第四章　遍历问题

目录　上一页 下一页

- 4.1 Euler 环游　链接
- 4.2 中国邮递员问题 链接
- 4.3 Hamilton 圈 链接
- 4.4 旅行售货员问题(travelling salesman prob.)　链接

目录　上一页 下一页

4.1　Euler 环游

目录　上一页 下一页

- ***环游（tour）*** ⇔ 通过图中每边至少一次的闭途径。
- ***Euler环游*** ⇔ 通过图中每边恰一次的闭途径。
- ***Euler迹*** ⇔ 通过图中每边的迹 。
  ⇔ 通过图中每边恰一次的途径。（可“一笔画成”。）
- ***Euler图*** ⇔ 包含Euler环游的图
  ⇔ 包含Euler闭迹的图。
  ⇔ 本身为闭迹的图。

目录　上一页 下一页

定理4.1　设G为非空连通图，则G为 Euler图 ⇔　G中无度为奇数的顶点。

证明：⇒：令$C = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \ldots e_\varepsilon u_\varepsilon$ ($u_\varepsilon = u_0$)为G的一Euler环游，起点为u_0 。则对任一顶点$v \neq u_0$ ，当v每次作为内部顶点出现于C时，C上有二边与v相关联。由于C上包含了G的所有边且不重复，因此d(v)=偶数。类似地，$d(u_0)$=偶数。

⇐：反证，假设存在非空连通图，它的每个顶点的度都是偶数，但却不是Euler图 。在这种图中选取G使其**边数最少**。由于 $\delta(G) \geq 2$，G包含圈。令C为G中的最长闭迹。由假设，C不会是 Euler环游。因此G - E(C)中一定有一分支G' 使$\varepsilon(G')>0$。由于C本身为 Euler图，（由定理的必要条件知）C中每个顶点的度都是偶数，因此G'中无度为奇数的顶点。但$\varepsilon(G') < \varepsilon(G)$由G的选择知，G'中含一 Euler环游 C'。 又，由于G连通，C与C'至少有一公共顶点，设为v，不妨设它同时为它们的起点。于是，CC'是G的一闭迹，其长大于C的长，矛盾。

目录　上一页 下一页

附

- 定理4.1⇐ :之新证法（J.G.T.Fall 1986):对ε 进行归纳。当ν =2时，显然成立。只要再考虑ν ≥ 3情形。 假设对 ε < q成立，而ε(G)=q 。 选取顶点v ，使v有二不同顶点u及w与它相邻 。考虑图

$$H = (G - \{uv,vw\})+uw$$

（uw 为一新加边——不管G中是否有以u，w为两端点的边）

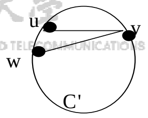
目录　上一页 下一页

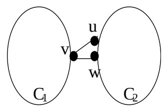
显然，

$\omega(H) \le 2$,

$\varepsilon(H) = q-1$,

$d_H(x)$ =偶数 $\forall x \in V$ 。





(i) 当$\omega(H)=1$时，由归纳假设，H中有Euler环游 C'。把C'中一边uw代之以路uvw,即得G的Euler环游 。

(ii) 当$\omega(H)=2$时，由归纳假设，H的二分支各有其Euler环游 C1及C2 。不妨设uw在C2 中。将C2中的边uw代之以迹 uvC1vw，即得G的Euler环游 。

推论4.1 若G连通，则G有一Euler迹⇔G中至多有二度为奇数顶点。

证明：⇒：类似定理4.1中⇒：的证明。

⇐：若G中无度为奇数顶点，则由定理4.1 ，G中有Euler迹。否则，G中恰有二度为奇数顶点，设为u，v 。考虑图

$G + e$,

其中e为连接u与v的新边。显然，G+e中 无度为奇数顶点，从而包含一Euler环游

$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_{\varepsilon+1} v_{\varepsilon+1}$,

