

1	2	3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____

- Regras Gerais:
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
 - Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
 - Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

- Regras para as questões abertas:
- Seja sucinto, completo e claro.
 - Justifique todo procedimento usado.
 - Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
 - Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Integrais definidas

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{- m a} \quad (a > 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-ma}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{ma}, & m < 0 \end{cases}$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Identidades Trigonômétricas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$	$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$	$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$
---------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------

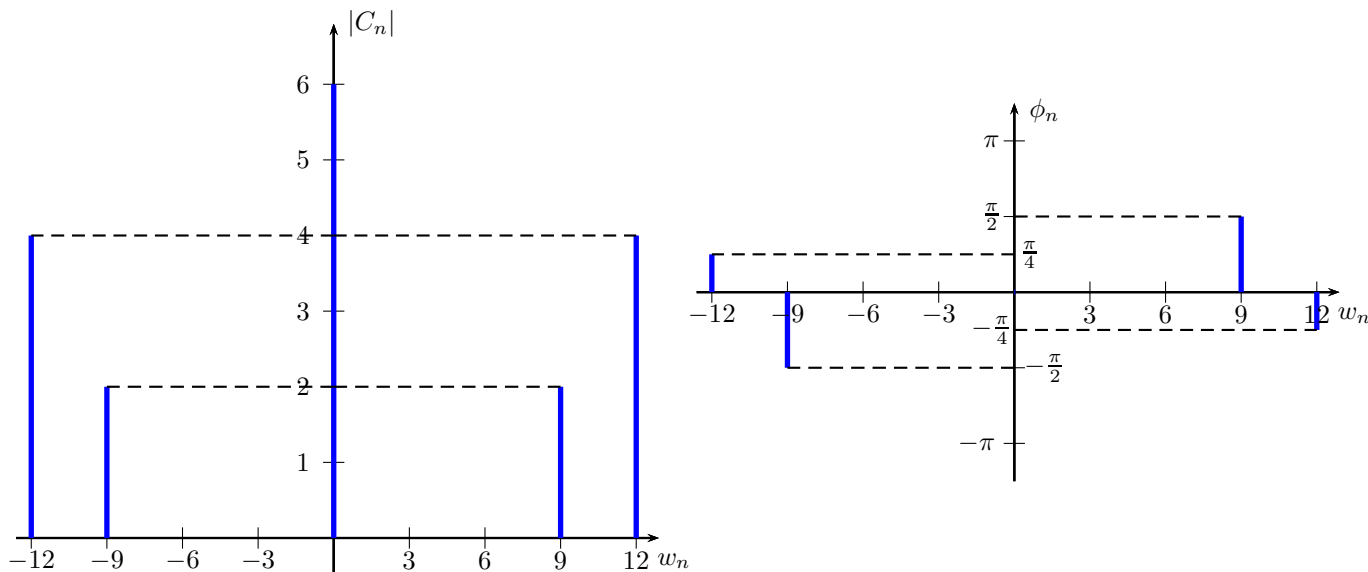
Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x^2 \cos(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \cos(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - 2) \sin(\lambda x)}{\lambda^3} + C$
$\int x^2 \sin(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \sin(\lambda x) + (2 - \lambda^2 x^2) \cos(\lambda x)}{\lambda^3} + C$

- **Questão 1** (2.5 pontos) Considere a função T -periódica $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$ cujos diagramas de espectro são dados nos gráficos abaixo.



- a) (0.5 ponto) Calcule o período fundamental e a frequência angular fundamental da função $f(t)$
b) (2.0 ponto) Escreva a função $f(t)$ em termos de senos e cossenos.

Solução: a) A frequência angular fundamental é $w = 3$, por que 3 é o maior divisor comum de 9 e 12. Portanto, o período fundamental é $T = \frac{2\pi}{3}$

