コンピュータグラフィックス基礎

第3回 3次元の座標変換

遠藤結城

学習の目標

- 3次元での座標変換について理解する
- 3次元空間の物体を2次元のスクリーンに投影するための透視投影変換を理解する
- 3次元物体をスクリーンに表示するプログラムを作成できるようになる

座標変換の式（1/2）

- 拡大縮小

$$x' = s_x x$$
$$y' = s_y y$$
$$z' = s_z z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

2次元の時と同様に、1つ次数の多いベクトルと行列の演算で表現する (**同次座標**または**斉次座標**)

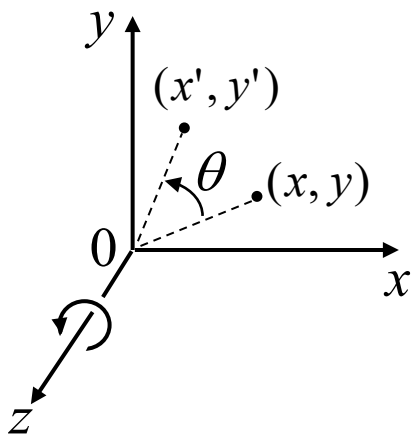
座標変換の式（2/2）

- 平行移動

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$
$$z' = z + t_z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

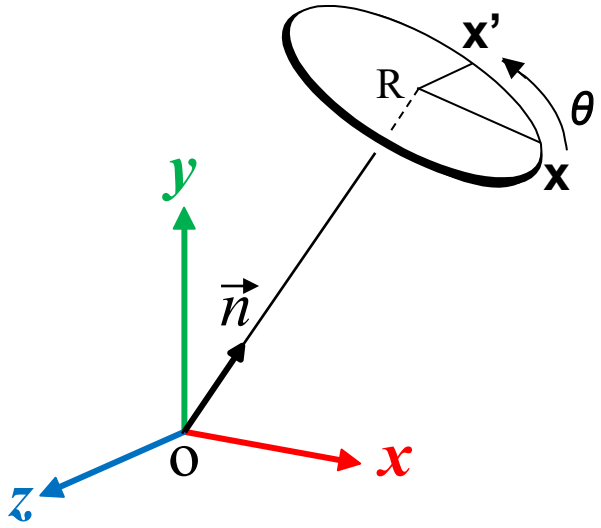
座標軸周りの回転



$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

参考：任意軸周りの回転



ロドリゲスの公式で回転行列 **R** を計算

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^{\,2}(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_x n_y(1-\cos\theta)-n_z\sin\theta & n_x n_z(1-\cos\theta)+n_y\sin\theta \\ n_x n_y(1-\cos\theta)+n_z\sin\theta & n_y^{\,2}(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_y n_z(1-\cos\theta)-n_x\sin\theta \\ n_x n_z(1-\cos\theta)-n_y\sin\theta & n_y n_z(1-\cos\theta)+n_x\sin\theta & n_z^{\,2}(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 3次元の座標変換は4x4 の変換行列で表現される
- OpenGLでの座標変換は4x4の行列で扱われる
- 以下の関数を使用すれば行列を直接指定しなくてよい

拡大縮小　`glScaled( sx, sy, sz);`

回転移動　`glRotated( theta, nx, ny, nz);`

平行移動　`glTranslated( tx, ty, tz);`

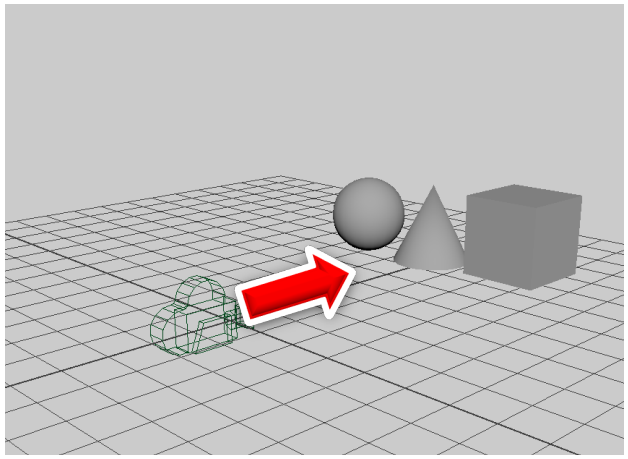
座標変換

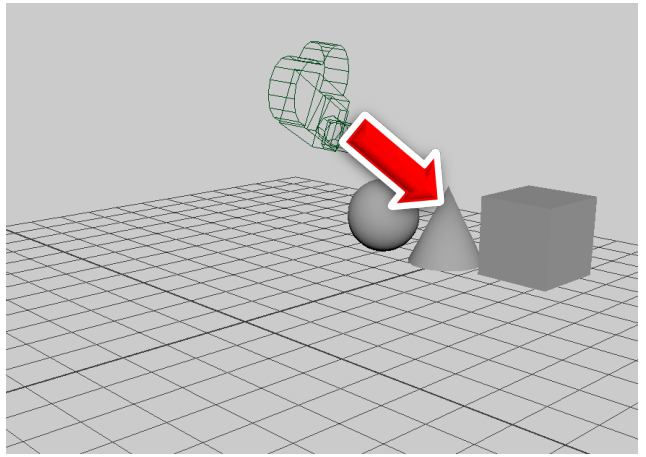
OpenGL での座標変換の指定

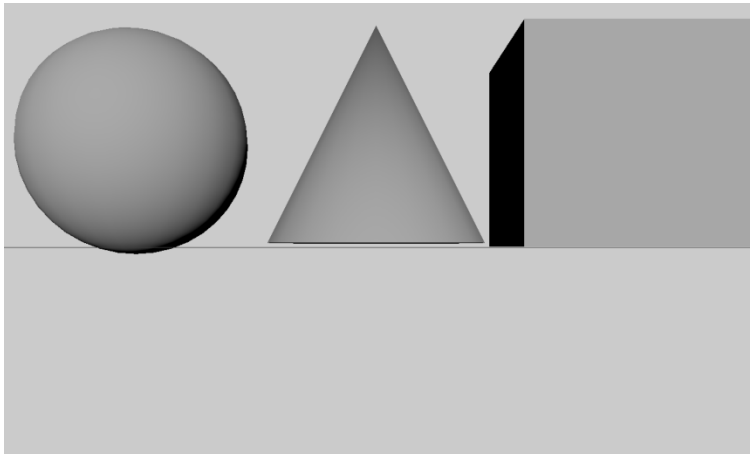
```
glViewport(0, 0, w, h);       // ビューポート変換行列の指定
                                 （スクリーンのどこに表示するか）

glMatrixMode(GL_PROJECTION); // これ以降は投影変換行列の指定
glLoadIdentity();             // 単位行列を指定
gluPerspective( … );          // 透視投影の行列を乗算
                    （ビューボリューム（視野角、対象とする奥行の範囲）の指定）

glMatrixMode(GL_MODELVIEW); // これ以降はモデルビュー変換行列の指定
glLoadIdentity();           // 単位行列を指定
gluLookAt( … );             // カメラの位置・姿勢の行列を乗算
                               （カメラの位置・姿勢はどうなっているか）

glBegin(GL_TRIANGLES);        //  描画命令を発行
glVertex3d( … );              // ワールド座標系の座標を指定
…
glEnd();
```

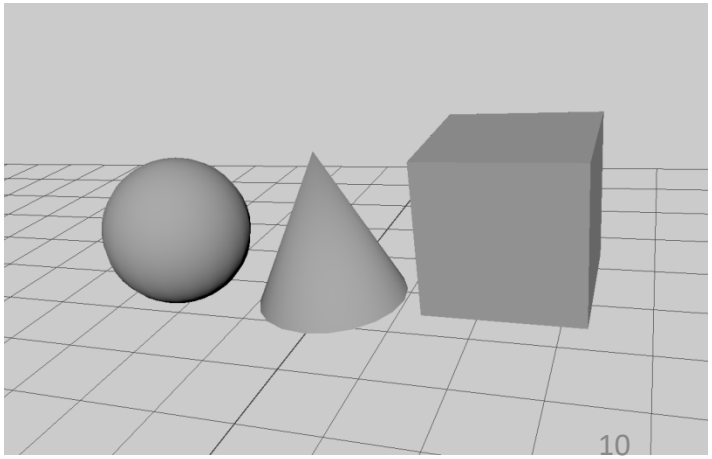
「どこから見るか」

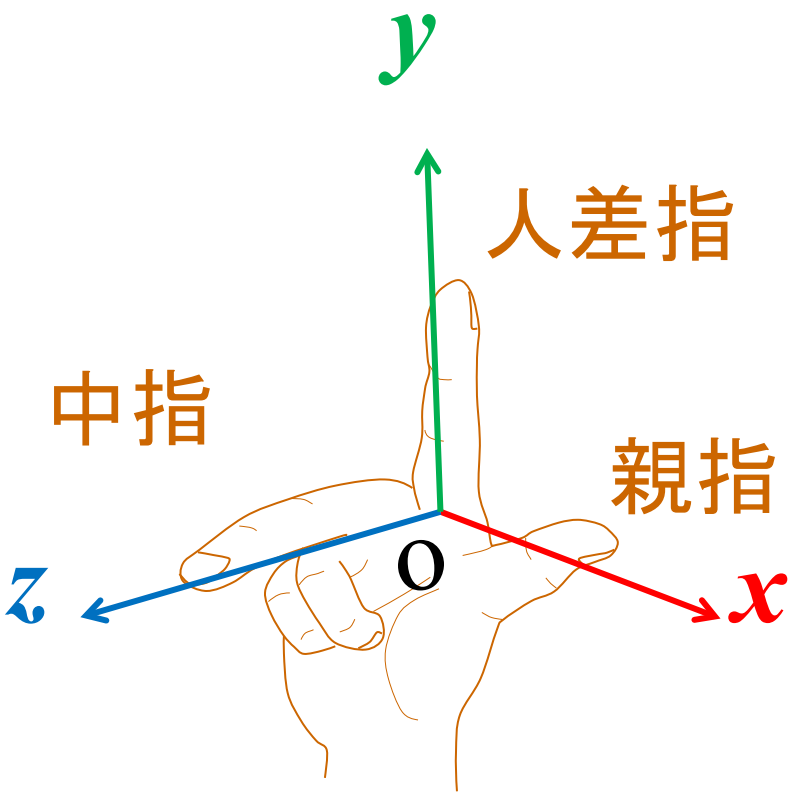
- 視点 (カメラ) の位置・姿勢で見え方が異なる











右手座標系

ビュー変換 (Viewing Transform)

