Hoofdstuk 6

Overgangsverschijnselen van een LTI systeem

6.1 Werken in het frequentiedomein

Simuleer de uitgang van het tweede orde systeem uit de tweede orde oefening van het WPO LTI systemen

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

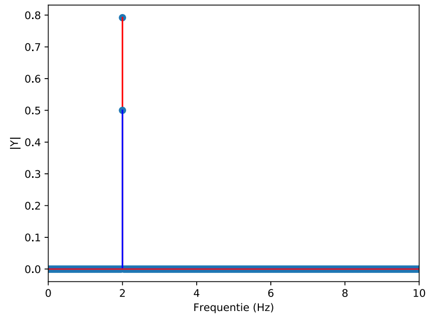
met $\omega_n = 10$ en $\xi = 0.1$. Beschouw het volgende gegeven input signaal:

$$u(k) = \sin(2\pi f k T_s) \qquad \text{met} 0 \leq k < N$$

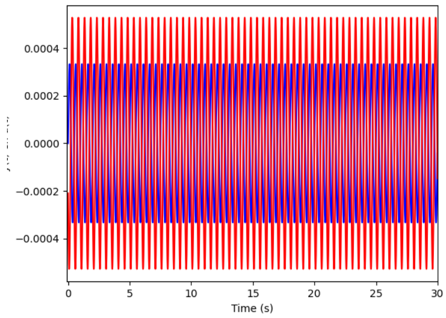
en met $f = 2\text{Hz}$, $F_s = 100\text{H}z$, $N = 3000$. Voer de berekening uit in het frequentiedomein.

> **Let op**: zorg ervoor dat het ingangsignaal en de transfer functie over dezelfde frequentieas zijn gedefinieerd!

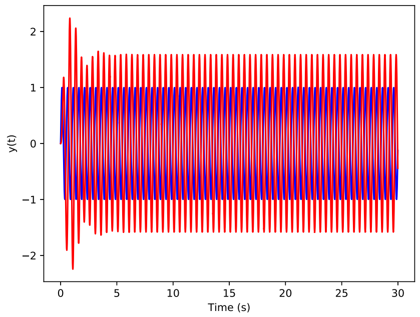
- Plot het uitgangssignaal in het frequentiedomein van 0Hz tot 10Hz. Je moet dan een antwoord vinden zoals in figuur 6.1.1.
- Bereken nu ook de ingang en de uitgang in het tijdsdomein door gebruikt te maken van de inverse DFT. Denk aan het truukje dat we eerder gebruikten om dit eenvoudig te doen. Het resultaat ziet er uit als in figuur 6.1.2. Is dit wat je verwacht? Waarom?
- Bereken de output nu ook nog eens in het tijdsdomein met de definitierelatie van de het LTI systeem. Start hiervoor van de transfer functie die je hebt opgesteld in het vorig puntje. Gebruik ook $u(k)$ die je daar hebt berekend.



Figuur 6.1.1: Respons van het gesimuleerde systeem (Blauw: spectrum van de input. Rood: spectrum van de output).



Figuur 6.1.2: Tijdssignalen bekomen met de inverse DFT



Figuur 6.1.3: De eerste N punten van de tijdsrespons

- Plot de output in het tijdsdomein (plot enkel de eerste N punten). Het resultaat van deze operatie vind je in figuur 6.1.3.
- Leg de verschillen uit aan de hand van de theorie.

6.1.1 Werken in het tijdsdomein

We gaan nu het overgangsverschijnsel berekenen in het tijdsdomein in plaats van het frequentiedomein. We vertrekken van een FRF beschreven in de vorm van polen, nullen en een winstfactor

1. Construeer de transferfunctie van het tweede orde systeem met polen

$$p_{1,2} = -1 \pm 2\pi 5j$$

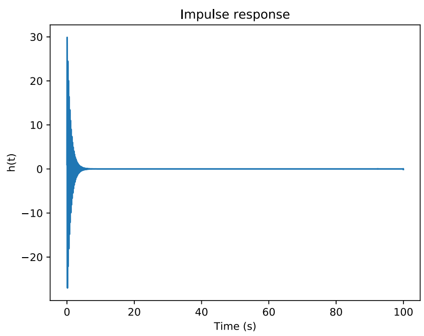
   en versterkingsfactor $K = (2\pi 5)^2$.

