数学是什么——

探寻数学思维的本质和精神

主讲：杜乃林

第一讲 数学是什么——

历史线索和专业设置

- 数学是什么
- 数学的四大专业

一、数学是什么——历史线索

对于今日受过初等教育的人，数学最明显的出发点就是自然数序列（前十项是计数符号，称作阿拉伯数字）：

0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，…… 。

人类竟然连幼童都能轻松运用这个序列，因而在智力上整体获得了其他动物种类无法比拟的飞跃。

这个我们如此习惯的数学概念，有着十分悠长的演变历程，其深刻程度代表着人类心智的优势，很不简单！

自然数计数系统大约在35000年前就有了(经考古得知)，但其十进制阿拉伯数字表示法却是公元五六世纪(大约1500年前)才演变成形的。灵动的“阿拉伯数字”其实是印度人对数学的耀眼贡献，大约1200年前，由阿拉伯商人传至阿拉伯国家和欧洲，继而传向世界。阿拉伯数字传入我国大约在700年前，被国人广泛使用则只有100多年的历史。

十进制阿拉伯数字表示法不仅可简单表示出自然数序列中的任何一个数目，而且方便于展开各种形式的自然数运算。这极大地促进了自然数，乃至整个数学，在人类社会中的广泛应用和普及教育。

可以毫不夸张地说，自然数列——又称自然数系——一直处在一切水平的数学讨论的中心。这是因为：它体现着数学最基本的目的——计数——十进制阿拉伯数字表示法是一种最普及的简便计数方法。我们自然而然地断言：

自然数（系）是数学。

反之，我们要问：

数学就是关于自然数（系）的吗?

这可难言对否——这严重依赖于我们对数学的认识——

数学是什么？

公元前6世纪以前，数学主要是关于“数”的研究，主要是计数、初等算术，而几何则只能看作是应用算术。这一历史阶段史称数学的起源和早期，数学在古埃及、巴比伦、印度与中国等地区得到率先发展。

大约公元前580年，古希腊数学家(更是哲学家)毕达哥拉斯诞生。他长大后游历了埃及和巴比伦，可能还到过印度，掌握了当时最高水平的数学知识，成为历史上第一注重“数”的思想家。他后来在今意大利东南沿海一带传授数学以及他的哲学思想，创立了毕达哥拉斯学派(一个秘密宗教政治社团)，提出“万物皆数”的信条，坚信自然数是普遍的始原。

从公元前6世纪开始，数学在古希腊蓬勃兴起并得到空前发展。希腊人主要对几何感兴趣，突出了对“形”的研究；他们当然也没有忽略对“数”的研究，但却将“数”放在了几何的形式下去考察(只有少数例外，如丢番图)。

毕达哥拉斯，生为公元前6世纪的希腊人，对几何也十分钟情，他的“万物皆数”信条写成几何版本就是“任何两条线段都是可公度的，即，总能找到一条线段作单位，将所给两条线段都分成整数份。”——兼具应用背景和思想见地！

可以说，这是那个时代标志人们数学认识水平的科学假说。由它得出“数学就是关于自然数的”并不显得不妥。

但是，毕达哥拉斯还发现并证明了勾股定理，这可是他最爱炫耀的成果，他的门徒西帕苏斯（Hppasus）运用他的成果证明：并非任意两条线段都是可公度的，例如，正方形的边与对角线就可构成一对不可公度的线段。这在当时人们的心理上引起了极大的震撼，史称“第一次数学危机”。

第一次数学危机其实是人们在数学认识上取得的一次突破性进步。它表明数学已经发展到这样的阶段：1）意识到无理数（如$\sqrt{2}$）的存在；2）把证明引入了数学；3）把数学由经验科学变成了演绎科学。

数学认识的这一突破直接动摇了“万物皆数”的信条——使人不再认为数学就是关于自然数的了。

从公元前6世纪一直到16世纪末，史称初等数学时期，数学的研究对象是数与形——常量的(静止的)数与形——而且两千两百年间数学的研究对象没有本质的变化，数学于是成为了关于数与形的学问。

