

III

Relasi

Banyak hal yang dibicarakan berkaitan dengan relasi. Dalam kehidupan sehari-hari kita mengenal istilah relasi bisnis, relasi pertemanan, relasi antara dosen-mahasiswa yang disebut perwalian atau juga perkuliahan, produsen-distributor, distributor-konsumen, dll.

Ada banyak relasi yang mungkin terbentuk antar dua himpunan yang sama, contoh: antara mahasiswa dan matakuliah, dapat dibentuk relasi pengambilan matakuliah, bisa juga dibentuk relasi nilai matakuliah, serta dapat juga dibentuk relasi biaya matakuliah. Relasi juga bisa berarti keterhubungan atau keterkaitan antar dua objek atau lebih.

Dalam bab ini akan dibicarakan definisi relasi beserta sifat-sifatnya, cara penyajian relasi, yang menjadi titik penting dari bab ini adalah relasi ekuivalen dan kelas ekuivalen yang akan membentuk partisi, dan relasi terurut parsial dan diagram Hasse.

A. Relasi dan Sifatnya

1. Pengertian Relasi

Definisi 1 (Hasil Kali Kartesian)

Hasil kali kartesian antara himpunan A dan himpunan B, ditulis $A \times B$ adalah semua pasangan terurut (a, b) untuk $a \in A$ dan $b \in B$.

Contoh 1

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka
 $A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

Banyaknya himpunan yang terlibat dalam operasi ini mempengaruhi nama operasinya, jika operasi tersebut hanya melibatkan dua himpunan, disebut operasi biner.

Definisi 2 (Relasi)

Relasi, dilambangkan dengan huruf besar R, adalah Subset dari hasil kali Cartesien (Cartesian product). Jika $(x, y) \in R$, maka x berelasi dengan y.

$\{x \in A \mid (x, y) \in R \text{ untuk suatu } y \in B\}$ disebut domain dari R.

Sedangkan Range dari R = $\{y \in B \mid (x, y) \in R \text{ untuk suatu } x \in A\}$

Contoh 2

Pada contoh 1, kita dapat membuat relasi:

$$R_1 = \{(1, a), (1, b)\}$$

$$R_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$$

$$R_3 = \{(1, b), (2, b), (1, a)\}$$

$$R_4 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

$$R_5 = \emptyset$$

$$R_6 = \{(a, 1), (2, a)\}$$

Himpunan pasangan terurut R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , merupakan subset dari $A \times B$, dan membentuk suatu relasi, tetapi R_6 bukan relasi dari $A \times B$, karena $(a, 1) \notin A \times B$

Sebuah pasangan terurut menjadi anggota relasi R_1 , ditulis: $(1, a) \in R_1$ atau $1 R_1 a$. Dan jika $(2, a)$ bukan anggota relasi R_1 , ditulis: $(2, a) \notin R_1$ atau $2 \not R_1 a$.

Definisi 3 (Relasi biner atas satu himpunan A)

Relasi biner atas himpunan A adalah relasi biner dari A ke A.

Relasi yang demikian ini, seringkali muncul dalam kehidupan sehari-hari, di dalam kalkulus I, kita kenal relasi dari R ke R, dari bilangan riil ke bilangan riil.

Contoh 3

Masing-masing relasi berikut adalah relasi biner atas bilangan bulat (Z):

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \geq b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a < b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a=b \text{ atau } a=-b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_4 = \{(a, b) \mid a=b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_5 = \{(a, b) \mid a = b+1, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_7 = \{(a, b) \mid a \mid b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}, \text{ dan } b \neq 0\}$$

Contoh 4

$$D = \{a, b, c\}$$

$$\wp(D) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2. Operasi Relasi

Karena relasi merupakan himpunan, maka operasi pada himpunan juga berlaku dalam relasi:

1. Operasi \cap (intersection)
2. Operasi \cup (union)
3. Operasi \oplus (symmetric difference)
4. Operasi $-$ (difference)
5. Operasi komplement (komplement relative terhadap Cartesian product)

Contoh 5

Jika $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5), (6, 6), (2, 5)\}$ dan $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$, maka:

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 5)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5), (6, 6), (2, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(5, 5), (6, 6)\}$$

$$(R_1 \cup R_2)^c = A \times A - (R_1 \cup R_2) = \{(1, 5), (2, 1), (2, 6), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2), (6, 5)\}$$

Operasi komposisi, merupakan gabungan dari dua buah relasi yang harus memenuhi syarat tertentu, yaitu jika R_1 relasi dari A ke A dan R_2 relasi dari A ke A , maka relasi komposisi R_1 dan R_2 , dinyatakan oleh $R_2 \circ R_1$ berarti relasi R_1 diteruskan oleh relasi R_2 . Syarat tersebut adalah jika $(a, b) \in R_1$ dan $(b, c) \in R_2$, maka $(a, c) \in R_2 \circ R_1$.

Contoh 6

Dengan menggunakan contoh 5, didapat:

$$R_2 \circ R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 6), (2, 2), (2, 5), (5, 6), (2, 6)\}$$

Yang diperoleh dengan cara:

Jika $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5), (6, 6), (2, 5)\}$ dan $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$, maka:

R_1	R_2	$R_2 \circ R_1$	R_1	R_2	$R_2 \circ R_1$
(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(2, 2)	(1, 1)	-
(1, 1)	(2, 2)	-	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
(1, 1)	(2, 5)	-	(2, 2)	(2, 5)	(2, 5)
(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 2)	-
(1, 1)	(1, 6)	(1, 6)	(2, 2)	(1, 6)	-
(1, 1)	(5, 6)	-	(2, 2)	(5, 6)	-

R_1	R_2	$R_2 \circ R_1$	R_1	R_2	$R_2 \circ R_1$
(5, 5)	(1, 1)	-	(6, 6)	(1, 1)	-
(5, 5)	(2, 2)	-	(6, 6)	(2, 2)	-

(5, 5)	(2, 5)	-	(6, 6)	(2, 5)	-
(5, 5)	(1, 2)	-	(6, 6)	(1, 2)	-
(5, 5)	(1, 6)	-	(6, 6)	(1, 6)	-
(5, 5)	(5, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(5, 6)	-

R_1	R_2	$R_2 \circ R_1$
(2, 5)	(1, 1)	-
(2, 5)	(2, 2)	-
(2, 5)	(2, 5)	-
(2, 5)	(1, 2)	-
(2, 5)	(1, 6)	-
(2, 5)	(5, 6)	(2, 6)

Sedangkan $R_1 \circ R_2 = \{(1,1), (2, 2), (2, 5), (1, 2), (1, 5), (1,6), (5,6)\}$

Yang didapat dari rincian berikut:

R_2	R_1	$R_1 \circ R_2$	R_2	R_1	$R_1 \circ R_2$
(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(2, 2)	(1, 1)	-
(1, 1)	(2, 2)	-	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
(1, 1)	(5, 5)	-	(2, 2)	(5, 5)	-
(1, 1)	(6, 6)	-	(2, 2)	(6, 6)	-
(1, 1)	(2, 5)	-	(2, 2)	(2, 5)	(2, 5)

R_2	R_1	$R_1 \circ R_2$	R_2	R_1	$R_1 \circ R_2$
(2, 5)	(1, 1)	-	(1, 2)	(1, 1)	-
(2, 5)	(2, 2)	-	(1, 2)	(2, 2)	(1, 2)
(2, 5)	(5, 5)	(2, 5)	(1, 2)	(5, 5)	-
(2, 5)	(6, 6)	-	(1, 2)	(6, 6)	-
(2, 5)	(2, 5)	-	(1, 2)	(2, 5)	(1, 5)

R_2	R_1	$R_1 \circ R_2$	R_2	R_1	$R_1 \circ R_2$
(1, 6)	(1, 1)	-	(5, 6)	(1, 1)	-
(1, 6)	(2, 2)	-	(5, 6)	(2, 2)	-
(1, 6)	(5, 5)	-	(5, 6)	(5, 5)	-
(1, 6)	(6, 6)	(1, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(5, 6)
(1, 6)	(2, 5)	-	(5, 6)	(2, 5)	-

Tentunya operasi komposisi ini tidak hanya berlaku pada relasi atas satu himpunan saja, melainkan dapat pula digunakan untuk relasi yang melibatkan dua himpunan. Jika S relasi dari himpunan A ke himpunan B , dan R relasi dari himpunan B ke himpunan C , maka $R \circ S$, komposisi S diteruskan ke R adalah jika $(a,b) \in S$, dan $(b,c) \in R$, maka $(a, c) \in R \circ S$.

