图论及其应用

- 1 图的基本概念
- 2 树
- 3 连通度
- 4 遍历问题
- 5 匹配
- 6 着色问题
- 7 平面图
- 8 有向图
- 9 网络
- 10 NP-完全问题

第一章 图的基本概念

- 1.1 图的概念
- 1.2 同构
- 1.3 图的矩阵和顶点的度
- 1.4 子图
- 1.5 路和连通性
- 1.6 圈
- 1.7 最短路问题

1.1 图的概念

- Königsberg七桥问题
- 电网络
- 四色猜想

图 G = (V(G), E(G))， 其中

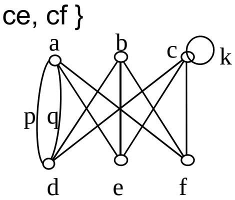
V(G) = $\{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$ V ---顶点集， ν ---顶点数

E(G) = $\{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$ E ---边集，ε---边数

例如，下图中，

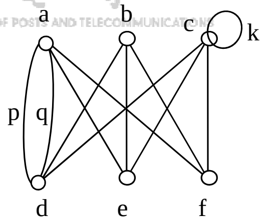
V={a, b,…,f},

E={k,p, q , ae, af, …,ce, cf }



G=(V,E)

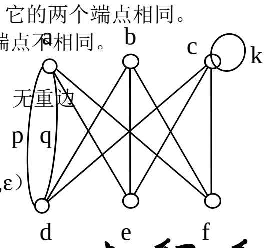
- **注意**， 右图仅仅是图G的一个*几何实现*（geometric realization,代表representation）， 它们有无穷多个，随顶点位置及边的形状而不同。真正的图G是上面所给出式子，它与顶点的位置、边的形状等无关。不过今后对图G及其*几何实现*将经常不加以区别。



G = (V, E)

目录 上一页下一页

- 称 边 ad 与顶点a (及d) *相关联*(incident)。也称顶点 b(及 f)与边 bf *相关联*。
- 称顶点a与e *相邻*(adjacent)。也称有公共端点的一些边，例如
  p与af彼此*相邻*。
- 称一条边的两个顶点为它的两个*端点*
- *环*（loop，selfloop）：如边 k，它的两个端点相同。
- *棱*（link）：如边ae，它的两个端点不相同。
- *重边*：如边p及边q。
- *简单图*：（simple graph）无环，无重边
- *平凡图*：仅有一个顶点的图。
- *注意*：任何一图都有 V ≠ φ 。
- *记号*：$\nu(G)=|V(G)|$，$\varepsilon(G)=|E(G)|$.（ν ,ε）



G = (V, E)

目录 上一页下一页

例题

- **1.1** 若G为简单图，则 $\varepsilon \le \binom{\nu}{2}$。

- **1.2** 若一群人中，凡相识的两人都无公共朋友，凡不相识的两人都恰有两个公共朋友，则每人的朋友数相等。

目录 上一页下一页

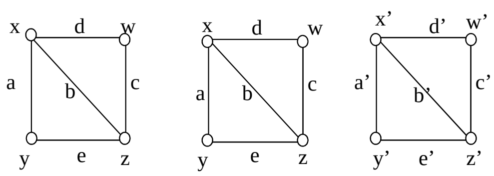
1.2 同构

目录 上一页下一页

例如在下图中，称

图G恒等于图H (记为 **G = H**)

⇔ VG)=V(H), E(G)=E(H)。



G=(V, E) H=(V, E) F=(V', E')

