数学是什么——

探寻数学思维的本质和精神

主讲：杜乃林

第四讲 有限无限纵横谈

——数学思维的自然本性

- 自然数的真貌
- 自然数系的基本原理
- “万物皆数”？

一、自然数的真貌

人类在进化的蒙昧时期，就已经有一种才能，这种才能姑且称作“数觉”。由于人有了这种才能，当在一个小的集合里边增减一样东西的时候，尽管他未曾知道增减已经发生，他也能觉察到其中的变化。这种原始数觉，许多权威动物学家认为，少数几种鸟类和蜂类也具有。注意，依靠数觉，普通文明人可以分辨的数目很少能超过四。应该承认，这种比鸟类高明不了多少的原始数觉，就是产生 “数”概念的核心——“0” 、“1”和“2”三个数目的先验性区分构成了人类理性思维的自然出发点。

数觉、计数技术、模范集合

但是，毫无疑问，如果单凭直接的数觉，人类在计算的技术上就不会比鸟类有什么进步。事实上，经历了一连串的特殊的环境，人类在极为有限的数觉之外，学会了另一种技巧来给自己帮忙，这种技巧注定了使人类未来的生活要受到难以估量的影响，这种技巧就是“计数”。“计数”与“数觉”不同，它牵扯到一种颇为复杂的心理过程，是人类很晚以后才有的收获，也是人类独有的特性。计数技术的灵魂就是序列的观念（想一想皮亚诺公理系统），它使具体的、不同质的表达多寡的各种模式演变为统一的抽象的数概念，形成了数学学科建立和发展的前提。

然而，不用计数技术，也可以得出一种合乎逻辑的明晰的数概念，那就是通过建立集合间所谓的相似关系来把全体集合分为一个个的相似类。当然，原始人类不会有弗雷格和罗素的相似类概念，但他们会不自觉地在身边的环境中找一个模范集合作为相似类的代表。原始人类有了语言及表达语言的符号（特别是能够被视觉分辨或听觉分辨的符号）后，他们就越来越依赖于语言及其符号，结果他们以符号来代替它所表的模范集合——这样，最初的各式各样的数字就产生了。记忆和习惯又使这些数字在人类的思维中获得了概念化的具体性，于是人类就只用数字来量度多寡，而将原来作为比较对象的模范集合渐渐忘却了。

这就是人类数学思维的开始——数概念形成！

相似与计数——对应与序列

数学的进一步发展实在应当归功于人类感悟到，数的相似类表示与计数表示的统一性。在实用上，相似类的数字表示很有用，也较简单，但它不能直接创造出算术来。算术的运算是依据“我们总是可以由一个数目数到它的后继数目”这一默认的假定而发展起来的，而这个假定正是计数技术的本质。

相似与计数，体现了人类两大数学思维模式——对应和序列。这两大模式已经深深渗透到全部数学——不只是数学，实际是精密思想的全部领域——之中。

回顾“数的弗雷格-罗素定义”

要在集合论的框架下展开全部数学，首先就必须在集合论中定义自然数。回顾数的弗雷格-罗素定义：

一个数目就是某个集合的数，而一个集合的数是所有与此集合相似的集合所成的类，称作相似类。

其中“相似”概念由双射概念来定义：

集合x与y是相似的，如果存在从x到y的双射。

问题一：每个“相似类”是集合吗？

在ZF-系统的框架下，数学对象都作为集合处理；这样，数学的基础中就可以避免悖论的产生。因此，像集宇宙这样的对象就不宜作为数学对象看待。依此观点，我们会形成这样的认识：如果每个“相似类”不是ZF-集合，那么它也就不应该称作是一个“数”。注意！“数”是一个数学术语，一个“数”，或说一个“数目”，理应是一个普通的数学对象，因而在ZF-系统的框架下理应是一个集合。

非空集合的相似类不是集合！

空集$\varnothing$是存在且唯一的，它的相似类是单元集$\{\varnothing\}$。这个相似类的确是一个集合。

但是，非空集合的相似类都不是集合。在此，我们给出单元集的相似类不是集合的证明。

以$\bar{1}$表示单元集的相似类，即$\{\varnothing\}$的相似类，那么

$$(\forall x)\left(\{x\}\in\bar{1}\right),\quad \text{即}\ \left\{\{x\}\mid x\in\Omega\right\}\subseteq\bar{1},$$

