Politecnico di Torino
Corso di Laurea in Architettura

Esame di
Istituzioni di Matematiche

Soluzioni

Data: 08/02/2023

Durata della prova: due ore

Cognome e nome: ______________________

Numero di matricola: ______________________

. . . .

☐ **Consegna** – ☐ **Si ritira** – **Firma**: ______________________

. . . .

Esito

Problema	Punti	Valutazione
1	3	
2	3	
3	3	
4	7	
5	3	
6	3	
7	3	
8	7	
Totale	32	

Parte I – Geometria e algebra lineare

Problema 1 .... (3 punti)

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice *ortogonale* se è invertibile e risulta $A^{-1} = A^\top$.

(i) Verificare che la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(ii) Mostrare che il determinante di una qualsiasi matrice ortogonale vale 1 oppure -1.

Problema 2 .... (3 punti)

Si considerino i seguenti punti nello spazio S_3:

$$A = (1,1,0), \qquad B = (1,0,1), \qquad C = (0,1,1).$$

(i) Usando opportunamente il prodotto vettoriale, calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.

(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo generato dai vettori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

Problema 3 .... (3 punti)

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ \lambda x + \lambda y - z = 1 \\ \lambda x + (\lambda - 2)z = 2. \end{cases}$$

(i) Discutere l'esistenza di soluzioni per il sistema, e l'eventuale dipendenza delle stesse da parametri, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Risolvere esplicitamente il sistema nei casi $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Problema 4 .... (7 punti)

Si considerino il piano π e la retta r nello spazio S_3 definiti come segue:

$$\pi \colon x - y + z = 0, \qquad r \colon \begin{cases} x + y = -3 \\ y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

(i) Mostrare che esiste $A \in S_3$ tale che $r \cap \pi = \{A\}$, e determinarne le coordinate cartesiane.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ passante per A e perpendicolare alla retta r.

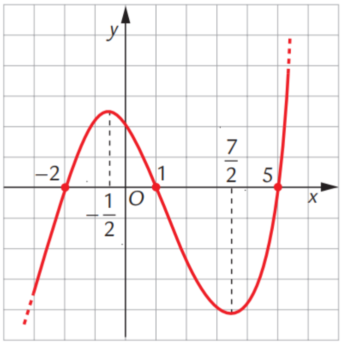
(iii) Determinare una parametrizzazione della retta $s = \pi \cap \sigma$.

(iv) Determinare la distanza tra il punto $B = (1,0,2)$ e il piano π.

Parte II – Analisi matematica

Problema 5 .... (3 punti)

Si consideri il diagramma nella figura seguente.



(i) Supponendo che il diagramma rappresenti il grafico di una funzione derivabile f, determinare gli intervalli in cui $f'(x) > 0$ e quelli in cui $f'(x) < 0$. Individuare quindi i punti stazionari di estremo locale per f.

(ii) Supponendo che il diagramma rappresenti il grafico della derivata f' di una certa funzione f, determinare gli intervalli di monotonia e i punti di estremo locale di f.

Problema 6 .... (3 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

(i) Determinare il polinomio di Taylor[1] del second'ordine di f centrato in $x_0 = \pi^2$.

(ii) Determinare il valore del limite $\displaystyle\lim_{x\to\pi^2} \frac{1+f(x)}{(x-\pi^2)^2}$.

Problema 7 .... (3 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

(i) Determinare l'area della regione del piano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le f(x)\}$.

(ii) Determinare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Problema 8 .... (7 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\log x} & (x > 0) \\ x^2 + 3x & (x \le 0) \end{cases}$.

(i) Stabilire se f è continua e/o derivabile in $x = 0$.

(ii) Determinare il dominio di f e il comportamento della funzione agli estremi del dominio.

(iii) Determinare gli intervalli di monotonia di f e individuare gli eventuali punti di estremo locale.

(iv) Tracciare un grafico qualitativo di f e di $|f|$.

[1]Data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$, il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 di f è definito come

$$T_n[f,x_0](x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Tale polinomio soddisfa la proprietà di approssimazione locale $f(x) = T_n[f,x_0](x) + o(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$.

Soluzione del Problema 1:

(i) Per l'unicità della m. inversa, è sufficiente verificare che $\underbrace{A^T}_{=A^{-1}}A = I$ oppure $A\underbrace{A^T}_{=A^{-1}} = I$. Osservando che $A^T = A$ nel caso in esame, A è ortogonale se $A^2 = I$. In effetti si ha

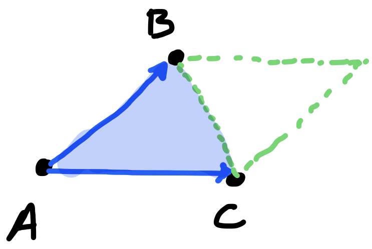
$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