其中，$v_{\varepsilon+1} = v_0 = u$ ，$v_1 = v$ 。易见

$v_1 e_2 v_2 \ldots e_{\varepsilon+1} v_{\varepsilon+1}$

就是G的Euler迹。

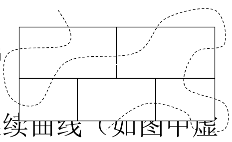
习题

- **4.1.1** 若可能，画出一个ν 为偶数，而ε 为奇数的Euler图。否则说明理由。
- **4.1.2** 证明：若G无奇点，则G的每个块也是Euler图 。
- **4.1.3** 若G无奇点，则存在边不重的圈$C_1, C_2, \ldots, C_m$使得

  $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \ldots \cup E(C_m)$。
- **4.1.4** 若连通图G有2k >0 个奇点，则G中存在k条边不重的迹 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ 使得

  $E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \ldots \cup E(Q_k)$

- **4.1.5** 设G为非平凡Euler图，且$v \in V$。证明：G中任一条 以v为起点的迹 都能延伸成一Euler环游 当且仅当 G-v为林。 （O.Ore）
- **4.1.6** 若连通图G的任一边割边数都是偶数，则G是一Euler图。
- **4.1.7** 左图中能否引一连续曲线（如图中虚线所示），穿过每一线段恰好一次？若能，画出之；不然，证明之。



4.2 中国邮递员问题

- 问题 在一赋权图G中，求一最小权环游（即**最优环游**）。

  当G 为Euler图时，其任一Euler环游都是最优环游，此时有求最优环游的好算法如：

- ***Fleury算法*** （“过河拆桥，尽量不走独木桥”）

1.任取一顶点v_0 ，令$W_0 = v_0$ 。

2.若迹$W_i=v_0e_1v_1\ldots e_iv_i$已取定，选$e_{i+1} \in E \backslash \{e_1, \ldots, e_i\}$使

(i) e_{i+1} 与 v_i相关联；

(ii) 除非无奈，选e_{i+1} 使它不是

$G_i = G-\{e_1, \ldots, e_i\}$

的割边。

3. 若2.不能再进行下去，停止。

定理4.7 若G为Euler图，则由Fleury算法求得的G中的迹，是G的一Euler环游。

证明：令 $W_n = v_0 e_1 v_1 \ldots e_n v_n$ Fleury算法求得的G中的迹，显然

$d_{G_n}(v_n) = 0$，

$\therefore\ v_n = v_0$。

假设W_n 不是Euler环游，令

$S = \{ v \mid d_{G_n}(v) > 0 \}$，

$\bar{S} = V \setminus S$。

易见，$S \neq \varnothing$；$v_n \in \bar{S}$。

令 v_m 为W_n 在S中的最后一个顶点，则，显然，

$$[S,\bar{S}]_{G_m} = \{e_{m+1}\}，$$

即 e_{m+1} 是 G_m的割边。又，

$d_{G_n}(v)$ = 偶数，$\forall\ v \in V$。

因此G_n 中无割边，特别地，G_n中与相关联的任一边e是G_n中的非割边，因而也是G_m中的非割边（？）。但 $e_{m+1} \neq e$（$\because e_{m+1} \notin G_n$），于是在 G_m中，割边 e_{m+1}与非割边e都和 v_m相关联，而迹W_n却取的是割边 e_{m+1}，这与算法之 2.(ii) 相矛盾。

- 定理之另证：其实只要再证以下断言即可：
- 断言 在算法进行过程中，**每个G_i** 都是G的生成子图，**其中只有一个分支是非空的**（即其余分支每个都是孤立顶点），且v_i与v_0 同在该非空分支中。

- 证明：对i进行归纳。当i=1时，$G_1 = G - e_1$，由于G中无割边，G_1连通，从而结论成立。假设当i≤n-1时都成立，来证当i = n （<ε=时也成立：由归纳假设，$G_{n-1} = G - \{e_1, \ldots\ldots, e_{n-1}\}$中，$v_{n-1}$ 和v_0 在其唯一的非空分支中。于是，算法2.(i) 所选 vn-1的关联边e_n 必在该分支中。当e_n不是G_{n-1}的割边时，（对Gn ）结论成立。当e_n是G_{n-1}的割边时，由算法知，G_{n-1}中与v_{n-1}相关联的边必都是G_{n-1}的割边。由习题4.2.1知，与v_{n-1}相关联的边中至多有一条割边，从而G_{n-1}中与v_{n-1}相关联的边恰只有e_n这条边。因此，G_n中原G_{n-1}的非空分支变成一个孤立顶点v_{n-1}及一个含v_n与v_0 的非空分支。结论仍成立。