其中Ω表示集宇宙。

命题 0　相似类$\bar{1}$不是一个ZF-集合。

证明　假设$\bar{1}$是一个集合，则由幂集公理和有限抽象原则，

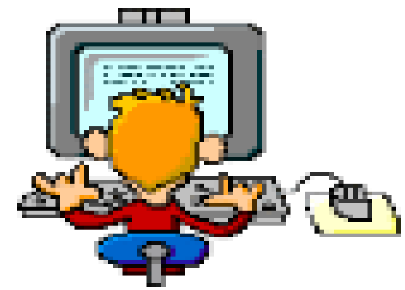
(1)　$$Z := \left\{ x \in \mathcal{P}\left(\bar{1}\right) \middle| \{x\} \notin x \right\}$$

是一个集合，其中$\mathcal{P}\left(\bar{1}\right)$表示$\bar{1}$的幂集。再由替换公理模式，

(2)　$$U := \left\{ \{x\} \middle| x \in Z \right\}$$

也是一个集合。显然，

(3)　$U \subseteq \left\{ \{x\} \middle| x \in \Omega \right\} \subseteq \bar{1}$，　即　$U \in \mathcal{P}\left(\bar{1}\right)$。



问题一这下有答案了！

于是，

- $\left(\{U\} \in U\right) \xrightarrow{(2)} \left(\left(\exists x \in Z\right)\left(\{U\} = \{x\}\right)\right) \to \left(U \in Z\right) \xrightarrow{(1)} \left(\{U\} \notin U\right)$，　矛盾；
- $\left(\{U\} \notin U\right) \xrightarrow{(3)+(1)} \left(U \in Z\right) \xrightarrow{(2)} \left(\{U\} \in U\right)$，仍矛盾！

问题二：在ZF-系统中怎样定义自然数？

在ZF-系统中，定义自然数应当满足四条要求：

1. 每个自然数都应当用一个集合去定义，它应当在相似关系下是其所在相似类的典型代表（不能指望相似类都构成集合）。
2. 全体自然数应当组成一个集合，并且自然数集合应当适合皮亚诺的五条公理，并因此特称作自然数系。
3. 在自然数之间应能定义加法和乘法运算，应能定义序关系。
4. 在一定的意义上说，自然数系是唯一的。

归纳集是存在的——数学信条之一

为了回答问题二，我们需引入集合的**后继运算**和**归纳集**的概念。

定义 0（后继） 集合 x 的后继，用 x^+ 表示，定义为

$$x^+ := x \cup \{x\}$$ （$\{x\}$ 表示仅有 x 一个元的单元集）。

定义 1（归纳集） 满足下列条件的集合 a 叫作归纳集：

(1) $\varnothing \in a$,

(2) $(\forall x)\big((x \in a) \to (x^+ \in a)\big)$ 。

归纳集有没有呢？这不是一个简单问题，ZF－系统有一条非逻辑公理就是针对这一问题而设：

$$(ZF7) \qquad (\exists x)\Big((\varnothing \in x) \wedge \big((\forall y \in x)(y^+ \in x)\big)\Big).$$

这就是无限公理，它意在声明归纳集是存在的。

最小归纳集ω——第一无限集合

归纳集的存在性已经成为整个现代数学理论的重要基石。由此信条和有限抽象原则，我们就会推出最小归纳集是存在的。

设S是事先给定的任一归纳集，我们定义

$$\omega := \left\{ x \in S \middle| (\forall T)\left(\left(T\text{是归纳集}\right) \to (x \in T)\right) \right\}。$$

显然，据无限公理，S是存在的，而据有限抽象原则，ω是一个集合。注意，ω具有性质:

(1) ω是一个归纳集，并且

(2) $\omega \subseteq$任一个归纳集。

因此，ω是最小的归纳集；它是我们在集合论中遇到的第一个实无限的数学对象。

自然数系就是最小归纳集！

定理 0　ω具有如下性质：

(1)　$\varnothing \in \omega$；

(2)　$(\forall x \in \omega)\left(x^{+} \in \omega\right)$；

(3)　$(\forall x, y \in \omega)\left((x \neq y) \rightarrow \left(x^{+} \neq y^{+}\right)\right)$；

(4)　$(\forall x \in \omega)\left(x^{+} \neq \varnothing\right)$；

(5)　$(\forall \xi \subseteq \omega)\left(\left((\varnothing \in \xi) \wedge \left((\forall x \in \xi)\left(x^{+} \in \xi\right)\right)\right) \rightarrow (\xi = \omega)\right)$。