Solução: b) Os coeficientes dados nos gráficos são

n	0	1	2	3	4
$ C_n $	6	0	0	2	4
ϕ_n	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
C_n	6	0	0	$2e^{i\pi/2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i$	$4e^{-i\pi/4} = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

onde $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$. Como $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, temos:

$$C_0 = \frac{a_0 - ib_0}{2} = 6 \Rightarrow a_0 = 12 \text{ e } b_0 = 0.$$

$$C_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ e } b_1 = 0.$$

$$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \text{ e } b_2 = 0.$$

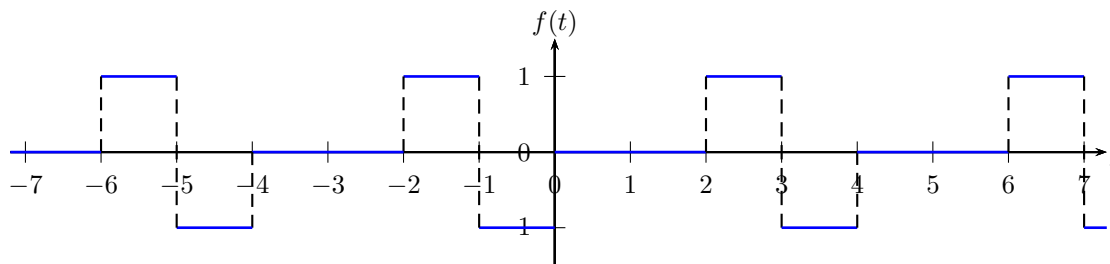
$$C_3 = \frac{a_3 - ib_3}{2} = 2i \Rightarrow a_3 = 0 \text{ e } b_3 = -4.$$

$$C_4 = \frac{a_4 - ib_4}{2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} \Rightarrow a_4 = 4\sqrt{2} \text{ e } b_4 = 4\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + b_3 \sin(w_3 t) + a_4 \cos(w_4 t) + b_4 \sin(w_4 t) \\ &= 6 - 4 \sin(9t) + 4\sqrt{2} \cos(12t) + 4\sqrt{2} \sin(12t). \end{aligned}$$

• **Questão 2** (2.5 pontos) Calcule a série de Fourier da Função periódica dada no gráfico abaixo. Escreva os primeiros seis termos não nulos da série.



Solução: O período é $T = 4$. Logo, $w_n = \frac{2\pi n}{4} = \frac{\pi n}{2}$. Vamos calcular a_0 , a_n e b_n .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) dt \\ &= \frac{2}{4} \left(\int_2^3 1 dt + \int_3^4 (-1) dt \right) \\ &= \frac{2}{4} (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \cos(w_n t) dt \\ &= \frac{2}{4} \left(\int_2^3 \cos\left(\frac{\pi n}{2} t\right) dt + \int_3^4 (-1) \cos\left(\frac{\pi n}{2} t\right) dt \right) \\ &= \frac{2}{4} \left(\left[\frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2} t\right) \right]_2^3 - \left[\frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2} t\right) \right]_3^4 \right) \\ &= \frac{2}{4} \frac{2}{\pi n} \left(\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{4\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \sin(w_n t) dt \\ &= \frac{2}{4} \left(\int_2^3 \sin\left(\frac{\pi n}{2} t\right) dt + \int_3^4 (-1) \sin\left(\frac{\pi n}{2} t\right) dt \right) \\ &= \frac{2}{4} \left(\left[-\frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2} t\right) \right]_2^3 + \left[\frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2} t\right) \right]_3^4 \right) \\ &= \frac{2}{4} \frac{2}{\pi n} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \left((-1)^n - 2 \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) + 1 \right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{2 - 2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

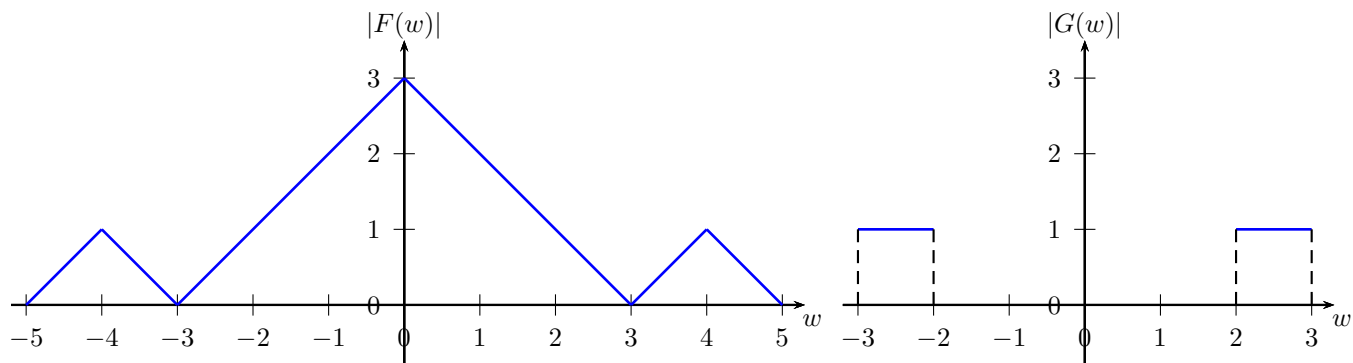
Escrevemos na tabela os primeiros coeficientes:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$-\frac{2}{5\pi}$	0	$\frac{2}{7\pi}$
b_n	/	0	$\frac{2}{\pi}$	0	0	0	$\frac{2}{3\pi}$	