中国邮递员问题

⇔ 在一赋权图G中，求一最小权环游（即最优环游）

⇔ (i) 找赋权连通图G的一个Euler生成母图G*，它是由重复（duplicated）G的一些边而得，且使

$w(E(G^*) \setminus E(G)) = \min$；

(ii) 在G*中找出其Euler环游。

- [附录（管梅谷，1960）(书："Selected Topics in Graph Theorey 2", p.35)

连通图G（每边权≡ 1）中的"邮路"（最优环游）为C

⇔ 在C中G的每边至多出现两次，且G的任一闭迹中至多有半数的边重复出现于C。]

- 上述(ii)可用Fluery（好）算法来解决；而(i)已由Edmonds及Johnson(1973)找到好算法。下面仅就最简单的情形，即赋权图G中恰只有两个度为奇数顶点u, v时,讨论求该G*问题：来证，**G*可由G加上(重复)G中的最短 (u, v)-路P而得。**
- 证明：易见，$G_1^* = G^*[E^* \setminus E]$ 为一简单图；且其中只有u, v 为奇点，它们一定在G_1^*的同一分支中（习题1.6.10）。令P*为其中的（u，v）-路，则有

$$w(E^* \setminus E) \ \ge\ w(P^*) \ \ge\ w(P) \ 。$$

但G+P 也是G的一Euler生成母图，故 G*= G+P 。

习题

- **4.2.1** 若连通图G中只有二奇点，则与任一奇点相关联的边中至多有一条是G的割边。

4.3 Hamilton 圈

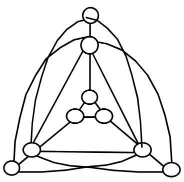
- **Hamilton路 ⇔ 生成路（spanning path ）**
- **Hamilton 圈 ⇔ 生成圈**
- **Hamilton 图 ⇔ 包含Hamilton 圈的图**
- **判定任意给定的图是不是Hamilton 图，是个NP-Hard问题。**
- 一个图为Hamilton 图的充要条件是其基础简单图为Hamilton 图，故关于Hamilton 图的讨论只需对简单图即可。
- 完全图是Hamilton 图

定理4.3.1（必要条件）

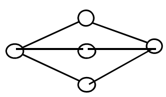
G为Hamilton图 $\Rightarrow \omega(G-S) \le |S|, \forall S \subset V$

证明：令C为G的一个Hamilton 圈 ,则对任一 $S \subset V$ 必有$\omega(C-S) \le |S|$，

但显然 $\omega(G-S) \le \omega(C-S)$，得证。



非Hamilton图

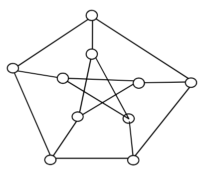


非Hamilton图

定理4.3.1 G为Hamilton图$\Rightarrow \omega(G-S) \le |S|, \forall S \subset V$

注意1: 定理4.3.1之逆不成立。

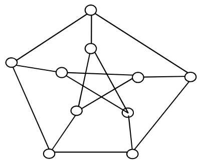
例如，Pertersen图满足定理条件，但它是非Hamilton 图 。



Petersen 图

定理4.3.1 G为Hamilton图⇒ $\omega(G-S) \le |S|, \forall S \subset V$

注意2: 寻找定理中的顶点集S一般来说不容易。比如用穷举法找 $V(G)$的真子集，计算量为 $O(2^n)$



Petersen 图

定理4.3.2 (充分条件)（Ore,1960）
$\nu \ge 3$的简单图G中，若对任二不相邻顶点u,v都有 (*) $d(u)+d(v) \ge \nu$， 则G为Hamilton 图。

