数学是什么——

探寻数学思维的本质和精神

主讲：杜乃林

第三讲 有限无限纵横谈

——数学的逻辑与非逻辑根基

- 逻辑套路
- 非逻辑信条

一、数学的逻辑套路

今日数学的基础是建立在集合论之上的，而集合论中出现的悖论使数学家们认为有必要做出关于集合的基本假设（即提出一组适当的集合论公理），以便彻底避免各式各样的、已发觉的和潜在的悖论或不相容现象的出现，以使数学的各种系统和方法能够建立在一个统一的牢固的逻辑基础之上。为此，数学家和逻辑学家提出并发展了多种集合论的形式化系统，其中最有名的要数ZFC系统和GBN系统。

在此，我们将向大家简介ZFC系统，它是由上节说到的ZF系统发展完善而成的。

ZFC系统概述

- ZFC系统是一种受到数学界偏爱的形式系统。“形式”这个词常常用于这样的场合，该处用到了一些符号，而这些符号的作用和属性又完全由一组给定的规则所确定。在一个形式系统中，符号没有任何意义；在处理它们时，我们必须注意不要在系统规定之外对它们的属性作任何假设。不过，形式符号可以加以解释，解释可以有多种版本，但这些解释并不是系统的一部分。
- ZFC系统像其他形式系统一样，有两方面内容，一是逻辑套路，指它的形式语言和逻辑演算（包括逻辑公理和演绎规则），二是非逻辑公理（用于“规划”集合概念的特殊公理，又称集合论公理）。这两方面内容，前者体现出“逻辑数学化”倾向，而后者则体现出“数学逻辑化”倾向，如今两者已融合成一个有机的开放的整体。

ZFC系统的内容

一、逻辑套路
- 形式语言
  - 符号库
  - 合式公式库
- 逻辑演算
  - 逻辑公理模式
  - 逻辑演算规则

二、非逻辑公理（集合论公理）

ZF符号库

(a) 变元符号：$x, y, z, \cdots\cdots$, 有潜在可列多个变元符号；

每一个变元解释为一个集合.

(b) 二目关系符号：$\in$ (属词)， $=$ (等词)；

前者解释为"…是…的元素"，后者解释为"…等于…".

(c) 逻辑连词：$\neg$ (否定词)， $\rightarrow$ (蕴含词)；

前者解释为"非…"，后者解释为"若…，则…".

(d) 量词：$\forall$ (全称量词)；

$\forall x$解释为"对每个集合x".

(e) 技术性符号：$\left({}_{\sqcup} \right.$ (左括号)， $\left. {}_{\sqcup} \right)$ (右括号)；

左右括号通常配对出现.

ZF公式库

由符号库中有限个符号按一定规则排列的符号串叫作**合式公式**或**谓词公式**，简称**公式**。

ZF公式的构成遵循如下规则：

(1) 对任意的变元 x 和 y，$x = y, x \in y$ 都是公式；
并称这类公式为原子公式。

(2) 如果 A 和 B 是公式，则 $\neg(A), (A) \to (B)$ 也都是公式。

(3) 如果 x 是变元，A 是公式，则 $(\forall x)(A)$ 也是公式；
并称 x 在 $(\forall x)(A)$ 中是约束出现的，称 A 为 $\forall x$ 的辖域。

(4) 任意一个公式由有限次运用(1),(2)或(3)生成。

合式公式之例

公式是按递归方式定义的；照此方式，在一个公式——称为终结公式——的构造中，符合规则(1)–(4)的各步所得的也是公式，它们称为终结公式的子公式。例如，

例1 $\neg\left((A)\to(\neg(B))\right)$ ←−−−−终结公式，习惯上是记作$(A)\wedge(B)$.

$(A)\to(\neg(B))$ ←−−−−子公式.

A $\qquad \neg(B)$ ←−−−−子公式.

B ←−−−子公式.

例2 $(\neg(A))\to(B)$ ←−−−−−−−终结公式，习惯上记作$(A)\vee(B)$.

$\neg(A)$ $\qquad B$ ←−−−−−−−−子公式.

A ←−−−−−−−−子公式.

例 3　$\neg((\forall x)(\neg(x \in a)))$　$\leftarrow$ 终结公式，习惯上简记为 $\exists x \in a$.

