《傅里叶分析》，斯坦因与沙卡奇著
第3章 傅里叶级数的收敛性

黄永祥*

2018年3月21日

Abstract

$\mathbb{T}$ 表示$[-\pi,\pi]$或$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$。由于作者熟悉傅里叶系数$\widehat{f}(n):=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{-2\pi inx}\,dx$（其定义与本教材不同），部分估计值可能与实际情况相差一个常数倍。

请注意，习题16（伯恩斯坦定理）包含从第8页至第15页的延伸讨论（主要关于 Hölder 指数 $\alpha=\frac{1}{2}$ 的反例）。我们还在习题11中讨论了在 $2D$ 矩形上的庞加莱不等式。

Exercises

1. **We omit the proofs for showing that $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{C}^d$ are complete.**

2. **Prove that the vector space $l^2(\mathbb{Z})$ is complete.**

Proof. 设 $A_k=\{a_{k,n}\}_{n\in Z}$ 与 $k=1,2,\cdots$ 为一柯西序列。对每个 n，由于 $|a_{k,n}-a_{k',n}|\le\|A_k-A'_k\|_{l^2}$，$\{a_{k,n}\}_{k=1}$ 是复数柯西序列，因而收敛于某极限，记作 b_n。给定 $\epsilon>0$，存在 $N_\epsilon\in\mathbb{N}$ 使得对所有 $k,k'\ge N_\epsilon$，均有 $\sum_{n=1}^{M}|a_{k,n}-a_{k',n}|^2\le\|A_k-A_{k'}\|_{l^2}^2<\frac{\epsilon^2}{2}$ 对所有 M 成立。对每个 $k>N_\epsilon$ 与 M，令 $k'\to\infty$ 可得 $\sum_{n=1}^{M}|a_{k,n}-b_n|^2<\epsilon^2$。由于 M 是任意的，则已证明当 $k\ge N_\epsilon$ 时 $\|A_k-B\|_{l^2}<\epsilon$，其中 $B=(\cdots,b_{-1},b_0,b_1,\cdots)$。此外，由闵可夫斯基不等式 $\|B\|_{l^2}\le\|B-A_{N_\epsilon}\|_{l^2}+\|A_{N_\epsilon}\|_{l^2}<\infty$ 可得 $B\in l^2(\mathbb{Z})$。由于 ϵ 是任意的，当 $k\to\infty$ 时 $A_k\to B$ 在 $l^2(\mathbb{Z})$ 中成立。 □

*國立台灣大學數學系。電子郵件：d04221001@ntu.edu.tw

3. It's standard to construct a sequence of integrable functions $\{f_k\}$ on $[0, 2\pi]$ such that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_k(\theta)|^2 \, d\theta = 0$$

but 极限

$_{k\to\infty} f_k(\theta)$ fails to exist for any θ. For example, take $\{\chi_{I_k}\}_k$, the first interval I_1 be [0,1], the next two be the two halves of [0,1], and the next four be the four quarters, and so on. Note that there is always a subsequence $\{f_{k_j}\}$ such that $f_{k_j} \to 0$ almost everywhere.

4.
Recall the vector space $\mathcal{R}$ of Riemann-integrable functions, with its inner product and norm

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

(a) Then there exist non-zero integrable functions f for which $\|f\| = 0$, e.g. $\chi_{\{\pi\}}$.

(b) However, one can use the proof by contradiction to show if $f \in \mathcal{R}$ with $\|f\| = 0$, then $f(x) = 0$ whenever f is continuous at x.

(c) Conversely, by using the Lebesgue criteria, one can show if $f \in \mathcal{R}$ vanishes at all of its points of continuity, then the lower Riemann sum of $|f|$二
is 0 and hence $\|f\| =$ 零.

5. Let $f(\theta) =$ 对数$(1/\theta)$ for $0 < \theta \leq 2\pi$ and $f(0) = 0$. Define a sequence of functions in $\mathcal{R}$ by $f_n(\theta) = \chi_{(\frac{1}{n}, 2\pi]} f(\theta)$. Then it's easy to show $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{R}$. However, f does not belong to $\mathcal{R}$ since it's unbounded.

6. 设序列 $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 由以下方式定义：若 $k \geq 1$ 则 $a_k = k^{-1}$，若 $k \leq 0$ 则 $a_k = 0$。注意到 $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$，但通过第83-84页的相同证明可表明，不存在黎曼可积函数（或更一般地，$L^\infty(\mathbb{T})$ ）使其第k阶傅里叶系数对所有 k 均等于 a_k。However, it's
known to be a Fourier coefficient of some $L^2(\mathbb{T})$ function by the L^2 convergence of the series and completeness of $L^2(\mathbb{T})$. Check Planchel's theorem and [13, Theorem 8.30]

七.
By using the Abel-Dirichlet test and Planchel's theorem, one can show that the trigonometric series

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n} \sin nx$$

converges for every x, yet it is not the Fourier series of a $L2(\mathbb{T})$ function. However, it's actually not he Fourier series of a $L^1(\mathbb{T})$ function, see [5, Section 14.I], especially

(c)(iii) $\Rightarrow$ (i), which we will provide a proof here. Also see its following remark for cosine series.

The same method can be applied to $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ for $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. For the case $1/2 < \alpha <$ 1
is more difficult to show it's not a Fourier series of a Riemann integrable function. See Problem 1.

Proof. 最困难的部分是找到修正后的起始线。假设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 $nx \sim f(x)$ 对于某些 $f \in L^1(\mathbb{T})$。我们将证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < \infty$。由此可知我们提出的级数并非任何 $L^1(\mathbb{T})$ 函数的傅里叶级数。为证明有限性，可注意到

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n} = \int_0^\pi \Big(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}\Big) f(x)\, dx,$$

其中被积函数中的级数将逐点收敛于锯齿函数，并且被预测为一致有界（另见练习20中证得的原点附近吉布斯现象）。

在这一预测下，可以运用LDCT（以函数$C|f(x)|$为控制函数）推断出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \int_0^\pi \Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big) f(x)\, dx < \infty.$$

最后，我们通过一种不同于与阿贝尔均值比较的方法——即本章引理2.3，证明S_N:
$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$的一致有界性。首先想到的策略或许是分部求和法。但由于共轭狄利克雷核$\widetilde{D}_N(x)$：$= \sum_{j=1}^{N}$ sin$jx = \frac{\cos(x/2) - \cos((N+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$在$x_N = (N + \frac{1}{2})^{-1} \frac{\pi}{2}$(→0处当$N \to \infty$)时的量级为csc$x_N$($\to \infty$（当$N \to \infty$)），人们可以对部分和项获得一个近乎最优的余割函数上界。这也反映了原点附近吉布斯现象的重要性。因此很自然地将$S_N(x)$的分析分为两部分：靠近原点的x与远离原点的部分。

