Politecnico di Torino
Corso di Laurea in Architettura

Esame di
Istituzioni di Matematiche

Data: 25/01/2023

Soluzioni

Durata della prova: due ore

Cognome e nome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________________

. . . .

☐ **Consegna** – ☐ **Si ritira** – **Firma**: ______________________________

. . . .

Esito

Problema	Punti	Valutazione
1	3	
2	3	
3	3	
4	7	
5	3	
6	3	
7	3	
8	7	
Totale	32	

Parte I – Geometria e algebra lineare

Problema 1 .... (3 punti)

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ \lambda & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare i valori di λ per cui A risulta invertibile.

(ii) Fissato $\lambda = 3/2$, calcolare il determinante della matrice $B = 2A^\top A^{-1}$.

Problema 2 .... (3 punti)

Si considerino i vettori

$$\vec{u} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}, \qquad \vec{w} = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}.$$

Sia $\vec{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ un generico vettore con $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(i) Stabilire le condizioni che devono essere soddisfatte da x, y, z affinché risulti $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.

(ii) A partire dalle condizioni individuate, individuare tutti i vettori $\vec{v}$ che soddisfano $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Interpretare geometricamente il risultato ottenuto: quanti sono e quali caratteristiche condividono tali vettori?

Problema 3 .... (3 punti)

Si considerino i punti

$$A = (2, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 1), \qquad C = (1, 1, 3).$$

(i) Verificare che il triangolo di vertici A, B, C è isoscele.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

Problema 4 .... (7 punti)

Sia $c \in \mathbb{R}$ e si considerino i piani di equazione

$$\pi_1 \colon x + y + 2 = 0, \qquad \pi_2 \colon z - 1 = 0, \qquad \pi_3 \colon 2x + 2y - z = c.$$

Sia poi r la retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

(i) Determinare una parametrizzazione di r.

(ii) Determinare, se esistono, i valori di c per cui la retta r è contenuta nel piano π_3.

(iii) Determinare l'equazione cartesiana del piano π_4 perpendicolare a r e passante per il punto $A = (1, 2, 3)$.

(iv) Determinare la distanza tra il punto $B = (0, 0, 1)$ e il piano π_4.

Parte II – Analisi matematica

Problema 5 .... (3 punti)

(i) Disegnare il grafico di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1,$
- $f(2) = 0$ e la retta tangente al grafico di f in corrispondenza di $x = 2$ è verticale.

(ii) Disegnare anche il grafico di $|f(x+2) - 1|$.

Problema 6 .... (3 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \log(1 + e^{-x})$.

(i) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in corrispondenza di $x = 0$.

(ii) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x)$.

Problema 7 .... (3 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

(i) Disegnare un grafico qualitativo di f e determinare $b > 0$ in modo tale che la media integrale di f sull'intervallo $[0, b]$ sia nulla.

(ii) Determinare l'area della regione piana compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, b]$, dove b è il valore determinato nel punto precedente

Problema 8 .... (7 punti)

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{x}$.

(i) Determinare il dominio di f e il comportamento della funzione agli estremi del dominio.

(ii) Determinare gli intervalli di monotonia di f e individuare gli eventuali punti di estremo locale.

(iii) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(iv) Mostrare che l'equazione $e^{2x-1} + 3x = 0$ ammette un'unica soluzione reale.
Si tratta di una soluzione positiva o negativa?

Soluzione del Problema 1:

(i) A è invertibile $\iff \det A \neq 0$. Sviluppando lungo la seconda colonna si ottiene $\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 4\lambda(\lambda-1)$.

Pertanto $\underline{A \text{ è invertibile} \iff \lambda \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 1}$.

(ii) $\lambda = 3/2 \Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow \det A \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} \det B = \det(2A^T A^{-1}) &= 2^3 \det(A^T A^{-1}) \\ &= 8 \det(A^T)\det(A^{-1}) \\ &= 8 \det(A) \frac{1}{\det(A)} = \underline{\underline{8}}. \end{aligned}$$

Soluzione del Problema 2:

(i) $$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & z \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & z \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ x & y \end{vmatrix}\hat{k}$$
$$= (2z-3y)\hat{\imath} + (z+3x)\hat{\jmath} - (y+2x)\hat{k}.$$

Pertanto, $$\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w} \iff \underline{\begin{cases} 2z-3y = 1 \\ z+3x = 5 \\ y+2x = 3 \end{cases}}.$$

(ii) Risolvendo il sistema col metodo di Gauss si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to 2R_2 - 3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = 3 \\ -3y+2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3-2x \\ 2z = 1+3y = 1+3(3-2x) \\ = 10-6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3-2t \\ z = 5-3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w} \iff \vec{v} = (t, 3-2t, 5-3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ tali vettori individuano i punti della retta passante per $Q = (0,3,5)$ e diretta come $-\vec{u}$.