$(\forall x)(\neg(x \in a))$　$\leftarrow -$ 子公式，其中 $\neg(x \in a)$ 为 $(\forall x)$ 的辖域.

$\neg(x \in a)$　$\leftarrow - -$ 子公式，习惯上简记为 $x \notin a$.

$x \in a$　$\leftarrow - - -$ 子公式.

原子公式有两种形式：$x = y$ 和 $x \in y$；其他层次的公式都由原子公式经过有限次使用 $\neg, \rightarrow$ 和 $(\forall x)$ 去作用或连接而得到。

例 4　若以 A 表示公式

$$(\forall x)((x \in a) \rightarrow (x \in b)),$$

那么 A 中出现了三个变元 x，a 和 b，其中 a, b 是 A 的自由变元，而 x 是 A 的约束变元。此时，我们常将 A 记为 $A(a,b)$，以凸显 A 含有自由变元 a, b。

ZF的逻辑公理模式（附带等词公理模式）

ZF的逻辑公理有无穷多条，不可能列出它们的全体；但是，我们可以通过八款公理模式来对它们作出一个整体刻画：对任何公式 A，B，C，下列公式是ZF的逻辑公理：

$(K1)$ $(A)\to((B)\to(A))$.

$(K2)$ $((A)\to((B)\to(C)))\to(((A)\to(B))\to((A)\to(C)))$.

$(K3)$ $((\neg(A))\to(\neg(B)))\to((B)\to(A))$.

$(K4)$ $((\forall x)(A))\to(A)$，其中 x 是 A 的约束变元或在 A 中不出现.

$(K5)$ $((\forall x)(A(x)))\to(A(t))$，其中 t 是可以自由代换 $A(x)$ 中的 x 的项.

$(K6)$ $((\forall x)((A)\to(B)))\to((A)\to((\forall x)(B)))$，其中 x 是 A 的约束变元或在 A 中不出现.

$(E7)$ $x=x$，其中 x 是任意一个变元.

$(E8)$ $(t_1=t_2)\to((A(t_1))\to(A(t_2)))$，其中 t_1,t_2 是可以自由代换 $A(x)$ 中的 x 的项.

关于ZF的逻辑公理模式的注释

1°　$(K1)-(K3)$三款公理模式由一般的形式命题演算归结而来；而$(K4)-(K6)$三款公理模式只适用于谓词演算，它们是用于规范量词的用法的；至于$(E7)$和$(E8)$是所谓的等词公理模式。

2°　这里涉及到一个新的逻辑术语“项”，它可解释为集合的表达式。项的生成遵从如下规则：

(a)　变元和常元是项；

(b)　若 f 是一个n目函数，且$t_1,t_2,\cdots,t_n$是项，则$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$也是项；

(c)　每个项都由有限次使用规则(a)或(b)生成。

需指出：在ZF的符号库中，没有原子的常元符和函数符；因此，ZF中的常元与函数都需要加以定义。例如，据ZF的非逻辑公理(见下一节)，我们可以引入常元$\varnothing$（空集），引入1目函数$\cup$（并运算），$\cap$（交运算）等，从而引入了项$\cup x$和$\cap x$等。

3°　所谓“项t可以自由地代换$A(x)$中的x”意指：当t代入$A(x)$中的x（自由的）时，t的任一变元都不引发$A(x)$中的量词对它产生约束作用。

ZF的逻辑演绎规则

ZF的逻辑演绎规则有两条：这些规则使我们可以把一个公式A作为某有限个公式$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m$的直接后承而演绎出来。

这两条规则是：

(1) 分离规则（MP规则）：从A和$A \to B$可推演出B，其中A和B是任意两个公式.

(2) 概括规则（GEN规则）：从A可以推演出$(\forall x)(A)$，其中A是任一公式，而x是任一变元.