Contoh 7

Diberikan: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{z, x, y\}$, $S = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\}$, $R = \{(a, x), (a, y), (b, z)\}$. Tentukan $R \circ S$.

Untuk menjawab persoalan ini, perhatikan:

$R \circ S = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (2, z), (3, z)\}$, yang didapat dari tabel berikut:

S	R	$R \circ S$
(1, a)	(a, x)	(1, x)
	(a, y)	(1, y)
(2, a)	(a, x)	(2, x)
	(a, y)	(2, y)
(2, b)	(b, z)	(2, z)
(3, b)	(b, z)	(3, z)

Lebih lanjut lagi dengan konsep komposisi relasi atas satu himpunan, dapat dibangun operasi pangkat terhadap bilangan asli, yaitu:

$$R^n = \begin{cases} R, & \text{jika } n = 1 \\ R^{n-1} \circ R, & \text{jika } n > 1 \end{cases}$$

Contoh:

$$A = \{1, 2, 5, 7\}$$

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 5), (2, 2), (5, 7)\}$$

Tentukan R_1^4 !

Jawab:

$$R_1^2 = R_1 \circ R_1 = \{(1, 5), (1, 2), (1, 7), (2, 7), (2, 5), (1, 1), (2, 2)\}$$

$$R_1^3 = R_1^2 \circ R_1 = \{(1, 5), (1, 2), (1, 7), (2, 7), (2, 5), (1, 1), (2, 2)\}$$

$$R_1^4 = R_1^3 \circ R_1 = \{(1, 5), (1, 2), (1, 7), (2, 7), (2, 5), (1, 1), (2, 2)\}$$

Kebetulan dalam soal ini R_1^4 , R_1^3 , dan R_1^2 bernilai sama

Operasi invers, jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R^{-1}$. Dimana relasi R^{-1} adalah invers dari R .

Contoh 8

Jika $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$, maka invers R_1 adalah $R_1^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (4, 3), (1, 4), (4, 4)\}$

3. Sifat Relasi

Sifat relasi:

1. Reflexive: $\forall a \in A$, maka $(a, a) \in R$
2. Symmetry: $\forall a, b \in A$, jika $(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
3. Antisymmetry: $\forall a, b \in A$, jika $(a, b) \in R \wedge a \neq b \rightarrow (b, a) \notin R$
{ini setara dengan $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b$ }
4. Transitivity: $\forall a, b, c \in A$, jika $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

Sifat simetri dan antisimetri tidak saling berlawanan, boleh jadi suatu relasi bersifat tidak simetri dan sekaligus tidak antisimetri, tetapi tidak mungkin suatu relasi sekaligus bersifat simetri dan antisimetri.

Perbedaan antara symmetry dan variasinya

1. Symmetry : $\forall a, b \in A$ berlaku $aRb \rightarrow bRa$
2. Nonsymmetry : $\exists a, b \in A$ berlaku $(a,b) \in R \wedge (b,a) \notin R$
3. Non antisymmetry : $\exists a, b \in A$ berlaku $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge (a \neq b)$
4. Antisymmetry : $\forall a, b \in A$ berlaku $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a=b$

Contoh 9:

Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$, berikut diberikan relasi atas A:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$R_6 = \{(3, 4)\}$

$R_7 = \{(1, 1)\}$

$R_8 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

Manakah dari kedelapan relasi di atas yang masing-masing bersifat: refleksif, simetri, anti simetri, transitif, dan yang bukan simetri sekaligus bukan antisimetri.

Jawab:

Pada relasi-relasi di atas yang bersifat refleksif adalah: R_3 , dan R_5 .

R_1 tidak refleksif karena $(3, 3) \notin R_1$.

Relasi yang bersifat simetri: R_2 , R_3 , dan R_7 .

Relasi yang bersifat antisimetri: R_4 , R_5 , R_6 , dan R_7 .

Relasi yang bersifat transitif: R_5 , R_6 , dan R_7 .

Untuk melihat R_3 tidak bersifat transitif, dapat menggunakan tabel berikut:

(a,b)	(b,c)	(a,c)	Keterangan
(1,1)	(1,2)	(1,2)	Anggota R_3
(1,2)	(2,2)	(1,2)	Anggota R_3
(1,4)	(4,1)	(1,1)	Anggota R_3
(2,1)	(1,4)	(2,4)	Bukan anggota R_3
(2,2)	(2,1)	(2,1)	Anggota R_3

Untuk melihat R_5 bersifat transitif, lihat tabel berikut:

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

(a,b)	(b,c)	(a,c)	Keterangan
(1,1)	(1,2)	(1,2)	Anggota R_5
(1,2)	(2,2)	(1,2)	Anggota R_5
(1,3)	(3,3)	(1,3)	Anggota R_5
(1,4)	(4,1)	(1,1)	Anggota R_5
(2,2)	(2,4)	(2,4)	Bukan anggota R_3
(2,3)	(2,1)	(2,1)	Anggota R_3
(2,4)			
(3,3)			
(3,4)			
(4,4)			

Relasi yang bukan simetri dan bukan pula antisimetri: R_1 , dan R_8 .

Contoh 10

Jika $A, B \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, dimana $A=(a, b)$ dan $B=(c, d)$.

$(A, B) \in R$, jika memenuhi $ad = bc$.

Apakah R bersifat: refleksif, simetri, antisimetri, dan transitif?

Jawab:

Refleksif, karena $A=(a, b)$ dan $A=(a, b)$, berlaku $ab=ba$, maka $(A,A) \in R$.

Simetri, karena jika $(A, B) \in R$, berarti diperoleh $ad=bc$, dengan menggunakan sifat komutatif bilangan bulat tak negatif, maka diperoleh $cb = da$, yang berarti $(B, A) \in R$.

Karena bersifat simetri, sudah pasti tidak akan bersifat antisimetri.

Transitif, karena jika $(A, B) \in R$, misalkan $A=(a, b)$, $B=(c, d)$, berlaku

$$ad=bc \quad (1)$$

dan, jika $(B, C) \in R$, misalkan $C=(e, f)$, berlaku

$$cf=de \quad (2)$$

Dari (1) didapat:

$$d = \frac{bc}{a}$$

Substitusi ke (2), didapat:

$$cf = \frac{bc}{a}e$$

Dengan pencoretan $c \neq 0$ dan perkalian silang, maka didapat:

$$af = be$$

berarti $(A,C) \in R$

Contoh 11

Jika $A, B \in \mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, dimana $A=(a, b)$ dan $B=(c, d)$, dan relasi R didefinisi, sebagai berikut: $(A, B) \in R$, jika memenuhi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, dimana $c \neq 0$, dan $d \neq 0$.
Apakah R bersifat: refleksif, simetri, antisimetri, dan transitif?

