数学是什么——

探寻数学思维的本质和精神

主讲：杜乃林

第五讲 运算与迭代的威力

——测量的算法之根

- 直线无痕
- 数形合一
- 我算故我在

一、直线无痕

公元前300年左右，古希腊数学家欧几里得写出了一部深刻影响人类文明史的著作《几何原本(Elements)》。在这部著作开头的基础部分，他对直线试图给出一个定义，要害表述如下：

* 线是没有宽度的长。
* 直线是与其上的点相平齐的线。
* 线的末端是点。
* 面的边缘是线。

这样的定义是无用的，没说明白直线是什么或会怎样。在数学史(甚至科学史)上，人们有2000余年把直线看成自在之物，所能做的似乎只是谨慎研究其性质。但是，这种直线观是空洞的，当作证明和构作的起点时，使人不得不借助各自的直觉去理解和把握它。

1687年，牛顿在《自然哲学之数学原理》里是这样使用自在之物的直线的：

定律Ⅰ（惯性定律） 每个物体都保持其静止或匀速直线运动的状态，除非有外力作用于它迫使它改变那个状态。

用这条定律，牛顿借数学直线规范了他的绝对时空观——时间之均匀流逝要靠认定匀速直线运动来测定，而空间之处处均匀且永不移动要看匀速直线运动的轨迹来判定。

“匀速直线运动”在牛顿这里的实质作用是：选择一类参照物规划出一个所谓的惯性系类，而“直线”则是用于约定不同惯性系间相对状态的元术语（不加定义的术语）。

应该说，《几何原本》的逻辑严谨性是经受住时间考验的——没人推翻书中所证明的任一命题，其缺陷出在非逻辑的基础部分，而最大缺陷就在于没给出数学上可使用的直线。牛顿把直线视作自在之物，处理方式是只讲它能在物理上干什么（惯性定律）——可以说，以此规定了直线概念。这是一个在物理上危机四伏的规定！可对后来的数学家来说，有启发意义。

1899年希尔伯特（D. Hilbert，1862-1943，德国数学家）的《几何基础》出版，1930年第七版，以及1956年的第八版（Bernays增订本），这使《几何原本》的基础部分终于在两千两百年后才得以彻底完善。希尔伯特用一组公理告诉人怎样逻辑地使用直线——尽管不知道直线是什么——“直线”，连同“点”和“平面”，是不加定义的原始概念！

在希尔伯特的欧氏几何公理系统里，讨论了三种**对象**，以及对象之间的三种**关系**，它们构成了原始的基本概念，其余的都可在这六个概念的基础上加以定义。

对象：“点”、“直线”和“平面”；

关系：“属于”、“介于”和“合同于”。

这些原始的基本概念又是什么呢？作为数学的几何学原来不关心这种问题，所关心的只是几何命题怎样纯逻辑地推得——从有限几个特别挑选的命题推得。这些特别挑选的命题就是所谓的公理——数学界的信条。

欧氏几何的希尔伯特公理系统

- 希尔伯特公理系统
  - 元词
    - 元名
      - 点
      - 直线
      - 平面
    - 元谊
      - 结合关系
        - 点在直线上
        - 点在平面上
      - 顺序关系——一点介于两点之间
      - 合同关系
        - 两线段相等
        - 两角相等
    - 以释万名万谊
  - 公理
    - 结合公理（I_1–I_8）
    - 顺序公理（II_1–II_4）
    - 合同公理（III_1–III_5）
    - 平行公理（IV）
    - 连续公理（V_1–V_2）
    - 以推万理万法

希尔伯特的几何公理化思维

- 如果从公理推得的结论完全按形式逻辑的法则所作出，那么只要认为公理成立，所谓对象（“点”、“直线”和“平面”）和这些对象间的所谓关系（“属于”、“介于”和“合同于”）究竟指的是什么就完全不起作用了。特别地，这些对象可以不必与通常直觉观念下的点、直线等发生任何关系。
- 所谓“点”、“直线”、“平面”和所谓“属于”、“介于”、“合同于”诸关系，指的是：只知道它们是满足诸公理的一些对象和关系——对它们没有给出直接定义，但可以说，公理系统间接地把它们作为整体而规定了。