关于ZF的逻辑逻辑演绎规则的注释

1°　分离规则对应于日常语言中进行论证的标准方式之一：从命题“甲蕴含乙”和“甲”分离（即推演）出命题“乙”。通常称“甲蕴含乙”为大前提，“甲”为小前提，而“乙”为结论。因此，分离规则反映的正是三段论式推理的形式。

2°　概括规则对于涉及量词性质的推理是必要的。

一个公式A总是或者含有自由变元，或者不含自由变元；前种情形出现时，称A是开命题，而后种情形出现时，称A是一个闭命题。

对一个开命题A，记作$A(x,y,\cdots,z)$，其中$x,y,\cdots,z$表示A的所有自由变元，那么

$$(\forall z)\cdots(\forall y)(\forall x)\big(A(x,y,\cdots,z)\big)$$

变成了一个闭命题。我们看到，量词的作用是对变元加以约束和限制，受到量化的变元就失去了变元的作用。

对于谓词公式，当它是闭命题时，在论域确定的情况下，该命题的真假值依赖于谓词的含义而定；当它是开命题时，它的真假值一般说来不能谈论，因为它含有的自由变元没有确定赋值——它不能构成可以判断真假的陈述。

ZF系统的逻辑证明

设Γ是ZF的一组公式，有限个ZF的公式的一个排列

$$(*) \qquad A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m$$

被称为Γ的一个演绎，如果对于每个$i(1 \le i \le m)$，下列条件之一成立：

(a) A_i是一条ZF的公理（由公理模式所判断）；

(b) A_i是Γ中的一个公式；

(c) A_i由排列$(*)$中较其位置靠前的两个公式应用分离规则而得；

(d) A_i由排列$(*)$中较其位置靠前的某个公式应用概括规则而得。

此时，称公式A_m是从Γ可演绎的，记作$\Gamma \vdash A_m$，并将显示A_m是从Γ可演绎的公式排列$(*)$称作一个形式证明，简称证明。当$\Gamma = \varnothing$时，将$\varnothing \vdash A_m$简记为$\vdash A_m$，并称A_m是一个纯逻辑定理；当Γ取ZFC的非逻辑公理组时，将$\Gamma \vdash A_m$记作$\vdash_{\text{ZFC}} A_m$，并称A_m是一条ZFC定理。

形式证明的实例

例5　证明：设A是任一公式，那么$\vdash (A)\to(A)$；（同一律）

证：1　$(A)\to(((A)\to(A))\to(A))$，　　$(K1)$

2　$((A)\to(((A)\to(A))\to(A)))\to(((A)\to((A)\to(A)))\to((A)\to(A)))$，　$(K2)$

3　$((A)\to((A)\to(A)))\to((A)\to(A))$，　　$(1, 2, MP$规则$)$

4　$(A)\to((A)\to(A))$，　　$(K1)$

5　$(A)\to(A)$.　　$(3, 4, MP$规则$)$

例6　证明：若A, B, C为公式，则

$$\{(A)\to(B), (B)\to(C)\}\vdash (A)\to(C).$$

这个结果可以当作演绎规则使用，称作“假言三段论”规则，记作HS。

证：1　$(A)\to(B)$，　　(假设)

2　$(B)\to(C)$，　　(假设)

3　$((A)\to((B)\to(C)))\to(((A)\to(B))\to((A)\to(C)))$，　$((K2))$

4　$((B)\to(C))\to((A)\to((B)\to(C)))$，　　$((K1))$

5　$(A)\to((B)\to(C))$，　　$(2, 4, MP)$

6　$((A)\to(B))\to((A)\to(C))$，　　$(3, 5, MP)$

7　$(A)\to(C)$.　　$(1, 6, MP)$

例7 试证：(1) $\vdash (x=y)\to(y=x)$;

(2) $\vdash (x=y)\to((y=z)\to(x=z))$.

证： 证(1).

1 $(x=y)\to((x=x)\to(y=x))$, $((E8), A(t)$取为$t=x)$

2 $((x=y)\to((x=x)\to(y=x)))\to(((x=y)\to(x=x))\to((x=y)\to(y=x)))$, $((K2))$

3 $((x=y)\to(x=x))\to((x=y)\to(y=x))$, $(1, 2, MP)$

4 $(x=x)\to((x=y)\to(x=x))$, $((K1))$

5 $x=x$, $((E7))$

6 $(x=y)\to(x=x)$, $(4, 5, MP)$

7 $(x=y)\to(y=x)$. $(3, 6, MP)$

证(2).