(ii) Sia $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonale. Si ha $M^{-1} = M^T \Rightarrow \det(M^{-1}) = \det(M^T)$.
Poiché $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$ e $\det(M^T) = \det(M)$, segue che

$$\frac{1}{\det(M)} = \det(M) \Rightarrow (\det(M))^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det M = 1 \ \vee \ \det M = -1.}$$

Soluzione del Problema 2:

(i)



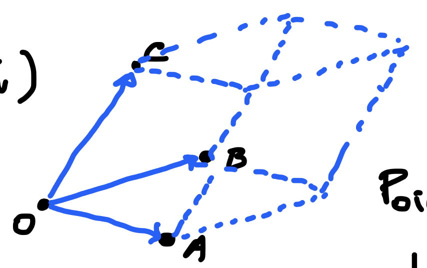
L'area del triangolo di vertici A, B, C è metà dell'area del parallelogramma generato da $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, la quale coincide con il modulo del vettore $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

Poiché
$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\hat{k} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k},$$

e $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$, segue che

$$\boxed{\mathrm{Area}(\hat{ABC}) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

(ii)



Il volume V del parallelepipedo generato da $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ e $\vec{OC}$ è dato da $|\vec{OA} \cdot \vec{OB} \wedge \vec{OC}|$.

Poiché $\vec{OA} \cdot \vec{OB} \wedge \vec{OC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (sviluppando lungo la I riga)

$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1$, si conclude che $\boxed{V = |-2| = 2.}$

Soluzione del Problema 3:

(i) La matrice completa del sistema è data da

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda-2 & 2 \end{array}\right)}_{A \,|\, B}.$$

Riducendo a scala col metodo di eliminazione di Gauss si ottiene

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to 2R_2 - \lambda R_1 \\ R_3 \to 2R_3 - \lambda R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 0 & 3\lambda-4 & 4 \end{array}\right).$$

Applicando il teo. di Rouché-Capelli:

- Se $\lambda \notin \{0, 4/3\}$ allora $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ $\Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette soluzione unica.
- Se $\lambda = 0$ allora $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$ $\Rightarrow$ il sistema è compatibile e l'insieme delle soluzioni dipende da $3-2=1$ parametro.
- Se $\lambda = 4/3$ allora $\rho(A) = 2$ e $\rho(A|B) = 3$ $\Rightarrow$ il sistema è incompatibile.

(ii) $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \to \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -z = 1 \end{cases} \to \boxed{\begin{cases} x = -1/2 \\ y = t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}}$$

$\lambda = 1$

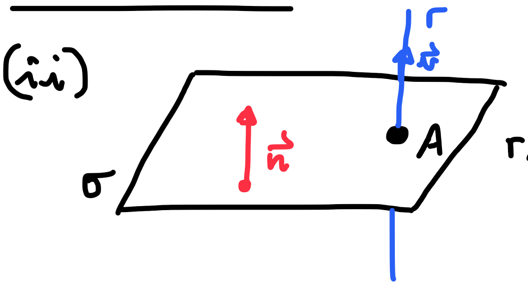
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2y - z = 2 \\ -z = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = z/2 = -2. \\ y = \frac{z+2}{2} = 1 \\ z = -4 \end{cases}}$$

Soluzione del Problema 4:

(i) $r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = -3 \\ y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(MEG)}}$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{cases} x = -y - z = -6 \\ y = 2z - 3 = 3 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (-6, 3, 3).}$$

(ii)



Una parametrizzazione di r si ottiene da

$$r: \begin{cases} x + y = -3 \\ y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3 - t \\ y = -3 + 2t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ r è diretta come $\vec{v} = (-1, 2, 1)$.

Detto $\vec{n}$ un vettore normale a σ, si ha $\vec{n} \parallel \vec{v}$ se $\vec{n} = \alpha \vec{v}$, $\alpha \neq 0$. Scelto $\alpha = 1$, cioè $\vec{n} = \vec{v}$, l'eq. cartesiana di σ è del tipo $\sigma: -x + 2y + z = d$, con $d \in \mathbb{R}$ da determinarsi. Poiché

$A \in \sigma \Rightarrow -(-6) + 2 \cdot 3 + 3 = d \Rightarrow d = 15$, si ha $\boxed{\sigma: -x + 2y + z = 15.}$

(iii) $r = \pi \cap \sigma \Rightarrow r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 15 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 15 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{\text{MEG}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right) \to \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 2z = 15 \end{cases} \to \boxed{r: \begin{cases} x = y - z = 15 - 3t \\ y = 15 - 2t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$

(iv) La distanza tra il punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e il piano $\alpha: ax + by + cz = d$ è data da

$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Pertanto,

$$\boxed{d(B, \pi) = \frac{|x_B - y_B + z_B|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 0 + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.}$$

Soluzione del Problema 5:

(i) Dal grafico si rileva che:

- $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1/2) \vee x \in (7/2, +\infty)$;
- $f'(x) < 0 \iff x \in (-1/2, 7/2)$;
- $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ (p.to di massimo locale) $\vee$ $x = \frac{7}{2}$ (p.to di minimo locale).

