第五章 匹配

5.1 匹配

- *匹配*（matching） $M \subseteq E$
  $\Leftrightarrow$ M中的边都是link，且互不相邻接。
- 当边$uv \in M$时，称u与v在**M**下*相匹配*；称M*饱和*（saturated） u与v。也称u与v为***M-饱和的***。
- 类似地，可给出一顶点x为***M-不饱和***的定义。
- M为图G的*完美匹配* $\Leftrightarrow$ G中每个顶点都是M-饱和的。
- M为图G的*最大匹配*（maximum matching ）⇔ …
- P为G中的***M-交错路***(M-alternating path) $\Leftrightarrow$ P的边交替地属于M及E\M。
- P为G中的***M-可扩路***（M-augmenting path ） $\Leftrightarrow$ P为M-交错路，且起点与终点都是M-不饱和的。

定理**5.1 (Berge,1957) M为G中的最大匹配 ⇔G中不存在M-可扩路。**

证明： $\Rightarrow$：假设G中有M-可扩路P，则 $M' = M\Delta E(P)$ 也是G的匹配，且 $|M'| = |M| +1$，这与M 为最大匹配相矛盾。

$\Leftarrow$：反证，假设M不是最大匹配，取G中任一最大匹配M*。令 $H = G[M\Delta M^*]$。

显然， $d_H(v) = 1$ or 2 $\forall v \in V(H)$。

因此，H的每个分支都是一圈或路，由M及M*的边交错组成。但$|M^*| > |M|$，H中一定有一分支是一条路P，且其起点与终点都是M*饱和的。从而P是G中的M-可扩路，矛盾。

习题

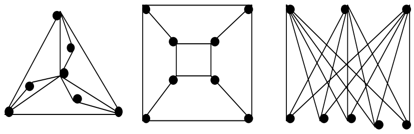
- **5.1.1** (a) 证明：每个k-方体都有完美匹配($k \geq 3$)。
  (b) 求K_{2n}与$K_{n,n}$中不同的完美匹配的个数。
- **5.1.2** 证明：一树中最多只有一个完美匹配。
- **5.1.3** 对每个k>1，找出一个无完美匹配的k-正则简单图的例子。
- **5.1.4** 两人在图G上做游戏，交替地选取不同的顶点 $v_0, v_1, v_2, \ldots\ldots$，使对每个$i > 0$，都有$v_i$ 与 v_{i-1}相邻。最后一个顶点的选择者胜。
  证明：第一个选点人有一得胜策略当且仅当G没有完美匹配。

- **5.1.5** G的k-正则生成子图称为G的**k-**因子。若G存在边不重的k-因子H_1，H_2，……，H_n，使得 $G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots\ldots \cup H_n$，则称G为**k-可因子分解的**。

  (a) 证明：① $K_{n,n}$与 K_{2n}是1-可因子分解的；
  ② Peterson图不是1-可因子分解的。

  (b) 下面的图中哪些有2-因子：

  (c) 用Dirac定理若G是简单图，ν（≥4）是偶数，且$\delta \geq 1+\nu/2$，则G有3-因子。



- **5.1.6***证明：K2n+1可表为n个连通的2-因子的并。

目录 上一页 下一页

5.2 偶图的匹配和覆盖

目录 上一页 下一页

- *邻集*（neighbour set） N(S)（S ⊆ V）： G中所有与S中顶点相邻接的顶点集合。

- 定理5.2 **（Hall's theorem,1935) 在偶图G=(X,Y,E) 中G包含使X中每个顶点都饱和的匹配**
  ⇔ | N（S）| ≥ | S | ∀ S ⊆ X

目录 上一页 下一页

定理5.2 （Hall's theorem,1935) 在偶图G=(X,Y,E) 中G包含使X中每个顶点都饱和的匹配 ⇔ | N（S）| ≥ | S | ∀ S ⊆ X

