

Exercise 6: Orthogonality & Quadratic Form

1 Orthogonality

1. 回答下列问题，并说明原因：

(1) 向量 $u = (3, 2, -5, 0)^T$ 和 $v = (-4, 1, -2, 6)^T$ 是否正交？向量方向的单位向量是？

(2) 矩阵 A 的列空间 $C(A)$ 和左零空间 $N(A^T)$ 是否正交？行空间 $C(A^T)$ 和零空间 $N(A)$ 是否正交？

(3) $e_1 = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ 和 $e_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)^T$ 是否是一组标准正交基？

(4) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 是否是正交矩阵？它的逆矩阵是什么？矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 呢？

2. 证明：

(1) 置换矩阵是正交矩阵.

(2) 若方阵 Q 有单位正交列，则 Q 是正交矩阵，且具有单位正交行.

3. 计算投影：

(1) 如图 1 所示，求出向量 b 在向量 a 上的投影 p ，并写出投影矩阵 P 的 ($p = Pb$) .

(2) 如图 2 所示，平面由向量 a_1, a_2 张成 ($A = [a_1 \ a_2]$ ，平面即列空间 $C(A)$) . 求出向量 b 在平面 A 上的投影 p ，并写出投影矩阵 P ($p = Pb$) .

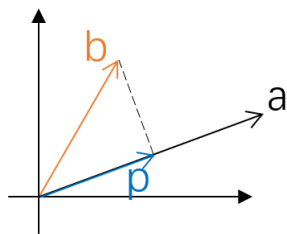


图 1: 向量 b 在向量上的投影

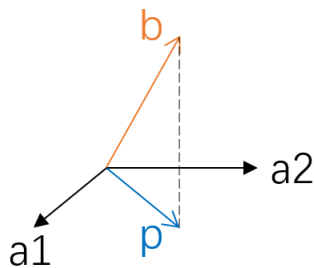


图 2: 向量 b 在平面上的投影

4. 用 Gram-Schmidt 方法将下列线性无关的向量组正交化 (结果用 q_i 表示)：

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

5. QR 分解: 如果 $m \times n$ 矩阵 A 列线性无关, 那么 A 可以分解为 $A = QR$, 其中 Q 是一个 $m \times n$ 的矩阵, 其列形成 $\text{Col}A$ 的一个标准正交基, R 是一个 $n \times n$ 的上三角可逆矩阵且对角线上元素为正数. 在实际计算 QR 分解时, 矩阵 Q 的各列 q_i 通过对 A 的各列 a_i 使用 Gram-Schmidt 方法得到. 同时我们还知道, Gram-Schmidt 方法实际上是在各个方向不断做投影(矢量的合成和分解)并单位化, 进而得到的一组单位正交向量, 矩阵 R 体现了各个方向上的投影长度.

(1) 基于第 4 题的数据, 写出 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

(2) 若 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}$, 矩阵 R 是?

2 Quadratic Form

1. 正交对角化下列实对称矩阵:

$$(1) \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 请 1、将下列二次型用矩阵表示; 2、转化为标准形并写出所用的坐标变换:

$$(1) f = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$(2) f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$$

3. 判断矩阵的正定性, 并写出正、负惯性指数:

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

4. 已知二次型 $f(x) = 2x_1^2 + ax_3^2 + 2x_2x_3$ 经正交变换 $x = Py$ 可化为标准形 $y_1^2 + by_2^2 - y_3^2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$. (写过程)

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为 ():

$$(A) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 假设矩阵 A 是 n 阶正定对称矩阵, 证明:

(1) A 是可逆的

(2) A^{-1} 是对称的

(3) A^{-1} 是正定的

3 附加题

1. **最小二乘法 (Least Squares) / 线性回归 (Linear Regression)** . 方程 $Ax = b$ 并非在任何情况下都有解, 但我们可以通过 $A^T Ax = A^T b$ 求出近似解, 阅读[投影矩阵和最小二乘](#). 现有 3 个点 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, 请问这几个点的最佳拟合直线 $y = C + Dx$ 是?

2. **奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)** . 在信息检索、自然语言处理、数字图像处理等人工智能相关领域, SVD 具有广泛的应用. 与此前学过的 LU 分解、QR 分解、谱分解等一样, SVD 也是一种矩阵的分解, 即 $A = U\Sigma V^T$, 其中 U 和 V 是正交矩阵, Σ 是对角矩阵 (不一定是方阵) .

(1) 基于下列材料了解 SVD 及其应用, 重点了解三个矩阵 U 、 V 、 Σ 分别是如何求出来的:

1. [刘建平-奇异值分解 \(SVD\) 原理与在降维中的应用](#)
2. 视频: [MIT 线性代数公开课-SVD](#)
3. [这次终于彻底理解了奇异值分解 \(SVD\) 原理及应用](#)

(2) 基于上述内容, 对矩阵 A 进行奇异值分解:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$