1 $(y=x)\to((y=z)\to(x=z))$, $((E8)$，取$A(t)$为$t=z)$

2 $(x=y)\to(y=x)$, (利用(1))

3 $(x=y)\to((y=z)\to(x=z))$. $((HS)$规则)

二、数学的非逻辑信条

——ZFC系统的数学价值

以上所讲内容的目的在于帮助同学们了解数学系统的逻辑结构——这方面内容体现出ZFC系统的“逻辑套路”。尽管形式语言与逻辑演算的表述方式完全可以说是“数学化”的，但是就其本质而言，这方面的内容是没有多少数学价值的。ZFC系统的数学价值将由其非逻辑公理体现出来。那么这组非逻辑公理又说了些什么呢？

ZF-系统的非逻辑公理

外延公理(ZF1) 两个集合相等，当且仅当它们有相同的元素。

$$（\mathrm{ZF1}） \quad x = y \leftrightarrow (\forall z)\big((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)\big).$$

空集公理(ZF2) 没有元素的集合存在。

$$（\mathrm{ZF2}） \quad (\exists x)\big((\forall y)(y \notin x)\big).$$

注：空集是唯一的，这是在ZF1的推论。空集记作$\varnothing$。

配对公理(ZF3) 任何集合x和y，总存在着集合z，它的元素仅有x和y。

$$（\mathrm{ZF3}） \quad (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)\Big((u \in z) \leftrightarrow \big((u = x) \vee (u = y)\big)\Big).$$

注：ZF3所断言存在的这种集合记作$\{x, y\}$；注意

$\{x, y\} = \{y, x\}$，称作双元集或无序偶。

有了此等无序对的概念，可以定义单元集和序偶的概念如下：

$\{x\} := \{x, x\}$，称作单元集；　　$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$，称作序偶。

并集公理(ZF4) 给出任何集合x，总存在着集合y，它以x的一切元素的元素为元素。

$$（\text{ZF4}）\quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)\Big(\big(z \in y\big) \leftrightarrow \Big(\big(\exists u\big)\big(\big(u \in x\big) \wedge \big(z \in u\big)\big)\Big)\Big).$$

注：此公理断言存在的集合记作$\bigcup x$，称作集族x的并。

幂集公理(ZF5) 给出任何集合x，总存在着集合y，它以x的一切子集为元素。

$$（\text{ZF5}）\quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(\big(z \in y\big) \leftrightarrow \big(z \subseteq x\big)\big),$$

其中$z \subseteq x$代表$(\forall u)\big(\big(u \in z\big) \to \big(u \in x\big)\big)$.

替换公理模式(ZF6) 若对于任意的x，存在唯一的y使得公式$A(x,y)$成立，记$y = f(x)$，那么对于任意的集合z，存在集合u，使得

$$u = \{v \mid \exists w \in z \text{使得} A(w,v) \text{成立}\}，\quad \text{即，}\quad u = f(z)。$$

$$（\text{ZF6}）\quad \Big(\big(\forall x\big)\big(\exists ! y\big)\big(A(x,y)\big)\Big) \to$$

$$\Big(\big(\forall z\big)\big(\exists u\big)\big(\forall v\big)\Big(\big(v \in u\big) \leftrightarrow \Big(\big(\exists w\big)\Big(\big(w \in z\big) \wedge \big(A(w,v)\big)\Big)\Big)\Big)\Big),$$

其中$(\exists ! y)\big(A(x,y)\big)$代表$\Big(A(x,y) \wedge \Big(\big(\forall u\big)\big(A(x,u) \to u = y\big)\Big)\Big)$.

无穷公理(ZF7) 存在一个集合x，它含有无穷多个元素。

$$\text{（ZF7）}\quad (\exists x)\Big((\varnothing \in x)\wedge\Big((\forall y)\big((y\in x)\to(y^{+}\in x)\big)\Big)\Big),$$

其中y^{+}代表$y\cup\{y\}$，称作y的后继.

