第二章　树

2.1　树

树不但在各种领域内被广泛地应用，而且也是图论的基础，许多结论可由它而引出。

- *无圈图*（acyclic g.；林forest）
  ⇔ 不含圈的图。
- *树*（tree）⇔ 连通无圈图。
- *叶* (leave) ⇔ 树中度为1的顶点。

- 例：六个顶点的树

- 称边e为图G的*割边*(cut edge)
  ⇔ $\omega(G-e) > \omega(G)$ 。

（或即 $\omega(G-e) = \omega(G) + 1$ ）

- （称边e为图G的*非割边*
  ⇔ $\omega(G-e) = \omega(G)$ 。）

定理2.1.1　e为G的割边 ⇔ e不在G的任一圈中。

- 证明：令 $e = xy$，则 x 与 y在G的同一分支中。于是，

e 为G的割边

⇔ $\omega(G-e) = \omega(G) + 1$

⇔ x与 y不在G-e的同一分支中

⇔ G-e 中无 (x,y)-路

⇔ G中无含e的圈。

定理2.1.2 图G连通，且每边是割边 $\Leftrightarrow$ G为树。

- 证明：注意到以下事实即可，

  G无圈 $\Leftrightarrow$ G 中每边不在任一圈中

  $\Leftrightarrow$ G中每边是其割边。

定理2.1.3 树中任二顶点间有唯一的路相连

- 证明：反证，假设存在树G，其中存在二顶点u与v，其间有二不同(u, v)-路P_1和P_2相连。因$P_1 \neq P_2$，一定存在，例如，P_1的一条边e = xy，它不是P_2的边。

  显然，图 $P_1 \cup P_2 - e$是连通的，从而其中包含一条(x, y)-路P。于是P + e 是G中的一圈，这与G为无圈图相矛盾。

- 注意

  (1). 当G无环时，易见（习题），

  G是树 $\Leftrightarrow$ G中任二顶点间有唯一的路相连。

  (2). 以下结论不一 定成立：

  $\exists$ 闭途径 $\Rightarrow$ $\exists$ 圈 。

定理2.1.5 G是树 $\Rightarrow$ $\varepsilon = \nu - 1$。

- 证明：对 ν 进行归纳。当 ν = 1时，G = K_1，成立。假设定理对小于 ν个顶点的树成立，而G为 ν 个顶点的树。

  任取G的一边uv 。它是G中的一条路，由定理2.1知， G - uv 不连通，且它恰有二分支（习题1.5.5），设为G_1与G_2。它们都是连通无圈图，因此是树。又，它们的顶点数都小于 ν 。由归纳假设知$\varepsilon(G_l) = \nu(G_l) - 1 \quad l = 1,2$.

  $\therefore \quad \varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1$

  $= \nu(G_1) + \nu(G_2) - 1$

  $= \nu(G) - 1$ 。

推论2.1.6 每棵非平凡树至少有两个度为1的顶点。

- 证明：由于G为非平凡连通图，

  $d(v) \geq 1$， $\forall v \in V$ 。

  再由定理1.3.1 及2.1.2知，

$$2\nu - 2 = 2\varepsilon = \sum_{v \in V} d(v) = k + \sum_{d(v) \geq 2} d(v) \geq k + 2(\nu - k) = 2\nu - k$$

  所以推论成立。

- 例：恰只包含两个度为1顶点的树是路。

$$2\nu - 2 = 2\varepsilon = \sum_{v \in V} d(v) = 2 + \sum_{d(v) \geq 2} d(v) \geq 2 + 2(\nu - 2) = 2\nu - 2$$

$$\therefore \sum_{d(v) \geq 2} d(v) = 2(\nu - 2)$$

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

- 称T为连通图G的*生成树*（spanning tree ）

  ⇔ T为 G的生成子图，且为树。

目录 上一页 下一页

推论2.4.1 每一连通图G都包含一生成树。

- 证明：令 T 为G的**极小(minimal)连通生成子图**（即 T 的任一真子图都不是G的连通生成子图）（由定义知，T 可在**保持连通性**的前提下，用逐步从G中去**边**的办法求出（ ∴所去的边一定在一圈中（即**非割边**）（∴每步至少破坏一圈））。 由T的定义知，$\omega(T) = 1$，

