

Chapter 1

16 de outubro

1.1 Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) é dita periódica se existe $T > 0$ tal que:

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aqui T é chamado período e a função é dita T -periódica.

Exemplos: Você conhece? $\cos(t)$, $\sin(t)$.

Observação: Se $f(t)$ é T -periódica, $\alpha f(t)$ também é.

Observação: Se T é período de uma função $f(t)$ então todo múltiplo inteiro de T também é período:

$$f(t + nT) = f(t).$$

Perguntas: A soma de funções periódicas é periódica?

Resposta: Se $f(t)$ tem período T_1 e $g(t)$ tem período T_2 e $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$, isto é, $mT_1 = nT_2$, então $f(t) + g(t)$ é periódica. Aqui n e m são inteiros positivos. **Dem:** Construtiva com $T = mT_1$:

$$f(t + T) + g(t + T) = f(t + nT_1) + g(t + mT_2) = f(t) + g(t)$$

Definição: Se $f(t)$ é periódica e existe T_f o menor período, então T_f é chamado de período fundamental e $w_f := \frac{2\pi}{T_f}$ é a frequência angular fundamental.

Pergunta: Existem funções periódicas sem período fundamental?

$$f(t) = 1$$

1.1.1 Polinômios trigonométricos e séries trigonométricas

Seja $T > 0$, definimos polinômio trigonométrico de grau N uma função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)] \quad (1.1)$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Seja $T > 0$, definimos série trigonométrica toda função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)] \quad (1.2)$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Exemplo: Mostre que T é um período para séries e polinômios trigonométricos acima definidos.

1.1.2 Relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \\ T, & n = m = 0 \end{cases} \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt &= 0\end{aligned}$$

1.1.3 Forma harmônica

$$A \cos(wt - \phi) = A [\cos(wt) \cos(\phi) + \sin(wt) \sin(\phi)]$$

$$A \cos(wt - \phi) = A \cos(wt) \cos(\phi) + A \sin(wt) \sin(\phi)$$

$$A_n \cos(w_n t - \phi_n) = \underbrace{A_n \cos(\phi_n)}_{a_n} \cos(w_n t) + \underbrace{A_n \sin(\phi_n)}_{b_n} \sin(w_n t)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(w_n t - \phi_n)$$

Obs: Para qualquer par a_n e b_n , existem A_n e ϕ_n que satisfazem a identidade e $A_n > 0$, $\forall n > 0$.

1.1.4 Forma complexa ou exponencial

1.2 Forma exponencial

A forma exponencial de uma série de Fourier é obtida quando se substituem as funções trigonométricas $\sin(w_n t)$ e $\cos(w_n t)$ por suas representações em termos de exponenciais complexos, isto é

$$\cos(w_n t) = \frac{e^{iw_n t} + e^{-iw_n t}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(w_n t) = \frac{e^{iw_n t} - e^{-iw_n t}}{2i} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(w_n t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{iw_n t} + e^{-iw_n t}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{iw_n t} - e^{-iw_n t}}{2i} \right)\end{aligned}$$

Reagrupando os termos e usando o fato que $\frac{1}{i} = -i$, temos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{iw_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-iw_n t} \quad (1.4)$$

Agora observamos que as definições ?? dadas por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt \end{aligned}$$

Embora estas expressões estejam definidas apenas para $n > 0$, elas fazem sentidos para qualquer n inteiro. Neste caso, valem as seguintes identidades:

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad b_0 = 0. \quad (1.5)$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$ e a paridade das funções cosseno e seno. Estendendo estas definições para qualquer inteiro, introduzimos os coeficientes C_n dados por:

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (1.6)$$

Observe que estes coeficientes estão definidos para para número inteiro n , assim temos:

$$C_0 = \frac{a_0 - ib_0}{2} = \frac{a_0}{2} \quad (1.7)$$

e

$$C_{-n} = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (1.8)$$

Substituindo estas expressões para C_0 , C_n e C_{-n} em (1.4), obtemos:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{iw_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-iw_n t}$$

Escrevemos agora esta última expressão em um único somatório:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t} \quad (1.9)$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$. Observamos também que os coeficientes C_n podem ser escritos da seguinte forma mais enxuta:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos(w_n t) - i \sin(w_n t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-iw_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-iw_n t} dt \end{aligned}$$

1.2.1 Convergência

(Teorema de Dirichlet) Seja f uma função periódica de período T , suave por partes e descontínua no máximo em um número finito de saltos dentro de cada intervalo, então a série de Fourier converge em cada ponto t para

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \quad (1.10)$$

onde $f(t+)$ e $f(t-)$ são os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente. Observe que nos pontos t onde $f(t)$ é contínua, então $f(t+) = f(t-)$ e a série de Fourier converge para $f(t)$.

1.2.2 Interlúdio - Calculando coeficientes

Obs:

Se $f(t)$ é T -periódica, então:

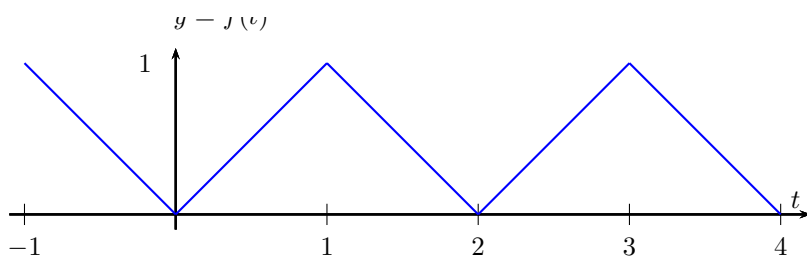
$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{T+a} f(t)dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Considere a função periódica da por:

Seja $f(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= |t|, \quad -1 \leq t < 1 \\ f(t+2) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos. Portanto se aplica o teorema:



Observamos que essa é uma função par, ou seja, $f(t) = f(-t)$. A fim de explorar essa simetria, utilizaremos as fórmulas (??) envolvendo integrais simétricas, isto é,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t)dt \end{aligned}$$

onde $T = 2$ e $w_n = \frac{2\pi n}{T} = \pi n$. Logo,

$$a_0 = \int_{-1}^1 |t|dt = 2 \int_0^1 tdt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned}
a_n = \int_{-1}^1 |t| \cos(\pi n t) dt &= 2 \int_0^1 t \cos(\pi n t) dt \\
&= 2 \left[\frac{t \sin(\pi n t)}{\pi n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} dt \\
&= 2 \left[\frac{t \sin(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n t)}{\pi^2 n^2} \right]_0^1 = 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}
\end{aligned}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 |t| \sin(\pi n t) dt = 0.$$

onde se usou que $|t|$, $|t| \cos(\pi n t)$ são funções pares em t e $|t| \sin(\pi n t)$ é ímpar em t . Assim, temos

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\pi t) + \dots \right) \quad (1.11)$$

Observe que, quando $t = 0$, obtemos como subproduto da série de Fourier da $f(t)$ a soma da seguinte série numérica:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (1.12)$$

A figura 1.1 apresenta os gráficos da série que representa a função $f(t)$ com um termo, dois termos e três termos.

