



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра Информационной безопасности

Эспиноса Василита Фавио Себастиан

Отчет по четвертому заданию в рамках курса

## **Вариант 7**

Группа: 608

Москва, 2022

## Математическая постановка задачи

В прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : A_1 \leq x \leq A_2, B_1 \leq y \leq B_2\}$ , граница  $\Gamma$  которого состоит из отрезков

$$\begin{aligned}\gamma_R &= \{(A_2, y), B_1 \leq y \leq B_2\}, & \gamma_L &= \{(A_1, y), B_1 \leq y \leq B_2\}, \\ \gamma_T &= \{(x, B_2), A_1 \leq x \leq A_2\}, & \gamma_B &= \{(x, B_1), A_1 \leq x \leq A_2\},\end{aligned}$$

рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона с потенциалом

$$-\Delta u + q(x, y)u = F(x, y), \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условиями. На каждом отрезке границы прямоугольника  $\Pi$  задается условие одним из трех способов:

1. условия первого типа (условия Дирихле):

$$u(x, y) = \varphi(x, y); \quad (2)$$

2. условия второго типа (условия Неймана):

$$\left( k \frac{\partial u}{\partial n} \right) (x, y) = \psi(x, y), \quad (3)$$

3. условия третьего типа:

$$\left( k \frac{\partial u}{\partial n} \right) (x, y) + \alpha u(x, y) = \psi(x, y), \quad (4)$$

где  $n$  – единичная внешняя нормаль к границе прямоугольника. Заметим, что краевое условие второго типа (условие Неймана) содержится в краевом условии третьего типа (случай  $\alpha = 0$ ).

Функции  $F(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$ , коэффициент  $k(x, y)$ , потенциал  $q(x, y)$  и параметр  $\alpha \geq 0$  считаются известными, функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям, определенным вариантом задания, требуется найти.

**Замечание.** Нормаль  $n$  не определена в угловых точках прямоугольника. Краевое условие второго и третьего типа следует рассматривать лишь в тех точках границы, где нормаль существует.

В варианте 7:

$$k(x, y) = 4 + x, \quad q(x, y) = (x + y)^2$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}(k \frac{\partial u}{\partial x})(x, y) &= \psi R(y), (x, y) \in \gamma_R, \\ -(k \frac{\partial u}{\partial x})(x, y) &= \psi L(y), (x, y) \in \gamma_L, \\ (k \frac{\partial u}{\partial y})(x, y) &= \psi T(x), (x, y) \in \gamma_T, \\ u(x, y) &= \varphi(x), (x, y) \in \gamma_B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \exp(1-(x+y)^2) \\
A1 &= -1, A2 = 1, B1 = -2, B2 = 2 \\
F(x,y) &= [(x+y+1)^2 - 1 + 4(4+x)(1-2(x+y)^2)] \cdot \exp(1-(x+y)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi R(y) &= -2(4+A2) \cdot u(A2,y), \\
\psi L(y) &= 2(4+A1)(A1+y)u(A1,y), \\
\psi T(x) &= -2(4+x)(x+B2) \cdot \exp(x, B2)
\end{aligned}$$

## Численный метод решения задачи

Краевые задачи для уравнения Пуассона с потенциалом (1) предлагается численно решать методом конечных разностей. В расчетной области  $\Pi$  определяется равномерная прямоугольная сетка  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = B_1 + jh_2, j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь  $h_1 = (A_2 - A_1)/M$ ,  $h_2 = (B_2 - B_1)/N$ . Через  $\omega_h$  обозначим множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ , т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе  $\Gamma$ .

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_h$ . Обозначим через  $w_{ij}$  значение сеточной функции  $w \in H$  в узле сетки  $(x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h$ . Будем считать, что в пространстве  $H$  задано скалярное произведение и евклидова норма

$$[u, v] = \sum_{i=0}^M h_1 \sum_{j=0}^N h_2 \rho_{ij} u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{[u, u]}. \quad (5)$$

Весовая функция  $\rho_{ij} = \rho^{(1)}(x_i) \rho^{(2)}(y_j)$ , где

$$\rho^{(1)}(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq M-1 \\ 1/2, & i = 0, i = M \end{cases} \quad \rho^{(2)}(y_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq N-1 \\ 1/2, & j = 0, j = N \end{cases}$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw = B, \quad (6)$$

где  $A : H \rightarrow H$  – оператор, действующий в пространстве сеточных функций,  $B \in H$  – известная правая часть. Задача (6) называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приблизительно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Уравнение (1) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\Delta_h w_{ij} + q_{ij} w_{ij} = F_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

в котором  $F_{ij} = F(x_i, y_j)$ ,  $q_{ij} = q(x_i, y_j)$ , разностный оператор Лапласа

$$\begin{aligned}
\Delta_h w_{ij} &= \frac{1}{h_1} \left( k(x_i + 0.5h_1, y_j) \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - k(x_i - 0.5h_1, y_j) \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1} \right) + \\
&+ \frac{1}{h_2} \left( k(x_i, y_j + 0.5h_2) \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - k(x_i, y_j - 0.5h_2) \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2} \right).
\end{aligned}$$