Jawab:

Refleksif, karena $A=(a, b)$ dan $A=(a, b)$ dengan relasi ini didapat:

$$\frac{a}{a} = 1 = \frac{b}{b}, \text{ karena } a \neq 0 \text{ dan } b \neq 0, \text{ berarti } (A,A) \in R.$$

Simetri, karena jika $(A,B) \in R$, dan $A=(a,b)$, $B=(c,d)$, berarti $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$,

dengan perkalian silang, didapat:

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ atau } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}, \text{ ini berarti } (B,A) \in R$$

Karena simetri, maka relasi R tidak mungkin bersifat antisimetri.

Transitif, karena jika $(A,B) \in R$, dan $A=(a,b)$, $B=(c,d)$, berarti

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad (3)$$

dan $(B,C) \in R$, $C=(e,f)$, berarti

$$\frac{c}{e} = \frac{d}{f} \quad (4)$$

Dengan melakukan perkalian silang pada (3), didapat:

$$c = \frac{ad}{b} \quad (5)$$

Substitusi ke (4), didapat:

$$\frac{ad}{be} = \frac{d}{f}$$

Pencoretan $d \neq 0$, dan perkalian silang, didapat:

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$$

Ini berarti $(A,C) \in R$.

4. Representasi Relasi

Relasi dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk untuk memudahkan melihat dan memahami karakteristik relasi tersebut.

a. Pasangan terurut

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$$

Letak entry sangat menentukan di sini, karena itu antara (a, b) dan (b, a) berbeda arti.

Contoh 12:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(a, b) \mid a \geq b, \text{ dan } a, b \in A\}$$

Jawab:

Dengan pasangan terurut:

$$R = \{(4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 1)\}$$

b. Matrik zero-one:

Adalah matrik yang entry-nya ditentukan dengan aturan sebagai berikut:

- jika $(a, b) \in R$, maka baris a dan kolom b diberi tanda 1,
- sedangkan jika $(a, b) \notin R$, maka baris a dan kolom b diberi tanda 0

Contoh 13

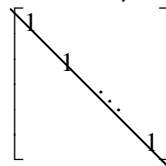
Relasi pada contoh sebelumnya dapat ditulis dalam bentuk tabel, sebagai berikut:

\geq	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	1	0
4	1	1	1	1

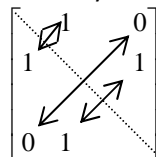
Sehingga matrik zero-one nya adalah:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

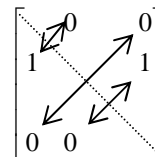
Dengan matrik zero-one kita dapatkan ciri untuk relasi refleksif, simetri, dan antisimetri, sebagai berikut:



Relasi Refleksif



Relasi simetri



Relasi antisimetri

Keuntungan dari representasi matrik zero-one dapat mengakomodasi operasi himpunan antar dua relasi, dengan menggunakan operasi logika pada Aljabar Boolean.

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} \quad \{\text{operasi OR pada Aljabar Boolean}\}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} \quad \{\text{operasi AND pada Aljabar Boolean}\}$$

Contoh 1

Jika $M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 1 \vee 1 & 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 2

Diberikan $A = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$, dan $R_2 = \{(b, a), (b, b), (c, c)\}$.

Tentukan matrik zero-one dari $R_1 \cap R_2$, dan $R_1 \cup R_2$.

Jawab:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 0 & 0 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Hasil Kali Dalam Boolean didapat matrik zero-one untuk operasi komposisi

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

Hasil Kali Dalam Boolean:

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matrik zero-one berordo $m \times k$ dan $B = [b_{jp}]$

matrik zero-one berordo $k \times n$, Hasil Kali Dalam Boolean, ditulis

$A \odot B = C$, adalah matrik berordo $m \times n$ dengan entry ke (i, p) $[c_{ip}]$

dirumuskan sebagai berikut:

$$c_{ip} = (a_{i1} \wedge b_{1p}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2p}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kp})$$

Contoh 14

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, hitung $A \odot B$.

Jawab 1

$$C = A \ominus B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = (a_{11} \wedge b_{13}) \vee (a_{12} \wedge b_{23}) \vee (a_{13} \wedge b_{33}) = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1$$

$$c_{25} = (a_{21} \wedge b_{15}) \vee (a_{22} \wedge b_{25}) \vee (a_{23} \wedge b_{35}) = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0$$

Contoh 3

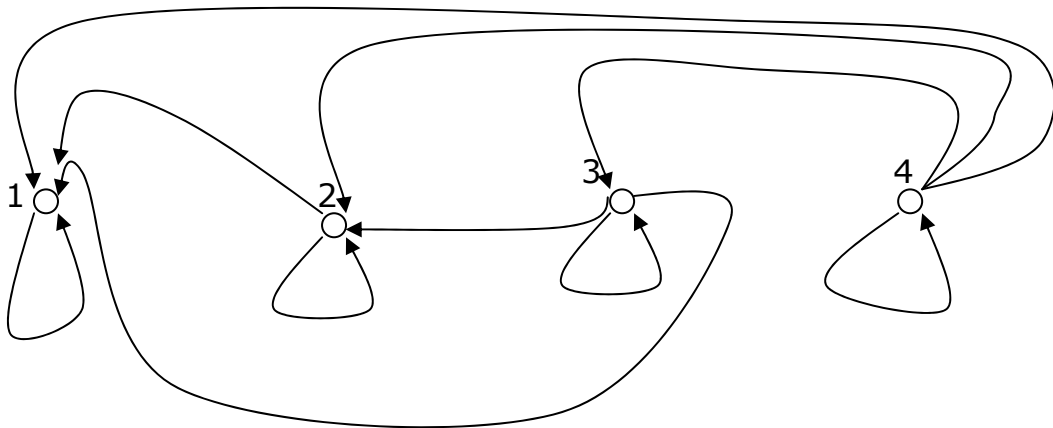
Diberikan $A = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$, dan $R_2 = \{(b, a), (b, b), (c, c)\}$. Tentukan matrik zero-one dari $R_1 \circ R_2$.

Jawab:

$$M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_2} \ominus M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

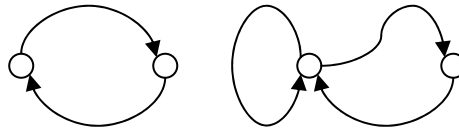
c. Digraph (graph berarah).

Anggota himpunan dinyatakan sebagai node dari graph dan relasi dinyatakan oleh kurva berpanah. Jika $(2, 1) \in R$, dinyatakan oleh garis beranak panah dari 2 ke 1. Gambar anak panah dari 1 ke 1 disebut *loop*.

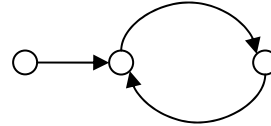


Dari digraph di atas dapat dilihat, bahwa semua node memiliki *loop*, sehingga relasi yang digambarkan oleh digraph di atas bersifat refleksif. Tidak ada anak panah yang berkebalikan berarti bersifat antisimetri. Untuk melihat sifat transitif dapat dilihat dengan anak panah yang berkelanjutan.

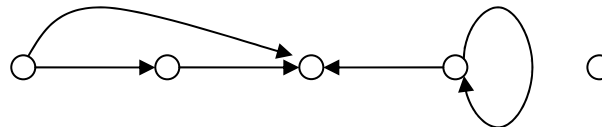
Dengan digraph persoalan relasi simetri, antisimetri, dan yang bukan simetri sekaligus bukan antisimetri dapat diperlihatkan sebagai berikut:



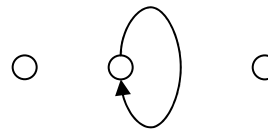
1. Symmetric



2. Not symmetric dan not antisymmetric



3. Antisymmetric



4. Symmetric dan antisymmetric

B. Relasi Ekuivalen

1. Pengertian Relasi Ekuivalen

Definisi 4 (Relasi Ekuivalen)

Adalah relasi yang memenuhi sifat: refleksif, simetri, dan transitif

Contoh 15

$$R = \{(a, b) \mid a=b \text{ atau } a=-b, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Pada relasi ini, jelas dipenuhi $a=a, \forall a \in \mathbb{Z}$, berarti $(a, a) \in R$ atau bersifat refleksif.