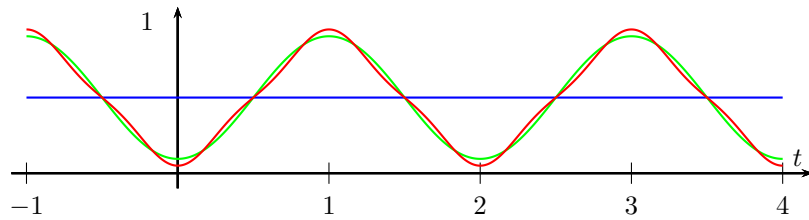


Figure 1.1: Gráficos de $f_0(t) = \frac{1}{2}$ (azul), $f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t)$ (verde) e $f_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} (\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t))$ (vermelho).

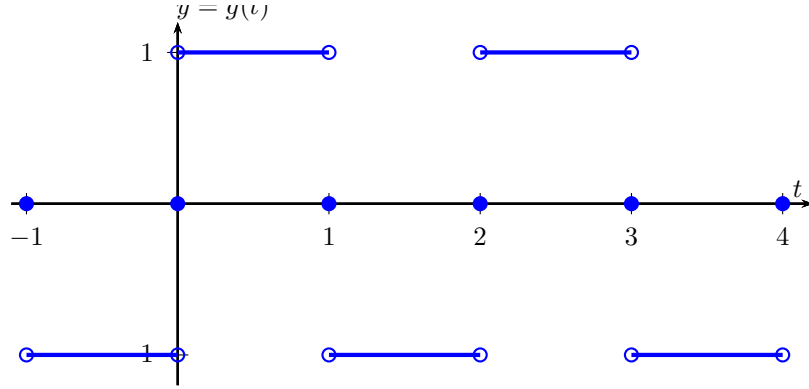
Onda quadrada

Seja $g(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned}
g(t) &= -1, \quad -1 < t < 0 \\
g(t) &= 0, \quad t = 0 \text{ ou } t = 1 \\
g(t) &= 1, \quad 0 < t < 1 \\
g(t+2) &= g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos exceto por saltos nos inteiros, onde a função vale a média aritmética dos limites laterais. Portanto se aplica o teorema ???. Observamos que essa é uma função ímpar, ou seja, $f(t) = -f(-t)$. Novamente, utilizaremos as fórmulas (??) envolvendo integrais simétricas:

$$a_0 = \int_{-1}^1 g(t) dt = 0$$



$$a_n = \int_{-1}^1 g(t) \cos(\pi n t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 g(t) \sin(\pi n t) dt = 2 \int_0^1 g(t) \sin(\pi n t) dt = 2 \int_0^1 \sin(\pi n t) dt \\ &= \frac{2}{\pi n} [-\cos(\pi n t)]_0^1 = 2 \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \end{aligned}$$

Logo,

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \dots \right). \quad (1.13)$$

A figura 1.2 apresenta os gráficos da série que representa a função $g(t)$ com um termo, dois termos, três termos e quatro termos.

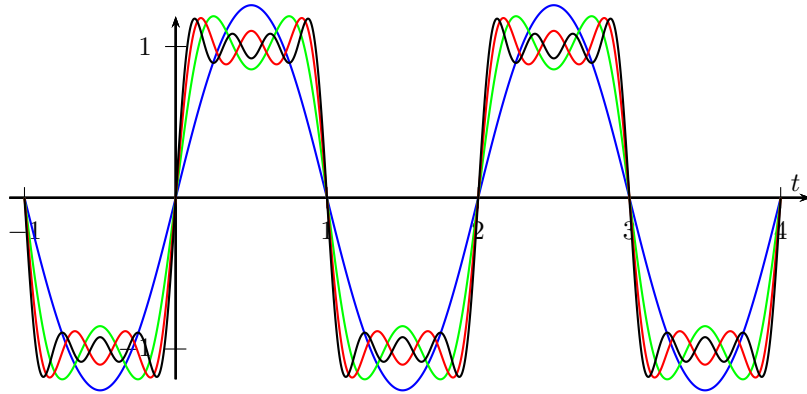
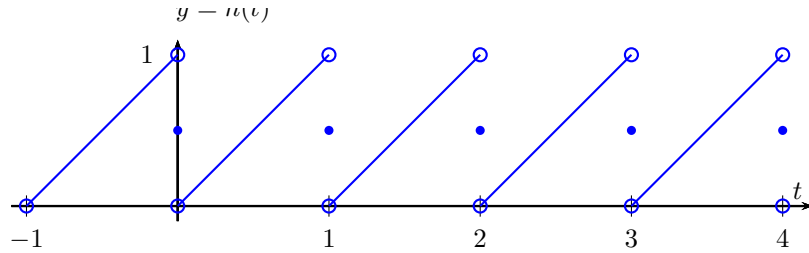


Figure 1.2: Gráficos de $g_0(t) = \frac{4}{\pi} \sin(\pi t)$ (azul), $g_1(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t))$ (verde), $g_2(t) = g(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t))$ (vermelho) e $g_3(t) = g(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \frac{1}{7} \sin(7\pi t))$ (preto).

Exemplo Seja $h(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= t, \quad 0 < t < 1 \\ f(t) &= \frac{1}{2}, \quad t = 1 \\ f(t+1) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua exceto por salto nos inteiros onde $h(t)$ assume o valor médio dos limites laterais. Portanto se aplica o teorema ???. Utilizaremos as fórmulas (??) envolvendo integrais no intervalo $[0, 1]$, isto é,



$$a_0 = 2 \int_0^1 t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi n t) dt &= 2 \left[\frac{t \sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} dt \\ &= 2 \left[\frac{t \sin(2\pi n t)}{2\pi n} + \frac{\cos(2\pi n t)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi n t) dt &= 2 \left[-\frac{t \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi n} dt \\ &= 2 \left[-\frac{t \cos(2\pi n t)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi n t)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

Logo,

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t) + \frac{1}{3} \sin(6\pi t) + \dots \right). \quad (1.14)$$

Obs: Os coeficiente b_n da série de Fourier de uma função par são nulos bem como os coeficiente a_n da série de Fourier de uma função ímpar também o são.

Demonstre a observação .

Chapter 2

21 de outubro

2.0.1 Diagramas de espectro

Diagramas espectro são representações gráficas dos coeficientes de Fourier C_n associados a uma função periódica $f(t)$. Como os coeficientes C_n são números complexos, é comum representá-los na forma de módulo e fase, isto é:

$$C_n = |C_n|e^{i\phi_n}. \quad (2.1)$$

O ângulo de fase assim definido coincide com o conceito de argumento do número C_n .

