sistemas de control basados en computadora utilizan técnicas en tiempo real para resolver problemas reales de ingeniería en mecatrónica. Los fundamentos teóricos obtenidos se convierten en las bases del diseño robótico y mecatrónico brindando la capacidad de análisis y razonamiento matemático para detectar, analizar y resolver problemas de ingeniería que involucren la mecánica, la microelectrónica, la robótica y biomecánica , desarrollando habilidades para una actualización permanente a lo largo del ejercicio profesional.

Capítulo 2

Revisión Literaria

En este capitulo se hace una descripción de los conceptos concernientes a control automático, técnicas de control y el filtro de kalman .

2.1. Control Automático

Control Automático es una disciplina aplicada a la Ingeniería de Procesos, que ha evolucionado a gran velocidad. El intensivo uso del control automático a dado origen a técnicas de medición y control las cuales son muy aplicadas en el ambiente industrial.

La eliminación parcial del error en los procesos y un aumento considerable en la seguridad de los sistemas controlados aplicando técnicas de control, son puntos importantes que destacan en su aplicación en la industria.

Un sistema de control automático se basa en el principio de realimentación de estados o feedback, esta operación permite al controlador mantener actualizado con la información de las variables de estado, con esta información realiza correcciones al proceso cuando sea necesario.

2.2. Control en el Espacio de Estados

El control automático ha desempeñado un papel vital en el avance de la ingeniería y la ciencia. Se ha convertido en una parte importante e integral en los sistemas de vehículos espaciales, en los sistemas robóticos, en los procesos modernos de fabricación y en cualquier operación industrial que requiera el control de temperatura, presión, humedad, flujo, etc. Es deseable que la mayoría de los ingenieros y científicos estén familiarizados con la teoría y la práctica del control automático.

Un sistema moderno complejo posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre si de una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a computadoras que realicen una gran parte de los tediosos cálculos que son necesarios. El enfoque en el espacio de estados para el análisis de sistemas es el mas conveniente desde este punto de vista. Mientras la teoría de control convencional se basa en la relación entrada-salida, o función de transferencia, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial vectorial de primer orden. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en el numero de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones. De hecho, el análisis de sistemas complicados con múltiples entradas y salidas se realiza mediante procedimientos solo ligeramente mas complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden[8].

2.3. Control por Realimentación de Estados

2.3.1. Modelado en el Espacio de Estados

La tendencia de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que su formulación es aplicable a sistemas de múltiples-entradas, múltiples-salidas, que pueden ser lineales o no lineales, invariables en el tiempo o variables en el tiempo, mientras que la teoría convencional sólo es aplicable a sistemas de una entrada-una salida invariantes en el tiempo. Además, la teoría de control moderna es esencialmente una aproximación en el dominio temporal, mientras que la teoría de control convencional es una aproximación en el dominio de la frecuencia compleja. Antes de continuar, se debe definir estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estados [8].

Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier$t \geq t_0$. Obsérvese que el concepto de estado no está limitado a sistemas físicos. Es aplicable a sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas sociales y otros[8].

Variable de Estado

Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico (de forma que una vez que la entrada para $t = t_0$ está dada y el estado inicial en $t \geq t_0$ está especificado, el estado futuro del sistema está determinado completamente), entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado. Obsérvese que las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles o cantidades observables. Se pueden seleccionar como variables de estado variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables. Tal libertad en la elección de las variables de estado es una ventaja de los métodos en el espacio de estados. Sin embargo, prácticamente es conveniente seleccionar para las variables de estado cantidades físicamente medibles, si esto es posible, porque las leyes de control óptimo requerirán realimentar todas las variables de estado con una ponderación adecuada[8].

Vector de Estado

Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector x. Este vector se denomina vector de estado. Un vector de estado es, por lo tanto, un vector que determina unívocamente el estado del sistema $x(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$, una vez que se conoce el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ [8].

Espacio de Estado

El espacio n-dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2 , ..., eje x_n , donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados[8].

Ecuaciones en el espacio de estado

En el análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. La representación en el espacio de estados de un sistema dado no es única, salvo que el número de variables de estado es el mismo para cualquiera que sea la representación en variables de estado de un mismo sistema. El sistema dinámico debe contener elementos que recuerden los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Puesto que los integradores en un sistema de control en tiempo continuo sirven como dispositivo de memoria, las salidas de tales integradores se pueden considerar como las variables que describen el estado interno del sistema dinámico.