证明：⇒：显然。

⇐：反证，假设存在偶图G，它满足条件（*）但不包含使X中每个顶点都饱和的匹配。令M* 为G的最大匹配，u为X中M* 不饱和的顶点。记

$$Z = \{ v \mid \exists\, M^*\text{-交错（u，v）-路} \}$$

由于M* 为最大匹配，由定理5.1，u为Z中唯一M*-不饱和顶点。令

$$S = Z \cap X, \quad T = Z \cap Y。$$

显然，S\U 与T 的顶点在M* 下相匹配（注意到：任一M*-边若有一端点在Z中，则其另一端一定也在Z中）。因此，

$$|T| = |S| - 1 \;；\; N(S) \supseteq T。$$

但N(S)中每个顶点都有M*-交错路连到u，因此 N(S)⊆ T，故N(S) = T，从而

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|。$$ 矛盾。

目录 上一页 下一页

推论 5.2 (marriage theorem) 若G 为 k-正则偶图（k>0），则G有完美匹配。

证明：设G的2-划分为(X, Y)，则

$$k|X| = |E| = k|Y|，$$

$$\therefore \quad |X| = |Y|。$$

又，对任S ⊆ X，令E_1和E_2分别为与S和N(S)相关联的边集。易见，

$$E_1 \subseteq E_2。$$

$$\therefore \quad k|S| = |E_1| \leq |E_2| = k|N(S)|$$

$$\therefore \quad |S| \leq |N(S)| \qquad \forall\, S \subseteq X。$$

故G中有使X中每个顶点都饱和的匹配M，它也是完美匹配。

目录 上一页 下一页

- 称 K（⊆ V）为G的一个*覆盖*（covering）
  ⇔ G中每边至少有一端在K中。

- *最小覆盖*（minimum covering）$\tilde{K}$ 。

  对G中任一覆盖K及任一匹配M，显然，恒有

  $$|M| \leq |K|。$$

  特别地，有

  $$|M^*| \leq |\tilde{K}|。$$

目录 上一页 下一页

- **引理5.3** 设M与K分别为G中的匹配与覆盖，如果 $|M| = |K|$
  则M为最大匹配，K为最小覆盖。
- **定理5.3** (Konig's theorem,1931) 设 M*，$\tilde{K}$分别为偶图G的最大匹配和最小覆盖，则
  $|M^*|=|\tilde{K}|$。

目录 上一页 下一页

定理5.3 (Konig's theorem,1931) 设 M*，$\tilde{K}$分别为偶图G的最大匹配和最小覆盖，则 $|M^*|=|\tilde{K}|$。

证明：设G的2-划分为（X，Y）。记

$$U = \{ u \in X \mid u为M^*\text{-}不饱和的 \}$$

$$Z = \{ v \in V \mid \exists\, M^*\text{-}交错（u，v）\text{-}路，u \in U \}$$

$$S = Z \cap X, \quad T = Z \cap Y。$$

与定理5.2之证明类似，我们有： T中每顶点都是M*-饱和的；T与S\U中顶点在M*下相匹配；N(S) = T。 记

$$\tilde{K} = (X\backslash S) \cup T。$$

易见，G中每边至少有一端在$\tilde{K}$中，即 为G 的覆盖（不然，G中就有一边其两端分别在S与Y\T中，这与N(S) = T相矛盾）。又，显然，

$$|\tilde{K}| = |X\backslash S| + |T| = |X\backslash S| + |S\backslash U| = |X| - |U| = |M^*|。$$

再由引理5.3知为最小覆盖。

目录 上一页 下一页

习题

- **5.2.1** 证明：一个5×5方格棋盘去掉其对角上的两个1×1方格之后，不可能用1×2长方格恰好添满。
- **5.2.2** (a) 证明：偶图G有完美匹配当且仅当对 所有 $S \subseteq V$ 都有 $|N(S)| \ge |S|$。
  (b) 举例说明：去掉偶图这个条件之后，上述不成立。
- **5.2.3** 对于k > 0，证明：
  (a) 每个k-正则偶图都是1-可因子分解的；
  (b)* 每个2k-正则图都是2-可因子分解的 。

目录 上一页 下一页

- **5.2.4** 设A_1，A_2，……，A_n 是某集S的子集。 族（A_1，A_2，……，A_n）的一个**相异代表系**是指S的一个子集{ a_1，a_2，……，a_n }使 $a_i \in A_i$（$1 \le i \le n$），且$a_i \ne a_j$（当i≠j）。

证明：（A_1，A_2，……，A_n）有一个相异代表系 当且仅当

$$\left|\bigcup_{i \in J} A_i\right| \ge |J| \qquad \forall\, J \subseteq \{1,2,...,n\}。$$