Exemplo: A função

$$f(t) = -1 + 2\cos(t) + 4\sin(2t) \quad (2.2)$$

é periódica com período fundamental 2π e pode ser escrita na forma exponencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= -1 + 2\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + 4\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) \\ &= 2ie^{-2it} + e^{-it} - 1 + e^{it} - 2ie^{2it} \end{aligned}$$

Assim, identificamos cinco coeficientes não nulos:

$$\begin{array}{llll} C_{-2} &= 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} &\implies & |C_{-2}| = 2, \quad \phi_{-2} = \frac{\pi}{2} \\ C_{-1} &= 1 &\implies & |C_{-1}| = 1, \quad \phi_{-1} = 0 \\ C_0 &= -1 = 1e^{\pi} &\implies & |C_0| = 1, \quad \phi_0 = \pi \\ C_1 &= 1 &\implies & |C_1| = 1, \quad \phi_1 = 0 \\ C_2 &= -2i = 2e^{-\frac{i\pi}{2}} &\implies & |C_2| = 2, \quad \phi_2 = -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

Os diagramas de espectro de amplitude e fase são dados a seguir:

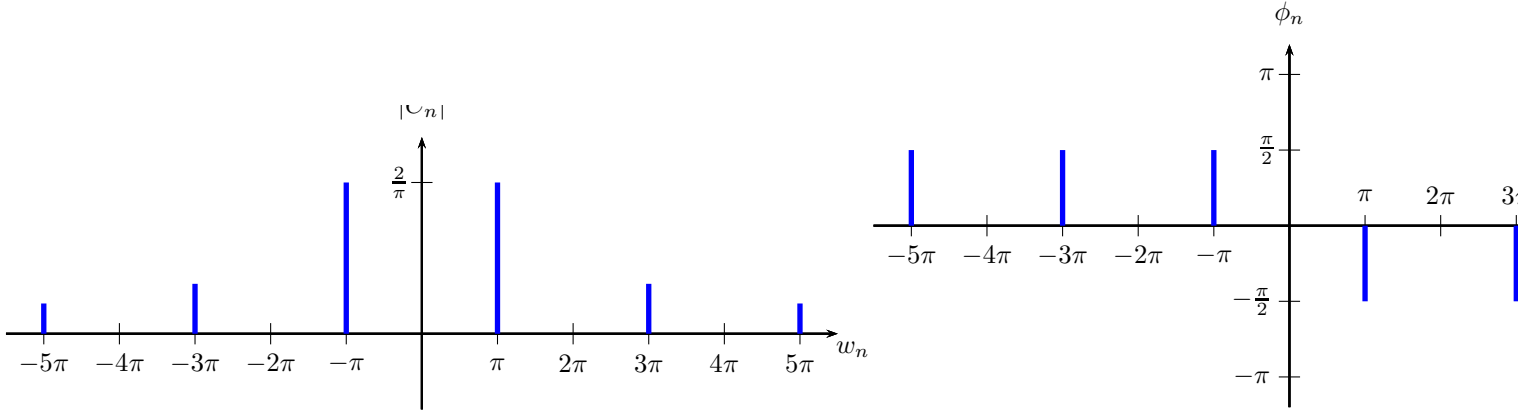
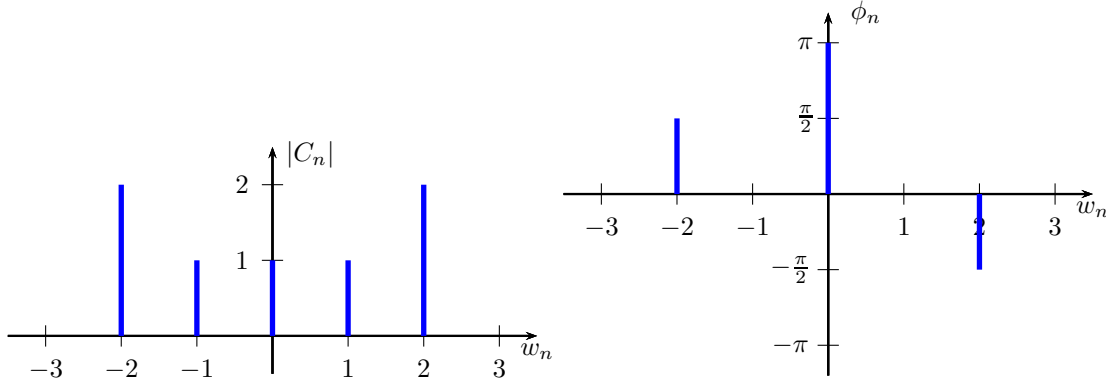
Exemplo: As primeiras raias do diagrama de espectro da função a seguir:

$$g(t) = \dots + \frac{2i}{5\pi}e^{-5i\pi t} + \frac{2i}{3\pi}e^{-3i\pi t} + \frac{2i}{\pi}e^{-i\pi t} - \frac{2i}{\pi}e^{i\pi t} - \frac{2i}{3\pi}e^{3i\pi t} - \frac{2i}{5\pi}e^{5i\pi t} - \dots, \quad (2.3)$$

são dados na figura a seguir

Exemplos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt) \\ g(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nt) \end{aligned}$$



2.1 Propriedades das Séries de Fourier

Define-se a potência média de um função periódica $f(t)$ como

$$\overline{P}_f = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad (2.4)$$

A potência média da função $f(t) = A \cos(wt)$ é dada por

$$\begin{aligned} \overline{P}_f &= \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \left(\frac{\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + 1}{2}\right) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

onde se usou que $w = \frac{2\pi}{T}$ e identidade trigonométrica dada por:

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{\cos(2x) + 1}{2}. \quad (2.5)$$

Exemplo: Seja $V(t) = A \cos(wt)$ uma fonte de tensão com frequência $w = 60\text{Hz} = 120\pi\text{rad/s}$ ligado a um resistor de resistência $R\Omega$. A potência no resistor é

$$P(t) = \frac{V(t)^2}{R} \quad (2.6)$$

e a potência média P_m é

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V(t)^2}{R} dt, \quad (2.7)$$

onde $T = \frac{1}{60}s$. Por outro lado, a potência média é calculada em termos da tensão média por

$$P_m = \frac{V_m^2}{R}, \quad (2.8)$$

ou seja,

$$V_m^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt. \quad (2.9)$$

O exemplo nos dá o valor da potência média do sinal $V(t) = A \cos(wt)$. Logo,

$$V_m = \frac{A}{\sqrt{2}}. \quad (2.10)$$

Se $V_m = 127V$, então a amplitude do sinal é aproximadamente $A \approx 180$.