此定理表明最小归纳集ω满足皮亚诺的自然数公理。因此，我们给出如下定义，以作为数学思维的自然源头：

定义 2　最小归纳集 ω 称作自然数系，其元素称作自然数。

至此，我们已在ZF-系统的框架下定义了自然数系。

二、自然数系的基本原理

ZF－系统中的自然数系ω说白了就是下面这个**自带天然序的集合序列**：

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\} \in \cdots$$

皮亚诺的自然数系是抽象的，表现在：它的三个原始概念“数”、“零”、“后继”是未加定义的，由五条公理来界定其相互关系——可看作借此集体地定义了这三个概念。但是，这三个概念有无对应的实体存在无法由这一理论自身回答。从形式集合论的角度看，皮亚诺公理系统可纳入ZF－系统的框架内作为一个抽象定义处理。

定义 2′ 设$\mathbb{N}$是一个非空集合，如果

(1) 在$\mathbb{N}$内存在一个特定元素，记为0；

(2) 存在$\mathbb{N}$到自身的一个映射，记作$n \mapsto n'$，称作后继函数，使得下面三条满足：

$a)$ $(\forall n \in \mathbb{N})(n' \neq 0)$；

b) $n \mapsto n'$ 是一个单射；

c) $(\forall A \subseteq \mathbb{N})\Big(\big((0 \in A) \wedge ((\forall n \in A)(n' \in A))\big) \to (A = \mathbb{N})\Big)$. (无穷公理)

那么称$\mathbb{N}$是**自然数系**，$\mathbb{N}$内的元素称为**自然数**。

自然数系的抽象定义

自然数基本定理之一——数学归纳原理

定理1（数学归纳原理） 设$P(x)$是一个含有自由变元x的谓词公式，那么

$$\big(P(0)\big)\wedge\Big(\big(\forall n\in\mathrm{N}\big)\big(P(n)\to P(n')\big)\Big)\Rightarrow\big(\forall n\in\mathrm{N}\big)\big(P(n)\big).$$

注：在使用数学归纳原理去证明数学命题时，必须注意有两个步骤缺一不可：

(1) 证明：$P(0)$真；

(2) 证明："若$P(n)$真，则$P(n')$真。"也真。

注 即便从抽象定义出发，数学归纳原理也应看作数学信条，是最重要而基本的数学思维！其理论意义在于帮我们人类超越了有限，达到了无限；而在方法上，它教会我们把问题"退"到最简单易解的情形，然后再超越经验归纳法而飞跃地"进"。

数学归纳原理，包含着一串无限多个三段论，每一个自身都是一致的。其有限个三段论所断言的都是逻辑的必然，但无限多个三段论所断定的却只能是数学的必然。当一个动作一旦可能，我们的心灵就能设想这个动作的无限次重复。这不是逻辑和经验强加给我们的，这是心灵的力量才能带给我们的。

自然数基本定理之二——递归原理

在抽象的自然数框架下，可以证明下列基本定理。

定理 2（递归原理） 设 S 是一个集合，$\varphi: S \to S$ 为一个映射，a 是 S 的任一个事先给定的元素。那么存在 $\mathbb{N}$ 到 S 的唯一的映射 $f: \mathbb{N} \to S$，满足

$$f(0)=a, \qquad f(n')=\varphi \circ f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

$$\begin{tikzcd} 0 \in \mathbb{N} \arrow[r, "\prime", "\text{后继}"'] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "f"] \\ a \in S \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

上述定理是我们做出递归定义的理论依据。例如，自然数的加法和乘法两种运算就是用递归方式定义的；它们的合理性就用到递归定理（这在后面就会看清楚）。

自然数基本定理之三——自然数系的统一性

定理 3（$\mathbb{N}$ 与 ω 的统一性） 对于$\mathbb{N}$与ω，存在唯一的双射 $h:\mathbb{N}\to\omega$，适合

$$h(0)=\varnothing,\qquad h(n')=\big(h(n)\big)^{+}.$$

$$\begin{tikzcd}
0\in\mathbb{N} \arrow[r, "\cdot'", "\text{后继}"'] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "h"] \\
\varnothing\in\omega \arrow[r, "\text{后继}", "\cdot^{+}"'] & \omega
\end{tikzcd}$$