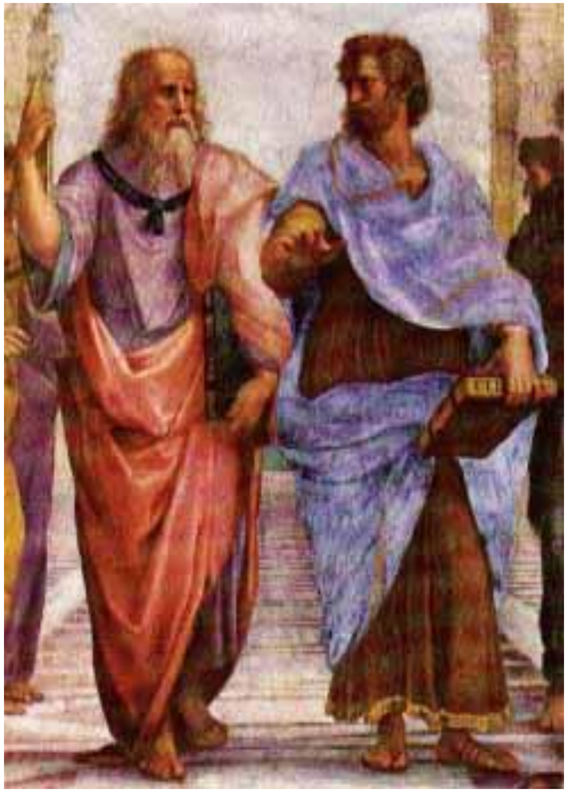
尽管如此，公元前4世纪的希腊哲学家亚里士多德和公元16世纪的英国哲学家培根，都尊崇毕达哥拉斯的“万物皆数”之精神，耐人寻味地把数学定义为：

亚里士多德：“数学是量的科学。”

培根：“纯粹数学是处理完全与物质和自然哲学公理相脱离的量的科学。”——数学是处理量之形式(数)的!?

“数学是量的科学。”

亚里士多德，世界古代史上最伟大的哲学家、科学家和教育家。



亚里士多德（Aristotle，384—322 B.C.）

17和18世纪，史称近代数学时期，数学将研究对象从常量的数与形扩展到变量的数与形，意在给出运动与变化的刻画方法。解析几何和微积分的创立(17世纪)为建立描述运动与变化的数学奠定了基础，开启了一个数学新时代——分析时代(18世纪)。

法国数学家兼哲学家笛卡尔在1637发表的哲学著作中建立了解析几何——数学史上的里程碑——数形结合体，使变量观念从此成为数学的核心概念，使运动与变化的定量描述成为可能。

笛卡尔对数学的看法有了微妙变化，他说："凡是以研究顺序（order）和度量（measure）为目的科学都与数学有关"。看得出来，他不确定顺序与度量是否都可归结为自然数，但可推断，他对亚里士多德的"数学是量的科学"说法是有疑虑的。

笛卡尔(R. Descartes, 1596-1650)

由笛卡尔开创的解析几何学为数学乃至整个科学树起了一座划时代的里程碑，数学从此由常量时代进入了变量时代——这标志着数学发展迈入了近代数学时期。

由牛顿和莱布尼兹在17世纪下半叶创立的微积分无疑是17世纪最为重要的数学成就，也是科学史上最重大的事件之一。数学因此在18世纪诞生了诸多深植微积分观念的新分支，如常微方程、偏微方程、积分方程、变分法和微分几何等等。这些新分支与微积分一道所构成的数学新领域，本质上就是关于运动与变化的学问，使科学家们能够以数学为工具去深入研究行星运动、机械运动、流体运动以及动植物生长等等。

此外，第一次数学危机（任给两个线段，是否有一把尺子把两个线段刚好量尽？）到了牛顿和莱布尼兹那里，应该说被他们无意中奇妙地解决了——任意两个线段用一把“0长度”的尺子可量尽。所谓“0长度”的尺子，就是他的微分形式的无穷小量，“量尽”的办法可以说就是微元法(本质上是积分，牛顿-莱布尼兹公式)。但这引致了第二次数学危机——无穷小量危机——本质上也是关于“直线是什么”的几何危机。