证明：反证，假设存在$\nu \ge 3$、满足条件(*)的非Hamilton简单图，在保持其为**非Hamilton** 简单图的前提下，尽量加边，直到不能再加为止，记所得图为G 。

因$\nu \ge 3$，G不能是完全图（?）。

任取G中二不相邻接顶点u及v，则G + uv为Hamilton图，且其中的每个Hamilton 圈均含边uv 。从而G中有Hamilton 路

$v_1 v_2 \ldots\ldots\ldots v_\nu$ 　　其中$v_1 = u$, $v_\nu = v$ 。

定理4.3.2 (充分条件)（Ore,1960）
$\nu \ge 3$的简单图G中，若对任二不相邻顶点u,v都有 (*) $d(u)+d(v) \ge \nu$，则G为Hamilton 图 。

证明(续): 令 $S = \{ v_i \mid u v_{i+1} \in E \}$，$T = \{ v_j \mid v_j v \in E \}$

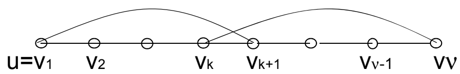
易见：$v_\nu \notin S \cup T$， 　$\therefore |S \cup T| < \nu$ 。

又，$S \cap T = \varnothing$ 。

(否则，存在$v_k \in S \cap T$， 则G中有Hamilton 圈 $v_1 v_2 \ldots v_k v_\nu v_{\nu-1} \ldots v_{k+1} v_1$， 矛盾。)

$\therefore$ $d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| < \nu$。

这与条件(*) 相矛盾。 　　证毕。



推论4.3.3 (Dirac,1952)
$\nu \ge 3$的简单图G中，若 $\delta \ge \nu/2$，则G为哈密尔顿图。

- $K_{n,n}$是Hamilton图；
- $K_{n,n,n}$ 是Hamilton图
- $K_{n,2n,3n}$ 是Hamilton图

推论4.3.4 (Bondy & Chvatal , 1974) 设u, v为简单图G中二不相邻顶点，且$d(u) + d(v) \ge \nu$，则: G为Hamilton 图 ⇔ G+uv 为Hamilton 图。

证明：⇒：显然 。

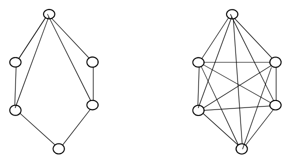
⇐：反证，假设G为非Hamilton 图，则由定理4.3.2之证明知,

$d(u) + d(v) < \nu$

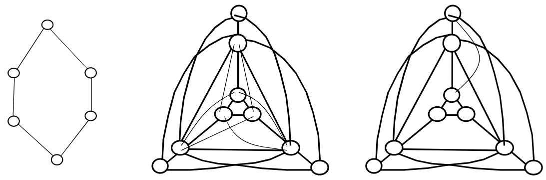
矛盾 。

闭包（closure）**c(G)**

闭包 ⇔ G的简单生成母图。 它是由G开始，通过反复将其中不相邻接而度之和 $\ge \nu$ 的 **顶点对** 用新边连起来，直到不能再进行为止所得的图。



- 定理**4.3.5** 简单图G为**Hamilton** 图 $\Leftrightarrow$ **c(G)**为**Hamilton** 图 。
- 推论**4.3.6** 设**G**为 $\nu \ge 3$的简单图，则 **c(G)**为完全图 $\Rightarrow$ **G**为**Hamilton**图 。



目录 上一页 下一页

定理**4.3.7 c(G)**是唯一确定的（**welldefine**）。

证明：假设G'及G''为G的二闭包，而

$e_1, \ldots\ldots, e_m$ 及 $f_1, \ldots\ldots, f_n$

为构成它们时加上去的新边（按先后顺序）序列。

先证：每个$e_i \in E(G'')$。假设不然,令 $e_{k+1} = uv$为$e_1, \ldots\ldots, e_m$中第一个$\notin E(G'')$的新边。记