2. Evalueer de transferfunctie in $N = 10^4$ equidistant verdeelde frequenties verdeeld in de frequentieband tussen $f_0 = 0\text{Hz}$, $F_s = 100\text{Hz}$.

3. Bereken daarna het impulsantwoord en de bijhorende tijdsvector. Maak hierbij gebruik van het truukje van de theorie:

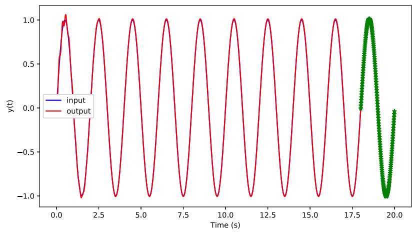
$$H\left(\text{round}\left(^{\text{length}(H)}/_2\right) : end\right) = 0$$
$$h = 2 * \text{real}\left(\text{ifft}\left(H\right)\right)$$

   Construeer ook de bijhorende tijdsvector. Het impulsantwoeord ziet er uit als getoond op figuur 6.1.4

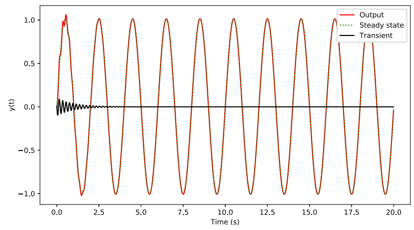


Figuur 6.1.4: Impulsantwoord, abcis: tijd in seconden. In de figuur werd $h(t)$ geschaald met f_s om de amplitude onafhankelijk weer te geven van de gekozen samplefrequentie.

4. Maak daarna een gesampelde versie van een sinusoïdaal signaal met frequentie 0.5Hz , dezelfde sampelfrequentie als de impulsrespons en met een lengte van 10 periodes.



Figuur 6.1.5: Het geconvolueerde uitganssignaal



Figuur 6.1.6: Geconvolueerd signaal en transient bekomen na aftrekken van de herhalling van de laatste periode

   (a) Convolueer dit signaal met het impulsantwoord. Denk eraan dat systeem en signaal steeds aan dezelfde samplefrequentie moeten bemonsterd zijn.

   (b) Vergelijk het aldus verkregen uitgangssignaal met de input (de sinus).

   Het resultaat zou er moeten uitzien zoals in figuur 6.1.5.

5. De laatste periode van het uitgangssignaal is hier in het groen aangeduid. Deze periode is voor stabiele systemen het minst verstoord door de overgangseffecten (Waarom?).

   (a) De transients zijn heel duidelijk aanwezig in de eerste periode.

   (b) Je kan de transients nog beter zichtbaar maken door een herhaling van de laatste periode af te trekken van het uitgangssignaal (een array herhalen in numpy doe je met tile)

   Het bekomen resultaat lijkt zeer sterk op het impulsantwoord, en kan je zien op figuur 6.1.6

6.2 Tijdsdomein versus Frequentiedomein aanpak

Gegeven is een systeem met polen

$$p_{1,2} = -4 \pm 100j$$

en nullen

$$z = -100$$

meet een versterking $K = 100$.

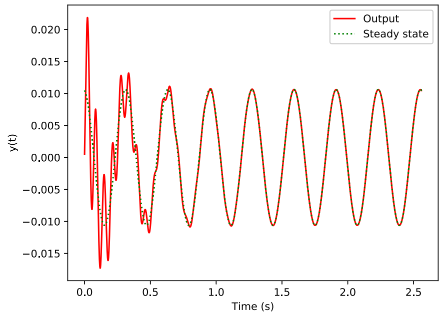
1. Evalueer de transferfunctie
   - Stel de FRF H op met $f_s/2 = 500$ en $N = 2560$. Plot het Bode diagram.
   - Construeer de tijdsvector.
   - Bereken het impulsantwoord en plot het als een functie van de tijdsvector
2. Bereken output in het tijdsdomein
   - Maak een cosinusignaal (de input u) van precies evenveel punten aan. Kies de frequentie zodat je precies 8 perioden meet, en convolueer deze met het impulsantwoord.
   - Een plot hiervan verraadt dat het systeem enige tijd nodig heeft om in regimetoestand (steady state) te komen. Deze overgang of transient kan je visualiseren als volgt: selecteer de laatste van de 8 perioden en trek deze af van het uitgangssignaal. Plot de transient (Figuur 6.2.2). Maak ook een plot met de verkregen output tezamen met de steady state output van het systeem (Figuur 6.2.1).
   - Vergelijk tenslotte het spectrum van het signaal met en zonder transients (Figuur 6.2.3).
3. Bereken output in het frequentiedomein

