Politecnico di Torino
Corso di Laurea in Architettura

Esame di
Istituzioni di Matematiche

Data: 31/1/2024

Durata della prova: due ore

Cognome e nome: ____________________

Numero di matricola: ____________________

. . . .

☐ **Consegna** – ☐ **Si ritira** – **Firma**: ____________________

. . . .

Soluzioni

Esito

Problema	Punti	Valutazione
1	3	
2	3	
3	3	
4	7	
5	3	
6	3	
7	3	
8	7	
Totale	32	

Parte I – Geometria e Algebra Lineare

Problema 1 .... (3 punti)

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare i valori di λ per cui $B = A + A^\top$ risulta <u>non</u> invertibile.

(ii) Fissato $\lambda = 1$, calcolare il determinante della matrice $C = -5A^\top B^{-1}$.

Problema 2 .... (3 punti)

Siano dati i vettori

$$\vec{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}, \qquad \vec{v} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}.$$

(i) Determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ affinché $\vec{v}$ risulti ortogonale a $\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

(ii) Determinare un vettore appartenente alla retta bisettrice[1] dell'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Problema 3 .... (3 punti)

Si considerino i punti

$$A = (0, 1, 0), \qquad B = (0, 2, -1), \qquad C = (1, 2, 1).$$

(i) Verificare che i punti A, B, C non sono allineati e determinare l'area del triangolo di tali vertici.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

Problema 4 .... (7 punti)

Sia $c \in \mathbb{R}$ e si considerino i piani di equazione

$$\pi_1 \colon x + y - 2z = 1, \qquad \pi_2 \colon 2x + y + z = 1, \qquad \pi_3 \colon cx + y + 4z = 2, \qquad \pi_4 \colon x + 3z = 1.$$

(i) Determinare i valori di c per cui i piani π_1 e π_3 risultano perpendicolari. Esistono valori di c per cui i piani π_1 e π_3 sono invece paralleli?

(ii) <u>Posto d'ora in avanti $c = 3$</u>, mostrare che le rette $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $s = \pi_3 \cap \pi_4$ non hanno punti in comune.

(iii) Determinare una parametrizzazione per ciascuna delle rette r e s, e stabilire se si tratta di rette parallele oppure sghembe.

(iv) Determinare la distanza tra le rette r e s.

[1] Può essere utile ricordare che ciascuna diagonale di un rombo (= parallelogrammo con lati della stessa lunghezza) individua due triangoli isosceli e congruenti tra loro.

Parte II – Analisi Matematica

Problema 5 .... (3 punti)

(i) Disegnare il grafico di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3,$
- f ha un punto di minimo globale in $x = 4$ e vale $f(4) = -1$.
- f ha un punto di flesso in $x = 5$ e risulta $f(5) = 0$.

(ii) Disegnare il grafico di $g(x) = 1 - |f(x)|$.

Problema 6 .... (3 punti)

Si consideri la funzione $f\colon (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log(2 + x) + \frac{1 + x}{2 + x}.$$

(i) Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto $x = -1$.

(ii) Dopo aver calcolato $f'(x)$ per $x > -2$, dimostrare che $x = -1$ è l'unico zero di f.

Problema 7 .... (3 punti)

Si considerino le funzioni $f(x) = \sqrt{x + 4}$ e $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

(i) Disegnare i grafici di f e g.

(ii) Determinare l'area della regione piana A compresa tra il grafico di f e quello di g, ovvero

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le x \le 5, \quad g(x) \le y \le f(x)\}.$$

Problema 8 .... (7 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{3\sqrt{1 + x^4}}{x}$.

(i) Determinare il dominio di f e verificare che si tratta di una funzione dispari.

(ii) Determinare il comportamento di f alla frontiera del dominio, verificando in particolare la presenza di asintoti obliqui: $f(x) = 3x + o(1) \quad (x \to \pm\infty)$.

(iii) Determinare gli intervalli di monotonia di f e individuare gli eventuali punti di estremo locale.