Введем обозначения правой и левой разностных производных по переменным  $x, y$  соответственно:

$$\begin{aligned}
w_{x,ij} &= \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1}, & w_{\bar{x},ij} &= w_{x,i-1j} = \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}, \\
w_{y,ij} &= \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2}, & w_{\bar{y},ij} &= w_{y,ij-1} = \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2},
\end{aligned}$$

а также определим сеточные коэффициенты

$$a_{ij} = k(x_i - 0.5h_1, y_j), \quad b_{ij} = k(x_i, y_j - 0.5h_2).$$

С учетом принятых обозначений разностный оператор Лапласа можно представить в более компактном и удобном виде

$$\Delta_h w_{ij} = (aw_{\bar{x}})_{x,ij} + (bw_{\bar{y}})_{y,ij}.$$

Краевые условия первого типа аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = \varphi(x_i, y_j). \quad (8)$$

Переменные  $w_{ij}$ , заданные равенством (8), исключаются из разностной схемы, а соответствующие узлы  $P_{ij}(x_i, y_j)$  – из расчетной сетки  $\bar{\omega}_h$ . В скалярном произведении (5) слагаемые, отвечающие данным граничным узлам, считаются равными нулю.

Аппроксимация граничных условий третьего типа на правой и левой сторонах прямоугольника имеет вид:

$$\begin{aligned} (2/h_1)(aw_{\bar{x}})_{Mj} + (q_{Mj} + 2\alpha_R/h_1)w_{Mj} - (bw_{\bar{y}})_{y,Mj} &= F_{Mj} + (2/h_1)\psi_{Mj}, \\ -(2/h_1)(aw_{\bar{x}})_{1j} + (q_{0j} + 2\alpha_L/h_1)w_{0j} - (bw_{\bar{y}})_{y,0j} &= F_{0j} + (2/h_1)\psi_{0j}, \quad j = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

На верхней и нижней сторонах соответственно имеем:

$$\begin{aligned} (2/h_2)(bw_{\bar{y}})_{iN} + (q_{iN} + 2\alpha_T/h_2)w_{iN} - (aw_{\bar{x}})_{x,iN} &= F_{iN} + (2/h_2)\psi_{iN}, \\ -(2/h_2)(bw_{\bar{y}})_{i1} + (q_{i0} + 2\alpha_B/h_2)w_{i0} - (aw_{\bar{x}})_{x,i0} &= F_{i0} + (2/h_2)\psi_{i0}, \quad i = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Сеточных уравнений (7)-(10) недостаточно, чтобы определить разностную схему для задачи с граничными условиями (3),(4). Требуются сеточные уравнения для угловых точек прямоугольника  $\Pi$ . Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} -(2/h_1)(aw_{\bar{x}})_{10} - (2/h_2)(bw_{\bar{y}})_{01} + (q_{00} + 2\alpha_L/h_1 + 2\alpha_B/h_2)w_{00} &= \\ = F_{00} + (2/h_1 + 2/h_2)\psi_{00} \end{aligned} \quad (11)$$

– в вершине  $P(A_1, B_1)$  прямоугольника,

$$\begin{aligned} (2/h_1)(aw_{\bar{x}})_{M0} - (2/h_2)(bw_{\bar{y}})_{M1} + (q_{M0} + 2\alpha_R/h_1 + 2\alpha_B/h_2)w_{M0} &= \\ = F_{M0} + (2/h_1 + 2/h_2)\psi_{M0} \end{aligned} \quad (12)$$

– в вершине  $P(A_2, B_1)$  прямоугольника,

$$\begin{aligned} (2/h_1)(aw_{\bar{x}})_{MN} + (2/h_2)(bw_{\bar{y}})_{MN} + (q_{MN} + 2\alpha_R/h_1 + 2\alpha_T/h_2)w_{MN} &= \\ = F_{MN} + (2/h_1 + 2/h_2)\psi_{MN} \end{aligned} \quad (13)$$

– в вершине  $P(A_2, B_2)$  прямоугольника,

$$\begin{aligned} -(2/h_1)(aw_{\bar{x}})_{1N} + (2/h_2)(bw_{\bar{y}})_{0N} + (q_{0N} + 2\alpha_L/h_1 + 2\alpha_T/h_2)w_{0N} &= \\ = F_{0N} + (2/h_1 + 2/h_2)\psi_{0N} \end{aligned} \quad (14)$$

– в вершине  $P(A_1, B_2)$  прямоугольника.

