# Chapter 1

# 16 de outubro

## 1.1 Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ) é dita periódica se existe $T > 0$ tal que:

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aqui $T$ é chamado período e a função é dita $T$-periódica.
**Exemplos:** Você conhece? $\cos(t), \operatorname{sen}(t)$.
**Observação:** Se $f(t)$ é $T$-periódica, $\alpha f(t)$ também é.
**Observação:** Se $T$ é período de uma função $f(t)$ então todo múltiplo inteiro de $T$ também é período:

$$f(t+nT) = f(t).$$

**Perguntas:** A soma de funções periódicas é periódica?
**Resposta:** Se $f(t)$ tem período $T_1$ e g(t) tem período $T_2$ e $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$, isto é, $mT_1 = nT_2$, então $f(t) + g(t)$ é periódica. Aqui $n$ e $m$ são inteiros positivos. **Dem:** Construtiva com $T = mT_1$:

$$f(t+T) + g(t+T) = f(t+nT_1) + g(t+mT_2) = f(t) + g(t)$$

**Definição:** Se $f(t)$ é periódica e existe $T_f$ o menor período, então $T_f$ é chamado de período fundamental e $w_f := \frac{2\pi}{T_f}$ é a frequência angular fundamental.
**Pergunta:** Existem funções periódicas sem período fundamental?

$$f(t) = 1$$

### 1.1.1 Polinômios trigonométricos e séries trigonométricas

Seja $T > 0$, definimos polinômio trigonomético de grau $N$ uma função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)] \tag{1.1}$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.
Seja $T > 0$, definimos série trigonométrica toda função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)] \tag{1.2}$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

**Exemplo:** Mostre que $T$ é um período para séries e polinômios trigonométricos acima definidos.

### 1.1.2 Relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases} \\
\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \\ T, & n = m = 0 \end{cases} \\
\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)dt &= 0
\end{aligned}$$

### 1.1.3 Forma harmônica

$$A\cos(wt - \phi) = A\left[\cos(wt)\cos(\phi) + \operatorname{sen}(wt)\operatorname{sen}(\phi)\right]$$

$$A\cos(wt - \phi) = A\cos(wt)\cos(\phi) + A\operatorname{sen}(wt)\operatorname{sen}(\phi)$$

$$A_n\cos(w_nt - \phi_n) = \underbrace{A\cos(\phi_n)}_{a_n}\cos(w_nt) + \underbrace{A\operatorname{sen}(\phi_n)}_{b_n}\operatorname{sen}(w_nt)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(w_nt - \phi_n)$$

**Obs:** Para qualquer par $a_n$ e $b_n$, existem $A_n$ e $\phi_n$ que satisfazem a identidade e $A_n > 0, \quad \forall n > 0$.

### 1.1.4 Forma complexa ou exponencial

## 1.2 Forma exponencial

A forma exponencial de uma série de Fourier é obtida quando se substiuem as funções trigonométricas $\operatorname{sen}(w_nt)$ e $\cos(w_nt)$ por suas representações em termos de exponenciais complexos, isto é

$$\cos(w_nt) = \frac{e^{iw_nt} + e^{-iw_nt}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(w_nt) = \frac{e^{iw_nt} - e^{-iw_nt}}{2i} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(w_nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(w_nt) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{e^{iw_nt} + e^{-iw_nt}}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{e^{iw_nt} - e^{-iw_nt}}{2i}\right)
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos e usando o fato que $\frac{1}{i} = -i$, temos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{iw_nt} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-iw_nt} \tag{1.4}$$

Agora observamos que as definições **??** dadas por

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}\,(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,(w_n t)dt
\end{aligned}$$

Embora estas expressões estejam definadas apenas para $n > 0$, elas fazem sentidos para qualquer $n$ inteiro. Neste caso, valem as seguintes identidades:

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n \quad b_0 = 0. \tag{1.5}$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$ e a paridade das funções cosseno e seno. Estendendo estas definições para qualquer inteiro, introduzimos os coeficientes $C_n$ dados por:

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \tag{1.6}$$

Observe que estes coeficientes estão definidos para para número inteiro $n$, assim temos:

$$C_0 = \frac{a_0 - ib_0}{2} = \frac{a_0}{2} \tag{1.7}$$

e

$$C_{-n} = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{1.8}$$

Substituindo estas expressões para $C_0$, $C_n$ e $C_{-n}$ em (1.4), obtemos:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{iw_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-iw_n t}$$

Escrevemos agora esta última expressão em um único somatório:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t} \tag{1.9}$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$ Observamos também que os coeficientes $C_n$ podem ser escritos das seguinte forma mais enxuta:

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2}\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[\cos(w_n t) - i\,\mathrm{sen}\,(w_n t)\right]dt\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-iw_n t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-iw_n t}dt
\end{aligned}$$

### 1.2.1 Convegência

(Teorema de Dirichlet( Seja $f$ uma função periódica de período $T$, suave por partes e descontínua no máximo em um número finito de saltos dentro de cada intervalo, então a série de Fourier converge em cada ponto $t$ para

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}, \tag{1.10}$$

onde $f(t+)$ e $f(t-)$ são os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente. Observe que nos pontos $t$ onde $f(t)$ é contínua, então $f(t+) = f(t-)$ e a série de Fourier converge para $f(t)$.

### 1.2.2 Interlúdio - Caculando coeficientes

Obs:

Se $f(t)$ é $T$-periódica, então:

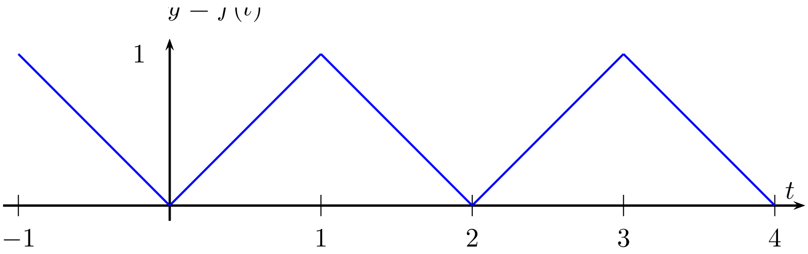
$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{T+a} f(t)dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Considere a fução periódica da por:

Seja $f(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= |t|, \quad -1 \leq t < 1 \\ f(t+2) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos. Portanto se aplica o teorema:




Observamos que essa é uma função par, ou seja, $f(t) = f(-t)$. A fim de explorar essa simetria, utilizaremos as fórmulas (**??**) envolvendo integrais simétricas, isto é,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,(w_n t)dt \end{aligned}$$

onde $T = 2$ e $w_n = \frac{2\pi n}{T} = \pi n$. Logo,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} |t|dt = 2\int_0^1 tdt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n = \int_{-1}^{1} |t|\cos(\pi n t)dt &= 2\int_0^1 t\cos(\pi n t)dt \\ &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)}{\pi n}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\,(\pi n t)}{\pi n}dt \\ &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n t)}{\pi^2 n^2}\right]_0^1 = 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} |t|\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)dt = 0.$$

onde se usou que $|t|$, $|t|\cos(\pi n t)$ são funções pares em $t$ e $|t|\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)$ é ímpar em $t$. Assim, temos

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\pi t) + \cdots\right) \tag{1.11}$$

Observe que, quando $t = 0$, obtemos como subproduto da série de Fourier da $f(t)$ a soma da seguinte série numérica:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{1.12}$$

A figura 1.1 apresenta os gráficos da série que representa a função $f(t)$ com um termo, dois termos e três termos.

