Politecnico di Torino
Corso di Laurea in Architettura

Esame di
Istituzioni di Matematiche

Data: 14/2/2024

Durata della prova: due ore

Cognome e nome: ______________________

Numero di matricola: ______________________

. . . .

☐ **Consegna** — ☐ **Si ritira** — **Firma**: ______________________

Soluzioni

. . . .

Esito

Problema	Punti	Valutazione
1	3	
2	3	
3	3	
4	7	
5	3	
6	3	
7	3	
8	7	
Totale	32	

Parte I – Geometria e Algebra Lineare

Problema 1 .... (3 punti)

Sia $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ una matrice avente cinque elementi uguali a 1 e i restanti quattro uguali a 0.

(i) Disporre, se possibile, gli elementi di A in modo tale che $\rho(A) = 3$ e $\det(A) = 1$.

(ii) Disporre, se possibile, gli elementi di A in modo tale che $\rho(A) = 2$.

Problema 2 .... (3 punti)

Siano $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ punti tali che

$$\overrightarrow{OA} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}, \quad \overrightarrow{OB} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}, \quad \overrightarrow{OC} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}.$$

(i) Verificare che i punti O, A, B, C sono complanari e determinare l'equazione cartesiana del piano π che li contiene.

(ii) Stabilire se il poligono di vertici O, A, B, C è un parallelogrammo.

Problema 3 .... (3 punti)

Si considerino i piani di equazione

$$\pi_1 : x + y + z = 1, \qquad \pi_2 : 3x + y - z = 5.$$

(i) Determinare una parametrizzazione della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

(ii) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0, 2, 0)$.

Problema 4 .... (7 punti)

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x - y - \alpha z = \beta. \end{cases}$$

(i) Stabilire per quali valori di α, β il sistema non ammette soluzioni — ovvero $S = \varnothing$.

(ii) Stabilire per quali valori di α, β il sistema ammette infinite soluzioni. Mostrare che in tal caso S coincide con una retta r, e determinarne una parametrizzazione.

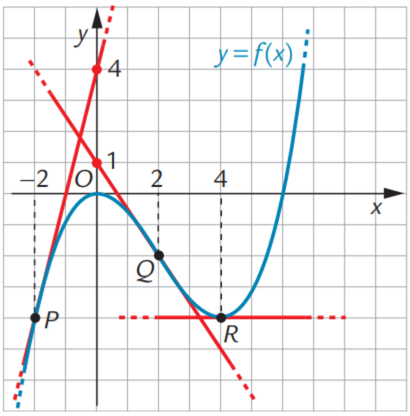
(iii) Stabilire per quali valori di α, β il sistema ammette un'unica soluzione.

(iv) Risolvere il sistema nel caso in cui in cui $\alpha = 1$ e $\beta = 3$. Detta $P \in \mathbb{R}^3$ la soluzione (unica) corrispondente, stabilire se $P \in r$.

Parte II – Analisi Matematica

Problema 5 .... (3 punti)

Nella figura seguente sono rappresentati il diagramma di una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e le tre rette tangenti al grafico di f nei punti $P = (-2, -4)$, $Q = (2, -2)$ e $R = (4, -4)$.



(i) Disegnare un grafico qualitativo della funzione $g(x) = f(|x|) + 4$.

(ii) In base alle informazioni disponibili nel diagramma, determinare

$$f'(-2), \qquad f'(2), \qquad f'(4).$$

Problema 6 .... (3 punti)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e si consideri la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} ax - a & (x \leq 1) \\ \log(2x + b) & (x > 1). \end{cases}$

(i) Determinare, se esistono, i valori di a e b per cui f risulta continua in $x = 1$.

(ii) Determinare, se esistono, i valori di a e b per cui f risulta derivabile in $x = 1$.

Problema 7 .... (3 punti)

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2 - x)^3 + 1$.

(i) Disegnare un grafico qualitativo della funzione f e stabilire se f è invertibile.

(ii) Calcolare l'<u>area</u> della regione piana compresa tra il grafico di f e l'intervallo $[1, 4]$ dell'asse delle ascisse.

Problema 8 .... (7 punti)

Si consideri la funzione definita da $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$.

(i) Determinare il dominio di f.

(ii) Determinare il comportamento di f alla frontiera del dominio.

(iii) Determinare gli intervalli di monotonia di f e individuare gli eventuali punti di estremo locale.

(iv) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione del Problema 1:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sviluppando $\det A$ lungo la prima colonna si ottiene $\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

$\rho(A) = 3$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho(A) = 2$.