• 直线统一于实数系

- **阿基米德公理（测量公理）** 若AB和CD是任意两线段，则必存在一个数n(正整数)使得沿A到B的射线上，自A作首尾相接的n个线段CD，必将越过B点。

- 基于这一公理，可以规定两个线段的比值$\dfrac{AB}{CD}$：对任意正整数n，将CD分成n等份后，在射线AB上自A陆续加接线段$\dfrac{CD}{n}$，直到刚好超过B点为止，设加接$\dfrac{CD}{n}$的次数是m_n，那么可以证明，当$n \to \infty$时$\dfrac{m_n}{n} \to$某实数r；我们称这个极限r叫做比值$\dfrac{AB}{CD}$。可是，实数是什么？先设有个实数系吧。

- 这样，心中有了实数系，你只需一把尺子就能量出一条直线来！直线因此才成为起指导和推动作用的概念——其直观和构作才有了要素和灵魂。

- **希尔伯特实数系$\mathbb{R}$——实数全体构成一个具有下列性质1-18的体系：**

1. 从一个数a和一个数b，经过“加”，产生一个确定的数c；用记号表示为

$$a+b=c \qquad 或 \qquad c=a+b。$$

2. 设a和b是两个给定的数，恒恰有一个数x存在，和恒恰有一个数y存在，分别使得

$$a+x=b, \qquad\qquad y+a=b。$$

3. 有一个确定的数，叫做0（零），使得对每个数a，同时有

$$a+0=a, \qquad\qquad 0+a=a。$$

4. 从一个数a和一个数b，经过另一种运算“乘”，产生一个确定的数c；用记号表示为

$$ab=c \qquad 或 \qquad c=ab。$$

5. 设a和b是任意两个数，而且a不是0，恒恰有一个数x存在，也恒恰有一个数y存在,分别使得

$$ax=b, \qquad\qquad ya=b。$$

6. 有一个确定的数，叫做1（壹），使得对每个数a，同时有

$$a1=a, \qquad\qquad 1a=a。$$

实数的运算律 设a、b、c是任意三个数，下列六个等式恒成立：

7. $$a+(b+c)=(a+b)+c;$$

8. $$a+b=b+a;$$

9. $$a(bc)=(ab)c;$$

10. $$a(b+c)=ab+ac;$$

11. $$(a+b)c=ac+bc;$$

12. $$ab=ba。$$

实数的顺序

13. 任意两个不同的数a和b恒恰有一者大于另一者。若a大于b，则表示为

$$a>b \quad 和 \quad b<a;$$

对任意数a，$a>a$不成立。

14. 若$a>b$，而且$b>c$，则$a>c$。

15. 若$a>b$，则恒有

$$a+c>b+c。$$

16. 若$a>b$，而且$c>0$，则恒有

$$ac>bc。$$

实数的连续性

17.（**阿基米德性质**） 如果$a>0$和$b>0$是任意两个数，那么存在正整数n，使得n个a相加的和大于b，即

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}a\text{相加}}>b。$$

18.（**完备性质**） 实数系不可能增加新元素(当作新数)，使扩充的新体系在保持数间的关系$(+,\times,>)$下仍保持性质1~17都成立。等价地讲，实数系在保持全体关系和性质1~17都有效的条件下不可能再扩充。

——实数刻画18条，本质是直线刻画，摘自希尔伯特的《几何基础》

满足性质1-12(作为公理)的对象的集合，在近世代数里叫做**域**；若再满足性质13-16，就称作**有序域**。至于连续性质17-18，则可以证明它们只是把一般有序域变为全体实数的域—实数系$\mathbb{R}$—罢了，而$\mathbb{R}$是结构唯一的，即，具有性质17-18的有序域都序同构(保代数运算和大小关系的)。

例 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$、$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$都是具有性质17的有序域($\mathbb{R}$的有序子域)，但三者俩俩不能序同构。此外，$\mathbb{Z}_p$是域，但不是有序域。