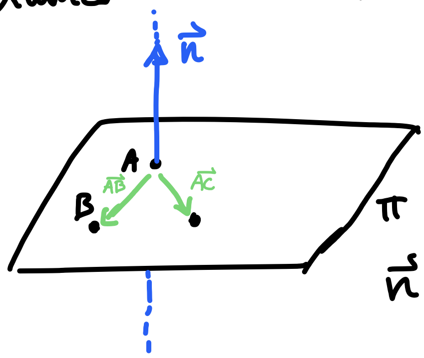
Soluzione del Problema 3:

(i) $\|\vec{AB}\| = \|B-A\| = \|(-2,2,0)\| = \sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{8}.$

$\|\vec{BC}\| = \|C-B\| = \|(1,-1,2)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}.$

$\|\vec{CA}\| = \|A-C\| = \|(1,-1,-2)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{6}.$

Quindi $\|\vec{BC}\| = \|\vec{CA}\|$ e il triangolo di vertici A, B, C è isoscele.

(ii) 

Il piano π passante per A, B, C è perpendicolare a $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$, ovvero

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \hat{k}$$
$$= 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}.$$

Dunque l'equazione cartesiana di π è del tipo $4x+4y=d$, con $d \in \mathbb{R}$ da determinare. Poiché $A \in \pi \Rightarrow 4\cdot 2 + 4 \cdot 0 = d$, risulta $d = 8$ e quindi $4x+4y=8 \Longrightarrow \underline{\pi : \; x+y=2}.$

Soluzione del Problema 4:

(i) $r = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow r: \begin{cases} x+y+2=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2-t \\ z = 1 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$

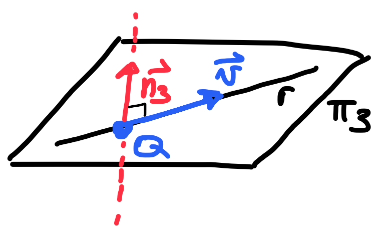
(ii) r è diretta come $\vec{v} = (1,-1,0)$ e passa per $Q = (0,2,1)$.

Affinché $r \subset \pi_3$ deve aversi che $Q \in \pi_3$ e $\vec{v} \perp \vec{n_3}$, dove $\vec{n_3} = (2,2,-1)$ è un vettore normale al piano π_3.

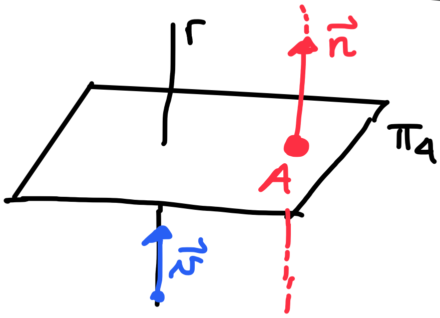
Si ha che $\vec{v} \perp \vec{n_3}$, poiché $\vec{v} \cdot \vec{n_3} = (1,-1,0)\cdot(2,2,-1) = 2-2 = 0$, pertanto r è parallela a π_3 per qualsiasi valore di $c \in \mathbb{R}$.

Inoltre $Q \in \pi_3 \Rightarrow 2\cdot 0 + 2 \cdot 2 - 1 = c \Longrightarrow c = 3.$

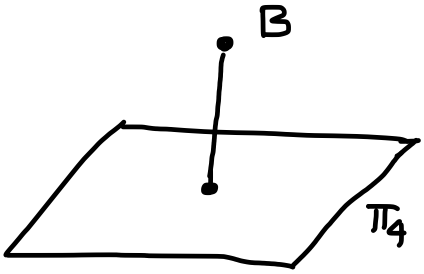
Concludiamo che $\underline{r \subset \pi_3 \iff c = 3}.$



(iii) Sia $\vec{n_4}$ un vettore normale al piano π_4. Allora $r \perp \pi_4 \iff \vec{v} \parallel \vec{n_4} \iff \vec{n_4} = \alpha \vec{v}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Scelto ad esempio $\alpha = 1$, risulta $\vec{n_4} = \vec{v} = (1,-1,0)$, quindi l'eq. cartesiana del piano π_4 è del tipo $x - y = d$, con $d \in \mathbb{R}$ da determinare. Poiché $A = (1,2,3) \in \pi_4$, deve aversi $1 - 2 = d$, quindi $d = -1$ e $\underline{\pi_4 : x - y = -1}$.