目录 上一页下一页

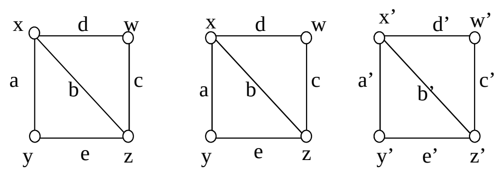
图G同构于图F （记为 **G ≅ F**）

⇔ V(G)与V(F), E(G)与E(F)之间各存在一一映射，

$\Psi: V(G) \to V(F)$ 及 $\Phi: E(G) \to E(F)$

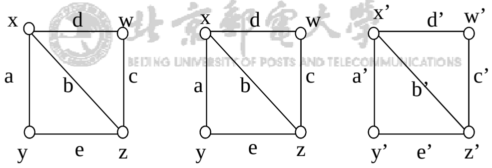
且这二映射保持关联关系，即：

$$\Phi(e) = \Psi(u)\Psi(v),\ \forall e = uv \in E(G)$$



G=(V, E) H=(V, E) F=(V', E')

目录 上一页下一页



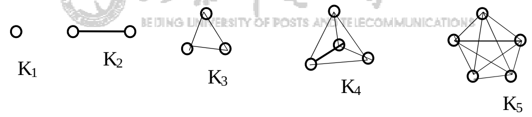
G=(V, E)　　H=(V, E)　　F=(V', E')

注 两个图同构是指"它们有相同的结构"，仅在顶点及边的标号上或两个图的画法上有所不同而已。往往将同构概念引伸到非标号图中，以表达两个图在结构上是否相同。

注 判定两个图是否同构是个未解决的困难问题（open problem）。

目录　上一页 下一页

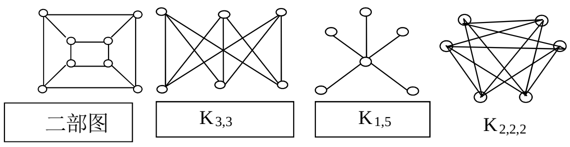
- *完全图*(complete graph) K_n



- *空图*（empty g.） ⇔ E = ∅ 。
  V' (⊆ V) 为独立集 ⇔ V'中任二顶点都互不相邻。
- *二部图*（偶图，bipartite g.）
  G = (X, Y ; E) ⇔存在 V(G) 的一个 **2-**划分 **(X, Y)**（即V(G)=X ∪ Y，且X∩Y=ϕ），使X与Y 都是独立集。

目录　上一页 下一页

- *完全二部图* $K_{m,n}$ ⇔ 二部图G = (X, Y; E)，其中X和Y之间的每对顶点都相邻，且 |X| = m, |Y| = n 。



- 类似地可定义，*完全三部图*（例如，$K_{m,n,p}$），完全 **n-**部 图等。

目录　上一页 下一页

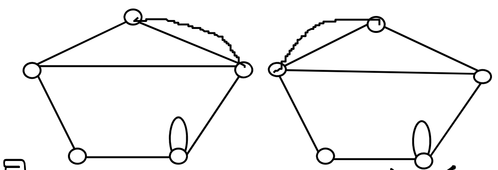
- 例。*用标号法判定二部图*。用红蓝两种颜色进行顶点标号如下：任取一顶点v 标以红色。再将v的所有相邻顶点都标以兰色。这时称v为已扫描顶点。若尚存在一已标号未扫描顶点u，将它的所有相邻顶点，（若不出现矛盾）都标以（其相异色）红色，并称u为已扫描顶点。如此继续下去，直到或者所有顶点都已标号，从而该图为一二部图；或者在标号过程中出现矛盾，该图为非二部图。

目录　上一页 下一页

习题

1.2.1 G ≅ H ⇒ ν(G) = ν(H) , ε(G) = ε(H) 。并证明其逆命题不成立。

1..2.2 证明下面两个图不同构：



目录　上一页 下一页

- **1.2.3** 证明下面图1与图2是同构的；而图1与图3是不同构的：

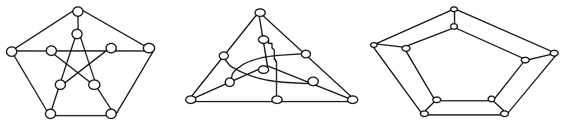


图 1　　图 2　　图 3

- **1.2.4** 证明两个简单图G和H 同构 ⇔ 存在一一映射 f : V(G) →V(H)，使
  得 uv ∈ E(G)当且仅当 f(u)f(v) ∈ E(H) 。

目录　上一页 下一页

- **1.2.5** 证明：(a). $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$；
  (b). 对简单二部图有 $\varepsilon \le \nu^2/4$.
- **1.2.6** 记$T_{m,n}$为这样的一个完全m-部图：其顶点数为n，每个部分的顶点数为[n/m]
  或{n/m}个。证明：
  (a). $\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$ 其中 k =[n/m] .

