Chapter 1

16 de outubro

1.1 Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) é dita periódica se existe $T > 0$ tal que:

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aqui T é chamado período e a função é dita T-periódica.

Exemplos: Você conhece? $\cos(t), \operatorname{sen}(t)$.

Observação: Se $f(t)$ é T-periódica, $\alpha f(t)$ também é.

Observação: Se T é período de uma função $f(t)$ então todo múltiplo inteiro de T também é período:

$$f(t+nT) = f(t).$$

Perguntas: A soma de funções periódicas é periódica?

Resposta: Se $f(t)$ tem período T_1 e g(t) tem período T_2 e $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$, isto é, $mT_1 = nT_2$, então $f(t) + g(t)$ é periódica. Aqui n e m são inteiros positivos.
Dem: Construtiva com $T = mT_1$:

$$f(t+T) + g(t+T) = f(t+nT_1) + g(t+mT_2) = f(t) + g(t)$$

Definição: Se $f(t)$ é periódica e existe T_f o menor período, então T_f é chamado de período fundamental e $w_f := \frac{2\pi}{T_f}$ é a frequência angular fundamental.

Pergunta: Existem funções periódicas sem período fundamental?

$$f(t) = 1$$

1.1.1 Polinômios trigonométricos e séries trigonométricas

Seja $T > 0$, definimos polinômio trigonomético de grau N uma função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)] \tag{1.1}$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Seja $T > 0$, definimos série trigonométrica toda função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)] \tag{1.2}$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Exemplo: Mostre que T é um período para séries e polinômios trigonométricos acima definidos.

1.1.2 Relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases} \\
\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \\ T, & n = m = 0 \end{cases} \\
\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt &= 0
\end{aligned}$$

1.1.3 Forma harmônica

$$A\cos(wt - \phi) = A\left[\cos(wt)\cos(\phi) + \operatorname{sen}(wt)\operatorname{sen}(\phi)\right]$$

$$A\cos(wt - \phi) = A\cos(wt)\cos(\phi) + A\operatorname{sen}(wt)\operatorname{sen}(\phi)$$

$$A_n\cos(w_n t - \phi_n) = \underbrace{A\cos(\phi_n)}_{a_n}\cos(w_n t) + \underbrace{A\operatorname{sen}(\phi_n)}_{b_n}\operatorname{sen}(w_n t)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(w_n t - \phi_n)$$

Obs: Para qualquer par a_n e b_n, existem A_n e ϕ_n que satisfazem a identidade e $A_n > 0, \quad \forall n > 0$.

1.1.4 Forma complexa ou exponencial

1.2 Forma exponencial

A forma exponencial de uma série de Fourier é obtida quando se substiuem as funções trigonométricas $\operatorname{sen}(w_n t)$ e $\cos(w_n t)$ por suas representações em termos de exponenciais complexos, isto é

$$\cos(w_n t) = \frac{e^{iw_n t} + e^{-iw_n t}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(w_n t) = \frac{e^{iw_n t} - e^{-iw_n t}}{2i} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(w_n t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{iw_n t} + e^{-iw_n t}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{iw_n t} - e^{-iw_n t}}{2i} \right) \end{aligned}$$

Reagrupando os termos e usando o fato que $\frac{1}{i} = -i$, temos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{iw_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-iw_n t} \tag{1.4}$$

Agora observamos que as definições **??** dadas por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t)dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(w_n t)dt \end{aligned}$$

Embora estas expressões estejam definadas apenas para $n > 0$, elas fazem sentidos para qualquer n inteiro. Neste caso, valem as seguintes identidades:

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n \quad b_0 = 0. \tag{1.5}$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$ e a paridade das funções cosseno e seno. Estendendo estas definições para qualquer inteiro, introduzimos os coeficientes C_n dados por:

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \tag{1.6}$$

Observe que estes coeficientes estão definidos para para número inteiro n, assim temos:

$$C_0 = \frac{a_0 - ib_0}{2} = \frac{a_0}{2} \tag{1.7}$$

e

$$C_{-n} = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{1.8}$$

Substituindo estas expressões para C_0, C_n e C_{-n} em (1.4), obtemos:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{iw_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-iw_n t}$$