Así las salidas de los integradores sirven como variables de estado. El número de variables de estado para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que aparezcan en el mismo[8].

Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores. Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t)$. Se definen las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$. Entonces el sistema se puede describir mediante

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ x_2(t) &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ x_n(t) &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., ur; t) \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si definimos como

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}, f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{bmatrix}, g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ g_n(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_n(t) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

las Ecuaciones (2.1) y (2.2) se convierten en

$$x(t) = f(x, u, t) \tag{2.5}$$

$$y(t) = g(x, u, t) \tag{2.6}$$

donde la Ecuación (2.5) es la ecuación de estado y la Ecuación (2.6) es la ecuación de la salida. Si las funciones vectoriales f y/o g involucran explícitamente el tiempo t, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo. Si se linealizan las Ecuaciones (2.5) y (2.6) alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$x_(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{2.7}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{2.8}$$

donde A(t) se denomina matriz de estado, B(t) matriz de entrada, C(t) matriz de salida y D(t) matriz de transmisión directa[8].

2.3.2. Observabilidad y Controlabilidad de un Sistema

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad fueron introducidos por R. E. Kalman. Tienen un papel importante en el control óptimo de sistemas multivariables. De hecho, las condiciones de controlabilidad y observabilidad pueden hacer posible la existencia de una solución completa a un problema de control óptimo[9].

Controlabilidad

Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado (también un estado arbitrario), en un periodo finito. Es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un periodo finito, mediante alguna señal de control no restringida. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y, por lo tanto, el sistema es no controlable. Puede no existir solución a un problema de control óptimo, si el sistema se considera no controlable. A pesar de que la mayor parte de los sistemas fisicos son controlables, los modelos matemáticos correspondientes quizás no tengan la propiedad de controlabilidad. Por lo tanto, es necesario saber la condición bajo la cual el sistema es controlable.

La controlabilidad se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. Un sistema es controlable si puede, mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un número finito de periodos de muestreo. (Por lo tanto, el concepto de controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario.)[9]

Consideremos el sistema de control e tiempo discreto definido por

$$x((k+1)T) = Gx(kT) + Hu(kT) \tag{2.9}$$

$x(k7)$ = vector estado (de dimensión 11) en el k-ésimo instante de muestreo $u(k7)$ = señal de control en el k-ésimo instante de muestreo G = matriz de $n * n$ H =matriz de $n * 1$ T = periodo de muestreo Suponemos que $u(kT)$ es constante para $kT \leq t < (k+T)T$. El sistema de control en tiempo discreto dado por la ecuación (2.9) se dice es de estado completamente controlable, o simplemente de estado controlable, si existe una señal de control constante por intervalos $u/(kT)$ definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo de forma que, al partir de cualquier estado inicial, el estado $x(kT)$ pueda ser transferido al estado deseado x_f en n períodos de muestreo como máximo[9].

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de orden n definido por su modelo de estado

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.10}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.11}$$

sea completamente controlable, es que la siguiente matriz, denominada de controlabilidad, tenga rango $2n$, (la misma se suele llamar Mc o simplemente S)[10] :

$$S = (B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1} \;\; B) \tag{2.12}$$

Observabilidad

El concepto de observabilidad se fundamenta en la posibilidad de conocer el estado de un sistema a partir del conocimiento de la evolución de su entrada y de su salida. La observabilidad en términos generales se define del siguiente modo:

Un punto del espacio de estado $x(t_0)$ es observable, si existe un intervalo de tiempo finito $[t_0, t_f]$ tal que si se conoce la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ en ese intervalo, $t_0 \leq t \leq t_f$, es posible determinar que el estado inicial era $x(t_0)$.[10].