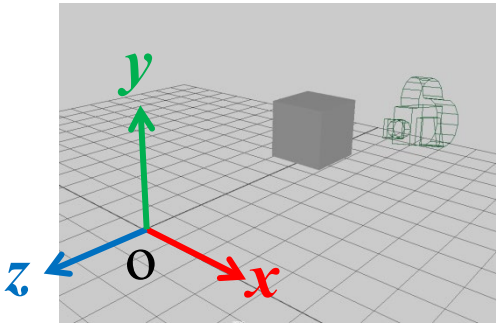
- 物体をどのように画面に表示するか（どこから眺めるか）を指定したい

  ↓

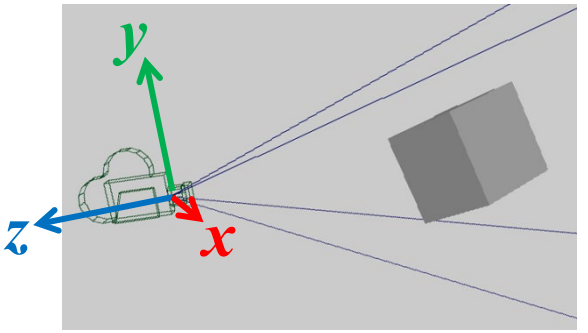
- カメラを基準とした座標系で物体の位置を表現する

  ↓

- 座標系を変換する（ビュー変換）



ビュー変換

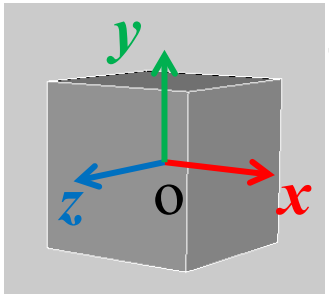


- カメラを基準とした座標系とは：

  カメラの位置が原点
  カメラの向きが-z方向

座標系の変換

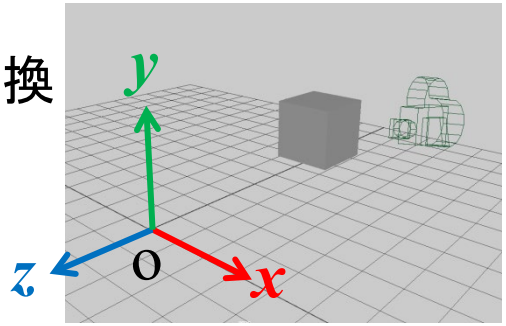
モデル座標系
(ローカル座標系)



物体ごとの座標系
物体の基準点が原点

モデル変換

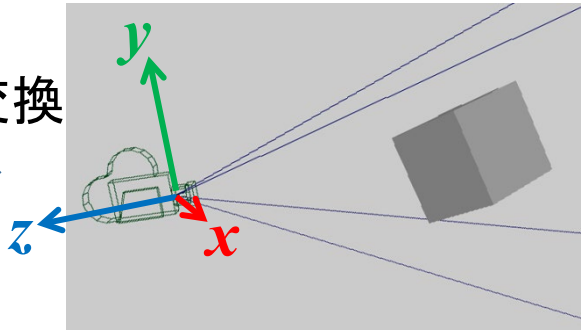
ワールド座標系



物体とカメラの
共通の基準点が原点

ビュー変換

ビュー座標系
（カメラ座標系）



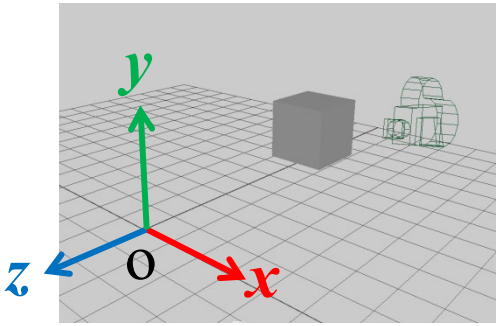
カメラの位置が原点
カメラの向きは $-z$ 方向

モデルビュー変換

座標系の変換は4x4の行列を掛けることで実現される

ビュー変換 (Viewing Transform)

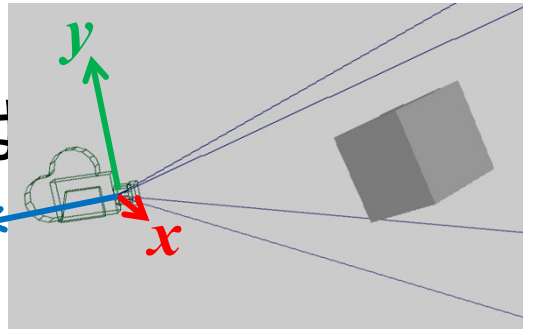
- ワールド座標系で表される物体の位置をカメラ座標系（カメラの位置が原点、カメラの向きが-z方向）で表す



- 次のような4x4 行列 M を掛ければよい

  行列 M を掛けるとカメラの位置が原点に、カメラの向きが -z 方向になる

ビュー変換



- このような行列を自分で計算するのは大変なので gluLookAt() が便利

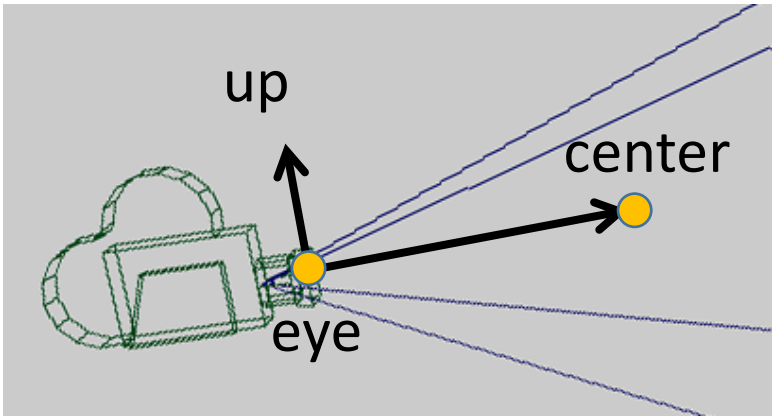
gluLookAt によるビュー変換行列

ビュー変換行列を自分で計算するのは大変だけど、 gluLookAt() を使って
直感的に（カメラの位置と向きを指定して）ビュー変換を実行できる。

```
gluLookAt(eyex, eyey, eyez,          // 視点位置
          centerx, centery, centerz, // 注視点
          upx, upy, upz)             // up ベクトル
```