牛顿与莱布尼茨——微积分创立者

牛顿（Isaac Newton, 1642—1727），最著名的科学家之一。《自然哲学的数学原理》于1687年出版。

莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716），德国著名数学家。

牛顿和莱布尼茨都是他们所处时代的科学巨人，他们在相互独立的情况下各自创立了微积分。就发明时间而言，牛顿早于莱布尼茨；就发表时间而言，莱布尼茨先于牛顿。

数学在近代数学时期(17–18世纪)展现出自己**经典部分**的蓝图——博大精深——可定义为：

数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学。

德国思想家恩格斯(Friedrich Engels,1821-1895)：

数学是研究空间形式与数量关系的科学。

然而，就在恩格斯生活的19世纪，数学家不仅仅研究现实世界中的数学对象，而且开始研究数学自身存在的大量基础性问题——以数学自身的协调、完备以及模式化为目的，只是出于使数学自身达到完美与统一的需要。这一时期——可谓现代数学的酝酿期——出现了非欧几何、抽象代数、分析算术化等研究方向。数学自身问题驱动的上列发展已超出了经典的“数-形”范畴。

德国数学家康托尔说：

“数学是绝对自由发展的学科，它只服从明显的思维。就是说，它的概念必须摆脱自相矛盾，并且必须通过定义而确定地、有秩序地与先前已经建立和存在的概念相联系。”

康托尔(G. Cantor 1845---1918)关于集合的思想对近代数学产生了巨大影响。

英国哲学家、数学家罗素说(1901)：

“数学可以定义为这样一门学科，我们永远不知道其中所说的是什么，也不知道所说的内容是否正确。”

罗素(B. Russell, 1872---1970)提出的罗素悖论撼动了整个数学理论的基础，引发了第三次数学危机。

20世纪初，罗素给数学下了如下一个定义：

“纯粹数学完全由这样一类论断组成，假定某个命题对某些事物成立，则可推出另外某个命题对同样这些事物也成立。这里既不管第一个命题是否成立，也不管使此命题成立的那些事物究竟是什么，……。只要我们的假定是关于一般事物的，而不是关于某些特殊事物的，那么我们的推理就构成为数学。这样，数学可以定义为这样一门学科，我们永远不知道其中所说的（事物）是什么，也不知道所说的内容（断语）是否正确。”

从19世纪后期开始，数学成为了研究数与形、运动与变化以及数学自身问题的学问，而且数学理论的论述呈现以公理化倾向为特征的规范形式。从此，数学发展进入了所谓现代数学阶段。

对数学自身问题的研究，实现了数与形的统一，促成了数学与逻辑的融合，开辟了全新而广阔的数学发展空间和应用领域，从根本上刷新了人类的数学观念。

20世纪80年代，一批美国学者将数学简单地定义为关于“模式”的科学：

“[数学]这个领域已被称作模式的科学，其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性。”

二、数学的四大专业及研学策略

- **纯粹数学：被认为是一门研究形式系统的学问。**“形式”这个词常常用于这样的场合，该处用到了一些符号，而这些符号的作用和属性又完全由一组给定的规则所确定。在一个形式系统中，符号没有任何意义；在处理理它们时，人们必须注意不要在系统规定之外对它们的属性作任何假设。不过，形式符号可以加以解释，解释可以有多种版本，但这些解释并不是系统的一部分。形式系统通常有两方面内容，一是其形式语言和逻辑演算（包括逻辑公理和演绎规则），二是其非逻辑公理（用于“规划”原始概念的特殊公理）。

- **应用数学**：应用数学是用数学的方式提出科学或工程学中的问题，并将这些问题归结或表示为能够运用计算手段处理的数学问题，这是学术的问题，因而也是科学的问题；而实用数学是用数学的方法帮助解决科学或工程学中的计算问题，这是服务性的，因而是实用的。（应用数学家林家翘先生谈应用数学）

罗素说：“纯粹数学可以定义为这样一门学科：我们不知道在其中说的是什么，也不知道所说的是否正确。” 这是罗素用生动的语言在描述纯粹数学与科学的关系，或者说与应用数学的关系——数学家不知道自己所说的是什么，是因为纯粹数学与实际意义无关；数学家不知道自己所说的是否正确，是因为他们从不费心证实一个定理是否与现实世界相符。纯粹数学不构成科学的问题！

