# Politecnico di Torino
# Corso di Laurea in Architettura

## Esame di
## Istituzioni di Matematiche

Data: 14/09/2023

Soluzioni

Durata della prova: due ore

**Cognome e nome**: ______________________________

**Numero di matricola**: ______________________________

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

☐ **Consegna** – ☐ **Si ritira** – **Firma**: ______________________________

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Esito**

| Problema | Punti | Valutazione |
|---|---|---|
| 1 | 3 | |
| 2 | 3 | |
| 3 | 3 | |
| 4 | 7 | |
| 5 | 3 | |
| 6 | 3 | |
| 7 | 3 | |
| 8 | 7 | |
| **Totale** | 32 | |

# Parte I – Geometria e algebra lineare

**Problema 1** ........................................................ (3 punti)

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Mostrare che la matrice $A_\alpha$ è invertibile per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinare $(A_\alpha)^{-1}$.

(ii) Calcolare $(A_\alpha)^n$ con $n = 2, 3, \ldots$ – si ricorda che $(A_\alpha)^n = A_\alpha (A_\alpha)^{n-1}$.

**Problema 2** ........................................................ (3 punti)

Si considerino i vettori

$$\vec{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}, \qquad \vec{v} = \hat{\jmath} + 2\hat{k}.$$

(i) Determinare un vettore $\vec{w}$ tale che $\|\vec{w}\| = 1$ in modo che risulti perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{u}$.

(ii) Determinare il volume del parallelepipedo generato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

**Problema 3** ........................................................ (3 punti)

Si considerino i piani di equazione

$$\pi_1 : x + y = 0, \qquad \pi_2 : x - y + 2z = 0.$$

(i) Determinare una parametrizzazione della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

(ii) Determinare l'equazione della retta $s$ passante per $A = (2, -1, -1)$ e parallela a $s$.

**Problema 4** ........................................................ (7 punti)

Sia $h \in \mathbb{R}$ e si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + hz = h^2 \\ x + hy + z = h \\ hx + y + z = 1. \end{cases}$$

(i) Impiegando il teorema di Rouché-Capelli, mostrare che l'insieme delle soluzioni del sistema nel caso $h = -2$ è vuoto.

(ii) Impiegando il teorema di Rouché-Capelli, mostrare che nel caso $h = 0$ l'insieme delle soluzioni del sistema coincide con un punto $P$, quindi determinarne le coordinate.

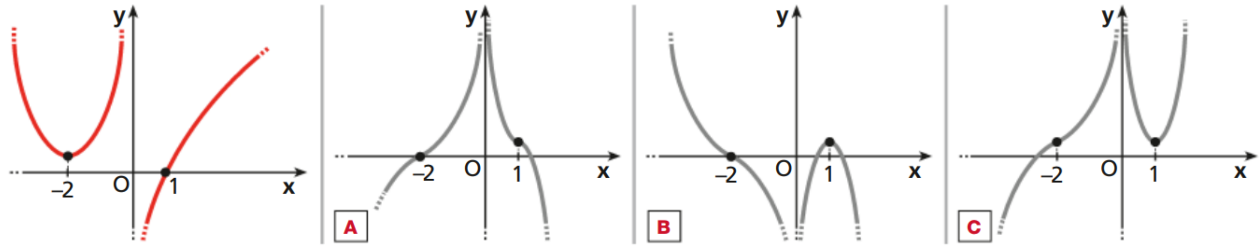
(iii) Impiegando il teorema di Rouché-Capelli, mostrare che nel caso $h = 1$ l'insieme delle soluzioni del sistema coincide con un piano $\pi$, quindi determinarne l'equazione cartesiana.

(iv) Determinare la distanza tra $P$ e $\pi$.

# Parte II – Analisi matematica

**Problema 5** ........................................................................ (3 punti)

Si consideri la seguente figura.




(i) Supponendo che il primo diagramma rappresenti il grafico di una funzione $f$, tracciare il grafico di $-|f(x-1)|$.

(ii) Supponendo che il primo diagramma rappresenti il grafico della derivata $f'$ di una certa funzione $f$, spiegare quale tra i diagrammi etichettati come $A$, $B$ e $C$ è compatibile con la rappresentazione del grafico di $f$.

**Problema 6** ........................................................................ (3 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$.

(i) Determinare $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(ii) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa $x = 0$.

**Problema 7** ........................................................................ (3 punti)

Si considerino le funzioni $f(x) = x + 4$ e $g(x) = -\dfrac{3}{x}$.

(i) Disegnare i grafici delle due funzioni nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

(ii) Determinare l'area della regione del piano compresa tra i grafici di $f$ e $g$ nell'intervallo $[-3, -1]$.

**Problema 8** ........................................................................ (7 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\log(x^2)}{x^2}$.

(i) Determinare il dominio di $f$ e verificare che si tratta di una funzione pari.