Portanto,

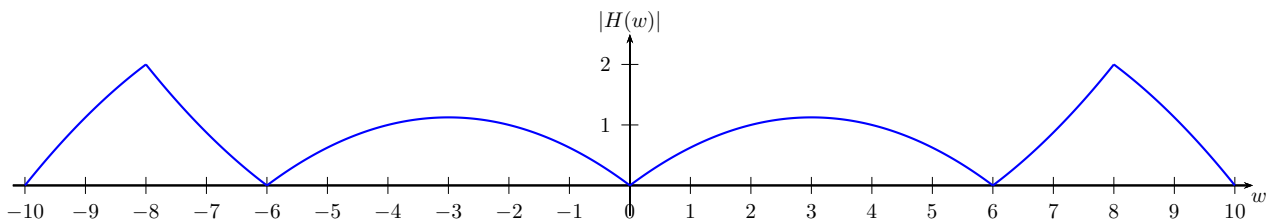
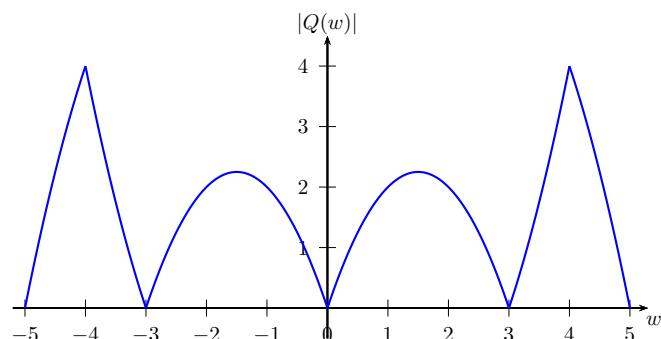
$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \frac{2}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2} t\right) - \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{5\pi}{2} t\right) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\pi t) + \frac{2}{7\pi} \cos\left(\frac{7\pi}{2} t\right)$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Seja $f(t)$ e $g(t)$ duas funções com transformadas de Fourier $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ cujos diagramas de espectro de magnitudes são dados nos gráficos abaixo.