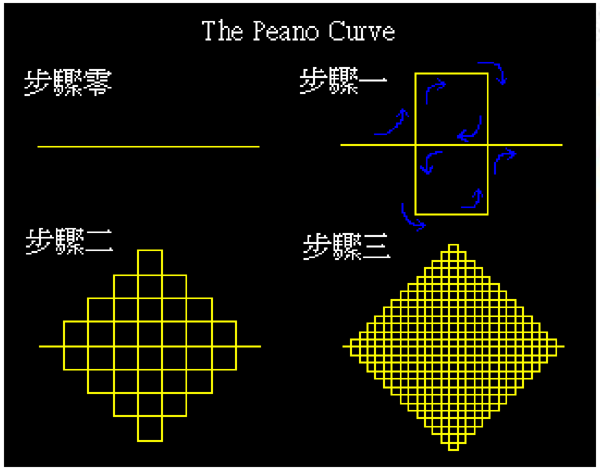
- **计算数学**：计算数学是一门随着计算机的发展而形成的数学领域，是数学、计算机科学与其它学科交叉的产物；它是专门研究如何利用计算机有效地求解各类计算问题的（主要来源于科学研究和工程设计），即研究可用计算机处理的实用算法及其理论的。
- **统计学**：统计学是收集整理数据，主要运用概率的理论和方法，以导出数据所蕴含的一般规律或规则的数学领域；它有广泛的社会应用市场。

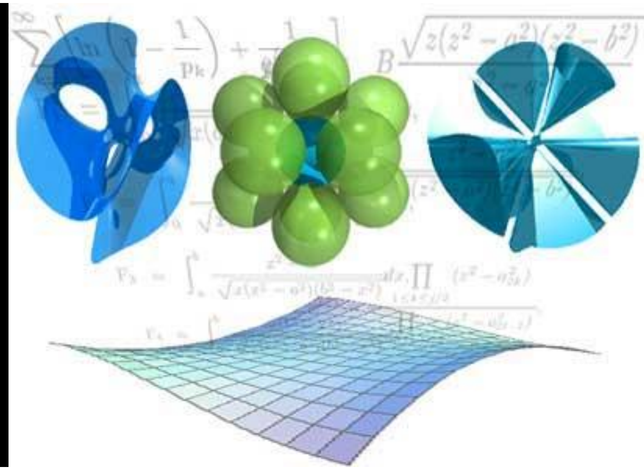
数学当今已被认为是关于模式的科学，这里的“模式”有着极广泛的内涵，包括了数的模式、形的模式、运动的模式、变化的模式、通信的模式、推理的模式、行为的模式、…；这些模式可以是现实中的模式，也可以是人脑所发明的模式，甚至是由其他模式所引出的模式或众多模式一起才能表现出来的模式。

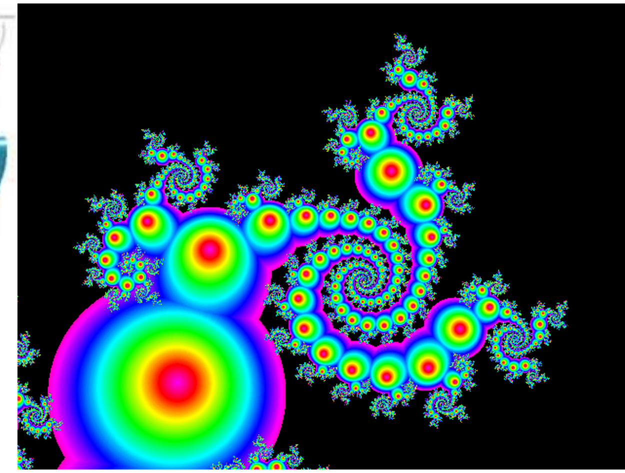
搜索并揭示隐藏模式的过程是在交织着许多对立面的斗争中进行的，这些对立面是：具体与抽象、特殊与一般、有限与无限、离散与连续、算法的与存在的、随机的与决定论的、精确的与近似的，等等。正是这些对立面的相互作用、反复综合并在更高层面上达成统一，在不停地推动着数学的创造、更新和应用，在生动地体现着数学理论的思想脉搏和蓬勃生机。