- **5.2.5** 矩阵的一行或一列统称一条**线**。证明：一（0,1）-矩阵中，含所有1元素的线的最小条数 = 两两都不在相同线上的1元素的最大个数。
- **5.2.6** (a) 证明Hall定理的一个推广：偶图G =（X,Y; E) 的最大匹配的边数是

$$|X| - \max_{S \subseteq X}\{ |S| - |N(S)| \}。$$

  (b) 试证：若G 为简单偶图，且$|X|=|Y|=n$ 及 $\varepsilon > (k-1)n$，则G有边数为k的匹配。

目录 上一页 下一页

- **5.2.7** 由Konig 定理推导Hall定理。
- **5.2.8*** 若非负实数矩阵Q 的每行元素之和均为1，每列元素之和也均为1，则称Q为**双随机矩阵**。称一矩阵为**置换矩阵**如果它是每行和每列均恰只有一个1元素的（0，1）-矩阵（∴是双随机的）。证明：
  (a) 每个双随机矩阵一定是个方阵；（注：(a)与(b)无直接联系。）
  (b) 每个双随机矩阵Q都可表为置换矩阵的凸线性组合，即

$$Q = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots\ldots + c_k P_k。$$

  其中每个Pi都是置换矩阵，每个ci都是非负实数，且 $\sum c_i = 1$ 。
- **5.2.9** 若偶图 G=(X,Y,E)中，X中每个顶点的度 ≥ Y中每个顶点的度，则G有使X每顶点

目录 上一页 下一页

- **5.2.10*** 设偶图G=(X,Y,E)中，Y'为匹配M在Y中的端点集，则存在G的最大匹配M*，其端点集包含Y'。
- **5.2.11** 简单偶图G=(X,Y;E)中，若对任二顶点 x∈X, y∈Y，都有

$$d(x) \ge d(y),$$

  则G中有一匹配饱和X中每一顶点。
- **5.2.12** 设简单偶图G=(X,Y;E)中，X'为X中所有度为Δ的顶点子集，则G中存在饱和X'中每个顶点的匹配
- **5.2.13** 有m对夫妻，今将男女各随意分成r组（r≤m）。今欲从每组选一代表，问该2r个代表恰为r 对夫妻的充要条件是什么？

目录 上一页 下一页

- **5.2.14** 设A 为m×n(0,1)-矩阵，m≤n 。如果A的每行恰有k(≤m)个1，每列有≤k个1，证明：

  $A=P_1+P_2+\cdots+P_k$，

  其中每个P_i为m×n(0,1)-矩阵，每行恰有一个1，每列至多有一个1。
- **5.2.15** 一r×n矩阵$A=[a_{ij}]$，r<n ，称为**拉定矩形**，如果每个元素$a_{ij}\in N=\{1,2,\cdots,n\}$，且在每行每列中，每个整数k∈N至多出现一次。试证：A恒可延伸为一n×n拉定方。

  （提示：先证明A可延伸为(r+1)×n拉定矩阵。）
- **5.2.16** 用Menger定理证明Hall定理。

5.4 完美匹配

- 称H为G的***奇分支***（odd component） ⇔ H为G的分支，且其顶点数为奇数。
- 称H为G的***偶分支***（even component） ⇔ ……。
- 记 **o(G)** = G中奇分支数。