(iv)



Ricordiamo che la distanza di un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ dal piano $\pi : ax + by + cz = d$ è data dalla relazione

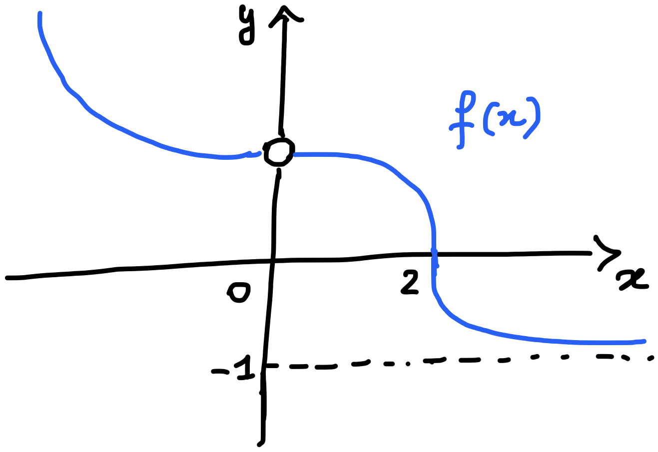
$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

Nel caso in esame risulta allora

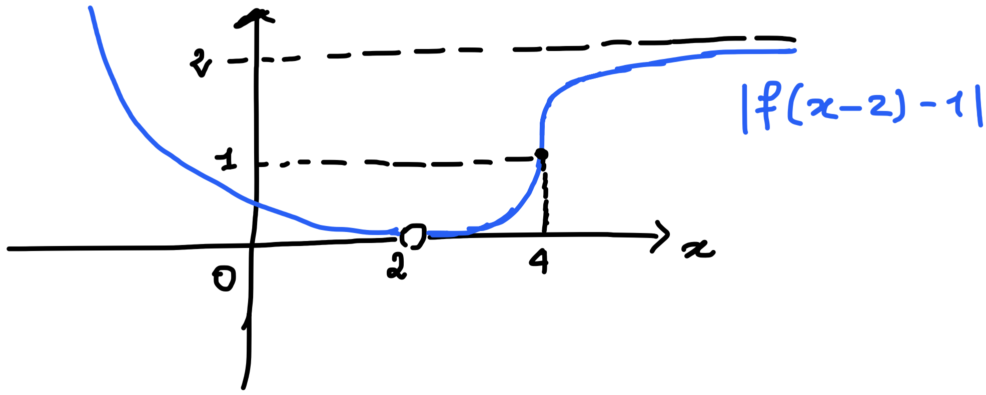
$$d(B, \pi_4) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}} .$$

Soluzione del Problema 5:

(i)



(ii)



Soluzione del Problema 6:

(i) f è derivabile in $\mathbb{R}$ poiché composizione di funzioni ivi derivabili, e si ha $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

Si ha in particolare $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

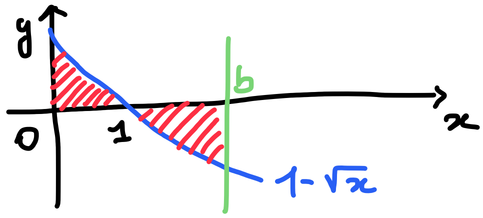
L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0)) = (0, \log 2)$ è data da $y = f(0) + f'(0)(x-0)$, ovvero $\underline{y = \log 2 - \frac{1}{2}x}$.

(ii) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \log(1+e^{-x})$. Ponendo $t = e^{-x}$, si vede che per $x\to+\infty$ si ha $t \to 0^+$, e vale l'approssimazione locale $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t\to 0$, ovvero $\log(1+e^{-x}) \sim e^{-x}$ per $x\to+\infty$.

Pertanto (sostit. degli equivalenti) $\lim_{x\to+\infty} x^2\log(1+e^{-x}) = \underline{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0}$.

In alternativa (t. de L'Hopital): $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+e^{-x})}{\frac{1}{x^2}} \overset{(DH)}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+e^x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{2(1+e^x)} = 0.$

Soluzione del Problema 7:

(i) 

La media integrale di f su $[0,b]$ è data da $\mu = \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx$.

Perciò $\mu = 0 \iff \int_0^b f(x)\,dx = 0$. Si ha

$$\int_0^b (1-\sqrt{x})\,dx = \left[x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^b = b - \frac{2}{3}b^{3/2} = b\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{b}\right).$$

Quindi $\mu = 0 \iff 1 - \frac{2}{3}\sqrt{b} = 0 \iff \underline{\underline{b = \frac{9}{4}}}$.