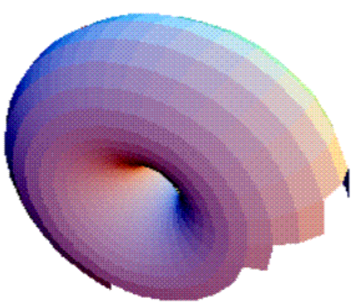
随着数学家开发模式的范围自然地、无限制地扩张到任何领域中去，数学的历史边界已完全消失，同样数学应用的边界也没有了：现代数学不再只是自然科学和工程技术领域(如物理学、化学、生物学、生态学、各种工程设计和控制技术等)的语言，它与计算机相结合已经成为众多行业和部门(如银行业、制造业、医药业、统计与审计部门、信息处理与信息安全部门等)以及社会科学领域(如经济学、社会学、历史学、心理学、考古学、语言学等)必不可少的工具。

特别是进入互联网信息化时代，大数据和人工智能，以及新的或潜在的数学技术，使机器凭借海量数据记忆和高速云计算而具有了越来越强的模式和特征的提取能力——显现出类人的洞察力和归结力——以智能演化之算法深刻影响了人探索规律和关联的原有方式。这样一来，数学正以“吾算故吾在”的魔力展现出人机交互推升智能的潜势——突破了我们人对自身的传统看法——重塑着我们的世界观。

