

# 数学是什么——

探寻数学思维的本质和精神

主讲：杜乃林

# 第二讲 有限无限纵横谈

—— 数学根植何处？

- 从自然数谈起
- 走近逻辑殿堂
- 附 简介朴素集合论

# 一、从自然数谈起

数学是人类文化中历史最悠久的历史领域之一，是人类文明的一个重要组成部分。从远古屈指计数到借助高速电子计算机进行大型科学计算，从勾股定理的发现到抽象公理化系统的产生，数学经过了五千余年的发展演变历程。即使作为一门独立而理性的学科，她也有两千五百年的历史了。

与其他学科领域相比，数学的发展具有很强的累积性。正是经过这种发展的长期累积过程才铸就出今天这般宏大的思想理论体系。数学常常被人们比喻成一棵茂密的大树，她包含着并且正在生长出越来越多分枝。按照美国《数学评论》（Mathematical Reviews）的分类，当前数学学科包含60多个二级学科，400多个三级学科，更细的分科难以统计。可以说，数学历经五千余年的累积演进，已经发展成为适用面最广泛、应用功能最强大的学科；而且，她还是人们最信得过的学科之一，被称作科学的基础。

面对今日之数学，我们从哪里开始考察和认识它呢？

最佳的出发点是自然数系：

$0, 1, 2, 3, \dots$ 。

其中0、1、2是人的两种基本思维观念的集中反映：

1与0——有与无——存在观念；

1与2——相同与相异——区分观念。

离开这两种基本思维观念，我们的意识就退化到几近不存在的地步。因此，这个我们如此习惯的计数系统，有着十分悠长的形成和演变历程。

上世纪70年代，考古学家在斯威士兰和南非之间的乐邦博(Lebombo)山上发现了几根35000年前的狒狒(f è i)腓(f é i)骨，上面有用于计数的划痕。科学家们认为这是最早的人类计数工具——当人类的祖先需要记录的物件超过3时，当他们掰着手指看出3和4有区别的时候，计数系统就产生了，尽管还没有充分发展的语言。我们所熟识的十进制阿拉伯数字计数法却是大约1500年前才演变成形的。灵动的“阿拉伯数字”其实是印度人对数学的耀眼贡献，大约1200年前，由阿拉伯商人传至阿拉伯国家和欧洲，继而传向世界。传入我国大约在700年前，被国人广泛使用则只有100多年的历史。

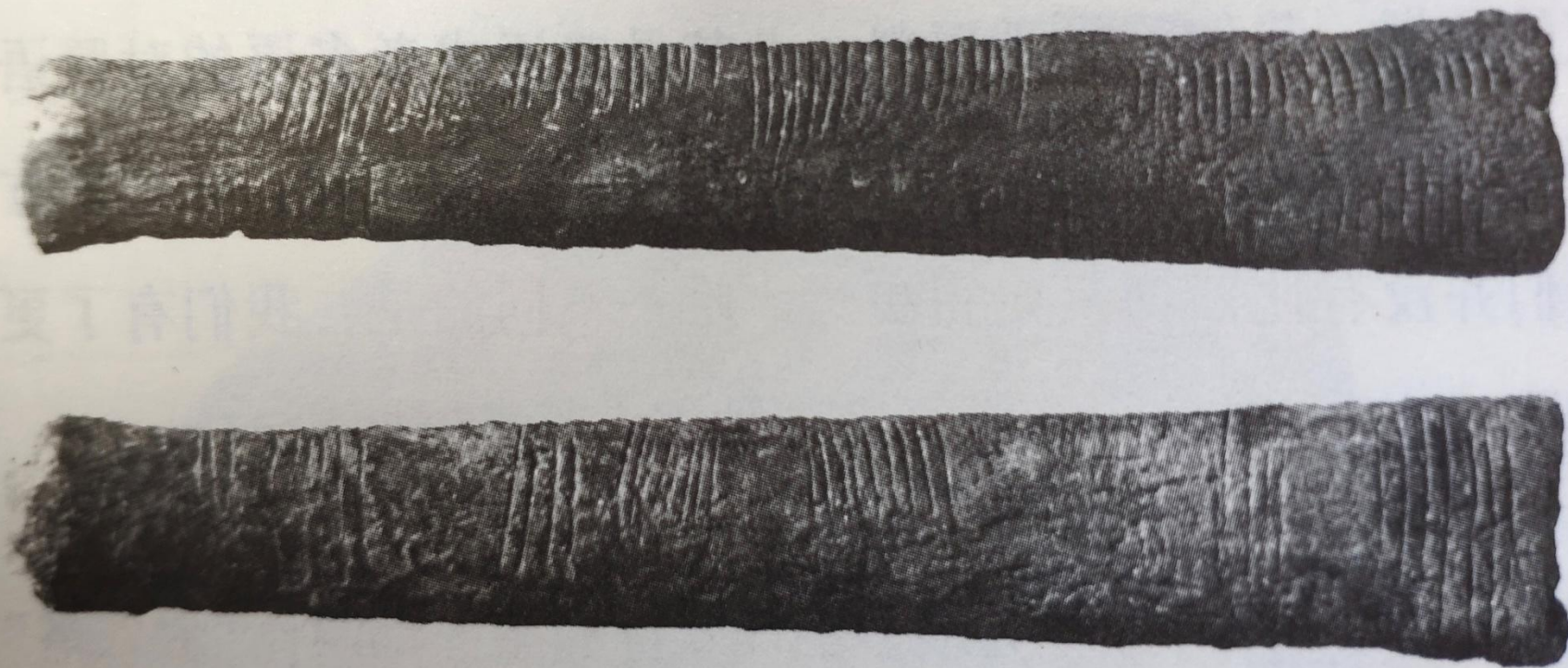


图 1.5 迄今为止发现的人类最早的计数工具——斯威士兰的乐邦博骨

我国最古老的数学记录，包括最早的书写记录，可追溯至商代（公元前1600——公元前1046年）。1899年，考古学家在曾为商朝首都的河南安阳小屯村遗址（称作“殷墟”）挖掘出数以千计的骨头和甲骨。甲骨上面的数字符号记录了在战役中虏获或杀死的敌人人数、猎获的鸟兽数量、献祭的动物数量，以及其他功绩。到了西汉（公元前206——公元9年）初，我国发展出十进制计数汉字（还有算筹）：

一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、100、1000、10000

这种计数方法不需要零就可以巧妙地“命名”大数字，例如，

$26999 = \text{二万六千九百九十九}$ ；       $20009 = \text{二万九}$ 。

这是极好的商业书写数字系统，对于土地测量和天文观测也是好用的概念，可惜最初的提出者现已无从考究。



计数是我们很小时就被教会的一种超级本领——数数，这使我们知道了**什么是自然数**。可这不等于告诉我们**自然数是什么**！这个看似简单的问题却是难以回答的，因为它涉及到下列问题：在自然数列中，

- 0是什么？
- 1是什么？
- 省略号又是什么？

我们能像回答“20190901后面是什么自然数”一样回答清楚上述问题吗？显然不能。

事实上，我们学了十多年数学，做的都属于了解“什么是数学”的事儿(比如解答“20190901后面是什么自然数”)；但是，对于涉及“数学是什么”的问题(比如“0是什么”)我们压根就没当个事，这使我们对数学的了解处在“盲人摸象”的境地——对数学整体始终感到心中没底。