Untuk sifat simetri, terdapat dua kemungkinan:

- Jika $a=b$, berarti $(a, b) \in R, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b=a$, berarti $(b, a) \in R$
- Jika $a=-b$, berarti $(a, b) \in R, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b=-a$, berarti $(b, a) \in R$, Sehingga R bersifat simetri.

Untuk sifat transitif, mempunyai empat kemungkinan:

- Jika $a=b$, dan $b=c$, maka $a=c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
- Jika $a=b$, dan $b=-c$, maka $a=-c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
- Jika $a=-b$, dan $b=c$, maka $a=-c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

- Jika $a = -b$, dan $b = -c$, maka $a = c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
 Sehingga R bersifat transitif.

Jadi, R relasi ekuivalen.

Contoh 16

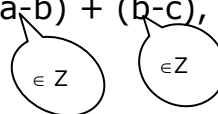
$$R = \{(a, b) \mid a - b \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Jelas kita dapatkan $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$, berarti $(a, a) \in R$, berarti R bersifat refleksif

Jika $a - b \in \mathbb{Z}$, maka $b - a = -(a - b) \in \mathbb{Z}$, berarti $(b, a) \in R$, berarti R bersifat simetri

Jika $a - b \in \mathbb{Z}$ dan $b - c \in \mathbb{Z}$, maka $a - c = (a - b) + (b - c)$, berarti $a - c \in \mathbb{Z}$, berarti R bersifat transitif.

Jadi, R relasi ekuivalen.



2. Kelas Ekuivalen dan Partisi

Definisi 5

Jika R relasi ekuivalen atas A , dapat didefinisikan kelas ekuivalen dari $a \in A$ adalah: $[a]_R = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$

Dua elemen yang direlasikan oleh relasi ekuivalen disebut ekuivalen. Hal ini dikarenakan relasi ekuivalen bersifat simetri, yang berarti bolak-balik. Dari sifat refleksif didapat, suatu elemen akan ekuivalen dengan dirinya sendiri. Sedangkan dari sifat transitif, jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka didapat a dan c ekuivalen juga.

Jika $b \in [a]_R$, b disebut representative dari class ekuivalen ini.

Contoh 4

$$A = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$R = \{(a, b) \mid a = b \text{ atau } a = -b, \text{ dan } a, b \in A\}$$

Tentukan semua kelas ekuivalen yang terbentuk.

Jawab:

$$R = \{(-2, -2), (-1, -1), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$$

$$[-1]_R = \{-1, 1\}$$

$$[1]_R = \{-1, 1\}$$

Akibatnya $[1] = [-1]$, berarti 1 dan -1 ekuivalen.

$$[0]_R = \{0\}$$

$$[-2]_R = \{-2\}$$

Contoh 5

$$A = \{0, 1, 2, 6, 9\}$$

$R = \{(a, b) \mid 2 \text{ habis membagi } a - b, \text{ dan } a, b \in A\}$

Tentukan semua kelas ekivalen yang terbentuk.

Jawab:

$R = \{(0,0), (0,2), (0,6), (1,1), (1,9), (2,0), (2,2), (2,6), (6,0), (6,2), (6,6), (9,1), (9,9)\}$

$[0] = [2] = [6] = \{0, 2, 6\}$

$[1] = [9] = \{1, 9\}$

Class ekivalen membentuk partisi dari himpunan A.

Partisi dari himpunan A adalah sub-sub himpunan A yang mempunyai sifat:

jika $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A$, maka dipenuhi dua hal sekaligus:

i. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$

ii. $A_i \cap A_j = \emptyset$, jika $i \neq j$, dan $i, j = 1, 2, \dots, n$

Pada contoh 10 di atas memenuhi sifat:

1) $[1] \cup [-2] \cup [0] = A$

2) $[1] \cap [-2] = \emptyset$, $[1] \cap [0] = \emptyset$, dan $[0] \cap [-2] = \emptyset$

Jadi, partisi A terhadap relasi R adalah: $[1]$, $[-2]$, dan $[0]$

Contoh:

$A = \{-2, -1, 3, 4, 5, 8\}$

$R = \{(a, b) \mid 2 \text{ habis membagi } (a-b), a, b \in A\}$

Partisi dari A terhadap relasi R adalah:

$[-2] = \{-2, 4, 8\}$

$[-1] = \{-1, 3, 5\}$

Contoh:

$R = \{(a, b) \mid a-b \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}\}$

Ada *strongly connected component* (scc), yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi:

Untuk relasi transitif refleksif R atas A, *strongly connected component*, scc, dari $a \in A$ adalah: $scc(a) = \{x \mid x \in A, (a, x) \in R \wedge (x, a) \in R\}$

Contoh:

$A = \{-2, -1, 3, 4, 5, 8\}$

$R = \{(a, b) \mid 2 \text{ habis membagi } (a-b), a, b \in A\}$

$Scc(-2) = \{-2, 4, 8\}$

$$SCC(-1) = \{-1, 3, 5\}$$

Proposisi:

Himpunan dari semua scc dari relasi transitif, refleksif atas A adalah partisi dari A.

C. Relasi Terurut Parsial, Diagram Hasse

1. Relasi Terurut Parsial

Definisi 6 (Relasi Terurut Parsial):

Relasi atas S yang memenuhi sifat refleksif, antisimetri, dan transitif disebut Relasi Terurut Parsial. Himpunan S bersama-sama dengan Relasi Terurut Parsial R disebut Poset (Partially Ordered Set), ditulis (S, R) .

Contoh 17

Relasi Terurut Parsial:

Apakah ketiga relasi di bawah ini termasuk Relasi Terurut Parsial?

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan $R = \{(a, b) \mid a \leq b, a, b \in A\}$
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 18\}$ dengan $R = \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b, \text{ dan } a, b \in A\}$
3. $S = \{a, b\}$ dengan $R = \{(A, B) \mid A \subseteq B, \text{ dan } A, B \in \wp(S)\}$

Jawab:

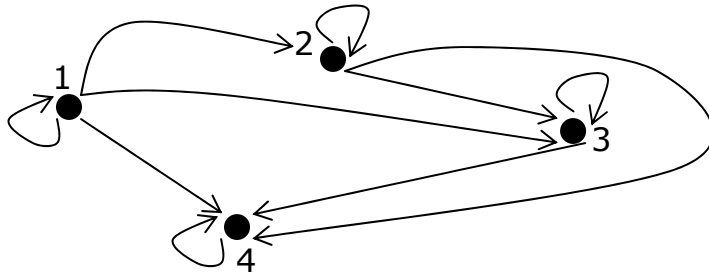
Kita dapatkan matrik zero-one sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \leq \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

Karena pada diagonal utama semua entry bernilai 1, maka R bersifat refleksif

Karena untuk semua entry a_{ij} bernilai 1, maka a_{ji} bernilai 0, berarti relasi R bersifat antisimetri

Untuk memperlihatkan sifat transitif digunakan diagram digraph:



$a \leq b$ dan $b \leq c$, maka didapat $a \leq c$ jadi bersifat transitif

Terlihat bahwa setiap $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka selalu ada $(a, c) \in R$, berarti transitif.