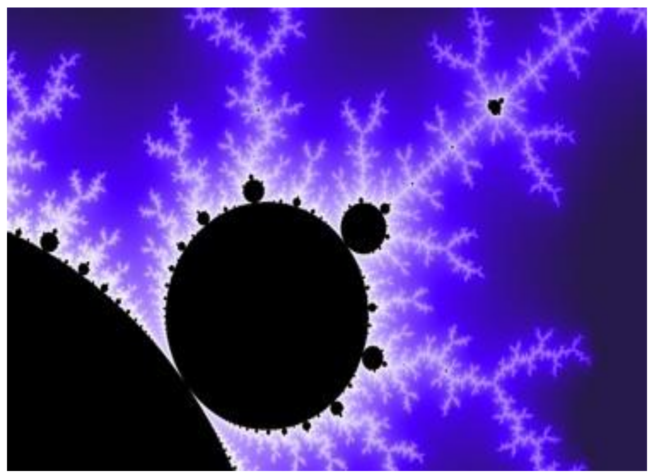


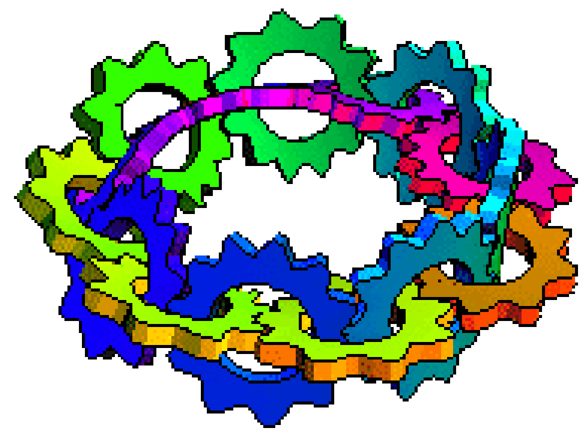




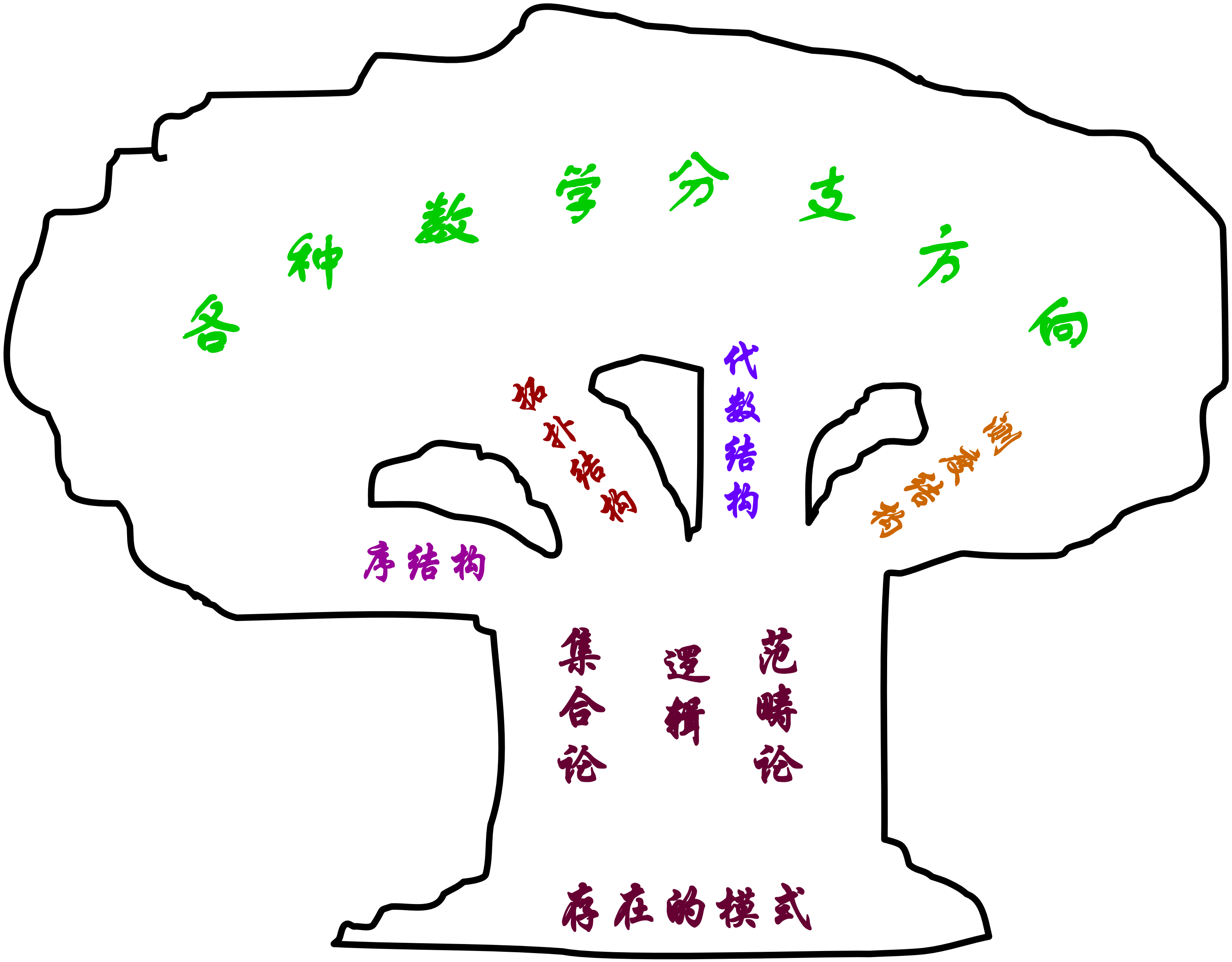


北京大学数学科学学院包志强制作





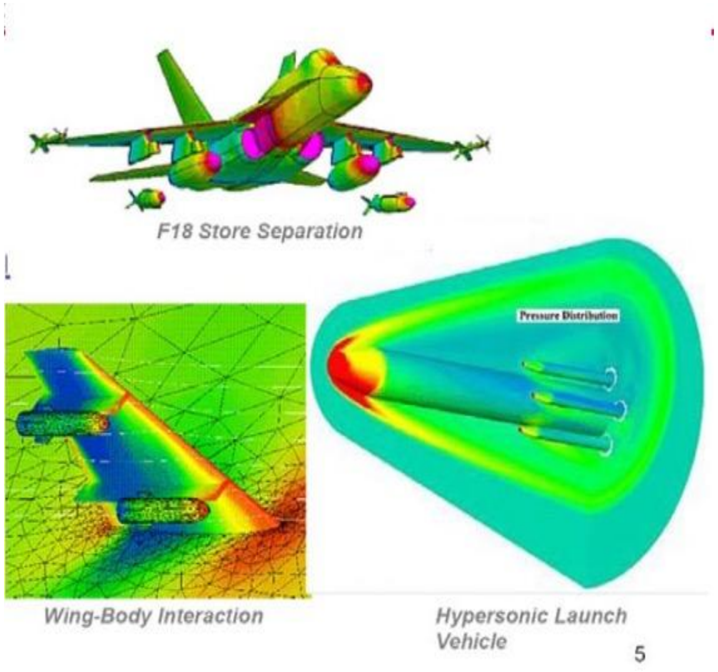
数学是抽象的、精确的、广泛应用的和富有艺术品味的。



数学在整体上具有结构统一性

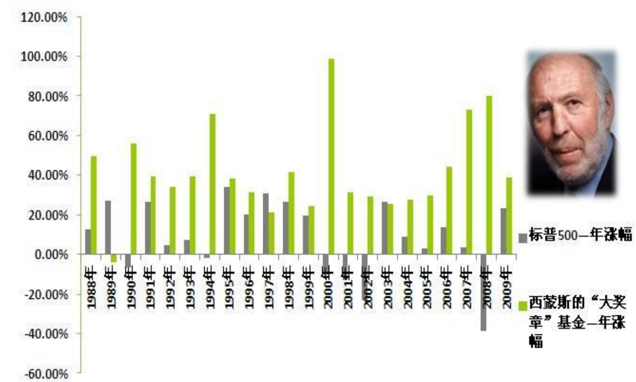
数学是关于模式的科学，它应用的边界没有了！

CT与Radon变换



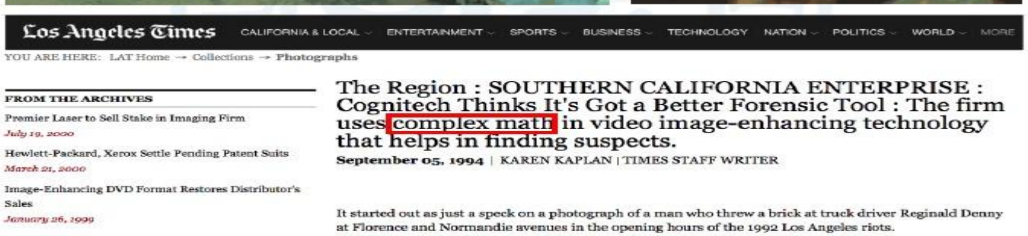
空气动力学

“Medallion”对冲基金与标普500



大数据与人工智能

量化投资



Los Angeles Times | CALIFORNIA & LOCAL | ENTERTAINMENT | SPORTS | BUSINESS | TECHNOLOGY | NATION | POLITICS | WORLD | MORE

YOU ARE HERE: LAT Home → Collections → Photographs

FROM THE ARCHIVES

Premier Laser to Sell Stake in Imaging Firm
July 19, 2000

Hewlett-Packard, Xerox Settle Pending Patent Suits
March 21, 2000

Image-Enhancing DVD Format Restores Distributor's Sales
January 26, 1999

The Region : SOUTHERN CALIFORNIA ENTERPRISE : Cognitech Thinks It's Got a Better Forensic Tool : The firm uses complex math in video image-enhancing technology that helps in finding suspects.