通常 (0, 1, 0) を指定

すべて
ワールド座標

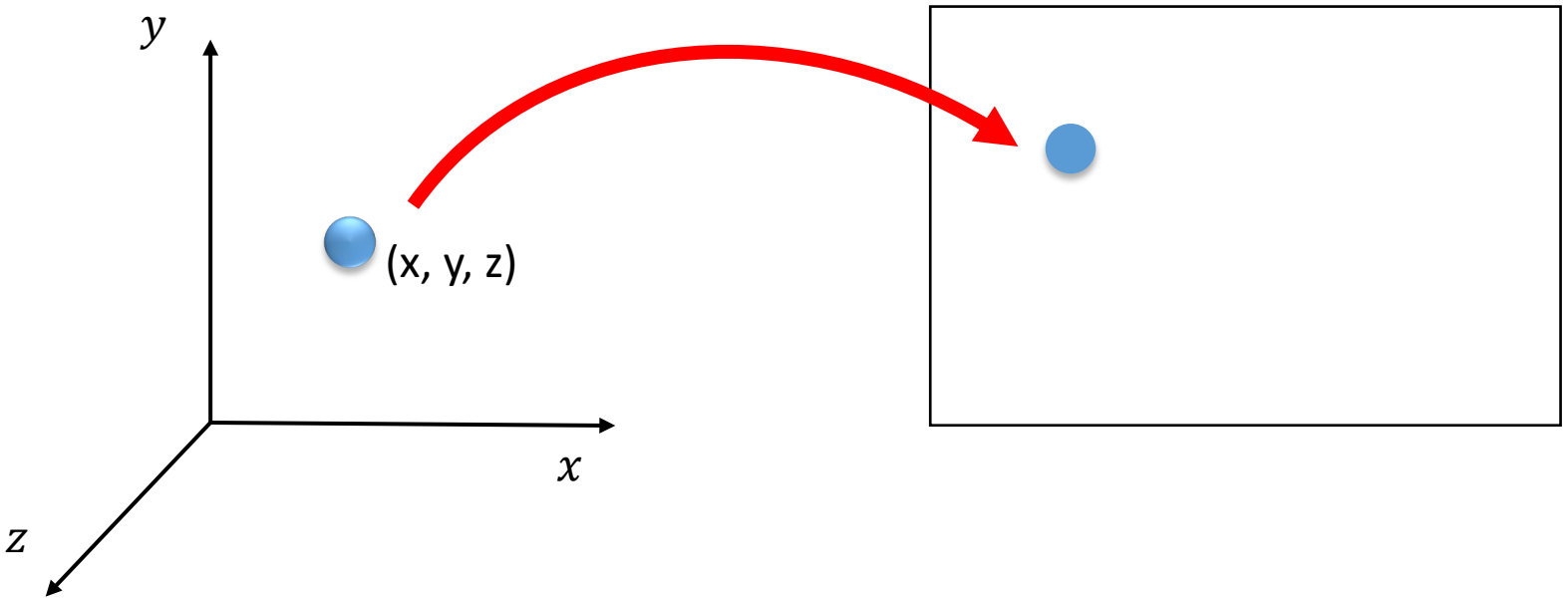


投影変換

立体をどのように平面スクリーンに投影するか

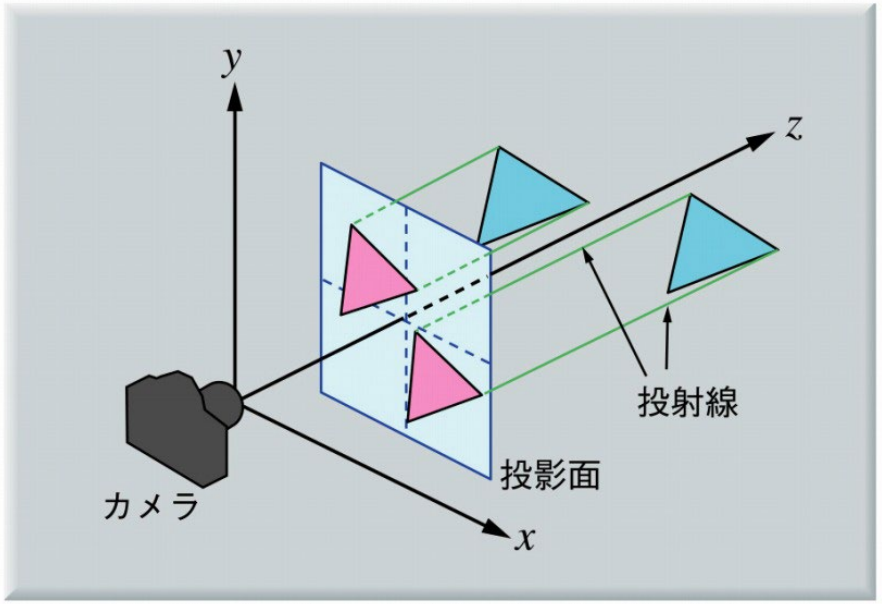
投影変換

点(x, y, z) が、スクリーン上のどこに投影されるか？



平行投影

■図2.29——平行投影の原理

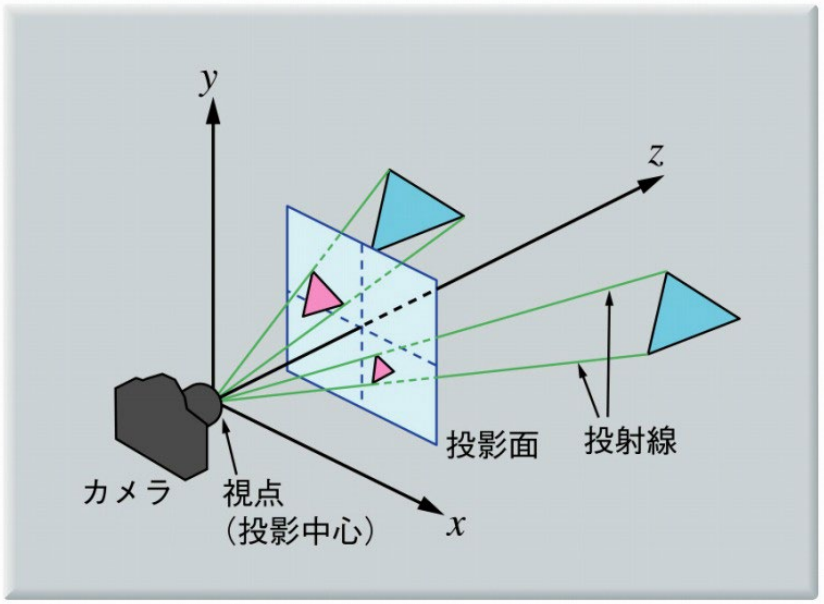


「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

奥行情報（ｚ）の値を無視して
x,yの値をそのまま使用すればよい

透視投影

■図2.27——透視投影の原理

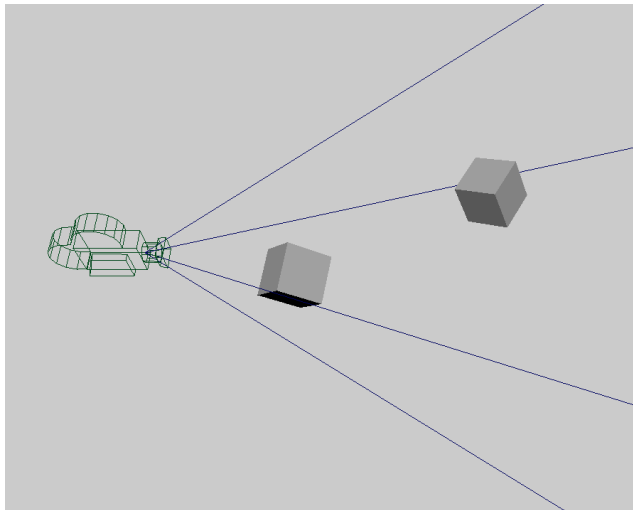


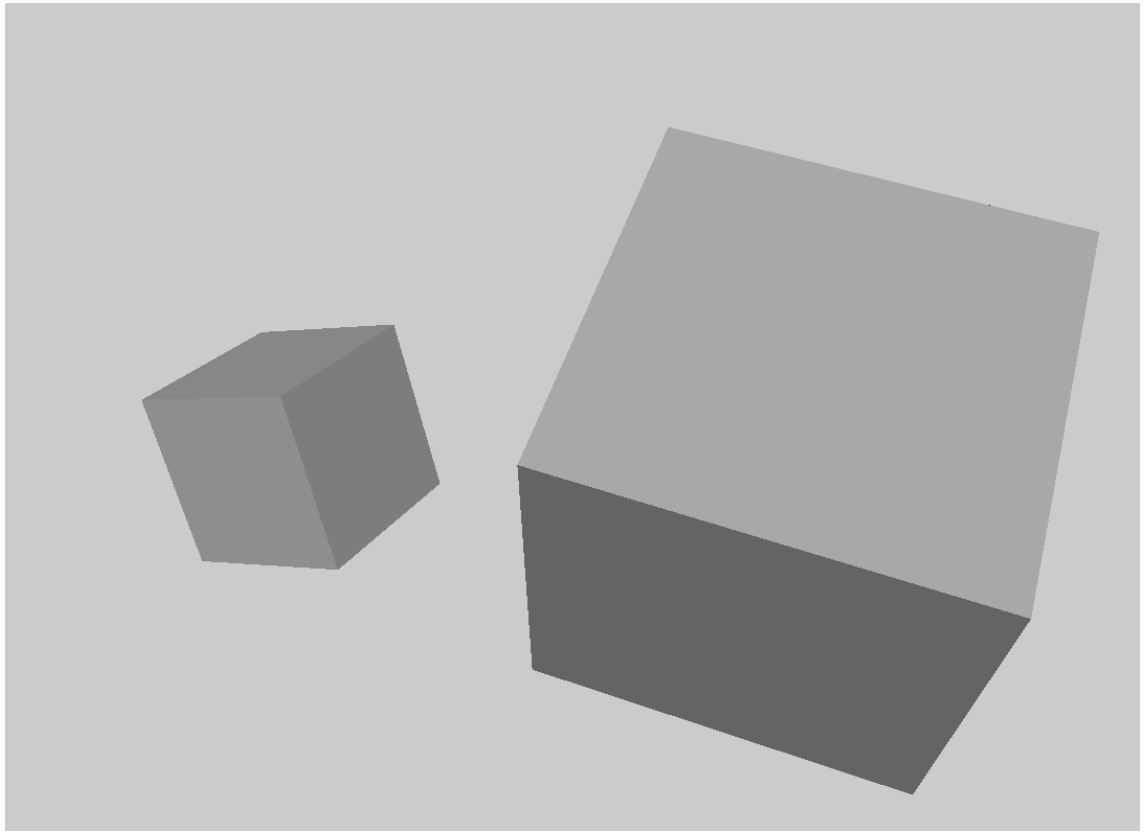
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