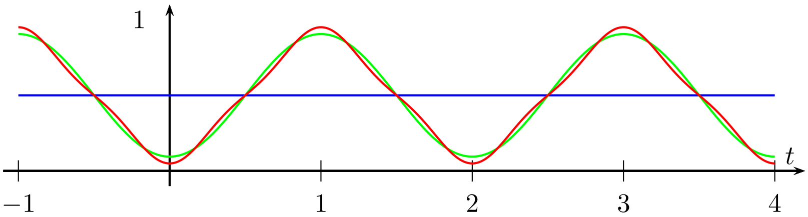



Figure 1.1: Gráficos de $f_0(t) = \frac{1}{2}$ (azul), $f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t)$ (verde) e $f_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\pi t)\right)$ (vermelho).

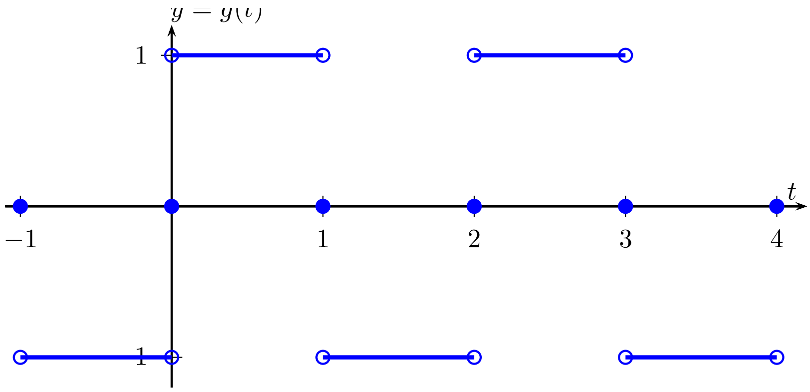
**Onda quadrada**

Seja $g(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} g(t) &= -1, \quad -1 < t < 0 \\ g(t) &= 0, \quad t = 0 \text{ ou } t = 1 \\ g(t) &= 1, \quad 0 < t < 1 \\ g(t+2) &= g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos exceto por saltos nos inteiros, onde a função vale a média aritmética dos limites laterais. Portanto se aplica o teorema **??**. Observamos que essa é uma função ímpar, ou seja, $f(t) = -f(-t)$. Novamente, utilizaremos as fórmulas (**??**) envolvendo integrais simétricas:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} g(t)dt = 0$$




$$a_n = \int_{-1}^{1} g(t)\cos(\pi n t)dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n = \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)dt = 2\int_{0}^{1} g(t)\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)dt &= 2\int_0^1 \mathrm{sen}\,(\pi n t)dt \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[-\cos(\pi n t)\right]_0^1 = 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n} \end{aligned}$$

Logo,

$$g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t) + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(5\pi t) + \cdots\right). \tag{1.13}$$

A figura 1.2 apresenta os gráficos da série que representa a função $g(t)$ com um termo, dois termos, três termos e quatro termos.

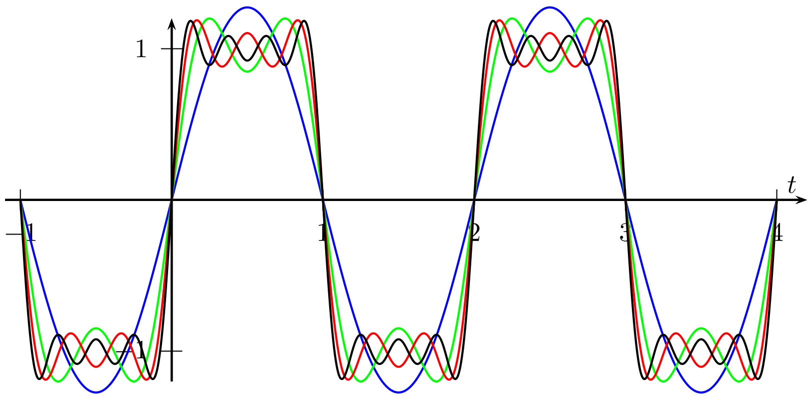
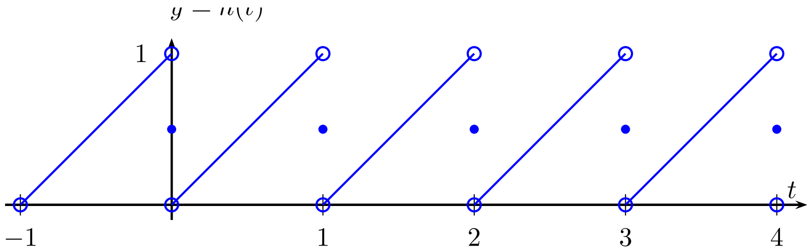



Figure 1.2: Gráficos de $g_0(t) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{sen}\,(\pi t)$ (azul), $g_1(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t)\right)$ (verde), $g_2(t) = g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t) + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(5\pi t)\right)$ (vermelho) e $g_3(t) = g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t) + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(5\pi t) + \frac{1}{7}\,\mathrm{sen}\,(7\pi t)\right)$ (preto).

**Exemplo** Seja $h(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= t, \quad 0 < t < 1 \\ f(t) &= \frac{1}{2}, \quad t = 1 \\ f(t+1) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua exceto por salto nos inteiros onde $h(t)$ assume o valor médio dos limites laterais. Portanto se aplica o teorema **??**. Utilizaremos as fórmulas (**??**) envolvendo integrais no intervalo $[0, 1]$, isto é,




$$a_0 = 2\int_0^1 t dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n = 2\int_0^1 t\cos(2\pi nt)dt = &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\,(2\pi nt)}{2\pi n}dt \\ &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(2\pi nt)}{2\pi n} + \frac{\cos(2\pi nt)}{4\pi^2 n^2}\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n = 2\int_0^1 t\,\mathrm{sen}\,(2\pi nt)dt = &= 2\left[-\frac{t\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}dt \\ &= 2\left[-\frac{t\cos(2\pi nt)}{2\pi n} + \frac{\mathrm{sen}\,(2\pi nt)}{4\pi^2 n^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

Logo,

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(2\pi t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(4\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(6\pi t) + \cdots\right). \tag{1.14}$$

**Obs:** Os coeficiente $b_n$ da série de Fourier de uma função par são nulos bem como os coeficiente $a_n$ da série de Fourier de uma função ímpar também o são.

Demonstre a observação .

# Chapter 2

# 21 de outubro

### 2.0.1 Diagramas de espectro

Diagramas espectro são representações gráficas dos coeficientes de Fourier $C_n$ associados a uma função periódica $f(t)$. Como os coeficientes $C_n$ são números complexos, é comum representá-los na forma de módulo e fase, isto é:

$$C_n = |C_n|e^{i\phi_n}. \tag{2.1}$$

O ângulo de fase assim definido coincide com o conceito de argumento do número $C_n$.