Jadi R Relasi Terurut Parsial

Untuk no. 2, kita dapatkan matrik zero-one sebagai berikut:

	1	2	3	4	6	9	18
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	0	1
3	0	0	1	0	1	1	1
4	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	1	1
18	0	0	0	0	0	0	1

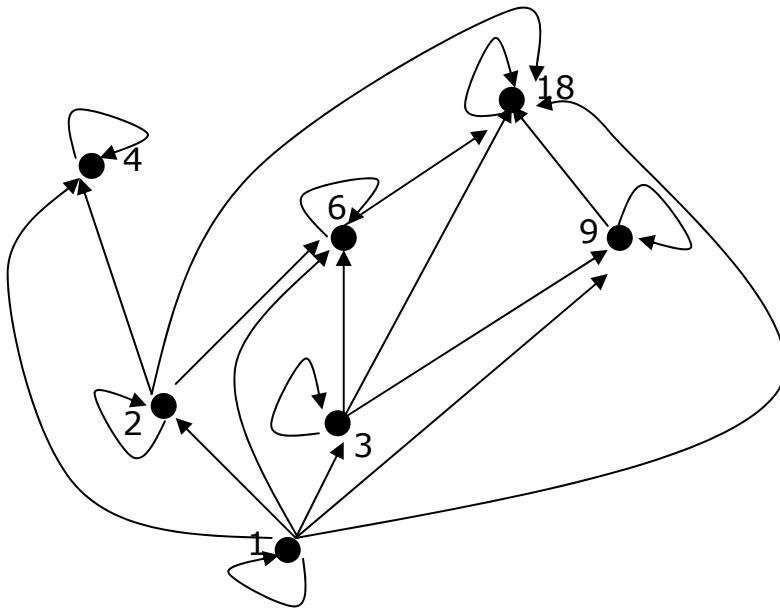
Terlihat semua entry pada diagonal utama selalu 1, berarti refleksif

Terlihat pula untuk entry a_{ij} yang bernilai 1, maka selalu a_{ji} bernilai

0, dan ketika a_{ij} bernilai 0, maka a_{ji} bernilai 0 juga, berarti

antisimetri

Untuk memperlihatkan sifat transitif lebih enak jika menggunakan diagram digraph:



Terlihat bahwa jika ada $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$, maka ada $(a,c) \in R$, sehingga R transitif.

Jadi R relasi terurut parsial.

$$\wp(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

\subseteq	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	1	1	1	1
$\{a\}$	0	1	0	1
$\{b\}$	0	0	1	1
$\{a, b\}$	0	0	0	1

Terlihat bahwa semua entry pada diagonal utama bernilai 1, berarti refleksif

Terlihat pula bahwa semua a_{ij} yang bernilai 1, maka a_{ji} bernilai 0,

dan jika a_{ij} yang bernilai 0, maka a_{ji} bernilai 0, berarti antisimetri

Transitif diperlihatkan dengan menggunakan digraph (coba dibuat digraph-nya).

Definisi: Pada Poset notasi $a \preceq b$, berarti $(a, b) \in R$, juga dikenal istilah comparable antara dua anggota Poset, jadi a dan b disebut comparable jika $a \preceq b$ **atau** $b \preceq a$. Jika tidak memenuhi disebut incomparable.

Contoh:

Pada poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ apakah 3 dan 9 comparable? Apakah 5 dan 8 comparable? Apakah 12 dan 4 comparable?

Definisi:

Jika (S, \leq) sebuah poset dan setiap dua elemen dari S comparable, S disebut totally ordered atau linearly ordered set, dan \leq disebut total order atau linear order. Sebuah totally ordered set disebut chain.

Contoh:

Poset (\mathbb{Z}, \leq) adalah totally ordered, karena $a \leq b$ atau $b \leq a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.

Contoh:

Poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ bukan totally ordered karena ada anggota yang incomparable, contohnya 5 dan 7.

Definisi:

(S, \leq) adalah well-ordered set jika merupakan poset sedemikian sehingga \leq adalah total ordering dan sehingga setiap subset tak kosong dari S mempunyai elemen terkecil.

Contoh:

Himpunan pasangan terurut dari bilangan bulat positif, $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, dengan $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$, jika $a_1 < b_1$, atau jika $a_1 = b_1$ dan $a_2 \leq b_2$, adalah well-ordered set. Relasi dalam contoh ini disebut lexicographic ordering.
discrete discrete

2. Diagram Hasse

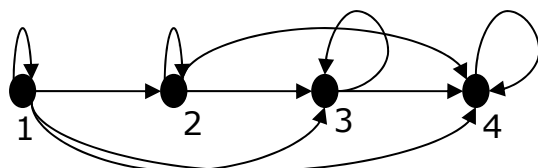
Untuk membentuk Diagram Hasse, lakukan langkah-langkah berikut:

1. Buat digraph-nya
2. Buang semua loop
3. Buang semua panah yang dibentuk dari sifat transitif
4. Gambarkan panah tanpa anak panah
5. Pahami bahwa semua titik panah ke atas

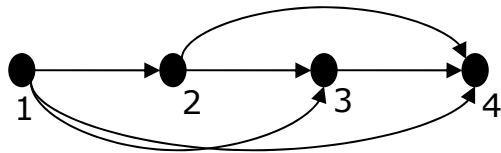
Contoh 6

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

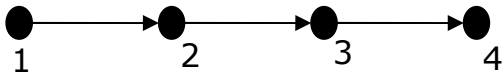
$$R = \{(a, b) \mid a \leq b, a, b \in A\}$$



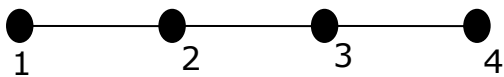
langkah 1



langkah 2

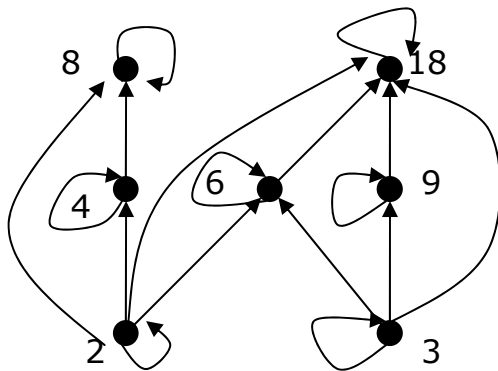


langkah 3

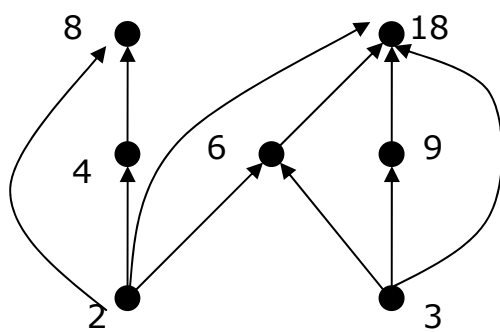


langkah 4

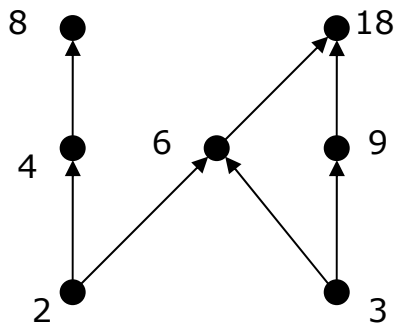
Diagram Hasse \leq



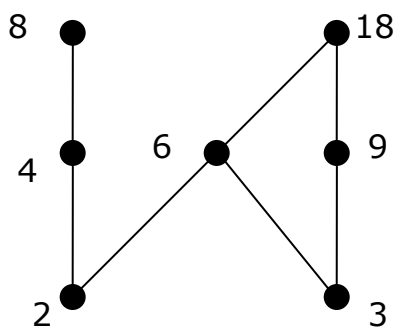
Langkah 1



Langkah 2



Langkah 3



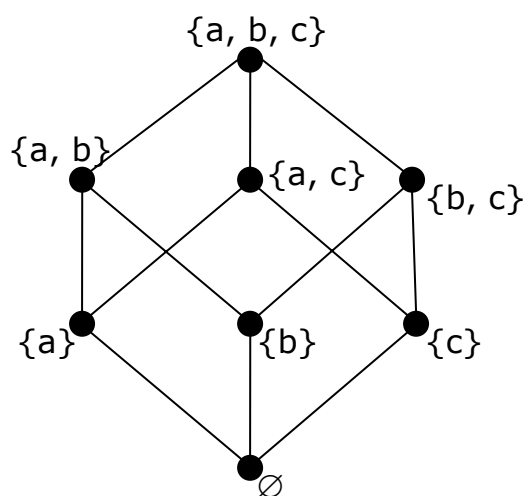
Langkah 4

Diagram Hasse dari habis membagi

$S = \{a, b, c\}$

$\wp(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$R = \{(A, B) \mid A \subseteq B, A, B \in \wp(S)\}$



3. Elemen Maksimal dan Minimal

Elemen $a \in S$, disebut maksimal pada poset (S, \leq) jika tidak ada $b \in S$, sehingga $a < b$.

