Exercise 5: Eigenvalues and Eigenvectors

1 Eigenvectors and Eigenvalues

1. 回答下列问题:

(1) $\lambda = 2$ 是 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ 的特征值吗? 为什么?

(2) $\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征向量吗? 为什么?

(3) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求特征值 $\lambda = 1, 2, 3$ 分别对应的特征空间的一个基.

2. 已知: (1) 矩阵特征值的和等于矩阵的迹 (矩阵主对角线元素的和), 即 $\sum_i \lambda_i = tr(A)$. (2) 矩阵特征值的乘积等于矩阵的行列式, 即 $\prod_i \lambda_i = detA$. (3) 三角矩阵主对角线的元素是其特征值. 利用上述定理, 回答下列问题:

(1) 已知矩阵 $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ 的一个特征值是 1, 写出另一个特征值.

(2) 不用计算, 求 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的一个特征值和两个线性无关的特征向量.

(3) 求 $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值.

2 The Characteristic Equation

1. 求下列矩阵的特征多项式, 并解出特征值和对应的特征向量:

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. 某 6×6 的矩阵有特征多项式 $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$, 求特征值及重数.

3. n 阶方阵 A 满足: $A^2 - 4A + 3I = 0$, 求 A 的特征值.

4. 设 λ 是方阵 A 的特征值, 证明: (1) λ^2 是 A^2 的特征值. (2) 若 A 可逆, $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

5. 对于任意方阵 A，证明：

（1）不同特征值对应的特征向量一定线性无关.

（2）同一特征值可能对应多个线性无关的特征向量，但线性无关的特征向量的个数不超过这个特征值的重数（即几何重数小于等于代数重数）.

6. 一个 3×3 的矩阵 B 有特征值 $\lambda = 0, 1, 2$，这些信息足以求出下列中的 3 个. 找到这 3 个，写出判断依据，并求出这 3 个的答案：

（1）B 的秩

（2）B^TB 的行列式

（3）B^TB 的特征值

（4）$(B^2+I)^{-1}$ 的特征值

3 Diagonalization

1. 将下列矩阵 A 对角化为 $A = PDP^{-1}$，并求出 A^k.

（1）$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ （2）$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ （3）$A = \begin{bmatrix} 2b-a & a-b \\ 2b-2a & 2a-b \end{bmatrix}$

2. 判断是否可对角化：

（1）$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ （2）$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

（3）$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$t$ 取何值，矩阵 A 可对角化？

3. 若 A 与 B 相似，则有（　　）.（请写出每个选项的分析步骤）

（A）$\lambda E - A = \lambda E - B$

（B）$|A| = |B|$

（C）对于相同的特征值 λ，矩阵 A, B 具有相同的特征向量

（D）A, B 均与同一个对角矩阵相似

注：设 A, B 为 n 阶矩阵，如果有 n 阶可逆矩阵 P 存在，使得 $P^{-1}AP = B$ 则称矩阵 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$.

4. 已知 $A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，求 $r(A-E)+r(A-3E)$.（注：$r(A)$ 表示 A 的秩）

5. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. 已知 $A \sim B$，

(1) 求 x，y，z.

(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$.

6. 设 A 为 2 阶方阵，非零向量 α 不是 A 的特征向量，满足 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$. 令矩阵 $P = \begin{bmatrix} \alpha & A\alpha \end{bmatrix} \in R^{2\times 2}$. 证明 P 可逆，并求出 $P^{-1}AP$.

4 附加题

1. 马尔科夫链（Markov Chain）. 有 A、B 两个城市，每年 B 城市有 20% 的人移居到 A 城市，A 城市有 40% 的人移居到 B 城市. 设 A、B 两个城市人口数的初始状态 $u_0 = (a,b)^T$.

(1) 写出转移矩阵 M，并求出 1 年后两个城市的人数 $u_1 = Mu_0$.

(2) 利用关系 $u_{k+1} = Mu_k$，对角化 M，并写出 k 年后的人数 u_k（用 u_0 表达）.

(3) 若 $u_0 = (300,300)^T$. 许多年之后，A、B 两个城市的人数会稳定为多少?（即计算 $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$）

2. 差分方程（Difference Equation）. 已知斐波那契数列（Fibonacci sequence）的递推式为 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，且 $F_0 = 0$，$F_1 = 1$. 构造 $u_{k+1} = Au_k$ 的形式，并利用相似对角化，求出它的通项公式.（提示：$u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}$）

3. 计算 e 的矩阵次方 e^{At}. 假设矩阵 A 可相似对角化为 $S\Lambda S^{-1}$，利用泰勒展开 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$，计算出 e^{At} 的表达式（用字母和求和符号表达即可）. 若 $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$，求 e^{At}.（注：e^{At} 与微分方程（Differential Equation）有关，具体可参考视频：e 的矩阵指数——怎么算？为什么？）

4. 拓展阅读：约当型（Jordan Form）. 我们知道，矩阵要与一个对角矩阵相似（$P^{-1}AP = D$）的充要条件是必须有 n 个线性无关的特征向量，这个条件比较严苛，并非所有矩阵都能满足. 但是，任何矩阵都与约当型矩阵相似（$P^{-1}AP = J$），同时这个约当型矩阵 J 在计算上也非常方便，对角矩阵 D 只是约当型矩阵 J 的特例. 作为拓展，请自行查阅关于约当型的相关内容.

5. 拓展阅读：矩阵相似有什么意义？ 矩阵 A 与 B 相似（$P^{-1}AP = B$），即表示 A 与 B 是同一个线性映射在不同基下的代数表达. 当中涉及线性空间和线性变换的要素较多，请直接观看视频：线性代数的本质 - 09 - 基变换）