# 第三章　连通度问题

- 3.1　连通度　链接
- 3.2　块　链接
- 3.3　可靠通信网的建设　链接

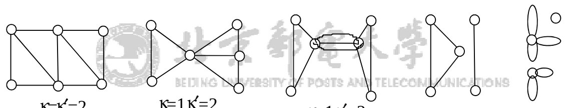
## 3.1　连通度

$B \subseteq E(G)$为图G的**k-**边割 ⇔ $|B| = k$ 。
图G的边连通度（edge connectivity）

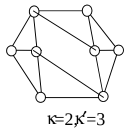
$$\kappa'(G)=\begin{cases}\min\{k \mid G\text{有}k-\text{边割}\} & \text{当}G\text{为非平凡图}\\ 0 & \text{当}G\text{为平凡图}\end{cases}$$

= 使G变成不连通或平凡图所需去掉的最少边数。

(易见，当G为非平凡连通图时， $\kappa'$ = G的最小键的边数。)



κ=κ′=2　κ=1,κ′=2　κ=1,κ′=2　κ=κ′=0　κ=κ′=0



κ=2,κ′=3

例: $\kappa' = 0$ ⇔ G平凡或不连通。
$\kappa' = 1$ ⇔ G连通且含割边。
$\kappa'(K_n)= n-1$　( $n > 0$ )。
当G为简单图时，
$\kappa' = \nu -1$ ⇔ $G \cong K_\nu$ 。

- 称 图G为 ***k-边连通的***（k-edge connected）
  ⇔ $\kappa'(G) \geq k$
  ⇔ 至少去掉k条边才能使G变成不连通或平凡图。
- 例如，所有非平凡连通图都是 1-边连通的。

- 称 顶点子集V’为G的***顶点割*** (vertex cut)
  $\Leftrightarrow$ G - V’ 不连通。
- 称 顶点子集V’为G的***k-(顶)点割***(vertex cut)
  $\Leftrightarrow$ V’为G的顶点割，且 | V’ | = k 。

显然，当G为无环连通图时，
v 为G的***1-点割*** $\Leftrightarrow$ v为G的 ***割点***。
完全图无点割。

目录 上一页 下一页

- 图G的***连通度***(connectivity)

$$\kappa(G)=\begin{cases}\min\{k \mid G\text{有}k\text{-点割}\} & \text{当G有二不相邻接顶点时} \\ \nu-1 & \text{其它}\end{cases}$$

（ = 使G变成不连通或平凡图所需去掉的最少的顶点数。）

- 例:当 $\nu \geq 3$时，$\kappa = 1 \Leftrightarrow$G连通且有1-点割。
  $\kappa(K_\nu) = \nu-1$ 。
  $\kappa(G)=\nu-1 \Leftrightarrow$ G的基础简单图为完全图。

目录 上一页 下一页

- 称 图G为***k-连通的***（k-connected）
  $\Leftrightarrow$ $\kappa(G) \geq k$
  $\Leftrightarrow$ 至少去掉k个顶点才能使G变成不连通或平凡图。
- 例如，所有非平凡连通图都是 1-连通的。

目录 上一页 下一页

**定理3.1** $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$ 。

证明：先证$\kappa' \leq \delta$：当G为平凡图时，$\kappa' = 0 \leq \delta$，结论成立；当G为非平凡图时，选取v使$d(v) = \delta$，则 $E' = [\{v\}, \overline{\{v\}}]$是G的一个边割，因此

$$\kappa' \leq |E'| \leq \delta$$

结论成立。 再来证 $\kappa \leq \kappa'$：

不妨设G为简单、连通、非完全图，于是 $\kappa' \leq \nu-2$ 。 任取一 $\kappa'$-边割B，及B中任一边 $e = xy$ 。 今，在B-e 的每边上各取一个端点使之不等于x及y 。令这些端点的集合为S。易见，