   Aangezien de transferfunctie in het Laplace vlak gegeven wordt door

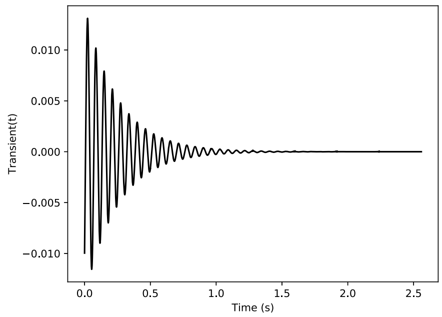
   $$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{6.2.1}$$

   kan ook de output van een systeem in het frequentiedomein berekend worden via het product van de transfer functie met de input, $Y(s) = H(s)U(s)$. Het tijdsdomein signaal $y(t)$ bekomen we dan door een inverse Fourier transformatie te nemen.

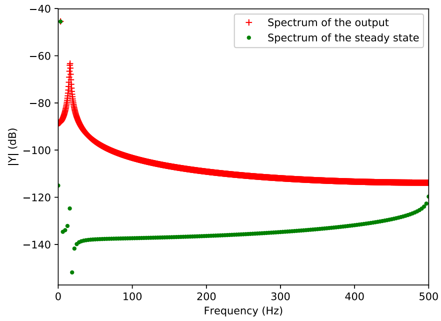
   - Bereken het spectrum van het signaal $y(t)$ dat je hebt verkregen uit de berekening in het tijdsdomein.



Figuur 6.2.1: Output met en zonder transient (input: sinus die start in $t = 0$)



Figuur 6.2.2: Transient bekomen na aftrekken van de herhaalde laatste periode van de uitgang

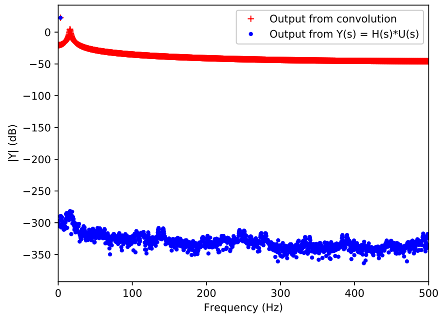


Figuur 6.2.3: Spectrum van de output met en zonder transient geplot tot aan $F_s/2$.

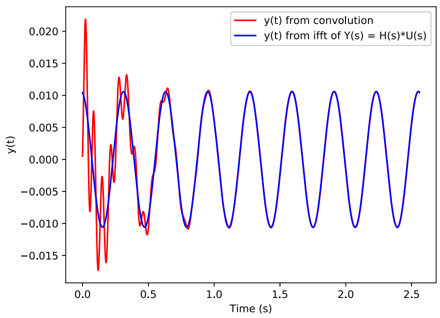
- Bereken het spectrum van de output in het frequentiedomein als $Y(s) = H(s)\,U(s)$ (zie resultaat in figuur6.2.4).
- Vergelijk de output bekomen uit convolutie in het tijdsdomein en de output bekomen uit het product in het frequentiedomein. Vergelijk ze in het tijdsdomein (het resultaat zie je in Fig. 6.2.5).

LET OP voor de schaling: schaal je het spectrum met het aantal punten in het meetvenster N, dan moet je ook correct schalen bij de inverse Fourier transformatie zoals hieronder is weergegeven

$$
\begin{aligned}
&U(k) = \left.\frac{\mathrm{fft}(u)}{N}\right|_k \\
&Y(k) = H(k) .* U(k) \\
&Y\left(\mathrm{round}\left(^{\mathrm{length}(H)}/_2\right) : \mathrm{length}(H)\right) = 0 \\
&y(k) = 2 * N * \mathrm{real}\left(\mathrm{ifft}(Y)\right)
\end{aligned}
$$



Figuur 6.2.4: Spectrum van de output via convolutie uit Oefening 2 tezamen met de output uit een product in het frequentiedomein.



Figuur 6.2.5: Tijdsdomein output bekomen uit convolutie in het tijdsdomein tezamen met de output bekomen uit de inverse Fouriertransformatie van het product van transferfunctie en input in het frequentiedomein.