基于上述定理，数学上$\mathbb{N}$与ω常不予区分。尊重数学家们的习惯，我们就将定义3′作为自然数系的标准定义。在此我们强调一点：自然数系是存在的集合，无限公理的引入无非就是为了肯定它在集宇宙中的合法存在性。

既然自然数系具有上述的统一性，那么对于自然数系$\mathbb{N}$，引入其元素的抽象记号就是自然的。自然数最常用的抽象记号系统就是它们的阿拉伯数字表示系统：

$$1=0',\quad 2=1',\quad 3=2',\quad \cdots,\quad 9=8',\quad 10=9',\quad \cdots\cdots$$

这一表示法的合理性由递归原理所保证。

自然数的运算

定义3（自然数的加法和乘法） 设$n \mapsto n'$表示自然数系$\mathbb{N}$上的后继函数，x, y表示$\mathbb{N}$中任意两个自然数。

（1） 自然数的加法，用“+”表示，是指$\mathbb{N}$上具有下列性质的运算：

$$x + 0 = x, \qquad x + y' = (x + y)'。$$

（2） 自然数的乘法，用“·”表示，是指$\mathbb{N}$上具有下列性质的运算：

$$x \cdot 0 = 0, \qquad x \cdot y' = x \cdot y + x。$$

注：定义3在定义加法和乘法时，对$\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，并未直接定义$x + y$和$x \cdot y$，而是规定(称作递归式定义)

$$\begin{cases} x + 0 = x, \\ x + y' = (x + y)', \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x \cdot 0 = 0, \\ x \cdot y' = x + x \cdot y。 \end{cases}$$

这需证明$\mathbb{N}$上的加法和乘法都是可以唯一实现的（满足相应规定的）运算。

自然数运算的合理性（存在唯一性）

在递归原理中，令 $S=\mathbb{N}$，$a=x\in\mathbb{N}$，$\varphi=\cdot':\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，那么存在唯一的映射

$$f=x+:\mathbb{N}\to\mathbb{N},y\mapsto x+y$$

使得

$$x+0=x,\qquad x+y'=(x+y)'。$$

$$\begin{tikzcd}
0\in\mathbb{N} \arrow[r, "\cdot'", "后继"'] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "f"] \\
x\in\mathbb{N} \arrow[r, "后继", "\cdot'"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

加法合理性

在递归原理中，令 $S=\mathbb{N}$，$a=x\in\mathbb{N}$，$\varphi=x+:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，那么存在唯一的映射

$$f=x\cdot:\mathbb{N}\to\mathbb{N},y\mapsto x\cdot y$$

使得

$$x\cdot 0=0,\qquad x\cdot y'=x+x\cdot y。$$

$$\begin{tikzcd}
0\in\mathbb{N} \arrow[r, "\cdot'", "后继"'] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "f"] \\
0\in\mathbb{N} \arrow[r, "加法", "x+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

乘法合理性

零，神奇无比！

- 单纯地看，零就是零，但仔细研究后，你会发现通过它你将可以了解这个世界。因为，数学表述着事物复杂的本质，而把庞大的数学体系连成了一个整体的是零。从简单的计数到复杂的运算，从估计事物发生的几率到精确知道与我们相关的事件何时达到最大值，这些有力的数学工具都让我们使用这样的思考方法：一个事件的发生与其他的事件相关，并且所有这些都离不开零这个中心。
- $e^{i\pi}+1=0$ 数学中最重要的常数都集中在这里了，而它们…！

三、“万物皆数”？

自然数的要点在于它们在整体上有两种数学结构——代数结构和序结构。其代数结构由加法和乘法服从的一组规律（称作运算律）和数学归纳原理所反映；其序结构由大小关系满足的一组性质和最小数原理所反映。

自然数的代数结构

加法交换律： $a+b=b+a$；

乘法交换律： $ab=ba$；

加法结合律： $a+(b+c)=(a+b)+c$；

乘法结合律： $a(bc)=(ab)c$；

乘法对加法的分配律： $a(b+c)=ab+ac$；

零律： $a+0=a$， 特别地，$0+0=0$；

一律： $1a=a$， 特别地，$1\cdot 1=1$。

数学归纳原理：以$\mathbb{N}$表示全体自然数的集合，若$X\subseteq\mathbb{N}$满足$0\in X$且当$a\in X$时必有$a+1\in X$，那么$X=\mathbb{N}$。