$$|S| \leq \kappa'-1 \text{ 。}$$

记 $H = G-S$ 。

(i) 若H 不连通，则 S为G的点割，从而 $\kappa \leq |S| \leq \kappa'-1$ 。

(ii) 若H 连通，则$e = xy$ 为H的割边。但，

$$\nu(H) = \nu(G)-|S| \geq \nu-(\kappa'-1) \geq 3 \text{，}$$

因此，x与y中至少有一个为H的割点，设为 x 。于是

$$S \cup \{x\}$$

为G的点割，故 $\kappa \leq |S|+1 \leq \kappa'$ 。

目录 上一页 下一页

习题

- **3.1.1** (a) 证明：若G是k-边连通的，且k > 0 ，又E’为G的任k条边的集合，则 ω（G-E’) ≤ 2。
  (b) 对 k >0，找出一个k-连通图G以及G的k个顶点的集合S，使ω(G-S)> 2 。
- **3.1.2** 证明：若G是k-边连通的，则 $\varepsilon \geq k\nu/2$ 。
- **3.1.3** (a) 证明：若G是简单图且 $\delta \geq \nu-2$，则 $\kappa = \delta$ 。
  (b) 找出一个简单图G，使得$\delta = \nu-3$且 $\kappa < \delta$ 。

目录 上一页 下一页

- **3.1.4** (a) 证明：若G是简单图且 $\delta \geq \nu/2$，则$\kappa' = \delta$ 。
  (b) 找出一个简单图G，使得 $\delta = [(\nu/2)-1]$ 且 $\kappa' < \delta$ 。
- **3.1.5** 证明：若G是简单图且$\delta \geq (\nu+k-2)/2$ ($k < \nu$)，则G是k连通的 。
- **3.1.6** 证明：若G是3-正则简单图，则 $\kappa = \kappa'$ 。
- **3.1.7** 证明：若l，m和n是适合$0 < l \leq m \leq n$的整数，则存在一个简单图G，使得
  $\kappa = l$，$\kappa' = m$和 $\delta = n$。

目录 上一页 下一页

# 3.2 块

❖ *块（block）* ⇔ 无割点连通图。

显然，当 $v \ge 3$时，

G为块 ⇔ G为无环、2-连通图。

❖ 例。 $v \ge 3$的块中无割边。

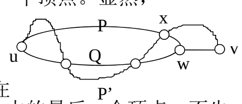
**定理3.2 (Whiteney,1932)** 当 $v \ge 3$时，G为2-连通图 ⇔ G中任二顶点间则至少被两条内部不相交（**internally disjoint**）的路所连接。
（称两条路P与Q内部不相交 ⇔ P与Q无公共内部顶点）

证明：⇐：显然，G连通，且无1-点割，因此G为2-连通。

⇒：对G中二顶点间的距离$d(\cdot,\cdot)$进行归纳。当$d(u,v) = 1$时（即uv为G的边），因G为2-连通，边uv是G的非割边（$\because \kappa' \ge \kappa \ge 2$)。因此，由定理2.3，边uv在G的某一 圈内，成立。

假设定理对 $d(\cdot,\cdot)<k$的任二顶点成立，而 $d(u,v)= k$ （$\ge 2$）。令w为长为k的一(u,v)-路中v的前一个顶点。显然，

$d(u,w)= k-1$ 。




因此，由归纳假设，存在二内部不相交的（u,w）-路P及Q。

又因G为2-连通，G-w 中一定存在一 (u,v)-路P' 。令x为P'在 $P \cup Q$ 中的最后一个顶点。不失一般性。不妨设x在P上。这时G中有二内部不相交的(u,v)-路：

( P的(u,x)-节)( P'的(x,v)-节)

及 Qwv。

**推论3.2.1** 当$v \ge 3$时，图G为2-连通的⇔G的任二顶点共圈。

❖ 证明：由定理3.2，显然。

❖ 称边e被*剖分* ⇔ 用连接e的两端点的长2为的新路去替换e。

容易验证，当$v \ge 3$时，块的一些边被剖分后仍然保持是块。

**推论3.2.2　设$\nu \geq 3$，则G为块 $\Leftrightarrow$ G连通且其任二边共圈。**

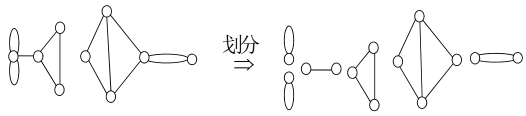
证明：$\Rightarrow$：当$\nu \leq 2$时，显然成立。当$\nu \geq 3$时，将G的任二边$e_1$和$e_2$分别用新顶点$v_1$和$v_2$加以剖分，得新图G'。它仍是块，因此为2-连通的。由推论3.2.1知，$v_1$与$v_2$共圈。从而$e_1$与$e_2$共圈。