“什么是数学”——处理**数学问题**；

“数学是什么”——涉及**超数学问题**。

对“自然数是什么”的最能适合19世纪后叶数学公理化倾向的处理是整个用一组公理来引进自然数系——将其归结到最小一组未定义的概念和无需证明的命题。皮亚诺在他的《算术原理新方法》中首先完成了这项工作(1889)。由于他的方案已被广泛接受和使用，我们就来介绍它。



皮亚诺(G. Peano ),  
1858——1932, 意大利数学家、逻辑学家

# 皮亚诺的自然数公理系统(教科书版)

➤ 三个基本概念： 0，数(自然数)，后继

➤ 五条公理：

(a) 0是一个数。

(b) 任何数都后继一个数(称作后继数)。

(c) 若两个数不同，则它们的后继也不同。

(d) 0不后继任何数，即，不是任何数的后继数。

(e) 数学归纳法原理。

# 数学归纳原理

如果每个数  $n$  都对应一个命题  $P(n)$ ,  $n$  的后继记作  $n+1$ , 而且

(a) 命题  $P(0)$  真,

(b) 命题  $P(k)$  真蕴含命题  $P(k+1)$  也真,

那么对所有的数  $n$ , 命题  $P(n)$  都真。

数学归纳法原理是我们从有限通向无限的桥梁！

# 关于 0、数、后继

- 皮亚诺所谓的“数”是指所有自然数所构成的类，即指包括0在内的自然数全体；他没有假定我们知道这类中的所有分子，仅假定当我们说这个或那个是一个数时，我们知道我们所指的是什么。
- 这里的“后继”是从数到数的一种对应，这种对应是一对一的，是一部以数造数的机器——给一个合适的起始数，潜在地，就足以造出数的全体。
- 这个合适的起始数只有一个，称作“0”。

# 看明白这一点很重要

- “0”、“数”、“后继”是不加以定义的原始概念，只有形式，没有内容，它们的性质全由皮亚诺的五条公理所界定和描述。这三者可允无数多种解释，例如，如果“0”代表实数1，“数”代表实数列1, 0.5, 0.25, ... 而一个数的“后继”规定为取这个数的一半，那么这样的解释完全可以与皮亚诺的五条公理相容不悖。
- 这表明：“0”、“数”和“后继”在皮亚诺公理下似乎没有“唯一性”，这使人对自然数产生了信赖危机。

## 二、走近逻辑殿堂

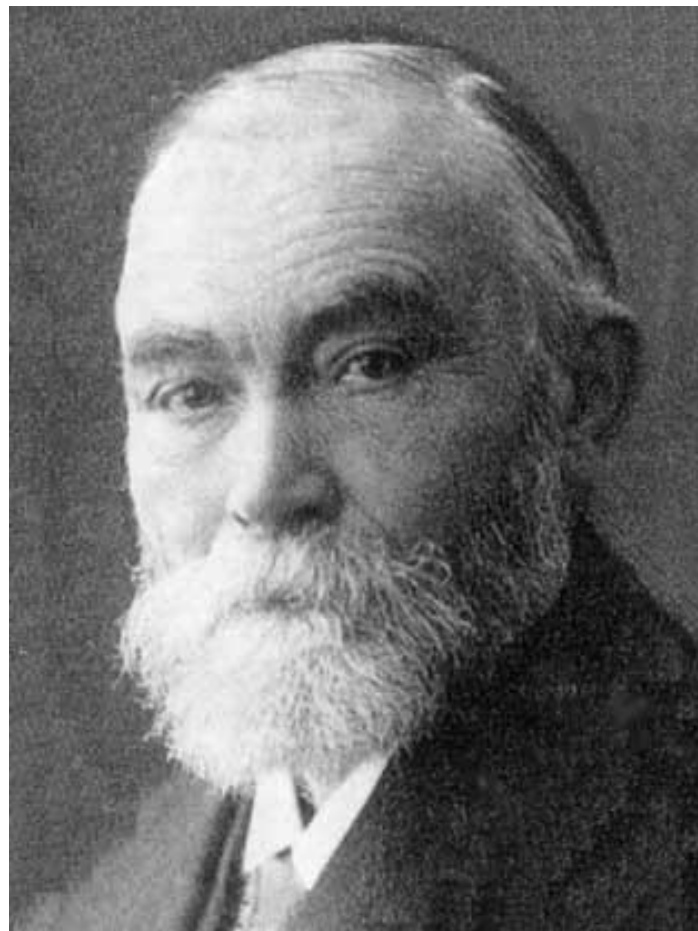
一个数（自然数）到底是什么？

“一这个数是什么，或者，1这个符号意味什么，对这个问题，人们通常得到的答案是：一个事物。此外，如果人们注意到，‘一这个数是一个事物’这个句子不是定义，因为它一边是定冠词，另一边是不定冠词，如果人们还注意到，这个句子只是说1这个数属于事物，而没有说是哪个事物，那也许人们就不得不自己选择人们愿意称之为1的任何一个事物。但是，如果每个人都可以有权任意理解这个名词，那么关于1的同一个句子对于不同的人就会意谓不同的东西；这样的句子就不会有共同的内容。”——弗雷格



# 弗雷格 (G. Frege, 1848-1925)

德国人，逻辑学家、数学家、哲学家。他开创的量词逻辑和对算术的逻辑分析对后人颇有影响。



- 或许有人提出，我们不用回答这个问题，因为我们不能定义“0”、“数”与“后继”，也不必假定我们知道这些概念的意义，不必令它们与通常的意义相符，我们可以让它们代表任何能适应皮亚诺公理的三个概念——它们将是**变项**，是我们对其作出某种假设而此外别无规定的概念。
- 这种方略并不荒谬，它提供一种推广，对于某种目的，确有价值。

- 但是，这种方略未能为算术奠定一个适当的基础。

第一，它不能使我们知道是否确有适合皮亚诺公理的项的集合，它甚至没有略略提示任何方法以发现是否有这样的项的集合；第二，我们需要我们的数能计数通常的事物，也就是要求我们的数不仅具有某种形式的性质，还应具有确定无疑的含义。

# 试着给数“1”下个定义

- **尝试性定义：**1这个数是所有含一个元素的集合所组成的类——这个类的集合共蕴一个特性（含有一个元素），且这一特性仅为这个类中的每个集合所具有。
- **评论：**这个“1的定义”使我们在逻辑上处于一种为难境界——正好可用于定义一个特定数目的此数之特性恰恰不能用于定义这个数！
- **启发：**单独地、孤立地去定义一个特定数目是行不通的，这在逻辑上会把事儿逼到“自己定义自己”的境地，因为我们的眼界没有超出此数的本类，即这个数所想表征的对象的范围。

# 定义“数”该从何处着手？

- 我们必须了解，每个数都有自己的特有属性；特有属性之所以“特有”，就在于它具有将该数本类的集合与另类的集合区分开的作用——本类的任何两个集合都“具有相等的元素个数”，而本类的和另类的集合之间则永不“具有相等的元素个数”。
- 判断两个集合是否“具有相等的元素个数”比定义它们的“元素个数”是什么在逻辑上要简单得多。

# “具有相等的元素个数”

- 我们称集合甲与集合乙是“相似”的，如果集合甲与集合乙是“具有相等的元素个数”的。
- “相似”是在集合之间建立起来的一种关系，它具有如下性质：
  - (1) 每个集合都自己与自己“相似”；
  - (2) 若甲与乙“相似”，则乙与甲“相似”；
  - (3) 若甲与乙“相似”，乙与丙“相似”，则甲与丙“相似”。

