

Chapter 1

16 de outubro

1.1 Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) é dita periódica se existe $T > 0$ tal que:

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aqui T é chamado período e a função é dita T -periódica.

Exemplos: Você conhece? $\cos(t)$, $\sin(t)$.

Observação: Se $f(t)$ é T -periódica, $\alpha f(t)$ também é.

Observação: Se T é período de uma função $f(t)$ então todo múltiplo inteiro de T também é período:

$$f(t + nT) = f(t).$$

Perguntas: A soma de funções periódicas é periódica?

Resposta: Se $f(t)$ tem período T_1 e $g(t)$ tem período T_2 e $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$, isto é, $mT_1 = nT_2$, então $f(t) + g(t)$ é periódica. Aqui n e m são inteiros positivos.

Dem: Construtiva com $T = mT_1$:

$$f(t + T) + g(t + T) = f(t + nT_1) + g(t + mT_2) = f(t) + g(t)$$

Definição: Se $f(t)$ é periódica e existe T_f o menor período, então T_f é chamado de período fundamental e $w_f := \frac{2\pi}{T_f}$ é a frequência angular fundamental.

Pergunta: Existem funções periódicas sem período fundamental?

$$f(t) = 1$$

1.1.1 Polinômios trigonométricos e séries trigonométricas

Seja $T > 0$, definimos polinômio trigonométrico de grau N uma função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)] \quad (1.1)$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Seja $T > 0$, definimos série trigonométrica toda função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)] \quad (1.2)$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Exemplo: Mostre que T é um período para séries e polinômios trigonométricos acima definidos.

1.1.2 Relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T}{2}, & n = m \neq 0 \\ T, & n = m = 0 \end{cases} \\ \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt &= 0 \end{aligned}$$

1.1.3 Forma harmônica

$$A \cos(wt - \phi) = A [\cos(wt) \cos(\phi) + \sin(wt) \sin(\phi)]$$

$$A \cos(wt - \phi) = A \cos(wt) \cos(\phi) + A \sin(wt) \sin(\phi)$$

$$A_n \cos(w_n t - \phi_n) = \underbrace{A_n \cos(\phi_n)}_{a_n} \cos(w_n t) + \underbrace{A_n \sin(\phi_n)}_{b_n} \sin(w_n t)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(w_n t - \phi_n)$$

Obs: Para qualquer par a_n e b_n , existem A_n e ϕ_n que satisfazem a identidade e $A_n > 0$, $\forall n > 0$.

1.1.4 Forma complexa ou exponencial

1.2 Forma exponencial

A forma exponencial de uma série de Fourier é obtida quando se substituem as funções trigonométricas $\sin(w_n t)$ e $\cos(w_n t)$ por suas representações em termos de exponenciais complexos, isto é

$$\cos(w_n t) = \frac{e^{iw_n t} + e^{-iw_n t}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(w_n t) = \frac{e^{iw_n t} - e^{-iw_n t}}{2i} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(w_n t) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{iw_n t} + e^{-iw_n t}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{iw_n t} - e^{-iw_n t}}{2i} \right)
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos e usando o fato que $\frac{1}{i} = -i$, temos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{iw_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-iw_n t} \quad (1.4)$$

Agora observamos que as definições ?? dadas por

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt
\end{aligned}$$

Embora estas expressões estejam definidas apenas para $n > 0$, elas fazem sentidos para qualquer n inteiro. Neste caso, valem as seguintes identidades:

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad b_0 = 0. \quad (1.5)$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$ e a paridade das funções cosseno e seno. Estendendo estas definições para qualquer inteiro, introduzimos os coeficientes C_n dados por:

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (1.6)$$

Observe que estes coeficientes estão definidos para para número inteiro n , assim temos:

$$C_0 = \frac{a_0 - ib_0}{2} = \frac{a_0}{2} \quad (1.7)$$

e

$$C_{-n} = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (1.8)$$

Substituindo estas expressões para C_0 , C_n e C_{-n} em (1.4), obtemos:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{iw_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-iw_n t}$$