Elemen $a \in S$, disebut minimal pada poset (S, \leq) jika tidak ada $b \in S$, sehingga $b < a$.

Contoh:

1. $S = \{2, -4, 5, 7, -10\}$ dan $R = \{(a, b) \mid a \geq b, a, b \in S\}$

- Apakah R relasi terurut parsial? Jelaskan!
- Gambarkan diagram Hassnya.
- Tentukan elemen maksimal dan minimalnya?
- Apakah R relasi terurut total?

2. $A = \{1, 2, 3\}$, $S = A \times A$ dan $R = \{(B, C) \mid B = (a, b), C = (c, d), a \mid d, b \mid c, B, C \in S\}$

Pertanyaan seperti di atas

3. $A = \{1, 2, 3\}$, $S = A \times A$ dan $R = \{(B, C) \mid B = (a, b), C = (c, d), a \mid c, b \mid d, B, C \in S\}$

Pertanyaan seperti di atas

Jawab:

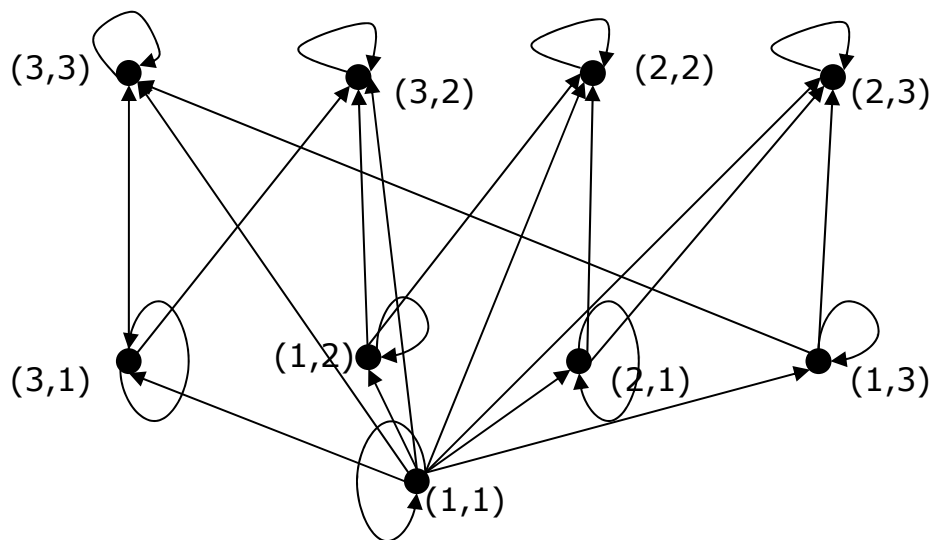
$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

R	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(1,1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(1,2)	0	1	0	0	1	0	0	1	0
(1,3)	0	0	1	0	0	1	0	0	1
(2,1)	0	0	0	1	1	1	0	0	0
(2,2)	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(2,3)	0	0	0	0	0	1	0	0	0
(3,1)	0	0	0	0	0	0	1	1	1
(3,2)	0	0	0	0	0	0	0	1	0
(3,3)	0	0	0	0	0	0	0	0	1

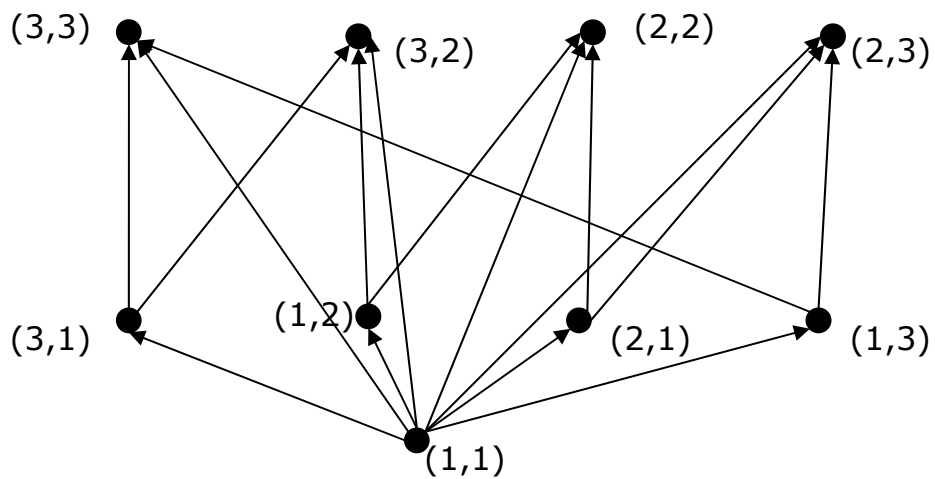
Refleksif karena entry pada diagonal utama semuanya adalah 1

Antisimetri karena setiap ada 1 pada entry baris ke-i dan kolom ke-j maka entry pada baris ke-j dan kolom ke-i bernilai 0

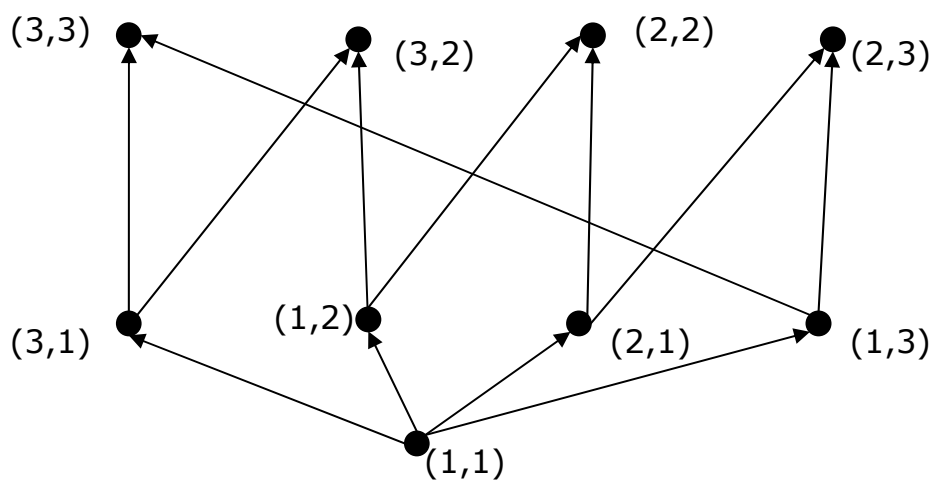
Transitif, karena jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$, akibatnya jika $(A, B) \in R$ dan $(B, C) \in R$, misalkan $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ dan $C = (e, f)$, didapat: $a \mid c$, $c \mid e$, maka $a \mid e$ dan $b \mid d$, $d \mid f$, maka $b \mid f$, sehingga $(A, C) \in R$