首先，我们可以很容易地用分部求和法来证明对于$1 \leq M \leq N$

$$|\sum_{j=M}^{N} \frac{1}{j} \sin jx| \leq \frac{1}{2M} |\csc \frac{x}{2}|.$$

其次，我们将和分解为两部分，对大小指标分别采用正弦函数的线性估计，即当$x \in\in [0, \pi]$时，使用|sin$jx| \leq jx$与sin$\frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}$进行估计。注意对于所有1$\leq m \leq N$及$x \in (0, \pi$的情况]

$$\Big|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sin jx\Big| \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} |\sin jx| + \Big|\sum_{j=m+1}^{N} \frac{1}{j} \sin jx\Big| \leq \sum_{j=1}^{m} x + \frac{1}{2(m+1)} |\csc \frac{x}{2}| \leq mx + \frac{x}{2\pi(m+1)}.$$

若 $N \leq \frac{1}{x}$（意味着 x 很小，因此我们不希望使用余割估计），则选择 $m = N$ 并得到 $S_N(x) \leq Nx \leq 1$。

若 $N > \frac{1}{x}$，则我们取 m 为唯一满足 $\frac{1}{x} - 1 < m \leq \frac{1}{x}$ 的整数。（$m = 0$ 意味着 x 较大，因此我们直接使用余弦估计式。）此时上界变为

$$|S_N(x)| \leq 1 + \frac{x^2}{2\pi} \leq 1 + \frac{\pi}{2}.$$

因此我们完成证明。 $\square$

8. 第2章习题6讨论了和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

利用本章的方法，可以推导出类似的求和 {v*}。

(a) 设 f 为通过 $f(\theta) = |\theta|$ 定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数。利用帕塞瓦尔恒等式可求得下列两个恒等式的和：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \pi^4/96 \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4/90.$$

(考虑在 $[0, \pi]$ 上由 $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$ 定义的 2π 周期奇函数。同 (a) 部分一样，可以发现

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Remark 1.。当k为偶数时，关于$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$的通项表达式由问题4给出。然而，对于求和$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$，或更一般地，在$k$为奇数时求$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$的公式，是一个著名的未解决问题。

9. 对于 α 不为整数的情况，其傅里叶级数为

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

在$[0, 2\pi]$上由

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n+\alpha}.$$

应用帕塞瓦尔公式可知

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}.$$

同样要注意的是，问题2.3（或 Jordan 判别法）意味着 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan \pi\alpha}$。

其他构建这些恒等式的方法可参见练习5.15以及第二册练习3.12。

10. Consider the example of a vibrating string which we analyzed in Chapter 1. The displacement $u(x,t)$ of the string at time t satisfies the wave equation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \tau/\rho$$

The string is subject to the initial conditions $u(x, 零) = f(x)$ and $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 零) = g(x)$, where we assume that $f \in C^1$ and $g \in C^0$. We define the total energy of the string by

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\tau \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

The first term corresponds to the "kinetic energy" of the string (in analogy with $(1/2)mv^2$, the kinetic energy of a particle of mass m and velocity v), and the second term corresponds to its "potential energy."

Show that the total energy of the string is conserved, in the sense that $E(t)$ is constant. Therefore,

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L g(x)^2\, dx + \frac{1}{2}\tau \int_0^L f'(x)^2\, dx.$$

Proof. $dE/dt \equiv$ 通过波动方程得到0。要在积分内传递d/dt，或许这个问题需要对f, g的光滑性做出更强的假设。 □

11. The inequalities of Wirtinger and Poincaŕe establish a relationship between the norm of a function and that of its derivative.

(a) If f is T-periodic, continuous, and piecewise C一 with $\int^T零 f(t)\, dt =$ 零, show that

$$\int_0^T |f(t)|^2\, dt \le \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f'(t)|^2\, dt,$$

with equality if and only if $f(t) = A$ 正弦$(2\pi t/T) + B$ 余弦$(2\pi t/T)$.

(b) If f is as above and g is just C^{-} and T-periodic, prove that

$$\left|\int_0^T \overline{f(t)} g(t)\, dt\right|^2 \le \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(t)|^2\, dt \int_0^T |g'(t)|^2\, dt,$$

(c) For any compact interval $[a,b]$ and any continuously differentiable function f with $f(a) = f(b) = 0$, show that

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(t)|^2\, dt,$$

Discuss the case of equality, and prove that the constant $\frac{(b-a)}{}2\ _\pi 2$ cannot be improved.

[Hint: Extend f to be odd with respect to a and periodic of period $T = 2(b-a)$ so that its integral over an interval of length T is 0. Apply part (a) to get the inequality, and conclude that equality holds if and only if $f(t) = A$ 正弦$(\pi\frac{t-a}{b-a})$].

Remark 庞加莱不等式、索伯列夫不等式和等周不等式（在第4.1节和第三册第3.4节中介绍）密切相关。

Proof. (根据假设，$\widehat{f}(0) = 0$ 且对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $\widehat{f'}(n)$ 并等于 $\frac{2\pi i n}{T}\widehat{f}(n)$，其中 $\widehat{f}(n) := \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2\pi i n}{T}x}\,dx$。由此帕塞瓦尔恒等式表明

$$\int_0^T |f(t)|^2\,dt = T\sum_{n\neq 0}|\widehat{f}(n)|^2 = T\sum_{n\neq 0}\frac{T^2}{4\pi^2 n^2}|\widehat{f'}(n)|^2 \leq T\sum_{n\neq 0}\frac{T^2}{4\pi^2}|\widehat{f'}(n)|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f'(x)|^2\,dx.$$

当且仅当 $n \neq \pm 1$ 时 $\widehat{f}(n) = 0$，即 $f(x)$ 是 $e^{\frac{2\pi i x}{T}}$ 和 $e^{-\frac{2\pi i x}{T}}$ 的线性组合时取等号。

(b) 注意到帕塞瓦尔恒等式与 $\widehat{f}(n) = 0$ 意味着

$$\begin{aligned}|\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\,dt| &= T|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{f}(n)}\widehat{g}(n)| = T|\sum_{|n|>0}\overline{\widehat{f}(n)}\widehat{g}(n)| \leq \Big(T\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(T\sum_{|n|>0}|\widehat{g}(n)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\int_0^T |f(t)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |g'(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

(c)的证明无非是提示，因此我将其省略。 □

Remark 3. 对于(b)，我还尝试了以下方法，但行不通。

设 $F(t) := \int_0^t f(s)\,ds$。则 $F(0) = F(T) = 0$ 且因此

$$|\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\,dt| = |-\int_0^T \overline{F(t)}g'(t)\,dt| \leq \Big(\int_0^T |F(t)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T |g'(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

但我认为 $\int_0^T F(t)\,dt = 0$ 不正确，因此无法直接应用 (a)。

Remark 4. 解决(a)的思路同样适用于我在台湾大学偏微分方程资格考中看到的以下问题（考试日期：2012年9月14日）：

设$A =[0,a]\times[0,b]\subset \mathbb{R}^2$与$u$为定义在$A$上的$C^1$函数，且在$\partial A$上满足$u =$为0。

(a) 证明庞加莱不等式：存在一个与 u 无关的常数 C，使得

$$\int_A |u(x)|^2\,dx \leq C\int_A |\nabla u(x)|^2\,dx.$$

(b) 最佳常数 C 是多少?