遠くのものほど小さい。
奥行情報（ｚ）の値で投影後のx,yの値が異なる。

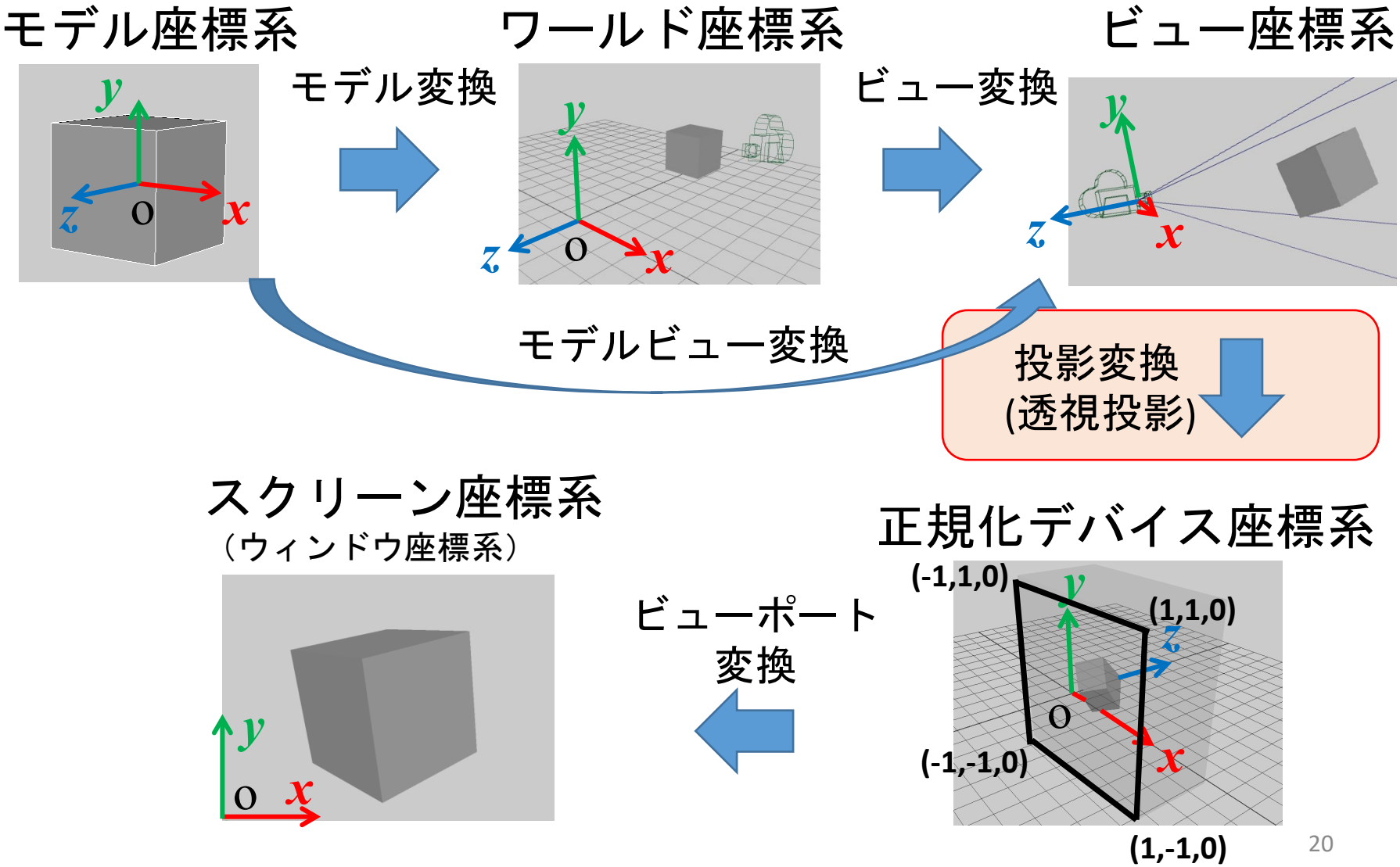
透視投影 (Perspective Projection)

- 透視投影の性質
  - 遠くのものは小さく、手前のものは大きく表示される
  - 直線は直線のまま保たれる



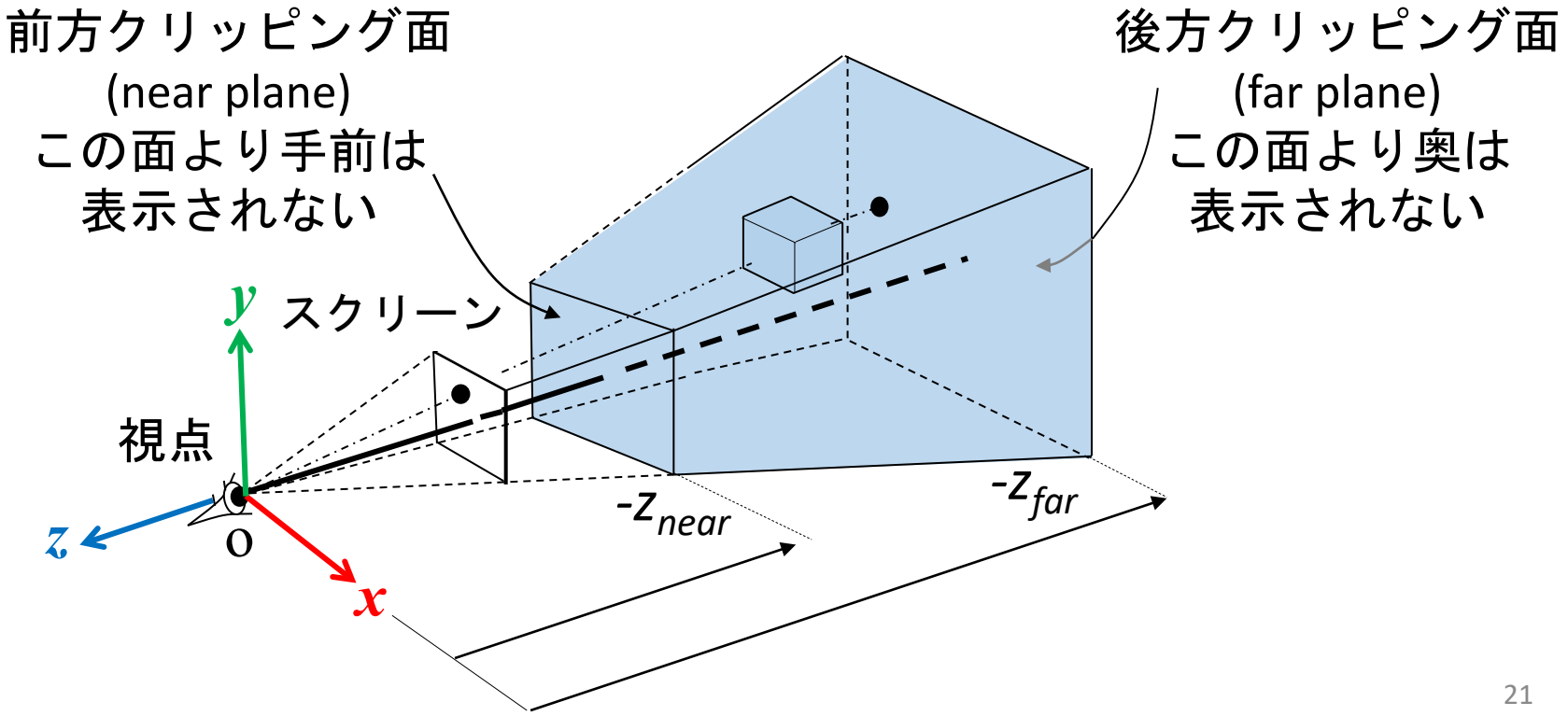


OpenGL の座標系と座標変換

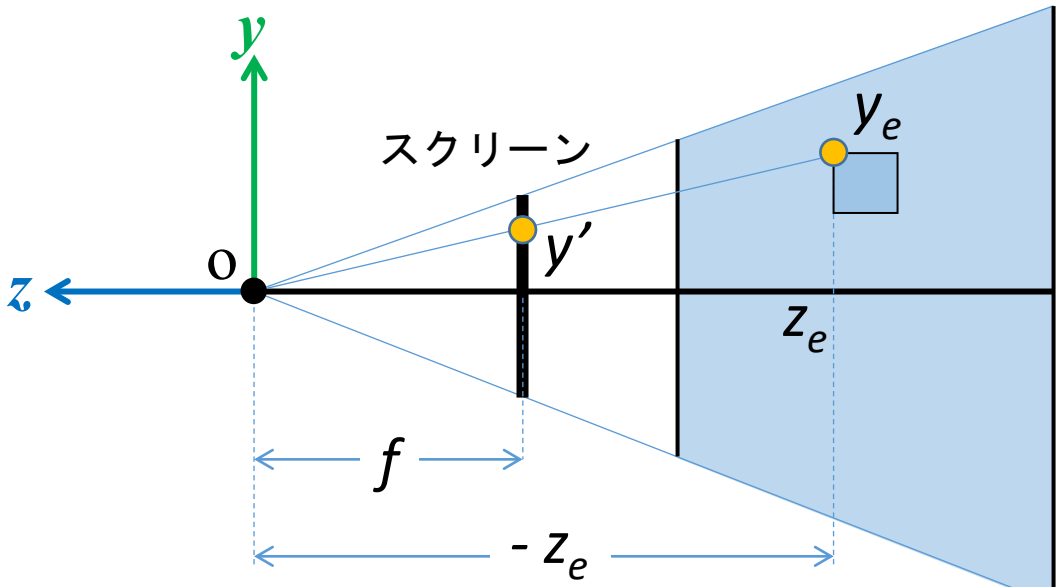


ビューボリューム (Viewing Volume)

- スクリーンに映る範囲を指定
- ビューボリューム（視野錐台）という四角錐台の形をした空間のみが最終的に画面に表示される



カメラ (原点) からスクリーンまでの距離を f としてビュー座標 $(x_e, y_e, z_e, 1)^T$ の投影位置を考える



横から見た図

（z_e は負の値）

$$f:(-z_e) = y':y_e \quad \Rightarrow \quad y' = -f\frac{y_e}{z_e}$$

$-z_e$ で除算

X 座標についても同様にして

$$x' = -f\frac{x_e}{z_e}$$

透視投影の計算

- 単に 4×4 行列を掛けても $-z$ での除算は表せない (非線形な操作)
- 同次座標の導入
- 同次座標では w 座標で割る前/割った後を同一であると見なす（w=0で無限遠点を表現できる）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{pmatrix}$$