直线无痕，它存在于与其他对象的关系中——难免让人感觉它的存在仍有悬念。这反使我们倍感毕达哥拉斯“万物皆数”信念的崇高，不禁要问：

1）无痕直线上可以建立自然数系吗？

2）直线上面的自然数是构筑它的基本原子吗？

二、数形合一

选好度量单位，把度量问题转化为计数问题，两条线段的比值——分数——就自然而生了：若将度量单位看作1，自然地，1可细分成无限多个更小的单位（增加自然的测量精度）

1/2、1/3、 …、1/n、 …

那么天下线段与度量单位的比值还能逃出下表吗？

1/1、1/2、1/3、…、1/n、…

2/1、2/2、2/3、…、2/n、…

… … … …

分数有理，分数又被称作**有理数**，其全体称作**有理数系**。

在一条连绵不断的直线上(权当直线是自在之物)，选定一个原点、一个序向和一个单位长度，那么可以将有理数0对应于直线上的原点，将1对应于直线上沿序向离原点有一个单位长度的点，将2对应于沿序向离原点有二个单位长度的点，等等——每个有理数都自然地唯一对应于直线上一点，这一点离开原点的距离与单位长度是可公度的，并且不同的有理数对应于不同的点。这样，建立了直线上的一个有理数系，有理数(自然也称作有理点)在直线上稠密。

稠密性让人不由地相信有理点覆盖了整条直线(“万物皆数”的要害)。如果你不信，那直线你可怎么理解呢？——一看到希尔伯特的直线18条，真心让人晕啊！

有理点真的可以覆盖整条直线吗？古希腊的毕达哥拉斯学派本来相信如此——不信才怪，就度量的需要看，有理数是真的足够了！可他们也惊恐地意识到(基于他们发现了勾股定理)：**全体有理点并不覆盖整条直线，而只是稠密分布在直线上！**

更令人惊奇的是：古希腊人在发觉上述真相时并不真正了解直线是什么！而是证明**一个正方形的对角线与其边是不可公度的**。这是科学史上极其重要的事件，很可能标志着数学严格证明的起源。可以说，从古希腊时代直到今天，这个事件一直深刻影响着数学和哲学。

引进有理数的动机是：任何线段在用单位(长度)度量时，其长度可望用有理数来表示。人们造出有理数系，使与单位可公度的线段都有了长度可言。这里自然遵循一条测量的原则：被测线段起码要有长度和可表示长度的数。

当出现与单位不可公度的线段时，如果仍望上述原则有效，我们就须突破有理数系而引进新数——无理数——以便使单位正方形之对角线这种正常的线段有长度一说。

注意：就因为没有无理数一说，一条线段——再正常不过的线段——有无长度可言竟然与测量它的尺子有关！

这在历史上引发了的第一次数学危机，并种下了第二次数学危机的种子。

第一次数学危机

- 毕达哥拉斯学派所说的数仅指整数，他们不把两个整数之比看作一个分数并看成是另一类数。当时分数是用于商业上的，以表示钱币或度量单位的若干部分，但算术的这类应用是属于正统希腊数学之外的。
- 毕氏学派所关心的是能形成直角三角形三边的三元整数组，他们很可能在这项研究中发现，等腰直角三角形的斜边与一直角边之比，或正方形的对角线与其一边之比，不能用整数之比表达。他们把能用整数之比表达的比称作可公度比，意即相比两量可用公共度量单位量尽，而把不能这样表达的比称作不可公度比。
- 后人把不可公度比的发现归功于西帕苏斯(Hippasus)。这一发现动摇了毕达哥拉斯学派的“万物皆数”信条——宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。

$\sqrt{2}$与1不能公度的证明是毕达哥拉斯学派给出的。据亚里士多德说，他们用归谬法证明：假设等腰直角三角形的斜边与一直角边之比是整数之比m/n，其中m,n互素，那么根据毕达哥拉斯定理，$m^2=2n^2$。这将导致n既是奇数又是偶数（注意奇数的平方是奇数）。

第一次数学危机的深层背景

- 直线让人意识到无理数的存在，可困于不知直线是什么，逻辑上不能用线段去定义无理数。人们可从哪里找到无理数“存在”的证明？
- 直线是什么？直到19世纪中期没人说出个一目了然的式样来，但简单的直觉告诉人们：它是既“直”又“连通”的。假设直线存在，并且其上可建立自然数系，那么衍生的有理数系提供了“直”的模式，并显露出“连通”的线索——“连通”的承载点(无理点)。
- 直线一度成了数学家们的执念——越说不清楚，越想理解清楚！合理定义无理数成为真正理解直线的关键——这是历史上数学家必须跨过的无可回避的思维陷阱。