(ii) Determinare il segno di $f$ e il comportamento alla frontiera del dominio.

(iii) Determinare gli intervalli di monotonia di $f$ e individuare gli eventuali punti di estremo locale.

(iv) Disegnare un grafico qualitativo di $f$.

Soluzione del Problema 1:

(i) $A_\alpha$ è invertibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\iff$ $\det A_\alpha \neq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\iff$ $\rho(A_\alpha) = 2 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$A_\alpha$ è già ridotta a scala con due pivot, indipendentemente dal valore di $\alpha \in \mathbb{R}$, quindi $\rho(A_\alpha) = 2$. Equivalentemente, $\det(A_\alpha) = 1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Per il calcolo di $A_\alpha^{-1}$, se $\alpha = 0$ allora $A_0 = I = A_0^{-1}$. Se $\alpha \neq 0$, si può procedere col metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \alpha R_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}.}$$

(ii) Osserviamo che $A_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e inoltre

$A_\alpha^3 = A_\alpha A_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ciò sembra suggerire che valga

$\boxed{A_\alpha^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \forall\, n \geq 2.}$ In effetti, supponendo ciò, si avrebbe coerentemente $A_\alpha^n = A_\alpha A_\alpha^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (n-1)\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, come atteso.

Soluzione del Problema 2:

(i) Il vettore $\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ è per definizione perpendicolare sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$, qualora essi non siano paralleli. Si ha

$$\vec{x} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k} = (2, -2, 1),$$

quindi $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$. Allora $\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}$ è un vettore con le proprietà richieste (in particolare, $\|\vec{u}\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\|\vec{x}\| = 1$).

(ii) Ricordiamo che il modulo del prodotto misto $|\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|$ rappresenta il volume del parallelepipedo generato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Con la scelta $\vec{w} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$ del punto precedente si ha subito

$$|\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}| = \left| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} \right| = \frac{|\vec{x} \cdot \vec{x}|}{\|\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{x}\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|\vec{x}\|}} = \|\vec{x}\| = \boxed{3.}$$

Soluzione del Problema 3:

(i) $r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z = \frac{y-x}{2} = -x \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

(ii) $r$ ha vettore direzione $\vec{v} = (1,-1,-1)$. Se $s$ è parallela a $r$ e passa per $A$, allora $P \in s \iff P = A + t\vec{v}$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Dunque una parametrizzazione di $s$ è data da $\boxed{s : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$

Soluzione del Problema 4:

La matrice completa del sistema in esame è $M = (A|b) \in \mathbb{R}^{3,4}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & h & 1 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} h^2 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Se $h=-2$ allora $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3+2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_3 \to R_3+R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$ Quindi $\rho(A) = 2 \neq 3 = \rho(M)$, perciò il sistema è impossibile (teo. di R.-C.).

(ii) Se $h=0$ allora $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[R_3 \to R_3+R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$ Quindi $\rho(A) = \rho(M) = 3$, perciò il sistema ammette soluzione unica (# incognite $= 3$).

In particolare: $\begin{cases} x+y = 0 \\ -y+z=0 \\ 2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y=-1/2 \\ y=z=1/2 \\ z=1/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).}$

---

(iii) Se $h=1$ si ha

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3-R_1]{R_2 \to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ quindi}$$

$\rho(M) = \rho(A) = 1 < 3$, perciò il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da $3-1=2$ parametri ($\Rightarrow$ piano). Risulta $\boxed{\pi: x+y+z=1.}$

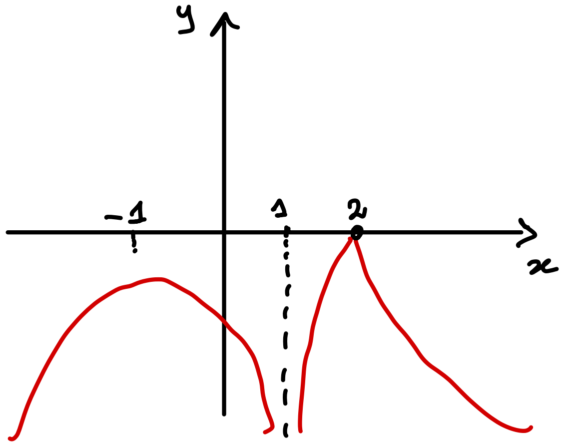
---

(iv) La distanza tra $\pi: ax+by+cz=d$ (con $a=b=c=d=1$) e $P=(x_0,y_0,z_0)=(-1/2,1/2,1/2)$ è data da

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}}.$$

Soluzione del Problema 5:

(i)




$-|f(x-1)|$

(ii) Il grafico $\boxed{[C]}$ è l'unico compatibile col grafico di $f$, poiché

- $f'(x)>0 \ \forall x<0$, e $f$ in [A] e [C] è strett. crescente in $(-\infty,0)$
- $f'(-2)=0$, e $f$ in [A] e [C] presenta un p.to di flesso osc in $x=-2$
- $f'(1)=0$, $f'(x)<0$ in $(0,1)$, $f'(x)>0$ in $(1,+\infty)$, e $f$ in [C] presenta un p.to di minimo relativo in $x=1$.