基础公理(ZF8) 每个非空集合x都含有这样一种元素，此种元素作为集合与x无公共元素。

$$\text{（ZF8）}\quad (\forall x)\Big((x\neq\varnothing)\to\Big((\exists y)\Big((y\in x)\wedge\big(\neg(\exists z)\big((z\in x)\wedge(z\in y)\big)\big)\Big)\Big)\Big).$$

注：换言之，此公理断言，任何非空集合x都有$\in$-最小元，即，存在$y\in x$，使得：

对任意的$z\in y$，$z\notin x$， 等价地， 对任意的$z\in x$，$z\notin y$。

此蕴含：

任何集合x都满足$x\notin x$。

因为单元集$\{x\}$，按ZF8，有$\in$-最小元，只能是x，于是，对任意的$z\in\{x\}$，$z\notin x$。这就得到$x\notin x$。

关于ZF-非逻辑公理的说明

- 公理（ZF1）—（ZF8）的建立主要归功于策墨罗和弗伦克尔，因此有所谓ZF-系统之称。
- 公理（ZF2）断言了空集的存在。空集，只有空集，没有元素属于它和它的元素用不着区分构成了集合存在的一种独特例证。后面将知道，这就是数学中的零——不属于成为属于的开始，不区分(=)成为区分(≠)的开始——这是人思维的原点。
- “把空集作为一种存在”，这是人的意识表现，也是人的一种宗教情怀。它构成人类数学思想的起点之一，也预示着数学思维的本质。

- 在（ZF6）中，命$A(x,y)$代表$A(x)\wedge(x=y)$，则可推出策墨罗的有限抽象原则：对任一给定的谓词公式$A(x)$和任何集合z，存在集合u使得

$$u=\{v\in z\mid A(v)\}。$$

- 无穷公理（ZF7）是断言无限集合存在的公理；实质上，它们断言的正是自然数集ℕ存在。如果在ZF-系统中不引入（ZF7），那么我们得到的是一个有限数学的框架，也就是说，我们处理的数学对象只能限于有限集合。在这样的框架里，我们无法断定“全体自然数”是否构成一个集合。“自然数的全体”是否为一个集合？这问题其实是“自然数的全体”作为一个数学对象我们该怎样看待的问题。在这个问题上，数学界的看法是统一的:“自然数的全体”构成一个集合。这是现代数学基础的任何令人可接受的模式都必须俯就的基本要求——本质上讲，这意味着数学学科不能不认可“数学归纳原理”。数学归纳原理是一条数学原理，它不能归约为逻辑。无穷公理的价值正是在集合论的公理系统中给出“数学归纳原理”的合法位置。

- 所有集合组成的全体称作**集宇宙**，记为Ω。由基础公理（ZF8），已得

  $\forall X \in \Omega, X \notin X$；从而，$\Omega$不是集合！

  如果认可Ω是集合而不认正则公理，那么按有限抽象原则，

  $$\Omega_0 := \{X \in \Omega \mid X \notin X\}, \qquad \Omega \setminus \Omega_0 = \{X \in \Omega \mid X \in X\}$$

  都是集合，或者$\Omega_0 \in \Omega_0$，或者$\Omega_0 \in \Omega \setminus \Omega_0$。这将产生：

  $$\left.\begin{array}{l} \Omega_0 \in \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \notin \Omega_0;\ \text{矛盾！} \\ \Omega_0 \in \Omega \setminus \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 \in \Omega_0;\ \text{仍矛盾！} \end{array}\right\} \text{罗素悖论。}$$

- （ZF2）和（ZF7）是分别断言集合存在和无限集合存在的公理；实质上，它们断言的正是空集和自然数集存在。这两条公理实难作为逻辑公理看待，它们是干脆的数学公理。因此，将集合论完全划归逻辑范畴不可能得到数学界的认可。一般认为：逻辑主义自定的目标——数学化为逻辑，成为逻辑的一部分——不可能实现。

ZF-系统引出的基本数学概念

定义1 设 x 和 y 是集合，定义

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\},$$

称作序偶。

定义2 设a为集合，定义 a 的并，记为$\cup a$，是一个集合，适合

$$(\forall x)((x\in\cup a)\leftrightarrow((\exists u)((x\in u)\wedge(u\in a)))),$$

记作

$$\cup a=\{x|(\exists u\in a)(x\in a)\}。$$

定义3 设a为非空集合，定义 a 的交，记为$\cap a$，是

$$\cap a=\{x\in\cup a|(\forall u\in a)(x\in u)\}\text{。}$$

定义4 设a为集合，定义 a 的幂，记为$\mathrm{P}(a)$，是一个集合，适合

$$(\forall x)((x\in\mathrm{P}(a))\leftrightarrow(x\subseteq a))\text{。}$$

定义5 设a和b为集合，定义a与b的笛卡尔积，记为$a\times b$，是

$$a\times b=\{(x,y)|(x\in a)\wedge(y\in b)\}\text{。}$$

注：下述命题 1-(2) 中的断言保证了上述定义 5 的合理性。在集合论框架内表现数学，建立笛卡尔积集的概念是 极 重要的一环。形象地说，笛卡尔积集是各种集关系表演的舞台，而集关系是最重要和最一般的数学概念之一 。

