



UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

FACULTAD DE INGENIERÍA EN CIENCIAS APLICADAS

ESCUELA DE INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

**TRABAJO DE GRADO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO EN MECATRÓNICA**

TEMA:

**“ALGORITMO PARA DISMINUCIÓN DE DEGRADACIÓN DEL
RENDIMIENTO EN SISTEMAS DE CONTROL CON ACTUACIÓN
PERIÓDICA”**

AUTOR: FAUSTO ISRAEL ORTEGA SALAS

DIRECTOR: CARLOS XAVIER ROSERO CHANDI

**IBARRA-ECUADOR
DICIEMBRE-2020**

Dedicatoria

Dedicado a mi familia

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Próximamente

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Índice de figuras	VII
0.1. Problema	1
0.2. Alcance	2
0.3. Objetivos	2
0.3.1. Objetivo General	2
0.3.2. Objetivos Específicos	2
0.4. Justificación	2
1. Capítulo 1	4
1.1. Control Automático	4
1.2. Tareas de Control	4
1.2.1. Controladores Estándar	5
1.2.2. Controladores con actualización de la señal de Control	5
1.3. Espacio de Estados	6
1.3.1. Modelado en el Espacio de Estados	6
1.3.2. Observabilidad y Controlabilidad de un Sistema	7

1.4. Control por Realimentación de Estados	9
1.5. Estrategias de Diseño	9
1.5.1. Técnica de Asignación de Polos	10
1.5.2. Regulador Cuadrático Lineal LQR	12
1.6. Filtro de Kalman	12
1.6.1. Ruido en el Proceso y Medición	13
1.6.2. Filtro de Kalman Discreto	13
1.7. Filtro de Kalman Discreto	15
2. Capítulo 2	17
2.1. Modelo de Control	17
2.1.1. Actualización de la señal de control	18
2.1.2. Filtro de Kalman discreto para señales con ruido	18
2.2. Algoritmo de control	19
3. Capítulo 3	21

Índice de figuras

1.1. Restricciones de Tiempo	5
1.2. Controlador Estándar	5
1.3. Controlador con actualización del tiempo	6
1.4. Estimación del vector de estado a partir del conocimiento de la entrada y la salida .	8
1.5. Sistema de control por realimentación de estado	10

Introducción

Este trabajo de grado ha sido realizado con el *Grupo de Investigación en Sistemas Inteligentes de la Universidad Técnica del Norte (GISI-UTN)*.

0.1. Problema

El uso de sistemas controlados por computador tiene un incremento drástico en la vida diaria. Procesador y microcontroladores son incrustados cada vez más en los dispositivos que se usan en la cotidianidad. Debido a las restricciones de costo, muchos de estos dispositivos que corren aplicaciones de control son diseñados con bajo espacio, peso y restricciones de energía.[1]

El desarrollo de algoritmos de control efectivo para varios sistemas dinámicos sigue siendo relevante para la teoría de control moderna.[2] Durante las últimas décadas, la programación del tiempo de procesador ha sido un área de investigación muy activa y se han desarrollado varios métodos y modelos de programación diferentes.[3]

Las características de tiempo real en tareas con comportamiento dinámico, junto con restricciones de costo y recursos, crea nuevos problemas que deben abordarse en el diseño de dichos sistemas, en diferentes niveles de arquitectura[4]. Algunos investigadores sugieren que se deben usar nuevas formas de control para distribuir los recursos adecuadamente en base a regulaciones de control orientadas a los recursos como el control disparado por eventos y el control auto-disparado[5].

Para muchos sistemas de control, el rendimiento depende en gran medida de las variaciones de retardo en las tareas de control. Dichas variaciones pueden provenir de numerosas fuentes, incluidas la prioridad de las tareas, las variaciones en las cargas de trabajo de las tareas, errores de medición y las perturbaciones en el entorno físico, y pueden causar un rendimiento del sistema de control degradado, como una respuesta lenta y un comportamiento erróneo[6]. Además las propiedades de los algoritmos de programación en tiempo real pueden causar repuestas inesperadas del sistema de control en la implementación de sistemas controlados por procesador en tiempo real. Después de que una tarea ha sido lanzada, tiene que retazar su inicio de ejecución, la acción de control también puede ser remplazada o bloqueada al intentar acceder a recursos compartidos

del procesador, esto significa que los instantes de tiempo de ejecución de la tarea de control no son equidistantes en el tiempo de ejecución[7].

0.2. Alcance

En el presente proyecto se considerará un modelo en espacio de estados que represente cualquier tipo de planta, donde las matrices de la dinámica se encuentran en función del tiempo de muestreo y el retardo. Ante esto se propone un modelo que considere que el tiempo de muestreo no se mida entre tomas de datos de los sensores sino entre puntos de actuación manteniendo la periodicidad, donde el modelo en espacio de estados discreto depende del tiempo de muestreo, de los retardos y el tiempo entre actuación, permitiendo que a pesar de que existan retardos siempre se tenga un buen desempeño, es decir robustez. Se evaluará el modelo de control con simulaciones a través de software matemático.