**Exemplo:** A função

$$f(t) = -1 + 2\cos(t) + 4\,\mathrm{sen}\,(2t) \tag{2.2}$$

é periódica com periodo fundamental $2\pi$ e pode ser escrita na forma exponencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= -1 + 2\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + 4\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) \\ &= 2ie^{-2it} + e^{-it} - 1 + e^{it} - 2ie^{2it} \end{aligned}$$

Assim, identificamos cinco coeficientes não nulos:

$$\begin{array}{lcllll} C_{-2} & = & 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} & \Longrightarrow & |C_{-2}| = 2, & \phi_{-2} = \frac{\pi}{2} \\ C_{-1} & = & 1 & \Longrightarrow & |C_{-1}| = 1, & \phi_{-1} = 0 \\ C_0 & = & -1 = 1e^{\pi} & \Longrightarrow & |C_0| = 1, & \phi_0 = \pi \\ C_1 & = & 1 & \Longrightarrow & |C_1| = 1, & \phi_1 = 0 \\ C_2 & = & -2i = 2e^{\frac{-i\pi}{2}} & \Longrightarrow & |C_2| = 2, & \phi_2 = -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

Os digramas de espectro de amplitude e fase são dados a seguir:

**Exemplo:** As primeiras raias do diagrama de espectro da função a seguir:

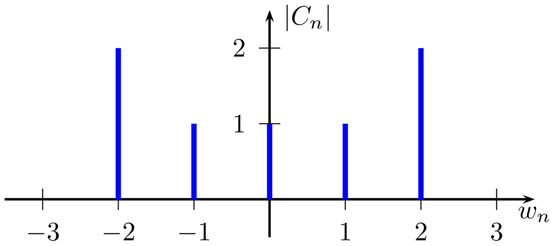
$$g(t) = \cdots + \frac{2i}{5\pi}e^{-5i\pi t} + \frac{2i}{3\pi}e^{-3i\pi t} + \frac{2i}{\pi}e^{-i\pi t} - \frac{2i}{\pi}e^{i\pi t} - \frac{2i}{3\pi}e^{3i\pi t} - \frac{2i}{5\pi}e^{5i\pi t} - \cdots, \tag{2.3}$$

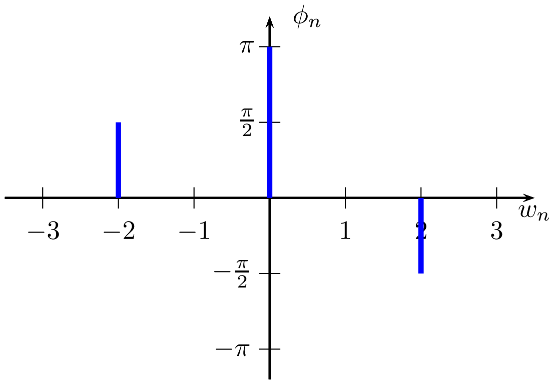
são dados na figura a seguir

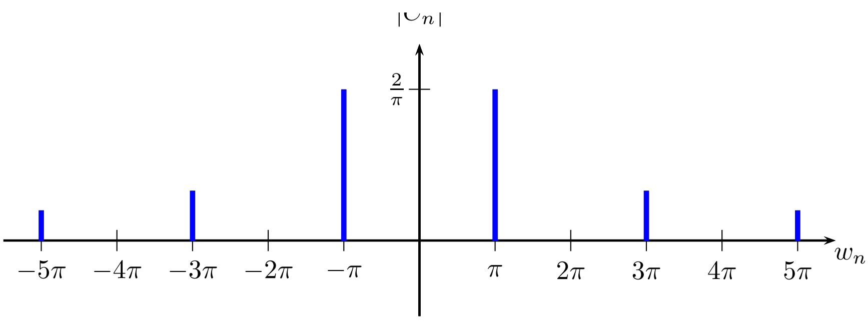
**Exemplos:**

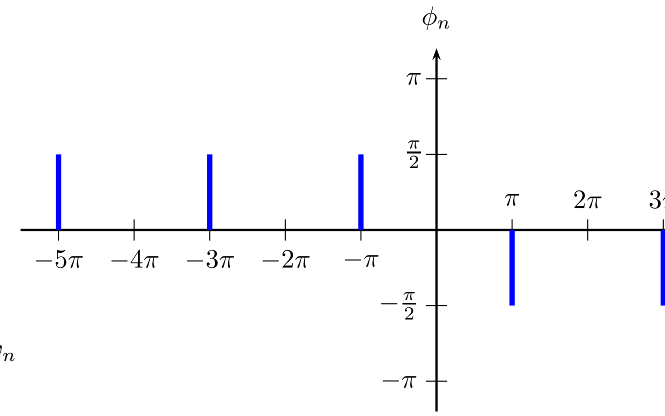
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nt)$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\,(nt)$$




## 2.1 Propriedades das Séries de Fourier

Define-se a potência média de um função periódica $f(t)$ como

$$\overline{P}_f = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt \tag{2.4}$$

A potência média da função $f(t) = A\cos(wt)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{P}_f &= \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)^2 dt \\
&= \frac{A^2}{T}\int_0^T \left(\frac{\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)+1}{2}\right) dt \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

onde se usou que $w = \frac{2\pi}{T}$ e identidade trigonométrica dada por:

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{\cos(2x)+1}{2}. \tag{2.5}$$

**Exemplo:** Seja $V(t) = A\cos(wt)$ uma fonte de tensão com frequência $w = 60\text{Hz} = 120\pi\text{rad/s}$ ligado a um resistor de resistência $R\Omega$. A potência no resistor é

$$P(t) = \frac{V(t)^2}{R} \tag{2.6}$$

e a potência média $P_m$ é

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V(t)^2}{R}dt, \tag{2.7}$$

onde $T = \frac{1}{60}s$. Por outro lado, a potência média é calculada em termos da tensão média por

$$P_m = \frac{V_m^2}{R}, \tag{2.8}$$

ou seja,

$$V_m^2 = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt. \tag{2.9}$$

O exemplo nos dá o valor da potência média do sinal $V(t) = A\cos(wt)$. Logo,

$$V_m = \frac{A}{\sqrt{2}}. \tag{2.10}$$

Se $V_m = 127V$, então a amplitude do sinal é aproximadamente $A \approx 180$.

**Observação:** Na expressão (2.9), $V_m$ também é chamado de valor RMS do sinal $v(t)$ (Root mean square):

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt}. \tag{2.11}$$

**Teorema de Parseval** Seja $f(t)$ uma função periódica representável por uma série de Fourier, então vale a seguinte identidade.