定理5.4 (Tutte,1947) G有完美匹配

$$\Leftrightarrow\ \mathbf{o(G-S)\le |S|}\quad \forall\, \mathbf{S\subset V}$$

证明：（Lavasz证法）只要对简单图情形加以证明即可。

⇒： 设G有完美匹配M。对任S ⊂ V，令

$$G_1，……，G_n$$

为G-S中的奇分支。因每个G_i的顶点数都是奇数，每个G_i中至少 有一顶点u_i 与S中一顶点v_i 在M 下相匹配。从而

$$o(G-S) = n = |\{v_1，……，v_n\}| \le |S|。$$

⇐： 反证。假设存在图G 满足条件（*），但不含完美匹配。令G* 为G的不含完美匹配的极大生成母图。由于G-S是G*-S的生成子图，

$$o(G^*-S)\le o(G-S)\le |S| \qquad \forall\, S\subset V。$$

即G*满足条件（*），又，上式中令S=∅得o(G*)=0，因此ν(G*)=偶数。 令

$$U=\{v\in V(G^*) \mid d_{G^*}(v)=\nu-1\}。$$

因G不含完美匹配，U ≠ V。

断言 G*-S是一些完全图的不相交并。

于是，由于 o(G*-U) ≤ |U| ， G*-U中至多有|U|个奇分支。从而，由断言易见，

G* 中有完美匹配，这与G* 之假设矛盾。

来证断言 反证。假设G*-U有一分支不是完全图，则其中一定存在3个顶点x，y，z使 xy, yz ∈ E(G*) ， 而 xz∉E(G*) （习题1.6.9）。

又，因 y ∉ U，一定存在 w ∈ V(G*-U) 使 yw ∉ E(G*)。 令

M_1 与 M_2 分别为 G*+xz 与 G*+yw中的完美匹配。

考虑 G*+{xz，yw} 中 $M_1\Delta M_2$ 的边导出子图 H 。显然，H中顶点的度都是2，因而H是一些圈的不相交并。且每圈都是偶圈，由M_1 与M_2 的边交错组成。

情况1 xz与yw不在H的同一圈中：

设yw在圈C上，则C中所有M_1 边及C外所有M_2 边一起构成G* 的一个完美匹配，矛盾。

情况2 xz与yw同在H的某一圈C上：

不妨设x，y，w，z以这顺序出现于C上。这时，C的yw……z节中的所有M_1 边，及不在该节中的所有M_2 边，以及边yz ，一起构成G* 的一个完美匹配，矛盾。

推论5.4 (Peterson,1891)

每一不含割边的**3-**正则图都有一完美匹配。

证明：对任S ⊂ V，令 G_1，……，G_n 为G-S中的所有奇分支。记m_i 为一端在G_i中而另一端在S中的边数。则

$$m_i=\sum_{v\in V(G_i)} d(v)-2\varepsilon(G_i)=3\nu(G_i)-2\varepsilon(G_i)=\text{奇数}。$$

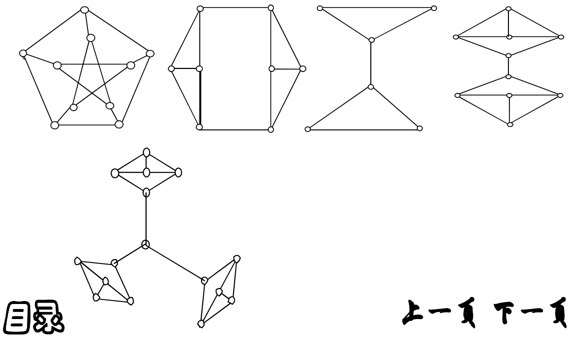
但G中无割边，因此$m_i\ge 3$。从而

$$3|S|=\sum_{v\in S} d(v)\ge \sum_{i=1}^{n} m_i \ge 3n。$$

∴ $|S| \ge n = o(G-S) \quad \forall\, S\subset V$。

故由定理5.4，G有完美匹配。

❖ 例。以下前4图满足定理5.4条件；而最后一图不满足定理5.4条件：



习题

❖ **5.3.1*** 用Tutte定理推导Hall定理。

❖ **5.3.2** 推广推论5.4：若G是（k-1）边连通的k-正则图，且ν 是偶数，则G有完美匹配。

❖ **5.3.3** 设G为一树，证明： G有完美匹配 ⇔ o(G-v) = 1 　∀ v∈ V 。

❖ **5.3.4*** 证明Tutte定理的推广： G的最大匹配的边数 = (ν -d)/2 ，其中

$$d = \max_{S \subset V}\{o(G-S) - |S|\}$$

5.4 人员分派问题（ （the personnel） assignment prob.）

❖ 问题 n个工人x_1，……，x_n 及n个工作y_1，……，y_n，已知每个工人各胜任一些工作。能否使每个工人都分派到一件他胜任的工作？

❖ 解： 在偶图G=(X,Y,E),|X|=|Y|, 中求出其完美匹配（若存在的话）。以下是其算法：

Hungarian method (Edmonds,1965)

以任一匹配M作为开始。（可取M=∅）

① 若M饱和X的每个顶点，停止（M为完美匹配）。否则，取X中M-不饱和顶点u，S←{u}，T←∅ 。

② 若N(S)⊃T,转到③；否则，N(S)=T,停止（无完美匹配）。

③ 取 y∈ N(S)\T 。若y为M-饱和的，设 yz∈ M ，则

S←S∪{z}， T←T∪{y}，

回到②；否则，存在M-可扩路P，令

M←MΔE(P) ，并回到① 。

❖ **注1** 算法用生长“以u为根的M-交错树”的方法， 来**系统搜索**M-可扩路。树中除u外都是M-饱和的，直到碰到第一个 M-不饱和的顶点时，即得一M-可扩路。当树不能再生长下去时，即为N(S)=T之时。