(iv) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione del Problema 1:

(i) $B = A + A^T = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 2 \end{pmatrix}.$

B non è invertibile $\iff \det B = 0$. Risulta $\det B = 4\lambda^2 - (2+\lambda)^2$
$= 4\lambda^2 - 4 - 4\lambda - \lambda^2 = 3\lambda^2 - 4\lambda - 4$, perciò $\det B = 0 \iff 3\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$
$\iff \boxed{\lambda = -\frac{2}{3} \text{ oppure } \lambda = 2.}$

(ii) $\lambda = 1 \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

$$\det C = \det(-5A^TB^{-1}) = (-5)^2 \det(A^TB^{-1}) = 25(\det A^T)(\det B^{-1})$$
$$= 25(\det A)(\det B)^{-1} = 25(1-2)(4-9)^{-1}$$
$$= 25 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \boxed{5.}$$

Soluzione del Problema 2:

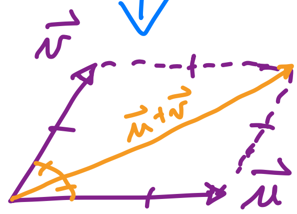
(i) $\vec{v} \perp (\vec{u} + \lambda\vec{v}) \iff \vec{v} \cdot (\vec{u} + \lambda\vec{v}) = 0$
$\iff \vec{v} \cdot \vec{u} + \lambda \|\vec{v}\|^2 = 0$
$\iff (1,-1,2) \cdot (2,1,-1) + \lambda(1^2 + (-1)^2 + 2^2) = 0$
$\iff -1 + 6\lambda = 0 \iff \boxed{\lambda = \frac{1}{6}.}$

(ii) La retta bisettrice dell'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è diretta come $\vec{u} + \vec{v}$ (in un rombo le diagonali sono bisettrici)

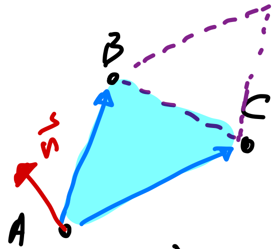
Dunque un vettore soddisfacente la richiesta è

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = 3\hat{\imath} + \hat{k}}$$

(o qualsiasi suo multiplo non nullo).



Soluzione del Problema 3:



(i) A, B, C sono allineati $\iff \vec{AB} \parallel \vec{AC}$

$$\iff B-A = \lambda(C-A),\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$\iff (0,1,-1) = \lambda(1,1,1),$$

da cui si vede che non esistono valori di $\lambda \neq 0$ per cui $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$.

L'area del triangolo di vertici A, B, C è data da

$$\frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|, \quad \text{dove} \quad \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,-1),$$

quindi $\frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2}\|(2,-1,-1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+1+1} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}}$.

(ii) Il piano π passante per A, B, C è perpendicolare alla direzione di $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (2,-1,-1)$, dunque $\pi: 2x - y - z = d$, con $d \in \mathbb{R}$ da determinarsi. Poiché $A \in \pi$, risulta $0 - 1 - 0 = d$, quindi

$$\boxed{\pi: \ 2x - y - z = -1.}$$

Soluzione del Problema 4:

(i) $\pi_1 \perp \pi_3 \iff \vec{n_1} \perp \vec{n_3}$, con $\vec{n_1} = (1,1,-2)$ e $\vec{n_3} = (c,1,4)$

$$\iff \vec{n_1} \cdot \vec{n_3} = 0 \iff c + 1 - 8 = 0 \iff \boxed{c = 7}.$$

Inoltre $\pi_1 \parallel \pi_3 \iff \vec{n_1} \parallel \vec{n_3} \iff \vec{n_1} = \lambda \vec{n_3}$, $\lambda \neq 0$, ma ciò è impossibile poiché il sistema $\begin{cases} 1 = \lambda c \\ 1 = \lambda \\ -2 = 4\lambda \end{cases}$ è incompatibile per qualsiasi valore di $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Basta studiare l'intersezione di r e s:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 4z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right),$$

da cui si vede che il sistema è incompatibile.

$\left(R_2: -y + 5z = -1,\ R_4: -y + 5z = 0,\ \frac{R_3}{2}: -y + 5z = -\frac{1}{2}\right)$

Per completezza:

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$ incompatibile per il teo. di Rouché - Capelli.

(iii) $r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{} \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -y + 5z = -1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = 1 - (1+5t) + 2t = -3t \\ y = 1 + 5t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

$$s : \pi_3 \cap \pi_4 : \begin{cases} 3x + y + 4z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{s : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 3(1-3t) - 4t = -1 + 5t, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$$