Observação: Na expressão (2.9), V_m também é chamado de valor RMS do sinal $v(t)$ (Root mean square):

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt}. \quad (2.11)$$

Teorema de Parseval Seja $f(t)$ uma função periódica representável por uma série de Fourier, então vale a seguinte identidade.

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (2.12)$$

Dem:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt$$

Como $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$, temos

$$\overline{f(t)} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} \overline{e^{i w_n t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} e^{-i w_n t}$$

Substituindo esta expressão para $\overline{f(t)}$ na definição de potência média, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} e^{-i w_n t} \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\overline{C_n} \int_0^T f(t) e^{-i w_n t} dt \right] \end{aligned}$$

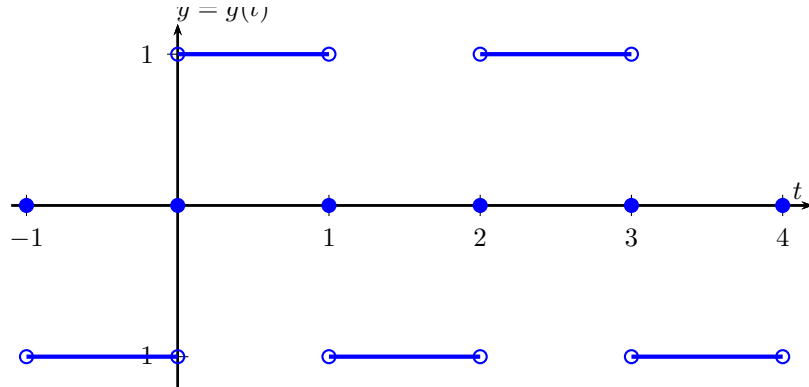
Como $C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$, temos:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C_n} C_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Exemplo Seja $g(t)$ um função dada no exemplo ??, isto é,

$$\begin{aligned} g(t) &= -1, & -1 < t < 0 \\ g(t) &= 0, & t = 0 \text{ ou } t = 1 \\ g(t) &= 1, & 0 < t < 1 \\ g(t+2) &= g(t), & \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vimos no exemplo ?? que sua expansão em série de Fourier é da forma:



$$g(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \dots \right). \quad (2.13)$$

Calcularemos agora a potência média desta função através de sua representação no tempo e depois em frequência:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^2 |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^2 1 dt = 1$$

Alternativamente, temos pelo Teorema de Parseval:

$$\overline{P_f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{a_n - ib_n}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2$$

Como $b_{-n} = b_n$, temos que $|b_{-n}| = |b_n|$ e ainda temos que $b_0 = 0$, portanto:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right)$$

temos:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{\pi^2}{8} = 1$$

2.2 Passagem do discreto para o contínuo

Chapter 3

23 de outubro

3.1 Exemplos de transformadas de Fourier

3.1.1 Função tenda assimétrica

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{se } t < 0 \\ e^{-bt} & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde a e b são constantes positivas. A figura mostra o gráfico de $f(t)$ para $a = 1$ e $b = 3$. A transformada de Fourier de $f(t)$

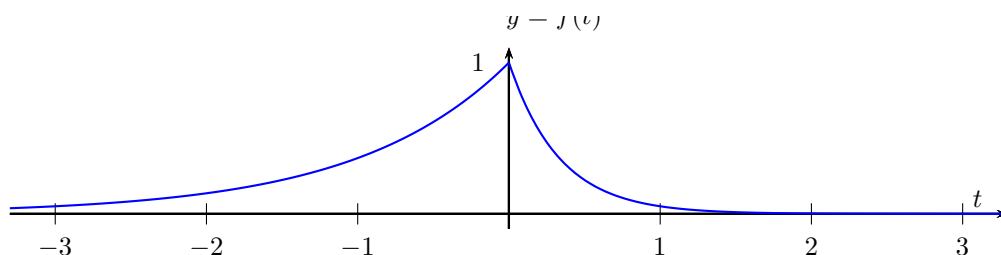


Figure 3.1: Gráfico de $f(t) = e^t$, se $t < 0$ ou $f(t) = e^{-3t}$ se $t > 0$.

é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-iwt} dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} (\cos(wt) - i \sin(wt)) dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} (\cos(wt) - i \sin(wt)) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} (\cos(wt) + i \sin(wt)) dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} (\cos(wt) - i \sin(wt)) dt \\ &= \frac{a}{a^2 + w^2} + \frac{iw}{a^2 + w^2} + \frac{b}{b^2 + w^2} - \frac{iw}{b^2 + w^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + w^2} + \frac{b}{b^2 + w^2} + i \left(\frac{w}{a^2 + w^2} - \frac{w}{b^2 + w^2} \right) \end{aligned}$$

onde se usou os itens 1 e 2 da tabela de integrais definidas.

O que acontece quando $a = b$?

3.1.2 Delta de Dirac

Calculamos a transformada de Fourier do delta de Dirac $\delta(t - a)$, $a \in \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(w) = \mathcal{F}\{\delta(t - a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) e^{-iwt} dt \\ &= e^{-iwa} \end{aligned}$$

Chapter 4

23 de outubro

4.1 Forma trigonométrica

A forma exponencial da transformada de Fourier de uma função $f(t)$ foi definida no capítulo ?? e é dada por

$$F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt. \quad (4.1)$$

Se $f(t)$ é uma função real, então podemos separar a parte real e imaginária da transformada de Fourier, conforme a seguir:

$$\begin{aligned} F(w) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(wt) - i \sin(wt)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt \\ &:= A(w) - iB(w), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt \\ B(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt \end{aligned}$$

Nesses termos, a função $f(t)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(w) - iB(w)) (\cos(wt) + i \sin(wt)) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(w) \sin(wt) - B(w) \cos(wt)) dw \end{aligned}$$

Usando o fato que $A(w)$ é uma função par e $B(w)$ é uma função ímpar, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw \end{aligned}$$

A tabela abaixo compara as formas trigonométrica e exponencial das séries e transformadas de Fourier

	Forma exponencial	Forma trigonométrica	(4.2)
Série de Fourier	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t))$	
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw$	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw$	

Exemplo: Considere a função $f(t) = e^{-at}u(t)$ onde a é uma constante positiva e $u(t)$ é a função Heaviside. A transformada de Fourier $F(w)$ de $f(t)$ foi calculada como exercício e é dada por:

$$F(w) = \frac{a}{a^2 + w^2} - \frac{iw}{a^2 + w^2}.$$

Usando representação trigonométrica da transformada de Fourier, temos:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw,$$

onde

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{a}{a^2 + w^2} \\ B(w) &= \frac{w}{a^2 + w^2} \end{aligned}$$