命题1 (1) $(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x'$且 $y=y'$。

(2) $x\in a$ 且 $y\in b\Rightarrow(x,y)\in\mathrm{P}(\mathrm{P}(a\cup b))$ 。

定义6（关系） 一个关系是一个集合，其每个元素都是一个序偶。如果 R 是一个关系，我们用 xRy 表示 $(x, y) \in R$，并且当且仅当 xRy 时，称 x R-相关于 y。关系 R 的定义域，用 $\mathrm{Dom}(R)$ 表示，定义为

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x \mid (\exists y)(xRy)\} ;$$

关系 R 的值域，用 $\mathrm{Ran}(R)$ 表示，定义为

$$\mathrm{Ran}(R) = \{y \mid (\exists x)(xRy)\} .$$

注：一个关系的定义域 和值域都必是集合，此由下述命题所保证。

命题2 如果是 R 一个关系，那么 $\cup\cup R$ 是一个集合，且

$$(x, y) \in R \Rightarrow \{x, y\} \subseteq \cup \cup R 。$$

由命题2，我们有

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in \cup \cup R \mid (\exists y)(xRy)\} ;$$

$$\mathrm{Ran}(R) = \{y \in \cup\cup R \mid (\exists x)(xRy)\} .$$

这就证明了 $\mathrm{Dom}(R)$ 和 $\mathrm{Ran}(R)$ 都是集合。另外，显有

$$R \subseteq \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Ran}(R) 。$$

在数学理论中，有三类关系特别重要，它们是函数，等价关系和序关系。现让我们对函数概念作一考察。

定义7　称 f 是一个函数或映射，如果 f 是一个关系，且适合

$$(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))(\exists! y)((x,y) \in f) \text{。} \qquad (\text{单值性})$$

此时，按习惯，若 $f \subseteq a \times b$ 且 $\mathrm{Dom}(f) = a$，则称 f 是从 a 到 b 的函数或映射，记作 $f{:}a \to b$；若 $(x,y) \in f$，则记作 $y = f(x)$，并称 y 为 x 在 f 下的值或像，而 x 叫做 y 在 f 下的原像。

定义8　设 $f{:}a \to b$ 是一个映射。

(a) 若 $\mathrm{Ran}(f) = b$，则称 f 为满射；

(b) 若

$$(\forall x_1, x_2 \in a)((x_1 \neq x_2) \to (f(x_1) \neq f(x_2))),$$

则称 f 为单射；

(c) 若 f 既是单射又是满射，则称之为从a到b的双射。

常用符号 ${}^{a}b$ 表示从 a 到 b 的映射的全体组成的集合：

$$ {}^{a}b=\left\{ f\in \mathrm{P}\left(a\times b \right) \,\middle|\, f:a\to b \right\} 。$$

注：注意，${}^{a}b$ 是一个集合，并且

$$ {}^{\varphi}b=\{\varphi\}\ ,\qquad {}^{a}\varphi=\varphi\ \ \left(a\ne\varphi \text{ 时} \right)\ ,\qquad \text{以及}$$

$$ a\ne\varphi\Rightarrow\left(\forall f\in {}^{a}b\right)\left(\mathrm{Ran}\left(f\right)\ne\varphi\right) 。$$