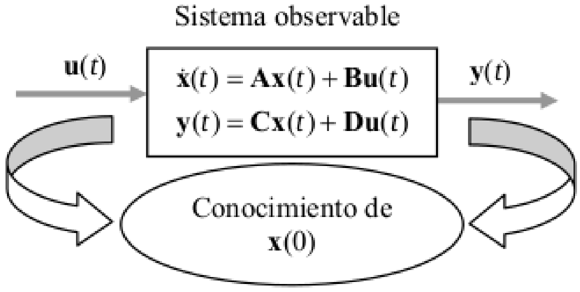

Figura 2.1: Estimación del vector de estado a partir del conocimiento de la entrada y la salida

La observabilidad se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de períodos de muestreo. Un sistema es observable si, con el sistema en el estado $x(O)$, se puede determinar el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control a lo largo de un número finito de periodos de muestreo[9].

Considere el sistema de control en tiempo discreto sin excitación definido por (2.9)

$$x((k+1)T) = Gx(kT) \tag{2.13}$$

$$y(kT) = Cx(kT) \tag{2.14}$$

donde $x(kT)$ = vector de estado (de dimensión n) en el k-esimo instante de muestreo $y(kT)$ = vector de salida (de dimensión m) en el k-esimo instante de muestreo G = matriz de nxn e = matriz de mxn

El sistema se dice ser completamente observable si cualquier estado inicial $x(0)$ puede determinarse a partir de la observación de $y(kT)$ sobre un número finito de períodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida[9].

2.4. Estrategias de Diseño

El concepto de controlabilidad es la base para solucionar el problema de la ubicación de polos y el concepto de observabilidad juega un papel importante para el diseño de los observadores de estado. La realimentación de estado basada en la ubicación de polos, junto con los observadores de estado, es uno de los métodos de diseño fundamentales para los ingenieros de control. Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces es posible seleccionar polos en lazo cerrado deseados en el plano 's' o en el plano 'z' (o las raíces de la ecuación característica) y se podrá diseñar el sistema que proporcione estos polos en lazo cerrado"

El método de diseño a utilizarse es el conocido como técnica de asignación de polos, es decir, en dicha técnica se realimentan todas las variables de estado, de tal forma que todos los polos del sistema en lazo cerrado quedan ubicados en las localizaciones deseadas. En los sistemas reales de control, sin embargo, quizá no se puedan medir todas las variables de estado, en cuyo caso no todas las variables de estado están disponibles para su realimentación, entonces es necesario estimar las variables de estado no medibles. Esta estimación puede ser realizada mediante el uso de los observadores de estado[11].

2.4.1. Técnica de Asignación de Polos

La presente técnica de diseño empieza con una determinación de los polos en lazo cerrado deseados, basados en los requisitos de respuesta transitoria y/o respuesta en frecuencia como velocidad, factor de amortiguamiento relativo o ancho de banda. Una vez hechas estas consideraciones, suponga que decidimos que los polos enlazo cerrado deseados deben estar en $z = p"z = p"..., z = Pw$ (En la selección del periodo de muestreo, debe tenerse cuidado de que el sistema deseado no requiera señales de control excesivamente grandes. De lo contrario, ocurrirán fenómenos de saturación en el sistema. Si éste entra en saturación, se volverá no lineal, por lo que tal método de diseño ya no será aplicable, en vista de que solamente lo es para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.) Entonces, al seleccionar una matriz de ganancia apropiada para la realimentación del estado, es posible obligar al sistema a tener los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable[9].

Procedimiento general de diseño por asignación de polos

Si bien la condición de controlabilidad se ha demostrado para el caso más general, esto es, un sistema MIMO en el que tanto la señal de entrada $u(t)$ como la de salida $y(t)$ son vectores, el cálculo de la matriz de realimentación K se vuelve mucho más complicado cuando el control es multivariable que cuando se trata de mono-variable. El control multivariable excede las pretensiones de este texto, por lo cual, en los diseños que siguen, se considerarán sistemas SISO exclusivamente. Sea pues el sistema SISO de control por ubicación de polos mediante la realimentación de estado que se muestra en la figura 2.2

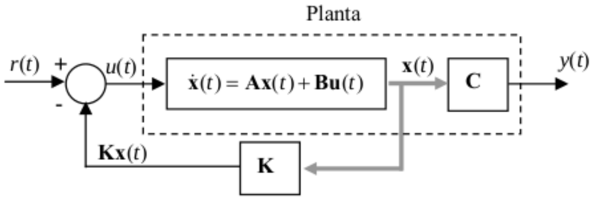

Figura 2.2: Sistema de control por realimentación de estado

La planta está modelada por las ecuaciones de estado siguientes:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.15}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.16}$$