Proof. 我们首先处理一般情形。设 $<\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots \to \infty$ 表示有界域 Ω 上 $-\Delta$ 的所有特征值（其存在性是弗雷德霍姆定理的推论），根据对称算子理论，相应的特征函数 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 $H_0^1(\Omega)$ (上的正交基。) 若 $\partial\Omega$ 是光滑的，则根据椭圆正则性理论，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\phi_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$。

上述一般性事实可以在[1, 第6.1-6.3节]或其他标准PDE教材中找到。

为证明庞加莱不等式，只需考虑u是$\{\phi_n\}_n$的有限线性组合，然后使用标准逼近论证即可。对于$u = \sum_{j=1}^k c_j\phi_j$，我们有

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = -\int_\Omega u\Delta u = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^m c_j\phi_j c_k\mu_k\phi_k = \int_\Omega \sum_{i=1}^m c_i^2\mu_i\phi_i^2 \geq \mu_1 \int_\Omega \sum_{i=1}^m c_i^2\phi_i^2 = \mu_1 \int_\Omega |u|^2.$$

对于$\Omega = A = [0,a] \times [0,b]$，容易看出$\mu_{n,m}$：$= \pi^2(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})$是每个$m, n \in \mathbb{N}$的特征值。接下来需要证明相应特征函数张成的空间在$H_0^1(A)$中稠密。为此我们注意到，由于多重傅里叶级数的“切萨罗平均”在$L^2(A)$中收敛，该张成空间在$L^2(A)$中是稠密的。（需注意对于多重傅里叶级数，本文使用的切萨罗平均并非标准定义，而是通过d维费耶尔核——即每个$1D$费耶尔核的乘积——在[4, Definition 3.1.8]中定义的。）

为证明该张成在$H_0^1(A)$中稠密，我们采用希尔伯特空间标准正交基刻画的标准理论（例如第三册第四章的定理2.3(ii)⇒(i)）。需证当对所有n, m有$(\phi_{n,m}, w)_{H^1}$ ==0时，w ≡=0。此结论成立，因为0 $= \int_A \phi_{n,m}w + \int_A \nabla\phi_{n,m} \cdot \nabla w = \int_A \phi_{n,m}w + \int_A(-\Delta\phi_{n,m})w = (1+\mu_{n,m})(\phi_{n,m}, w)_{L^2}$，即$(\phi_{n,m}, w)_{L^2}$ ≡=0 $\forall\, n, m$。

□

12. 展示$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$有许多标准方法，此处从略。

13. 当f更光滑时，$\hat{f}$衰减得更快，且该衰减率为小o阶（根据黎曼-勒贝格引理）。

十四.
Prove that the Fourier series of a continuously differentiable function f on the circle is absolutely convergent.

Proof. 根据柯西-施瓦茨不等式与普朗歇尔定理,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| \leq |\widehat{f}(0)| + \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |im\widehat{f}(m)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|m|^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq |\widehat{f}(0)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f'\|_{L^2}(2\frac{\pi^2}{6})^{\frac{1}{2}}.$$

□

Remark 5. 对于某些 $\gamma > \frac{1}{2}$，可以将假设条件 $f \in C^1(\mathbb{T})$ 减弱为 $f \in C^\gamma(\mathbb{T})$，参见练习16。

15. **Let f be 2π-periodic and Riemann integrable on$[-\pi, \pi]$.**

(a) By change of coordinates, it's easy to show

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})] e^{-inx}\, dx.$$

(b) From (a), it's easy to show that if (b) f satisfies a Hölder condition of order α for some $0 < \alpha \leq 1$, then $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-\alpha})$.

(c) Prove that the above result cannot be improved by showing that the Lacunary Fourier series

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x} \in C^\alpha([-\pi, \pi]),$$

where 零 $<\alpha<$ 一. So for each $\beta > \alpha$, (二^k)$^\beta \widehat{f}$(二^k) = 二 $^{k(\beta-\alpha)} \to \infty$ as $k \to \infty$ and hence f is not of β-Hölder for any $\beta > \alpha$.

Proof. 只有(c)是非平凡的。对每个$x \in [-\pi, \pi]$和$h \neq 0$，我们选取$N \in \mathbb{N}$使得$2^{N-1}|h| < 1 \leq 2^N|h|$成立，因此

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\leq |\sum_{0}^{N} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}(e^{i2^k h} - 1)| + |\sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}(e^{i2^k h} - 1)| \\
&\leq \sum_{0}^{N} 2^{-k\alpha} 2^k |h| + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k\alpha} = \frac{2^{(1-\alpha)(N+1)} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} |h| + \frac{2^{1-\alpha(N+1)}}{1 - 2^{-\alpha}} \\
&\leq \frac{4^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} |h|^\alpha + \frac{2^{1-\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} |h|^\alpha.
\end{aligned}$$

□

Remark 6. 对于(c)，$f(x)$处处不可微，参见第4章定理3.1和问题5.8。亦可查阅[5, Section 16. H]中看似与本教材不同的另一种刻画方式，即延迟平均法。

16. **The outline below actually proves the Bernstein's theorem that the Fourier series of a α-Hölder function f converges absolutely and uniformly if $\alpha > 1/2$, denoted by $f \in A(\mathbb{T})$. $A(\mathbb{T})$ is called the Wiener algebra.**

(a) For every positive h we define $g_h(x) = f(x+h) - f(x-h)$. One can use Parseval's identity to prove that

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |g_h(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4|\sin nh|^2 |\widehat{f}(n)|^2,$$

and hence by the Hölder condition with constant $K >$ 零

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sin nh|^2 |\widehat{f}(n)|^2 \leq K^2 h^{2\alpha}.$$

(b) Let p be a positive integer. By choosing $h = \pi/$二$_{p+}$一, then we have

$$\sum_{2^{p-1}<n\leq 2^p} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2(p+1)\alpha-1}}$$

since

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<n\leq 2^p} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{2^{p-1}<n\leq 2^p}^{\infty} |\sin nh|^2 |\widehat{f}(n)|^2 \leq \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2(p+1)\alpha}}$$

(c) Estimate $\sum_{2_{p-1}<n\leq 2_p} |\widehat{f}(n)|^2$and conclude that $f \in A(\mathbb{T})$.