  (b)*. 对任意的n顶点完全m-部图G，一定有 $\varepsilon(G) \le \varepsilon(T_{m,n})$，且仅当$G \cong T_{m,n}$
  时等式才成立。
- **1.2.7** 所谓**k-方体**是这样的图：其顶点是由0与1组成的**有序k-元组**，其二顶点相
  邻当且仅当它们恰有一个坐标不同。证明k-方体有2^k个顶点，$k*2^{k-1}$条边，且是一偶图。

目录 上一页下一页

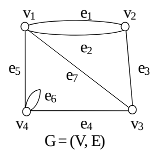
- **1.2.8** 简单图G的**补图G^c** 是指和G有相同顶点集V的一个简单图，在G^c中两个
  顶点相邻当且仅当它们在G中不相邻。
  (a). 画出K^c_n和 $K^c_{m,n}$。
  (b). 如果$G \cong G^c$则称简单图G为**自补的**。证明：若G是自补的，则
  $\nu \equiv 0, 1 \pmod 4$ 。
- **1.2.9** 设$V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, $V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 且
  $v_iv_j \in E(H) \Leftrightarrow d_G(u_i)+d_G(u_j)=$ 奇数， 则H一定是个完全二部图。
- **1.2.10** 若 $\nu \ge 2$的简单图$G=(V,E)$中如下性质成立
  $uv, vw \notin E \Rightarrow uw \notin E, \quad \forall u,v,w \in V$ 则G一定是个完全（某）m部图。

目录 上一页下一页

1.3 图的矩阵和顶点的度

目录 上一页下一页

$M(G)=[m_{i,j}]_{\nu*\varepsilon}$， (关联矩阵)
$m_{i,j}$ = 顶点v_i与边e_j 的关联次数= 0, 1, 2.

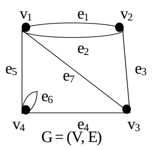


G = (V, E)

$$M(G)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

目录 上一页下一页

$A(G)=[a_{i,j}]_{\nu*\nu}$, $a_{i,j}$ = 连接顶点vi 与 vj 的边数 。
（邻接矩阵）



G = (V, E)

$$A(G)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

目录 上一页下一页

- 顶点 v的 度 $d_G(v)$ = G中与顶点v 相关联边数。（每一环记为2）
- 记号： 最大、最小度 Δ，δ 。（Δ(G) , δ(G) ）
- **奇点**：度为奇数的顶点；
- **偶点**：度为偶数的顶点；
- **孤立点**：度为0的顶点；
- **悬挂点**：度为1的顶点；
- **悬挂边**：悬挂点的关联边。

目录 上一页下一页

- **定理1.3 .1** (hand shaking lemma) 任一图中，

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2\varepsilon \ .$$

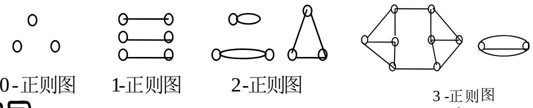
- **推论1.1** 任一 图中，度为奇数顶点的个数为偶数。

目录 上一页 下一页

例：任一多面体中，边数为奇数的外表面的数目为偶数。

（提示：作一图，其顶点对应于多面体的面，且二顶点相邻当且仅当对应的两个面相邻（即有公共边界）。）

***k*-正则图**（k-regular g.）⇔ $d(v) = k, \ \forall v \in V$.



目录 上一页 下一页

习题

- **1.3.1** 证明：$\delta \le 2\varepsilon/\nu \le \Delta$ 。
- **1.3.2** 若 k-正则偶图(k > 0)的2-划分为 (X, Y),则 |X| = |Y|。
- **1.3.3** 在人数 >1的人群中，总有二人在该人群中有相同的朋友数