19世纪中期，无理数定义这一棘手问题在纯算术化基础上解决了。德国数学家戴德金(1831-1916)和康托尔(1845-1918)是解决这一问题的杰出代表。他们的定义方式都是从有理数来生成无理数，这叫做实数的构造理论。

希尔伯特称这些方法可能有教学和直观推断的价值，但实数系若采用公理化方法处理，将在逻辑上更为可靠。他为此提出了一组实数公理（见前面介绍的实数刻画18条），并声称优于实数的构造理论。对此，罗素的回答是：这组公理有窃取辛勤劳动成果的优越性，它一下子就假定了那些能从小得多的一组公理推演出来的东西。

戴德金（Dedekind, J. W. Richard ，1831-1916），德国数学家，他提出每个实数都定义成有理数系的一个“戴德金分割”的理论，因而成为现代实数理论的奠基人 。

戴德金分割

定义：无论按何方法把全体有理数分成两类α_-和α_+，使得

$$(\forall x \in \alpha_-)(\forall y \in \alpha_+)(x < y),$$

即，α_-中的每一个有理数小于α_+中的任意一个有理数，
都将这样的分类称作有理数系的一个**戴德金分割**，记作$\alpha_-|\alpha_+$。

任意一个这种分割$\alpha_-|\alpha_+$不外乎是且只能是以下三种情况之一：

(1) α_-有一个最大者r (r是α_-与α_+之间的界数);

(2) α_+有一个最小者r (r是α_-与α_+之间的界数);

(3) α_-中无最大者，而α_+中无最小者。

前两种情况出现时，分割$\alpha_-|\alpha_+$称作**有理戴氏分割**，以有理数r标记；
第三种情形出现时，$\alpha_-|\alpha_+$称作**无理戴氏分割**。

全体戴德金分割组成的集合称作**实数系**，记作$\mathbb{R}$，其中的有理戴氏分割称作**有理数**，而无理戴氏分割称作**无理数**。

对应于$\sqrt{2}$的戴德金分割

$$\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}_{-}\middle|\sqrt{2}_{+}\right),$$

其中 $\sqrt{2}_{-}=\left\{r\in\mathbb{Q}\middle|r<0,\text{或}\ r\geq 0\text{且}r^{2}<2\right\},$

$$\sqrt{2}_{+}=\left\{r\in\mathbb{Q}\middle|r\geq 0\text{且}r^{2}>2\right\}.$$

当我们在有理数系$\mathbb{Q}$中找不到对象可以作为$\sqrt{2}_{-}$与$\sqrt{2}_{+}$之间的界时，我们干脆就拿对$\mathbb{Q}$分割的方法本身$\left(\sqrt{2}_{-}\middle|\sqrt{2}_{+}\right)$作为$\sqrt{2}_{-}$与$\sqrt{2}_{+}$之间的界，并称这个界为一个无理数。

数与寻找数的方法达成了统一！

实数系的完备性(连续性)

实数系的完备性究竟是什么意思呢？这需从实数的大小关系说起。

对于任意的有理数r，以r为界数的分割有两种，它们都可以看作有理数r。为确定起见，若戴德金分割$\alpha_-|\alpha_+$以r为界数，那么我们总是将r移到α_+内；这样，我们约定：以下考虑的戴德金分割$\alpha_-|\alpha_+$都适合：α_-内没有最大数。

在上述约定下，我们来定义实数系$\mathbb{R}$上的序，即大小关系：

设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，命$\alpha=(\alpha_-|\alpha_+)$，$\beta=(\beta_-|\beta_+)$，定义

$$\alpha=\beta :\Leftrightarrow \alpha_-=\beta_-, \qquad \alpha\le\beta :\Leftrightarrow \alpha_-\subseteq\beta_-,$$

$$\alpha<\beta :\Leftrightarrow (\alpha\le\beta)\wedge(\alpha\ne\beta).$$

不难证明以下三条性质：

(1) 若$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则有且仅有下列三种关系之一成立：

$$\alpha<\beta, \qquad \alpha=\beta, \qquad \beta<\alpha. \qquad (\textbf{三择一性})$$

