

1	2	3	4	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

- Regras Gerais:
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
  - Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
  - Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

- Regras para as questões abertas:
- Seja sucinto, completo e claro.
  - Justifique todo procedimento usado.
  - Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
  - Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação  $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ .

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$ , então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo $w$	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo $t$	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$ , então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$ , onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$ , $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(w) ^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T  f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde <math>w_n = \frac{2\pi n}{T}</math>, <math>T</math> é o período de <math>f(t)</math></p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde <math>C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}</math></p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ <p>onde <math>A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt</math> e <math>B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt</math></p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde <math>F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt</math></p>

Integrais definidas

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{- m a} \quad (a > 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-ma}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{ma}, & m < 0 \end{cases}$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx =  m  \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Identidades Trigonômicas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$	$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$	$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$
---	---	---

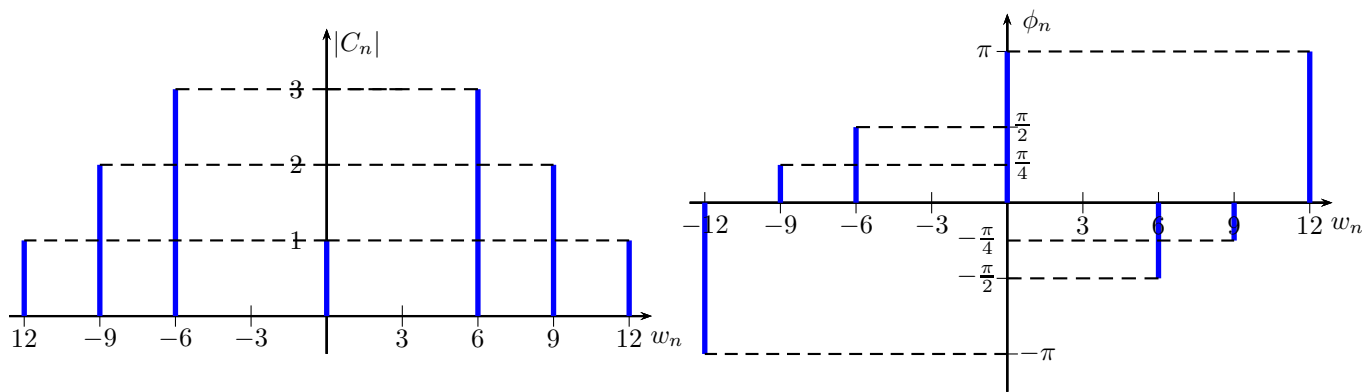
Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left( \frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x^2 \cos(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \cos(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - 2) \sin(\lambda x)}{\lambda^3} + C$
$\int x^2 \sin(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \sin(\lambda x) + (2 - \lambda^2 x^2) \cos(\lambda x)}{\lambda^3} + C$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Considere os diagramas de espectro de uma função periódica dado pelos gráficos abaixo.



a) (1.0 ponto) Preencha a tabela abaixo.

$n$	0	1	2	3	4	5
$w_n$						
$C_n$						
$a_n$						
$b_n$						

b) (1.0 ponto) Escreva as formas trigonométrica e exponencial da série de Fourier abaixo:

Forma trigonométrica	
Forma exponencial	

c) (0.5 ponto) Calcule a potência média dada por

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

- **Questão 2** (2.0 pontos) Considere a função periódica dada por

$$f(t) = |1 + 2 \cos(t)|$$

- a) (0.5 ponto) Esboce o gráfico da função  $f(t)$ .  
b) (1.5 pontos) Calcule  $a_0$ ,  $a_1$  e  $b_1$ .

*Dica: Observe que uma forma alternativa de escrever a função é dada por*

$$f(t) = \begin{cases} 1 + 2 \cos(t), & -\frac{2\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3} \\ -1 - 2 \cos(t), & -\pi < t < -\frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < t < \pi \end{cases}$$

e  $f(t + 2\pi) = f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere a função

$$F(w) = \begin{cases} 1, & -1100\pi \leq w \leq 1100\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

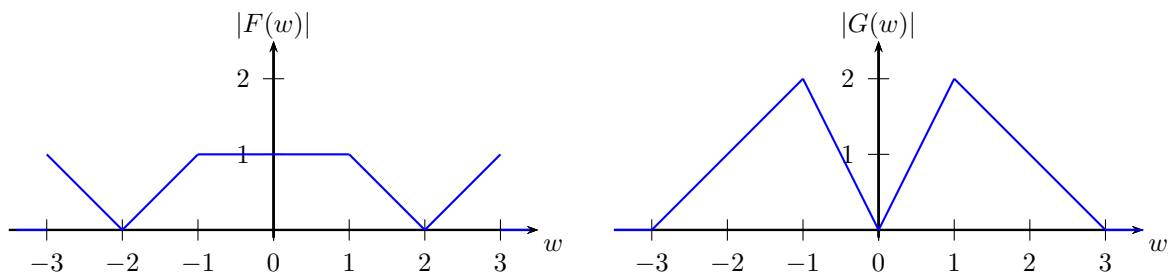
e a função

$$g(t) = 4\cos(1568\pi t) + 2\cos(2352\pi t) + 3\cos(3136\pi t).$$

Neste exercício, as frequências estão dadas em radianos por segundo. Responda os itens.

- a) (0.5 ponto) Calcule  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$ .
- b) (0.25 ponto) Mostre que  $\mathcal{F}^{-1}\{\pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0)\} = \cos(w_0 t)$
- c) (0.75 ponto) Calcule  $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ .
- d) (1.0 ponto) Marque em cada coluna quais são as notas  $g(t)$ ,  $f(t) * g(t)$  e  $f(t) * g(t/3)$ .
- |                     |                                  |                                       |
|---------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
| (0.3 ponto) $g(t)$  | (0.3 ponto) $(f(t) * g(t))$      | (0.4 ponto) $(f(t) * g(t/3))$         |
| ( ) Sol na escala 3 | ( ) Sem som ( $(f * g)(t) = 0$ ) | ( ) Sem som ( $(f(t) * g(t/3)) = 0$ ) |
| ( ) Sol na escala 4 | ( ) Sol na escala 5              | ( ) Dó na escala 2                    |
| ( ) Sol na escala 5 | ( ) Sol na escala 6              | ( ) Dó na escala 3                    |
| ( ) Sol na escala 6 | ( ) Lá na escala 5               | ( ) Dó na escala 4                    |
| ( ) Sol na escala 7 | ( ) Lá na escala 6               | ( ) Dó na escala 5                    |

• **Questão 4** (3.0 pontos) Considere os diagramas de espectro de magnitudes de duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , respectivamente, dados nos gráficos abaixo.



- (0.8 ponto) Esboce o diagrama de espectro de magnitudes da função  $h(t) = f'(t)$ .
- (0.8 ponto) Esboce o diagrama de espectro de magnitudes da função  $p(t) = g(2t)$ .
- (0.9 ponto) Esboce o diagrama de espectro de magnitudes da função  $q(t) = f(t) * p(t)$ .
- (0.5 ponto) Explique o motivo de não ser possível fazer o diagrama de magnitudes de  $r(t) = h(t) \cos(t)$ .