Remark 7. 在 Bernstein 定理中，逐点 Hölder 条件显然可以替换为在某些特殊值 $h_p = \frac{\pi}{2\cdot 2^p}$ 处的 L^2 Hölder 条件，即

$$\|f(\cdot + h_p) - f(\cdot)\|_{L^2} \leq K|h|^\alpha, \ ,\forall\ h_p = \frac{\pi}{2\cdot 2^p}\ \forall\ p \geq 1.$$

Next, we show the optimality of $\alpha > 1/2$、
by two examples: the first one is Hardy- 和
Littlewood function. It is a little bit complicated than the second one.

(d) Show that there exists a constant $C >$ 零such that for $N =$二,三,四, $\cdots$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=2}^{N} e^{ik\log k} e^{ikt} \right| \leq C\sqrt{N}.$$

(e) Show that the Hardy-Littlewood function

$$f(x) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{ik\log k}}{k} e^{ikx}$$

is in $C1/2(\mathbb{T})$ but $f \notin A(\mathbb{T})$.

The second example is Rudin-Shapiro's polynomial. We define the trigonometric polynomials P_m and Q_m inductively as follows: $P_0 = Q0 = 1$ and 翻译文本

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + e^{i2^m t} Q_m(t)$$
$$Q_{m+1}(t) = P_m(t) - e^{i2^m t} Q_m(t).$$

(f) One can easily see that

$$|P_{m+1}(t)|^2 + |Q_{m+1}(t)|^2 = 2\Big(|P_m(t)|^2 + |Q_m(t)|^2\Big).$$

and hence $|P_m(t)|2 + |Q_m(t)|^2 = 2^{m+1}$ and $\|Q_m\|_{C(\mathbb{T})} \leq 2^{(m+1)/2}$.

(g) For $|n| < 2^m, \widehat{P}_{m+1}(n) = \widehat{P}_m(n)$, hence there exists a sequence $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ such that ϵ_n is either 1 or -1 and such that $P_m(t) = \sum_0^{2^m-1} \epsilon_n e^{int}$.

(h) Write $f_m = P_m - P_{m-1} = e^{i2^{m-1}t} Q_{m-1}$ and $f = \sum_1^{\infty} 2^{-m} f_m$. Show that $f \in C^\alpha(\mathbb{T}) \setminus A(\mathbb{T})$

Finally, the condition $\alpha > \frac{1}{2}$ in Bernstein's theorem can be relaxed to $\alpha > 0$ if f is of bounded variation.

(i) Prove the following Zygmund's theorem: let f be of bounded variation on $\mathbb{T}$ and lies in $C^\alpha(\mathbb{T})$ for some $\alpha > 0$. Then $f \in A(\mathbb{T})$.

Note that the second condition imposed on f is not superfluous, as the example

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \log n} = \int_0^x \Big(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n} \Big) \, dt,$$

shows. Here f is absolutely continuous, but $f \notin A(\mathbb{T})$.

Proof. (a)(b)在陈述中得到证明。对于(c)，我们注意到

$$\sum_{2^{p-1}<n\le 2^p} |\widehat{f}(n)| \le (2^p - 2^{p-1})^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{2^{p-1}<n\le 2^p} |\widehat{f}(n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le 2^{\frac{p}{2}-(p+1)\alpha} K^2 \pi^{2\alpha}$$

因此$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ =1+ $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1}<n\le 2^p} |\widehat{f}(n)| < \infty$，因为$\alpha > \frac{1}{2}$。

证明(d)(e)放在末尾。

(f) 是显然的。 (g) 通过数学归纳法也是显然成立的。

(h) 注意到 $f \in C(\mathbb{T})$，因为该级数根据 Weierstrass 判别法一致收敛。此外，对于不同的 m，$\widehat{f_m}$ 的支撑集是两两不相交的。因此，$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_1^{\infty} 2^{-m} 2^{m-1} = \infty$，故而 $f \notin A(\mathbb{T})$。最后，对于 $1 > |h| > 0$，存在某个 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $2^{-k} < |h| \le 2^{1-k}$。于是由 (f) 可得，

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\le \sum_{m=1}^{k} 2^{-m} |f_m(x+h) - f_m(x)| + \sum_{m=k+1}^{\infty} 2^{-m} |f_m(x+h) - f_m(x)| \\ &\le \sum_{m=1}^{k} 2^{-m} h \|f_m'\|_\infty + \sum_{m=k+1}^{\infty} 2^{-m} 2 \|Q_{m-1}\|_\infty \le \sum_{m=1}^{k} 2^{-m} h \|f_m'\|_\infty + \sum_{m=k+1}^{\infty} 2^{-m} 2 \cdot 2^{m/2}. \end{aligned}$$

为估计第一项，我们需要使用以下伯恩斯坦不等式[8, page 99-100]，

另见 [7, Section 6.2]。

Theorem 8. *For any trigometric polynomial T of degree N (that is, $T(x) = \sum_{|k|\le N} a_k e^{ikx}$), we always have*

$$\|T'\|_p \le N \|T\|_p,$$

where 一 $\le p \le \infty$ *and* $\|\cdot\|_p$ *stands for the* $L^p(\mathbb{T})$ *norm.*

现在我们可以如下完成 $f \in C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$ 的证明:

$$|f(x+h)-f(x)| \leq \sum_{m=1}^{k} 2^{-m}h2^m2^{m/2} + \frac{2}{\sqrt{2}-1}|h|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}-1}2|h|^{\frac{1}{2}}.$$

Proof for Bernstein's inequality. 考虑函数 $g(t) = ite^{-it/2}$，对于 $-\pi \leq t \leq \pi$。有，在 $[-\pi,\pi]$ 上,

$$ite^{-it/2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{ikt}}{(2k+1)^2}.$$

因此

$$ite^{itx} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{itx+ikt+\frac{it}{2}}}{(2k+1)^2} \text{ for } |t| \leq \pi,$$

或者置入 $x = \frac{N\theta}{\pi}$ 与 $t = \frac{n\pi}{N}$

$$ine^{in\theta} = \frac{4N}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{in\theta+i(k+\frac{1}{2})n\pi/N}}{(2k+1)^2} \text{ for } |n| \leq N,$$

即,

$$F'(\theta) = \frac{4N}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k F(\theta+(k+\frac{1}{2})\pi/N)}{(2k+1)^2}$$

对于 $F(\theta) = e^{in\theta}$ 与 $|n| \leq N$ 的情形。根据线性性质，该公式对我们的 T 成立。因此由闵可夫斯基不等式可知

$$\|T'\|_p \leq \frac{4N}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\|T\|_p}{(2k+1)^2} = N\|T\|_p.$$