例えば、同次座標を用いた次のような演算で、非線形な座標変換が行える

実際の値は、もっと複雑な形になる （のちほど説明）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e + 1 \\ z_e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_e/z_e \\ y_e/z_e \\ 1 + 1/z_e \\ 1 \end{pmatrix}$$

透視投影のための要素

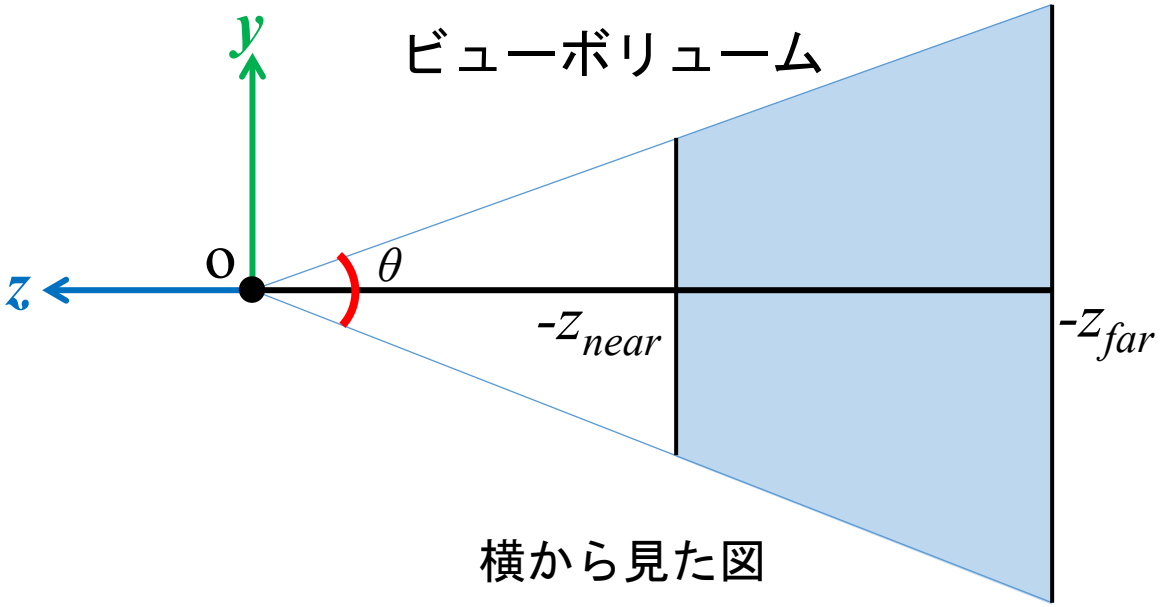
すべての要素をz_eで割る

※ スクリーン上での座標は(x’ y’) がわかればよいが、
奥行き情報が必要なため（最も手前の物体だけが見える） z’ の計算も必要になる

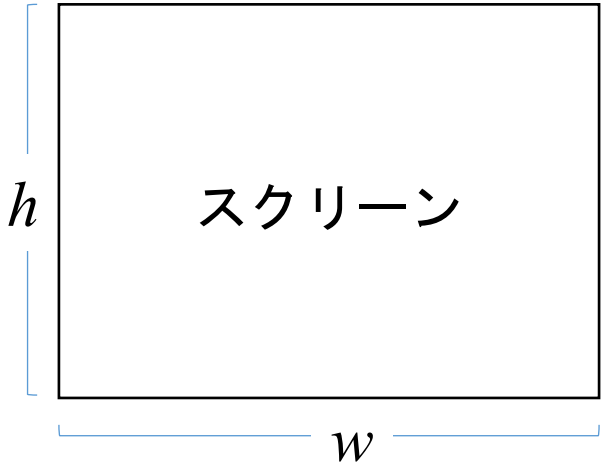
OpenGL での投影行列の指定

- 透視投影には gluPerspective() が便利

```
gluPerspective(fovy,     // 垂直方向の視野角θ (度数で指定)
               aspect,   // アスペクト比（スクリーンの縦横比)
               znear,    // near plane の z 座標（正の値)
               zfar)     // far plane の z 座標 （正の値)
```



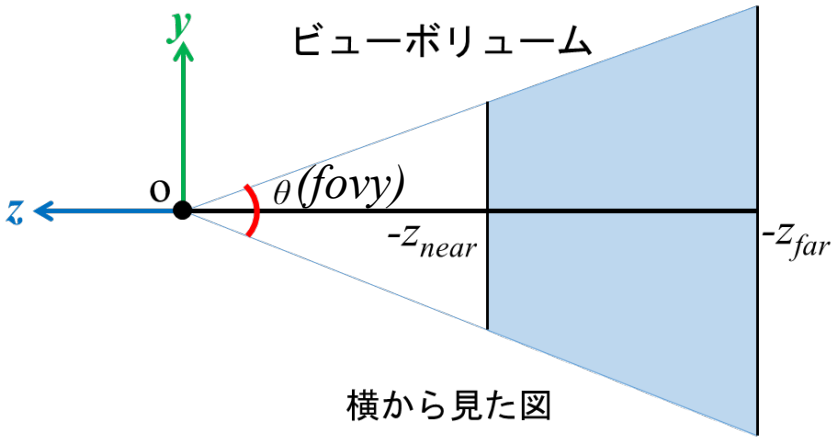
横から見た図

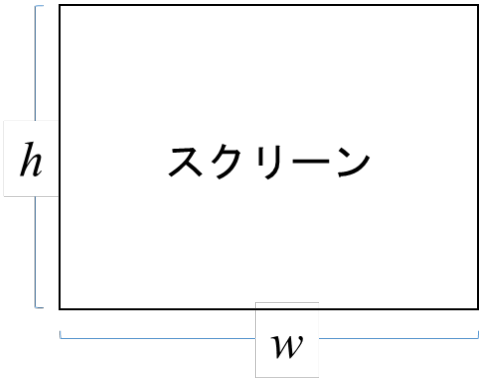


(アスペクト比) = w / h

参考: gluPerspective() で指定される透視投影の行列 (1/2)

$$\begin{pmatrix} \frac{\cot(\frac{fovy}{2})}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot(\frac{fovy}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{far}+z_{near}}{z_{far}-z_{near}} & -\frac{2\,z_{far}\,z_{near}}{z_{far}-z_{near}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$





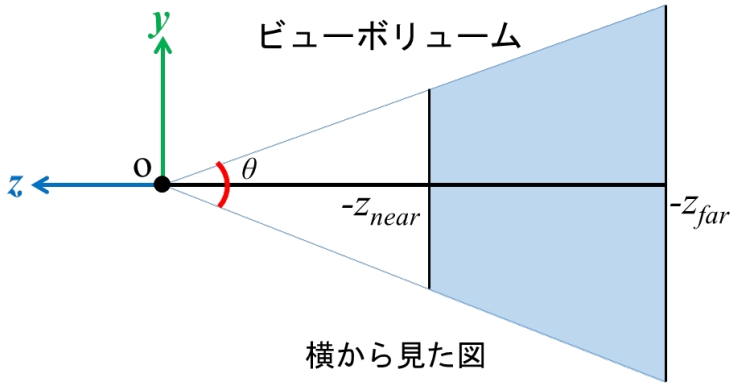
(アスペクト比) = w / h
aspect

参考: gluPerspective() で指定される透視投影の行列 (2/2)

透視投影変換後の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cot(\frac{fovy}{2})}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot(\frac{fovy}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z_{far}+z_{near}}{z_{far}-z_{near}} & -\frac{2\,z_{far}\,z_{near}}{z_{far}-z_{near}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cot(\frac{fovy}{2})}{aspect}x \\ \cot(\frac{fovy}{2})y \\ -\frac{z_{far}+zn_{ear}}{z_{far}-zn_{ear}}z - \frac{2\,z_{far}\,z_{near}}{z_{far}-zn_{ear}} \\ -z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{-z}\frac{\cot(\frac{fovy}{2})}{aspect}x \\ \frac{1}{-z}\cot(\frac{fovy}{2})y \\ \frac{z_{far}+zn_{ear}}{z_{far}-zn_{ear}} + \frac{1}{z}\frac{2\,z_{far}\,z_{near}}{z_{far}-zn_{ear}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