正是基于这些性质，“相似”关系可用于将全体集合划分成一个个两两互不相交的集合类——若甲与乙“相似”，则甲与乙归于同一个集合类。这种集合类称作“相似类”。

# 数的定义(弗雷格-罗素说法)——归约到逻辑

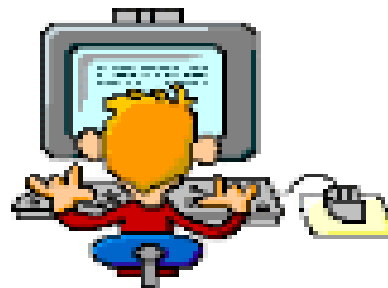
- 一个集合的数是所有与此集合相似的集合所构成的类，即此集合所在的“相似类”。

注：两个集合相似意指这两个集合间存在着双射。

- 所谓一个数目就是某一个集合的数。

注：对于给定的集合，把它所在的相似类视作一个数目，这是有日常知识背景的见解，确立了每个数目的“确定性”。

# 评说“数”之弗雷格-罗素定义



1. 注意如下定义的程式：

所有集合  $\longrightarrow$  所有相似类  $\longrightarrow$  一个相似类



数(所有数目)  $\longleftarrow$  一个集合的数(数目)

因此，数的定义归结到“集合”、“相似”  
和“分类”这三项——逻辑主义者认为  
这三项隶属于逻辑范畴。



2. 注意，没有集合就没有这里所谓的“数”，这里的“数”本质上就是对所有集合给出了一种分类。一个给定的“数”现在之所以是确定的——不允许有多种解释——正在于它的凭借集合构成的类（即相似类）是非空的和唯一的。
3. 在给数下定义时，无论是前面的皮亚诺定义，还是现在的弗雷格-罗素定义，有三个特别的数“0”、“1”和“2”似乎必须先验的出现在定义中。事实上，这三个数是人的两种基本思维观念的集中反映：

“1与0”意味着“有与没有”——存在观念，

“1与2”意味着“相同与相异”——区分观念。

离开这两种基本的思维观念，我们的意识就退化到几近不存在的境界。因此，在给数下定义的表述中，先验地出现这三个数的影子我们只好容忍。

#### 4. 对数的理解离不开对集合和类的理解。

- 集合和类，按我们的朴素观念去理解，都是由确定对象所组成的群体。不过，组成集合的对象我们将视作“不必再分的”，故而称作“元素”；而组成类的对象则可以有元素，有集合，甚至还有类。这种朴素的理解，事实上，将“集合”和“类”视作了同义词。
- 定义一个具体的集合或类通常采用的定义方式有两种——“外延”定义法和“内涵”定义法：

“外延”定义法——枚举集合的所有元素以确定集合

“内涵”定义法——提出集合的元素应满足的一种特有属性以确定集合

- 并非所有集合都可用“外延”定义法去定义。全体集合可分为两大类——“可枚举集合类”和“不可枚举集合类”。这反映到数的概念上来就会将数分为有限数与无限数两类。

## 5. 自然的问题：

- 全体集合可分为两大类，即“可枚举集合类”和“不可枚举集合类”，同时又可分为一个个两两互不相交的“相似类”。试问：这两种分类法相容吗？——答案是肯定的。
- “不可枚举集合类”会不会是空类或只是一个“相似类”呢？——首先完满回答这个问题的人是德国数学家康托。
- “可枚举集合类”中的所有“相似类”能是我们习以为常的自然数系吗？也就是问，在由“可枚举集合类”中的“相似类”组成的类上，能建立适合皮亚诺公理系统的架构吗？
- 在由“不可枚举集合类”中的“相似类”组成的类上，能建立适合皮亚诺公理系统的架构吗？若不能，那该建立怎样的公理系统架构？
- 集合是什么？相似类是什么？还有，“相似类”作为“数”而成为数学的基本对象能使数学家们对其性能和功效感到满意吗？

# 逻辑主义

数学与逻辑的关系至少可以上溯到数学还是一门经验科学的时代，那时逻辑已经有了最初的思想萌芽，并对数学思维开始发生作用。经过古希腊数学家们，特别是亚里士多德和欧几里德的工作，数学同当时相对比较完善的形式逻辑结合起来，真正变成了一门演绎科学。从此，数学与逻辑总是密不可分地一起发展，数学在整个科学知识体系中成为逻辑性最强的学科。到了19世纪末20世纪初，数学的高度公理化和形式逻辑向数理逻辑的跨越发展，似乎一度取消了数学与逻辑的分界线。在这个时期出现了逻辑主义学派（以罗素和弗雷格为代表），他们宣称数学与逻辑是一回事。罗素曾说：“逻辑即数学的青年时代，数学即逻辑的壮年时代，青年与壮年没有明显的分界线，故数学与逻辑亦然。”

# 关于数理逻辑

数理逻辑又称符号逻辑，是用数学方法研究数学思维模式的科学。它把数学的推理方法及其使用的语言作为研究对象，运用形式语言（人造符号语言）来表达思维形式的规则和结构。筑造起一个将思维规律的研究变换为对符号系统的研究的理论体系。它既是数学，也是逻辑学。国际数学界把它列入“核心数学”（纯数学），而逻辑学界称它为现代逻辑。它发展到今天已形成四大分支：公理集合论、模型论、证明论与递归论。

**“数”的定义真的可以放心  
地交由逻辑去处理吗？数学  
真的和逻辑是一回事吗？**

**让我们还是走近逻辑的殿  
堂去看看吧！**

# 形式逻辑的基本规律

律 \ 项	概念a	命题p
同一律	$a = a$	$p \rightarrow p$
矛盾律	$a \neq \text{非}a$	$p \rightarrow (\neg(\neg p))$ 即 $\neg(p \wedge (\neg p))$
排中律	$a$ 或 $\text{非}a$	$(\neg p) \rightarrow (\neg p)$ 即 $p \vee (\neg p)$

注：“ $\rightarrow$ ”表示“蕴含”，“ $\neg$ ”表示“否定”，而“ $\wedge$ ”和“ $\vee$ ”分别表示“且”和“或”。

# 数学的语言

在康托创立集合论，弗雷格创立谓词逻辑的时代（1870—1900），数学界使用的语言是混杂冗赘和模棱两可的，这对数学的研究和教育十分不利。数学家们逐渐感受到在数学的各个领域中采用相似的、统一的语言的需要。随着戴德金及其后一些人物的参与，康托的集合论和弗雷格的谓词逻辑一起以朴素的形式成为了数学界的统一语言，这就是所谓的朴素集合论语言；这种语言现今已被我们广泛使用，达到了离开它就做不成事的程度。



# 一些基本的记号

- ◇  $x = y$  表示  $x$  和  $y$  所代表的对象是相同的，  
而  $x \neq y$  则表示  $x$  和  $y$  所代表的对象是不相同的；
- ◇  $u \in x$  表示  $u$  是  $x$  的元素，  
而  $u \notin x$  则表示  $u$  不是  $x$  的元素；
- ◇ 若  $x$  和  $y$  是集合，则  
 $x \subseteq y$  表示  $x$  的元素都是  $y$  的元素，并称  $x$  是  $y$  的子集；
- ◇ 若  $P(u)$  表示元素  $u$  满足性质  $P$ ，则  
 $\{u \in x | P(u)\}$  表示  $x$  中所有满足性质  $P$  的元素  $u$  组成的集合；
- ◇  $P \Rightarrow Q$  表示命题“若  $P$ ，则  $Q$ ”恒真，
- ◇  $P \Leftrightarrow Q$  表示命题“ $P$ 当且仅当 $Q$ ”恒真。