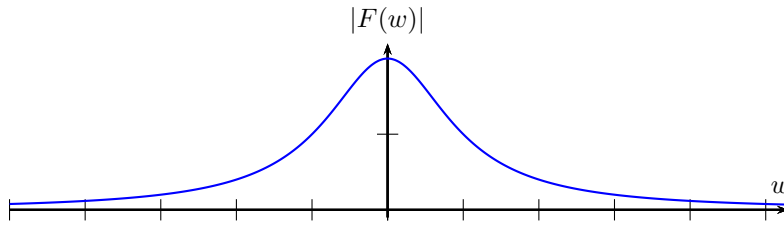
4.2 Diagramas de espectro

Diagrama de espectro da transformada de Fourier é a representação gráfica da transformada de Fourier $F(w)$ associadas a uma função $f(t)$. Da mesma forma como o diagrama de espectro da série de Fourier se divide em amplitude e fase, o diagrama de espectro da transformada de Fourier se divide em magnitude e fase. Ou seja, o gráfico de $|F(w)|$ é a diagrama de magnitude e o gráfico de $\phi(w)$ é o diagrama de fase, onde

$$F(w) = |F(w)|e^{i\phi(w)}, \quad (4.3)$$

Já calculamos a transformada de Fourier da função $f(t) = e^{-|t|}$:

$$F(w) = \frac{2}{w^2 + 1}. \quad (4.4)$$



O gráfico da magnitude $|F(w)|$ é dado na figura. Devido o fato de $F(w)$ ser real, a fase é uma função nula.

A transformada de Fourier da função $f(t) = e^{-at}u(t)$ onde a é uma constante positiva e $u(t)$ é a função Heaviside é dado por:

$$F(w) = \frac{a}{a^2 + w^2} - \frac{iw}{a^2 + w^2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} |F(w)| &= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + w^2}\right)^2 + \left(\frac{w}{a^2 + w^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + w^2}{(a^2 + w^2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}} \end{aligned}$$

e, como $a > 0$, temos $\frac{a}{a^2 + w^2} > 0$. Portanto,

$$\phi(w) = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{w}{a^2 + w^2}}{\frac{a}{a^2 + w^2}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{w}{a}\right). \quad (4.5)$$

A figura 4.1 apresenta o diagrama de espectro de magnitude e fase da transformada $F(w)$ de $f(t)$ quando $a = 1$.

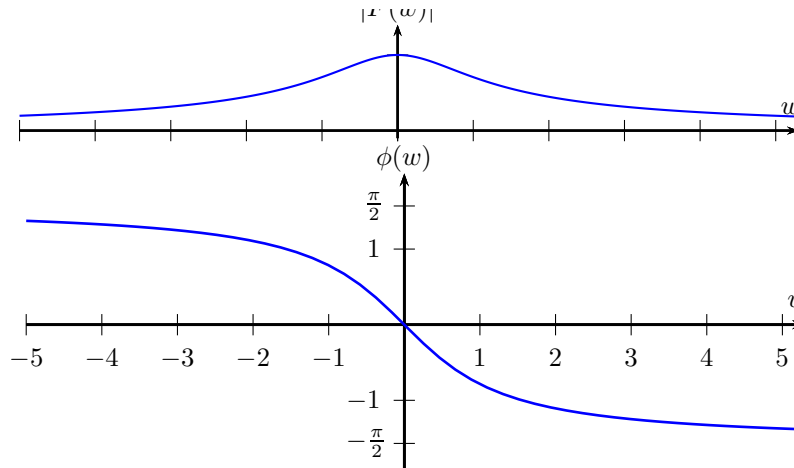


Figure 4.1:

Chapter 5

23 de outubro - Propriedades I -

5.1 Linearidade

Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ com transformadas de Fourier $F(w)$ e $G(w)$, respectivamente, e α e β duas constantes reais ou complexas, então

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\} = \alpha F(w) + \beta G(w) \quad (5.1)$$

5.2 Derivada

Dada uma função diferenciável $f(t)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0 \quad (5.2)$$

e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = iwF(w) \quad (5.3)$$

5.2.1 Exemplo

Considere a função $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$, e sua transformada de Fourier:

$$F(w) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \quad (5.4)$$

Usando a propriedade da derivada, a transformada de Fourier da derivada $f'(t) = -2ate^{-at^2}$ é dada por:

$$\mathcal{F}\{-2ate^{-at^2}\} = iwF(w) = iw \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}. \quad (5.5)$$

Usando a linearidade, encontramos a transformada de Fourier da função te^{-at^2} :

$$\mathcal{F}\{te^{-at^2}\} = -iw \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}. \quad (5.6)$$

5.3 Deslocamento no eixo w

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia). \quad (5.7)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{at}e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{(a-iw)t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(ia+w)t}dt \\ &= F(w + ia) \end{aligned}$$

A transformada de Fourier da função $f(t) = te^{-at^2}$, $a > 0$, é dada por

$$F(w) = -iw \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}. \quad (5.8)$$

Logo, a transformada $G(w)$ da função $g(t) = te^{bt-at^2}$, $b > 0$, é dada por

$$\begin{aligned} G(w) = \mathcal{F}\{te^{bt-at^2}\} &= \mathcal{F}\{e^{bt}te^{-at^2}\} \\ &= F(w + ib) \\ &= -i(w + ib) \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{(w+ib)^2}{4a}} \\ &= (b - iw) \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2 + 2wib - b^2}{4a}} \\ &= \sqrt{w^2 + b^2} e^{-i \arctan(\frac{w}{b})} \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2 - b^2}{4a}} e^{-i(\frac{wb}{2a})} \\ &= \sqrt{w^2 + b^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2 - b^2}{4a}} e^{-i(\frac{wb}{2a} + \arctan(\frac{w}{b}))} \\ &= |G(w)| e^{i\phi(w)}, \end{aligned}$$

onde

$$|G(w)| = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \sqrt{w^2 + b^2} e^{-\frac{w^2}{4a}} \quad \text{e} \quad \phi(w) = -\left(\frac{wb}{2a} + \arctan\left(\frac{w}{b}\right)\right)$$

Veja os diagramas de espectro de $G(w)$ quando $a = b = 1$ na figura.