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \tag{2.12}$$

**Dem:**

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}dt$$

Como $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$, temos

$$\overline{f(t)} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n}\;\overline{e^{iw_n t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} e^{-iw_n t}$$

Substituindo esta expressão para $\overline{f(t)}$ na definição de potência média, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} e^{-iw_n t}\right] dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\overline{C_n}\int_0^T f(t)e^{-iw_n t}dt\right]
\end{aligned}$$

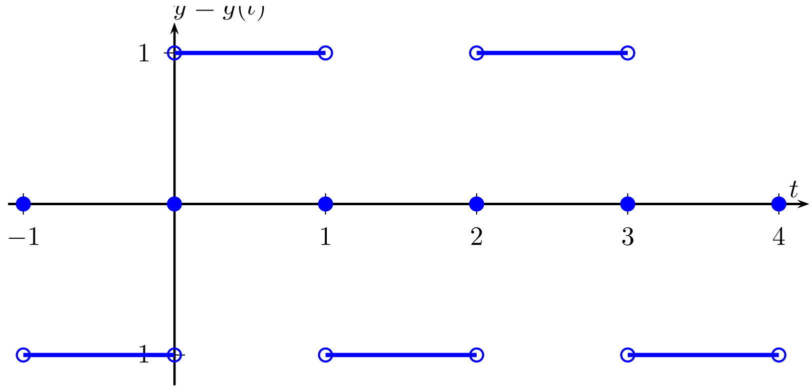
Como $C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-iw_n t}dt$, temos:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n}C_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

**Exemplo** Seja $g(t)$ um função dada no exemplo **??**, isto é,

$$\begin{aligned} g(t) &= -1, \quad -1 < t < 0 \\ g(t) &= 0, \quad t = 0 \text{ ou } t = 1 \\ g(t) &= 1, \quad 0 < t < 1 \\ g(t+2) &= g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vimos no exemplo **??** que sua expansão em série de Fourier é da forma:




$$g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\pi t) + \cdots\right). \tag{2.13}$$

Calcularemos agora a potência média desta função através de sua representação no tempo e depois em frequência:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 1dt = 1$$

Alternativamente, temos pelo Teorema de Parseval:

$$\overline{P_f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2$$

Como $b_{-n} = b_n$, temos que $|b_{-n}| = |b_n|$ e ainda temos que $b_0 = 0$, portanto:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)$$

temos:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{\pi^2}{8} = 1$$

## 2.2 Passagem do discreto para o contínuo

# Chapter 3

# 23 de outubro

## 3.1 Exemplos de transformadas de Fourier

### 3.1.1 Função tenda assimétrica

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{se } t < 0 \\ e^{-bt} & \text{se } t > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $a$ e $b$ são constantes positivas. A figura mostra o gráfico de $f(t)$ para $a = 1$ e $b = 3$. A transformada de Fourier de $f(t)$

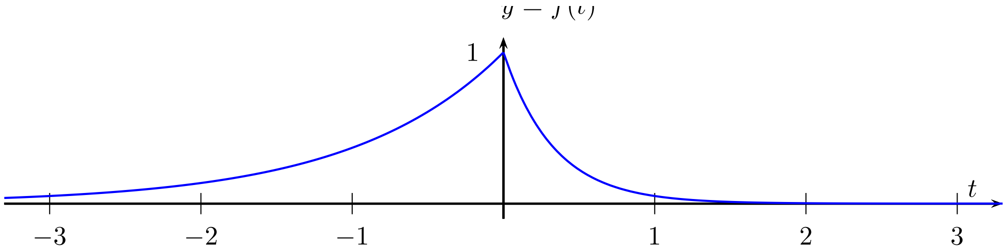



Figure 3.1: Gráfico de $f(t) = e^t$, se $t < 0$ ou $f(t) = e^{-3t}$ se $t > 0$.

é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-iwt} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-bt} e^{-iwt} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{at} \left(\cos(wt) - i \operatorname{sen}(wt)\right) dt + \int_{0}^{\infty} e^{-bt} \left(\cos(wt) - i \operatorname{sen}(wt)\right) dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-at} \left(\cos(wt) + i \operatorname{sen}(wt)\right) dt + \int_{0}^{\infty} e^{-bt} \left(\cos(wt) - i \operatorname{sen}(wt)\right) dt \\
&= \frac{a}{a^2 + w^2} + \frac{iw}{a^2 + w^2} + \frac{b}{b^2 + w^2} - \frac{iw}{b^2 + w^2} \\
&= \frac{a}{a^2 + w^2} + \frac{b}{b^2 + w^2} + i \left( \frac{w}{a^2 + w^2} - \frac{w}{b^2 + w^2} \right)
\end{aligned}$$

onde se usou os itens 1 e 2 da tabela de integrais definidas.

**O que acontece quando $a = b$?**

### 3.1.2 Delta de Dirac

Calculamos a transformada de Fourier do delta de Dirac $\delta(t-a)$, $a \in \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(w) = \mathcal{F}\{\delta(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-iwt}dt \\ &= e^{-iwa} \end{aligned}$$

# Chapter 4

# 23 de outubro

## 4.1 Forma trigonométrica

A forma exponencial da transformada de Fourier de uma função $f(t)$ foi definida no capítulo **??** e é dada por

$$F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt. \tag{4.1}$$

Se $f(t)$ é uma função real, então podemos separar a parte real e imaginária da transformada de Fourier, conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
F(w) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(wt) - i\,\mathrm{sen}\,(wt)\right)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,(wt)dt \\
&:= A(w) - iB(w),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt \\
B(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,(wt)dt
\end{aligned}$$

Nesses termos, a função $f(t)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(w) - iB(w)\right)\left(\cos(wt) + i\,\mathrm{sen}\,(wt)\right)dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}\,(wt)\right)dw \\
&+ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A(w)\,\mathrm{sen}\,(wt) - B(w)\cos(wt)\right)dw
\end{aligned}$$

Usando o fato que $A(w)$ é uma função par e $B(w)$ é uma função ímpar, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A(w)\cos(wt)+B(w)\,\text{sen}\,(wt))\,dw \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(A(w)\cos(wt)+B(w)\,\text{sen}\,(wt))\,dw \end{aligned}$$

A tabela abaixo compara as formas trigonométrica e exponencial das séries e transformadas de Fourier

| | Forma exponencial | Forma trigonométrica |
|---|---|---|
| Série de Fourier | $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$ | $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(w_n t)+b_n\,\text{sen}\,(w_n t))$ |
| Transformada de Fourier | $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwt}dw$ | $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(A(w)\cos(wt)+B(w)\,\text{sen}\,(wt))\,dw$ |

(4.2)

**Exemplo:** Considere a função $f(t)=e^{-at}u(t)$ onde $a$ é uma constante positiva e $u(t)$ é a função Heaviside. A transformada de Fourier $F(w)$ de $f(t)$ foi calculada como exercício e é dada por:

$$F(w)=\frac{a}{a^2+w^2}-\frac{iw}{a^2+w^2}.$$

Usando representação trigonométrica da transformada de Fourier, temos:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(A(w)\cos(wt)+B(w)\,\text{sen}\,(wt))\,dw,$$

onde

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{a}{a^2+w^2} \\ B(w) &= \frac{w}{a^2+w^2} \end{aligned}$$