$H = G + \{e_1, \ldots\ldots, e_K\}$ 。

由G'之定义知： $d_H(u) + d_H(v) \ge \nu$ 。

但$H \subseteq G''$，$\therefore$ $d_{G''}(u) + d_{G''}(v) \ge d_H(u) + d_H(v) \ge \nu$。

而$e_{k+1} = uv \notin E(G'')$, 这与G''之定义矛盾。

同理，每个$f_j \in E(G')$ 。故 $G' = G''$ 。

目录 上一页 下一页

- 例* 设简单连通图G中 $\nu \ge 2\delta$，则G含一长 $\ge 2\delta$的路。

（提示：反证，假设G中最长路的长≤2δ-1，再用定理4.3证明中类似的方法。）

- 例 将二部图G = (X,Y,E)，| X | = | Y |，中X的每对顶点都连起来得图H，则H有Hamilton圈⇔G有Hamilton圈 。

  （⇒提示：假设不然，则H中有一Hamilton 圈C包含新边 $x_i x_j$, 其中 $x_i, x_j \in X$，从H中去掉该新边并合并其两端点，再用定理4.2 ）

- 例 若简单2-连通二部图G = (X, Y, E)中, | X | = | Y | - 1 = n ,且 $d(x) \ge n$， $\forall x \in X$,则Y的任二顶点间都有Hamilton 路相连。 (提示：用上例)

目录 上一页 下一页

习题

- **4.3.1**. 证明：若 (a) 简单图G不是2连通图；或者 (b) G是二划分为（X，Y）的二部图，且 | X | ≠ | Y |； 则G为非Hamilton 图 。
- **4.3.2.** 一只老鼠边吃边走通过一块3×3×3立方体的奶酪，想走遍每个1×1×1子立方体（共27 个）。若从某个角落开始，它能否最后到达立方体的中心？
- **4.3.3** 证明：若G有Hamilton 路，则对于V的每个真子集S，有$\omega(G-S) \le |S| + 1$。
- **4.3.4** 若$\nu \ge 3$的简单图G中,$\varepsilon > C_2^{\nu-1} + 1$，则G为Hamilton 图 。

目录 上一页 下一页

- **4.3.5.** 若二部图G=（X，Y；E）中，|X| = |Y| = n，且$\delta > n/2$，则G为Hamilton 图。
- **4.3.6**. $\nu \ge 5$个人围桌而坐，总有一 新就座法，使每人的邻座都不相同。
- **4.3.7.** 对下列问题给出一好算法：
  - (a) 构造一个图的闭包。
  - (b) 若某图的闭包为完全图，求该图的Hamilton 圈 。
- **4.3.8** 对任正整数n，完全3-部$K_{n,2n,3n}$为Hamilton 图；而完全3-部$K_{n,2n,3n+1}$为非Hamilton 图。
- **4.3.9** 称图G为**H-连通的**⇔G中任二不同顶点u与v间 都有一(u,v)-路。

  证明：若的简单图G中每对不相邻顶点u与v 都有d(u) + d(v) ≥ v+1， 则G 为H-连通的。

目录 上一页 下一页

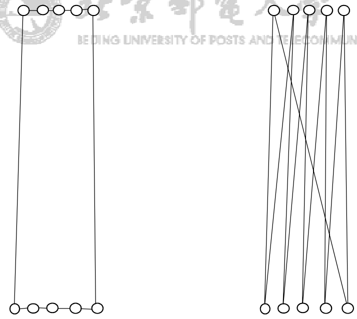
4.4 旅行售货员问题 (travelling salesman problem) TSP

目录 上一页 下一页

问题:

- 有一个售货员，从他所在的城市出发去访问其他n-1个城市，要求经过每个城市恰好一次，然后返回原地，问他的旅行路线怎样安排才最经济（即线路最短或旅费最省）？
- 任给一图G，G是否为Hamilton图？(NP-hard)
- 如果是，怎样安排旅行路线才最经济？(NP-hard)
- **图论问题**：在任给一赋权完全图G中，求最小（最大）权Hamilton圈（**最优圈**（**optimal cycle**））。