  $\omega(T - e) = 2 \quad \forall\, e \in E(T)$ 。

  即 T 的每边为割边，故由定理2.4知T为树。

目录 上一页 下一页

- **注** 也可用G的**极大无圈**（生成子图）**子图**（即G的子图H若为该子图的真母图，则H一定含圈）来求生成树 T。它可由V上的空图开始，在**保持无圈**的前提下，逐步由G中取边的办法求出。（为何是生成树？）

推论2.4.2 任意连通图有 $\varepsilon \ge \nu - 1$ 。

目录 上一页 下一页

定理2.5 设 T 为G的一生成树，e为G中不属于T的边，则T+e 含唯一的圈。

- 证明： 若e为环（即1-圈），结论显然成立。不然，由于T 无圈，T + e 中的每个圈（若存在的话）都包含e 。又，C为 T + e 的一圈 ⇔ C - e 为T 中连接e的两个端点的路。但，由定理2.1知，T中恰只有一条这样的路，因此 T + e中包含唯一的圈。

目录 上一页 下一页

- 小结 G为树

  ⇔ G中任二顶点间有唯一的路相连，且无环

  ⇔ G连通，无圈

  ⇔ G连通，且每边为割边

  ⇔ G连通，且 $\varepsilon = \nu - 1$

  ⇔ G无圈，且 $\varepsilon = \nu - 1$ 。

目录 上一页 下一页

习题

- **2.1.1** 证明：在任一非平凡树中，任一最长路的起点和终点均是树叶。再由此去证明推论2.2。
- **2.1.2** 一树中若 $\Delta \ge k$，则其中至少有k个度为 1 的顶点。
- **2.1.3** 当 $\varepsilon = \nu - 1$ 时，证明以下三结论是等价的：

  (a) G 是连通图；

  (b) G是无圈图；

  (c) G是树。

  提示：(a)⇒(b)：反证，考虑边数最少的反例G，即G是满足 条件： $\varepsilon = \nu - 1$；连通；且含圈的所有图中边数最少者）

目录 上一页 下一页

- **2.1.4** G为 林 $\Leftrightarrow$ $\varepsilon = \nu - \omega$。
- **2.1.5** 若林G 恰有2k个奇点，则G 中存在k条边不重的路 P1 ,P2 ,..,Pk ,使得$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k)$。
- **2.1.6** 正整数序列 $(d_1, d_2, \dots, d_\nu)$是一 棵树的度序列，当且仅当 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$
- **2.1.7** 饱和烃分子形如$C_m H_n$，其中碳原子的价键为4，氢原子的价键为 1，且任何价键序列都不构成圈。证明：对每个m，仅当n = 2m + 2时$C_m H_n$方能存在。
- **2.1.8** 若连通图G有二生成树T_1与 T_2 满足条件：它们恰只一边不相同。则该二边共圈。

目录 上一页 下一页

2.2 边割和键

目录 上一页 下一页

下面我们来引入图论中的一个重要概念：

边割，它是割边的一个推广，对$S \subset V$记

$[S, \bar{S}]$ = G中全体一端在S，另一端在 $\bar{S}$ 中的边的子集合

称之为图G的***边割***（ edge cut）。

[{v},V\{v}]: 图G的***关联边割***

(incidence edge cut)