□

Remark 在[11, 命题 I.1.11]中，作者指出该伯恩斯坦不等式可通过与延迟均值相关的德·拉·瓦莱·普桑核予以证明

$$V_n(x) := (1+e^{inx}+e^{-inx})F_n(x) = 2F_{2n-1} - F_{n-1},$$

其中 F_n 是费耶核。但我无法证明他们对某些 $C >> 0$ 的断言 $\|V_n'\|_1 \leq Cn$。

(i) 记V_f为f在$\mathbb{T}$上的全变差，我们可按如下方式估计L^2连续模:

$$\begin{aligned}
&\|f(\cdot+\frac{\pi}{2N})-f(\cdot)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N}\int_{\mathbb{T}}\Big|f\Big(x+\frac{k\pi}{2N}\Big)-f\Big(x+\frac{(k-1)\pi}{2N}\Big)\Big|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N}\int_{\mathbb{T}}\Big|f\Big(x+\frac{k\pi}{2N}\Big)-f\Big(x+\frac{(k-1)\pi}{2N}\Big)\Big| dx \cdot C\Big(\frac{\pi}{2N}\Big)^{\alpha} \\
&\leq 2CV_f\Big(\frac{\pi}{2N}\Big)^{1+\alpha} = \frac{M}{N^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

因此 f 满足指数为 $(1+\alpha)/2 > \frac{1}{2}$ 的 L^2 Hölder 条件——至少在沿 $h_p = \frac{\pi}{2^{p+1}}$ 取值时成立。我们运用 Bernstein 定理来完成证明，详见注记 7。

最后，我们证明(d)(e)。首先假设(d)成立。

(e) 显然有 $f \notin A(\mathbb{T})$。利用练习题2.7中的分部求和法，结合 $a_n = \frac{1}{n}$ 和 $b_n = e^{in\log n}e^{inx}$，可推导出 f 的第 N 个部分和为（其中 $B_j = \sum_1^j b_n$）

$$f_N(x) = \frac{1}{N}B_N(x) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j(j+1)}B_j(x).$$

那么由(d)可知f_N绝对收敛，从而一致收敛于f。此外，令$N \to \infty$，可得

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(B_j(x+h) - B_j(x)\Big)\frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{N} + \sum_{j=N+1}^{\infty} := P + Q.$$

令 $0 < h < 1$，$N = [\frac{1}{h}]$。$|Q|$ 的项为 $O(\sqrt{j})j^{-2}$，使得

$$|Q| = O(N^{-\frac{1}{2}}) = O(h^{\frac{1}{2}}).$$

另一方面，我们再次运用分部求和法可得

$$B_j'(z) = \sum_{k=1}^{j} k e^{ik\log k}e^{ikz} = jB_j(z) + \sum_{k=1}^{j-1} B_k(z) = O(j^{3/2}).$$

因此，对 $B_j(x+h) - B_j(x)$ 的实部与虚部应用中值定理，
我们得到

$$|P| \leq \sum_{j=1}^{N} O(hj^{3/2})j^{-2} = O(hN^{1/2}) = O(h^{\frac{1}{2}}).$$

因此对于每个$0 < h < 1$，也就是$f \in C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$。

(d) 是范德科皮特定理若干引理的推论，这些引理其本身就有相当重要的研究价值。（关于在振荡积分中的应用，可参阅[12, 第332页]及本书第四册第八章第6.2节的习题8.13）。

我们首先引入一些记号与一般性结论，因为它也将在问题4.3的特殊情况$\sigma \in (1,2)$中使用。给定一个实值函数$f(u)$和数值$a < b$，我们设定$F(u) = e^{2\pi i f(u)}$，

$$I(F;a,b) = \int_a^b F(u)\,du,\;\; S(F;a,b) = \sum_{a<n\leq b} F(n),\;\; D(F;a,b) = I(F;a,b) - S(F;a,b).$$

Lemma 10. *(i) If f has a monotone derivative f', and if there is a $\lambda >$ 零 such that $f' \geq \lambda$ or $f' \leq -\lambda$ in (a,b), then $|I(F;a,b)| < \lambda^{-1}$.*

(ii) If $f'' \geq \rho > 0$ or $f'' \leq -\rho < 0$, then $|I(F;\;\; a,b)| \leq 4\rho^{-\frac{1}{2}}$.

Lemma 11. *If f' is monotone and $|f'| \leq \frac{1}{2}$ in (a, b), then*

$$|D(F; a, b)| \leq A$$

where A is an absolute constant independent of a, b. In fact, we have $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n(n-\frac{1}{2})} + 2$.

Lemma 12. *If $f'' \geq \rho > 0$ or $f'' \leq -\rho < 0$, then*

$$|S(F; a, b)| \leq \Big(|f'(b) - f'(a)| + 2\Big)(4\rho^{-\frac{1}{2}} + A).$$

(d) 部分证明的完成：函数 $f(u) = (2\pi)^{-1}(u \log u + ux)$ 具有递增的导数 $f'(u) = (2\pi)^{-1}(\log u + 1 + x)$，因为对于每个 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，在 $[2^j, 2^{j+1}]$ 上 $f''(u) = (2\pi)^{-1}u^{-1} \geq (2\pi)^{-1}2^{-j-1}$。应用引理12可直接得出

$$|S(F; 2^j, 2^{j+1})| \leq \{(2\pi)^{-1}\log 2 + 2\}\{8\sqrt{\pi}2^{j/2} + A\} \leq C2^{j/2}$$

对于某个 $C > 0$ 且对于每个 $j \geq 0$。类似地，$|S(F;\ 2^n, N)| \leq C2^{n/2}$ 如果 $2^n < N \leq 2^{n+1}$，因此

$$\begin{aligned} |s_N(x)| := |\sum_{k=2}^{N} e^{ik\log k + ikt}| &\leq 1 + |S(F; 1, 2)| + |S(F; 2, 4)| + \cdots + |S(F; 2^n, N)| \\ &\leq 1 + C(1 + 2^{1/2} + \cdots + 2^{n/2}) \leq C_1 2^{n/2} < C_1 N^{1/2}. \end{aligned}$$

因此我们完成了(d)的证明。接下来的任务是给出引理12、10和11的证明。

Proof of Lemma 12. 我们可以假设$f'' \geq \rho$ (，否则将f替换为$-f$，并将S替换为S)。设α_p为$f'(\alpha_p) = p - \frac{1}{2}$的点，且对于0, ±1, ±2, · · ·，令

$$F_p(u) = e^{2\pi i(f(u) - pu)}$$

则 $|f'(u) - p| \leq \frac{1}{2}$ 在 (α_p, α_{p+1}) 中。令 $\alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_{r+s}$ 为属于区间 $[a, b]$ 的点（若此类点存在）。由引理 10(ii) 和引理 11，我们得到

$$|S(F; \alpha_p, \alpha_{p+1})| = |S(F_p; \alpha_p, \alpha_{p+1})| = |I(F_p; \alpha_p, \alpha_{p+1}) - D(F_p; \alpha_p, \alpha_{p+1})| \leq 4\rho^{-\frac{1}{2}} + A.$$