目录 上一页 下一页

- **1.3.4** 设$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，则称 ($d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_\nu)$) 为G的度序列。

  证明：非负整数序列 ($d_1, d_2, \ldots, d_n$) 为某一图的度序列 ⇔ $\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数。

- **1.3.5** 证明：任一 无环图G都包含一偶生成子图H，使得 $d_H(v) \ge d_G(v)/2$ 对所有$v \in V$ 成立。

  （提示：考虑G的边数最多的偶生成子图）

- **1.3.6*** 设平面上有n个点，其中任二点间的距离 ≥ 1，证明：最多有 3n对点的距离 = 1 。

目录 上一页 下一页

1.4 子图

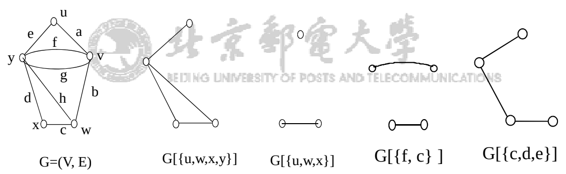
目录 上一页 下一页

- *子图* (subgraph) $H \subseteq G \Leftrightarrow V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ 。
- *真子图* $H \subset G \Leftrightarrow H \subseteq G$ 且$H \ne G$ 。*母图*（super graph）。
- *生成子图*（spanning subg.） H ⇔ $H \subseteq G$ 且$V(H) = V(G)$。
- *生成母图*。
- *基础简单图*（underlying simple g.）：从一图中去掉其所有重边及环后所得的剩余（简单图）图称之为其基础简单图。
- *导出子图*（induced subgraph.）**G[V']**，（非空 $V' \subseteq V$ ）

  ⇔ 以V'为顶点集，以G中两端都在V'上的边全体为边集构成的G的子图
- *边导出子图* **G[E']**　(非空$E' \subseteq E$)

  ⇔ 以E'为边集，以E'中所有边的端点为顶点集的的子图。

目录 上一页 下一页



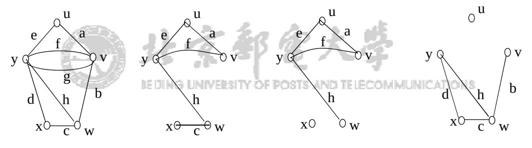
G=(V, E)　G[{u,w,x,y}]　G[{u,w,x}]　G[{f, c}]　G[{c,d,e}]

G[V'], G[E'] 两种子图对应于取子图的两种基本运算。下面是取子图的另两种基本运算：

- **G - V'** ⇔ 去掉V'及与V'相关联的一切边所得的剩余子图。

  ⇔ 即 G[V \ V']
- **G - E'** ⇔ 从中去掉E' 后所得的**生成**子图

目录　上一页 下一页



G=(V, E)

- 例。G - {b, d, g}, (= G[E \ {b, d, g}])

  G - {b, c, d, g}, (≠ G[E \ {b, c, d, g}])

  G - {a, e, f, g}. (≠ G[E \ {a, e, f, g}])

注意 G[E \ E'] 与G - E'

虽有相同的边集，但两者不一定相等：后者一定是生成子图，而前者则不然。

目录　上一页 下一页

- 上述四种运算是最基本的取子图运算，今后经常会遇到，一定要**认真掌握好**。关于子图的另一些定义还有：

  G + E' ⇔ 往G上加新边集E' 所得的（G的）母图。

  为简单计，今后将

  G ± {e} 简记为 G ± e；

  G - {v} 简记为 G - v 。

设 G_1, $G_2 \subseteq G$，称G_1与G_2为

- 不相交的（disjiont） ⇔ $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$

  (∴ $E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$)
- 边不相交 （edge-distjiont，边不重的）

  ⇔ $E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$ 。

  （但这时G_1与G_2仍可能为**相交的**）。
- 并图 $\mathbf{G_1 \cup G_2}$，当不相交时可简记为 $\mathbf{G_1+G_2}$.
- 交图 $\mathbf{G_1 \cap G_2}$.