命题3　设 a 是一个集合，$A(x,y)$ 是一个谓词公式，那么

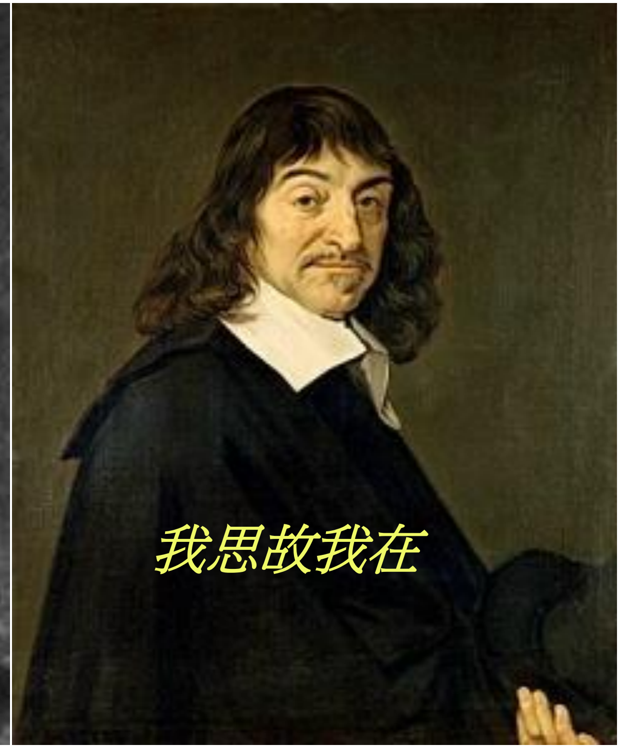
(a)　$(\forall x\in a)(\exists! y)\big(A(x,y)\big)\Rightarrow(\exists b)\Big(b=\big\{y\big|(\exists x\in a)\big(A(x,y)\big)\big\}\Big)$；

(b)　$(\forall x\in a)(\exists! y)\big(A(x,y)\big)\Rightarrow\left(\exists! f\in {}^{a}b\right)(\forall x\in a)\big(A(x,f(x))\big)$，

其中 $b=\big\{y\big|(\exists x\in a)\big(A(x,y)\big)\big\}$ 。

函数的概念是从17世纪人们在对各种运动问题的研究中逐渐形成的，它其先作为分析数学的研究对象出现。1692年，莱布尼兹最早采用“函数”这个术语，但当时函数的内涵还是比较模糊的。欧拉于1743年引进记号$f(x)$,并明确地把函数理解为“解析表达式”。狄黎赫莱特于1829年提出了变量间对应规则的函数观念。在现代数学中，函数概念已在集合论的框架内被精确地加以一般化，从而大大地拓宽了它的适用范围。

用集合论将函数概念一般化，标志着数学史上的一个里程碑。



欧拉（Leonhard Euler 1707-1783）瑞士 人，是科学史上最多产的一位杰出的数学家，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。

笛卡尔(René Descartes 1596~1650)，法国哲学家、数学家、物理学家。他因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父。

狄利克莱（Dirichlet）（1805-1859） 德国数学家。 他是解析数论的创始人之一。他在分析学和数学物理方面也有很多重大贡献.。

选择公理

选择公理（AC）是策墨罗于1908年与他的其他公理一道提出的，他当时的其他公理是（ZF1）–（ZF5）以及有限抽象原则和无穷公理（ZF7）；而替换公理模式（ZF6）与基础公理（ZF8）则分别是弗伦克尔于1922年与Von Neumann 于1925年提出的。ZFC-系统就是ZF-系统加**(AC)**的系统。

选择公理(AC)　对任何由两两不交的非空集合组成的集合x，总存在一个集合y，它与x的每个成员恰有一个公共元素。

$$\text{(AC)}\quad (\forall a)\Big(\big((\forall x\in a)(x\neq\varphi)\big)\rightarrow\Big(\big(\exists f\in {}^{a}\cup a\big)(\forall x\in a)\big(f(x)\in x\big)\Big)\Big).$$

在选择公理出现后的一段时间内，数学家们对它的使用争议叠起。争议的焦点在于：当 a 是一个非空集合的无限族时，选择公理断言 a 上的选择函数 f 存在就是对同时进行无限次选择的可能性的肯定，并且这种选择在a的成员都是非单元集时还带有很大的随意性。让数学家们对同时进行无限次随意选择的可能性加以认可，这在没有一点说法之前怎能不引起争议呢！

1938年，哥德尔证明：若ZF系统是相容的，即不会出现悖论，那么ZFC系统也是相容的。这就是说，在ZFC系统的框架内，使用选择公理是相对安全的——若有毛病，责任绝不会全在选择公理身上。有了这样的说法，关于选择公理的争议逐渐平息下来。但是，数学家们最终普遍接受这一公理，并不仅仅在于它相对于ZF系统的无矛盾性，而在于它对于现代数学所具有的巨大价值——现代数学的各个分支几乎都离不开选择公理！鉴于此况，数学家和逻辑学家们都自然非常关注ZF系统的相容性问题。直到现在，ZF系统是否相容是不知道的，但大多数逻辑学家相信它是相容的。