对于$S(F;\ a, \alpha_r)$和$S(F;\ \alpha_{r+s}, b)$情况亦然。由于$S(F;\ a, b)$是这些区间(a, α_r) $, (\alpha_r, \alpha_{r+1}), \cdots, (\alpha_{r+s}, b)$上表达式的总和，其数量为$s+2 = f'(\alpha_{r+s}) - f'(\alpha_r) + 2 \leq f'(b) - f'(a) + 2$，由此可得引理12。

□

Proof of Lemma 10. (由于$I(F;\ a, b) = (2\pi i)^{-1}\int_a^b \frac{1}{f'(u)}dF(u)$，将第二中值定理应用于该积分的实部和虚部，表明$|I| \leq 2\frac{2}{2\pi\lambda} < \lambda^{-1}$。

(ii) 我们可以假设 $f'' \geq \rho > \neq 0$（否则将 f 替换为 $-f$，并将 I 替换为 $\bar{I}$）。此时 f' 是递增的。暂且假设 f' 在 (a,b) 上具有恒定符号，例如 $f' \geq > 0$。若 $a < \gamma < b$，则在 (γ, b) 上 $f' \geq (\gamma - a)\rho + > 0$。因此由 (i) 可得

$$|I(F;a,b)| \leq |I(F;a,\gamma)| + |I(F;\gamma,b)| \leq (\gamma - a) + 1/(\gamma - a)\rho.$$

通过选择γ使得最后的总和最小，我们得到$|I(F;\ a,b)| \leq 2\rho^{-1/2}$。

在广义情况(a,b)下，它是两个区间的和，在每个区间内f'的符号恒定，因此情形(ii)可通过合并这两个区间的不等式而得到。 □

Proof of Lemma 11. 首先假设a和b不是整数。那么和S为$\int_a^b F(u)\,d\psi(u)$，其中$\psi(u) =[u]+ \frac{1}{2}$中的$u \notin \mathbb{Z}$ ($[u]$是u)的整数部分，且$\psi(n) = n$。因此

$$D(F;a,b) = \int_a^b F(u)\,d\chi(u), \text{ where } \chi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}\,(u \notin \mathbb{Z}).$$

函数 χ 具有周期 1，且通过分部积分可得

$$D(F;a,b) = -I(F'\chi;a,b) + R$$

其中 $|R| = |F(b)\chi(b) - F(a)\chi(a)| \leq |F(b)||\chi(b)| + |F(a)||\chi(a)| \leq 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$。傅里叶级数 $S[\chi](x) = -\sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}$ 的部分和一致有界，且几乎处处收敛于 χ（参见我对练习7的证明）。因此我们可以应用勒贝格控制收敛定理得出结论

$$D - R = -I(F'\chi;a,b) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2\pi in}\Big\{\int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x)+n}\,de^{2\pi i(f(x)+nx)} - \int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x)-n}\,de^{2\pi i(f(x)-nx)}\Big\}.$$

比值$\frac{f'}{f'\pm n}$ $= 1 \mp \frac{n}{f'\pm n}$ 是单调的，第二中值定理表明 $D - R$ 中各项的绝对值不超过 $2 \cdot 2/(2\pi n(n - \frac{1}{2}))$，因此该级数绝对且一致收敛。至此我们完成了 $a, b \notin \mathbb{Z}$ 的证明。

$$A = \sum_1^\infty \frac{2}{\pi n(n-\frac{1}{2})} + 1.$$

如果 a 或 b 是整数，只需注意到 $D(F;\ a,b)$ 与 $\lim_{\epsilon\to 0} D(F;\ a+\epsilon, b-\epsilon)$ 的差异至多为 1 $= \frac{1}{2}(|F(a)| + |F(b)|)$。因此我们可以选取

$$A = \sum_1^\infty \frac{2}{\pi n(n-\frac{1}{2})} + 2$$

对于一般情况。 □

□

Remark 13. 伯恩斯坦定理可重新表述为嵌入到索博列夫空间$H^{\beta}(\mathbb{T})$中，详见[11, 第1.4.5节]。关于伯恩斯坦定理的最优性，首个示例及其证明取自[4, 习题3.3.8]与[14, 第197-199页]。(e)的一般形式为$f_\alpha(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ick\log k}}{k^{\frac{1}{2}+\alpha}} e^{ikx} \in C^{\alpha}(\mathbb{T}), \forall\, 0 < \alpha < 1, \forall c > 0$。鲁丁-夏皮罗多项式取自[6, 第34-35页]、[9]及[11, 第1.4.6节]。

Zygmund定理的证明取自[14, section VI.3]。该节还包含一些进一步的备注和定理。

Remark 14. 也可以应用（d）来说明Hausdorff-Young不等式（第四卷第二章推论2.4）中条件$1 \le p \le 2$的必要性。更准确地说，对于所有$p > 2$

$$g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{ik\log k}}{\sqrt{k}(\log k)^2} e^{ikx} \in L^p(\mathbb{T}),$$

但 $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(m)|^q = \infty$ 对所有 $q < 2$。我这是从[4, 练习 3.2.3]中学到的。

$16\frac{1}{4}$ This is an example I saw in [7, Section 7.1], which can serve as an remarkable application of Bernstein's theorem.

Theorem 15. *Let $c(x)$ be the standard Cantor Lebesgue function and $C(x) = c(x) - x$. Then $C \in A(\mathbb{T})$. In fact, $C \in C^{\alpha}(\mathbb{T})$ with $\alpha =$ 对数2/ 对数3 $> \frac{1}{2}$. However, it seems to be difficult to show the absolutely convergence via the explicit formula $\widehat{C}(0) = 0$, and for $n \neq 0$*

$$\widehat{C}(n) = \frac{(-1)^n}{2\pi i n} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n}{3^k}.$$

Note that the above formula has a natural probability explanation, see [7, page 194].

$16\frac{1}{2}$ Another related theorem is Wiener's $1/f$ theorem, Newman's proof (1975) can be found in [7, Section 7.2]. It can also be an easy corollary to Gelfands theory of commutative Banach algebras, see [11, Section 4.3] or [10, Theorem 11.6].

Theorem 16. *Let $f \in A(\mathbb{T})$. If f has no zero on $\mathbb{T}$, then 一 $/f \in A(\mathbb{T})$. Note that the converse is trivial.*

In 1934, Lévy observe that 一 $/f$ may be replaced by any analytic function on an open set containing the value of f, see [14, page 245-246]. In particular, for $f \in A(\mathbb{T})$

$$\|e^f\|_A \le \exp(\|f\|_A) \text{ and } \|\cos f\|_A \le \cosh \|f\|_A, \tag{1}$$

where $\|f\|_A := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$.