目录　上一页 下一页

习题

- **1.4.1** 证明：完全图的每个导出子图是完全图；偶图的每个导出子图是偶图。

- **1.4.2*** 设G为一 简单 图，1< n < ν-1。证明：若 ν ≥ 4，且G中每个n顶点的导出子图均有相同的边数，则 $G \cong K_\nu$或 $K^c{}_\nu$ 。

目录　上一页 下一页

1.5 路和连通性

目录　上一页 下一页

- *途径* （walk）

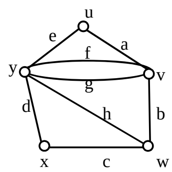
  例如图G的(u,x)-途径

  W = ueyfvgyhwbvgydxdydx

  (有限非空序列)

  = uyvywvyxyx

  (简写法---当不引起混淆时)



目录　上一页 下一页

- *起点*（origin） u 。 uyvywvyxyx
- *终点*（terminus） x。
- *内部顶点*（internal vertex） y, v, w, x。
  （注意，中间出现的x也叫内部顶点。）
- *长* ⇔ 边数（重复计算）。
- *节*（段，section）。 例如W的(y, w)-节=yvw 。
- ***W^{-1}***（逆途径），
- ***WW'***（两条途径W与W'相**衔接**。要求：W的终点=W'的起点）。
- *迹*(trail) ⇔ 边各不相同的途径（顶点可重复出现）。例如，yvwyx 。
- *路* (path) ⇔ 顶点各不相同的途径。（边也一定不重复出现。路可当作一个图或子图）。例如，yvwx 。
- *距离* **d_G(u, v)** = 图G中顶点u与v之间最短路的长。

定理1.5.1

G中存在(u, v)-途径 ⇔ G中存在(u, v)-路。

证明：⇐是显然的；

⇒：设G中存在 (u,v)-途径 $W = v_0, v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_n$