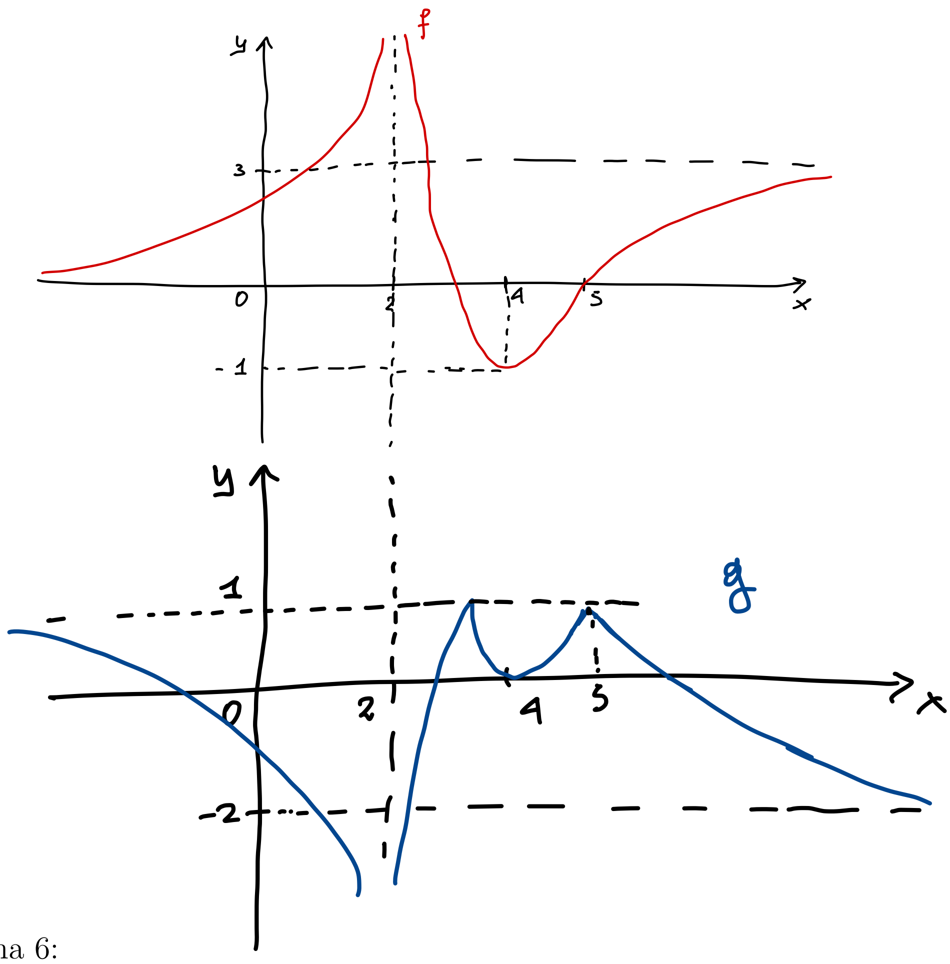
Si ha $Q_r = (0, 1, 0) \in r$ e $Q_s = (1, -1, 0) \in s$. Le rette r e s $\boxed{\text{sono parallele}}$, poiché entrambe dirette come $\vec{v} = (-3, 5, 1)$.

(iv) Poiché $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $s = \pi_3 \cap \pi_4$,

$$d(r, s) = d(Q_r, \pi_4) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}}}.$$

$$d(Q_r, \pi_4) = d(Q_r, \pi_3) = d(Q_s, \pi_1) = d(Q_s, \pi_2)$$

Soluzione del Problema 5:



Soluzione del Problema 6:

(i) f è derivabile in $(-2,+\infty)$ poiché somma di funzioni ivi derivabili,

e risulta $f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1\cdot(2+x)-(1+x)\cdot 1}{(2+x)^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{(2+x)^2}$.

Poiché $f(-1) = \log(1) + \frac{0}{1} = 0$ e $f'(-1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1^2} = 2$,

la retta tangente richiesta ha equazione $\boxed{\begin{aligned} y &= f(-1) + f'(-1)(x+1) \\ &= 2(x+1). \end{aligned}}$