0.3. Objetivos

0.3.1. Objetivo General

Diseñar un algoritmo para disminución de degradación del rendimiento en sistemas de control considerando actuación periódica.

0.3.2. Objetivos Específicos

- Proponer un modelo de control para disminución de degradación del rendimiento en sistemas de control, basado en la literatura.
- Desarrollar un algoritmo para la implementación del modelo de control.
- Evaluar el desempeño del método propuesto.

0.4. Justificación

Los sistemas de control digital constituyen una gran parte de todos los sistemas en tiempo real. A pesar de esto, sorprendentemente se ha hecho poco esfuerzo para estudiar su comportamiento oportuno cuando se implementa como tareas periódicas en su computador. Para muchos sistemas ciber-físicos, la coordinación de inteligencia entre el diseño de control y la implementación

de su computadora correspondiente pueden llevar a su mejor rendimiento de control y/o una reducción de costos. La mayoría de los dispositivos integrados interactúan con el entorno y tienen especificaciones de calidad exigentes, cuya satisfacción requiere que el sistema reaccione de manera oportuna a eventos externos y ejecute actividades computacionales dentro de restricciones de tiempo precisas.

Los sistemas de control basados en computadora utilizan técnicas en tiempo real para resolver problemas reales de ingeniería en mecatrónica. Los fundamentos teóricos obtenidos se convierten en las bases del diseño robótico y mecatrónico brindando la capacidad de análisis y razonamiento matemático para detectar, analizar y resolver problemas de ingeniería que involucren la mecánica, la microelectrónica, la robótica y biomecánica , desarrollando habilidades para una actualización permanente a lo largo del ejercicio profesional.

Capítulo 1

Revisión Literaria

En este capítulo se hace una descripción de los conceptos concernientes a control automático, técnicas de control y el filtro de kalman .

1.1. Control Automático

Control Automático es una disciplina aplicada a la Ingeniería de Procesos, que ha evolucionado a gran velocidad. El intensivo uso del control automático a dado origen a técnicas de medición y control las cuales son muy aplicadas en el ambiente industrial.

La eliminación parcial del error en los procesos y un aumento considerable en la seguridad de los sistemas controlados aplicando técnicas de control, son puntos importantes que destacan en su aplicación en la industria.

Un sistema de control automático se basa en el principio de realimentación de estados o feedback, esta operación permite al controlador mantener actualizado con la información de las variables de estado, con esta información realiza correcciones al proceso cuando sea necesario.

1.2. Tareas de Control

Una Tarea de control se basa en tres partes principales: lectura de datos desde los sensores, cálculo del algoritmo de control y transmisión de salida. En la mayoría de los casos, el control se ejecuta de forma periódica, con un período de muestreo constante determinado por la dinámica del proceso y los requisitos sobre el rendimiento del lazo cerrado.

Las restricciones de tiempo básicas de una Tarea de control se muestran en la figura 1.1 La primera es el período que debe ser constante, es decir, sin fluctuación. La segunda restricción in-

volucra la latencia de entrada-salida, también conocida como retardo de control. Esto debe ser lo más pequeño posible y también sin fluctuaciones. Desde una perspectiva de control, la fluctuación de fase de muestreo y actuación pueden ser interpretadas como perturbaciones que actúan sobre el sistema de control[3].

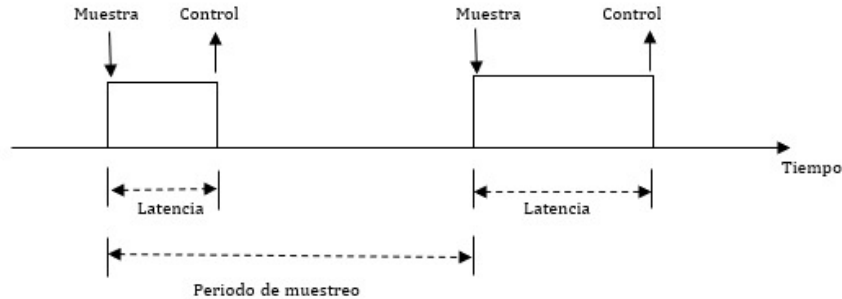


Figura 1.1: Restricciones de Tiempo

La latencia que se encuentra en la entrada y salida del sistema disminuye el margen de estabilidad y limita el rendimiento del mismo.

1.2.1. Controladores Estándar

Los algoritmos de control estándar al implementarse como tareas periódicas en tiempo real se considera un período de tarea igual al período de muestreo. Las operaciones de muestreo (entrada) y actuación (salida) se especifican para que ocurran al principio y al final de cada ejecución de trabajo[1].