其中 $v_0 = u, v_n = v$

若W中的顶点互不相同，则W就是(u, v)-路；不然，设其中有 $v_i = v_j$（$i \neq j$），则

$$W' = v_0, v_1, \cdots, v_i, v_{j+1}, \cdots, v_n$$

也是一条(u,v)-途径，长度比W短 。若其中仍有重复顶点出现，则继续上述过程。由于W 长度的有限性，上述过程必停止于一(u, v)-路 。

图的连通性：称G中顶点***u*与*v*为连通的** (connected) ⇔ G中存在 (u, v)-路

（ ⇔ G中存在(u, v)-途径。）

容易验证，V上的**连通性**是V上的**等价关系**，它将V划分为一些等价类：

V_1， …，V_ω

使每个V_i中的任二顶点都**连通**（即存在(u, v)-路）；

而不同V_i与V_j之间的任二顶点都不**连通**。

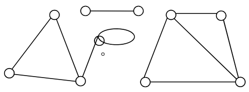


图 G

- 称每个

  G[V_i] i=1,2,......ω

  为G的一个分支（component）；称**ω(G)**为G的*分支数*。

- 称 G为*连通图* ⇔ ω(G) = 1

  ⇔ G中任两点间都有一 条路相连。

- 称 G为*非连通图* ⇔ ω(G) > 1。

- 记号： 对任一非空 S⊂V ，令$\overline{S}$ = V\S, 记

  [S, $\overline{S}$] = G中两端分别在S及$\overline{S}$中的一切边的集合。

  （后文中将称为***边割***）

容易证明：

- 定理1.5.2 G连通 ⇔

  对任 S ⊂ V 都有 [S, $\overline{S}$] ≠ ∅

- 例1.5 简单图G中，δ ≥ k ⇒G中有长 ≥ k 的路。

  （注意到，G中任一最长路P的起点（终点）的所有邻接点全在P上。）

习题

- **1.5.1** 证明：G中长为k的(v_i, v_j)途径的数目，就是A^k中的(I, j)元素，其中A为G的邻接矩阵。
- **1.5.2** 证明：对简单图G有，$\varepsilon > \binom{\nu-1}{2} \Rightarrow$ G连通。对于ν > 1，试给出 $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$ 的不连通简单图。
- **1.5.3** 证明简单图G中，δ > [ν/2] - 1 ⇒ G连通。当ν是偶数时，试给出一个不连通的([ν/2]-1)正则简单图。

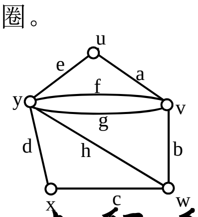
- **1.5.4** G不连通 ⇒ G^c 连通。
- **1.5.5** 对任意图G的任一边e，有 ω(G)≤ ω(G-e) ≤ ω(G) +1 。
- **1.5.6** G连通，且 d(v)=偶数，∀ v∈ V ⇒ ω(G-v)≤ d(v)/2, ∀ v∈ V.
- **1.5.7** 连通图中，任二最长路必有公共顶点。
- **1.5.8** 对任一图的任三个顶点 u, v, w 都有 d(u, v)+d(v, w) ≥ d(u, w)。
- **1.5.9** 任一的简单、连通、非完全图中，一定有三个顶点 u, v, w，使得uv, vw∈ E 而 uw ∉ E。
- **1.5.10** 若图G 中恰有两个奇点u与v，则G中一定有一(u,v)路。

1.6 圈

- *闭途径*（closed walk） ⇔ 起点=终点 且长 > **0** 的途径。
- *闭迹* (closed trail) ⇔ 边各不相同的闭途径。
- *圈*（cycle）⇔ 顶点各不相同的闭迹。
  （可当作一图或子图。）

例：

- 闭途径： uyvyu ; uywxywvu ； **uyuyu**。
- 闭迹：uyxwyvu。
- 圈： yfvgy ; uywvu。
- **k-**圈（k-cycle）⇔ 长为k的圈。
- 奇圈 (odd cycle)。
- 偶圈 (even cycle)。



例：

- 1-圈（即一条环），
- 2-圈(由两条重边组成)，
- 3-圈（又称三角形）。

定理1.2 G 为二部图 $\Leftrightarrow$ G不含奇圈。

证明：

$\Rightarrow$：设G的2-划分为（X, Y），由G的定义，G的任一圈中，X和Y的顶点一定交错出现，从而其长必为偶数。

$\Leftarrow$：不妨设G为 连通的。 任取一顶点u,令

$X = \{ x\in V \mid d(u, x) = 偶数 \}$,

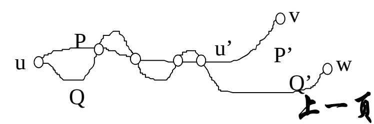
$Y = \{ y\in V \mid d(u, y) = 奇数\}$。

易见，(X, Y)为V的2-划分，

所以只要再证X（和Y）都是G的独立集（ 即X（或Y）中任二顶点v， w都不相邻 ）即可。

令P与Q分别为最短(u, v)-路与最短(u, w)-路。设u'为P与Q的最后一个公共顶点； 而 P'与Q'分别为P的(u', v)-节与Q的(u', w)-节。则P'与Q'只有一公共顶点。