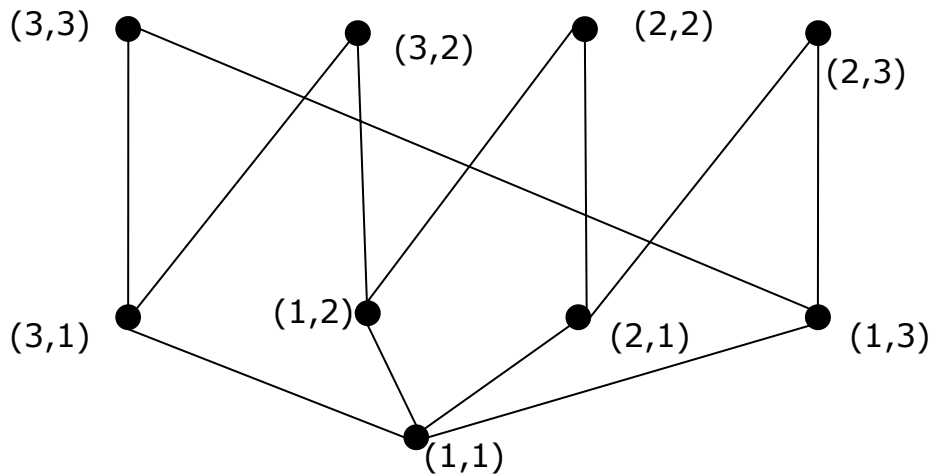
Digrah R



Buang loop



Buang busur transitif



Buang panah

Elemen maksimal: $(3,3)$, $(3,2)$, $(2,2)$, dan $(2,3)$

Elemen minimal: $(1,1)$

Kesamaan dari kedua relasi tersebut adalah: refleksif dan transitif
Ada strongly connected component (scc), yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 7:

Untuk relasi transitif refleksif R atas A , *strongly connected component*, scc, dari $a \in A$ adalah: $scc(a) = \{x \mid x \in A, (a, x) \in R \wedge (x, a) \in R\}$

Soal latihan:

1. $A = \{2, 3, -5, -9, 8\}$, $R = \{(a, b) \mid a = b \text{ atau } a < 1 + b \text{ dan } a, b \text{ anggota } A\}$ Apakah R relasi terurut parsial? Jelaskan!
Jika ya, buat diagram Hasse-nya

1. Diberikan $A = \{a, b, c\}$. Hasil kali cartes dari A ke dirinya sendiri adalah

- A. $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
- B. $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$.
- C. $\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c)\}$.
- D. $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

2. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y < 0\} \subseteq A \times A$.
Maka anggota-anggota R adalah

- A. $\{(-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.
- B. $\{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2)\}$.
- C. $\{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.
- D. $\{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.

3. Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relasi pada A yang memenuhi sifat transitif adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y < 0\}$.
- B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan genap}\}$.

- C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x + y \geq 5\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y \leq 2\}$.

4. Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relasi pada A yang memenuhi sifat simetris adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y < 0\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan genap}\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y \geq 2\}$.

5. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Relasi pada A yang memenuhi sifat refleksif adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \leq 0\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \geq 0\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan genap}\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan ganjil}\}$.

6. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Relasi pada A yang memenuhi sifat anti simetris adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \leq 0\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan ganjil}\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y \leq 0\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y\}$.

7. Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relasi pada A yang ekivalen adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan genap}\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y < 0\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan ganjil}\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x + y \leq 10\}$.

8. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Relasi pada A yang tidak ekivalen adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \leq 4\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \leq 0\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x + y \geq -4\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x + y \geq -8\}$.

9. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Relasi pada A yang menyebabkan himpunan A poset adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y \leq 0\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x + y \geq 1\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \leq 0\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \leq 4\}$.

10. Pernyataan berikut yang benar adalah

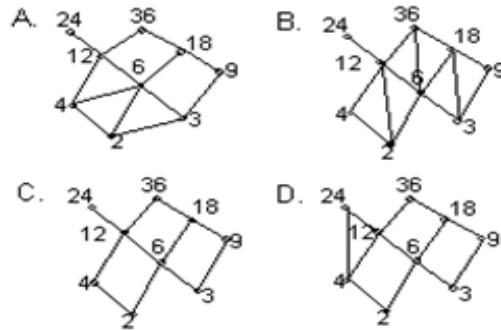
- A. setiap poset merupakan rantai.
 B. setiap rantai merupakan poset.
 C. ada rantai yang bukan poset.
 D. poset dan rantai merupakan dua himpunan yang saling terpisah.

11. (P, \leq) yang merupakan rantai adalah

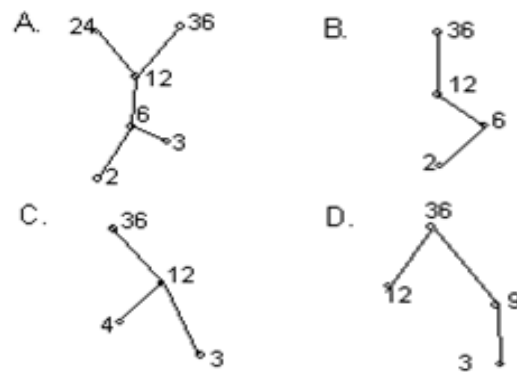
- A. $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika xy bilangan genap}.
- B. $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x+y \leq 10$ }.
- C. $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x - y \geq 0$ }.
- D. $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika $xy \leq 0$ }.

12. Diberikan $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 36\}$.

Didefinisikan $x \leq y$ sebagai y habis dibagi x ($x, y \in A$). Diagram Hasse dari (A, \leq) adalah



13. Diagram Hasse berikut yang merupakan rantai adalah



14. Diberikan $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 36\}$. Didefinisikan $x \leq y$ sebagai y habis dibagi x ($x, y \in A$).

Pernyataan berikut yang benar adalah

- A. Batas atas dari $\{4, 6\}$ adalah 12, 24, 36.
- B. Batas bawah dari $\{24, 36\}$ adalah 18, 12, 6, 3, 2.
- C. Supremum dari $\{4, 6\}$ adalah 36.
- D. Infimum dari $\{24, 36\}$ adalah 2.

15. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Didefinisikan $x \leq y$ sebagai $x - y \leq 0$. Batas bawah dari $\{0\}$ adalah

- A. 1 dan 2.
- B. 1.
- C. -1 dan -2.
- D. -1.

16. Diberikan $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 36\}$. Didefinisikan $x \leq y$ sebagai y habis dibagi x ($x, y \in A$).

Pernyataan berikut yang benar adalah

- A. Batas atas dari $\{4, 6\}$ adalah : 12, 18, 24, 36.
- B. Batas atas dari $\{24, 36\}$ adalah 12, 6, 3.
- C. Supremum dari $\{4, 6\}$ adalah : 12.
- D. Infimum dari $\{24, 36\}$ adalah : 3

17. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Didefinisikan $x \leq y$ sebagai $x - y \leq 0$.
Infimum dari $\{0\}$ adalah

- A. 1.
- B. -1
- C. 1, 2.
- D. -1, -2.