(2) 若$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$，且$\alpha<\beta,\beta<\gamma$，则$\alpha<\gamma$. (**传递性**)

(3) 若$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，且$\alpha<\beta$，则$\exists r\in\mathbb{Q}$使得$\alpha<r<\beta$. (**稠密性**)

在建立戴德金分割意义下的实数系**R**后，实数的大小关系依集合的包含关系被诱导出来，这便得到一个全序集（**R** ,≦）。基于此，戴德金给出下面的结果，称作实数系的完备性，也称作连续性。

戴德金完备性定理 如果 $A_-|A_+$ 是 $(\mathbb{R},\leq)$ 的一个戴德金分割，即

(1) $A_-\cup A_+=\mathbb{R}$， $A_-\cap A_+=\varnothing$，且 $A_-\neq\varnothing$，$A_+\neq\varnothing$，

(2) $(\forall x\in A_-)(\forall y\in A_+)(x<y)$，

那么 $(\exists!\alpha\in\mathbb{R})(\forall x\in A_-)(\forall y\in A_+)(x\leq\alpha\leq y)$，即，$\alpha$ 或者是 A_- 的最大元，或者是 A_+ 的最小元。

实数系的连续性表达的是直线（数轴）的连通性——每个戴德金分割有且只有一个点来产生这个分割。对直线而言，它是一条公理，是我们构筑直线概念的基本信条之一。

戴德金分割的数学价值

- 戴德金分割（1872年）第一次提炼出几何上刻画“连通”的模式，连通观念由此才演变为数学概念——连通性是现代数学之拓扑学中的一个基本概念，表现了经典数学不曾仔细考究过的一种几何形态(拓扑不变量)。
- 无需赘言就看出，戴氏分割给出的是实实在在的直线模型，在自然引入分割的算术运算后就是实实在在的实数系模型。这达到了数形合一的境界，重塑了“万物皆数”观——直线统一于实数系(非形而上学的自在之物)：

  直线 ≡ 尺子(度量单位) + 实数系($\mathbf{R}, \leqslant, +, \times$)；

  实数系($\mathbf{R}, \leqslant, +, \times$) ≡ 有理数系($\mathbf{Q}, \leqslant, +, \times$) + 戴氏分割；

  戴氏分割 ≡ 寻找无理数之法 ≡ 无理数。
- 戴氏分割方案是希尔伯特实数系公理系统（1899年）的具体实现。

三、我算故我在

古希腊毕达哥拉斯学派相信：对于任何两条线段(一般地，两个同类量)，总能找到第三条线段，以其为单位可将两条给定的线段都分为整数段。他们称这样的两条线段为“可公度量”，意即有公共的度量单位的一对量。透过几何，这相当于说：世界上的任何量都可以相比一个单位量表示成一个整数或两个整数之比，即某个有理数。那么，古希腊人怎样找到一对量的公度单位和它们相比所得的整数之比呢？

最大公因子（最大公约数）——公度单位之根

设a和b是两个不全为0的整数，考虑a和b的公因子所组成的集合（能同时整除a和b的正整数的集合），那么它一定是有限集。这个集合中存在最大者，称之为a和b的**最大公因子**或**最大公约数**，记作(a,b)。易知

$$(0,b)=b(b>0), \qquad (b,a)=(a,b)=(a-bq,b)。$$

欧几里得定理（测量定理） 如果$a\in\mathbb{Z}(a\in\mathbb{N})$而$b$是一个正整数，那么我们总能找到一个$q\in\mathbb{Z}(q\in\mathbb{N})$，使得

$$a=b\cdot q+r,$$

其中r是满足不等式$0\le r<b$的一个自然数。

欧几里得辗转相除法

因为

$$a = bq_0 + r_0 \ \left(0 < r_0 < b\right), \qquad a/b = q_0 + \frac{1}{b/r_0},$$

$$b = r_0 q_1 + r_1 \ \left(0 < r_1 < r_0\right), \qquad b/r_0 = q_1 + \frac{1}{r_0/r_1},$$

$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots,$$

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} \ \left(0 < r_{n-1} < r_{n-2}\right), \qquad r_{n-3}/r_{n-2} = q_{n-1} + \frac{1}{r_{n-2}/r_{n-1}},$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 0, \qquad r_{n-2}/r_{n-1} = q_n,$$