(ii) Sia R la regione considerata. Allora

$$\text{Area}(R) = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^{9/4} f(x)\,dx = \left[x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 - \left[x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{9/4}$$

$$= \left(1-\frac{2}{3}\right) - \left[\frac{9}{4}\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right) - \left(1-\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

Soluzione del Problema 8:

(i) $\text{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x-1}}{x} = \left(\lim_{x\to-\infty} e^{2x-1}\right)\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right) = 0\cdot 0 = 0 \quad \underline{(\text{as. orizz.})}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{x} = +\infty \quad \left(\text{es. } \overset{(DH)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x-1}}{1} = +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to0^\pm} \frac{e^{2x-1}}{x} = \left(\lim_{x\to0^\pm} e^{2x-1}\right)\left(\lim_{x\to0^\pm}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{e}\cdot(\pm\infty) = \pm\infty. \quad \underline{(\text{as. vert.})}$$

(ii) f è derivabile in dom f poiché ottenuta da composizione e rapporto di funzioni ivi derivabili, e si ha

$$f'(x) = \frac{(e^{2x-1})'x - e^{2x-1}(x)'}{x^2} = \frac{2e^{2x-1}x - e^{2x-1}}{x^2} = \frac{e^{2x-1}}{x^2}(2x-1).$$

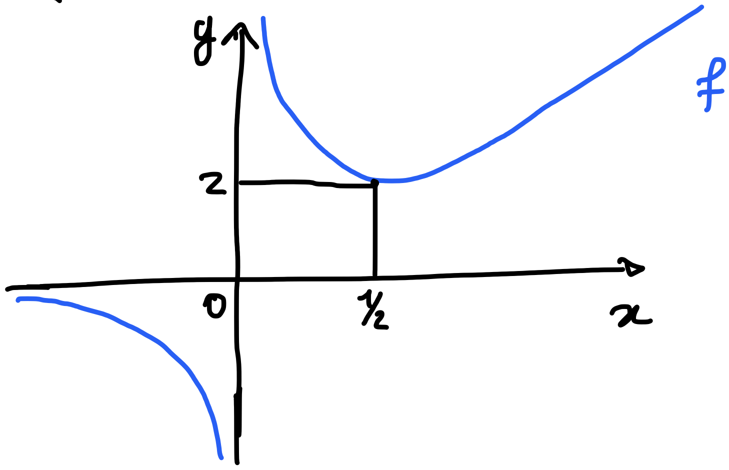
Si ha $f'(x) = 0 \iff 2x-1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. Inoltre,

$$f'(x) > 0 \iff \underbrace{\frac{e^{2x-1}}{x^2}}_{>0\ \forall x\neq0}(2x-1) > 0 \iff 2x-1>0 \iff x > \frac{1}{2}.$$

		$\frac{1}{2}$	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Quindi f è st. decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, \frac{1}{2})$, invece è st. crescente in $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Il p.to stazionario $x = \frac{1}{2}$ risulta perciò un p.to di minimo relativo, con $f(\frac{1}{2}) = 2$.

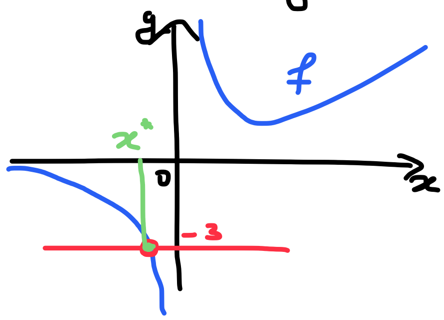
(iii)



(iv) $e^{2x-1} + 3x = 0 \iff e^{2x-1} = -3x$.

Osservando che $x=0$ non è una soluzione ($e^{-1} \neq -3$), l'equazione equivale a $f(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{x} = -3$.

Dal grafico qualitativo ricavato sopra si evince che $f(x) = -3$ ammette un'unica soluzione (negativa), ovvero $x^* = f^{-1}(3) < 0$.



Più precisamente, poiché f è st. dec. in $(-\infty, 0)$, $f(x) < 0 \ \forall x < 0$ e $\mathrm{Im}(-\infty, 0) = (-\infty, 0)$, la restrizione $f : (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$ risulta biunivoca, quindi $\forall y^* < 0 \ \exists!\, x^* < 0$ t.c. $f(x^*) = y^*$.