5.4 Deslocamento no eixo t

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w). \quad (5.9)$$

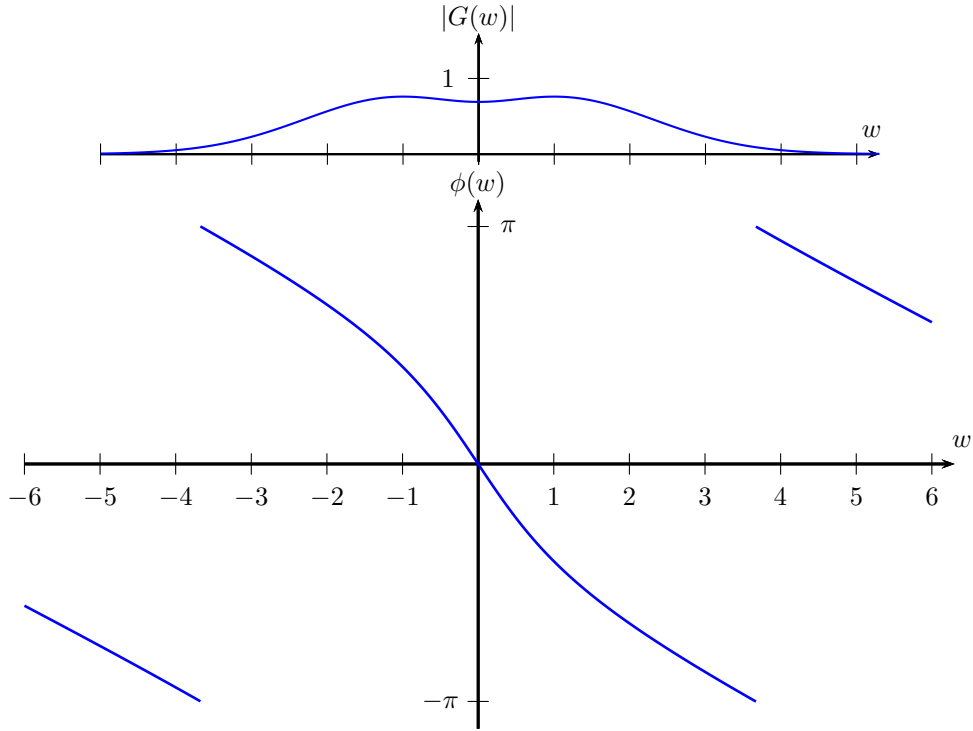


Figure 5.1:

De fato,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-iwt} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i w(s+a)} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iwa}e^{-iws} ds \\
 &= e^{-iwa} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iws} ds \\
 &= e^{-iaw} F(w)
 \end{aligned}$$

A transformada de Fourier da função $f(t) = e^{-|t|}$ é dada por $F(w) = \frac{2}{w^2+1}$. Logo, a transformada de Fourier da função $g(t) = e^{-|t-2|}$ é

$$G(w) = \frac{2}{w^2+1} e^{-2iw} \quad (5.10)$$

Obs: Um deslocamento real no tempo não altera o módulo da transformada de Fourier, pois $|e^{-iaw}| = 1$ sempre que a e w são reais.

5.5 Transformada da integral

Dada uma função integrável $f(t)$ tal que sua transformada de Fourier $F(w)$ satisfaça $F(0) = 0$, então

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{iw}F(w). \quad (5.11)$$

Dem: Definimos $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ e, usando o teorema fundamental do cálculo, temos $g'(t) = f(t)$. Aplicamos a transformada de Fourier na igualdade e temos:

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad (5.12)$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = F(w). \quad (5.13)$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i \cdot 0 \cdot \tau}d\tau = F(0) = 0 \quad (5.14)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(\tau)d\tau = 0, \quad (5.15)$$

portanto, podemos usar a propriedade ?? da transformada de Fourier da derivada e obter:

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = iw\mathcal{F}\{g(t)\}. \quad (5.16)$$

Assim,

$$F(w) = iw\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\}. \quad (5.17)$$

Portanto,

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{iw}F(w). \quad (5.18)$$

5.6 Teorema da modulação

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0), \quad (5.19)$$

para $w_0 \in \mathbb{R}$.

Dem De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} &= \mathcal{F}\left\{f(t)\left(\frac{e^{iw_0t} + e^{-iw_0t}}{2}\right)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{iw_0t} + e^{-iw_0t}}{2}e^{-iwt}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(w-w_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(w_0+w)t}dt \\ &= \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0) \end{aligned}$$

Exemplo: Considere a função $f(t) = \cos(w_0 t)e^{-a|t|}$, $a > 0$. Podemos obter a transformada de Fourier de $f(t)$ a partir da transformada de Fourier da função $g(t) = e^{-a|t|}$. Basta aplicar o teorema da modulação à função $g(t)$, cuja transformada de Fourier é dada por $G(w) = \frac{2a}{w^2 + a^2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\cos(w_0 t)\} &= \frac{1}{2}G(w - w_0) + \frac{1}{2}G(w + w_0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2a}{(w - w_0)^2 + a^2} + \frac{1}{2} \frac{2a}{(w + w_0)^2 + a^2} \\ &= \frac{a}{(w - w_0)^2 + a^2} + \frac{a}{(w + w_0)^2 + a^2}\end{aligned}$$

Chapter 6

26 de outubro - Propriedades (continuação)

6.1 Teorema da convolução

Dadas duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com suas respectivas transformadas de Fourier, $F_1(w)$ e $F_2(w)$, então

a) (Convolução no tempo)

$$\mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(t)\} = F_1(w)F_2(w), \quad (6.1)$$

b) (Convolução na frequência)

$$(F_1 * F_2)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} \quad (6.2)$$

ou

$$\mathcal{F}^{-1}\{(F_1 * F_2)(w)\} = 2\pi f_1(t)f_2(t), \quad (6.3)$$

onde $*$ indica a convolução de duas funções:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \quad (6.4)$$

Observe a definição de convolução.

Dem:

a) Usando as definições de transformada de Fourier e convolução de duas funções, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t)e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \right) e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau)e^{-iwt}dt \right] d\tau \end{aligned} \quad (6.5)$$

Uma das integrais pode ser calculada fazendo uma mudança de variável:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau)e^{-iwt}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)e^{-iw(s+\tau)}ds \\ &= e^{-iw\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)e^{-iws}ds \\ &= e^{-iw\tau} F_2(w) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Substituindo a equação (6.6) na equação (6.5), temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-iwt} dt \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\tau) e^{-i w \tau} F_2(w)] d\tau \\
 &= F_2(w) \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\tau) e^{-i w \tau}] d\tau \\
 &= F_1(w) F_2(w)
 \end{aligned}$$

b) Analogamente, usando as definições, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}\{(F_1 * F_2)(w)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_1 * F_2)(w) e^{iwt} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F_1(v) F_2(w - v) dv \right) e^{iwt} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_1(v) \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w - v) e^{iwt} dw \right] dv
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Também,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w - v) e^{iwt} dw &= \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y) e^{i(y+v)t} dy \\
 &= e^{i v t} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y) e^{i y t} dy \\
 &= 2\pi e^{i v t} f_2(t)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Substituindo a equação (6.8) na equação (6.7), temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}\{(F_1 * F_2)(w)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_1(v) \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w - v) e^{iwt} dw \right] dv \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v) e^{i v t} 2\pi f_2(t) dv \\
 &= f_2(t) \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v) e^{i v t} dv \\
 &= 2\pi f_1(t) f_2(t)
 \end{aligned}$$

Exemplo

Considere as funções $f(t) = t e^{-t^2}$ e $g(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ e suas respectivas transformadas de Fourier $F(w) = -i w \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{w^2}{4}}$ e $G(w) = \frac{2a}{w^2 + a^2}$. A transformada de Fourier da função

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau) e^{-(t-\tau)^2} e^{-a|\tau|} d\tau \tag{6.9}$$

é calculada usando o teorema da convolução e é dada por

$$H(w) = F(w)G(w) = -i w a \frac{\sqrt{\pi}}{w^2 + a^2} e^{-\frac{w^2}{4}} \tag{6.10}$$

6.2 Conjugação

Dada uma função real $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\overline{F(w)} = F(-w) \quad (6.11)$$

Dem. De fato,

$$\begin{aligned} \overline{F(w)} &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{e^{-iwt}} dt, \quad \text{pois } \overline{f(t)} = f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-w)t} dt \\ &= F(-w) \end{aligned}$$

obs Se $f(t)$ não é uma função real, esta propriedade não se aplica.