(ii) Dal grafico si deduce che:

- $x \in (-2, 1) \vee x \in (5, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ è str. crescente;
- $x \in (-\infty, -2) \vee x \in (1, 5) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ è str. decrescente;
- $x = -2 \vee x = 1 \vee x = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$. In particolare, $x = -2$ e $x = 5$ sono p.ti di min. locale, mentre $x = 1$ è un p.to di massimo locale.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & & -2 & & 1 & & 5 & \\ \hline f' & - & & + & & - & & + \\ f & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

Soluzione del Problema 6:

(i) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. Per determinare $T_2[f, \pi^2](x)$ occorre calcolare $f'(\pi^2)$ e $f''(\pi^2)$. Si ha $f(\pi^2) = \cos\pi = -1$,

$$f'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(\pi^2) = -\frac{\overbrace{\sin\pi}^{=0}}{2\pi} = 0.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \sin\sqrt{x}}{x} \Rightarrow f''(\pi^2) = -\frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{\cos\pi}^{-1} - 2\pi\overbrace{\sin\pi}^{=0}}{2\pi^3} = \frac{1}{4\pi^3}.$$

Quindi $\boxed{T_2[f, \pi^2](x) = -1 + \frac{1}{8\pi^3}(x - \pi^2)^2.}$

(ii) Poiché $f(x) = T_2[f, \pi^2](x) + o(x - \pi^2)^2$ per $x \to \pi^2$, si ha

$$\lim_{x \to \pi^2} \frac{1 + f(x)}{(x - \pi^2)^2} = \lim_{x \to \pi^2} \frac{1 + T_2[f, \pi^2](x) + o(x - \pi^2)^2}{(x - \pi^2)^2}$$

$$= \lim_{x \to \pi^2} \frac{\frac{1}{8\pi^3}(x - \pi^2)^2}{(x - \pi^2)^2} = \boxed{\frac{1}{8\pi^3}.}$$

Soluzione del Problema 7:

(i) Si noti che $f(x) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f = (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, +\infty)$.

Pertanto l'area del trapezoide A è data da $\int_1^4 f(x)\,dx$.

Si ha $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{\overbrace{2}^{u'(x)}}{\underbrace{(2x+1)}_{u(x)}{}^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x+1}\right]_1^4$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x+1}\right]_4^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}.$

(ii) f è continua in $\operatorname{dom} f$, perciò loc. integrabile in $[1, +\infty)$.

Si ha $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2x+1}\right]_b^1$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2b+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \boxed{\frac{1}{6}}.$

Soluzione del Problema 8:

(i) f è continua in $x=0 \iff \displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$.

Si ha $f(0) = 0^2 + 3\cdot 0 = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(x^2+3x) = 0^2 + 3\cdot0 = 0$

e $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{\log x} = \left(\lim_{x\to0^+} x\right)\left(\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\log x}\right) = 0\cdot 0 = 0.$

Si conclude che f è continua in $x=0$.

Riguardo alla derivabilità in $x=0$ si ha

$\displaystyle f'_-(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{x^2+3x}{x} = \lim_{x\to0^-}(x+3) = 0+3 = 3,$

$\displaystyle f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x/\log x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\log x} = 0.$

Poiché $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, f non è derivabile in $x=0$.

In particolare, poiché $f'_-(0), f'_+(0) \in \mathbb{R}$, $x=0$ è un p.to angoloso per f.

(ii) $\operatorname{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{cases} \right\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+3x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x(x+3)\right) = +\infty .$$

$$\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \lim_{x\to1^\pm} \frac{x}{\log x} = \left(\lim_{x\to1^\pm} x\right)\left(\lim_{x\to1^\pm} \frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$$

(as. verticale)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} \overset{(DH)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty .$$

(iii) f è derivabile in dom f poiché somma o rapporto di funzioni derivabili. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x - 1}{\log^2 x} & (x>0) \\ 2x+3 & (x<0) \end{cases} .$$

In particolare,

$f'(x) > 0$ $\to$ $2x+3>0$ per $x<0$ $\Rightarrow$ $-\frac{3}{2} < x < 0$

$f'(x) > 0$ $\to$ $\log x - 1 > 0$ per $x>0$ $\Rightarrow$ $x > e$

		$-3/2$		0		e	
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow$ f è st. cr. in $(-3/2, 0)$ e $(e, +\infty)$

f è st. dec. in $(-\infty, 0)$ e $(0, e)$

$\Rightarrow$ $x = -\frac{3}{2}$ e $x = e$ sono p.ti staz. di minimo locale, mentre $x=0$ è un p.to di massimo locale.

(iv)