Soluzione del Problema 2:

(i) O, A, B, C complanari $\iff \vec{OC} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB}) = 0$.

$$\vec{OC} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3(2) - 4(4) + 5(2) = 6 - 16 + 10 = 0.$$

Il piano π che contiene tali punti è perpendicolare a $\vec{n} = \vec{OA} \wedge \vec{OB} = (2, -4, 2)$, quindi $\boxed{\pi : x - 2y + z = 0}$ $O \in \pi$.

(ii) Se fosse un parallelogrammo i lati opposti dovrebbero essere paralleli, ma $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (2, 1, 0)$ non è un multiplo di $\vec{OA} = (1, 1, 1)$.

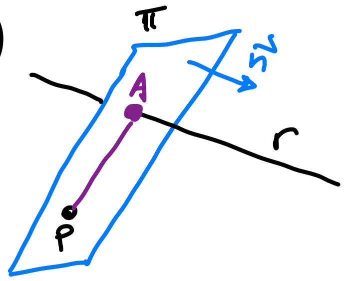
Quindi il poligono di vertici O, A, B, C non è un parallelogrammo.

Soluzione del Problema 3:

(i) $r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+y-z=5 \end{cases} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{cases} 4x+2y=6 \\ 2x-2z=4 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y=3 \\ x-z=2 \end{cases}$

Scelto $x=t$ come parametro, $\boxed{r: \begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=2+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$

(ii)



Sia π il piano perpendicolare a r e passante per P, ovvero con vettore normale $\vec{n} = (1,-2,1)$ (vettore direzione di r). Dunque $\pi: x-2y+z=d$, con $d \in \mathbb{R}$ da determinarsi. Poiché $P \in \pi$, allora $d=-4$. Sia $A \in r \cap \pi$; allora $A = (t, 3-2t, -4+t)$, con $t \in \mathbb{R}$ che soddisfa $t-2(3-2t)+(2+t)=-4$, ovvero $t = \frac{2}{3}$. Dunque $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, e $d(P,r) = d(P,A) = \|A-P\| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-4)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{21}}{3}}$.

Soluzione del Problema 4:

La matrice completa del sistema è $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -\alpha & \beta \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -\alpha-1 & \beta-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \beta-1 \end{array}\right).$

(i) Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile se $\boxed{\alpha = 0 \text{ e } \beta \neq 1}$ $(\Leftrightarrow \rho(A) = 2 \neq 3 = \rho(A|B))$.

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è indeterminato se $\boxed{\alpha = 0 \text{ e } \beta = 1}$ $(\Leftrightarrow \rho(A) = 2 = \rho(A|B))$, e S dipende da $3-2=1$ parametro. Geometricamente, si tratta perciò di una retta. Una parametrizzazione di tale retta r si ottiene da

$$r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

(iii) Per il teorema di Rouchè - Capelli, il sistema è determinato $\boxed{\text{per ogni } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \in \mathbb{R}}$

$$\left(\Leftrightarrow \rho(A) = 3 = \rho(A|B) \right).$$

(iv) Posto $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ risulta

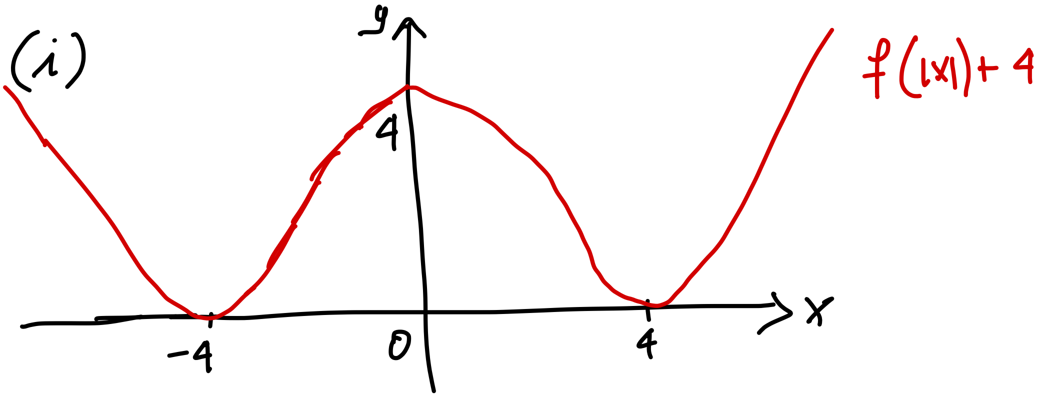
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=0 \\ -z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{P = (2,1,-2).}$$

Se $P \in r$ deve aversi, per qualche $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} 2 = 1+t \\ 1 = t \\ -2 = -2t \end{cases}$,

da cui $t = 1$, e perciò $\boxed{P \in r.}$

Soluzione del Problema 5:

(i)



(ii) $f'(4) = 0$ (retta orizzontale)

$$f'(2) = \frac{-2-1}{2-0} = -\frac{3}{2}$$

$$f'(-2) = \frac{-4-4}{-2-0} = 4$$

coeff. angolari delle rette rappresentate $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Soluzione del Problema 6:

(i) f è continua in $x=1 \iff \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$.