18. Didefinisikan himpunan P. untuk setiap $a, b \in P$ didefinisikan $a \leq b$ sebagai b habis dibagi a.

Himpunan P di bawah yang menyebabkan (P, \leq) letis adalah

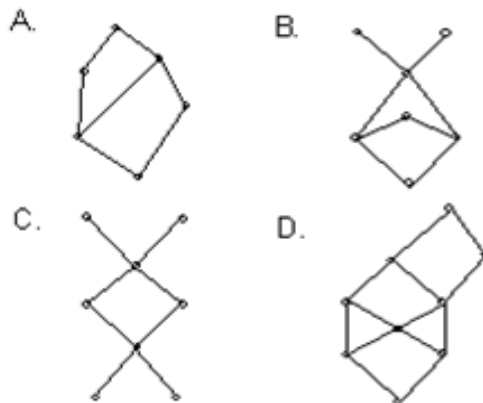
- A. $P = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 36\}$.
- B. $P = \{1, 3, 4, 8, 12, 24\}$.
- C. $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- D. $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

19. Didefinisikan himpunan P. Untuk setiap $a, b \in P$ didefinisikan $a \leq b$ sebagai b habis dibagi a,

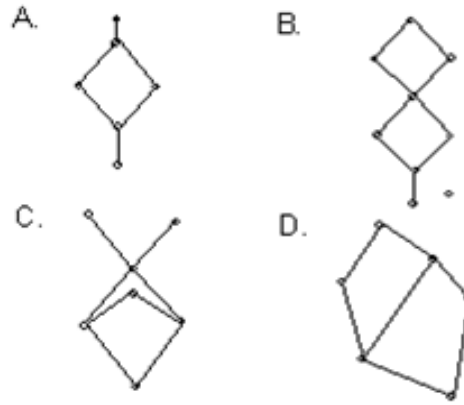
Himpunan P di bawah yang menyebabkan (P, \leq) bukan letis adalah

- A. $P = \{2, 4, 16\}$.
- B. $P = \{3, 6, 9, 18\}$.
- C. $P = \{3, 4, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
- D. $P = \{2, 4, 6, 8, 16, 24, 48\}$.

20. Diagram yang merupakan letis adalah



21. Diagram yang bukan letis adalah



22. Diberikan L adalah letis, untuk setiap a, b dan $c \in L$ berlaku

- A. $a \leq b \oplus c \Rightarrow a \leq b \wedge a \leq c$.
- B. $a \oplus b = b \Rightarrow a \leq b$.
- C. $a \oplus b = a \Rightarrow a \leq b$.
- D. $a \geq b \oplus c \Rightarrow a \geq b \wedge a \geq c$

23. Diberikan L adalah letis. Untuk setiap $a, b, c, \in L$ berlaku

- A. $a \leq b \Rightarrow a \leq c \wedge a \geq b \oplus c$.
- B. $a * b = a \Rightarrow a \leq b$.
- C. $a \leq b \Leftrightarrow a * b = b$.
- D. $a \geq b \wedge a \geq c \Leftrightarrow a \geq b * c$.

24. Diberikan letis $L_1 = \{a, b, d\}$ dan $L_2 = \{a, c, e\}$. Hasil kali cartes $L_1 \times L_2$ adalah

- A. $\{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (b, e), (d, a), (d, c), (d, e)\}$.
- B. $\{(a, a), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (b, e), (d, a), (d, c), (d, e)\}$.
- C. $\{(a, a), (c, a), (e, a), (a, b), (c, b), (e, b), (a, d), (c, d), (e, d)\}$.
- D. $\{(a, a), (c, b), (e, d)\}$.

25. Diberikan letis (L, \leq) dengan $L = \{1, 3, 4, 12, 14\}$

Definisikan : $a \leq_1 b \Leftrightarrow b$ habis dibagi a , $a \leq_2 b \Leftrightarrow a \leq b$

Fungsi $f : L \rightarrow L$ homomorfisma letis jika

- A. $f(x) = x$ untuk setiap $x \in L$.
- B. $f(1) = 1, f(3) = 3, f(4) = 12, f(12) = 24, f(24) = 4$.
- C. $f(1) = 3, f(3) = 4, f(4) = 12, f(12) = 24, f(24) = 1$.
- D. $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in L$.

26. Diberikan letis $L_1 = \{a, b, c, d, e\}$ dan $L_2 = \{p, q, r, s, t\}$.

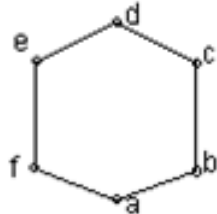
Diagram Hasse dari L_1 dan L_2 adalah



Fungsi $g : L_1 \rightarrow L_2$ homomorfisma letis jika =

- A. $g(a) = t, g(b) = s, g(c) = r, g(d) = q, g(e) = p.$
- B. $g(a) = t, g(b) = s, g(c) = p, g(d) = q, g(e) = r.$
- C. $g(a) = p, g(b) = q, g(c) = s, g(d) = r, g(e) = t.$
- D. $g(a) = p, g(b) = s, g(c) = q, g(d) = t, g(e) = r.$

27. Diberikan letis L yang diagramnya seperti di bawah ini



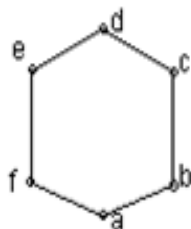
Pernyataan yang benar tentang letis L tersebut adalah

- A. $a = 1$
- B. $d = 0.$
- C. L letis tak terbatas..
- D. L letis terbatas.

28. Di bawah ini adalah letis terbatas, kecuali

- A. (Z, \leq) dengan Z adalah himpunan semua bilangan bulat dan \leq adalah relasi lebih kecil atau sama dengan pada Z .
- B. (Z_n, \leq) dengan $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ untuk suatu bilangan asli n dan \leq adalah relasi lebih kecil atau sama dengan pada Z_n .
- C. (L, \leq) dengan $L = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n\}$ untuk suatu bilangan asli n dan \leq adalah relasi lebih kecil atau sama dengan pada L .
- D. (P, \leq) dengan $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan \leq adalah relasi lebih kecil atau sama dengan pada P .

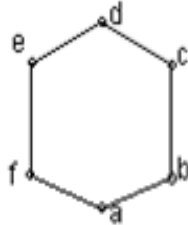
29. Diberikan letis L yang diagramnya seperti di bawah ini



Pernyataan yang benar tentang letis L di atas adalah

- A. $a = 1$.
- B. $d = 0$.
- C. komplemen b adalah e .
- D. komplemen b adalah c .

30. Diberikan letis L yang diagramnya seperti di bawah ini:



Pernyataan yang benar tentang letis L di atas adalah

- A. $a = 0$.
- B. $f = 1$.
- C. komplemen c adalah b .
- D. komplemen f adalah a .

31. Diberikan L adalah letis distributif. Untuk setiap $a, b, c \in L$ berlaku pernyataan berikut, kecuali

- A. $(a * b = a * c) \vee (a \oplus b = a \oplus c) \Rightarrow b = c$.
- B. $b \neq c \Rightarrow (a * b \neq a * c) \vee (a \oplus b \neq a \oplus c)$.
- C. $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$
- D. $a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$.

32. (L, \leq) yang merupakan letis distributif adalah

- A. $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika xy bilangan genap}.
- B. $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x+y \leq 10$ }.
- C. $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x - y \geq 0$ }.
- D. $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $x \leq y$ jika dan hanya jika $xy \leq 0$ }.

33. Didefinisikan $a \leq b$ sebagai b habis dibagi a , $a * b$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari $\{a, b\}$

dan $a \oplus b$ adalah kelipatan persekutuan terkecil dari $\{a, b\}$ untuk setiap $a, b \in B$. $(B, \leq, *, \oplus)$

yang merupakan aljabar Boole adalah

- A. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 24\}$.
- B. $B = \{1, 2, 3, 6\}$.
- C. $B = \{2, 3, 4, 6, 12\}$.
- D. $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

34. Pernyataan berikut yang benar adalah

- A. aljabar Boole adalah letis distributif.
- B. aljabar Boole adalah letis berkomplemen.

- C. Aljabar Boole adalah rantai berkom-plemen.
- D. Aljabar Boole adalah poset yang bukan rantai.