Escrevemos agora esta última expressão em um único somatório:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t} \tag{1.9}$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$ Observamos também que os coeficientes C_n podem ser escritos das seguinte forma mais enxuta:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[\cos(w_n t) - i\,\mathrm{sen}\,(w_n t)\right] dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-iw_n t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-iw_n t}dt \end{aligned}$$

1.2.1 Convegência

(Teorema de Dirichlet(Seja f uma função periódica de período T, suave por partes e descontínua no máximo em um número finito de saltos dentro de cada intervalo, então a série de Fourier converge em cada ponto t para

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \tag{1.10}$$

onde $f(t+)$ e $f(t-)$ são os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente. Observe que nos pontos t onde $f(t)$ é contínua, então $f(t+) = f(t-)$ e a série de Fourier converge para $f(t)$.

1.2.2 Interlúdio - Caculando coeficientes

Obs:

Se $f(t)$ é T-periódica, então:

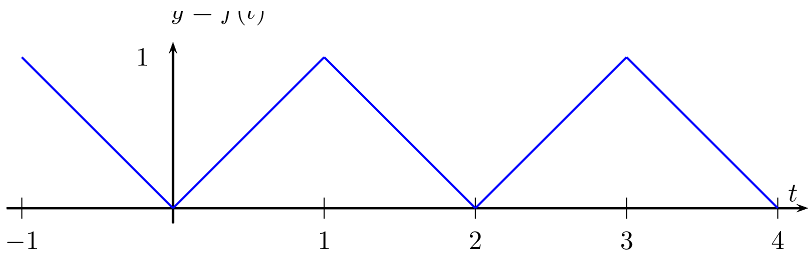
$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{T+a} f(t)dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Considere a fução periódica da por:

Seja $f(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= |t|, \quad -1 \le t < 1 \\ f(t+2) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos. Portanto se aplica o teorema:



Observamos que essa é uma função par, ou seja, $f(t) = f(-t)$. A fim de explorar essa simetria, utilizaremos as fórmulas (??) envolvendo integrais simétricas, isto é,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,(w_n t)dt \end{aligned}$$

onde $T = 2$ e $w_n = \frac{2\pi n}{T} = \pi n$. Logo,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} |t|dt = 2\int_0^1 tdt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n = \int_{-1}^{1} |t|\cos(\pi n t)dt &= 2\int_0^1 t\cos(\pi n t)dt \\ &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)}{\pi n}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\,(\pi n t)}{\pi n}dt \\ &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n t)}{\pi^2 n^2}\right]_0^1 = 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} |t|\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)dt = 0.$$

onde se usou que $|t|$, $|t|\cos(\pi n t)$ são funções pares em t e $|t|\,\mathrm{sen}\,(\pi n t)$ é ímpar em t. Assim, temos

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\pi t) + \cdots\right) \tag{1.11}$$

Observe que, quando $t = 0$, obtemos como subproduto da série de Fourier da $f(t)$ a soma da seguinte série numérica:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{1.12}$$

A figura 1.1 apresenta os gráficos da série que representa a função $f(t)$ com um termo, dois termos e três termos.

Onda quadrada

Seja $g(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} g(t) &= -1, \quad -1 < t < 0 \\ g(t) &= 0, \quad t = 0 \text{ ou } t = 1 \\ g(t) &= 1, \quad 0 < t < 1 \\ g(t+2) &= g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos exceto por saltos nos inteiros, onde a função vale a média aritmética dos limites laterais. Portanto

