UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2024/2
Prova da área I

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)\\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\left\\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\\|}{\left\\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\\|} = \frac{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\\|^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\left\\|\frac{d\vec{B}}{dt}\right\\|}{\left\\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\\|}$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\\|\vec{a} \times \vec{v}\\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (3.5 pontos) Um automóvel se desloca sobre uma pista horizontal em forma de elipse dada pela parametrização $\vec{r}(t) = 200\cos(t)\vec{i} + 400\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, onde $\|\vec{r}(t)\|$ é medida em metros. Observe que essa parametrização descreve apenas as propriedades geométricas do movimento.

a) (1.0 ponto) Calcule a curvatura da elipse em função de t.

b) (0.5 ponto) Calcule os valores máximos e mínimos da curvatura.

c) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ em $t = \dfrac{\pi}{2}$.

d) (0.75 ponto) Supondo que a aceleração em $t = \dfrac{\pi}{2}$ é dada por $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j}$, calcule as componentes normal e tangencial da aceleração nesse ponto. [*Dica: Observe que você não conhece o vetor velocidade em* $t = \dfrac{\pi}{2}$.]

e) (0.75 ponto) Calcule a velocidade escalar máxima com que o automóvel pode percorrer a pista sem que sua aceleração normal supere $4m/s^2$.

Questão 2 (2.0) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $f(r)$ é uma função diferenciável.

a) (1.0) Calcule o rotacional e o divergente de $\vec{F}$.

b) (1.0) Para $f(r) = \cosh(r)$, calcule a circulação de $\vec{F}$ ao realizar uma volta ao longo da curva C descrita pela equação

$$x^2 + y^2 = 9$$

orientada no sentido horário, isto é,

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}.$$

Questão 3 (2.0 pontos) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = -e^{-2x}y\vec{i} + (z^2 + y^2)\vec{j} + z\vec{k}$ ao longo do retângulo cujos vértices são $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(2, 4, 0)$ e $(2, 0, 0)$ no sentido horário.

Questão 4 (2.5 pontos) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1+z)\vec{k}$ e a superfície S limitada inferiormente pelo plano $z = 1$ e superiormente pela superfície que satisfaz a equação

$$z = 2 - x^2 - y^2.$$

a) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através de uma parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).

b) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através do Teorema da Divergência.

c) (0.5) Qual seria o valor do fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para dentro? Justifique sua resposta.