目录 上一页 下一页

显然，我们有以下：

命题 在连通图G中，

边子集$E' \supseteq$ 边割 $\Leftrightarrow$ $\omega(G-E') > 1$ 。

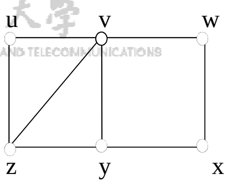
键（bond, 割集cut set ）

$\Leftrightarrow$ 极小非空边割。

例：e是G的割边 $\Leftrightarrow$ {e} 是G的键。

目录 上一页 下一页

- 例：左图G中，



{uv, zv, zy, vw, yx},

{zu, zv, zy, xy, xw},

{uv, zv, zy}

{zu, zv, zy}

都是边割，其中后两个为键。而 E' ={zu, zv, zy, uv}不是G的边割，当然更不是G的键，虽然G- E' 变成不连通。

目录 上一页 下一页

易见，当G连通时，

边子集B 为G的键

$\Leftrightarrow$ B是G的极小非空边割

$\Leftrightarrow$ B是使G-B不连通的极小边子集

$\Leftrightarrow$ G-B不连通，且对B中的任一边e，G - B + e仍连通

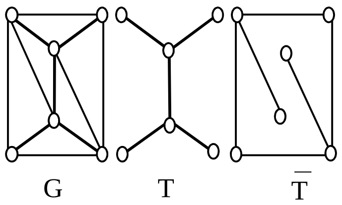
$\Leftrightarrow \omega(G-B)=2$，且B中每边的两端点分别在二分支中。

$\Leftrightarrow$存在非空$S \subset V$使边子集$B = [S, \bar{S}]$（即B为边割），且$G[S], G[\bar{S}]$ 都连通。

目录 上一页 下一页

设H为G的子图，称子图 $G - E(H)$ 为G中H的*补图*，记为： $\overline{H}(G)$ （简记为 $\overline{H}$ ）。

特别地，当T为G的生成树时，称 $\overline{T}$ 为G的*余树*。



目录 上一页 下一页

定理2.6 设T为连通图G的一个生成树，e为T的一条边，则

(1).余树 $\overline{T}$ 不包含G的键；

(2). $\overline{T}$+ e中唯一包含G的一个键。

目录 上一页 下一页

证明：

(1).因 $G - E(\overline{T}) = T$ 连通，则由前述命题知不包含G的边割，从而也不包含G的键。

(2).注意到e为 T的割边，令S与 $\overline{S}$ 分别为 T - e的二分支的顶点集。考虑边割 $B = [S, \overline{S}]_G$

由于G[S] (包含T-e的一个分支T[S]) 与G[$\overline{S}$] (包含T-e的一个分支T[S]) 都连通，B是G的键，它包含于T+e中。

来证B为包含在 $\overline{T}$+e中的唯一键：设B'为包含在 $\overline{T}$+e中的G的任一键，则 $G-B' \supseteq T-e$ 。这时，假设存在B的一边 $b \notin B'$，则 $G - B' \supseteq T - e + b$ 。

但T-e+b也是G的一生成树（因 其边数=ν -1，且连通），从而G - B' 连通，这与B' 为G的键相矛盾，因此B的每边 $b \in B'$，即 $B \subseteq B'$ 。再由键的极小性知B' = B 。

目录 上一页 下一页

- 比较定理2.5及定理2.6 知，树与圈之间、余树与键之间的关系是相似的，因此圈与键之间具有对偶性。

目录 上一页 下一页

附录

设G连通，T为其任一生成树。对每一边 $e \in \overline{T}$ ，T+e 中有唯一圈C，因而可得 $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_{\varepsilon-\nu+1}$