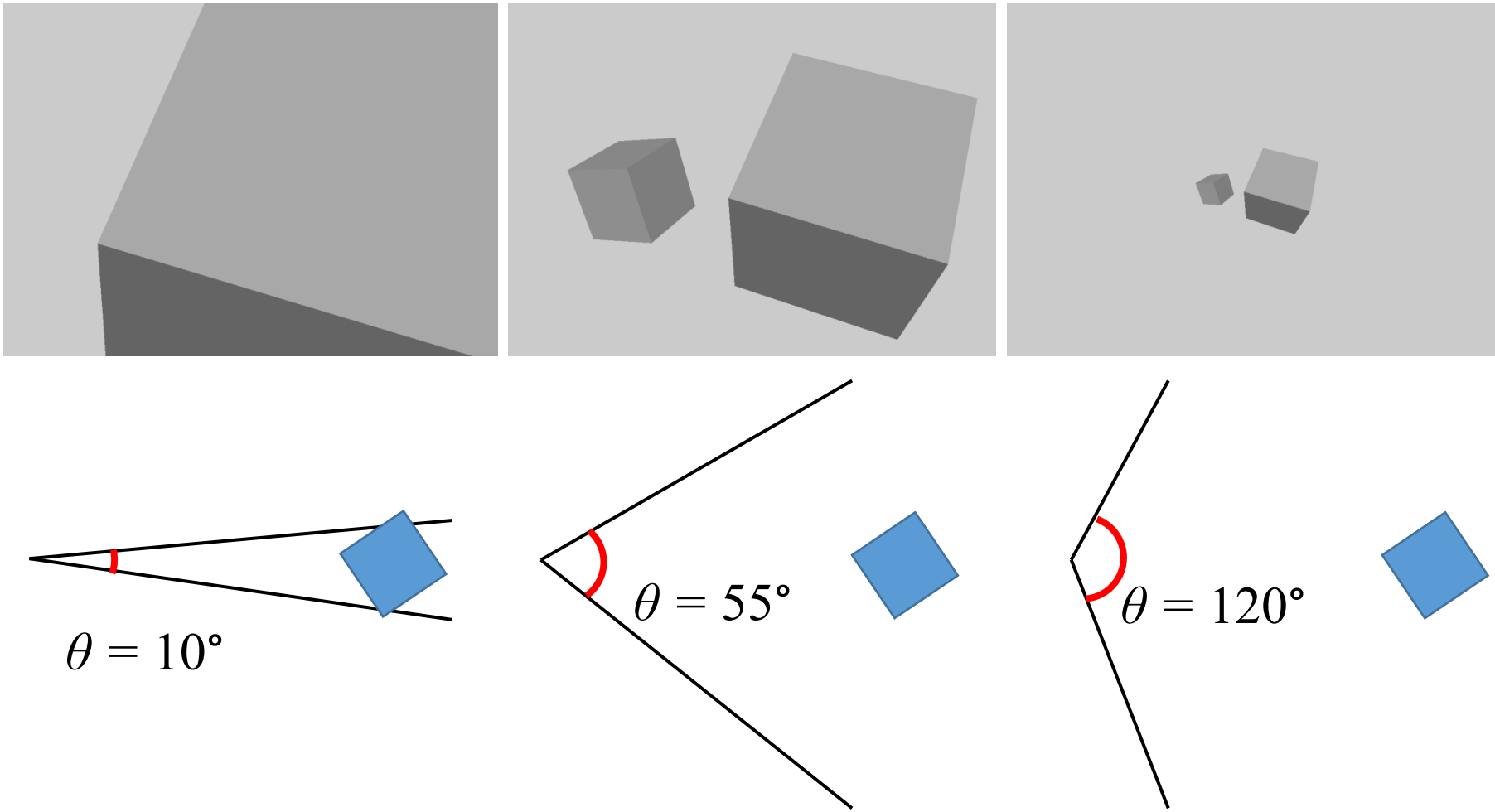


x‘ やy’ は四角錘台内が-1以上1以下になるように（あるz と対応する四角錘台の端の座標でx やy を割った値）

z’ はz が-z_near のとき-1
z が-z_far のとき1 になるように

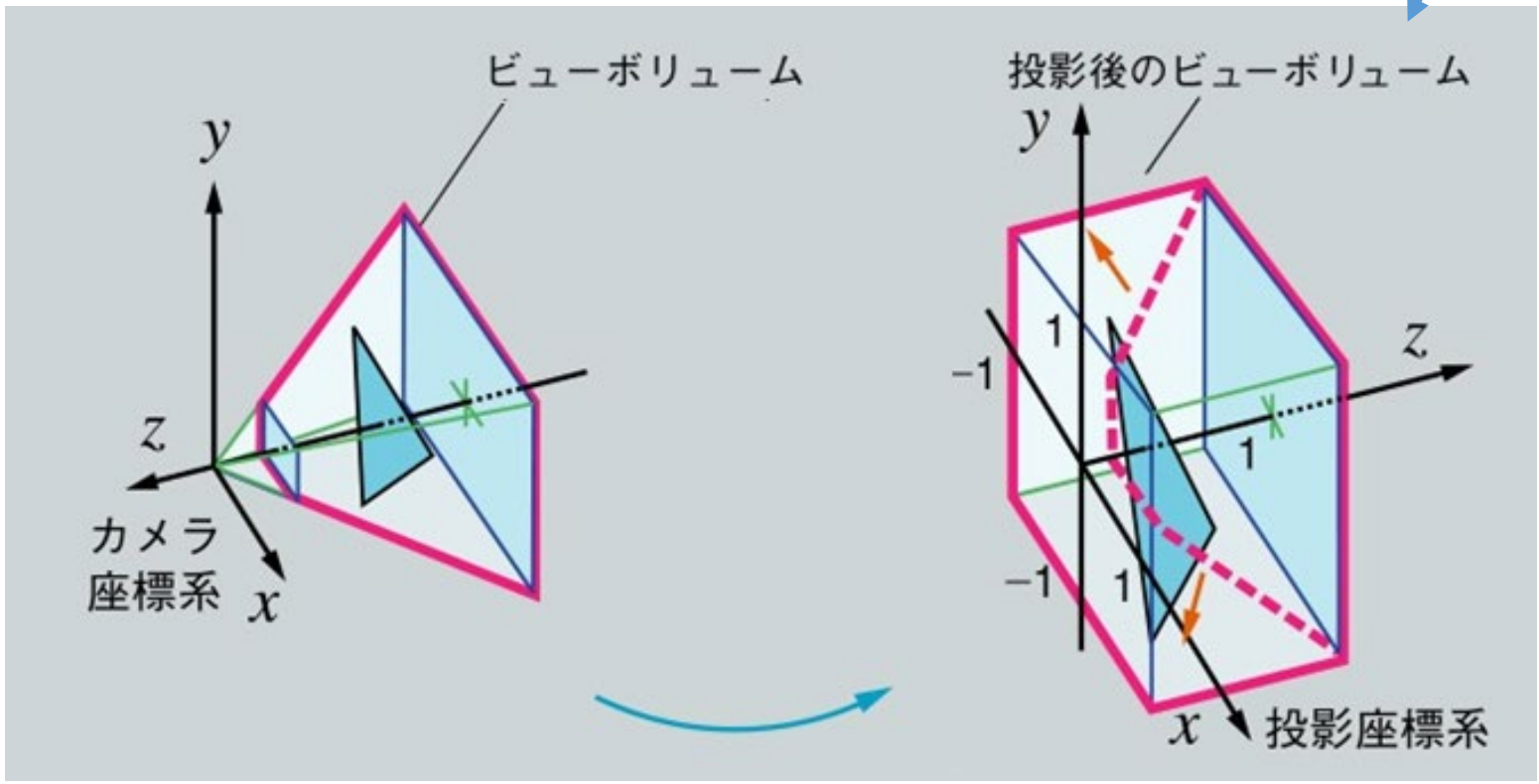
垂直視野角 θ の影響

- θ が大きくなるにつれて物体が小さく表示される



透視投影の計算

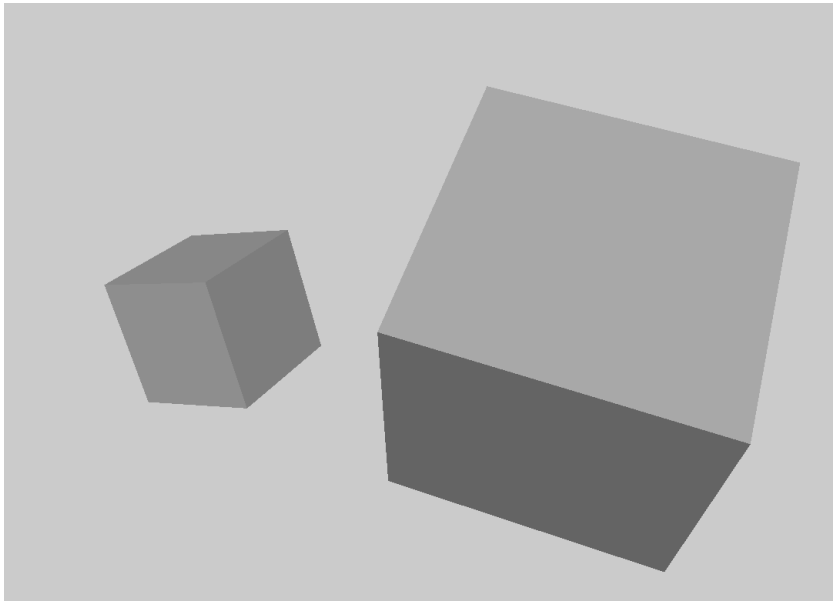
正規化デバイス座標系



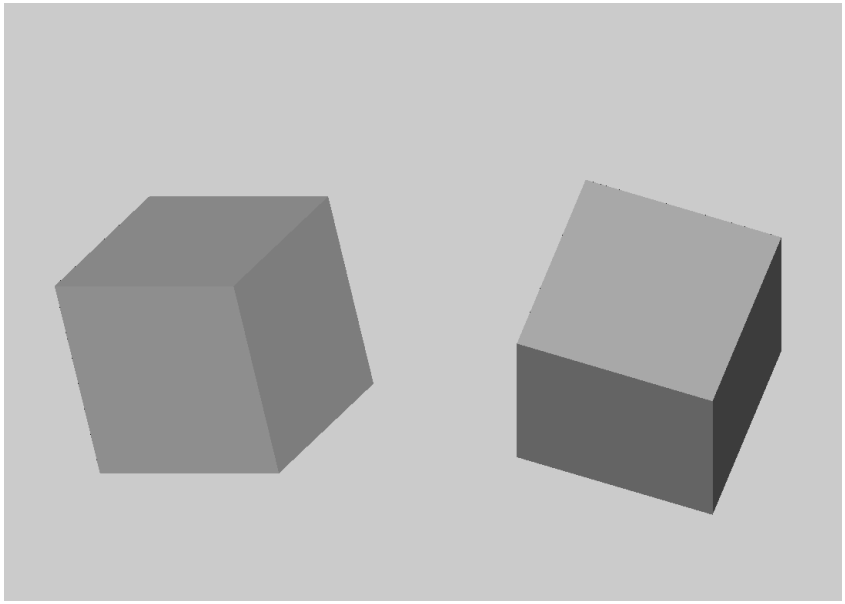
※右手座標系から左手座標系に変わっていることに注意 ($-z_e$ で除算するため)

