UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2025/2
Prova da área IIA

1	2	3	4	Total

Nome: ____________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $\quad (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(v)dv$

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$

$\int xe^{\lambda x}\, dx = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\, dx = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\, dx = \dfrac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x)\, dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x \operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x} \operatorname{sen}(w x)\, dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda \cos(wx) + w \operatorname{sen}(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

- **Questão 1** (3.0 pontos) Considere a equação do oscilador harmônico simples:

$$\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = f(t), \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

a) (1.5 ponto) Resolva o PVI usando $f(t) = \text{sen}(3t)$.

b) (1.5 ponto) Resolva o PVI usando $f(t) = \delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi)$.

Solução a) Aplicamos a transformada de Laplace para obter

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = \frac{3}{s^2 + 9},$$

onde aplicamos as propriedades 1 e 2 e o item 13 da tabela. Impondo as condições iniciais, temos

$$(s^2 + 9)Y(s) = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Logo

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2 + 9)^2}.$$

A transformada inversa é calculada usando o item 21 da tabela:

$$y(t) = \frac{3}{54}\left(\text{sen}(3t) - 3t\cos(3t)\right) = \frac{\text{sen}(3t) - 3t\cos(3t)}{18}$$

Solução b) Aplicamos a transformada de Laplace para obter

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = e^{-\pi s} + e^{-2\pi s},$$

onde aplicamos as propriedades 1, 2 e 7. Impondo as condições iniciais, temos

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{s^2 + 9}.$$

A transformada inversa é calculada usando o item 13 da tabela e a propriedade 4:

$$y(t) = u(t - \pi)\frac{\text{sen}(3(t - \pi))}{3} + u(t - 2\pi)\frac{\text{sen}(3(t - 2\pi))}{3}.$$

- **Questão 2** (2.5 pontos) Considere a função $f(t)$ dada pela expressão:

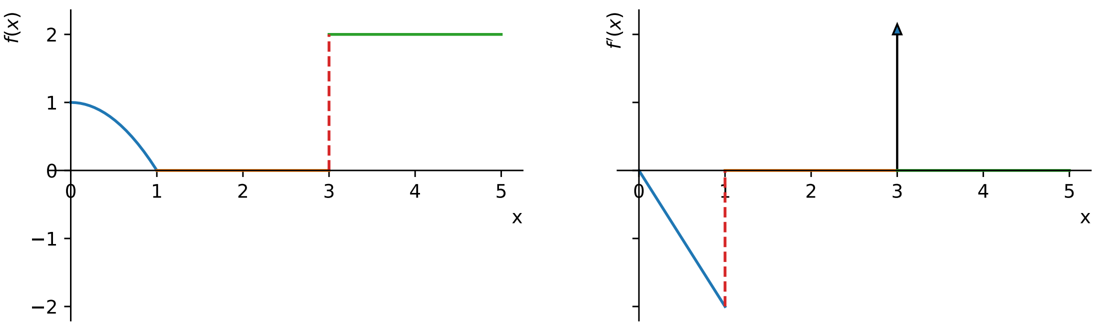
$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$$

a) (0.75 ponto) Esboce os gráficos de $f(t)$ e $f'(t)$.

b) (0.75 ponto) Escreva $f(t)$ e $f'(t)$ em termos da função de Heaviside e da função Delta de Dirac.

c) (1.0 ponto) Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.

Solução a) Os gráficos são dados por



Solução b) Escrevemos da esquerda para a direita em termos de Heavisides:

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-t^2)u(t) + (t^2-1)u(t-1) + 2u(t-3) \\ &= u(t) - t^2u(t) + (t^2 - 2t + 1 + 2t - 1 - 1)u(t-1) + 2u(t-3) \\ &= u(t) - t^2u(t) + (t-1)^2u(t-1) + 2(t-1)u(t-1) + 2u(t-3). \end{aligned}$$

A derivada formal de $f(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} f'(t) &= (1-t^2)\delta(t) - 2tu(t) + (t^2-1)\delta(t-1) + 2tu(t-1) + 2\delta(t-3) \\ &= \delta(t) - 2tu(t) + 2tu(t-1) + 2\delta(t-3) \\ &= \delta(t) - 2tu(t) + 2(t-1)u(t-1) + 2u(t-1) + 2\delta(t-3) \end{aligned}$$