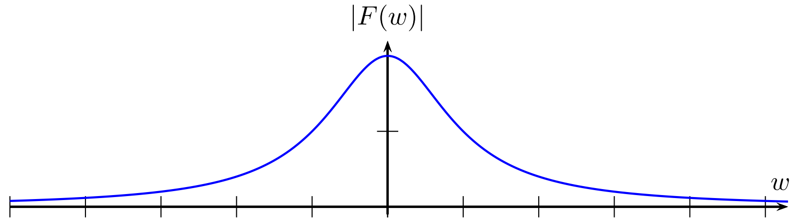
## 4.2 Diagramas de espectro

Diagrama de espectro da transformada de Fourier é a representação gráfica da transformada de Fourier $F(w)$ associadas a uma função $f(t)$. Da mesma forma como o diagrama de espectro da série de Fourier se divide em amplitude e fase, o diagrama de espectro da transformada de Fourier se divide em magnitude e fase. Ou seja, o gráfico de $|F(w)|$ é a diagrama de magnitude e o gráfico de $\phi(w)$ é o diagrama de fase, onde

$$F(w)=|F(w)|e^{i\phi(w)}, \tag{4.3}$$

Já calculamos a transformada de Fourier da função $f(t)=e^{-|t|}$:

$$F(w)=\frac{2}{w^2+1}. \tag{4.4}$$




O gráfico da magnitude $|F(w)|$ é dado na figura. Devido o fato de $F(w)$ ser real, a fase é uma função nula.

A transformada de Fourier da função $f(t) = e^{-at}u(t)$ onde $a$ é uma constante positiva e $u(t)$ é a função Heaviside é dado por:

$$F(w) = \frac{a}{a^2+w^2} - \frac{iw}{a^2+w^2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} |F(w)| &= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+w^2}\right)^2 + \left(\frac{w}{a^2+w^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2+w^2}{(a^2+w^2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}} \end{aligned}$$

e, como $a > 0$, temos $\frac{a}{a^2+w^2} > 0$. Portanto,

$$\phi(w) = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{w}{a^2+w^2}}{\frac{a}{a^2+w^2}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{w}{a}\right). \tag{4.5}$$

A figura 4.1 apresenta o diagrama de espectro de magnitude e fase da transformada $F(w)$ de $f(t)$ quando $a = 1$.

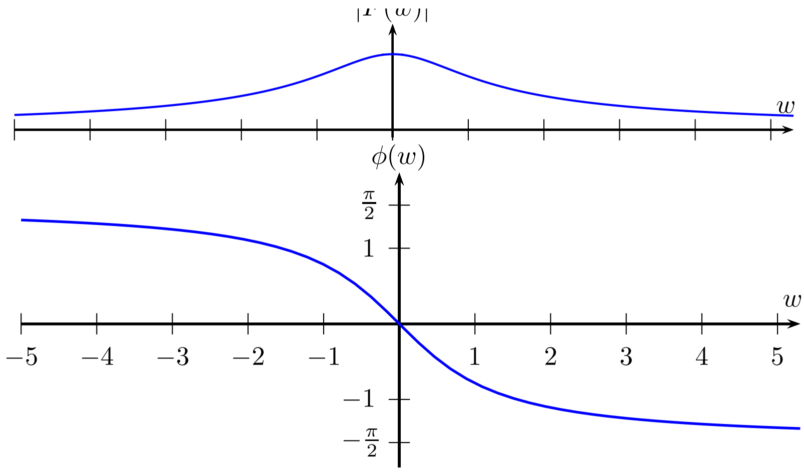



Figure 4.1:

# Chapter 5

# 23 de outubro - Propriedades I -

## 5.1 Linearidade

Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ com transformadas de Fourier $F(w)$ e $G(w)$, respectivamente, e $\alpha$ e $\beta$ duas constantes reais ou complexas, então

$$\mathcal{F}\left\{\alpha f(t)+\beta g(t)\right\}=\alpha\mathcal{F}\{f(t)\}+\beta\mathcal{F}\{g(t)\}=\alpha F(w)+\beta G(w) \tag{5.1}$$

## 5.2 Derivada

Dada uma função diferenciável $f(t)$ tal que

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)=0 \tag{5.2}$$

e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}=iwF(w) \tag{5.3}$$

### 5.2.1 Exemplo

Considere a função $f(t)=e^{-at^2}$, $a>0$, e sua transformada de Fourier:

$$F(w)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}} \tag{5.4}$$

Usando a propriedade da derivada, a transformada de Fourier da derivada $f'(t)=-2ate^{-at^2}$ é dada por:

$$\mathcal{F}\{-2ate^{-at^2}\}=iwF(w)=iw\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}. \tag{5.5}$$

Usando a linearidade, encontramos a transformada de Fourier da função $te^{-at^2}$:

$$\mathcal{F}\{te^{-at^2}\}=-iw\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}. \tag{5.6}$$

## 5.3 Deslocamento no eixo $w$

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(w+ia). \tag{5.7}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{e^{at}f(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{at}e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{(a-iw)t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(ia+w)t}dt \\
&= F(w+ia)
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier da função $f(t) = te^{-at^2}$, $a > 0$, é dada por

$$F(w) = -iw\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}. \tag{5.8}$$

Logo, a transformada $G(w)$ da função $g(t) = te^{bt-at^2}$, $b > 0$, é dada por

$$\begin{aligned}
G(w) = \mathcal{F}\left\{te^{bt-at^2}\right\} &= \mathcal{F}\left\{e^{bt}te^{-at^2}\right\} \\
&= F(w+ib) \\
&= -i(w+ib)\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{(w+ib)^2}{4a}} \\
&= (b-iw)\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2+2wib-b^2}{4a}} \\
&= \sqrt{w^2+b^2}e^{-i\arctan\left(\frac{w}{b}\right)}\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2-b^2}{4a}}e^{-i\left(\frac{wb}{2a}\right)} \\
&= \sqrt{w^2+b^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{w^2-b^2}{4a}}e^{-i\left(\frac{wb}{2a}+\arctan\left(\frac{w}{b}\right)\right)} \\
&= |G(w)|e^{i\phi(w)},
\end{aligned}$$

onde

$$|G(w)| = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{w^2+b^2}e^{-\frac{w^2}{4a}} \qquad \text{e} \qquad \phi(w) = -\left(\frac{wb}{2a} + \arctan\left(\frac{w}{b}\right)\right)$$

Veja os diagramas de espectro de $G(w)$ quando $a = b = 1$ na figura.