Soluzione del Problema 6:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{(x+1)(x-1)}$. Procedendo per sostituzione, poniamo $u=x-1$, così se $x\to 1$ allora $u\to 0$ e

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{(u+2)u}\mp\underbrace{\left(\lim_{u\to 0}\frac{1}{u+2}\right)}_{(1)}\underbrace{\left(\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\right)}_{(2)}.$$

(1): si tratta di una f. continua, quindi $=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$.

(2): limite notevole, oppure posto $g(t)=e^t$, notare che $(2)=g'(0)=e^0=1$.

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.}$$

(ii) $f$ è derivabile in $x=0$ e risulta $\displaystyle f'(x)=\frac{e^{x-1}(x^2-1)-(e^{x-1}-1)(2x)}{(x^2-1)^2}$.

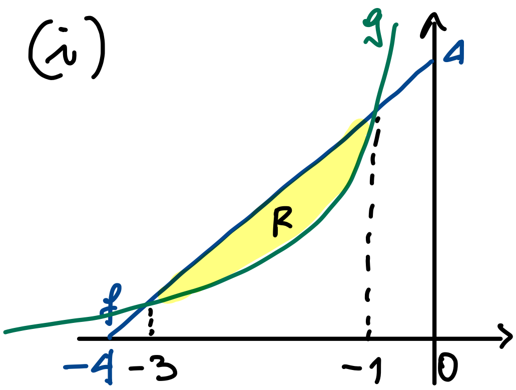
Poiché $\displaystyle f(0)=\frac{e^{0-1}-1}{0-1}=1-\frac{1}{e}$, $\displaystyle f'(0)=-\frac{1}{e}$,

la retta tangente al grafico di $f$ in $x=0$ è data da

$$y=f(0)+f'(0)x=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}x=\boxed{1-\frac{1}{e}(1+x).}$$

Soluzione del Problema 7:

(i)




$$f(x)=g(x) \iff x+4=-\frac{3}{x}$$
$$\iff x^2+4x+3=0$$
$$\iff (x+3)(x+1)=0$$
$$\iff x=-3 \ \vee \ x=-1.$$

(ii) $$\text{Area}(R)=\int_{-3}^{-1}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int_{-3}^{-1}\left(x+4+\frac{3}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}+4x+3\log|x|\right]_{-3}^{-1}=\frac{(-1)^2}{2}-4+3\log|-1|-\frac{(-3)^2}{2}+12-3\log|-3|$$
$$=\frac{1}{2}-4-\frac{9}{2}+12-3\log 3$$
$$=\boxed{4-3\log 3.}$$

Soluzione del Problema 8:

(i) $\text{dom} f=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2>0 \ \wedge\ x^2\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$

Per la parità si osservi che, per ogni $x\neq 0$,
$$f(-x)=\frac{\log((-x)^2)}{(-x)^2}=\frac{\log(x^2)}{x^2}=f(x).$$


(ii) $f(x)>0 \iff \log(x^2)>0 \iff x^2>1 \iff x<-1 \vee x>1.$

$f(x)<0 \iff \log(x^2)<0 \iff 0<x^2<1 \iff -1<x<0 \ \vee\ 0<x<1.$

Si ha in particolare $f(x)=0 \iff x=-1 \vee x=1.$

Per parità, è sufficiente determinare:

- $$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\log(x^2)}{x^2}\overset{?}{=}\left(\lim_{x\to0^+}\log(x^2)\right)\left(\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=(-\infty)(+\infty)=-\infty.$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2)}{x^2} \overset{(DH)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2x}\cdot\frac{1}{x^2}}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$

---

(iii) $f$ è derivabile in dom$f$, poiché comp. e rapp. di f. ivi derivabili.

Risulta $f'(x) = \frac{\left(2x\cdot\frac{1}{x^2}\right)x^2 - \log(x^2)(2x)}{x^4} = \frac{2(1-\log(x^2))}{x^3}$.

È sufficiente studiare il segno di $f'$, e quindi la monotonia di $f$, per $x>0$. Si ha $f'(x)>0 \iff 1-\log(x^2)>0 \iff \log(x^2)<1$

$\iff x^2<e \iff x<\sqrt{e}$.

| | $0$ | | $\sqrt{e}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | | $-$ |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

Perciò $x=\sqrt{e}$ è p.to di massimo locale (con $f(\sqrt{e}) = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e}$), e lo stesso vale per $x=-\sqrt{e}$ per parità.

---

(iv)