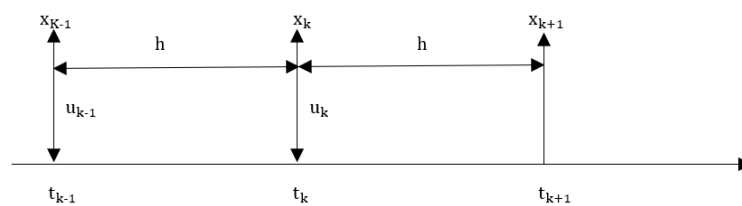


Figura 1.2: Controlador Estándar

1.2.2. Controladores con actualización de la señal de Control

En lugar de aplicar controladores estándar, se puede aplicar un controlador con señal de control actualizada para tener en cuenta el retraso como proponen en [1]. En lugar de que el cálculo de la señal de control con un vector de estado se vuelva obsoleto en el momento en que se aplica la señal de control, se utiliza un vector de estado actualizado(estimado). Por lo tanto, se calcula la señal de control en términos del estado estimado.

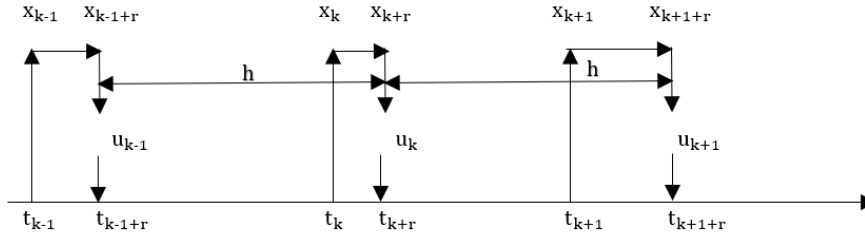


Figura 1.3: Controlador con actualización del tiempo

1.3. Espacio de Estados

El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en el numero de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones. De hecho, el análisis de sistemas complicados con múltiples entradas y salidas se realiza mediante procedimientos solo ligeramente mas complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden[8].

1.3.1. Modelado en el Espacio de Estados

El espacio n-dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2 , ..., eje x_n , donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados[8].

Ecuaciones en el espacio de estado

En el análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. El sistema dinámico debe contener elementos que recuerden los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Puesto que los integradores en un sistema de control en tiempo continuo sirven como dispositivo de memoria, las salidas de tales integradores se pueden considerar como las variables que describen el estado interno del sistema dinámico. Así las salidas de los integradores sirven como variables de estado. El número de variables de estado para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que aparezcan en el mismo[8].

El modelo en espacio de estados que representa cualquier tipo de planta es dado por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (1.2)$$

donde $A(t)$ se denomina matriz de estado, $B(t)$ matriz de entrada y $C(t)$ matriz de salida directa[8].

1.3.2. Observabilidad y Controlabilidad de un Sistema

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad fueron introducidos por R. E. Kalman. Tienen un papel importante en el control óptimo de sistemas multivariables. De hecho, las condiciones de controlabilidad y observabilidad pueden hacer posible la existencia de una solución completa a un problema de control óptimo[9].

Controlabilidad

Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado (también un estado arbitrario), en un periodo finito. Es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un periodo finito, mediante alguna señal de control no restringida. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y, por lo tanto, el sistema es no controlable. Puede no existir solución a un problema de control óptimo, si el sistema se considera no controlable. A pesar de que la mayor parte de los sistemas físicos son controlables, los modelos matemáticos correspondientes quizás no tengan la propiedad de controlabilidad. Por lo tanto, es necesario saber la condición bajo la cual el sistema es controlable.

La controlabilidad se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. Un sistema es controlable si puede, mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un número finito de periodos de muestreo. (Por lo tanto, el concepto de controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario.)[9]

Consideremos el sistema de control e tiempo discreto definido por

$$x((k+1)T) = Gx(kT) + Hu(kT) \quad (1.3)$$

$x(kT)$ = vector estado (de dimensión 11) en el k-ésimo instante de muestreo $u(kT)$ = señal de control en el k-ésimo instante de muestreo G = matriz de $n * n$ H = matriz de $n * 1$ T = período de muestreo Suponemos que $u(kT)$ es constante para $kT \leq t < (k+1)T$. El sistema de control en tiempo discreto dado por la ecuación (1.3) se dice es de estado completamente controlable, o simplemente de estado controlable, si existe una señal de control constante por intervalos $u/(kT)$ definida a lo largo de un número finito de períodos de muestreo de forma que, al partir de cual-

quier estado inicial, el estado $x(kT)$ pueda ser transferido al estado deseado x_f en n períodos de muestreo como máximo[9].

