画像認識工学 課題5

3次元空間上のある3点を空間ベクトル $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ で表す。

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

すると、ユークリッド距離はこれらのベクトルの差の大きさで表すことができる。

例) $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のユークリッド距離は

$$|\vec{x} - \vec{y}| \quad \cdots ①$$

である。

ここで①より、

$$d(\vec{x}, \vec{y})^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2$$

$$= |(\vec{x} - \vec{z}) + (\vec{z} - \vec{y})|^2$$

$$= |\vec{x} - \vec{z}|^2 + 2 \cdot (\vec{x} - \vec{z}) \cdot (\vec{z} - \vec{y}) + |\vec{z} - \vec{y}|^2 \quad \cdots ②$$

である。

また、あるベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を考えたときに、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\theta \, |\vec{a}| |\vec{b}|$$

の $\cos\theta$ は $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ なので、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leqq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \cdots ③$$

であるとわかる。

③より、

$$(\vec{x}-\vec{z})\cdot(\vec{z}-\vec{y}) \leqq |\vec{x}-\vec{z}||\vec{z}-\vec{y}|$$

$$2(\vec{x}-\vec{z})\cdot(\vec{z}-\vec{y}) \leqq 2|\vec{x}-\vec{z}||\vec{z}-\vec{y}| \cdots ④$$

①, ②, ④より、

$$d(\vec{x},\vec{y})^2-|\vec{x}-\vec{z}|^2-|\vec{z}-\vec{y}|^2 \leqq 2|\vec{x}-\vec{z}||\vec{z}-\vec{y}|$$

$$d(\vec{x},\vec{y})^2-d(\vec{x},\vec{z})^2-d(\vec{z},\vec{y})^2 \leqq 2\cdot d(\vec{x},\vec{z})\cdot d(\vec{z},\vec{y})$$

$$d(\vec{x},\vec{y})^2 \leqq d(\vec{x},\vec{z})^2+2d(\vec{x},\vec{z})d(\vec{z},\vec{y})+d(\vec{z},\vec{y})^2$$

$$d(\vec{x},\vec{y})^2 \leqq \{d(\vec{x},\vec{z})+d(\vec{z},\vec{y})\}^2$$

$$d(\vec{x},\vec{y}) \leqq d(\vec{x},\vec{z})+d(\vec{z},\vec{y})$$

よって、ユークリッド距離は3次元空間において、三角不等式を満たすと言える。

//