6.2.1 Exemplo

Considere as funções $f(t) = te^{-t^2}$ e sua transformada de Fourier $F(w) = -iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$. Então,

$$F(-w) = iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}} \quad (6.12)$$

e

$$\overline{F(w)} = \overline{-iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}} = iw\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}. \quad (6.13)$$

6.3 Inversão temporal

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w). \quad (6.14)$$

Dem:

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-iwt} dt$$

procedemos com a mudança de variáveis $\tau = -t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(-t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-iwt} dt \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{iw\tau}(-d\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{iw\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i(-w)\tau} d\tau \\ &= F(-w) \end{aligned}$$

6.4 Simetria ou dualidade

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\} \quad (6.15)$$

Dem Da definição de transformada de Fourier, temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw \quad (6.16)$$

Podemos trocar t e w e calcular $f(w)$ em função de $F(t)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{itw} dt. \quad (6.17)$$

Ou seja,

$$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-itw} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}. \quad (6.18)$$

6.5 Mudança de escala

Dada uma função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(w)$, então

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right), \quad \forall a \neq 0. \quad (6.19)$$

Dem: Da definição de transformada de Fourier, temos

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-iwt} dt \quad (6.20)$$

Fazendo a mudança $\tau = at$, distinguindo dois casos: $a > 0$ e $a < 0$. Para o caso $a > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{iw\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{iw\tau}{a}} d\tau \end{aligned}$$

Para o caso $a < 0$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-\frac{iw\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{iw\tau}{a}} d\tau \end{aligned}$$

Em ambos os casos, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(at)\} &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{i w \tau}{a}} d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)\end{aligned}$$

Obs: A propriedade da inversão temporal (propriedade 6.3) é um caso particular desta propriedade quando $a = -1$.

6.6 O teorema de Parseval

Seja $f(t)$ uma função real ou complexa e $F(w)$ sua transformada de Fourier, então vale a identidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad (6.21)$$

Dem: Partimos da representação de $f(t)$ em sua integral de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw$$

e consequentemente:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)} e^{-iwt} dw$$

e inserimos essa expressão na integral envolvida:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)} e^{-iwt} dw dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{F(w)} e^{-iwt} dw dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{F(w)} e^{-iwt} dt dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)} F(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw\end{aligned}$$

Obs Esta integral está associada ao conceito de energia total de um sinal.

Exemplo

Considere a função $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, e sua transformada de Fourier $F(w) = \frac{2a}{w^2 + a^2}$. A energia associada a essa função pode ser calculada de duas maneiras distintas:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-a|t|}|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2a} e^{-2at} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2a}{w^2 + a^2} \right)^2 dw \\ &= \frac{4a^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(w^2 + a^2)^2} dw \end{aligned}$$

Usando o item 19 da tabela de integrais definidas ?? da página ?? com $m = 0$, temos:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(w^2 + a^2)^2} dw = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{4a^2}{\pi} \frac{\pi}{4a^3} = \frac{1}{a}.$$

Chapter 7

4 de novembro

EXEMPLOS.

7.1 Passagem do contínuo para o discreto

Nesta seção vamos calcular a transformada de Fourier de uma função periódica $f(t)$ que possui representação em série de Fourier. Para esse propósito, observe que, colocando $F(w) = 2\pi\delta(w - w_0)$, temos

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(w - w_0)\} = \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(w - w_0) e^{iwt} dw = e^{iw_0 t}.$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{e^{iw_0 t}\} = 2\pi\delta(w - w_0). \quad (7.1)$$

Agora, considere uma função $f(t)$ que possui representação em série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}. \quad (7.2)$$

A definição de transformada de Fourier nos dá:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t} \right) e^{-iwt} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_n t} e^{-iwt} dt \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(w - w_n), \end{aligned}$$

onde usamos a equação (7.1) na última passagem.

Exemplo: Dada a função $f(t) = \cos(w_0 t)$, sua representação em série trigonométrica exponencial é

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{w_0 i t} + \frac{1}{2} e^{-w_0 i t}. \quad (7.3)$$

Logo, a sua transformada de Fourier $F(w)$ é dada por:

$$F(w) = \pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0) \quad (7.4)$$

Exemplo: Considere a função não periódica $g(t) = e^{-a|t|} \cos(w_0 t)$, $a > 0$. A transformada de Fourier de $g(t)$ é dada por $G(w) = \frac{a}{(w-w_0)^2+a^2} + \frac{a}{(w+w_0)^2+a^2}$. Observe que

$$\lim_{a \rightarrow 0} g(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \cos(w_0 t) = \cos(w_0 t). \quad (7.5)$$

Comparando com o exemplo ??, é esperado que $G(w)$ convirja para $F(w)$. De fato, observe que a área abaixo da curva é constante com respeito a a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(w) dw &= a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(w-w_0)^2+a^2} + \frac{1}{(w+w_0)^2+a^2} \right) dw \\ &= a \left[\frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{w-w_0}{a} \right) + \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{w+w_0}{a} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 2\pi \end{aligned}$$

e a curva $G(w)$ converge para 0, exceto em $w = w_0$ e $w = -w_0$. Portanto o limite de $G(w)$ é $F(w)$. Os diagramas de magnitude de $F(w)$ e de $G(w)$ para alguns valores de $a > 0$ e $w_0 = 1$ são apresentados na figura