## 5.4 Deslocamento no eixo $t$

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\left\{f(t-a)\right\} = e^{-iaw}F(w). \tag{5.9}$$

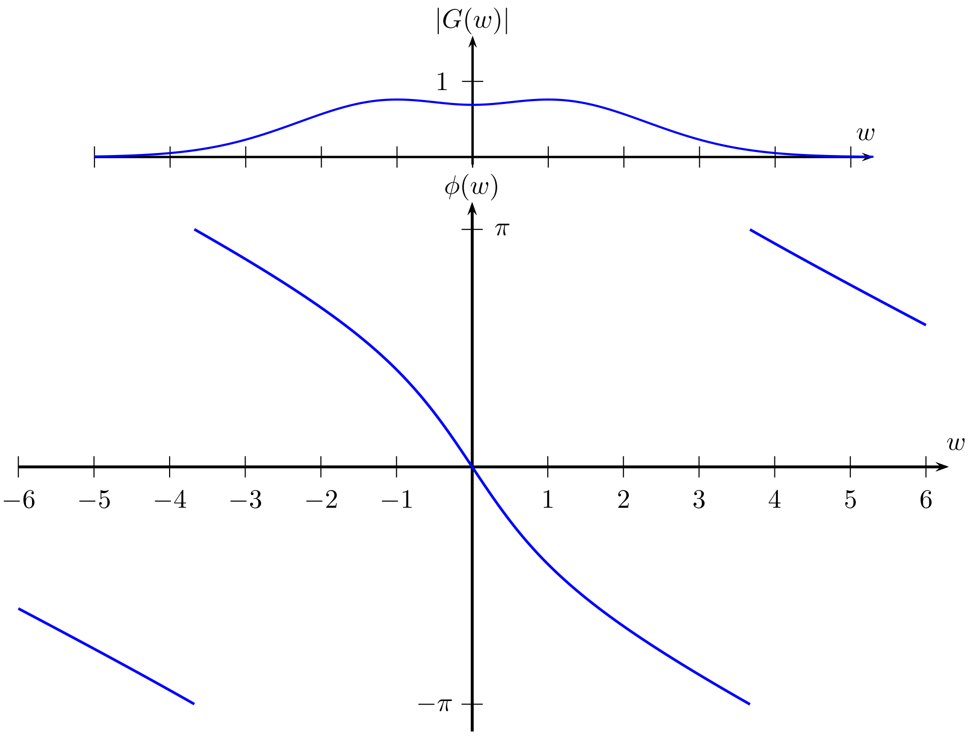



Figure 5.1:

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iw(s+a)}ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iwa}e^{-iws}ds \\
&= e^{-iwa}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iws}ds \\
&= e^{-iaw}F(w)
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier da função $f(t) = e^{-|t|}$ é dada por $F(w) = \frac{2}{w^2+1}$. Logo, a transformada de Fourier da função $g(t) = e^{-|t-2|}$ é

$$G(w) = \frac{2}{w^2+1}e^{-2iw} \tag{5.10}$$

**Obs:** Um deslocamento real no tempo não altera o módulo da transformada de Fourier, pois $|e^{-iaw}| = 1$ sempre que $a$ e $w$ são reais.

## 5.5 Transformada da integral

Dada uma função integrável $f(t)$ tal que sua transformada de Fourier $F(w)$ satisfaça $F(0) = 0$, então

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{iw}F(w). \tag{5.11}$$

**Dem:** Definimos $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ e, usando o teorema fundamental do cálculo, temos $g'(t) = f(t)$. Aplicamos a transformada de Fourier na igualdade e temos:

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}, \tag{5.12}$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = F(w). \tag{5.13}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\cdot 0\cdot\tau}d\tau = F(0) = 0 \tag{5.14}$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(\tau)d\tau = 0, \tag{5.15}$$

portanto, podemos usar a propriedade **??** da transformada de Fourier da derivada e obter:

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = iw\mathcal{F}\{g(t)\}. \tag{5.16}$$

Assim,

$$F(w) = iw\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\}. \tag{5.17}$$

Portanto,

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{iw}F(w). \tag{5.18}$$

## 5.6 Teorema da modulação

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\left\{f(t)\cos(w_0t)\right\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0), \tag{5.19}$$

para $w_0 \in \mathbb{R}$.

**Dem** De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{f(t)\cos(w_0t)\right\} &= \mathcal{F}\left\{f(t)\left(\frac{e^{iw_0t}+e^{-iw_0t}}{2}\right)\right\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{iw_0t}+e^{-iw_0t}}{2}e^{-iwt}dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(w-w_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(w_0+w)t}dt\\
&= \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)
\end{aligned}$$

**Exemplo:** Considere a função $f(t) = \cos(w_0 t)e^{-a|t|}$, $a > 0$. Podemos obter a transformada de Fourier de $f(t)$ a partir da transformada de Fourier da função $g(t) = e^{-a|t|}$. Basta aplicar o teorema da modulação à função $g(t)$, cuja transformada de Fourier é dada por $G(w) = \frac{2a}{w^2+a^2}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{g(t)\cos(w_0 t)\right\} &= \frac{1}{2}G(w-w_0) + \frac{1}{2}G(w+w_0) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2a}{(w-w_0)^2+a^2} + \frac{1}{2}\frac{2a}{(w+w_0)^2+a^2} \\
&= \frac{a}{(w-w_0)^2+a^2} + \frac{a}{(w+w_0)^2+a^2}
\end{aligned}$$

# Chapter 6

# 26 de outubro - Propriedades (continuação)

## 6.1 Teorema da convolução

Dadas duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com suas respectivas transformadas de Fourier, $F_1(w)$ e $F_2(w)$, então

a) (Convolução no tempo)
$$\mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(t)\} = F_1(w)F_2(w), \tag{6.1}$$

b) (Convolução na frequência)
$$(F_1 * F_2)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} \tag{6.2}$$
ou
$$\mathcal{F}^{-1}\{(F_1 * F_2)(w)\} = 2\pi f_1(t)f_2(t), \tag{6.3}$$

onde $*$ indica a convolução de duas funções:
$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \tag{6.4}$$

**Observe** a definição de convolução.
**Dem:**

a) Usando as definições de transformada de Fourier e convolução de duas funções, temos:
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t)e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right) e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-iwt}dt\right] d\tau \end{aligned} \tag{6.5}$$

Uma das integrais pode ser calculada fazendo uma mudança de variável:
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-iwt}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)e^{-iw(s+\tau)}ds \\ &= e^{-iw\tau}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)e^{-iws}ds \\ &= e^{-iw\tau}F_2(w) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Substituindo a equação (6.6) na equação (6.5), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[f_1(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-iwt}dt\right]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[f_1(\tau)e^{-iw\tau}F_2(w)\right]d\tau \\
&= F_2(w)\int_{-\infty}^{\infty}\left[f_1(\tau)e^{-iw\tau}\right]d\tau \\
&= F_1(w)F_2(w)
\end{aligned}$$

b) Analogamente, usando as definições, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{(F_1 * F_2)(w)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F_1 * F_2)(w)e^{iwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F_1(v)F_2(w-v)dv\right)e^{iwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_1(v)\int_{-\infty}^{\infty}F_2(w-v)e^{iwt}dw\right]dv \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}F_2(w-v)e^{iwt}dw &= \int_{-\infty}^{\infty}F_2(y)e^{i(y+v)t}dy \\
&= e^{ivt}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(y)e^{iyt}dy \\
&= 2\pi e^{ivt}f_2(t) \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (6.8) na equação (6.7), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{(F_1 * F_2)(w)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_1(v)\int_{-\infty}^{\infty}F_2(w-v)e^{iwt}dw\right]dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(v)e^{ivt}2\pi f_2(t)dv \\
&= f_2(t)\int_{-\infty}^{\infty}F_1(v)e^{ivt}dv \\
&= 2\pi f_1(t)f_2(t)
\end{aligned}$$