Escrevemos agora esta última expressão em um único somatório:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t} \quad (1.9)$$

onde se usou que $w_{-n} = \frac{2\pi(-n)}{T} = -\frac{2\pi n}{T} = -w_n$. Observamos também que os coeficientes C_n podem ser escritos da seguinte forma mais enxuta:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos(w_n t) - i \sin(w_n t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-iw_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-iw_n t} dt \end{aligned}$$

1.2.1 Convergência

(Teorema de Dirichlet) Seja f uma função periódica de período T , suave por partes e descontínua no máximo em um número finito de saltos dentro de cada intervalo, então a série de Fourier converge em cada ponto t para

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \quad (1.10)$$

onde $f(t+)$ e $f(t-)$ são os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente. Observe que nos pontos t onde $f(t)$ é contínua, então $f(t+) = f(t-)$ e a série de Fourier converge para $f(t)$.

1.2.2 Interlúdio - Calculando coeficientes

Obs:

Se $f(t)$ é T -periódica, então:

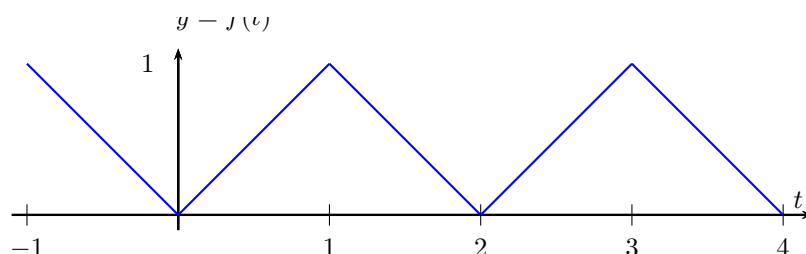
$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{T+a} f(t) dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Considere a função periódica da por:

Seja $f(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= |t|, \quad -1 \leq t < 1 \\ f(t+2) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos. Portanto se aplica o teorema:



Observamos que essa é uma função par, ou seja, $f(t) = f(-t)$. A fim de explorar essa simetria, utilizaremos as fórmulas (??) envolvendo integrais simétricas, isto

é,

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt \\b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt\end{aligned}$$

onde $T = 2$ e $w_n = \frac{2\pi n}{T} = \pi n$. Logo,

$$a_0 = \int_{-1}^1 |t| dt = 2 \int_0^1 t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned}a_n = \int_{-1}^1 |t| \cos(\pi n t) dt &= 2 \int_0^1 t \cos(\pi n t) dt \\&= 2 \left[\frac{t \sin(\pi n t)}{\pi n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} dt \\&= 2 \left[\frac{t \sin(\pi n t)}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n t)}{\pi^2 n^2} \right]_0^1 = 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}\end{aligned}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 |t| \sin(\pi n t) dt = 0.$$

onde se usou que $|t|$, $|t| \cos(\pi n t)$ são funções pares em t e $|t| \sin(\pi n t)$ é ímpar em t . Assim, temos

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\pi t) + \dots \right) \quad (1.11)$$

Observe que, quando $t = 0$, obtemos como subproduto da série de Fourier da $f(t)$ a soma da seguinte série numérica:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (1.12)$$

A figura 1.1 apresenta os gráficos da série que representa a função $f(t)$ com um termo, dois termos e três termos.

Onda quadrada

Seja $g(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned}g(t) &= -1, \quad -1 < t < 0 \\g(t) &= 0, \quad t = 0 \text{ ou } t = 1 \\g(t) &= 1, \quad 0 < t < 1 \\g(t+2) &= g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua em todos os pontos exceto por saltos nos inteiros, onde a função vale a média aritmética dos limites laterais. Portanto