$\Leftarrow$：由条件，易见G无环、连通。只要再证G也不会有割点即可：假设G中有割点u。由割点定义知，存在E(G)的一个2-划分（$E_1$,$E_2$）使边导出子图$G[E_1]$与$G[E_2]$恰只有一公共顶点u。由边导出子图定义知，$E_1$和$E_2$中一定各存在一边$e_1$=ux和$e_2$=uy，它们都以u为其端点。但G-u中无(x,y)路，从而，易见，$e_1$和$e_2$不能共圈，矛盾。

目录　上一页　下一页

- 称G中极大不含割点的连通子图为***G的块***。

  当一个图G有割点时，我们可沿G的割点将G逐步划分为一些***G的块***。因此一个图是它的块的边不重并。例如




图G　　　　G的块

目录　上一页　下一页

性质

- (1) G的两个块之间至多有一公共顶点，它一定是G的割点。
- (2) G的任一割点至少是G的两个块的公共顶点。
- (3) 含割点的连通图G中，至少有两个G的块每个恰含G的一个割点，称之为endblock。
- (4) G是它的块的边不重并。
- (5)* 任一图G中，易证，边之间的共圈关系是边集合上的一个等价关系。它将E(G)划分为一些等价类($E_1$,$E_2$,...,$E_q$)，而每个$G[E_i]$都是G的块（其中q为G的块数）。

目录　上一页　下一页

附录

- **Menger 定理**　若$\nu \geq k+1$，则

  G为k-连通的 $\Leftrightarrow$ G中任二不同顶点至少被k-条内部不相交的路所连接。

  G为k-边连通的 $\Leftrightarrow$ G 中任二不同顶点至少被k-条边不重的路所连接。

目录　上一页　下一页

习题

- **3.2.1**　证明：一图是2-边连通的当且仅当任二顶点至少被两条边不重的路所连接。
- **3.2.2**　举例说明：若P为2-连通图G中一给定的(u,v)-路，则G不一定有一条与P内部不相交的（u,v)-路。
- **3.2.3**　证明：若G没有偶圈及孤立点，则G的每个块为K2 或奇圈。
- **3.2.4**　证明：不是块的连通图G中，至少有两个G的块每个恰含G的一个割点。

目录　上一页　下一页

- **3.2.5**　证明：**G的块**的数目= $\varpi + \sum_{v \in V}(b(v)-1)$，其中b(v)是G中含顶点v的块的个数。
- **3.2.6**　设G为2-连通图，而X和Y 是V的不相交子集，它们各至少包含二顶点。证明：G包含二**不相交**的路P和Q使得
  - (i) P和Q的起点在X中；
  - (ii) P和Q的终点在Y中；
  - (iii) P和Q的内部顶点都不在X $\cup$ Y中。
- **3.2.7**　叙述求**图的块**的好算法。

目录　上一页　下一页

- **3.2.8** 设边a与边b共圈，边b与边c共圈，则边a与边c共圈。
- **3.2.9** 连通图G中，若顶点u不在任一奇圈上，而C为G的一奇圈，则u与C一定不在G的同一块在中。
- **3.2.10** 设G 为$\nu \geq 3$ 的块，则对G中任二顶点u与v，及任一边e，G中必有一(u,v)-路包含e。（提示：连u与v 。）
- **3.2.11** 设G为 $\nu \geq 3$ 的块，x,y,z为其任三顶点，则G中必有一(x,y)-路通过z。

目录 上一页 下一页

## 3.3 可靠通信网的建设

目录 上一页 下一页

- 一个通信网中，$\kappa$ 及$\kappa'$越大越可靠，但造价越贵（$\delta \geq \kappa' \geq \kappa$）
- **问题** 已给赋权图G及正整数k，求G的最小权k-连通（k-边连通）生成子图。
- **解** 当k = 1：optimal tree (connector prob.)，有好算法。

  当 k ＞1 ： NP-hard prob. 。

  当每边权≡ 1且G为任意图时：问题变成求边数最少的k-连通生成子图。( 仍然是NP-hard prob.)

  当每边权≡ 1 且G ≅ $K_\nu$时：Harary (1962)作出边数最少的G的k-连通（∴k-边连通）生成子图$H_{k,\nu}$（边数={kν/2})　（∴有好算法。）

目录 上一页 下一页