平行投影 (Orthographic Projection)

- 無限遠のカメラで (≒望遠レンズでズームして) 撮影
- 投影された物体の大きさは遠近に依存しない
- OpenGL では glOrtho() や gluOrtho2D() が便利

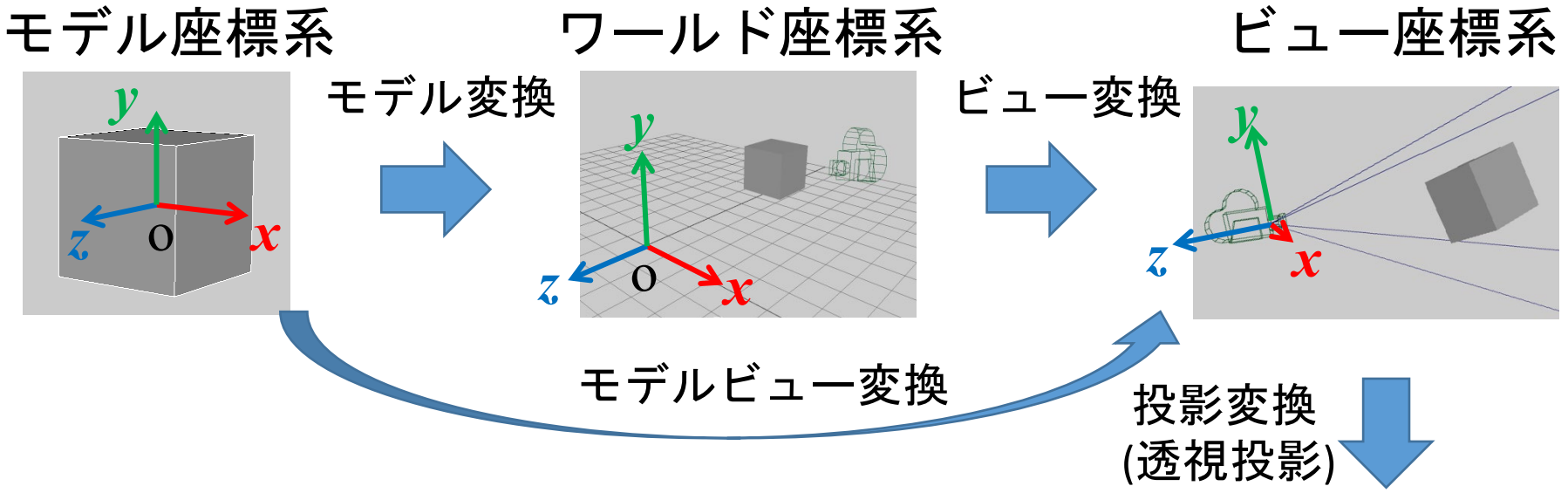


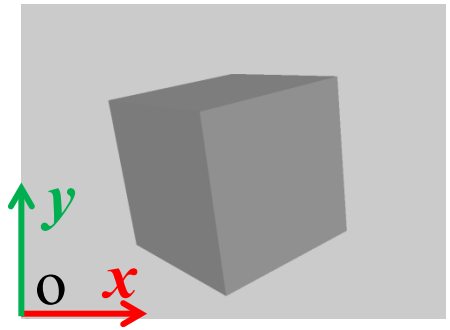
透視投影 ($\theta = 55°$)