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de orden n definido por su modelo de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.5)$$

sea completamente controlable, es que la siguiente matriz, denominada de controlabilidad, tenga rango $2n$, (la misma se suele llamar Mc o simplemente S) [10] :

$$S = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) \quad (1.6)$$

Observabilidad

El concepto de observabilidad se fundamenta en la posibilidad de conocer el estado de un sistema a partir del conocimiento de la evolución de su entrada y de su salida. La observabilidad en términos generales se define del siguiente modo:

Un punto del espacio de estado $x(t_0)$ es observable, si existe un intervalo de tiempo finito $[t_0, t_f]$ tal que si se conoce la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ en ese intervalo, $t_0 \leq t \leq t_f$, es posible determinar que el estado inicial era $x(t_0)$. [10].

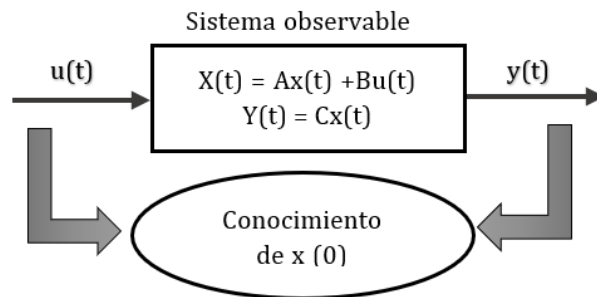


Figura 1.4: Estimación del vector de estado a partir del conocimiento de la entrada y la salida

La observabilidad se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de períodos de muestreo. Un sistema es observable si, con el sistema en el estado $x(0)$, se puede determinar el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control a lo largo de un número

finito de periodos de muestreo[9].

Considere el sistema de control en tiempo discreto sin excitación definido por la ecuacion (1.3)

$$x((k+1)T) = Gx(kT) \quad (1.7)$$

$$y(kT) = Cx(kT) \quad (1.8)$$

donde $x(kT)$ = vector de estado (de dimensión n) en el k -esimo instante de muestreo $y(kT)$ = vector de salida (de dimensión m) en el k -esimo instante de muestreo G = matriz de $n \times n$ e = matriz de $m \times n$

El sistema se dice ser completamente observable si cualquier estado inicial $x(0)$ puede determinarse a partir de la observación de $y(kT)$ sobre un número finito de períodos de muestreo. El sistema, por lo tanto, es completamente observable, si cualquier transición del estado de manera eventual afecta a todos los elementos del vector de salida[9].

1.4. Control por Realimentación de Estados

1.5. Estrategias de Diseño

El concepto de controlabilidad es la base para solucionar el problema de la ubicación de polos y el concepto de observabilidad juega un papel importante para el diseño de los observadores de estado. La realimentación de estado basada en la ubicación de polos, junto con los observadores de estado, es uno de los métodos de diseño fundamentales para los ingenieros de control. Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces es posible seleccionar polos en lazo cerrado deseados en el plano 's' o en el plano 'z' (o las raíces de la ecuación característica) y se podrá diseñar el sistema que proporcione estos polos en lazo cerrado"

El método de diseño a utilizarse es el conocido como técnica de asignación de polos, es decir, en dicha técnica se realimentan todas las variables de estado, de tal forma que todos los polos del sistema en lazo cerrado quedan ubicados en las localizaciones deseadas. En los sistemas reales de control, sin embargo, quizá no se puedan medir todas las variables de estado, en cuyo caso no todas las variables de estado están disponibles para su realimentación, entonces es necesario estimar las variables de estado no medibles. Esta estimación puede ser realizada mediante el uso de los observadores de estado[11].

1.5.1. Técnica de Asignación de Polos

La presente técnica de diseño empieza con una determinación de los polos en lazo cerrado deseados, basados en los requisitos de respuesta transitoria y/o respuesta en frecuencia como velocidad, factor de amortiguamiento relativo o ancho de banda. Una vez hechas estas consideraciones, suponga que decidimos que los polos en lazo cerrado deseados deben estar en $z = p'' z = p'' \dots, z = Pw$ (En la selección del periodo de muestreo, se debe tener cuidado de que el sistema deseado no requiera señales de control excesivamente grandes. De lo contrario, ocurrirán fenómenos de saturación en el sistema. Si éste entra en saturación, se volverá no lineal, por lo que tal método de diseño ya no será aplicable, en vista de que solamente lo es para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.) Entonces, al seleccionar una matriz de ganancia apropiada para la realimentación del estado, es posible obligar al sistema a tener los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable[9].