La señal de control está dada por la relación

$$u(t) = -Kx(t) + r(t) \tag{2.17}$$

en donde

$$K = (k_1 \quad k_2 \quad ... \quad k_n \quad) \tag{2.18}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.15) el valor dado de u (t) en (2.17), se tiene que el modelo de estado del sistema en lazo cerrado es:

$$x(t) = Ax(t) + B[-Kx(t) + r(t)] \tag{2.19}$$

Ahora, aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (2.19) y (2.16) con condiciones iniciales nulas:

$$X(s) = (sI - A + BK)^{-1}BR(s) \tag{2.20}$$

$$Y(s) = CX(s) \tag{2.21}$$

Sustituyendo (2.20) en (2.21) se obtiene la función de transferencia del sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A + BK)^{-1}B \tag{2.22}$$

Esto es,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)}{|sI - A + BK|} \tag{2.23}$$

donde $Q(s)$ es un polinomio en s.

Se ve pues que los polos en lazo cerrado del sistema se pueden ubicar libremente mediante el ajuste de los elementos de la matriz de ganancia de realimentación de estado K.

Sean pues las posiciones de los polos deseadas

$$s = p_1, p_2, ..., p_n \tag{2.24}$$

con lo cual la ecuación característica del sistema es

$$sI - A + BK = (s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n) = 0 \tag{2.25}$$

En esta ecuación hay n incógnitas k_1 , k_2 , ..., k_n y n coeficientes conocidos en la parte derecha de la igualdad de polinomios. Para calcular las ganancias desconocidas basta con igualar los coeficientes en (2.25)

2.5. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un algoritmo muy poco común, ya que es uno de los pocos que son demostrablemente óptimos. Fue publicado por primera vez por Rudolf E. Kalman en su artículo seminal de 1960 titulado A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. En su núcleo, propaga un estado caracterizado por una distribución gaussiana utilizando funciones de transición lineal de una manera óptima. Dado que es óptimo, se ha mantenido relativamente sin cambios desde que se introdujo por primera vez, pero ha recibido muchas extensiones para aplicarlo a más que sistemas gaussianos lineales[12].

El filtro de Kalman es un algoritmo que se basa en el modelo de espacio de estados de un sistema para estimar el estado futuro y la salida futura realizando un filtrado óptimo a la señal de salida, y dependiendo del retraso de las muestras que se le ingresan puede cumplir la función de estimador de parámetros o únicamente de filtro. Pero en ambos casos elimina ruido, estas ecuaciones son ampliamente utilizadas ya que incluyen probabilidades estadísticas puesto que toma en cuenta la aleatoriedad tanto de la señal como del ruido. A diferencia de otros tipos de filtros este no requiere de una frecuencia de corte específica debido a que se basa en la característica del ruido permitiendo de esta manera filtrar en todo el espectro de frecuencias. Además sus ecuaciones solo dependen de una muestra anterior y la muestra presente lo que permite un ahorro considerable de memoria a la hora de ser implementado en un sistema digital y su fácil programación lo hacen muy atractivo ya que se basa en un método recursivo.

Entre varias de sus aplicaciones se encuentran la estimación demográfica, procesamiento de señales biológicas, sistemas de navegación, predecir el comportamiento de variables económicas, procesamiento de imágenes,aeronáutica, el procesamiento de señales y el comercio de futuros entre otras. Debido a su gran campo de acción se hace muy importante conocer su funcionamiento para así tener las herramientas básicas que permitan la solución de diversos problemas prácticos de forma sencilla y óptima[13].

2.5.1. Ruido en el Proceso y Medición

Se considera el caso común de medidas ruidosas de un sensor. Existen muchas fuentes de ruido en las mediciones. Por ejemplo cada tipo de sensor tiene sus limitaciones fundamentales relacionadas con el medio físico asociado, por esta razón las señales se ven degradadas. Además alguna cantidad de ruido eléctrico aleatorio es sumado a la señal a través del sensor y los circuitos eléctricos. La continua variación de la relación de la señal pura con relación al ruido afecta continuamente la cantidad y la calidad de la información. El resultado es que la información obtenida desde cualquier sensor debe ser calificada como parte de una secuencia de datos estimados, y medidas analíticas modeladas que comúnmente involucran medidas de ruido y de incertidumbre.