所以

$$(a,b) = (r_{n-1}, 0) = r_{n-1}, \qquad \frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}。$$

@一对量的公度单位和比值

附　从欧几里得辗转相除法，不难看出，前n个等式依次出现了从r_0到r_{n-1}这n个余项，为得到最大公因子(a,b)而从这n个等式反向依次解出r_{n-1}到r_0，并消去它们，那么就得到(a,b)的下述一种有用的表示：

$$(a,b)=r_{n-1}=r_{n-3}-r_{n-2}q_{n-1}=\cdots=ax+by,\quad \text{其中} x,y\in\mathbb{Z}。$$

写成一种严谨的表述如下：

推论　若a,b是不同时为零的整数，那么存在整数x,y使得

$$(a,b)=ax+by。$$

对于整数m，以记号$n|m$表示n是它的非零因子。上述推论也可如下证明：

证　令$S:=\{ax+by \mid x,y\in\mathbb{Z},\text{且} ax+by>0\}$，则存在$d\in S$使得$d$在$S$中达到最小。显然，$(a,b)|d$，从而$(a,b)\le d$。

另一方面，按测量定理，a,b可表示为

$$a=q_0d+r_0,\quad 0\le r_0<d,\qquad\qquad b=q_1d+r_1,\quad 0\le r_1<d。$$

注意到$d\in S$，就得$r_0=r_1=0$（假若不然，非零者必属于S，此与d在S中达到最小相悖）。这就证明了$d|a$且$d|b$，从而$d\le(a,b)$。　□

突破整数的辗转相除法

对于 $a=\sqrt{2}$ 与 $b=1$，欧几里得算法仍有效：

$$a = bq_0 + r_0 \quad (0<r_0<b), \qquad a/b = q_0 + \frac{1}{b/r_0},$$

$$b = r_0 q_1 + r_1 \quad (0<r_1<r_0), \qquad b/r_0 = q_1 + \frac{1}{r_0/r_1},$$

$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots,$$

$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \quad (0<r_{n-1}<r_{n-2}), \qquad r_{n-3}/r_{n-2} = q_{n-1} + \frac{1}{r_{n-2}/r_{n-1}},$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \quad (0<r_n<r_{n-1}), \qquad r_{n-2}/r_{n-1} = q_n + \frac{1}{r_{n-1}/r_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots。$$

无限运行！

这样一来，得一列量 $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和一列整数 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$，并形式地得：

$$\left(\sqrt{2},1\right) = \left(r_{n-1}, r_n\right) = \cdots, \qquad \frac{\sqrt{2}}{1} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n + \ddots}}}}。$$

问题：怎样算出诸 q_n 和诸 r_n？

注意由$\sqrt{2}$适合$x^2=2$，

$$x=1+\frac{1}{1+x}$$

$$=1+\frac{1}{1+1+\dfrac{1}{1+x}}$$

$$=1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{1+x}}$$

$$=1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+x}}}=\cdots$$

这推断出：

$$q_0=1,\quad q_n=2\ (\forall n\geq 1)。$$

进一步，把所得诸q_n代入欧几里得算法，得

$$\sqrt{2}=1+r_0\quad\left(0<r_0=\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}<1\right),$$

$$1=2r_0+r_1\quad\left(0<r_1=1-2r_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2<r_0\right),$$

$$r_0=2r_1+r_2\quad\left(0<r_2=r_0-2r_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^3<r_1\right),$$

一般地，

$$r_n=2r_{n+1}+r_{n+2}\ \left(0<r_{n+1}<r_{n+2}\right),\quad n\in\mathbb{N}。$$

基于此立即归纳出诸r_n：

$$r_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{n+1},\quad n\in\mathbb{N}。$$

这些演算暗示——尽管有失逻辑支撑—— $\left(\sqrt{2},1\right)=(0,0)\overset{?}{=}0$，$\dfrac{\sqrt{2}}{1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}$！

简单连分数形式——一种整数的算法

对于$q_0 \in \mathbb{Z}, \{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$，引入记号

$$q_0 + \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_2 +} \cdots \cdots + \frac{1}{q_n} := q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}},$$

