Exercise 1: Linear Equations

1 Vector Equations

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{2v}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{cases}6x_1-3x_2=1\\-x_1+4x_2=-7\\5x_1\qquad\;\;=-5\end{cases}$

(2) $x_1\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-7\\6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\2\\15\end{bmatrix}$

3. 即判断 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=b$ 是否有解. 增广矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\-2&5&0&11\\2&5&8&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-5\\0&5&4&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

方程组无解，所以 b 不是 a_1,a_2,a_3 的线性组合.

4. 观察发现，$v_2=3/2v_1$，因此任何 v_1,v_2 的线性组合都是 v_1 或 v_2 的倍数. 所以 $\mathrm{Span}\{v_1,v_2\}$ 是经过 0 和 v_1（或 v_2）的这条线上的点的集合.

2 The Matrix Equation

1. (1) $x_1\begin{bmatrix}8\\5\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$, $\quad\begin{bmatrix}8&-1\\5&4\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$

(2) $\begin{cases}4z_1-4z_2-5z_3-5z_4=4\\-2z_1+5z_2+4z_3+4z_4=13\end{cases}$, $\quad\begin{bmatrix}4&-4&-5&-5\\-2&5&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$

(3) $\begin{cases}5\cdot5+1\cdot(-1)+(-8)\cdot3+4\cdot(-2)=-8\\(-2)\cdot5+(-7)\cdot(-1)+3\cdot3+(-5)\cdot(-2)=16\end{cases}$,

$$5\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-8\\3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\16\end{bmatrix}$$

2. (1) 假. 若最后一列不是主元列则相容；若最后一列是主元列则不相容 (2) 真 (3) 真.

3. 对 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵进行化简

$$\begin{bmatrix}2&4&-1&k\\1&6&1&m\\4&0&-5&n\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&4&-1&k\\0&8&3&2m-k\\4&0&-5&n\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&4&-1&k\\0&8&3&2m-k\\0&0&0&n+2m-3k\end{bmatrix}$$

要使 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解，$n+2m-3k=0$ 即可.

4. 判断 $\boldsymbol{u}$ 是否在由 A 的列所生成的 $\boldsymbol{R}^3$ 的子集当中，即判断 $Ax=u$ 是否有解. 化简增广矩阵 $\begin{bmatrix}3&-5&0\\-2&6&4\\1&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&4\\0&8&12\\0&0&0\end{bmatrix}$，方程组有解，所以在.

3 Solution Sets of Linear Systems

1. C

2. $\begin{bmatrix}1&-3&7&0\\-2&1&-4&0\\1&2&9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-3&7&0\\0&-5&10&0\\0&5&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-3&7&0\\0&-5&10&0\\0&0&12&0\end{bmatrix}$. 方程没有自由变量，所以没有非平凡解.

3. $\begin{bmatrix}1&3&-5&0\\1&4&-8&0\\-3&-7&9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&4&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. $\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4x_3\\3x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-4\\3\\1\end{bmatrix}$

4. （1）$x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ 　　（2）$x=x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

5. 增广矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-3&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-2/5&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-9/5&1\end{bmatrix}$, 自由变量为 x_4.

令 $x_4=0$ 得到特解 $p=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$.

解该方程组的齐次方程组 $Cx=0$（C 为系数矩阵）, 得到 $v=x_4\begin{bmatrix}2/5\\0\\9/5\\1\end{bmatrix}$.

综上，$x = p + v = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}2/5\\0\\9/5\\1\end{bmatrix}$.

4 Linear Independence

1. （1）解 $x_1\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\5\\-8\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix} = 0$，$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & -3 & 0\\0 & 5 & 4 & 0\\2 & -8 & 1 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}2 & -8 & 1 & 0\\0 & 5 & 4 & 0\\0 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$. 没有自由变量，方程只有平凡解，所以该向量组线性无关.