共 $\varepsilon - \nu + 1$ 个 不同的圈 ，每个称为G的一个**基本圈**。

同样，对每一边 $e \in T$ ， $\overline{T}$+e中有唯一的键，

因而可得 $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_{\nu-1}$

共 $\nu - 1$ 个不同的键，每个称为的一个**基本割集**。

设 S_1, S_2 为二集合，记其**对称差**(即（$S_1 \cup S_2$）-（$S_1 \cap S_2$）)为

$$S_1 \oplus S_2$$

称为它们的**环和**(ring sum)。

目录 上一页 下一页

性质

- **1)**图G的每一边割是G的一些割集的边不重并。
- **2)**设B1 ， B2为图G的任二边割，则B1 ⊕ B2 也是G的边割。（对任二非空 $V1, V2 \subset V$，有 $[V_1, \overline{V_1}] \oplus [V_2, \overline{V_2}] = [V_3, \overline{V_3}]$ 其中 $V3 = (V1 \cap V2) \cup (\overline{V1} \cap \overline{V2})$ ）。
- **3)**设边子集E'与E"分别为G中一些圈的边不重并，则E'⊕E"亦然。
- **4)**G 的每个圈可唯一地表为G的一些基本圈的环和。
- **5)**G 为一些圈的边不重并 $\Leftrightarrow d(v) =$ 偶数 $\forall\ v \in V$ 。
- **6)**G 的每个边割可唯一地表为G的一些基本割集的环和。
- **7)**边子集E'为G中一些圈的边不重并

  ⇔ 边子集E'与G中每个边割有偶数条公共边。
- **8)**边子集B为G的一个边割

  ⇔ 边子集B与G的每个圈有偶数条公共边。

  （即，G的每个圈有偶数条B的边）

目录 上一页 下一页

习题

- **2.2.1** 设 G连通且 $e \in E$，证明：
  (a) e 在G的每棵生成树中当且仅当e是G的边割。
  (b) e 不在G的任一生成树中当且仅当e是G的环。
- **2.2.2** 无环图 G恰只有一棵生成树T，则G = T 。
- **2.2.3** 设 F是 G的极大（maximal）林，证明：
  (a) 对G的每个分支H， $F \cap H$ 是H的生成树；
  (b) $\varepsilon(F) = \nu(G) - \omega(G)$。

- **2.2.4** 证明： 任一图G至少包含 $\varepsilon - \nu + \omega$ 个不同的圈。
- **2.2.5** (a) 若G的每个顶点均为**偶点**（即度为偶数的顶点），则G没有割边；
  (b) 若G是k-正则偶图且 $k \geq 2$，则没有割边。
- **2.2.6** 当 G连通且 $S \neq \varnothing$ 时，
  边割$B = [S, \overline{S}]$为键 $\Leftrightarrow$ $G[S], G[\overline{S}]$都连通。
- **2.2.7** 图 G的每一边割是G的一些键（即，割集）的边不重并。

- **2.2.8** 在 图 G中，设B_1和B_2为键，C_1和C_2为圈（看作边子集）。证明：
  (a) $B_1 \oplus B_2$ 是G的键的边不重并集；
  (b) $C_1 \oplus C_2$是G的圈的边不重并集；
  (c) 对 G 的任一边 e，$(B_1 \cup B_2) \setminus \{e\}$都包含键；
  (d) 对G 的任一边 e，$(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$都包含圈。
- **2.2.9** 证明：若图 G包含k棵边不重的生成树，则对于顶点集每一划分$(V_1, V_2, \ldots, V_n)$，两端点在这个划分的不同部分的边的数目至少为 k(n-1)。
- **2.2.10** 设连通图G的边子集E'与G的每一生成树都有公共边，则E'包含G的一个边割。 （提示：证明G-E'不连通）

- **2.2.11**设u是简单连通图G 的割点，则u 是 G^c 的非割点。（提示：一般有 G不连通 $\Rightarrow$ G^c 连通）
- **2.2.12**设C是连通图G的一圈，a与b是C中两边，则G 中一定存在一键B ，使 $B \cap C = \{a, b\}$ 。
- **2.2.13**设T为连通图G的任一树（不一定为生成树！），e 为T中一边，则G中一定有一键B，使 $B \cap T = \{e\}$ 。
- **2.2.14**证明以下算法求出的子图，一定是连通图G=(V,E)的一个生成树：
  ①任取 $v_1 \in V$，令$T_1 = v_1$ ；
  ②若T_k已取定，$V(T_k)=\{v_1, \ldots, v_k\}$，选$v_{k+1} \in V \setminus V(T_k)$使$v_{k+1}$与$T_k$中（至少）某一点$v_j$相邻，令$T_{k+1}=T_k+v_{k+1}v_j$ ；
  ③若$k+1<\nu$ ，回到② ；否则停止。