称之为**有限简单连分数形式**。并且，称

$$q_0 + \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_2 +} \cdots \cdots + \frac{1}{q_n +} \cdots \cdots$$

为**无限简单连分数形式**。

数不过是一种算法的记号而已

定理1 设$\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$适合

（*）$$(\forall n\in\mathbb{N})\big((n>0)\to(\alpha(n)>0)\big).$$

并命

$$\alpha_{-}=\left\{r\in\mathbb{Q}\,\middle|\,(\exists n\in\mathbb{N})\left(r<\alpha_0+\frac{1}{\alpha_1+\cdots\cdots+}\frac{1}{\alpha_{2n}}\right)\right\},$$

$$\alpha_{+}=\left\{r\in\mathbb{Q}\,\middle|\,(\exists n\in\mathbb{N})\left(r>\alpha_0+\frac{1}{\alpha_1+\cdots\cdots+}\frac{1}{\alpha_{2n+1}}\right)\right\},\quad \text{其中}\ \alpha_n=\alpha(n),$$

那么$\alpha_{-}|\alpha_{+}$是有理数系$\mathbb{Q}$的一个无理戴德金分割。

反之，如果$(A_{-}|A_{+})$是$\mathbb{Q}$的任意一个无理戴德金分割，那么存在唯一的适合条件(*)的映射$\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$使得

$$\begin{cases}\alpha_{-}=A_{-},\\ \alpha_{+}=A_{+},\end{cases}\qquad \text{写作}\quad A_{-}|A_{+}=\alpha_0+\frac{1}{\alpha_1+}\frac{1}{\alpha_2+\cdots\cdots+}\frac{1}{\alpha_n+\cdots\cdots}。$$

定理2 每个有理数都有唯二的有限简单连分数表示：

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+\cdots+}\frac{1}{q_n}\overset{q_n>1}{=\!=\!=\!=}q_0+\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+\cdots+}\frac{1}{q_n-1+}\frac{1}{1}。$$

算法的根本性

（1）算术元运算制定了数学中最原始的算法：

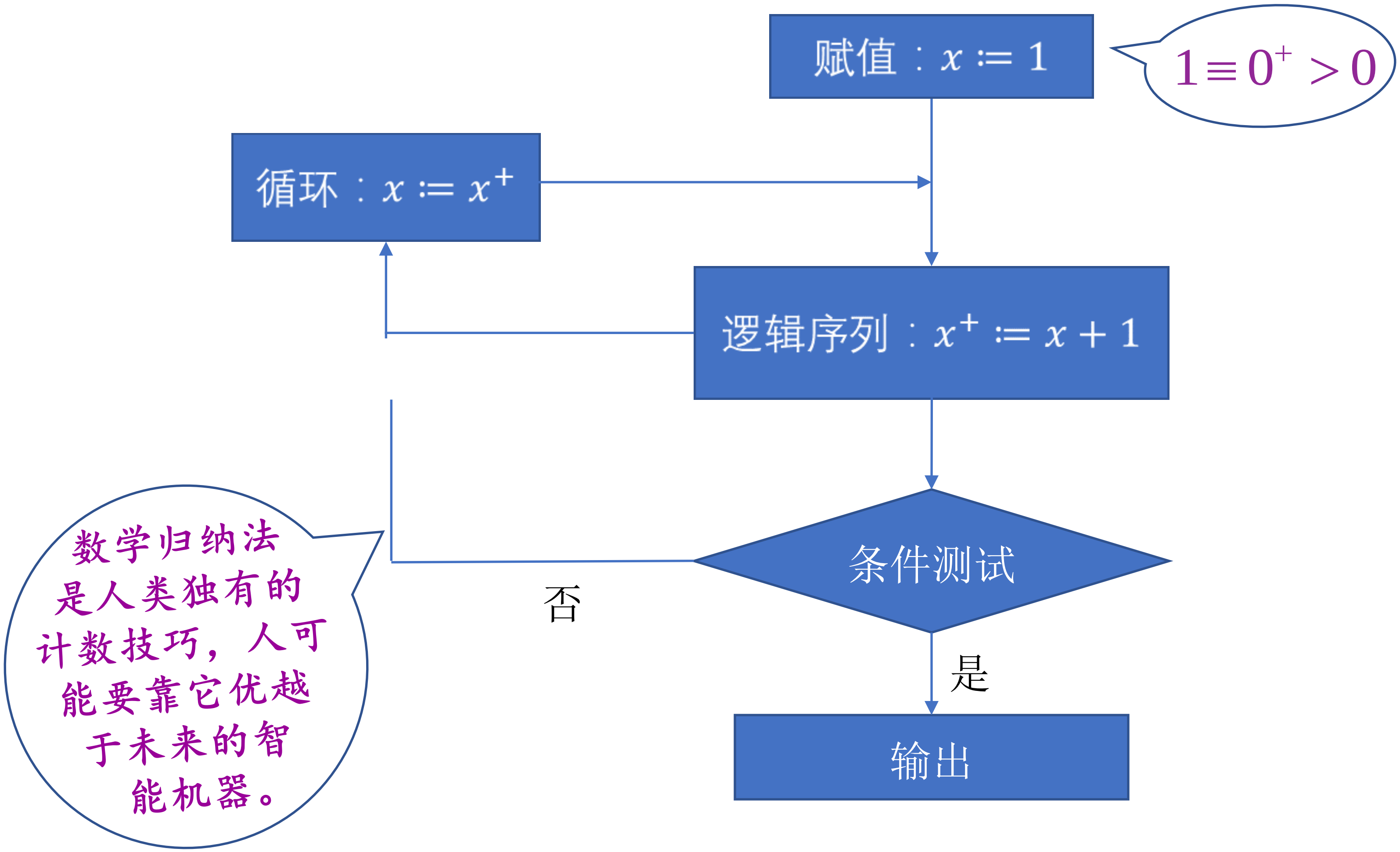
◈加法＋（以a^+表示a的后继者）：对每一对自然数a和b，有唯一的和$a+b$存在，使得