# 罗素(B. Russell, 1872---1970)

英国哲学家、数学家，他提出的罗素悖论撼动了整个数学理论的基础，引发了第三次数学危机。



# 罗素悖论

以 $\Omega$ 表示所有集合收集在一起而成的集合，则 $\Omega$ 中的元素被划分成两类：

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid x \notin x\} , \quad \Omega_1 = \{x \in \Omega \mid x \in x\} .$$

按康托的集合定义， $\Omega_0$ 和 $\Omega_1$ 都是集合。因此，

$$\Omega_0 \in \Omega_0 \quad \text{或} \quad \Omega_0 \notin \Omega_0 .$$

请看下面的逻辑推理：

- $\Omega_0 \in \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \notin \Omega_0 ,$
- $\Omega_0 \notin \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_0 \in \Omega_0 .$

矛盾不可避免！这就是著名的罗素悖论。

# 策墨罗的有限抽象原则

- 罗素的悖论，表述简单而明确，不容置疑；其特点是只用到了“集合”、“元素”、“属于”这些最基本的概念，涉及的集合既符合康托的集合定义，又符合弗雷格的用概念的外延来确定集合的方法。从如此基本的概念出发竟推出了矛盾，这就表明康托和弗雷格的理论存在着令人恐惧的漏洞。
- 数学家们觉得之所以出现罗素悖论是因为集合概念太宽泛，太不严密了。按康托和弗雷格的想法，每个性质或条件可以确定一个集合，亦即每个概念可以确定一个集合；这叫做集合的概括原则，也叫做无限抽象原则。怎能不加限制地使用概括原则呢？

- 观察概括原则的标准形式

$$S = \{u \in X \mid P(u)\}$$

就会发现：集合  $S$  由性质  $P$  和论域  $X$  所决定。策墨罗觉得罗素悖论的产生在于  $X$  “太大”所致；因此，定义一个集合应首先对论域  $X$  加以限制。基于这样的观点，策墨罗提出了一个“有限抽象原则”：

如果已有了一个集合  $X$ ，又给了一个性质  $P$ ，那么

$$S = \{u \in X \mid P(u)\}$$

构成一个集合。

- 按有限抽象原则，罗素悖论可解释成是对命题“所有集合组成的整体不构成一个集合”的证明（反证法）。

# 罗素悖论 所有集合的全体不构成集合！

证：假设所有集合收集在一起构成集合，以 $\Omega$ 表示，则 $\Omega$ 中的元素被划分成两类：

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid x \notin x\} , \quad \Omega_1 = \{x \in \Omega \mid x \in x\} .$$

按有限抽象原则， $\Omega_0$ 和 $\Omega_1$ 都是集合。因此，

$$\Omega_0 \in \Omega_0 \quad \text{或} \quad \Omega_0 \notin \Omega_0 .$$

请看下面的逻辑推理：

- $\Omega_0 \in \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \notin \Omega_0 ,$
- $\Omega_0 \notin \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_0 \in \Omega_0 .$

矛盾不可避免！这就证明了 $\Omega$ 不是集合。

# 策墨罗 ( Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand ([1871-1953](#)) )

德国数学家，建立了第一个公理集合论系统；他的工作使数学家们认识到选择公理的重要性。



# 策墨罗提出了第一个公理集合论系统

策墨罗认为，避免悖论的最好办法是用公理系统来定义集合，使集合概念恢复作为数学对象的特征。首先，策墨罗提出，任何数学对象之间只有一个“本原”关系—— $\in$ ，其它的关系由本原关系导出。然后，他提出康托集合论中的运算，并以公理的形式陈述它们用到的性质。这套公理的第一条是所谓的外延公理，它给出了两个集合相等的条件。然后有断言空集 $\emptyset$ 、集合偶、集合的全体子集都构成合法集合成员的一组公理。在这些公理之上，他又添加了“选择公理”和断言无穷集合存在性的“无穷公理”。



# 培里 ( G. G. Perry ) 型悖论

考虑自然数集 $\mathbb{N}$ , 并定义关于自然数的一个性质 $P$ 如下:

$P$  表示 “不能由少于二十字的短语定义”。

那么,  $\mathbb{N}$  被划分成下面两个不相交的子集:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ 不能由少于二十字的短语定义} \},$$

$$A^c = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ 可以由少于二十字的短语定义} \}。$$

注意:  $A^c$  为有限集, 从而 $A$ 非空,  $A$ 必然有最小数,

记为 $n_0$ ; 显然,  $n_0 \in A$ 。另一方面,

$$n_0 = \underbrace{\text{不能由少于二十字的短语定义的最小自然数}}_{\text{共十九字}},$$

又有 $n_0 \in A^c$ , 即 $n_0 \notin A$ 。

(培里告诉罗素这种类型的悖论)

# 对策墨罗的继承、批判和发展

策墨罗不承认由具有给定性质 $P$ 的对象所组成集合的存在性，除非这些对象都是已定义的某一集合的元素。但是，在策墨罗所做研究的水平上，怎样理解“性质”这个词？策墨罗则只限于说“不管一个性质是否有用，它必须由公理和普遍适用的逻辑规则以非任意的方式确定”。显然，他心中的性质是以直到那时数学家所考虑的性质为典型。培里悖论表明他对“性质”的界定不够精密。

# 罗素和怀特海提出了集合的层次理论

集合概念怎样引入才能消除悖论呢？罗素和怀特海提出了集合的层次理论。他们认为集合也好，概念也好，都应当分层次地引入：

- 最基本的一层是第0层，此层的东西都是个体，不是集合；
- 以第0层的个体为元素的集合是第1层集合；
- 第2层集合的元素，只能是第0层和第1层的成员；
- 第3层集合的元素，只能是第0层、第1层、第2层的成员；

.....

相应地，罗素和怀特海把谓词、命题也都分了层次和类型。用这种分层的办法，不仅去掉了悖论的困扰，而且还把算术归结到集合论。他们写了一部巨著《数学原理》，把自己的思想观点详细地表述在这部著作里。

但是，《数学原理》太复杂，太庞大了。数学家们不倾向于接受这样的宏大设计，而希望数学能建立在简明可靠的牢固基础之上，用尽可能简单的方式解决悖论危机。

# ZF-系统的诞生

对性质怎样表述适应数学家用法的限制，从而避免像培里悖论中的那种寄生式“性质”的陈述？弗伦克尔和斯科朗于1922年提出的解决办法在于在数学的性质或关系的陈述中消除日常语言，代之以形式语言（一种人造符号语言），它由固定一组初始符号按特定方式合成符号“词语”（原子公式），并将“词语”按一套可以避免产生日常语义歧义的硬性文法排列成用于表达性质或关系的陈述（合式公式）。

从康托（1845 —1918）和弗雷格（1848 —1925）  
到策墨罗（1871—1953）和罗素（1872—1970），  
再到弗伦科尔（1891—1965）和斯科朗（1887—  
1963），经过三代人的探索和研究，终于形成了一套  
用形式语言和公理条款规划的集合理论 —— ZF-系统。  
集合论的这一公理系统首先由策墨罗于1905年提出，  
后经弗伦克尔于1920年修改完善而成，因此称作ZF-系  
统。这一系统是否可以抗击悖论侵袭呢？迄今还没有  
人在此系统的框架内表述可以引出“悖论”的性质。



怀特海 (Alfred North Whitehead, 1861–1947), 英国数学家.