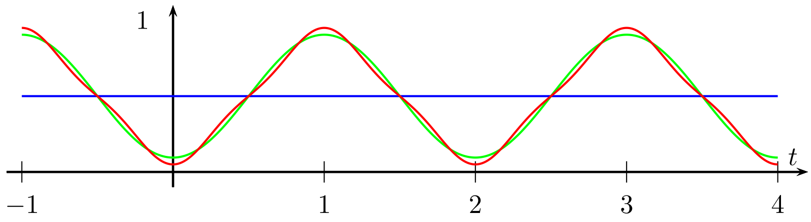
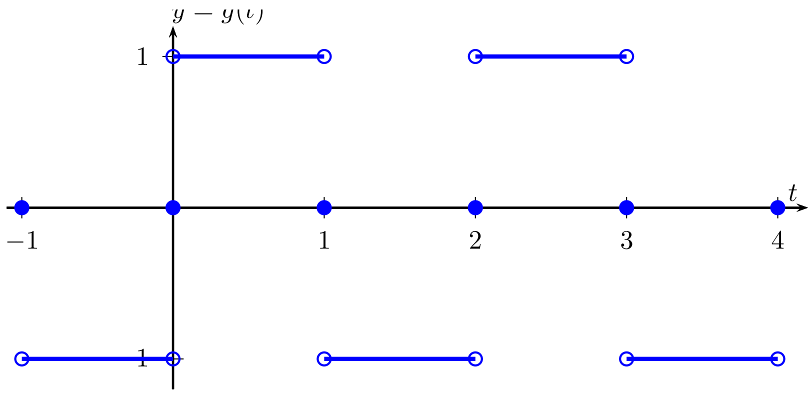


Figure 1.1: Gráficos de $f_0(t) = \frac{1}{2}$ (azul), $f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t)$ (verde) e $f_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\pi t)\right)$ (vermelho).



se aplica o teorema **??**. Observamos que essa é uma função ímpar, ou seja, $f(t) = -f(-t)$. Novamente, utilizaremos as fórmulas (**??**) envolvendo integrais simétricas:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} g(t)dt = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} g(t)\cos(\pi nt)dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n = \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{sen}\,(\pi nt)dt = 2\int_0^1 g(t)\,\mathrm{sen}\,(\pi nt)dt &= 2\int_0^1 \mathrm{sen}\,(\pi nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[-\cos(\pi nt)\right]_0^1 = 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n} \end{aligned}$$

Logo,

$$g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t) + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(5\pi t) + \cdots\right). \tag{1.13}$$

A figura 1.2 apresenta os gráficos da série que representa a função $g(t)$ com um termo, dois termos, três termos e quatro termos.

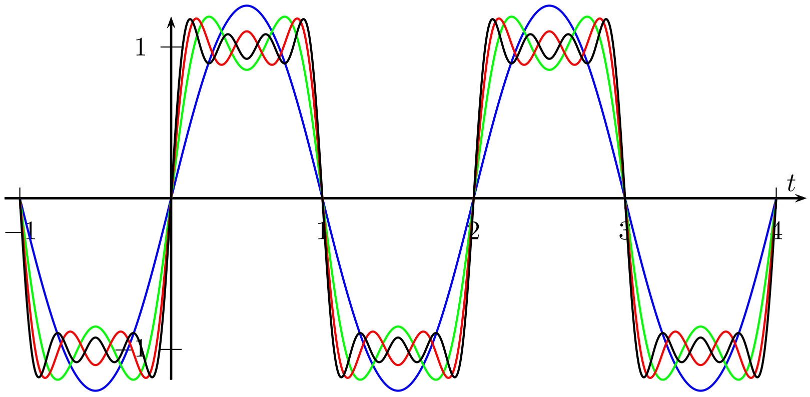
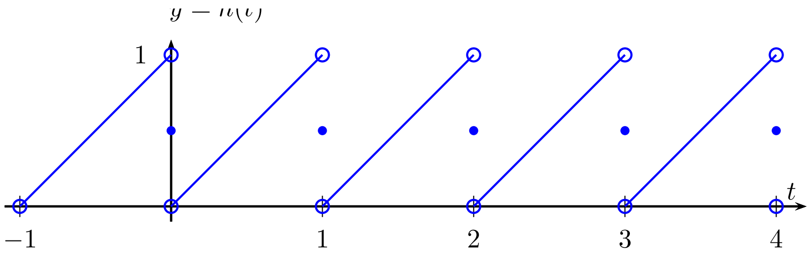


Figure 1.2: Gráficos de $g_0(t) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{sen}\,(\pi t)$ (azul), $g_1(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t)\right)$ (verde), $g_2(t) = g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t) + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(5\pi t)\right)$ (vermelho) e $g_3(t) = g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,(\pi t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3\pi t) + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(5\pi t) + \frac{1}{7}\,\mathrm{sen}\,(7\pi t)\right)$ (preto).