目录 上一页 下一页



目录 上一页 下一页

- 一般的TSP是NP-hard Problem.
- 当城市数为n时，可能的路线数为：(n-1)! ，
  或简单情况为： (n-1)! /2
- 为了比较权的大小，对每条Hamilton圈要做 n 次加法，故加法的总数为：n! /2
- 对于权重全为1或无穷大的“简单情况”仍是NP-hard Problem
- 理论上已经证明：除非P＝NP，不存在多项式时间近似算法，使相对误差小于或等于 ε

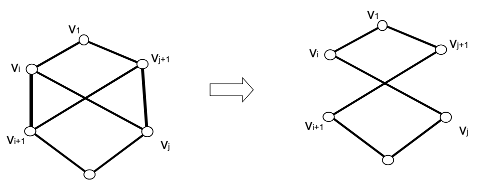
目录 上一页 下一页

应用

- 如一工厂需要经过**n道工序$j_1,j_2,\ldots,j_n$周而复始地生产某种产品，而从工序 j_i 到 j_k 的调整时间为$t_{i,k}$(设$t_{i,k}=t_{k,i}$)，如何安排加工顺序，使总调整时间为最短？**

目录 上一页 下一页

- 近似 先找一Hamilton 圈C=$v_1v_2\ldots v_\nu v_1$，再加以改进：
  对任i与j, 1<i+1<j<ν ,若有
  $w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1})$,
  则Hamilton 圈 $C_{ij}= v_1v_2\ldots v_iv_j v_{j-1}\ldots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2}\ldots v_\nu v_1$
  是C的一个改进。



目录 上一页 下一页

- 反复进行上述步骤，直到不能再改进为止。
- 所得Hamilton 圈一般不会是最优圈，但可能是“比较好的”。上述步骤也可从不同的Hamilton 圈作为开始，反复进行之。
- 令W'为所求得最小权，它可作为最优圈C*的权的上界，即w(C*) ≦ W'。

目录 上一页 下一页

- 下界的估计式

  设v为最优圈C*上任取的一个顶点，则C* - v为G - v中的一个生成树。令T为G - v 中的最优树，则有

  $$w(T)+w(e)+w(f) \le w(C^*)\ ,$$

  其中e，f为G 中与v相关联的边中权之和最小的两边。

- 所以 w(T)+w(e)+w(f) 可作为最优圈C*的下界。

- 设赋权完全图**G**的权满足三角不等式，即对任**x,y,z** ∈ **V**，都有 **w(xy) + w(yz) ≥ w(xz)** 。

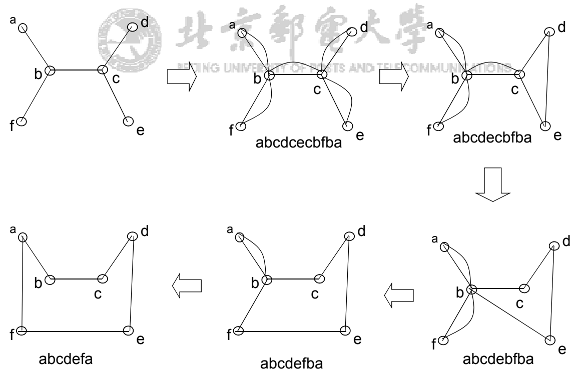
我们介绍一种用最小生成树求最优圈的近似算法。

（**1**）求***G***中的一棵最小生成树***T***。

（**2**）将***T***中各边均加一条与原边权值相同的平行边，设所得图为***G'***，显然***G'***是欧拉图。

（**3**）求***G'***中的一条欧拉回路***E***。

（**4**）在***E***中按如下方法求从顶点***v***出发的一个Hamilton 圈 ***H***：从***v***出发，沿***E***访问***G'***中各个结点，在没有访问完所有结点之前，一旦出现重复出现的结点，就跳过它走到下一个结点。（称这种走法为抄近路走法。）



- ***w(H)***作为最优圈的长度**(w(C*))**的近似值，则：

  $$w(T) \le w(C^*) \le w(H) \le 2\,w(T),$$

  其中T 是G中的一最优树。

- TSP是算法与复杂性领域著名的测试问题。

小结