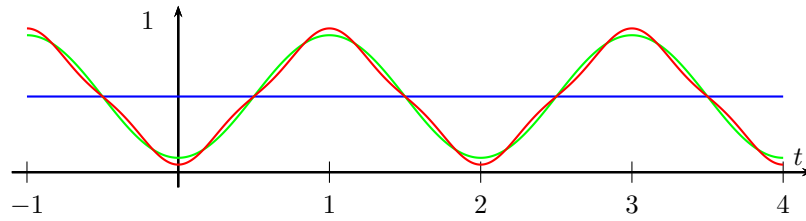
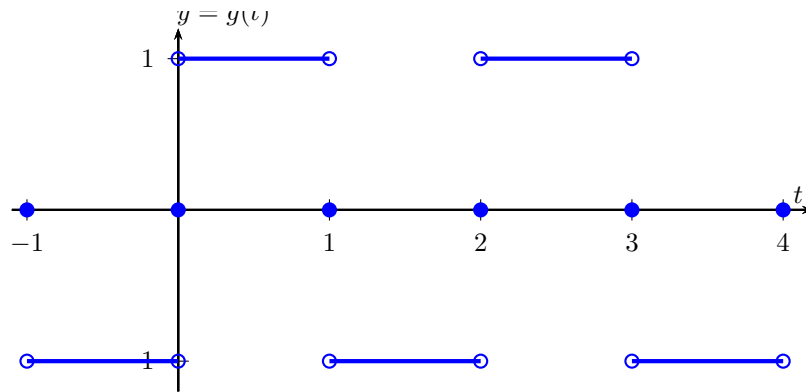


Figure 1.1: Gráficos de $f_0(t) = \frac{1}{2}$ (azul), $f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t)$ (verde) e $f_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} (\cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t))$ (vermelho).



se aplica o teorema ???. Observamos que essa é uma função ímpar, ou seja, $f(t) = -f(-t)$. Novamente, utilizaremos as fórmulas (??) envolvendo integrais simétricas:

$$a_0 = \int_{-1}^1 g(t) dt = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^1 g(t) \cos(\pi n t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 g(t) \sin(\pi n t) dt = 2 \int_0^1 g(t) \sin(\pi n t) dt = 2 \int_0^1 \sin(\pi n t) dt \\ &= \frac{2}{\pi n} [-\cos(\pi n t)]_0^1 = 2 \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \end{aligned}$$

Logo,

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \dots \right). \quad (1.13)$$

A figura 1.2 apresenta os gráficos da série que representa a função $g(t)$ com um termo, dois termos, três termos e quatro termos.

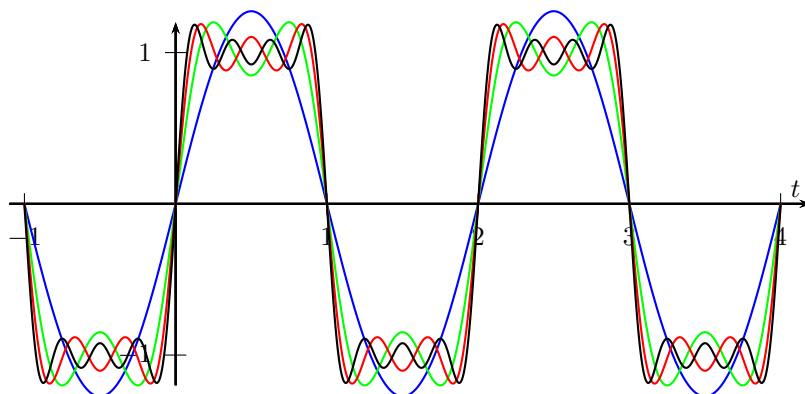
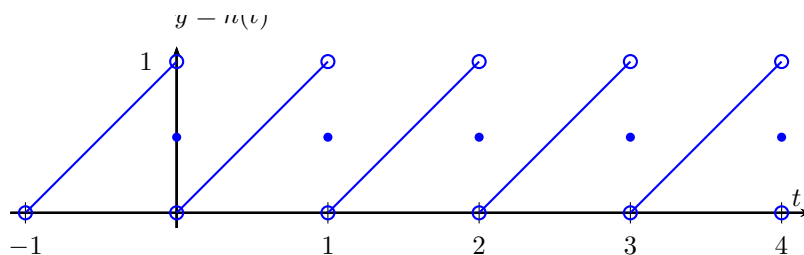


Figure 1.2: Gráficos de $g_0(t) = \frac{4}{\pi} \sin(\pi t)$ (azul), $g_1(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t))$ (verde), $g_2(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t))$ (vermelho) e $g_3(t) = \frac{4}{\pi} (\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \frac{1}{7} \sin(7\pi t))$ (preto).