Solução c) Calculamos a Transformada de Laplace usando a propriedade do deslocamento em t:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{2e^{-s}}{s^3} + 2\frac{e^{-s}}{s^2} + 2\frac{e^{-3s}}{s} \\ &= \frac{s^2 - 2 + 2(1+s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s^3}. \end{aligned}$$

Também, a transformada de Laplace da derivada é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= 1 - \frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} + 2e^{-3s} \\ &= \frac{s^2 - 2 + 2(1+s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s^2} \end{aligned}$$

- **Questão 3** (2.0 pontos):Calcule as seguintes transformadas:

  a) (0.5 ponto) $\mathcal{L}\left\{\cos^3(wt)\right\}$.

  b) (0.5 ponto) $\mathcal{L}\left\{e^{-t}t^2\sum_{k=0}^{3}\delta(t-k)\right\}$.

  c) (0.5 ponto) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{(s+1)(1-e^{-s})}\right\}$.

  d) (0.5 ponto) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2+4s+20}\right\}$.

  Solução a) Usamos a identidade trigonométrica

$$f(t) = \cos^3(wt) = \left(\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3iwt}+3e^{iwt}+3e^{-iwt}+e^{-3iwt}}{8} = \frac{\cos(3wt)+3\cos(wt)}{4}$$

para calcular

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{4}\left[\frac{s}{s^2+9w^2}+3\frac{s}{s^2+w^2}\right].$$

Solução b)

$$\begin{aligned}
f(t) &= e^{-t}t^2\sum_{k=0}^{3}\delta(t-k)\\
&= \sum_{k=0}^{3}e^{-t}t^2\delta(t-k) = 0\delta(t)+e^{-1}\delta(t-1)+e^{-2}2^2\delta(t-2)+e^{-3}3^2\delta(t-3)\\
&= e^{-1}\delta(t-1)+4e^{-2}\delta(t-2)+9e^{-3}\delta(t-3)\\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= e^{-1}e^{-s}+4e^{-2}e^{-2s}+9e^{-3}e^{-3s}
\end{aligned}$$

Solução c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)(1-e^{-s})}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)}\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots\right)\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(e^{-2s}+e^{-3s}+e^{-4s}+\cdots)}{(s+1)}\right\}\\
&= u(t-1)e^{-(t-1)}+u(t-2)e^{-(t-2)}+u(t-3)e^{-(t-3)}+\cdots
\end{aligned}$$

Solução d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+4s+20}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+2)^2+16}\right\}\\
&= u(t-2)e^{-2(t-2)}\operatorname{sen}(4(t-2)).
\end{aligned}$$

- **Questão 4** (2.5 pontos) Resolva a seguinte equação íntegro-diferencial de Volterra:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) - 3e^t \displaystyle\int_0^t y(\tau)e^{-\tau}d\tau = e^{-3t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Usando a técnica das transformadas de Laplace sabendo qe $y(0) = 1$.
Solução:

$$y'(t) + y(t) - 3y(t) * e^t = e^{-3t}$$

$$sY(s) - 1 + Y(s) - \frac{3}{s-1}Y(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$Y(s)\left[s + 1 - \frac{3}{s-1}\right] = \frac{1}{s+3} + 1$$

$$Y(s)\left[\frac{(s+1)(s-1) - 3}{s-1}\right] = \frac{s+4}{s+3}$$

$$Y(s)\left[\frac{s^2-4}{s-1}\right] = \frac{s+4}{s+3}$$

$$Y(s) = \frac{(s-1)(s+4)}{(s+3)(s^2-4)}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+3s-4}{(s+3)(s-2)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2}$$

onde

$$A = \lim_{s \to -3} \frac{s^2+3s-4}{(s-2)(s+2)} = \frac{9-9-4}{(-5)(-1)} = -\frac{4}{5}$$

$$B = \lim_{s \to 2} \frac{s^2+3s-4}{(s+3)(s+2)} = \frac{4+6-4}{(5)(4)} = \frac{3}{10}$$

$$C = \lim_{s \to -2} \frac{s^2+3s-4}{(s+3)(s-2)} = \frac{4-6-4}{(1)(-4)} = \frac{3}{2}$$

$$y(t) = -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{3}{10}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$