$$a+0=a, \quad a+b^+=(a+b)^+.$$

◈ 乘法×：对每一对自然数a和b，有唯一的积$a\times b$存在，使得

$$a\times 0=0, \quad a\times b^+=a\times b+a.$$

（2）数学归纳法是个不停机算法



（3）如果承认戴德金分割定义了无理数和有理数，那么戴德金完备性定理在逻辑上等价于：对自然数进行的简单连分数算法总是收敛的。

所以

每个简单连分数被认作实数无疑等价于每个戴德金分割是实数。这就是让你承认简单连分数算法无条件合法——有限步算出个有理数(有限步内停机)，而无限步算出个无理数(有限步内不能停机)！这与承认数学归纳法一样属超逻辑的心灵功能。

数与算法达成了统一

从算法的视角看，直线所带来的思维陷阱可归结为无理连分数算法越出了“有限步停机”的规则。

好在每个无理连分数算法都满足：在人们任意设定了一个期待的误差界后，“有限步停机”必可实现。而这可以作为你对这套算法的收敛性所持有的信念 —— 恰如牛顿所信 ——

“量以及量的比值(数)，在任何有限时间范围内连续地向着相等接近，而且在该时间终了前相互趋近，其差小于任意给定值，则最终必然相等(相等于相信有而会有的一个极限)。”(摘自牛顿《自然哲学之数学原理》的引理1)

最后，回顾自然数可以单纯地归结成记号：

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in \cdots\cdots。$$

作为习惯记法，注解如下：

$$0 := \varnothing, \quad 1 := 0^{+}, \quad x^{+} := x \cup \{x\};$$

$$\mathbb{N} := \{1, 1^{+}, 1^{++}, \cdots\cdots\} \quad (\text{经典版}),$$

$$\mathbb{N} := \{0, 0^{+}, 0^{++}, \cdots\cdots\} \quad (\text{修订版})。$$

经典数学归结到根上只剩算法！

经典数学，我算故我在也！

思考题

1. 写出本讲所述的测量公理和测量定理。
2. 求分数 22/7 和 355/113 的简单连分数形式。
3. 设m是非完全平方的自然数，试证明m的平方根是无理数。

   提示：对于正整数a、b、c，若 $a|bc$ 且 $(a,b) = 1$，则$a|c$。
4. 求出3、5、7的平方根的简单连分数形式，你能看出这些形式有哪些特点？
5. 试论“直线统一于实数系”和“万物皆数”的观点。

Thank you for your attention