得分	阅卷人

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分，周 2 学时班级做 1—5 题，其余课时班级做 1—4 及第 6 题）

1. 设 A 为 3 阶方阵，A 的第三行元素依次为 1，2，-1，所对应的余子式依次为 2，-1，1，则 $|3A^{-1}+A^*|=$ ________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&1&1\\2&1&a\\1&1&a\end{pmatrix}$, 且 $r(AB)=2$, 则 $a=$ ______.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且有等式 $AX+E=A^2+X$，则 $X=$ ________.

4. 设向量组 I：α_1,α_2；II：α_1,α_2,β；III：α_1,α_2,γ；其中，r(I)=r(II)=2，r(III)=3，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\gamma+\beta$ 线性 _____ 关.

5. 若齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\1&a&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$ 有非零解，则 $a=$ ______.

6. 若 0 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a=$ ________.

得分	阅卷人

二、计算题（每小题 10 分，共 60 分，周 2 学时班级做 1—6 题，其余课时班级做 1—5，7 题）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&0\\1&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, 求 $r(BA^*)$.

2. 已知 A,B 为三阶矩阵，$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 且满足 $2BA^{-1}=B-4E$, 求矩阵 A.

3. 设 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A 及 A^9.

4.设向量组$\alpha_1=(1,\ 1,\ 0,\ 2)$, $\alpha_2=(-2,\ 2,\ 1,\ 3)$, $\alpha_3=(0,\ 1,\ -1,\ 2)$, $\alpha_4=(-1,\ 4,\ 0,\ 7)$, $\alpha_5=(-3,\ 6,\ 1,\ 10)$.

(1)求向量组的秩;

(2)求向量组的一个极大线性无关组;

(3)用(2)中选定的极大无关组表示其余向量.

5.设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\b\\0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

（1）问当a,b满足什么条件时β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，并写出$a=1,b=\frac{1}{3}$时$\beta$的表达式;

（2）当a,b满足什么条件时β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

6.在R^4中求一单位向量，使其与下列向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$都正交.

7.设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$经正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$化为$y_2^2+4y_3^2$,求$a,b$的值及正交变换矩阵$Q$.

得分	阅卷人

三.证明题（每题10分，共20分）

1.设A为$m\times n$阶实矩阵，证明$r(A^TA)=r(A)$.

2.若向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$线性表示，证明：表示式唯一的充分必要条件是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$线性无关.

答案

一、每题 4 分共 20 分

1. 72.　2.1.　3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　4. 无关.　5. -2.　6. 2.

二、每题 10 分共 60 分

1. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\therefore r(B)=4$;　———5 分

$r(A)=3=4-1$, $\therefore r(A^*)=1$, $r(BA^*)=1$.　———10 分

2. 由 $2BA^{-1}=B-4E \Rightarrow (B-4E)A=2B$.　———5 分

$$(B-4E \vdots 2B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} -3 & -2 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.　———10 分

3. $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;　———4 分

$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;　———8 分

$A^9=(PBP^{-1})^9=PB^9P^{-1}=PBP^{-1}=A$.　———10 分

4. $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.　———3 分

$\therefore r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)=3,\quad \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 为它的一个极大线性无关组. ———6 分

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$\therefore \alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3.$ ———10 分

5. 设 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\beta$. 其增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & a & \vdots & 2\\ 1 & 2 & b & \vdots & -2\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},$ ———3 分

$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & a & \vdots & 3\\ 0 & 0 & b-1 & .. & -2\end{pmatrix}, a\neq 0, -2a-3b+3=0,$ β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

$a=1, b=\frac{1}{3}$ 时, $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & -5\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3\\ 0 & 0 & 0 & .. & 0\end{pmatrix}, \beta=-5\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3;$ ———8 分

$a=0$ 或 $b=1$ 或 $a\neq 0, -2a-3b+3\neq 0$ 时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. ———10 分

6. 设 $\beta=(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 则 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}\beta=0,\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0;$ ———5 分

$A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \beta=(4,0,-3,1)^T,\quad \beta_0=\frac{1}{\sqrt{26}}(4,0,-3,1)^T.$ ———10 分

7. $A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=B, \begin{cases}a+2=5,\\ |A|=2b-1-b^2=0,\end{cases}\Rightarrow a=3, b=1;$ ———4 分

$A-0E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix};$

$$A-E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};$$

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};$$ ———7 分

则 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad Q^TAQ=B.$ ———10 分

三、每题 10 分共 20 分(证明题答案供参考)

1. 设 $A\xi=0$, 则 $A^TA\xi=0$, 说明 $AX=0$ 的解也是 $A^TAX=0$ 的解, ———4 分

设 $A^TA\eta=0$, 则 $\eta^TA^TA\eta=0\Rightarrow(A\eta)^TA\eta=0\Rightarrow A\eta=0$,

说明 $A^TAX=0$ 也是 $AX=0$ 的解. ———8 分

由两个方程组同解可知 $r(A)=r(A^TA)$. ———10 分

2. "$\Leftarrow$"

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 线性无关，且 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,\beta$ 线性相关，设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_r\alpha_r$, 又 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+...+l_r\alpha_r$, 两式相减得

$0=(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+...+(k_r-l_r)\alpha_r\Rightarrow(k_i-l_i)=0,i=1\sim r$,

即表示式惟一； ———5 分

"$\Rightarrow$"

β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 惟一线性表示，即方程组 $(\alpha_1\ \alpha_2\ ...\alpha_r)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\..\\x_r\end{pmatrix}=\beta$ 只有唯一一组解，

即 $r(\alpha_1\ \alpha_2\ ...\alpha_r)=r$, 所以 $\alpha_1\ \alpha_2\ ...\alpha_r$ 线性无关. ———10 分