Existe el problema adicional de que el modelo de transformación de estados real sea completamente desconocido. Mientras se puedan hacer predicciones sobre intervalos relativamente cortos, usando modelos basados en transformadas de estados recientes, que no es siempre el caso, el resultado es que igual que la información del sensor, las estimaciones del estado deben ser calificadas como mediciones para combinación con otras medidas en una secuencia global de estimación. Además, los modelos del proceso típicamente incorporan algunas nociones de movimiento aleatorio o incertidumbre[13] .

2.5.2. Filtro de Kalman Discreto

El filtro de Kalman es esencialmente una serie de ecuaciones matemáticas que implementan un estimador tipo predictor–corrector que es óptimo en el sentido que minimiza el error estimado de la covarianza, cuando algunas condiciones son dadas. Desde el momento de su introducción, el filtro de Kalman ha sido sujeto de investigación autónoma o asistida. Esto es debido a que en gran parte de los avances en la computación digital se ha trabajado se ha trabajo para hacer el filtro práctico, pero relativamente simple y robusto. Aunque no siempre se presentan todas las condiciones óptimas para el funcionamiento del filtro, éste se desempeña bien en la mayoría de situaciones.

El filtro de Kalman apunta al problema general de tratar de estimar el estado $X \ \epsilon \ \mathbb{R}^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto [13].

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + W_{k-1} \tag{2.26}$$

Con una medición $Z \ \epsilon \ \mathbb{R}^n$

$$z_k = Hx_k + V_k \tag{2.27}$$

Las variables aleatorias W_k y V_k representan respectivamente el ruido del proceso y de la medición. Se asumen que son independientes una de la otra, blancas y con distribución normal de probabilidad.

$$p(W)\ N(0,Q) \tag{2.28}$$

$$p(V)\ N(0,R) \tag{2.29}$$

En la práctica la covarianza del ruido del proceso Q y la covarianza del ruido de la medición R son matrices que pueden cambiar con cada paso en el tiempo o medición, sin embargo se asumen que son constantes. La matriz A de nxn en la ecuación en diferentes relaciona el estado en el paso anterior $k-1$ con el estado actual, en ausencia de función de conducción o ruido del proceso. Nótese que en la práctica A puede cambiar con cada paso del tiempo, pero aquí se asume constante. La matriz B de $nx1$ se relaciona con la entrada opcional de control $u\ \epsilon\ \mathbb{R}^n$ al estado x. La matriz H de mxm en la ecuación en diferencia de la medición, relaciona el estado con la medición. En la práctica la matriz H puede cambiar con cada paso del tiempo, pero aquí se asume constante[13].

Suposiciones del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman viene con varias suposiciones:

1. La transición de estado es lineal en la forma:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + W_k \tag{2.30}$$

donde x_k es el estado, u_k es el control y w_k es el ruido gaussiano añadido.

2. La medida es lineal en la forma:

$$z_k = Hx_k + V_k \tag{2.31}$$

donde z_k es la observación y V_k se suma al ruido gaussiano.

3. El sistema es continuo.

Si bien estas suposiciones restringen la aplicabilidad del filtro de Kalman, también aseguran su optimización.

El algoritmo está estructurado en formato predictor-corrector. La idea general es proyectar el estado hacia adelante, utilizando una función de transición de estado. Luego, este estado se corrige incorporando una medida de las cantidades observables del sistema.

El algoritmo se puede dividir en dos fases distintas: una fase de predicción y una fase de actualización de la medición o corrección.

Fase de Predicción

En la fase de Predicción, el estado se proyecta hacia adelante usando la ecuación (2.30).

$$\hat{x}^{-}_{k} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \tag{2.32}$$

Sin embargo, también debemos propagar la incertidumbre en el estado. Dado que el estado es una distribución gaussiana y está completamente parametrizado por una covarianza P_k, podemos actualizar la covarianza como en la ecuación (2.33)

$$P^{-}_{k} = AP_kA^T + Q \tag{2.33}$$

Aquí, A es la misma matriz utilizada para propagar la media del estado y Q es ruido gaussiano aleatorio. Esto concluye la fase de actualización de la hora y representa el paso de predicción del algoritmo.