2.3 割点

称顶点v为G的***割点***(cut vertex) $\Leftrightarrow$ E可划分为二非空子集E_1及E_2，使$G[E_1]$与$G[E_2]$只有一公共顶点v。
显然，当G无环时，v为割点 $\Leftrightarrow$ $\omega(G-v) > \omega(G)$ 。
$\Leftrightarrow$ 存在二顶点x及y，使G中任一(x, y)-路一定包含v。

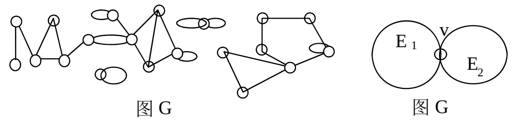


图 G　　　　图 G

例。边割）$[\{v\}, \overline{\{v\}}]$为G的键 $\Leftrightarrow$ v是G的的非割点。

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

定理2.7 在树G中， v为割点 ⇔ d(v) > 1 。

证明：

(i) 若d(v) = 0，则G ≅ K1，v不是割点。

(ii) 若 d(v) = 1，则G -v 仍然是树。

因此ω(G- v)= 1 = ω(G)，从而 v不是割点。

(iii)若 d(v) > 1，则G中存在与v相邻接的二不同顶点u, w 。由定理2.1知，uvw是G中的唯一(u, w)-路，因此G-v中不含(u, w)-路，（即G-v中u与w不连通）

∴ ω(G-v) > 1 ，即v为G的割点。

目录 上一页 下一页

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

推论2.7 非平凡、无环、连通图中，至少有二顶点不是割点。

证明：令T为G的一生成树，由推论2.2及定理2.7知，T中至少存在二顶点 u与v不是T的割点，则它们也不是G的割点：这是因为对于u (及v)有

1 = ω(T-u) ≥ ω(G-u) ≥ 1 ，

∴ ω(G-u) = 1 =ω(G) 。

目录 上一页 下一页

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

习题

- **2.3.1** 设G为 v ≥ 3的连通图，证明：

  (a) 若G有割边，则G有顶点v使 ω(G-v) > ω(G)；（即，割边上必有一 端点为割点）

  (b) (a)的逆命题不成立。

- **2.3.2** 证明：恰有二顶点为非割点的简单连通图必是一条路。
- **2.3.3** 在简单连通图G中证明：

  v为G的割点 ⇔ G的任一生成树不以v为叶。

目录 上一页 下一页

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

2.4 连线问题

目录 上一页 下一页

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

- **问题** 设城市v_i与v_j间建立直接通信线路的费用为c_{ij}（≥0）。

则要建设连接$\{v_1,v_2,......,v_n\}$的通讯网使造价最省

⇔在赋权图G中求一最小权连通生成子图;

⇔在赋权图G中求一最小权生成树(**最优树**)。

- 下面的**Kruskal**算法是在非赋权图中求生成树的“极大无圈子图”算法的改进，它是一种*贪心算法*（greedy algorithm）：

目录 上一页 下一页

北京邮电大学 BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS

Kruskal's algorithm

(1) 选棱（link）e_1使$w(e_1)$最小；

(2) 若已选定 $e_1, e_2, ..., e_i$ ，则从 $E\backslash\{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 中选取 e_{i+1} 使

(i)$G[\{e_1, e_2, ..., e_i\} \cup \{e_{i+1}\}]$无圈；

(ii)$w(e_{i+1})$是满足(i)之最小者。

(3) 若(2)不能再进行下去时，停止。否则，回到 (2)。

目录 上一页 下一页

定理2.10 Kruskal算法求出的生成树 $T^* = G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}\}]$ 是最优树。