In particolare, $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} a(x-1) = 0 = f(1)$, per ogni valore di $a\in\mathbb{R}$. Dunque, occorre che $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0$, e poiché $\lim_{x\to1^+} \log(2x+b) = \log(2+b)$, deve aversi $\log(2+b) = 0$

$\iff 2+b = 1 \iff b = -1$.

(ii) $f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{\log(2x-1)}{x-1} = \lim_{u\to0^+} \frac{\log(1+2u)}{u} = 2$.

$b=-1$; $u = x-1$; $\sim 2u$ per $u\to0^+$

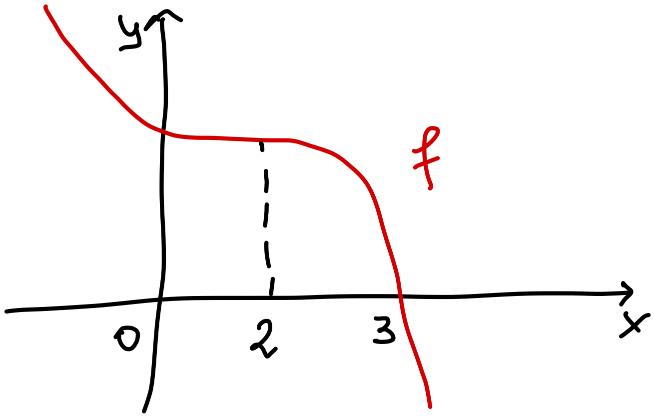
$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{a\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = a$.

f è derivabile in $x=1 \iff f'_+(1) = f'_-(1) \in\mathbb{R} \iff a = 2$

(e $b=-1$).

Soluzione del Problema 7:

(i)



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile poiché strettamente decrescente ($\Rightarrow$ iniettiva) e suriettiva ($\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$).

Tali proprietà seguono da quelle della funzione elementare $g(x) = x^3$, poiché $f(x) = -g(x-2) + 1$.

(ii) Si noti che $f(x) > 0$ per $x < 3$, e $f(x) < 0$ per $x > 3$.

Dunque l'area richiesta A è uguale a

$$A = \int_1^3 f(x)\,dx - \int_3^4 f(x)\,dx = \int_1^3 \left((2-x)^3 + 1\right) dx - \int_3^4 \left((2-x)^3 + 1\right) dx$$

$$\left.\begin{matrix} u = 2-x \\ du = -dx \end{matrix}\right] = -\int_1^{-1} (u^3+1)\,du + \int_{-1}^{-2} (u^3+1)\,du = \left[\frac{u^4}{4} + u\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{u^4}{4} + u\right]_{-2}^{-1} = \boxed{\frac{19}{4}}$$

Soluzione del Problema 8:

(i) $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \underline{\mathbb{R} \setminus \{1\}}.$

(ii) Sia $u(x) = \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{x^2}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$. Se $x \neq 0$ allora $u(x) = \dfrac{x}{1 - \frac{1}{x}}$.

Dunque $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \dfrac{+\infty}{1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} u(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} u(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

Per sostituzione allora

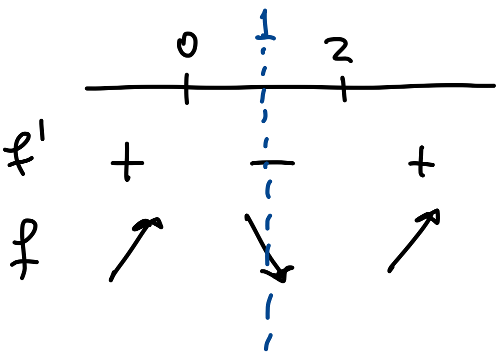
$$\boxed{\begin{aligned}
&\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty \\
&\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{u \to -\infty} e^u = 0, \\
&\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty, \\
&\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{u \to -\infty} e^u = 0.
\end{aligned}}$$

(iii) f è derivabile in dom f, poiché comp. di f. ivi derivabili, e risulta

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = e^{\frac{x^2}{x-1}}\,\frac{(x^2)'(x-1)-x^2(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= e^{\frac{x^2}{x-1}}\,\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2}{x-1}}\,\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Si ha $f'(x)>0 \iff x(x-2)>0 \iff x<0$ oppure $x>2$.



Dunque f è crescente in $(-\infty,0)$ e in $(2,+\infty)$, decrescente in $(0,2)$. Inoltre $x=2$ è un p.to di minimo relativo ($f(2)=e^4$), mentre $x=0$ è un p.to di massimo rel. ($f(0)=1$).

(iv)