Procedimiento general de diseño por asignación de polos

Si bien la condición de controlabilidad se ha demostrado para el caso más general, esto es, un sistema MIMO en el que tanto la señal de entrada $u(t)$ como la de salida $y(t)$ son vectores, el cálculo de la matriz de realimentación K se vuelve mucho más complicado cuando el control es multivariable que cuando se trata de mono-variable. El control multivariable excede las pretensiones de este texto, por lo cual, en los diseños que siguen, se considerarán sistemas SISO exclusivamente. Sea pues el sistema SISO de control por ubicación de polos mediante la realimentación de estado que se muestra en la figura 1.2

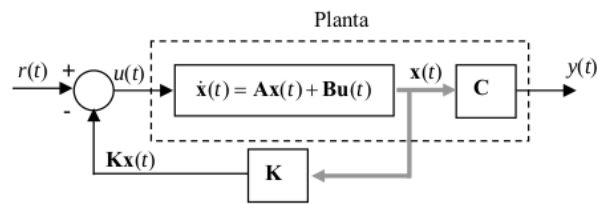


Figura 1.5: Sistema de control por realimentación de estado

La planta está modelada por las ecuaciones de estado siguientes:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.9)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.10)$$

La señal de control está dada por la relación

$$u(t) = -Kx(t) + r(t) \quad (1.11)$$

en donde

$$K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n) \quad (1.12)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.9) el valor dado de $u(t)$ en (1.11), se tiene que el modelo de estado del sistema en lazo cerrado es:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[-Kx(t) + r(t)] \quad (1.13)$$

Ahora, aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (1.13) y (1.10) con condiciones iniciales nulas:

$$X(s) = (sI - A + BK)^{-1}BR(s) \quad (1.14)$$

$$Y(s) = CX(s) \quad (1.15)$$

Sustituyendo (1.14) en (1.15) se obtiene la función de transferencia del sistema en lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A + BK)^{-1}B \quad (1.16)$$

Esto es,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)}{|sI - A + BK|} \quad (1.17)$$

donde $Q(s)$ es un polinomio en s .

Se ve pues que los polos en lazo cerrado del sistema se pueden ubicar libremente mediante el ajuste de los elementos de la matriz de ganancia de realimentación de estado K .

Sean pues las posiciones de los polos deseadas

$$s = p_1, p_2, \dots, p_n \quad (1.18)$$

con lo cual la ecuación característica del sistema es

$$sI - A + BK = (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n) = 0 \quad (1.19)$$

En esta ecuación hay n incógnitas k_1, k_2, \dots, k_n y n coeficientes conocidos en la parte derecha de la igualdad de polinomios. Para calcular las ganancias desconocidas basta con igualar los coeficientes en (1.19)

1.5.2. Regulador Cuadrático Lineal LQR

El regulador cuadrático lineal para sistemas en espacio de estados en tiempo continuo o discreto nos permite calcular la matriz de ganancia óptima K la cual aplicando la ley de control por retroalimentación de estados $u = -Kx$ minimiza la función de costo J

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (1.20)$$

donde Q y R son matrices de ponderación que priorizan el error en los estados y el error en la entrada respectivamente.

Para reducir la función de costo se realiza el cálculo de la matriz de polos en lazo cerrado P por medio de la ecuación de Ricatti:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (1.21)$$

1.6. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un algoritmo muy poco común, ya que es uno de los pocos que son demostrablemente óptimos. Fue publicado por primera vez por Rudolf E. Kalman en su artículo seminal de 1960 titulado A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Dado que es óptimo, se ha mantenido relativamente sin cambios desde que se introdujo por primera vez, pero ha recibido muchas extensiones para aplicarlo a más que sistemas gaussianos lineales[12].

El filtro de Kalman es un algoritmo que se basa en el modelo de espacio de estados de un sistema para estimar el estado futuro y la salida futura realizando un filtrado óptimo a la señal de salida, y dependiendo del retraso de las muestras que se le ingresan puede cumplir la función de estimador de parámetros o únicamente de filtro. Pero en ambos casos elimina ruido, estas ecuaciones son ampliamente utilizadas ya que incluyen probabilidades estadísticas puesto que toma en cuenta la aleatoriedad tanto de la señal como del ruido. A diferencia de otros tipos de filtros este no requiere de una frecuencia de corte específica debido a que se basa en la característica del ruido permitiendo de esta manera filtrar en todo el espectro de frecuencias. Además sus ecuaciones solo dependen de una muestra anterior y la muestra presente lo que permite un ahorro considerable de memoria a la hora de ser implementado en un sistema digital y su fácil programación lo hacen muy atractivo ya que se basa en un método recursivo.

Entre varias de sus aplicaciones se encuentran la estimación demográfica, procesamiento de señales biológicas, sistemas de navegación, predecir el comportamiento de variables económicas, procesamiento de imágenes, aeronáutica, el procesamiento de señales y el comercio de futuros en-

tre otras. Debido a su gran campo de acción se hace muy importante conocer su funcionamiento para así tener las herramientas básicas que permitan la solución de diversos problemas prácticos de forma sencilla y óptima[13].