又，由于P与Q的(u, u')-节的长相等， P'与Q'的长有相同的奇偶性，因此v与w不能相邻， 不然，$v(P')^{-1} Q'wv$ 将是一奇圈，矛盾。



容易证明：

- 命题1 图G中 $\delta \ge 2 \Rightarrow$ G中含圈。
- 命题2 简单图G，$\delta \ge 2 \Rightarrow$ G含长 $\varepsilon \ge \delta+1$ 的圈。

（提示：以上两例中可考虑其最长路）

- 命题3 任一图G中 $\varepsilon \ge \nu \Rightarrow$ G含圈。

证明：反证，假设结论不成立，而G为其最小反例。则首先G是连通的，且 $\nu \ge 2$。再由以上第一例知，G中存在一顶点u，$d(u) = 1$ 。

于是，$\varepsilon(G-u) \ge \nu(G-u)$ ，且显然G-u中也不含圈，从而G-u也是个反例，但顶点数比G少，矛盾。

习题

- **1.6.1** 若边e在G的一闭迹中，则e在G的一圈中。
- **1.6.2** 证明：

  (a). $\varepsilon \ge \nu \Rightarrow$ G含圈。

  (b)*. $\varepsilon \ge \nu + 4 \Rightarrow$ G含两个边不重的圈。
- **1.6.3** 证明：任一连通偶图G=(X, Y)的2-划分 (X, Y)是唯一的。

（提示：不然，必有二顶点u,v，原属同一部（例如，）X，而在另一种2-划 分则不然。）

- **1.6.4** 证明或反证：

  (1).G中有两个不同的(u,v)路，则G中含一圈。

  (2).G中有一闭途径，在则G中含一圈。

  (3).G中有一长为奇数的闭途径，在则G中含一奇圈。
- **1.6.5** 设图G 的顶点可用两种颜色进行着色，使每个顶点都至少与两个异色顶点邻，则G中一定包含偶圈。
- **1.6.6** 5×5座位的教室中，不可能让每个学生都作一上下左右移动，使每个人都换了座位。（提示：“座位图”是 一二部图）

1.7 最短路问题

- *赋权图*（weighted graph）G （注：权 ≡ 1 时即为上文中所提的图。）
- ***权***(weight）$w(e) \geq 0.\quad \forall e \in E(G)$
  记号：$w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$ ， $H \subseteq G$.
- ***路P的长*** = $w(P)$
- 顶点u与v的 ***距离* d(u, v)** = 最短(u, v)-路的长。

目录 上一页 下一页

- *问题* 求最短(u_0, v_0)-路。
- *转* 求最短(u_0, v)-路，$\forall v \in V \setminus \{u_0\}$.
- *简化* 只考虑简单图，且$w(e) > 0 \ \ \forall e \in E$.
  （$w(uv) = 0$ 时， 可合并u与v为一 顶点）。

目录 上一页 下一页

- *原理* 逐步求出顶点序列
  u_1, u_2,............

使 $d(u_0, u_1) \leq d(u_0, u_2) \leq \ldots\ldots$

记 $S_0 = \{ u_0 \}$,

$S_k = \{ u_0, u_1, \ldots, u_k \}$， $\overline{S}_k = V \setminus S$ 。

P_i 为最短(u_0, u_i)-路 $i = 1, 2, \ldots$

(1).求u_1： u_1是使

$w(u_0 u_1) = \min\{ w(u_0 v) \mid v \neq u_0 \}$ 者 .

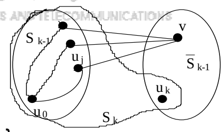
得 $S_1 = S_0 \cup \{u_1\}$， $P_1 = u_0 u_1$.