Proof for (1). 只要注意到下面两个同样很容易证明的事实，第一个论断就很容易证明，

$$\|\sum g_i\|_{A(\mathbb{T})} \leq \sum \|g_i\|_{A(\mathbb{T})}, \quad \|g_1g_2\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|g_1\|_{A(\mathbb{T})}\|g_2\|_{A(\mathbb{T})}.$$

(这表明 $(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})})$ 是一个巴拿赫代数。)

第二个断言则可由第一个断言注意到 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 得出。 □

17. **If f is a function of bounded variation (abbr. BV.) on $[-\pi,\pi] =: \mathbb{T}$, then we have $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\mathrm{Var}(f,\mathbb{T})}{2\pi|n|}$ by using integration by parts. Moreover, from the Tauberian theorems for Cesaro-Abel sums, we have $S_N(f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$ as $N \to \infty$ for each $x \in \mathbb{T}$ if f is of BV$([-\pi,\pi])$, see Problem 2.3. However, the classical Jordan's test says that we still has weaker conclusion under weaker assumption as follows:**

Theorem 17. *(Jordan) Let $t_0 \in \mathbb{T}$. If $f \in L^1(\mathbb{T})$ and of BV$([t_0-\delta, t_0+\delta])$ for some $\delta > 0$, we have $S_N(f)(t_0) \to \frac{1}{2}(f(t_0+)+f(t_0-))$ as $N \to \infty$.*

Remark 18. 另见习题 4.6。

18. **Here are a few things we have learned about the decay of Fourier coefficients:**

(a) if f is of class C^k, then $\widehat{f}(n) = o(1/|n|^k)$; (b) if f is Lipschitz, then $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$; (c) if f is monotonic, then $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$; (d) if f is satisfies a Hölder condition with exponent α where $0 < \alpha < 1$, then $\widehat{f}(n) = O(1/|n|^\alpha)$;

(e) if f is merely Riemann integrable, then $\sum|\widehat{f}(n)|2 < \infty$ and therefore $\widehat{f}(n) = o(1)$. Nevertheless, show that the Fourier coecients of a continuous function cantend to 0 arbitrarily slowly by proving that for every sequence of nonnegative real numbers $\{\epsilon_n\}$ converging to 0, there exists a continuous function f such that $|\widehat{f}(n)| \geq \epsilon_n$ for infinitely many values of n, e.g. taking $\sum_j \epsilon_{k_j} \leq \sum_p \frac{1}{p^2} < \infty$ and letting $f(x) = \sum_j \epsilon_{k_j} e^{2\pi i \epsilon_{k_j}}$ which is continuous on $\mathbb{T}$ since the partial sum converges uniformly by Weierstrass M-test.

Proof. ((a))和(c)是分部积分和黎曼-勒贝格引理的应用，(b)和(d)在练习16中给出，(e)为Planchel定理。 □

Remark 19. 更一般地，对于任意慢衰减序列$\{\epsilon\}_{n\in\mathbb{Z}}$，可以构造一个$L^1(\mathbb{T})$函数使得$\widehat{f}(n) \geq \epsilon_n$对所有$n \in \mathbb{Z}$成立，参见[4, Section 3.3.1]。

19. **Give another proof that the sum $\sum_{0<|n|\le N} e^{inx}/n$ is uniformly bounded in N and $x\in[-\pi,\pi]$ by using the fact that**

$$\frac{1}{2i}\sum_{0<|n|\le N}\frac{e^{inx}}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\int_0^x (D_N(t)-1)\,dt,$$

where D_N is the Dirichlet kernel. Now use the fact that $\int_0^{\infty}\frac{\text{正弦}\,t}{t}\,dt<\infty$ which was proved in Exercise 12.

Proof. 第一个等式是显然的。第二个等式的证明如下：

$$\frac{1}{2}\sum_{0<|n|\le N}\frac{e^{inx}}{in}=\frac{1}{2}\sum_{0<|n|\le N}\Big(\int_0^x e^{int}\,dt+\frac{1}{in}\Big)=\frac{1}{2}\int_0^x\big(\sum_{|n|\le N}e^{int}-1\big)\,dt.$$

有界性可以如下估计：对于 $x\in[-\pi,\pi]$,

$$\Big|\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}\,dt\Big|=\frac{1}{2}\int_0^{|x|}\frac{\sin((N+1/2)t)}{t/2}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{|x|}\sin((N+1/2)t)\Big(\frac{1}{\sin(t/2)}-\frac{1}{t/2}\Big)\,dt$$
$$=\int_0^{(2N+1)|x|}\frac{\sin t}{t}\,dt+O(|x|^2),$$

其中第二个被积函数由 $|\sin y|\le 1$ 和 $0\le\frac{1}{\sin(t/2)}-\frac{1}{t/2}\le\frac{2t}{24-t^2}$ 估计，因为对于 $t\ge$ 零

$$\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}\le\sin\frac{t}{2}\le\frac{t}{2}.$$

□

20. **Let $f(x)$ denote the sawtooth function defined by $f(x)=(\pi-x)/2$ on the interval $(0,2\pi)$ with $f(0)=0$ and extended by periodicity to all of $\mathbb{R}$. The Fourier series of f is**

$$f(x)\sim\frac{1}{2i}\sum_{|n|\ne 0}\frac{e^{inx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

and f has a jump discontinuity at the origin with $f(0^+)-f(0^-)=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$.

Show that

$$\max_{0<x\le\pi/N}S_N(f)(x)-\frac{\pi}{2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt-\frac{\pi}{2}+O\Big(\frac{1}{N}\Big)\ \ \textbf{as}\ \ N\to\infty,$$

which is roughly 9% of the jump π. This result is a manifestation of Gibbs's phenomenon which states that near a jump discontinuity, the Fourier series of a function overshoots (or undershoots) it by approximately 9% of the jump.

Proof. 从练习19中我们注意到对于$0< x \leq \frac{\pi}{N}$,

$$2S_N(f)(x) = \int_0^x D_N(t)\,dt - x =: G_N(x) - x$$

注意，$G'_N(x) = D_N(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}})$ 上为正，在 $(\frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{N})$ 上为负，所以

$$\max_{0<x\leq\frac{\pi}{N}} G_N(x) = \int_0^{(N+\frac{1}{2})^{-1}\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt = \int_0^{(N+\frac{1}{2})^{-1}\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\,dt + O\Big((N+\frac{1}{2})^{-2}\Big)$$
$$= 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + O(N^{-2}).$$

因此我们完成证明，因为

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + O(N^{-2}) - \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}} = S_N\Big(\frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}\Big) \leq \max_{0<x\leq\frac{\pi}{N}} S_N(x) \leq \frac{1}{2}\max_{0<x\leq\frac{\pi}{N}} G_N(x) + \frac{\pi}{2N}$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + O(N^{-2}) + \frac{\pi}{2N}.$$

□

Remark 20. 这同样适用于有界变差函数，参见[4，定理3.5.7]。另见[3]，该文从不同视角评述了吉布斯现象。

Problems

1. **For each $\frac{1}{2}< \alpha<$ 一 the series**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

converges for every x and is the Fourier series of some $f \in L2(\mathbb{T})$ by P, but such f will be proved to be non-Riemann integrable in this Problem. Note that the case $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ has be shown in Exercise 7 by the same method.