选择公理有许多等值形式，现列举三款如下：

单值化定理（AC1） 如果R是一个关系，那么存在映射f使得

$$f \subseteq R, \quad \text{并且} \quad \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(R) \text{。}$$

单射原则（AC2） 如果f是一个映射，那么存在单射g使得

$$g \subseteq f, \quad \text{并且} \quad \mathrm{Ran}(g) = \mathrm{Ran}(f) \text{。}$$

乘积定理（AC3） 如果$\{a_i\}_{i\in I}$是一族集合，那么

$$(\forall i\in I)(a_i\neq\varphi)\Rightarrow\prod_{i\in I}a_i\neq\varphi\ .$$

注:所谓$\{a_i\}_{i\in I}$是一个集族，意指它是一个映射ϕ，适合

$$(\mathrm{Dom}(\phi)=I)\wedge((\forall i\in I)(\phi(i)=a_i))\text{ 。}$$

若$\{a_i\}_{i\in I}=\phi$，则记

$$\bigcup_{i\in I}a_i=\bigcup\mathrm{Ran}(\phi)\text{ ，}\qquad\bigcap_{i\in I}a_i=\bigcap\mathrm{Ran}(\phi)\text{ （}I\neq\varphi\text{ 时），}$$

分别称作$\{a_i\}_{i\in I}$的并与交；我们还引进

$$\prod_{i\in I}a_i=\left\{f\in{}^{I}\bigcup_{i\in I}a_i\,\middle|\,(\forall i\in I)(f(i)\in a_i)\right\}\text{ ，}$$

称作的笛卡尔积。注意

$$\prod_{i\in I}a={}^{I}a\text{ ，}\qquad\prod_{i\in\varphi}a_i=\{\varphi\}\text{ 。}$$

选择公理的各种等值形式人们研究的很多，不同的形式适应于不同的应用，这足以表明它是一条基本的数学原则。由哥德尔定理我们知道，选择公理与ZF-系统是相容的；那么，一个自然的问题是：它是不是ZF-系统的一条定理呢？这个问题历经半个多世纪的研究，终于在1963年由美国的一位年青的数学家科恩所解决。科恩证明：（AC）不能作为ZF-系统的定理而推演出来。将科恩和哥德尔的结果合在一起的结论是（AC）和它的否定都不是ZF-系统的定理，它们之中任意一个都可以相容地补加到ZF-系统中作为新公理使用。从这样的结论看，（AC）的可接受或不可接受必然是一个直觉问题，它乃是也只能是数学家们的基本信条之一。选择公理被证明是一条数学原理，不能归约为逻辑。

哥德尔（Kurt Gödel,1906-1978）。奥地利—美国数学家、逻辑学家。美国《时代》杂志评选出对２０世纪人类思想产生重大影响的１００人中，哥德尔列为第４。

柯恩（Paul J. Cohen，1934-），美国数学家。他因在集合论基础方面的卓越工作于1966年获菲尔兹奖。

ZFC系统的数学价值

逻辑主义有一个不可否认的重大成就：它成功地根据合理的简单标准(完备性例外)，把全部经典数学都归约为单一的形式系统。这一成就被形式主义者——绝大多数数学家——大加赞赏，尽管他们并不像逻辑主义者那样认为“数学已被全部归约为逻辑”。

数学家们认为：数学确实有逻辑以外的题材，那就是表达式，而且她的最重要的简单真理是直观的——而非逻辑的——产物。

对于ZFC系统，可以说现代数学建立在以其为基础的结构之上，它是否可以全部归约为逻辑呢？数学界和哲学界一般认为，答案是否定的，原因就在于它有一组公理(共九条)是非逻辑性的，我们称之为ZFC的非逻辑公理组。这组公理体现着数学家来自心灵的共同信条，这正是ZFC系统的数学价值之所在。

思考题

1. 试述ZF系统的MP规则和GEN规则。
2. 什么是ZF系统的形式证明？你觉得形式证明与你习惯的数学证明有哪些不同点？
3. 形式证明的价值在哪里？
4. 为什么说ZF系统的形式语言与逻辑演算体现不出它的数学价值？

Thank you for your attention