❖ **注2** 本算法是个‘好’算法：从一个M到下一个，至多进行|X|次搜索运算；M至多扩大|X|次 。

习题

- 5.4.1 试述如何利用Hungarian算法求偶图的最大匹配。

目录 上一页 下一页

5.5 Optimal assignment problem

目录 上一页 下一页

问题 求赋权图G = $K_{n,n}$ 的最大权匹配。

称 l 为（feasible vertex labelling)（f.v.l.)

$\Leftrightarrow$ l 为V上的实函数，且满足：

$l(x)+l(y) \geq w(xy)$ $\forall$ x $\in$ X， y $\in$ Y 。

例。 下面是一可行顶点标号：

$$\begin{cases} l(x)=\max_{y\in Y}\{w(xy)\} & x\in X \\ l(y)=0 & y\in Y \end{cases}$$

记 $E_l=\{xy\in E \mid l(x)+l(y)=w(xy)\}$

G_l (*相等子图*，equality subgraph）

$\Leftrightarrow$ 以E_l为边集的G的*生成子图*。

目录 上一页 下一页

定理5.5 设偶图G的可行顶点标号 l **使**G_l**包含一完美匹配** M^***，则** M^***是G的最优匹配。**

证明：显然，M^*也是G的完美匹配，且

$$w(M^*)=\sum_{e\in M^*}w(e)=\sum_{v\in V}l(v)$$ 。

但对G的任一完美匹配M有

$$w(M)=\sum_{e\in M}w(e)\leq\sum_{v\in V}l(v)$$ 。

因此w(M)≤ w(M^*)，即 M^*是G的最优匹配。

目录 上一页 下一页

- 下面是求最优匹配算法的*基本思想*： 任取一f.v.l. l 作为开始。定G_l，并在 G_l 上任取一匹配M作为开始的匹配。用Hungarian算法在 G_l 上找完美匹配。若找到，它就是G的最优匹配；否则Hungarian算法停止于某匹配M'（不是完美匹配）及一M'交错树H，它不能再“生长”l。将 适当修改成新的$\tilde{l}$ f.v.l. $G_{\tilde{l}}$ 使仍包含M'及H，且H在$G_{\tilde{l}}$ 中又可继续“生长”。重复上述过程。

目录 上一页 下一页

Kuhn-Munker algorithm （1955，1957；Edmonds改写（1967））

以任f.v.l. l 作为开始。定G_l，并在G_l上任取一匹配M作为开始的匹配。

① 若M饱和X的每个顶点，则M为最优匹配，停止；否则，任取一M-不饱和顶点u， S←{u}， T←∅ 。

② 若 $N_{G_l}(S)\supset$ T，转到③；否则，$N_{G_l}(S)$ =T。计算

$$\alpha_l=\min_{\substack{x\in S\\ y\notin T}}\{l(x)+l(y)-w(xy)\}$$

及f.v.l. $\tilde{l}$ ：

$$\tilde{l}(v)=\begin{cases} l(v)-\alpha_l & v\in S \\ l(v)+\alpha_l & v\in T \\ l(v) & 其它 \end{cases}$$

$l\leftarrow\tilde{l}$，$G_l\leftarrow G_{\tilde{l}}$。

③ 选取 y∈ $N_{G_l}(S)$\T，若y为M-饱和的，则存在 yx∈M ， 作

S ←S∪{x}， T←T∪{y},

并转到② ；否则，令P为中的M-可扩-(u,y)路，

M←MΔE(P) ，并转到① 。

目录 上一页 下一页

- **注1** 算法中每计算一次新的G_l的计算量为O(v²)；在找到M-可扩路之前，至多进行|X|次 搜索（每次可能作一次新的 G_l的计算）；而初始匹配M至多扩大|X|次。因此是个‘好’算法（计算复杂性为O(v⁴)）

- **注2** 本算法也可用于解人员分派问题。

目录 上一页 下一页

习题

- **5.5.1** 所谓n×n矩阵的一条**对角线**是指它的任n个两两不同行、不同列元素的集合。对角线的**权**是指它的n个元素的和。试找出下列矩阵的最小权对角线：

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

（答：权=30）

目录 上一页 下一页