自然数的序结构

定义4 设$a,b\in\mathbb{N}$，如果方程

$$a+x=b \qquad \text{(Eq.1)}$$

有解$x\in\mathbb{N}$，就称a小于或等于b，用$a\le b$表示。如果$a\le b$且$a\ne b$，就称a小于b，用$a<b$表示。

$<$给出了自然数间的一种关系，这个关系我们称作$\mathbb{N}$上的**自然序**。

注 依此定义，方程(Eq.1)有解当且仅当$a\le b$。

定义5 设S是$\mathbb{N}$的一个子集，$a\in S$。如果

$$(\forall x\in S)(a\le x),$$

那么称a是S的**最小元**。

$\mathbb{N}$上自然序满足下述基本性质和原理

反自反性： $a \not< a$；

传递性： $(a<b)\wedge(b<c)\Rightarrow(a<c)$；

三分律： $(a<b)\vee(a=b)\vee(b<a)$，

三者居且仅居其一；

加法保序性： $a<b\Rightarrow a+c<b+c$；

乘法保序性： $(a<b)\wedge(c\neq 0)\Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$；

后继律： $a<a+1$， 特别地，$0<1<1+1$。

最小数原理： $\mathbb{N}$的任一非空子集都有最小元。

从自然数系到整数系

自然数系的数学结构尚不能保证方程（Eq. 1）总是有解，这在实际应用中极不方便。人的实践活动要求把自然数系扩充成一个使方程（Eq. 1）总有解的新数系。怎样实现这样的扩充呢？

据自然数的理论，显然有

(a) (Eq.1) 有解 $\Leftrightarrow a \le b$；

(b) (Eq.1) 有解 $\Rightarrow$ (Eq.1) 的解唯一。

因此，我们可以建立如下的映射：

$$\left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \,\middle|\, a\le b\right\}\to\mathbb{N},\quad (a,b)\mapsto b-a,$$

其中$b-a$在此作为一个符号看待，仅表示它是方程(Eq.1)的解，它由序偶(a,b)所唯一决定。注意符号$b-a$具有下述性质（很有启发性！）：

$$b-a=d-c\Leftrightarrow b+c=d+a。$$

整数系

定义6(整数)：一个整数是一个形如$a-b$的表达式，其中a和b是自然数，并且两个整数看作是相等的，规定为

$$a-b=c-d \text{ 当且仅当 } a+d=b+c。$$

用$\mathbb{Z}$表示全体整数组成的集合。

如果将整数$a-0$与自然数a等同，将整数$0-a$记作$-a$，并注意$-0=0$，那么整数表示有标准形式

$$\mathbb{Z}=\{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\cdots\}.$$

即便只为研究自然数问题，引进整数概念也是必要的，这会带来明显的便利和灵活性。

定义7 $\mathbb{Z}$上的加、乘、减等概念定义如下$(a,b,c,d\in\mathbb{N})$：

$$(a-b)+(c-d):=(a+c)-(b+d);$$

$$(a-b)\cdot(c-d):=(ac+bd)-(ad+bc);$$

$$(a-b)-(c-d):=(a+d)-(b+c);$$

$$-(a-b):=b-a;$$

$$|a-b|:=\begin{cases}a-b, & \text{当}a\geq b\text{时},\\ b-a, & \text{当}a<b\text{时}.\end{cases}$$

定义8 $\mathbb{Z}$上的序概念定义如下$(a,b,c,d\in\mathbb{N})$：

$$a-b\leq c-d :\Leftrightarrow a+d\leq b+c;$$

$$a-b<c-d :\Leftrightarrow a+d<b+c.$$

整数的运算和序的性质

设$a,b,c\in\mathbb{Z}$，那么

交换律：$a+b=b+a$，$ab=ba$；

结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$，$a(bc)=(ab)c$；

乘对加减的分配律：$a(b\pm c)=ab\pm ac$；

零一律：$a+0=a$，$1a=a$；

负数律：$a+(-a)=0$，$-(-a)=a$。

反自反性：$a\not< a$；

传递性：$(a<b)\wedge(b<c)\Rightarrow(a<c)$；

三分律：$(a<b)\vee(a=b)\vee(b<a)$，三者恰居其一；

加法保序性：$a<b\Rightarrow a+c<b+c$；

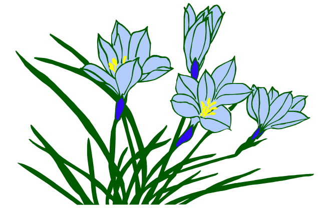
乘法保序性：$(a<b)\wedge(c>0)\Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$；