1.6.1. Ruido en el Proceso y Medición

Se considera el caso común de medidas ruidosas de un sensor. Existen muchas fuentes de ruido en las mediciones. Por ejemplo cada tipo de sensor tiene sus limitaciones fundamentales relacionadas con el medio físico asociado, por esta razón las señales se ven degradadas. Además alguna cantidad de ruido eléctrico aleatorio es sumado a la señal a través del sensor y los circuitos eléctricos. La continua variación de la relación de la señal pura con relación al ruido afecta continuamente la cantidad y la calidad de la información. El resultado es que la información obtenida desde cualquier sensor debe ser calificada como parte de una secuencia de datos estimados, y medidas analíticas modeladas que comúnmente involucran medidas de ruido y de incertidumbre.

Existe el problema adicional de que el modelo de transformación de estados real sea completamente desconocido. Mientras se puedan hacer predicciones sobre intervalos relativamente cortos, usando modelos basados en transformadas de estados recientes, que no es siempre el caso, el resultado es que igual que la información del sensor, las estimaciones del estado deben ser calificadas como mediciones para combinación con otras medidas en una secuencia global de estimación. Además, los modelos del proceso típicamente incorporan algunas nociones de movimiento aleatorio o incertidumbre[13] .

1.6.2. Filtro de Kalman Discreto

El filtro de Kalman es esencialmente una serie de ecuaciones matemáticas que implementan un estimador tipo predictor–corrector que es óptimo en el sentido que minimiza el error estimado de la covarianza, cuando algunas condiciones son dadas. Desde el momento de su introducción, el filtro de Kalman ha sido sujeto de investigación autónoma o asistida. Esto es debido a que en gran parte de los avances en la computación digital se ha trabajado para hacer el filtro práctico, pero relativamente simple y robusto. Aunque no siempre se presentan todas las condiciones óptimas para el funcionamiento del filtro, éste se desempeña bien en la mayoría de situaciones.

El filtro de Kalman apunta al problema general de tratar de estimar el estado $X \in \mathbb{R}^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto [13].

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + W_{k-1} \quad (1.22)$$

Con una medición $Z \in \mathbb{R}^n$

$$z_k = Hx_k + V_k \quad (1.23)$$

Las variables aleatorias W_k y V_k representan respectivamente el ruido del proceso y de la medición. Se asumen que son independientes una de la otra, blancas y con distribución normal de probabilidad.

$$p(W) \sim N(0, Q) \quad (1.24)$$

$$p(V) \sim N(0, R) \quad (1.25)$$

En la práctica la covarianza del ruido del proceso Q y la covarianza del ruido de la medición R son matrices que pueden cambiar con cada paso en el tiempo o medición, sin embargo se asumen que son constantes. La matriz A de $n \times n$ en la ecuación en diferencias relaciona el estado en el paso anterior $k-1$ con el estado actual, en ausencia de función de conducción o ruido del proceso. Nótese que en la práctica A puede cambiar con cada paso del tiempo, pero aquí se asume constante. La matriz B de $n \times 1$ se relaciona con la entrada opcional de control $u \in \mathbb{R}^n$ al estado x . La matriz H de $m \times n$ en la ecuación en diferencias de la medición, relaciona el estado con la medición. En la práctica la matriz H puede cambiar con cada paso del tiempo, pero aquí se asume constante[13].

Suposiciones del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman viene con varias suposiciones:

1. La transición de estado es lineal en la forma:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + W_k \quad (1.26)$$

donde x_k es el estado, u_k es el control y w_k es el ruido gaussiano añadido.

2. La medida es lineal en la forma:

$$z_k = Hx_k + V_k \quad (1.27)$$

donde z_k es la observación y V_k el ruido gaussiano.

3. El sistema es continuo.

Si bien estas suposiciones restringen la aplicabilidad del filtro de Kalman, también aseguran

su optimización.

El algoritmo está estructurado en formato predictor-corrector. La idea general es proyectar el estado hacia adelante, utilizando una función de transición de estado. Luego, este estado se corrige incorporando una medida de las cantidades observables del sistema.

1.7. Filtro de Kalman Discreto

El algoritmo se puede dividir en dos fases distintas: una fase de predicción y una fase de actualización de la medición o corrección.

Fase de Predicción

En la fase de Predicción, el estado se proyecta hacia adelante usando la ecuación (1.26).

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (1.28)$$

Sin embargo, también debemos propagar la incertidumbre en el estado. Dado que el estado es una distribución gaussiana y está completamente parametrizado por una covarianza P_k , podemos actualizar la covarianza como en la ecuación (1.29)

$$P_k^- = AP_k A^T + Q \quad (1.29)$$

Aquí, A es la misma matriz utilizada para propagar la media del estado y Q es ruido gaussiano aleatorio. Esto concluye la fase de actualización de la hora y representa el paso de predicción del algoritmo.