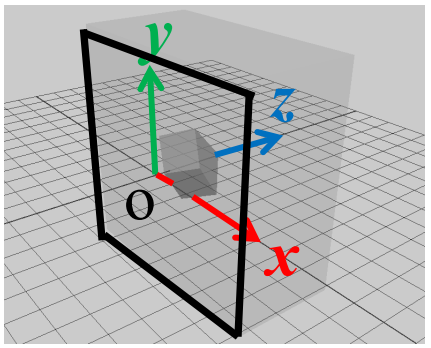
平行投影

OpenGL の座標系と座標変換



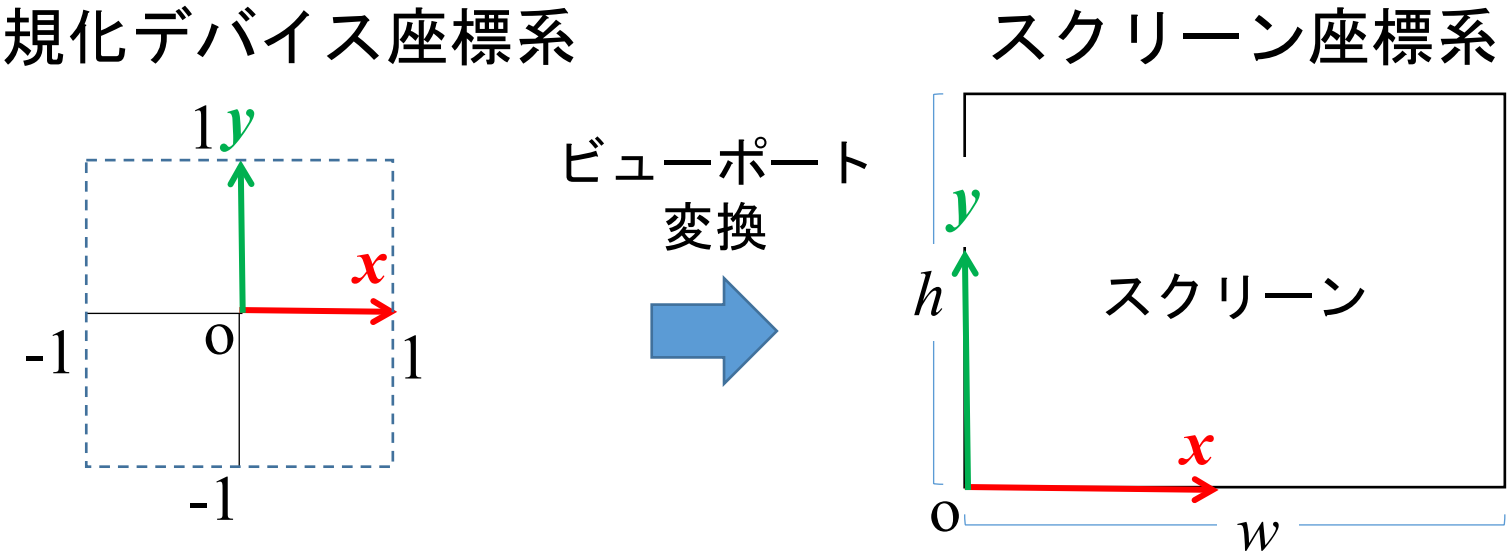


ビューポート
変換



ビューポート変換

- 正規化デバイス座標系の x, y 座標を
  スクリーンの大きさに合わせて拡大する

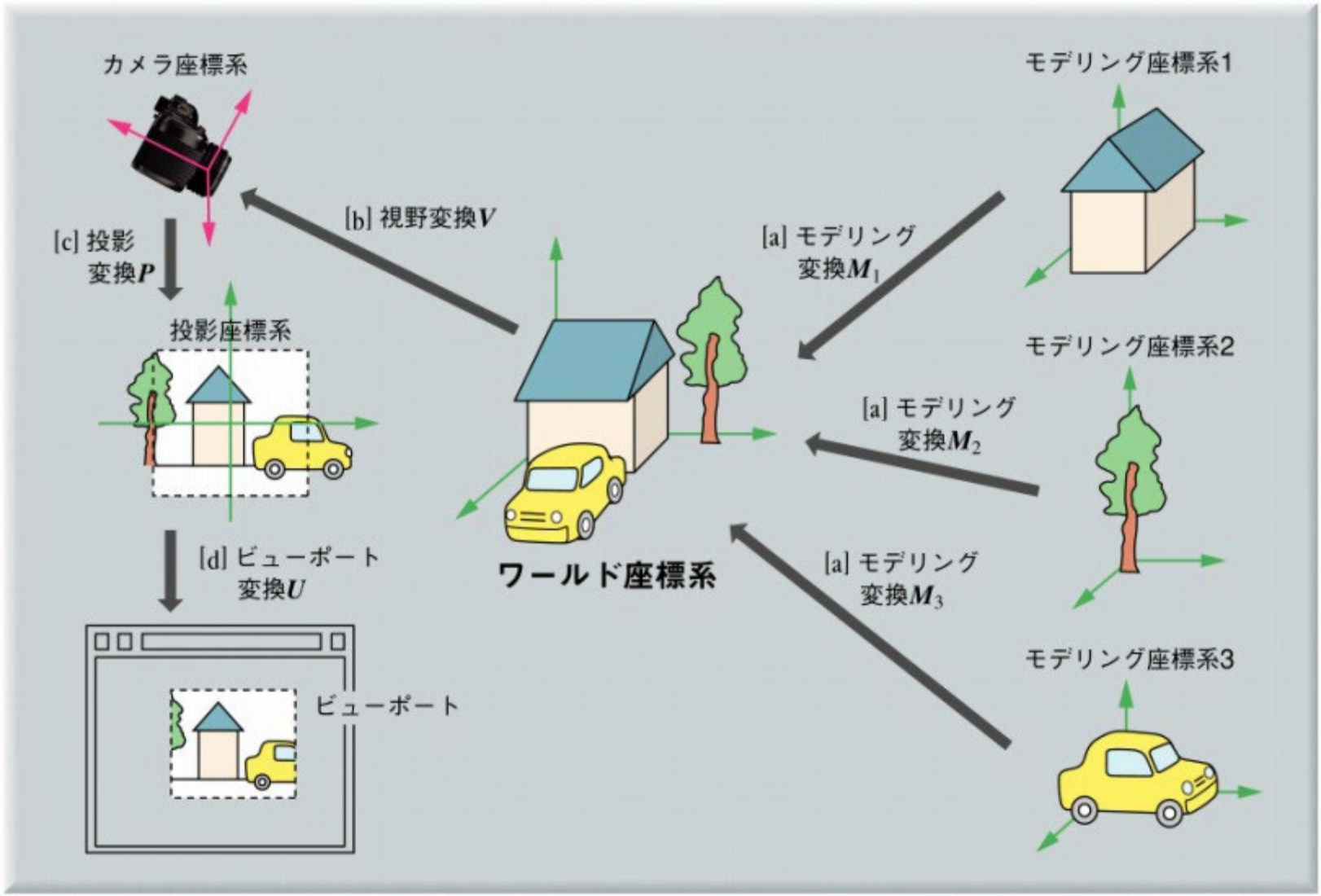


- OpenGL では glViewport() で指定

```
glViewport(x0, y0, w, h)
```

通常はともに 0 を指定

■図2.43——モデルから表示までの変換(ビューイングパイプライン)



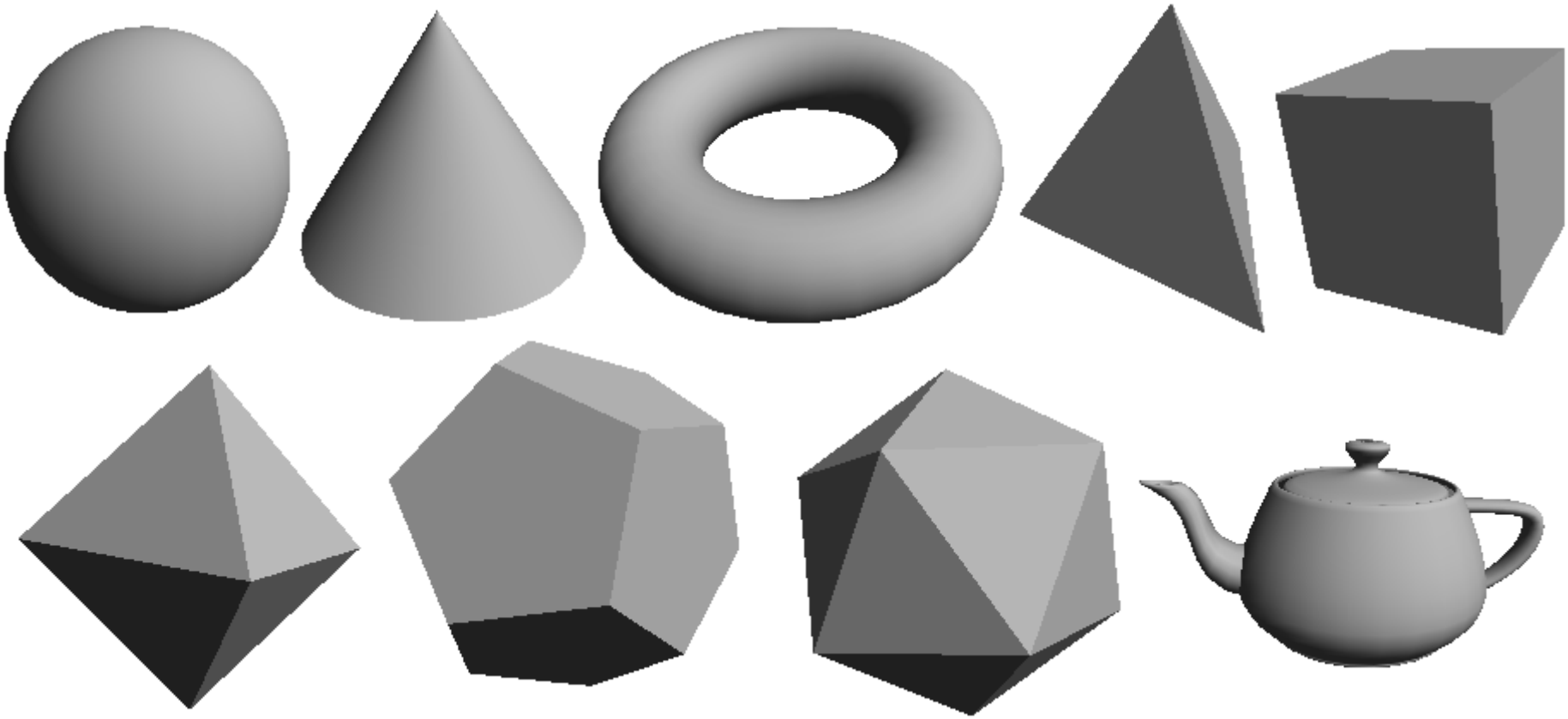
「コンピュータグラフィックス」2004年 / 財団法人画像情報教育振興協会（CG-ARTS協会）

OpenGL での座標変換の指定

```
glViewport(0, 0, w, h);       // ビューポート変換行列の指定

glMatrixMode(GL_PROJECTION); // これ以降は投影変換行列の指定
glLoadIdentity();             // 単位行列を指定
gluPerspective( … );          // 透視投影の行列を乗算

glMatrixMode(GL_MODELVIEW); // これ以降はモデルビュー変換行列の指定
glLoadIdentity();           // 単位行列を指定
gluLookAt( … );             // カメラの位置・姿勢の行列を乗算

glBegin(GL_TRIANGLES);        //  描画命令を発行
glVertex3d( … );              // ワールド座標系の座標を指定
…
glEnd();
```

GLUT に予め用意されている立体形状

中心が原点で大きさが固定なのでモデル変換が必要



詳しくは http://opengl.jp/glut/section11.html を参照

```
void glutSolidSphere(
        GLdouble radius,
        GLint slices, GLint stacks);
```

```
void glutSolidTeapot(GLdouble size);
```

陰影の計算 (Shading / Lighting)

- glColor3d(…) などで色を指定するとベタ塗りになる

陰影計算**なし**

陰影計算**あり**

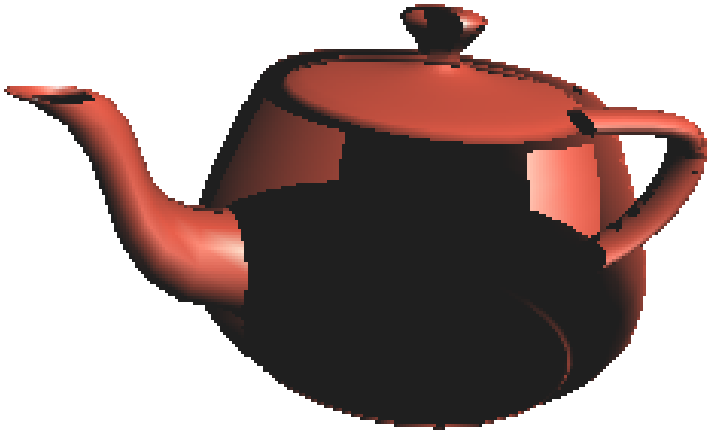
- 法線ベクトルと光源と反射特性の指定が必要
  - GLUT に用意された立体形状なら法線ベクトルは計算済み
- 詳しくは本講義の後半「レンダリング」で学習

陰影の計算 (Shading / Lighting)

```
glEnable(GL_LIGHTING);  // 陰影計算を有効化
glEnable(GL_LIGHT0);    // 光源 0 を有効化 (1, 2, …も指定可)
// 以下、光源のパラメータを設定
glLightfv(GL_LIGHT0, GL_AMBIENT, lightAmbient);
glLightfv(GL_LIGHT0, GL_DIFFUSE, lightDiffuse);
glLightfv(GL_LIGHT0, GL_SPECULAR, lightSpecular);
glLightfv(GL_LIGHT0, GL_POSITION, lightPosition);

// 以下、物体の反射特性を指定
glMaterialfv(GL_FRONT, GL_AMBIENT, ambientColor);
glMaterialfv(GL_FRONT, GL_DIFFUSE, diffuseColor);
glMaterialfv(GL_FRONT, GL_SPECULAR, specularColor);
glMaterialfv(GL_FRONT, GL_SHININESS, &shininess);

glBegin(GL_TRIANGLES);          //  描画命令を発行 (以下略)
…
```

隠れ面消去 (Hidden Surface Removal)

- 手前の面に隠される奥の面を除外する処理を「隠れ面消去」という



隠れ面消去**なし**

隠れ面消去**あり**

- OpenGL では glEnable(GL_DEPTH_TEST) を指定
- 詳しくは本講義の後半「レンダリング」で学習

課題の概要
（詳しくは課題用資料参照）

- ティーポットのメリーゴーラウンド
- ティーポットをゆっくり上下させながら回転させる
- 視点も移動させる