弗伦克尔 (Fraenkel, Adolf Abraham, 1891–1965), 德国数学家.



斯科朗 (Skolem, Albert Thoralf, 1887–1963), 挪威数学家.

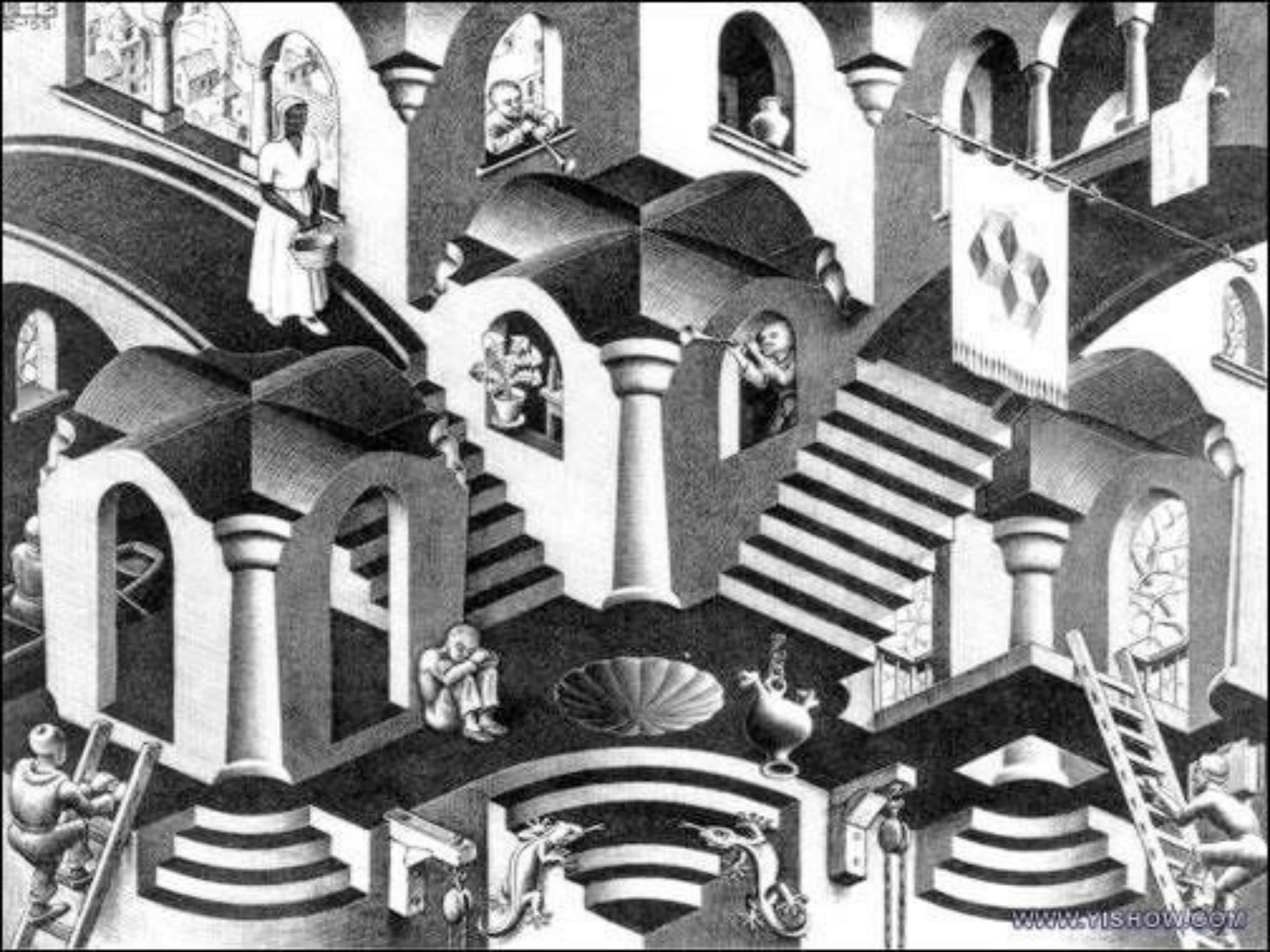
当今，绝大多数数学家使用ZF-系统，但通常不明确声明。就数学家所关注内容而言，所有数学分支都可规约到集合论，因而最终都可规约到ZF-系统或ZFC-系统。