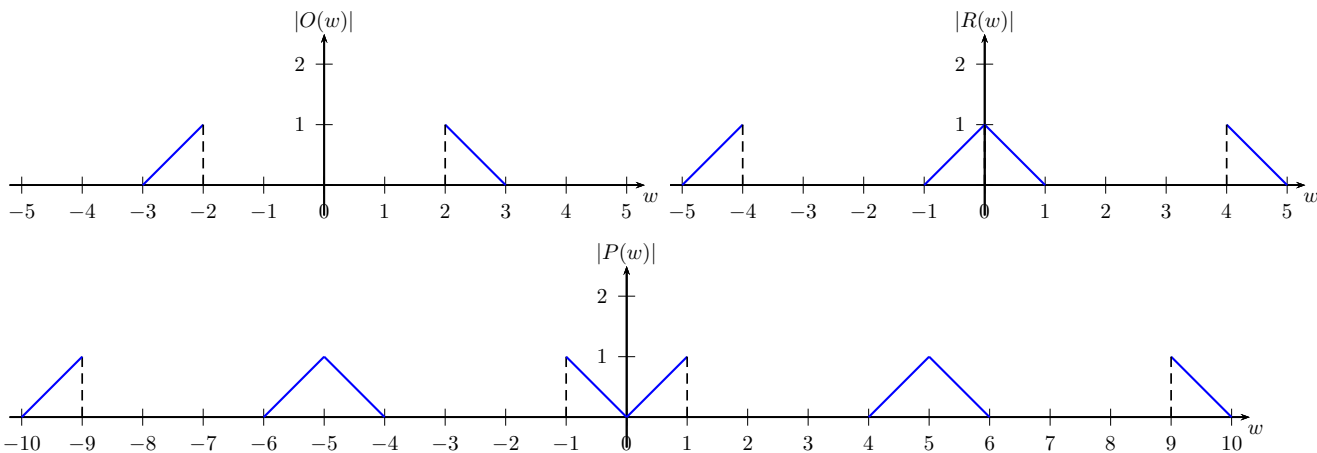


- a) (1.0 ponto) Trace o diagrama de espectro de magnitudes da transformada de Fourier de $h(t) = f'(2t)$.
b) (1.5 ponto) Trace o diagrama de espectro de magnitudes da transformada de Fourier de $p(t) = 4(f * g)(t) \cos(2t) \cos(5t)$.

Solução a) Definimos $q(t) = f'(t)$ e temos $Q(w) = \mathcal{F}\{q(t)\} = iwF(w)$. Logo, $|Q(w)| = |w||F(w)|$. Como $h(t) = q(2t)$, temos $|H(w)| = \frac{1}{2} \left| Q\left(\frac{w}{2}\right) \right|$. Os gráficos de $|Q(w)|$ e $|H(w)|$ estão dados abaixo.



Solução b) Definimos $o(t) = (f * g)(t)$ e temos $O(w) = \mathcal{F}\{o(t)\} = F(w)G(w)$. Logo, $|O(w)| = |F(w)||G(w)|$. Também, definimos $r(t) = 2o(t) \cos(2t)$ e temos $|R(w)| = |O(w+2)| + |O(w-2)|$. Finalmente, temos $p(t) = 2r(t) \cos(5t)$ e $|P(w)| = |R(w+5)| + |R(w-5)|$. Os gráficos de $|O(w)|$, $|R(w)|$ e $|P(w)|$ estão dados abaixo.



- **Questão 4** (2.5 pontos) Considere a função

$$F(w) = \frac{\text{sen}^2(w)}{w}.$$

- a) (1.5 ponto) Calcule a transformada inversa $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}$.
b) (1.0 ponto) Calcule as transformadas de Fourier das funções $g(t) = f(t)e^{-2t}$, $h(t) = f(t-4)$ e $p(t) = f(3t)$.

Solução: a)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(w)}{w} e^{iwt} dw \\ &= \frac{2i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2(w) \text{sen}(wt)}{w} dw. \end{aligned}$$

Para $t > 0$, usamos a propriedade 15 para obter

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{i}{\pi} \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 \leq t < 2 \\ \frac{\pi}{8}, & t = 2, \\ 0, & t > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{i}{4}, & 0 \leq t < 2 \\ \frac{i}{8}, & t = 2, \\ 0, & t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Para $t < 0$, temos

$$f(t) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2(w) \text{sen}(w(-t))}{w} dw,$$

onde usamos o fato que $\text{sen}(wt)$ é ímpar. Assim, como $-t > 0$, usamos novamente a propriedade 15 para obter

$$\begin{aligned} f(t) &= - \begin{cases} \frac{i}{4}, & 0 \leq -t < 2 \\ \frac{i}{8}, & -t = 2, \\ 0, & -t > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{i}{4}, & 0 \geq t > -2 \\ -\frac{i}{8}, & t = -2, \\ 0, & t < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Em qualquer caso, temos:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{i}{4}, & 0 \leq t < 2 \\ -\frac{i}{4}, & -2 < t \leq 0 \\ \frac{i}{8}, & t = 2, \\ -\frac{i}{8}, & t = -2, \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

Solução: b) Usandos as Propriedades 3, 4 e 11, temos:

$$G(w) = F(w - 2i) = \frac{\text{sen}^2(w - 2i)}{w - 2i}$$

$$H(w) = e^{-4iw} F(w) = \frac{e^{-4iw} \text{sen}^2(w)}{w}$$

$$P(w) = \frac{1}{3} F\left(\frac{w}{3}\right) = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{w}{3}\right)}{w}$$