Fase de Corrección

La fase de corrección del filtro de Kalman, es el paso de actualización de la medición, en el que se realiza una medición de una variable observable y se fusiona con la distribución anterior para estimar la posterior. Primero, hacemos una medición del sistema usando nuestro modelo de medición lineal en la Ecuación (1.27). Después de realizar la medición, formamos lo que se conoce como la Ganancia de Kalman, representada en la Ecuación (1.30). Este es el paso clave del Filtro de Kalman.

$$K = PH^T(HPH^T + Q)^{-1} \quad (1.30)$$

A continuación calculamos la diferencia entre la observación esperada y la observación real,

también conocida como innovación:

$$\hat{z} = (z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (1.31)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (1.30) y (1.31) podemos calcular la distribución posterior:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \hat{z} \quad (1.32)$$

también la podemos expresar como:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (1.33)$$

Lo próximo a realizar es la corrección de la covarianza:

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (1.34)$$

Aquí, \hat{x}_k y P_k parametrizan completamente la distribución posterior. Los pasos anteriores representan una única iteración del filtro de Kalman. Esta salida se utiliza luego como entrada para una observación posterior, junto con un nuevo control y observación[12].

Capítulo 2

Metodología

En este capítulo se desarrollara el modelo de control y el algoritmo que permitirá su implementación, para esto analizamos un modelo en espacio de estados que represente cualquier tipo de planta donde las matrices de la dinámica del sistema se encuentran en función del tiempo de muestreo.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son las matrices de estados y entradas respectivamente, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices que describe la dinámica del sistema y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de salida del sistema

2.1. Modelo de Control

Considerando la descripción de un sistema matemático obtenido por un modelo en espacio de estados lineal, discreto e invariante en el tiempo con un periodo de muestreo h ,

$$x_{k+1} = \phi(h)x_k + \Gamma(h)u_k \quad (2.3)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.4)$$

Donde x_k son los estado del sistema u_k y y_k son la entrada y salida del sistema respectivamente, y las matrices ϕ y Γ son obtenidas usando técnicas de discretización habituales.

$$\phi(t) = e^{At} \quad (2.5)$$

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{A(s)} B ds \quad (2.6)$$

2.1.1. Actualización de la señal de control

En lugar de que el calculo de la señal de control se obtenga a partir de un vector de estado el cual se vuelve obsoleto en el momento de aplicar la señal de control, se aplica un controlador con una señal de control actualizada para tener en cuenta el retardo, para esto se utiliza un vector de estados estimado(actualizado), por lo tanto la nueva señal de control se calcula en términos del estado estimado en $t_{k+\tau}$, etiquetado $x_{k+\tau}$ como se muestra en la figura 1.3.

Además $x_{k+\tau}$ puede ser calculado usando una muestra x_k en cualquier instante de tiempo $t_k \in (t_{k-1+\tau} t_{k+\tau})$. De esta forma primero el controlador estimará el estado.

$$x_{k+\tau} = \phi(\tau_k)x_k + \Gamma(\tau_k)u_{k-1} \quad (2.7)$$

Donde las matrices $\phi(\cdot)$ y $\Gamma(\cdot)$ son calculadas por medio de la ecuación 2.5 y 2.6 donde $t = \tau_k$ y τ_k se obtiene de la ecuación 2.8

$$\tau_k = t_{k+\tau} - t_k \quad (2.8)$$

2.1.2. Filtro de Kalman discreto para señales con ruido

El filtro de kalman en tiempo discreto resuelve el problema de estimar el estado del sistema de una planta controlada en tiempo discreto. Para implementar el filtro podemos agregar al modelo expresado por la ecuación 2.3 y 2.4, ruido en el proceso y la medición (w_k y v_k).

$$x_{k+1} = \phi(h)x_k + \Gamma(h)u_k + w_k \quad (2.9)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (2.10)$$

La implementación de filtro de kalman se divide en dos fases: actualización del tiempo(predicción) y actualización de la medición(corrección).

Fase de Predicción

En la fase de predicción, deseamos estimar el siguiente estado del sistema, si hacemos uso de la ecuación 2.9 la estimación a priori del estado del sistema es

$$\hat{x}_{(k+1)}^- = \phi\hat{x}_{(k)} + \Gamma u_{(k)} \quad (2.11)$$

Donde ϕ y Γ representan la dinámica del sistema, y \hat{x}_k es la actual estimación a posterior del estado de proceso y u_k representa la entrada actual. La estimación a priori del error de la covarianza es

$$P_{(k+1)}^- = \phi P_{(k)} \phi^T + Q \quad (2.12)$$

Donde $P_{(k)}$ es la actual estimación a posteriori del error de la covarianza, y Q es la constante de la covarianza del ruido en el proceso.

Fase de Corrección

Se realiza una estimación a posteriori para ser utilizada en la nueva etapa de predicción. La próxima ganancia de Kalman estará dada por

$$K_{(k+1)} = CP_{(k+1)}^{-1}(CP_{(k+1)}^{-1}C^T + R)^{-1} \quad (2.13)$$

donde R es la constante de la covarianza del ruido en la medición.