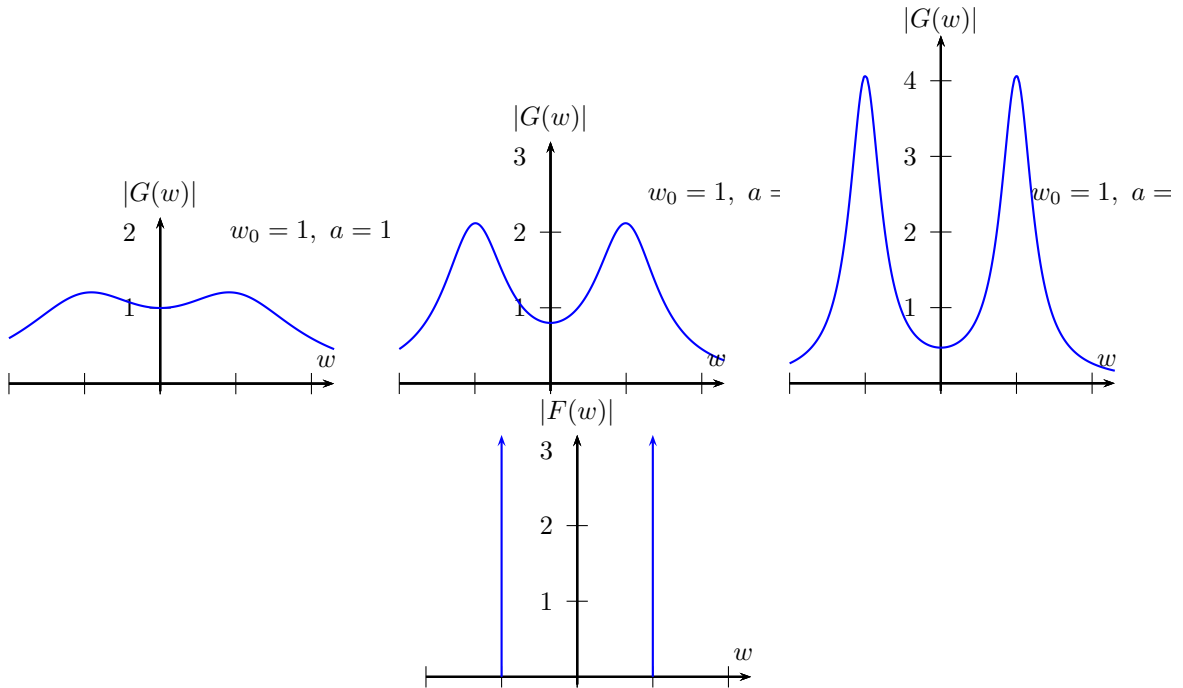


Figure 7.1:

7.2 Aplicação: Sinais Discretos

Nessa seção vamos discutir sobre discretização de sinais, em especial, pretendemos responder com que frequência precisamos amostrar um sinal real para podermos reconstruí-lo. Vamos considerar que o espectro da função $f(t)$ é composto apenas por frequências inferiores a w_c , onde w_c é chamado de frequência de corte. Mostraremos que se conhecermos apenas os valores de $f(t)$ para $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, onde T é o período de amostragem e $w_a := \frac{2\pi}{T} > 2w_c$ é a frequência de amostragem, então podemos reconstruir exatamente $f(t)$ em todos instantes de tempo. Considere $f(t)$ uma função real, definiremos $f_T(t)$ uma versão discretizada deste sinal da seguinte forma:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT), \quad (7.6)$$

assim $f_T(t)$ é um trem de Dirac's cujas amplitudes coincidem com o valor da função $f(t)$ nos pontos de amostragem kT . Veja um exemplo na figura ???. A fim de calcularmos a transformada de Fourier de $f_T(t)$, observamos que:

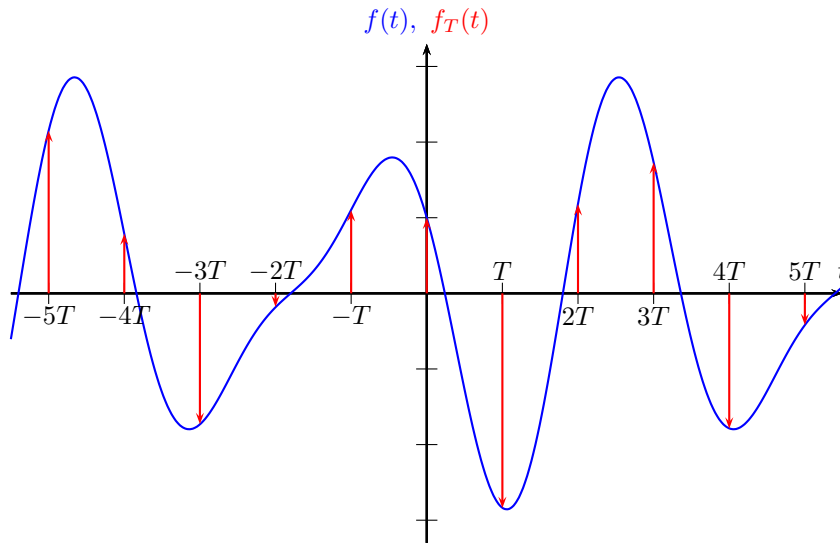


Figure 7.2:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) \\ &= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ &= f(t)\delta_T(t) \end{aligned}$$

onde $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ é uma função periódica cuja série de Fourier é dada por:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t} \quad (7.7)$$

e

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-i w_n t} dt = \frac{1}{T} \quad (7.8)$$

assim,

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i w_n t} \quad (7.9)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f(t) \delta_T(t) \\ &= f(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i w_n t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{i w_n t} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\begin{aligned} F_T(w) &= \mathcal{F}\{f_T(t)\} \\ &= \frac{1}{T} \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{i w_n t} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w - w_n) \end{aligned}$$

onde se usou a propriedade do deslocamento no eixo w (??). Veja um exemplo na figura:

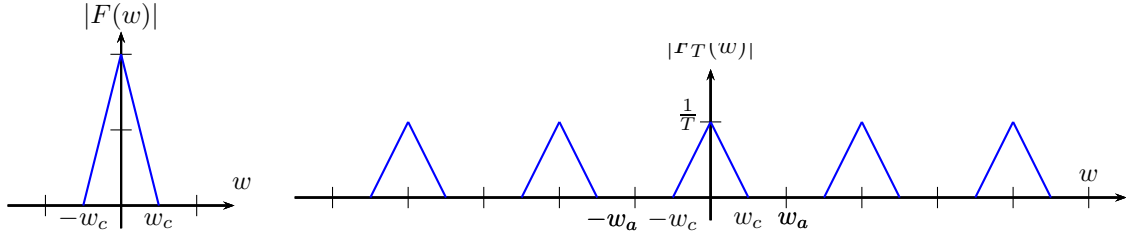


Figure 7.3:

Obs: Observamos que se a frequência de amostragem w_a for superior a $2w_c$, então $F_T(w) = \frac{1}{T}F(w)$ no intervalo $[-w_c, w_c]$ e, portanto, toda a informação de $f(t)$ é preservada. De fato, neste caso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} F(w) e^{i w t} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} T F_T(w) e^{i w t} dw \end{aligned}$$