Exemplo Seja $h(t)$ uma função dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= t, \quad 0 < t < 1 \\ f(t) &= \frac{1}{2}, \quad t = 1 \\ f(t+1) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa função é suave por partes e contínua exceto por salto nos inteiros onde $h(t)$ assume o valor médio dos limites laterais. Portanto se aplica o teorema ???. Utilizaremos as fórmulas (??) envolvendo integrais no intervalo $[0, 1]$, isto é,



$$a_0 = 2 \int_0^1 t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 t \cos(2\pi n t) dt = 2 \left[\frac{t \sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} dt \\ &= 2 \left[\frac{t \sin(2\pi n t)}{2\pi n} + \frac{\cos(2\pi n t)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n = 2 \int_0^1 t \operatorname{sen}(2\pi nt) dt &= 2 \left[-\frac{t \cos(2\pi nt)}{2\pi n} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n} dt \\
&= 2 \left[-\frac{t \cos(2\pi nt)}{2\pi n} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi nt)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n}
\end{aligned}$$

Logo,

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{sen}(2\pi t) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4\pi t) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(6\pi t) + \dots \right). \quad (1.14)$$

Obs: Os coeficiente b_n da série de Fourier de uma função par são nulos bem como os coeficiente a_n da série de Fourier de uma função ímpar também o são. Demonstre a observação.

1.2.3 Diagramas de espectro

Diagramas espectro são representações gráficas dos coeficientes de Fourier C_n associados a uma função periódica $f(t)$. Como os coeficientes C_n são números complexos, é comum representá-los na forma de módulo e fase, isto é:

$$C_n = |C_n| e^{i\phi_n}. \quad (1.15)$$

O ângulo de fase assim definido coincide com o conceito de argumento do número C_n .

Exemplo: A função

$$f(t) = -1 + 2 \cos(t) + 4 \operatorname{sen}(2t) \quad (1.16)$$

é periódica com periodo fundamental 2π e pode ser escrita na forma exponencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f(t) &= -1 + 2 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) + 4 \left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} \right) \\
&= 2ie^{-2it} + e^{-it} - 1 + e^{it} - 2ie^{2it}
\end{aligned}$$

Assim, identificamos cinco coeficientes não nulos:

$$\begin{array}{llll}
C_{-2} &= 2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}} &\implies &|C_{-2}| = 2, \quad \phi_{-2} = \frac{\pi}{2} \\
C_{-1} &= 1 &\implies &|C_{-1}| = 1, \quad \phi_{-1} = 0 \\
C_0 &= -1 = 1e^{\pi} &\implies &|C_0| = 1, \quad \phi_0 = \pi \\
C_1 &= 1 &\implies &|C_1| = 1, \quad \phi_1 = 0 \\
C_2 &= -2i = 2e^{\frac{-i\pi}{2}} &\implies &|C_2| = 2, \quad \phi_2 = -\frac{\pi}{2}
\end{array}$$

Os digramas de espectro de amplitude e fase são dados a seguir:

Exemplo: As primeiras raias do digrama de espectro da função a seguir:

$$g(t) = \dots + \frac{2i}{5\pi} e^{-5i\pi t} + \frac{2i}{3\pi} e^{-3i\pi t} + \frac{2i}{\pi} e^{-i\pi t} - \frac{2i}{\pi} e^{i\pi t} - \frac{2i}{3\pi} e^{3i\pi t} - \frac{2i}{5\pi} e^{5i\pi t} - \dots, \quad (1.17)$$

são dados na figura a seguir

