山东大学 2018-2019 学年第二学期

《 线性代数 B》试题（B 卷）

一．填空题（每空 2 分, 共 16 分）

1）设 A 为 3×3 矩阵， B 为 4×4 矩阵，且 $|A|=1,|B|=-2$，则 $\left||B|A\right|=$_____.

2）设 A 为 3 阶方阵且 $|A|=2$, 则 $\left|2A^{-1}\right|=$____. $\left|A^*\right|=$____.

3）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$_____.

4）设 $\eta_1,\eta_2,\ \ ,\eta_s$ 是方程 $AX=b$ 的解，若 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ \ +k_s\eta_s$ 也是 $AX=b$ 的解，则 $k_1+k_2+\ \ +k_s=$_____.

5）三阶矩阵 A 的三个特征值为 1, 2, 3，则 $|A|=$____，A^{-1} 的特征值为____.

6）二次型 $f(x,y,z)=5x^2+6y^2+4z^2$ 是正定还是负定:___.

二. 单项选择题（每小题 2 分, 共 16 分）.

1）设 A,B 是 $n\ (n\geq 2)$ 阶方阵，则必有（ ）.

（a） $|A+B|=|A|+|B|$；　　（b） $\left||A|B\right|=\left||B|A\right|$；

（c） $|AB|=|BA|$；　　（d） $|A-B|=|B-A|$.

2）设 A 是 n 阶方阵，则 $|A|=0$ 的必要条件是（ ）.

（a）两行(列)元素对应成比例;
（b）必有一行为其余行的线性组合;
（c） A 中有一行元素全为零;
（d）任一行为其余行的线性组合.

3）设 A,B 是 n 阶方阵， $A\neq 0$ 且 $AB=0$，则（ ）.

（a） $|B|=0$ 或 $|A|=0$；　　（b） $B=0$；

（c） $BA=0$；　　（d） $(A+B)^2=A^2+B^2$.

4）设 A 为 n 阶可逆矩阵，则（ ）.

（a）若 $AB=CB$，则 $A=C$；

（b）对矩阵 $(A\ \vdots\ E)$ 施行若干次初等变换，当 A 变为 E 时，相应地 E 变为

A^{-1};

(c) A总可以经过初等变换化为单位矩阵E;

(d) 以上都不对.

5) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一组$n$维向量，则下列正确的是( ).

(a) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$不线性相关，就一定线性无关;

(b) 如果存在s个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关;

(c) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$\alpha_1$可由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示;

(d) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充要条件是$\alpha_1$不能由其余$s-1$个向量线性表示.

6) 矩阵A( )时可能改变其秩.

(a) 转置; (b) 初等变换;

(c) 乘以奇异矩阵; (d) 乘以非奇异矩阵.

7) 设A为可逆矩阵，$k \neq 0$，则下述结论不正确的是( ).

(a) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$; (b) $(A^{-1})^{-1}=A$;

(c) $(kA)^{-1}=kA^{-1}$; (d) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

8) 若方阵A与B相似，则有( ).

(a) $A-\lambda E=B-\lambda E$; (b) $|A|=|B|$;

(c)对于相同的特征值λ，矩阵A与B有相同的特征向量;

(d) A与B均与同一个对角矩阵相似.

三.(8分) 计算$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$.

四.(12分) 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$$

求矩阵X使满足$AXB=C$.

五. (12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把不属最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

六. (15 分). λ 取何值时，非齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda. \end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多个解，并求解.

七. (15 分) 求一个正交变换 $X = PY$，将二次型 $f = 2x_1^2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 2x_3^2$ 化为标准形(要求：写出正交变换和标准形).

八. (6 分) 设 A 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，证明 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值之一是 $\lambda^{-1}|A|$.