证明：反证，假设T^* 不是G的最优树。取G的一最优树T。令e_k为$\{e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}\}$中（按顺序）第一个不属于T的边，且令T为最优树中使k为最大者。则$T+e_k$中唯一的圈C包含e_k，且C中必含一条边$e'_k \notin T^*$ (不然，$C \subseteq T^*$，矛盾。）但

$$T' = T + e_k - e'_k$$

也是G的生成树（？：因e'_k不是$T + e_k$的割边（定理2.3），从而T' 连通，且其边数$=\nu -1$）。又，由于T的子图

$G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\} \cup \{e'_k\}]$ 也不含圈，由**Kruskal**算法知

$$w(e_k) \le w(e'_k)$$

$$\therefore \quad w(T') \le w(T),$$

即T'也是G的最优树，且$\{e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}\}$中第一个不属于T'的边的下标 > k。这与k的取法相矛盾。

❖ 实现

先按权的不减顺序将边集重排成$a_1, a_2, \ldots, a_\varepsilon$。

关于算法中无圈性的判定，我们有一简单的办法：当$S=\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$已取定时，对候选边$a_j$ 有

$G[S \cup \{a_j\}]$ 无圈 $\Leftrightarrow$ a_j的两端点在林G[S]（此处当作生成子图）的不同分支中。

从而我们有求最优树的**标记法**：

开始：取a_1为候选边；并将v_k 标以 k，$k = 1,2,\ldots,\nu$ 。

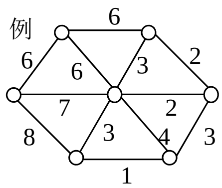
若$S=\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$已取定，当候选边$a_j$ 的两端点有相同标号时，丢掉a_j永不再考虑，并改取a_{j+1}为 新候选边；否则选定$e_{i+1}=a_j$，并将G[S]中a_j两端点所在的二分支的顶点重新标号，标以两者中的最小者。

算法复杂性

边排序	$O(\varepsilon \cdot \log_2 \varepsilon)$
比较边两端的标号	ε
重新标号	$O((\nu -1)\nu)$

故为好算法（$\le O(\nu^3)$）。

例



附录

❖ （A） **-----Prim's algorithm** （也是一种用贪心算法求最优树的一个著名算法）

```
T ← ∅ , V' ← {u}
for all v∈ V̄' do  L(v) ← w(uv)     //initializing L(.);    V̄'=V\V'
while  V̄'≠V do
        begin
            find vertex w   s.t.   L(w)=min{ L(v) |  v ∈  V̄' }
            and denote the associated edge from V' to w by e
            T ← T ∪ {e},  V' ← V' ∪ {w}
                for all v∈  V̄' do //updating L(v)from new vertex w
                L(v) ← if  w(vw) < L(v)  then  w(vv)
        end
```

Prim 算法的复杂性为 $O(\nu^2)$

❖ （B）**Steiner tree prob.**：　　（NP-hard prob.）

在已给赋权连通图G中，任给定 $V' \subset V$，求一最小权树 T 使 $V(T) \supseteq V'$。

习题

❖ **2.4.1** 用Kruskal算法解带约束的连线问题：用最小费用建立一连接若干城市的网络。

但某些特定的 城市对 间要求有直通线路相连。

❖ **2.4.2** 连通图 G 的**树图**是这样的一个图：其顶点集是G的全体生成树$\{T_1, T_2, \ldots, T_\tau\}$，

且T_i和T_j相连 $\Leftrightarrow$ 它们恰有 ν-2条公共边。

证明：任何连通图的树图是连通的。

❖ **2.4.3*** 任二最优树中，具有相同权的边数相等。

❖ **2.4.4** 若赋权图中各边权互不相等，则其最优树是唯一的。

2.5 生成树的计数及Caley公式