（2）解 $\begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -2\\-3 & 7 & -1 & 2\\0 & 1 & -4 & 3\end{bmatrix}x = 0$，$A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -2 & 0\\-3 & 7 & -1 & 2 & 0\\0 & 1 & -4 & 3 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -2 & 0\\0 & -2 & 8 & -4 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. 有一个自由变量 x_3，方程有非平凡解，所以该矩阵各列线性相关.

2. $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\5 & -9 & h & 0\\-3 & 6 & -9 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\0 & 1 & h-15 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 若要使向量组线性无关，则不能有自由变量. 观察发现，无论 h 取值为多少，总有自由变量 x_3，因此不存在 h 使该向量组线性无关.

3. 设 $A = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$，由题意有 $a_1 + 2a_2 = a_3 \Rightarrow a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$.

所以，一个非平凡解为 $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$.（满足通解 $x_3\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$ 的均可）

4. 证明: (1) **充分性:** 不妨设 $v_i(1 \le i \le p)$ 是其他向量的线性组合，那么其系数 $c_i \neq 0$，可得到 $v_i = -(\frac{c_1}{c_i}v_1 + ... + \frac{c_{i-1}}{c_i}v_{i-1} + \frac{c_{i+1}}{c_i}v_{i+1} + ... + \frac{c_p}{c_i}v_p)$，即存在一组不全为 0 的系数使等式成立，$S$ 线性相关. **必要性:** 因为 $S = \{v_1, ..., v_p\}$ 线性相关，所以 $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_pv_p = 0$ 有非平凡解，即至少存在一个 $c_i \neq 0(1 \le i \le p)$，因此有 $v_i = -(\frac{c_1}{c_i}v_1 + ... + \frac{c_{i-1}}{c_i}v_{i-1} + \frac{c_{i+1}}{c_i}v_{i+1} + ... + \frac{c_p}{c_i}v_p)$.

(2) 若 S 线性相关，则存在不全为 0 的系数使 $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_pv_p = 0$, 设 j 是使 $c_j \neq 0$ 的最大下标. 若 $j = 1$ 则 $c_1v_1 = 0$，这是不可能，因为 $v_1 \neq 0$. 所以 $j > 1$ 而 $c_1v_1 + ... + c_jv_j + 0 = 0$, $v_j = -(\frac{c_1}{c_j}v_1) + ... + \frac{c_{j-1}}{c_j}v_{j-1})$.

5 附加题

1. （1）表示有 x_1 层采取计划 A 设计，三室、二室、一室单元的数目.

（2）$x_1\begin{bmatrix}3\\7\\8\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}5\\3\\9\end{bmatrix}$

（3）解 $x_1\begin{bmatrix}3\\7\\8\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}5\\3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}66\\74\\136\end{bmatrix}$:

$A=\begin{bmatrix}3&4&5&66\\7&4&3&74\\8&8&9&136\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1/2&2\\0&1&13/8&15\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 通解为 $x=\begin{bmatrix}2\\15\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1/2\\-13/8\\1\end{bmatrix}$.

由题意，有 $x_i\geq 0(i=1,2,3)$ 且必须为整数，所以 x_3 为 8 的倍数.

当 $x_3=0$ 时，$x=\begin{bmatrix}2\\15\\0\end{bmatrix}$; 当 $x_3=8$ 时，$x=\begin{bmatrix}6\\2\\8\end{bmatrix}$;

当 $x_3>=16$ 时，$x_2<0$，不可行.

2. （1）解 $Au=u'$ 得 $u=\begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}$ （2）缩放变换矩阵 $B=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $u''=Bu'=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ （3）因为 $u''=BAu$，所以 $u=A^{-1}B^{-1}u''$ （4）平移不是线性变换，如果仍使用 (x,y) 为坐标，那么平移是不可以用矩阵乘法表示的。如果使用齐次坐标，则可以，相关内容可参考博客（点击这里）。

3.（选做）软件环境的安装和配置过程略. 正版 MATLAB 可以在 http://softms.sdu.edu.cn/ 中下载安装；Python 环境可直接安装 Anaconda.

计算（3）AB 需要贴出运行报错的截图.