Приближенное решение системы уравнений (6) для сформулированных выше краевых задач может быть получено итерационным методом наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций  $w^{(k)} \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходящуюся по норме пространства  $H$  к решению разностной схемы, т.е.

$$\|w - w^{(k)}\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Начальное приближение  $w^{(0)}$  можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Метод является одношаговым. Итерация  $w^{(k+1)}$  вычисляется по итерации  $w^{(k)}$  согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}, \quad (15)$$

где невязка  $r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$ , итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{[Ar^{(k)}, r^{(k)}]}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}.$$

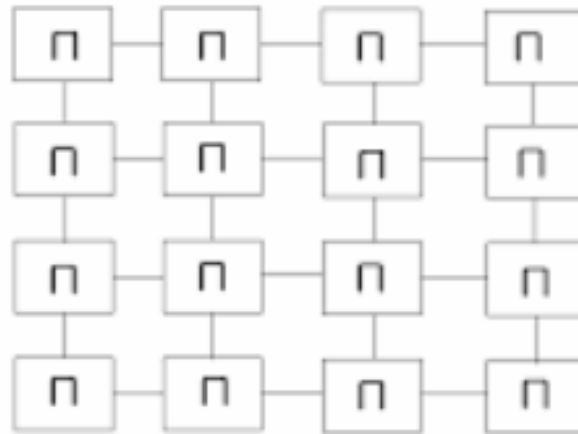
В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – положительное число, определяющее точность итерационного метода. Оценку точности приближенного решения сеточных уравнений (6) можно проводить в других нормах пространства сеточных функций, например, в максимум норме

$$\|w\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |w(x)|. \quad (16)$$

## Топология



В этом случае используем декартова топология где MPI процессы передаются границы. Обмен данными между соседними областями состоит из четырех основных частей. Матрица разбивается на N блоков. Представим число N как произведение двух чисел - число блоков по горизонтали "число процессоров\_j" и число блоков по вертикали "число процессоров\_i". Каждый процессор вычисляет свой блок. Значения граничных точек копируются в отдельные для каждой стороны стороны буферы, для передачи частям матрицы, которые обрабатываются на других процессорах.

Асинхронное отправление и прием реализуется с помощью функций MPI\_Isend и MPI\_Irecv. В качестве аргументов в функции передаем указанные буферы, где содержатся граничные точки. С помощью функции MPI\_Waitall ожидаем завершение операции приема - передачи. Полученные значения из буферов копируются в элементы сетки;

#### Применение CUDA:

С помощью CUDA на каждой итерации пока ошибка не стала  $\leq \epsilon$  вычисляется матрица  $A_w$  где до этого передаются границы как можно увидеть на графике. Разделение на блоки производилось аналогичным образом как в случае реализации с CUDA, так и с CUDA. В реализации с CUDA каждый MPI процесс с cudaMemcpy копирует данные из хоста (w, границы блока и т.д.) в device. С использованием функции cuda\_A вычисляется  $A_w$ , и этот результат копируется из device в хост. Размер блоков для CUDA был установлен максимум 16x16, а количество блоков – в зависимости от размера сетки.

## Результатов

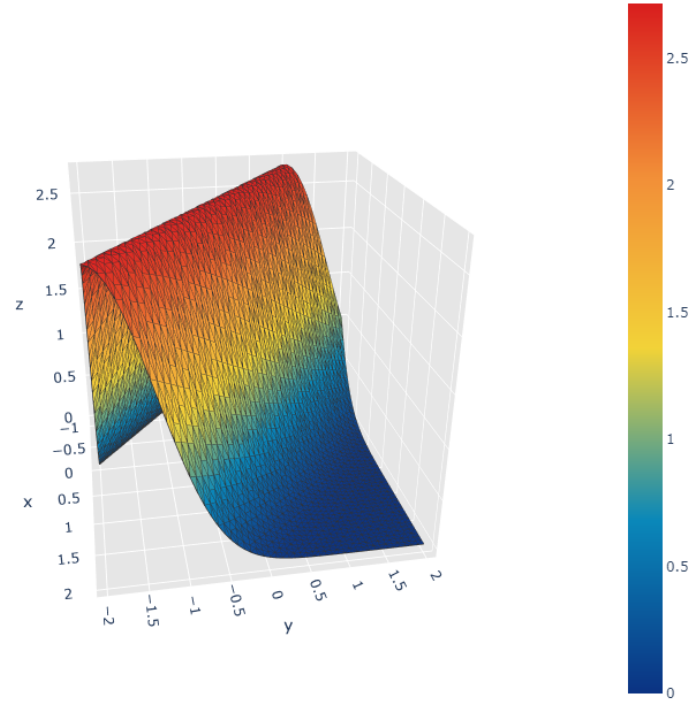
**500x500**

МРІ Процессов	Сетка	Время	Ускорения
2	<b>MPI</b>	344.266	
4		85.641	4.01
8		27.73	12.41
2	<b>MPI+CUDA</b>	31.75	10.84
4		14.1877	6.03
8		5.58	4.96

**500x1000**

МРІ Процессов	Сетка	Время	Ускорения
2	МРІ	675.95	
4		135.52	4.98
8		58.64	11.52
2	МРІ+СUDA	45.91	14.72
4		23.0205	5.88
8		10.58	5.48

Real u



Aproximation