Alternativa : $f(x) = \log(1+(1+x)) + (1+x)(1+(1+x))^{-1}$

$= 1+x + o(1+x) + (1+x)(1 - (1+x) + o(1+x))$

$= 2(1+x) + o(1+x) \quad , \quad x \to -1.$

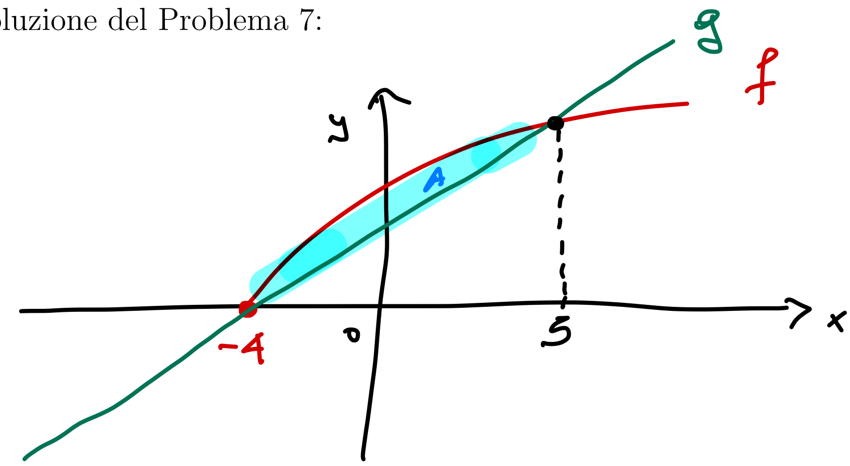
(ii) Poiché $f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{(2+x)^2} > 0$ per ogni $x > -2$, f

è strettamente crescente in $(-2,+\infty)$, quindi ivi iniettiva,

e pertanto $x = -1$ è l'unico zero di f.

Soluzione del Problema 7:

(i)



$$f(x)=g(x) \Updownarrow 3\sqrt{x+4} = x+4 \Updownarrow x=-4 \text{ oppure } \sqrt{x+4}=3 \Updownarrow x+4=9 \Updownarrow x=5.$$

(ii)

$$\text{Area}(A) = \int_{-4}^{5} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_{-4}^{5} \left(\sqrt{x+4} - \frac{x}{3} - \frac{4}{3}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(x+4)^{3/2} - \frac{x^2}{6} - \frac{4}{3}x\right]_{-4}^{5}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 27 - \frac{25}{6} - \frac{20}{3}\right) - \left(0 - \frac{16}{6} + \frac{16}{3}\right) = 18 - \frac{25}{6} - \frac{20}{3} + \frac{16}{6} - \frac{16}{3}$$

$$= 18 - \frac{9}{6} - \frac{36}{3} = 18 - \frac{3}{2} - 12 = 6 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}.$$

Soluzione del Problema 8:

(i) $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ e } \underbrace{1+x^4 \geq 0}_{\text{per ogni } x\in\mathbb{R}}\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$

f è dispari: per ogni $x \neq 0$ si ha $f(-x) = \dfrac{\sqrt{1+(-x)^4}}{-x} = -\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x} = -f(x)$

(ii) • $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt{1+x^4}}{x} = \Big(\underbrace{\lim_{x\to 0^+} 3\sqrt{1+x^4}}_{=3}\Big)\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}}_{=+\infty}\Big) = +\infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{3x}_{\to +\infty} \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}_{\to 1} = +\infty.$

In particolare, $\displaystyle f(x) = \frac{3x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x} = 3x\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{1/2} = 3x\left(1+\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$

$$= 3x + \underbrace{\frac{3}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}_{=o(1)}$$

$$= 3x + o(1), \quad x \to +\infty.$$

Quindi $y=3x$ è asintoto obliquo destro per f.

Per simmetria (f è dispari) si ha pure

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f(x) = 3x + o(1),\ x\to -\infty.$$

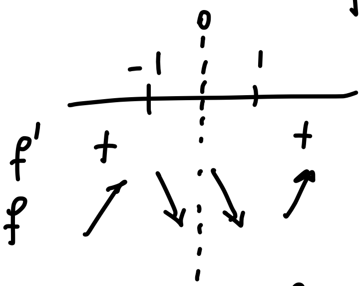
(as. obl. $3x$).

(iii) f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ poiché rapporto di f. ivi derivabili e risulta

$$f'(x) = \frac{\frac{3(4x^3)}{2\sqrt{1+x^4}}\cdot x - 3\sqrt{1+x^4}\cdot 1}{x^2} = \frac{6x^4 - 3(1+x^4)}{x^2\sqrt{1+x^4}}$$

$$= \frac{3(x^4-1)}{x^2\sqrt{1+x^4}}, \quad x\neq 0.$$

Si vede che $f'(x) > 0 \iff \underbrace{x^4 - 1}_{=(x^2-1)(x^2+1)} > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ o $x > 1$.



Perciò f è crescente se $x<-1$ o $x>1$, e decrescente se $-1<x<0$ o $0<x<1$.

In particolare, $x=-1$ è un p.to di massimo relativo, mentre $x=1$ è un p.to di minimo relativo.

Vale $f(1) = 3\sqrt{2}$ e $f(-1) = -3\sqrt{2}$.

(iv)