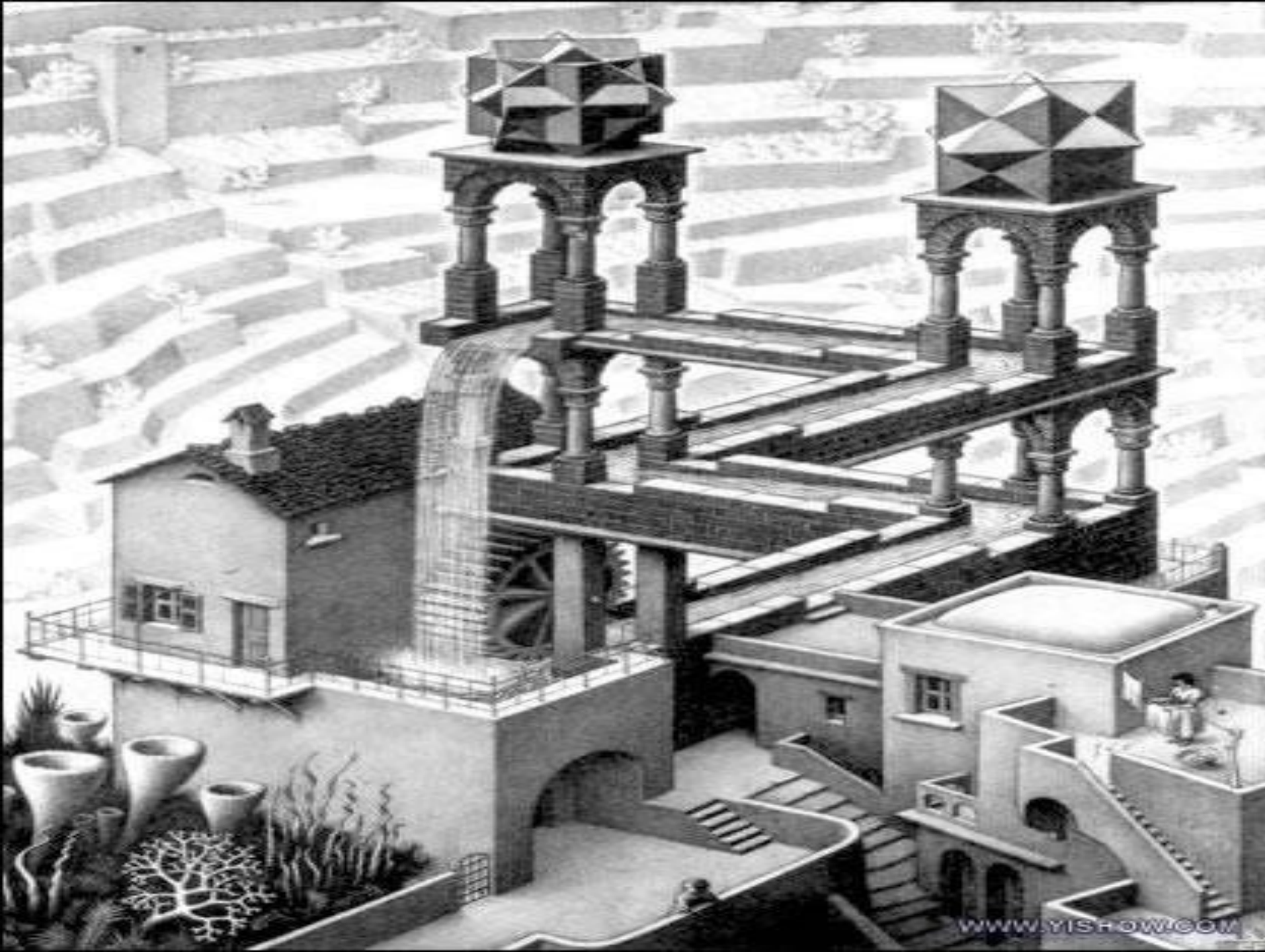


# 悖论画

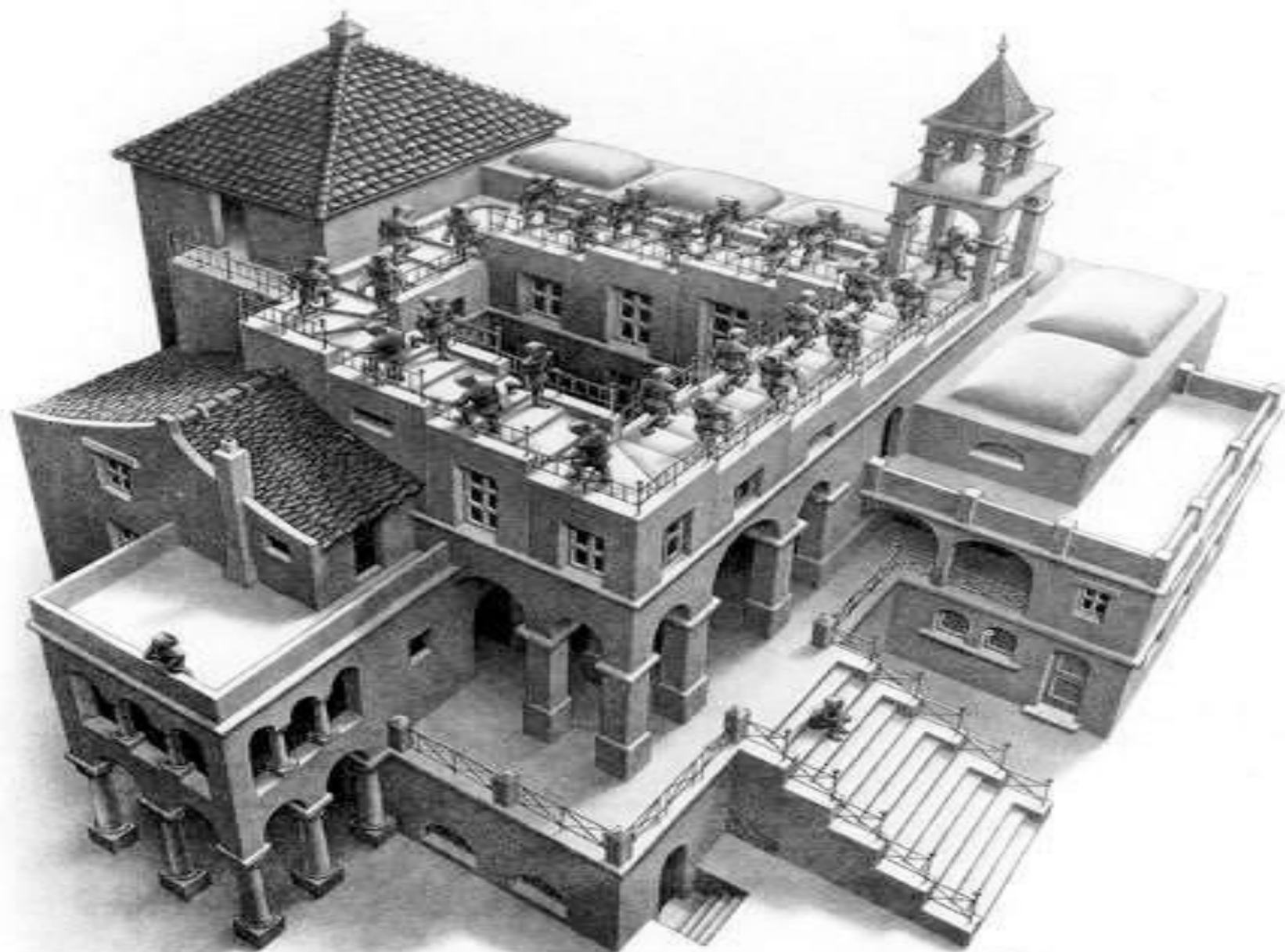


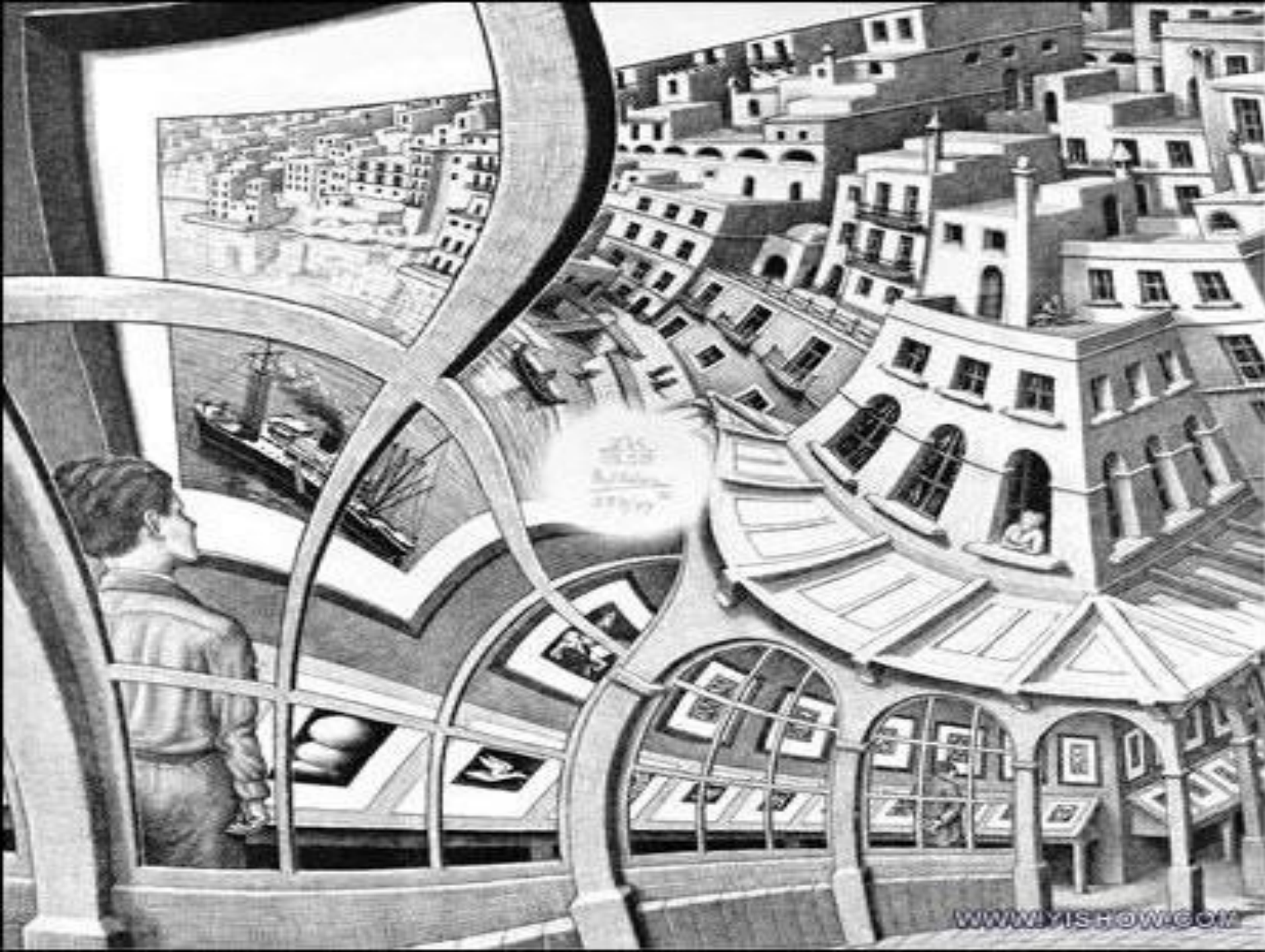












# 理发师悖论

某村庄有一位理发师，他把村里的人分为两类：一类是自己不给自己理发的人；另一类是自己给自己理发的人。基于此，他挂出了一张招牌，上写：

“本人只给村中自己不给自己理发的人理发，请自己不给自己理发的人惠顾。”

有人问：“那么您的头发由谁理？” 理发师瞠目结舌，无言以对。

这是罗素于1919年提出来的悖论，所以也叫“罗素悖论”。

# 上帝是全能的吗？

- 甲说：“上帝是全能的。”
- 乙说：“全能就是什么事都能办到，对吗？那么请问，上帝能造出一个连自己也举不起来的大石头吗？”
- 甲无法回答了。如果说不能，则上帝就不是全能的。如果说能，则上帝造出的石头上帝自己也举不起来，说明上帝仍然不是全能的。
- 这个悖论的特点是，上帝能肯定一切，也就能否定一切。但他自己也在这一切之中，所以当他肯定一切的时候，同时也就否定了自己能肯定一切。



# 唐·吉诃德悖论

小说《唐·吉诃德》里描写过一个国家，它有一条奇怪的法律，每个旅游者都要回答一个问题：“你来这里做什么？”回答对了，一切都好办；回答错了，就要被绞死。

一天，有个旅游者回答：“我来这里是要被绞死。”

旅游者被送到国王那里。国王苦苦想了好久：他回答得是对还是错？究竟要不要把他绞死？如果说他回答得对，那就不要绞死他——可这样一来，他的回答又成了错的了！如果说他回答错了，那就要绞死他——但这恰恰又证明他回答对了。实在是左右为难！

# 思考题

- 1 叙述皮亚诺的自然数公理系统。
- 2 弗雷格-罗素定义的数满足皮亚诺公理吗？
- 3 罗素悖论讲的是什么？策墨罗是怎样消除罗素悖论的？  
(要求写清楚罗素悖论和策墨罗有限抽象原则)
- 4 你认为数学可以完全规约为逻辑吗？论述你的观点。



*Thank you for your attention*



# 附 简介朴素集合论

康托觉得有必要来“定义”集合，他说：“把我们感觉或思维的不同对象收集在一起”，看作一个整体，这个整体就叫做集合。（这个定义遭到了许多批评）

事实上，集合是数学中最基本的概念之一，基本到针对所有集合的统一定义是没有的，而只是认定：一个集合由确定的可区分的元素构成。

元素也是数学中最基本的没有统一定义的概念，基本到每个元素也作集合看待。

# 集合的表示

集合通常用大写英文字母 $A, B, \dots, Z$ 表示，而元素则通常用小写英文字母 $a, b, \dots, z$ 表示，并且引入下列记号：

- ◇  $x \in A$ ，称作 $x$ 属于 $A$ ，或 $A$ 含有 $x$ 。(解释为“ $x$ 是 $A$ 的元素”)
- ◇  $x \notin A: \neg(x \in A)$ ；称作 $x$ 不属于 $A$ 。( $\neg$ 解释为“非”)
- ◇  $x = y$ ，称作 $x$ 等于 $y$ 。(解释为“ $x$ 与 $y$ 是相同的元素”)
- ◇  $x \neq y: \neg(x = y)$ ；称作 $x$ 不等于 $y$ 。