目录 上一页 下一页

(2). 若已求得S_{k-1}； $d(u_0, u_1)$， …， $d(u_0, u_{k-1})$；

及最短 (u_0, u_i)路 P_i ， i=1.2,...,k-1 。

求u_k： 显然，



$d(u_0, u_k) = \min\{ d(u_0, v) \mid v \in \overline{S}_{k-1} \}$

$= d(u_0, u_j) + w(u_j u_k)$ 某 $j \in \{ 1,2,\ldots, k-1 \}$

$= \min\{ d(u_0, u) + w(u u_k) \mid u \in S_{k-1} \}$

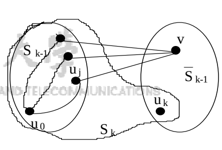
$= \min\{ d(u_0, u) + w(uv) \mid u \in S_{k-1}, v \in \overline{S}_{k-1} \}$

$= \min\{ l(v) \mid v \in \overline{S}_{k-1} \}$

其中， $l(v) = \min\{ d(u_0, u) + w(uv) \mid u \in S_{k-1} \}$

$(\therefore \ \ l(u_k) = d(u_0, u_k))$

目录 上一页 下一页



$\therefore$ $S_k = S_{k-1} \cup \{ u_k \}$,

$P_k = P_j u_j u_k$ 某 $j \in \{ 1,2, \ldots, k-1 \}$ 。

update 进行下一 步时，只要更新 l(v) 即可：

$l(v) \leftarrow \min\{ l(v), l(u_k) + w(u_k v) \}$

对 $\forall v \in \overline{S}_k$

目录 上一页 下一页

Dijkstra算法

- (1).作为开始：$l(u_0) \leftarrow 0$; $l(v) \leftarrow \infty$; $\forall v \neq u_0$;
  $S_0 \leftarrow \{ u_0 \}$; $k \leftarrow 0$.
- (2).（这时已有$S_k = \{ u_0, u_1, \ldots, u_k \}$）
  $l(v) \leftarrow \min\{ l(v), l(u_k) + w(u_k v) \}$ $\forall v \in \overline{S}_k$
  再计算 $\min\{ l(v) \}$，设其最小值点为 u_{k+1}，令
  $S_{k+1} = S_k \cup \{ u_{k+1} \}$。
- (3).若 k=ν-1, 停止；不然，令$k \leftarrow k+1$,并回到(2)。

目录 上一页 下一页

计算复杂性

加法： $\nu(\nu-1)/2$

比较： $\nu(\nu-1)/2 \times 2$

$v \in \bar{S}$： $(\nu-1)2$

+) ______________________________

共 $O(\nu^2)$

目录 上一页 下一页

凡是复杂性为 $p(\nu, \varepsilon)$ 的算法（ $p(.,.)$ 为一多项式）称为 **“好算法”**（“good algorithm”------J.Edmonds）。这是相对于 **指数型算法** 而言的：在 10^{-6} 秒/步运算速度下：

复杂性	n=10	20	30	40	50
n^3	.001sec	.008sec	.027sec	.064sec	.125sec
n^5	.1sec	3.2sec	24.3sec	1.7min	5.2min
2^n	.001sec	1.0sec	17.9min	12.7days	35.7 years

由上表可见，两种算法有天壤之别。

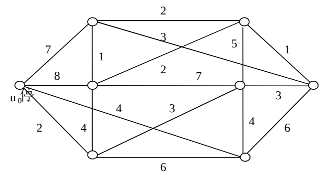
目录 上一页 下一页

注

- **1.** 若只关心求 $d(u_0,v_0)$，则算法进行到 $v_0 \in S_k$ 时停止。
- **2.** 计算过程中，每步所得子图都是一 **棵树**（？：**每步**都是往其上增加**一条边及一个顶点**）。因此该过程称为 **tree growing procedure** 。在该树中的 (u_0,v_0)-路，是中最短 (u_0,v_0)-路 。
- **3.** 若要计录 u_0 到每个顶点u的最短路，只要记录该路中u的前一个顶点（即该树中u的父亲）即可。

目录 上一页 下一页

例



目录 上一页 下一页

习题

- **1.7.1** 描述一个算法以确定
  (a). 一图的各个分支；
  (b). 一图的**围长**（即最短圈的长）；
  并说明你的算法好到什么程度。

目录 上一页 下一页