大小判据：$a<b\Leftrightarrow a+1\leq b\Leftrightarrow -a>-b\Leftrightarrow a-b<0$。

人们在日常生活中不仅需要数一数集合的元素个数(自然数之计数功能，针对有限集合)，而且需要度量(或说测量)集合之可标志其一定特性的各种量(尤其当涉及元素个数不宜作为分析对象的无限集合时如此)，如质量、长度、时间等物理量就是针对物质要考虑的无限集合的测度量。

选好度量单位，把度量问题转化为计数问题，分数$\frac{m}{n}$或者比$m:n$就自然而生了，它们是人造数，顺应度量之工具性的思维的产物(可理解为单位——度量第一工具——的延伸)，被称作**有理数**。自然数的算术运算及其运算律在有理数范围内仍然可建立起来，因此全体有理数的集合被称作**有理数系**。

有理数系的构造



方程（Eq.1）是由自然数系$\mathbb{N}$上的加法引出的方程，其解的存在性却不能在$\mathbb{N}$的架构下得到保证。为使方程（Eq.1）永远有解，我们将$\mathbb{N}$扩充成整数系$\mathbb{Z}$；注意，扩充的方式是将所有形如（Eq.1）的方程给出一个分类——属于同一类里的方程共解。这一方略很能反映数学家进行数系扩充的一种模式。

当然，$\mathbb{N}$上的运算不只加法，还有乘法。由乘法也可引入一个简单方程如下：

$$p\cdot x=q \qquad \left(p,q\text{已知，}p\neq 0\text{，而}x\text{未知待求}\right) \qquad (\text{Eq.2})$$

那么由此方程又能引出$\mathbb{N}$的怎样的扩充呢？鉴于$\mathbb{N}$已被扩充成$\mathbb{Z}$，方程（Eq.2）在$\mathbb{Z}$的架构下考虑当是更方便有利的。

按照讨论方程（Eq.1）的共解模式来讨论方程（Eq.2），可以将整数系$\mathbb{Z}$扩充成所谓的有理数系$\mathbb{Q}$，使在$\mathbb{Q}$的架构下方程（Eq.2）恒有唯一的解。

有理数系

定义9 (分数)：一个分数是一个形如$\frac{a}{b}$的表达式，也写作a/b，其中a和b是整数且$b \neq 0$（$a/0$不被认作是分数），并且，两个分数看作是相等的，规定为

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \ \textbf{当且仅当} \ ad=bc。$$

用$\mathbb{Q}$表示全体分数组成的集合，称作**有理数系。**

将分数$a/1$与整数a等同，将分数$a/(-1)$与整数$-a$等同，因此整数系$\mathbb{Z}$自动构成了有理数系$\mathbb{Q}$的子集。

定义10 $\mathbb{Q}$上的加法、乘法等概念定义如下：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}:=\frac{ad+bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}:=\frac{ac}{bd}; \qquad -\frac{a}{b}:=\frac{-a}{b}。$$

有理数的运算律

$\mathbb{Q}$上的加法和乘法适合如下各条：

推论 若$\frac{q}{p} \neq 0$，则$\frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{p}{q}$.

（I） 加法$+$满足

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) $x + 0 = 0 + x = x$;

4) $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists u \in \mathbb{Q})(x + u = u + x = 0)$， 记$u = -x$.

（II） 乘法$\cdot$满足

1) $x \cdot y = y \cdot x$;

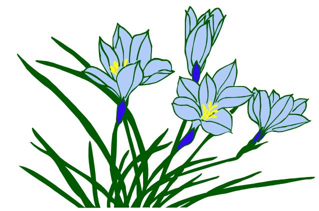
2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

3) $(\exists 1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{Q})(1 \cdot x = x \cdot 1 = x)$;

4) $(\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(\exists y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(x \cdot y = y \cdot x = 1)$，记$y$为$\frac{1}{x}$或$x^{-1}$.