Fase de Corrección

La fase de corrección del filtro de Kalman, es el paso de actualización de la medición , en el que se realiza una medición de una variable observable y se fusiona con la distribución anterior para estimar la posterior. Primero, hacemos una medición del sistema usando nuestro modelo de medición lineal en la Ecuación (2.31). Después de realizar la medición, formamos lo que se conoce como la Ganancia de Kalman, representada en la Ecuación (2.34). Este es el paso clave del Filtro de Kalman.

$$K = PH^T(HPH^T + Q)^{-1} \tag{2.34}$$

A continuación calculamos la diferencia entre la observación esperada y la observación real, también conocida como innovación:

$$\hat{z} = (z_k - H\hat{x}^{-}_{k}) \tag{2.35}$$

Haciendo uso de las ecuaciones (2.34) y (2.35) podemos calcular la distribución posterior:

$$\hat{x}_k = \hat{x}^-_k + K_k \hat{z} \tag{2.36}$$

también la podemos expresar como:

$$\hat{x}_k = \hat{x}^-_k + K_k (z_k - H\hat{x}^-_k) \tag{2.37}$$

Lo próximo a realizar es la corrección de la covarianza:

$$P_k = (I - K_k H) P^-_k \tag{2.38}$$

Aquí, $\hat{x}_k$ y P_k parametrizan completamente la distribución posterior. Los pasos anteriores representan una única iteración del filtro de Kalman. Esta salida se utiliza luego como entrada para una observación posterior, junto con un nuevo control y observación[12].

Capítulo 3

Metodologia

Capítulo 4

Pruebas y Validaciones

Bibliografía

[1] C. Lozoya, M. Velasco, and P. Martí, “The one-shot task model for robust real-time embedded control systems,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 4, no. 3, pp. 164–174, 2008.

[2] E. L. Eremin, L. V. Chepak, and E. A. SHelenok, “Combined adaptive control system for nonlinear periodic action plant,” *2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings*, vol. 1, no. 2, 2015.

[3] K. E. Årzén, A. Cervin, J. Eker, and L. Sha, “An introduction to control and scheduling co-design,” *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 5, pp. 4865–4870, 2000.

[4] G. Buttazzo, “Research trends in real-time computing for embedded systems,” *ACM SIGBED Review*, vol. 3, no. 3, pp. 1–10, 2006.

[5] X. Q. Xiao, F. F. Wang, and H. S. Zhao, “Application of self-triggered control in power system excitation control,” *2011 International Conference on Electrical and Control Engineering, ICECE 2011 - Proceedings*, no. 51077054, pp. 577–580, 2011.

[6] S. Hong, X. S. Hu, and M. D. Lemmon, “Reducing delay jitter of real-time control tasks through adaptive deadline adjustments,” *Proceedings - Euromicro Conference on Real-Time Systems*, pp. 229–238, 2010.

[7] P. Marti, R. Villa, J. M. Fuertes, and G. Fohle, “On real-time control tasks schedulability,” *2001 European Control Conference, ECC 2001*, pp. 2227–2232, 2001.

[8] K. Ogata, *Ingenieria de Control Moderna*, 2013.

[9] Ogata, *Sistemas de control en Tiempo Discreto 2da Edición*, 1996.

[10] P. Educaci, “Diseño de controladores analógicos por métodos de espacio de estado,” 2002.

[11] J. Acosta and P. Burbano, “Análisis Y Diseño En El Espacio De Estados Utilizando Matlab,” vol. 1, p. 193, 2001.

[12] C. Montella, “The Kalman Filter and Related Algorithms A Literature Review,” no. May, pp. 1–17, 2014.

[13] V. A. O. Bravo, M. A. N. Arias, and J. A. C. Cardenas, “Analisis Y Aplicación Del Filtro De Kalman a Una Señal Con Ruido Aleatorio,” *Scientia et Technica*, vol. 18, no. 1, pp. 267–274, 2013. [Online]. Available: http://200.21.217.140/index.php/revistaciencia/article/view/8241