**Exemplo**

Considere as funções $f(t) = te^{-t^2}$ e $g(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ e suas respectivas transformadas de Fourier $F(w) = -iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$ e $G(w) = \frac{2a}{w^2+a^2}$. A transformada de Fourier da função

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)e^{-(t-\tau)^2}e^{-a|\tau|}d\tau \qquad (6.9)$$

é calculada usando o teorema da convolução e é dada por

$$H(w) = F(w)G(w) = -iwa\frac{\sqrt{\pi}}{w^2+a^2}e^{-\frac{w^2}{4}} \qquad (6.10)$$

## 6.2 Conjugação

Dada uma função real $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\overline{F(w)} = F(-w) \tag{6.11}$$

**Dem.** De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{F(w)} &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{e^{-iwt}}dt, \quad \text{pois } \overline{f(t)} = f(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-w)t}dt \\
&= F(-w)
\end{aligned}$$

**obs** Se $f(t)$ não é uma função real, esta propriedade não se aplica.

### 6.2.1 Exemplo

Considere as funções $f(t) = te^{-t^2}$ e sua transformada de Fourier $F(w) = -iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$. Então,

$$F(-w) = iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}} \tag{6.12}$$

e

$$\overline{F(w)} = \overline{-iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}} = iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}. \tag{6.13}$$

## 6.3 Inversão temporal

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w). \tag{6.14}$$

**Dem:**

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-iwt}dt$$

procedemos com a mudança de variáveis $\tau = -t$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(-t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{iw\tau}(-d\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{iw\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i(-w)\tau}d\tau \\
&= F(-w)
\end{aligned}$$

## 6.4 Simetria ou dualidade

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\} \tag{6.15}$$

**Dem** Da definição de transformada de Fourier, temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw \tag{6.16}$$

Podemos trocas $t$ e $w$ e calcular $f(w)$ em função de $F(t)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{itw}dt. \tag{6.17}$$

Ou seja,

$$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-itw}dt = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}. \tag{6.18}$$

## 6.5 Mudança de escala

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad \forall a \neq 0. \tag{6.19}$$

**Dem:** Da definição de transformada de Fourier, temos

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-iwt}dt \tag{6.20}$$

Fazendo a mudança $\tau = at$, distinguindo dois casos: $a > 0$ e $a < 0$. Para o caso $a > 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{iw\tau}{a}}\frac{d\tau}{a} \\
&= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{iw\tau}{a}}d\tau
\end{aligned}$$

Para o caso $a < 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-\frac{iw\tau}{a}}\frac{d\tau}{a} \\
&= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{iw\tau}{a}}d\tau
\end{aligned}$$

Em ambos os casos, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(at)\} &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{iw\tau}{a}}d\tau \\ &= \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)\end{aligned}$$

**Obs:** A propriedade da inversão temporal (propriedade 6.3) é um caso particular desta propriedade quando $a = -1$.

## 6.6 O teorema de Parseval

Seja $f(t)$ uma função real ou complexa e $F(w)$ sua transformada de Fourier, então vale a identidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \tag{6.21}$$

**Dem:** Partimos da representação de $f(t)$ em sua integral de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$$

e consequentemente:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)}e^{-iwt}dw$$

e inserimos essa expressão na integral envolvida:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)}e^{-iwt}dwdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{F(w)}e^{-iwt}dwdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{F(w)}e^{-iwt}dtdw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dtdw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)}F(w)dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw\end{aligned}$$

**Obs** Esta integral está associada ao conceito de energia total de um sinal.

**Exemplo**

Considere a função $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, e sua transformada de Fourier $F(w) = \frac{2a}{w^2+a^2}$. A energia associada a essa função pode ser calculada de duas maneiras distintas:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-a|t|}|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt \\
&= 2\int_{0}^{\infty} e^{-2at} dt \\
&= 2\left[-\frac{1}{2a}e^{-2at}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2a}{w^2+a^2}\right)^2 dw \\
&= \frac{4a^2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(w^2+a^2)^2} dw
\end{aligned}$$

Usando o item 19 da tabela de integrais definidas **??** da página **??** com $m = 0$, temos:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(w^2+a^2)^2} dw = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{4a^2}{\pi}\frac{\pi}{4a^3} = \frac{1}{a}.$$

# Chapter 7

# 28 de outubro

EXEMPLOS.

## 7.1 Passagem do contínuo para o discreto

Nesta seção vamos calcular a transformada de Fourier de uma função periódica $f(t)$ que possui representação em série de Fourier. Para esse propósito, observe que, colocando $F(w) = 2\pi\delta(w - w_0)$, temos

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w - w_0)\} = \frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(w - w_0)e^{iwt}dw = e^{iw_0t}.$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{e^{iw_0t}\} = 2\pi\delta(w - w_0). \tag{7.1}$$

Agora, considere uma função $f(t)$ que possui representação em série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_nt}. \tag{7.2}$$

A definição de transformada de Fourier nos dá:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_nt}\right) e^{-iwt}dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_nt}e^{-iwt}dt\right) \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(w - w_n),
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (**??**) na última passagem.

**Exemplo:** Dada a função $f(t) = \cos(w_0t)$, sua representação em série trigonométrica exponencial é

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{w_0it} + \frac{1}{2}e^{-w_0it}. \tag{7.3}$$

Logo, a sua transformada de Fourier $F(w)$ é dada por:

$$F(w) = \pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0) \tag{7.4}$$

**Exemplo:** Considere a função não periódica $g(t) = e^{-a|t|}\cos(w_0 t)$, $a > 0$. A transformada de Fourier de $g(t)$ é dada por $G(w) = \frac{a}{(w-w_0)^2+a^2} + \frac{a}{(w+w_0)^2+a^2}$ Observe que

$$\lim_{a\to 0} g(t) = \lim_{a\to 0} e^{-a|t|}\cos(w_0 t) = \cos(w_0 t). \tag{7.5}$$

Comparando com o exemplo **??**, é esperado que $G(w)$ convirja para $F(w)$. De fato, observe que a área abaixo da curva é constante com respeito a $a$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(w)dw &= a\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(w-w_0)^2+a^2} + \frac{1}{(w+w_0)^2+a^2}\right)dw \\ &= a\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{w-w_0}{a}\right) + \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{w+w_0}{a}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \end{aligned}$$

e a curva $G(w)$ converge para 0, exceto em $w = w_0$ e $w = -w_0$. Portanto o limite de $G(w)$ é $F(w)$. Os diagramas de magnitude de $F(w)$ e de $G(w)$ para alguns valores de $a > 0$ e $w_0 = 1$ são apresentados na figura