（III） 乘法对加法的分配律 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

有理数系上的序



定义11 命$\mathbb{Q}_+ = \{q/p \mid p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N}\}$。设$x, y \in \mathbb{Q}$，称$x$小于或等于$y$（或说$y$大于或等于$x$），用$x \le y$（或$y \ge x$）表示，如果$y - x \in \mathbb{Q}_+$的话；称$x$小于$y$（或$y$大于$x$），用$x < y$（或$y > x$）表示，如果$x \le y$且$x \ne y$的话。

$\mathbb{Q}$上的序$\le$具有以下性质：

（I）若$x, y, z \in \mathbb{Q}$，则

1) **反自反性** $x \not< x$,

2) **传递性** $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$,

3) **三分律** $(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$,

4) **加法保序性** $x < y \Rightarrow x + z < y + z$,

5) **乘法保序性** $(x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$;

（II）**阿基米德公理** 若$a, b \in \mathbb{Q}$，且$a \ge b > 0$，则$(\exists q \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(a \le b \cdot q)$;

（III）**稠密性** $(\forall x, y \in \mathbb{Q})((x < y) \to ((\exists z \in \mathbb{Q})(x < z < y)))$.

欧几里得辗转相除法

定理4 如果$a\in\mathbb{Z}\left(a\in\mathbb{N}\right)$而$b$是一个正整数，那么我们总能找到一个$q\in\mathbb{Z}\left(q\in\mathbb{N}\right)$，使得

$$a=b\cdot q+r,$$

其中r是满足不等式$0\le r<b$的一个自然数。

设a和b是两个不全为0的整数，考虑a和b的公因子所组成的集合(能同时整除a和b的正整数的集合)，那么它一定是有限集。这个集合中存在最大元，称之为a和b的**最大公因子**，记作$\left(a,b\right)$。易知

$$\left(b,a\right)=\left(a,b\right)=\left(a-bq,b\right),\quad \left(0,b\right)=b\left(b\neq 0\right)。$$

欧几里得辗转相除法

因为

$$a = bq_0 + r_0 \quad (0 < r_0 < b),$$
$$b = r_0 q_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < r_0),$$
$$\cdots\cdots,$$
$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \quad (0 < r_{n-1} < r_{n-2}),$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + 0,$$

所以

$$(a,b) = (r_{n-1}, 0) = r_{n-1}, \qquad \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}。$$

此法本质上是一种物理操作程序。比如，完全可以将a,b看作两个长度。

记号 对于$q_0\in\mathbb{Z},\{q_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{N}\setminus\{0\}$, 记

$$q_0+\frac{1}{q_1+}\,\frac{1}{q_2+\cdots\cdots+}\,\frac{1}{q_n}:=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}},$$

称之为**有限简单连分数形式**。并且，称

$$q_0+\frac{1}{q_1+}\,\frac{1}{q_2+\cdots\cdots+}\,\frac{1}{q_n+\cdots\cdots}$$

为**无限简单连分数形式**。

定理5 每个分数都有唯二的有限简单连分数形式。

$$0=-1+\frac{1}{1},\quad \frac{11}{7}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1},\quad -\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1}。$$

有理数的几何解释

毕达哥拉斯(Pythagoras, 约公元前580-500)学派相信：对于任何两条线段(一般地，两个同类量)，总能找到第三条线段，以其为单位可将两条给定的线段都分为整数段。古希腊人称这样的两条线段为“可公度量”，意即有公共的度量单位的一对量。透过几何，这相当于说：世界上的任何量都可以相比一个单位量表示成两个整数之比，即某个有理数。这在历史上曾是毕达哥拉斯学派的信条 ——“万物皆数”。

在一条连绵不断的直线上，选定一个原点、一个序向和一个单位长度，那么可以将有理数0对应于直线上的原点，将1对应于直线上沿序向离原点有一个单位长度的点，将2对应于沿序向离原点有二个单位长度的点，等等——每个有理数都唯一地对应于直线上一点，这一点离开原点的距离与单位长度是可公度的，并且不同的有理数对应于不同的点——这样，**建立了从有理数系到直线的某个子集上的保序双射，并且有理数的像(有理点)在直线上是稠密的**。稠密性让人不由地相信**有理点覆盖了整条直线**——万物皆数的要害——如果你不信，那直线你可怎么理解呢？

思考题

1. 自然数系有哪些基本原理？谈谈你对它们的理解。
2. 谈谈你对零，乃至对自然数的看法。
3. 只有分数够用吗？谈谈你对有理数系的看法。
4. 谈谈你对直线的看法。

Thank you for your attention