**注：**所谓集合 $A$ 由**确定的、可区分**的元素构成，意指下述两点成立：

1) 对任何一个元素 $x$ ，或者 $x \in A$ ，或者 $x \notin A$ ，两者居其一，且只居其一；特别地，每个集合 $X$ 都可看成元素，或者 $X \in A$ ，或者 $X \notin A$ ，两者居其一，且只居其一。

2) 对任何 $x, y \in A$ ，或者 $x = y$ ，或者 $x \neq y$ ，两者居其一，且只居其一。

对两个集合  $A$  和  $B$ , 引入下列记号:

◇  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A: \forall x \in A, x \in B$ ; 称作  $A$  是  $B$  的子集。(形式语句解释为 " $A$  的元素没有不属于  $B$  的", 其中  $\forall$  解释为 "每一个")

◇  $A = B: A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ ; 称作  $A$  等于  $B$ 。

一些基本的集合表示法及其性质:

◇ 不含任何元素的集合存在, 而且唯一, 记为  $\emptyset$ , 称作空集。

正则公理: 若  $A \neq \emptyset$ , 则  $\exists a \in A, \forall x \in A, x \neq a$ . ( $\exists$  解释为 "存在一个")

◇ 若  $a$  是一个元素, 则存在仅含有  $a$  一个元素的集合, 表示为  $\{a\}$ , 称作**单元集**。若  $a, b$  是两个不同的元素, 则存在含且仅含  $a, b$  的集合, 表示为  $\{a, b\}$  或  $\{b, a\}$  (注意  $\{a, b\} = \{b, a\}$ ), 称为  $a$  与  $b$  的**无序对**。

◇ 若  $a, b$  是两个元素 (可以相同), 命

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad (\text{当 } a = b \text{ 时, } \{a\} \equiv \{a, b\}),$$

称之为  $a$  与  $b$  的**有序对**。

◇ 一般地，含有有限个元素的集合表示为 $\{a, b, \dots, c\}$ ，其所列元素两两不同(元素排列上具无序性和互异性)。这种表示集合的方法称作**枚举法**。

◇ 如果 $I$ 是一个集合， $P(\cdot)$ 是一个谓词(性质)，那么

$$\{x \in I \mid P(x)\} \quad \text{或} \quad \{x \in I : P(x)\}$$

将表示定义了一个集合(解释为：由使命题 $P(x)$ 成立的 $x \in I$ 所构成的集合)。这种通过一个集合 $I$ (称作**全集或论域**)和一个谓词 $P(\cdot)$ 来定义集合的方法称作集合表示的**描述法**，又称**有限抽象原则**。

◇ 如果 $S$ 是一个集合，那么我们承认 $S$ 的所有子集组成的整体构成了一个集合，称作 $S$ 的**幂集**，记作 $\mathcal{P}(S)$ 或 $2^S$ 。

# 集合的运算

集合的数学研究基于这样的事实：一些集合通过某些运算可以形成另外的集，如同数可以通过加法和乘法形成另外的数一样。下面所涉集合  $A$  和  $B$  都是一个全集  $I$  的子集，集合的运算定义如下：