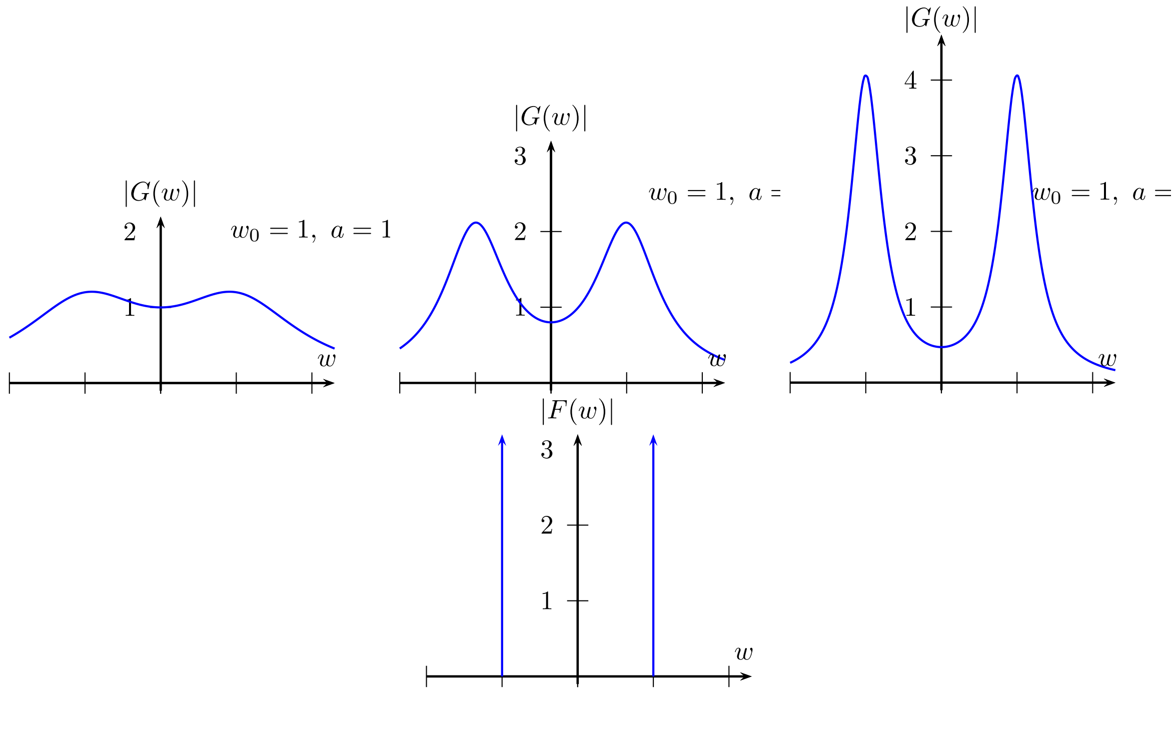



Figure 7.1:

## 7.2 Aplicação: Sinais Discretos

Nessa seção vamos discutir sobre discretização de sinais, em especial, pretendemos responder com que frequência precisamos amostrar um sinal real para podermos reconstruí-lo. Vamos considerar que o espectro da função $f(t)$ é composto apenas por frequências inferiores a $w_c$, onde $w_c$ é chamado de frequência de corte. Mostraremos que se conhecermos apenas os valores de $f(t)$ para $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, onde $T$ é o período de amostragem e $w_a := \frac{2\pi}{T} > 2w_c$ é a frequência de amostragem, então podemos reconstruir exatamente $f(t)$ em todos instantes de tempo. Considere $f(t)$ uma função real, definiremos $f_T(t)$ uma versão discretizada deste sinal da seguinte forma:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT), \tag{7.6}$$

assim $f_T(t)$ é um trem de Dirac's cujas amplitudes coincidem com o valor da função $f(t)$ nos pontos de amostragem $kT$. Veja um exemplo na figura **??**. A fim de calcularmos a transforma de Fourier de $f_T(t)$, observamos que:

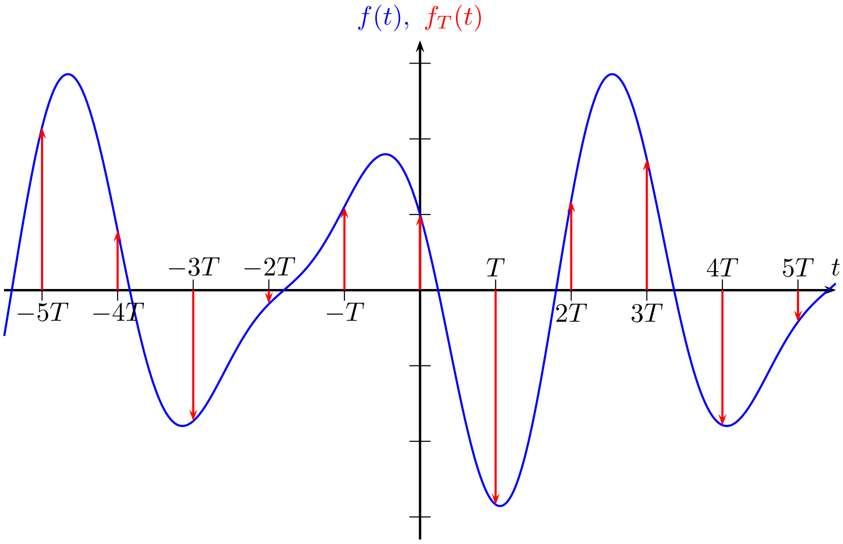



Figure 7.2:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) \\ &= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ &= f(t)\delta_T(t) \end{aligned}$$

onde $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ é uma função periódica cuja série de Fourier é dada por:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t} \tag{7.7}$$

e

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t)e^{-iw_nt}dt = \frac{1}{T} \tag{7.8}$$

assim,

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iw_nt} \tag{7.9}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f(t)\delta_T(t) \\ &= f(t)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iw_nt} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw_nt} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\begin{aligned} F_T(w) &= \mathcal{F}\{f_T(t)\} \\ &= \frac{1}{T}\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw_nt}\right\} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w-w_n) \end{aligned}$$

onde se usou a propriedade do deslocamento no eixo $w$ (**??**). Veja um exemplo na figura:

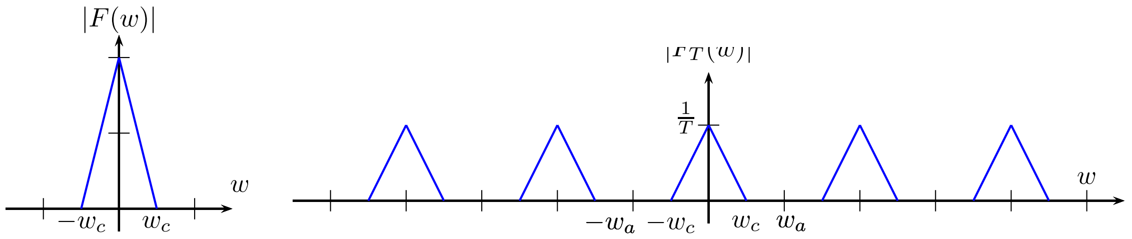



Figure 7.3:

**Obs:** Observamos que se a frequência de amostragem $w_a$ for superior a $2w_c$, então $F_T(w) = \frac{1}{T}F(w)$ no intervalo $[-w_c, w_c]$ e, portanto, toda a informação de $f(t)$ é preservada. De fato, neste caso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} F(w)e^{iwt}dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} TF_T(w)e^{iwt}dw \end{aligned}$$