Exemplo Seja $h(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= t, \quad 0 < t < 1 \\ f(t) &= \frac{1}{2}, \quad t = 1 \\ f(t+1) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua exceto por salto nos inteiros onde $h(t)$ assume o valor médio dos limites laterais. Portanto se aplica o teorema **??**. Utilizaremos as fórmulas (**??**) envolvendo integrais no intervalo $[0, 1]$, isto é,



$$a_0 = 2\int_0^1 t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n = 2\int_0^1 t\cos(2\pi n t)dt = &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(2\pi n t)}{2\pi n}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\,(2\pi n t)}{2\pi n}dt \\ &= 2\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,(2\pi n t)}{2\pi n} + \frac{\cos(2\pi n t)}{4\pi^2 n^2}\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n = 2\int_0^1 t \operatorname{sen}(2\pi n t) dt = &= 2\left[-\frac{t\cos(2\pi n t)}{2\pi n}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi n} dt \\ &= 2\left[-\frac{t\cos(2\pi n t)}{2\pi n} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{4\pi^2 n^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

Logo,

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{sen}(2\pi t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4\pi t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(6\pi t) + \cdots\right). \qquad (1.14)$$

Obs: Os coeficiente b_n da série de Fourier de uma função par são nulos bem como os coeficiente a_n da série de Fourier de uma função ímpar também o são.

Demonstre a observação .

Chapter 2

21 de outubro

2.0.1 Diagramas de espectro

Diagramas espectro são representações gráficas dos coeficientes de Fourier C_n associados a uma função periódica $f(t)$. Como os coeficientes C_n são números complexos, é comum representá-los na forma de módulo e fase, isto é:

$$C_n = |C_n| e^{i\phi_n}. \tag{2.1}$$

O ângulo de fase assim definido coincide com o conceito de argumento do número C_n.

Exemplo: A função

$$f(t) = -1 + 2\cos(t) + 4\,\mathrm{sen}\,(2t) \tag{2.2}$$

é periódica com periodo fundamental 2π e pode ser escrita na forma exponencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= -1 + 2\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + 4\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) \\ &= 2ie^{-2it} + e^{-it} - 1 + e^{it} - 2ie^{2it} \end{aligned}$$

Assim, identificamos cinco coeficientes não nulos:

$$\begin{array}{lcllll} C_{-2} & = & 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} & \Longrightarrow & |C_{-2}| = 2, & \phi_{-2} = \frac{\pi}{2} \\ C_{-1} & = & 1 & \Longrightarrow & |C_{-1}| = 1, & \phi_{-1} = 0 \\ C_0 & = & -1 = 1e^{\pi} & \Longrightarrow & |C_0| = 1, & \phi_0 = \pi \\ C_1 & = & 1 & \Longrightarrow & |C_1| = 1, & \phi_1 = 0 \\ C_2 & = & -2i = 2e^{\frac{-i\pi}{2}} & \Longrightarrow & |C_2| = 2, & \phi_2 = -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

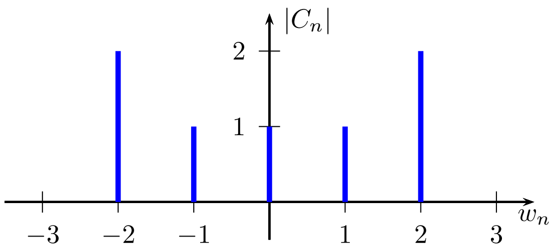
Os digramas de espectro de amplitude e fase são dados a seguir:

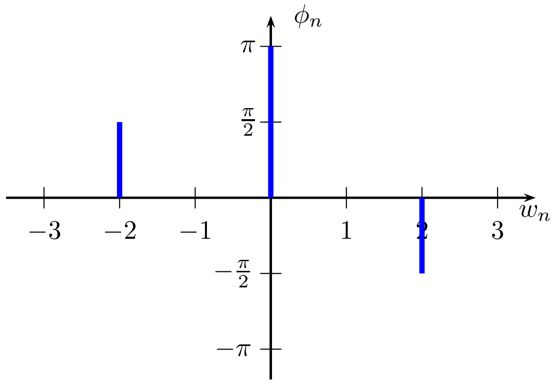
Exemplo: As primeiras raias do diagrama de espectro da função a seguir:

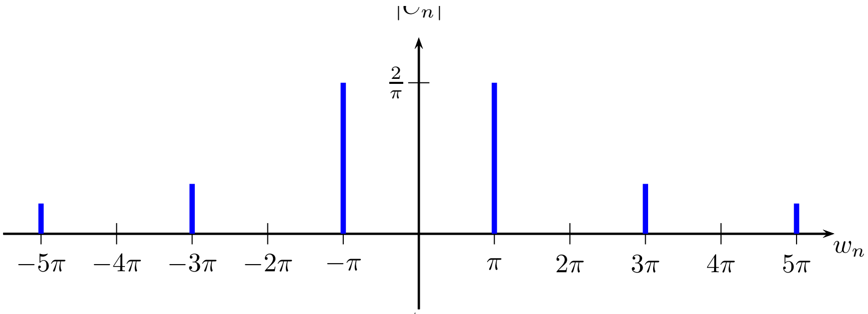
$$g(t) = \cdots + \frac{2i}{5\pi}e^{-5i\pi t} + \frac{2i}{3\pi}e^{-3i\pi t} + \frac{2i}{\pi}e^{-i\pi t} - \frac{2i}{\pi}e^{i\pi t} - \frac{2i}{3\pi}e^{3i\pi t} - \frac{2i}{5\pi}e^{5i\pi t} - \cdots, \tag{2.3}$$

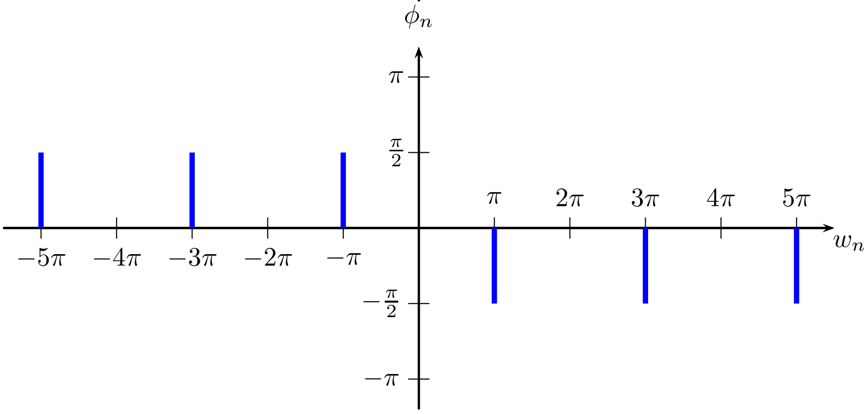
são dados na figura a seguir

Exemplos:









$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt)$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nt)$$

2.1 Propriedades das Séries de Fourier

Define-se a potência média de um função periódica $f(t)$ como

$$\overline{P}_f = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \tag{2.4}$$

A potência média da função $f(t) = A\cos(wt)$ é dada por

$$\begin{aligned}\overline{P}_f &= \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)^2 dt \\ &= \frac{A^2}{T}\int_0^T \left(\frac{\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)+1}{2}\right) dt \\ &= \frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

onde se usou que $w = \frac{2\pi}{T}$ e identidade trigonométrica dada por:

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{\cos(2x)+1}{2}. \tag{2.5}$$

Exemplo: Seja $V(t) = A\cos(wt)$ uma fonte de tensão com frequência $w = 60\text{Hz} = 120\pi\text{rad/s}$ ligado a um resistor de resistência $R\Omega$. A potência no resistor é

$$P(t) = \frac{V(t)^2}{R} \tag{2.6}$$

e a potência média P_m é

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V(t)^2}{R}dt, \tag{2.7}$$

onde $T = \frac{1}{60}s$. Por outro lado, a potência média é calculada em termos da tensão média por

$$P_m = \frac{V_m^2}{R}, \tag{2.8}$$

ou seja,

$$V_m^2 = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt. \tag{2.9}$$

O exemplo nos dá o valor da potência média do sinal $V(t) = A\cos(wt)$. Logo,

$$V_m = \frac{A}{\sqrt{2}}. \tag{2.10}$$

Se $V_m = 127V$, então a amplitude do sinal é aproximadamente $A \approx 180$.

Observação: Na expressão (2.9), V_m também é chamado de valor RMS do sinal $v(t)$ (Root mean square):

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2 dt}. \tag{2.11}$$

Teorema de Parseval Seja $f(t)$ uma função periódica representável por uma série de Fourier, então vale a seguinte identidade.

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \tag{2.12}$$

Dem:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}dt$$

Como $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$, temos

$$\overline{f(t)} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n}\ \overline{e^{iw_n t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} e^{-iw_n t}$$

Substituindo esta expressão para $\overline{f(t)}$ na definição de potência média, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} e^{-iw_n t}\right] dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\overline{C_n}\int_0^T f(t)e^{-iw_n t}dt\right]\end{aligned}$$

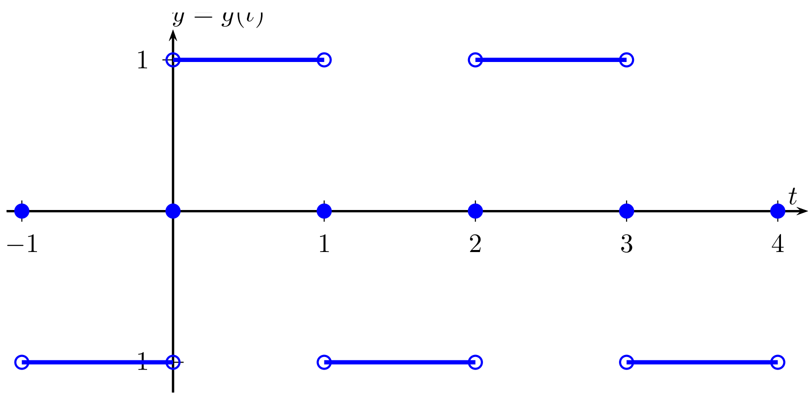
Como $C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-iw_n t}dt$, temos:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} C_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Exemplo Seja $g(t)$ um função dada no exemplo **??**, isto é,

$$\begin{aligned} g(t) &= -1, \quad -1 < t < 0 \\ g(t) &= 0, \quad t = 0 \text{ ou } t = 1 \\ g(t) &= 1, \quad 0 < t < 1 \\ g(t+2) &= g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vimos no exemplo **??** que sua expansão em série de Fourier é da forma:



$$g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi t) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\pi t) + \cdots\right). \tag{2.13}$$

Calcularemos agora a potência média desta função através de sua representação no tempo e depois em frequência:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 1 dt = 1$$

Alternativamente, temos pelo Teorema de Parseval:

$$\overline{P_f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2$$

Como $b_{-n} = b_n$, temos que $|b_{-n}| = |b_n|$ e ainda temos que $b_0 = 0$, portanto:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)$$

temos:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{\pi^2}{8} = 1$$

2.2 Passagem do discreto para o contínuo

2.3 Exemplos de transformadas de Fourier

2.3.1 Função tenda

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} \quad =$$