◇  $A \cup B := \{x \in I \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$  ( $\vee$  解释为“或”);

$A \cup B$  是一个集合，称为  $A$  与  $B$  的**逻辑和**，或  $A$  与  $B$  的**并**。

◇  $A \cap B := \{x \in I \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$  ( $\wedge$  解释为“且”);

$A \cap B$  是一个集合，称为  $A$  与  $B$  的**逻辑积**，或  $A$  与  $B$  的**交**。

◇  $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ ;

$A \setminus B$  是一个集合，称为  $A$  与  $B$  的**逻辑差**，或  $B$  在  $A$  中的**余集**。

特别地，记  $A^c := I \setminus A$ ，称为  $A$  的**余集**。

# 集合运算律

1) 交换律:  $A \cup B = B \cup A,$

$$A \cap B = B \cap A;$$

2) 结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

3) 分配律:  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

4) 对偶律:  $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B), \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

5) 自反律:  $(A^c)^c = A$

# 映射的概念

**定义** 设  $X, Y$  是两个集合,  $f \subseteq X \times Y$ , 如果

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y, (x, y) \in f,$$

那么称  $f$  是一个从  $X$  到  $Y$  的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto y.$$

对于映射还引入下述术语和记号:

◇  $X$  称作  $f$  的**定义域**, 记作  $\mathcal{D}(f)$ 。对每个  $x \in X$ , 记使得  $(x, y) \in f$  的  $y \in Y$  为  $f(x)$ , 称之为  $x$  在  $f$  下的**像**。如果

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$

那么称  $f$  是**单射**。

◇  $Y$  称作  $f$  的**值允许范围**。现记

$$\mathcal{R}(f) := \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\},$$

称之为  $f$  的**值域**。如果  $\mathcal{R}(f) = Y$ , 那么称  $f$  是**满射**。

◇ 如果  $f$  既是单射, 又是满射, 则称  $f$  是**单满射**或**双射**。



# 等势

所有集合组成的全体称作**集宇宙**，记为 $\Omega$ 。由正则公理，易得

$\forall X \in \Omega, X \notin X$ ；从而， $\Omega$ 不是集合！

**注：**如果认可 $\Omega$ 是集合而不认正则公理，那么按有限抽象原则，

$$\Omega_0 := \{X \in \Omega \mid X \notin X\}, \quad \Omega \setminus \Omega_0 = \{X \in \Omega \mid X \in X\}$$

都是集合，或者 $\Omega_0 \in \Omega_0$ ，或者 $\Omega_0 \in \Omega \setminus \Omega_0$ 。这将产生：

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_0 \in \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \notin \Omega_0; \text{ 矛盾!} \\ \Omega_0 \in \Omega \setminus \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \in \Omega_0; \text{ 仍矛盾!} \end{array} \right\} \text{罗素悖论。}$$

**定义：** 设 $A, B \in \Omega$ ，如果存在从 $A$ 到 $B$ 的单满射，那么称 $A$ 与 $B$ 是**等势**的，或称 $A$ 与 $B$ 具有相同的**基数**，记作 $A \approx B$ 。如果 $A$ 与 $B$ 的某个子集等势，而 $B$ 不等势于 $A$ 或它的任何子集，那么称 $B$ 具比 $A$ 更大的基数，记作 $A < B$ 或 $B > A$ 。

# 基数运算律

设  $A, B, C$  是集合，那么：

$$(1) \quad A \approx A,$$

$$(2) \quad A \approx B \Rightarrow B \approx A,$$

$$(3) \quad (A \approx B) \wedge (B \approx C) \Rightarrow (A \approx C);$$

$$(4) \quad A \not\approx A,$$

$$(5) \quad (A \prec B) \wedge (B \approx C) \Rightarrow (A \prec C), \quad (A \prec B) \wedge (A \approx C) \Rightarrow (B \succ C);$$

$$(6) \quad (A \prec B) \wedge (B \prec C) \Rightarrow (A \prec C);$$

$$(7) \quad (A \subseteq B) \Rightarrow (A \prec B) \vee (A = B),$$

$$(8) \quad (A \prec B) \vee (A = B) \Rightarrow (\exists C \subseteq B)(A \approx C).$$

# 基数三大定理

定理1(Cantor 定理) 设 $a$ 是集合, 那么

$$a \prec \mathcal{P}(a), \quad \text{其中 } \mathcal{P}(a) \text{ 表示 } a \text{ 的幂集.}$$

定理2(Cantor-Bernstein 定理) 设 $a, b, c$ 是集合, 那么

$$(a \preceq b) \wedge (b \preceq a) \Rightarrow (a \approx b), \quad \text{其中 } a \preceq b \text{ 表示 } (a \prec b) \vee (a \approx b).$$

定理3((AC)的等价形式) 设 $a, b$ 是集合, 那么下列三种情形有且仅有一种情形成立:

$$(1) \ a \prec b; \quad (2) \ a \approx b; \quad (3) \ a \succ b.$$

注:(AC)代表选择公理, 内容如下: 对任何由两两不交的非空集合组成的集合 $X$ , 总存在一个集合 $y$ , 使得 $\forall x \in X, x \cap y$ 恰有一个元素。

# 有限与无限

**定义：** 设  $A \in \Omega$ ，如果  $A \approx \emptyset$ ，或  $A \approx \{1, \dots, n\}$ ，那么称  $A$  是有限集；如果  $A \approx \mathbb{N}$ ，那么称  $A$  是可列集；有限集和可列集统称可数集。如果  $A$  不是有限集，则称之为无限集。

康托定理1  $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$ 。

康托定理2  $\mathbb{N} \prec \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 。

注：康托定理1使人猜想“所有的无限集都是等势的，其基数(称作无穷大，表示成 $\infty$ )大于任意一个有限集的基数(自然数)”。但康托定理2告诉我们，无穷基数有不同层次，且不存在最高层次。

应注意：康托对  $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ （即，全体实数的集合是不可数的）的天才证明是数学反证法的光辉典范；即便在原则上，他的结果也无法采用直接的构造性证明加以论证。

# 集合论的诞生

集合论是康托不顾当时某些卓越数学家（例如，德国数学家克隆尼克和外尔，法国数学家庞凯来等）的严厉批评而创立的，其中基数论更是被批为“雾上之雾”。归结批评之根本，可以说在于矛盾双方对数学的逻辑信念发生了分歧。批评者反对非构造性的推理方法，对基本逻辑法则“排中律”有疑虑——真正的反证法(indirect proof)究竟是什么？1900年，在第一届国际数学家大会上，康托的集合论和反证法受到同样卓越的另一批数学家（例如，瑞士数学家胡尔维茨、法国数学家阿达玛和德国数学家希尔伯特）的高度认可。

希尔伯特对反证法的信仰是出了名的：**数学存在的意义简单地说就是没有矛盾**。他向世人坚定地宣告了对集合论的支持：“没有任何人能将我们从康托所创造的伊甸园中驱赶出来！”

# 集合的存在性

- 所有数学对象都是集合或关于集合的，集合论是整个数学的基础。集合是否存在呢？这可就是数学中最简单的大问题了！
- 空集，只有空集，没有元素属于它和它的元素用不着区分构成了集合存在的一种独特例证。这就是数学中的零——不属于成为属于的开始，不区分(=)成为区分( $\neq$ )的开始——这是人思维的原点。
- “把空集作为一种存在”，这是人的意识表现，也是人的一种宗教情怀。它构成人类数学思想的起点之一，也预示着数学思维的本质。