September 05, 1994 | KAREN KAPLAN | TIMES STAFF WRITER

It started out as just a speck on a photograph of a man who threw a brick at truck driver Reginald Denny at Florence and Normandie avenues in the opening hours of the 1992 Los Angeles riots.

数学图像处理

对数学研学方法的建议：

- 数学的逻辑系统性 → 理清脉络，循序渐进，把握系统
- 数学的抽象性 → 理解准确，抓住要点，反复体会
- 数学的精确性 → 正确证明，仔细计算，认真耐心
- 数学的广泛应用性 → 勤于练习，重视应用，收集范例
- 数学的难学性 → 跟紧老师，勤奋刻苦，及时总结
- 数学的艺术品味 → 爱好数学（细品数学美）
- 数学的无限性 → 持之以恒，追求卓越

对数学研学策略的建议

- 为自己构建一个合理的知识结构，刻意领悟数学的结构与统一性。
- 注重数学感觉和数学能力的训练和培养，造就一颗自由敏锐的心灵。
- 长期收集前人的重要结果，及其证明（或求解）的方法和技巧，并时常回顾和反思；感悟数学的精髓、威力和超越性。
- 建立自己的思想灵感和独特见解的备忘录，并寻求将它们构建成一个理论系统；反复考虑怎样使自己创建的系统充实完备和特色鲜明。
- 善于学习别人的长处，开展富有建设性的交流与合作。
- 通过自己的长期研学过程来定位自己的研究兴趣和领域。

思考题

1. 谈谈自己从小学到大学学习数学有怎样的深切感受?
2. 你认为数学是什么？ 数学该学什么及怎样学?
3. 你希望数学通识课程能讲点什么？ 达到什么目标?

Thank you

for your attention