La estimación a posteriori del próximo estado sera

$$\hat{x}_{(k+1)} = \hat{x}_{(k+1)}^{-} + K_{(k+1)}(y_{(k)} - C\hat{x}_{(k+1)}^{-}) \quad (2.14)$$

donde $y_{(k)}$ es la medición de la salida del sistema como se muestra en la ecuación 2.4.

Para Finalizar la estimación a posteriori del error de covarianza es

$$P_{(k+1)} = (I - CK_{(k+1)})P_{(k+1)}^{-} \quad (2.15)$$

Donde I es la matriz identidad

Señal de control

La señal de control se proporciona de

$$u_k = Lx_{k+\tau} \quad (2.16)$$

Donde $L \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es la ganancia de retroalimentación del estado obtenida usando métodos de diseño de control óptimo a partir de las matrices en tiempo discreto ϕ y Γ

2.2. Algoritmo de control

El algoritmo de control propuesto se basa en un controlador con señal de control actualizada como se muestra en la figura 1.3, el cual nos permite una actuación periódica como propone en [1], además el filtro de kalman discreto para resolver el problema de estimación del estado y a su vez filtrar el ruido del sistema como propone en [14]

Pseudocódigo del controlador

Begin

1. $u_k := \text{read_input}()$
2. $t_k := \text{get_time}()$
3. $t_{k+\tau} := t_{k+\tau} + h$
4. $\tau_k := t_{k+\tau} - t_k$
5. $x_{k+\tau} := \phi(\tau_k)x_k + \Gamma(\tau_k)u_k$
6. $P_{(k+1)}^- := \phi P_{(k)} \phi^T + Q$
7. $K_{(k+1)} := CP_{(k+1)}^-(CP_{(k+1)}^-C^T + R)^{-1}$
8. $\hat{x}_{(k+1)} := \hat{x}_{(k+1)}^- + K_{(k+1)}(y_{(k)} - C\hat{x}_{(k+1)}^-)$
9. $P_{(k+1)} = (I - CK_{(k+1)})P_{(k+1)}^-$
10. $u_k := Lx_{k+\tau}$

end

Capítulo 3

Pruebas y Validaciones

Bibliografía

- [1] C. Lozoya, M. Velasco, and P. Martí, “The one-shot task model for robust real-time embedded control systems,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 4, no. 3, pp. 164–174, 2008.
- [2] E. L. Eremin, L. V. Chepak, and E. A. SHelenok, “Combined adaptive control system for nonlinear periodic action plant,” *2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015 - Proceedings*, vol. 1, no. 2, 2015.
- [3] K. E. Årzén, A. Cervin, J. Eker, and L. Sha, “An introduction to control and scheduling co-design,” *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 5, pp. 4865–4870, 2000.
- [4] G. Buttazzo, “Research trends in real-time computing for embedded systems,” *ACM SIGBED Review*, vol. 3, no. 3, pp. 1–10, 2006.
- [5] X. Q. Xiao, F. F. Wang, and H. S. Zhao, “Application of self-triggered control in power system excitation control,” *2011 International Conference on Electrical and Control Engineering, ICECE 2011 - Proceedings*, no. 51077054, pp. 577–580, 2011.
- [6] S. Hong, X. S. Hu, and M. D. Lemmon, “Reducing delay jitter of real-time control tasks through adaptive deadline adjustments,” *Proceedings - Euromicro Conference on Real-Time Systems*, pp. 229–238, 2010.
- [7] P. Marti, R. Villa, J. M. Fuertes, and G. Fohle, “On real-time control tasks schedulability,” *2001 European Control Conference, ECC 2001*, pp. 2227–2232, 2001.
- [8] K. Ogata, *Ingenieria de Control Moderna*, 2013.
- [9] Ogata, *Sistemas de control en Tiempo Discreto 2da Edición*, 1996.
- [10] P. Educaci, “Diseño de controladores analógicos por métodos de espacio de estado,” 2002.
- [11] J. Acosta and P. Burbano, “Análisis Y Diseño En El Espacio De Estados Utilizando Matlab,” vol. 1, p. 193, 2001.
- [12] C. Montella, “The Kalman Filter and Related Algorithms A Literature Review,” no. May, pp. 1–17, 2014.

- [13] V. A. O. Bravo, M. A. N. Arias, and J. A. C. Cardenas, "Análisis Y Aplicación Del Filtro De Kalman a Una Señal Con Ruido Aleatorio," *Scientia et Technica*, vol. 18, no. 1, pp. 267–274, 2013. [Online]. Available: <http://200.21.217.140/index.php/revistaciencia/article/view/8241>
- [14] C. Lozoya, J. Romero, P. Martí, M. Velasco, and J. M. Fuertes, "Embedding kalman techniques in the one-shot task model when non-uniform samples are corrupted by noise," no. July, pp. 701–706, 2010.