(a) If the conjugate Dirichlet kernel is defined by

$$\widetilde{D}_N(x) = \sum_{|n|\leq N} \mathbf{sign}(n)e^{inx}$$

where sign$(n) =$ 一 if $n >$ ◯; sign(◯) $=$ ◯; sign$(n) = -$一 if $n <$ ◯, then show that

$$\widetilde{D}_N(x) = i\frac{\cos(x/2) - \cos((N+1/2)x)}{\sin(x/2)},$$

and

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{D}_N(x)|\,dx = O(\log N).$$

So the conjugated Dirichlet kernel is still not a good kernel. In the following, we only use the upper-bound estimate.

(b) As a result, if f is Riemann integrable, then for some $c >$ 零

$$|(f * \widetilde{D}_N)(0)| \leq c\|f\|_\infty \log N.$$

(c) However this leads to a contradiction that

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = O(\log N).$$

Proof. (我们省略第一个简单的断言。第二个断言通过问题2.2计算如下:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}\right| dx = 4\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{2N+1}{4}x}{\sin(x/2)}\right| dx = 4\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\frac{x}{4}}{2\cos\frac{x}{4}} - \frac{\sin^2\frac{2N+1}{4}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| dx.$$

So $|C_1 - 4\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{2N+1}{4}x}{\sin\frac{x}{2}}\, dx| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{D}_N| \leq C_1 + 4\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{2N+1}{4}x}{\sin\frac{x}{2}}\, dx$

现在我们集中讨论估计这个积分值：从问题2.2的证明中，我们有

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{2N+1}{4}x}{\sin\frac{x}{2}}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{2N+1}{4}x}{\frac{x}{2}}\, dx + O(1) = 2\int_0^{\frac{2N+1}{4}\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx + O(1)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{[\frac{2N+1}{4}]} \int_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx + O(1) + O(\frac{4}{2N+1}) = \log(N+\frac{1}{2}) + O(1) + O(\frac{4}{2N+1}).$$

(b) 是平凡的，我们略去其证明。(c) 直接计算可知

$$(f * \widetilde{D}_N)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\Big(\sum_{N\geq n>0} e^{int} - \sum_{-N\leq n<0} e^{int}\Big)\, dt = \sum_{N\geq n>0} \widehat{f}(n) - \sum_{-N\leq n<0} \widehat{f}(n)$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} = O(N^{1-\alpha}).$$

□

Remark 21. 在练习7中，我们证明若对某个$g \in L^1(\mathbb{T})$有$\sum_1^\infty b_n \sin nx \sim g(x)$，则$\sum \frac{b_n}{n}$收敛。另一方面，若已知$b_n$递减至0，则其逆命题成立。参见[5, Section 14.I]。这意味着对于此处$0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$的情况，该级数是某个$g_\alpha \in L^1(\mathbb{T}) \setminus L^2(\mathbb{T})$的傅里叶级数。

Remark 22. 注意对于α =1，已知其为锯齿函数的傅里叶级数（习题2.8），因此当0 $< x < \pi$时$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}$ >0。在[5, page 445]中，作者提到兰道（1933）发现上述正性对其所有部分和也成立，即对所有0$< x < \pi$均有$\sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}$ >0，并给出了如下简洁优美的证明。

Proof. 注意到对于所有 N 有 $s_N(0) = s_N(\pi) = 0$。设 x 为 s_N 在区间 $(0, \pi)$ 上的临界点，则 $s'_N(x) = \dfrac{\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} - 1}{2} = 0$。

因此在這些點上 $\sin Nx = \sin(N + \frac{1}{2})x \cos\frac{x}{2} - \cos(N + \frac{1}{2})x \sin\frac{x}{2} = 0$ 或 $\sin x \geq 0$。是以 $s_N(x) \geq s_{N-1}(x)$ 在 s_N 的這些臨界點 x 處。

如果存在某些临界点 $x \in (0, \pi)$ 使得 $s_2(x) \leq 0$，则我们会得出 $s_1(x) = \sin x \leq 0$ 的矛盾结论。注意到 s_2 在 $[0, \pi]$ 上存在最小值，若存在内部极小值点 x，则有 $s_2(x) > 0 = s_2(0)$ 的矛盾情况，因此 $s_2 >$ 在 $(0, \pi)$ 上恒为 0。通过归纳法可得，对所有 $N \in \mathbb{N}$ 均有 $s_N >$ 在 $(0, \pi)$ 上恒为 0。

□

2. An important fact we have proved is that the family $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is orthonormal in L^2([第1頁 1]) and it is also complete, in the sense that the Fourier series of f converges to f in the norm. In this exercise, we consider another family possessing these same properties.

On $[-1, 1]$ define

$$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Then L_n is a polynomial of degree n which is called the n-th Legendre polynomial.

People observed it when they want to solve the Laplacian in $\mathbb{R}^3$ in spherical coordinates, it's basically an equation for angle ϕ between position and z-axis and can be solved by ODE methods for power series solution.

(a) If f is indefinitely differentiable on $[-1, 1]$, then we have, by using integration by parts,

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) f(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n f^{(n)}(x)\, dx.$$

In particular, show that L_n is orthogonal to x^m whenever $m < n$. Hence $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ is an orthogonal family.

(b) Show that

$$\|L_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} |L_n(x)|^2\, dx = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}.$$

(c) Prove that any polynomial of degree n that is orthogonal to $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ is a constant multiple of L_n.

(d) Let $\mathcal{L}_n = L_n/\|L_n\|_{L^2}$, which are the normalized Legendre polynomials. Prove that $\{\mathcal{L}_n\}$ is the family obtained by applying the "Gram-Schmidt process" to $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$, and conclude that every $f \in L^2[-1, 1]$ has a Legendre expansion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{L^2} \mathcal{L}_n$$

which converges to f in L^2 norm.

Proof. () 通过分部积分法计算 L_n 的 L^2 范数，具体如下：

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n\,dx=(2n)!(-1)^n\int_{-1}^{1}(x-1)^n(x+1)^n\,dx\\
&=(2n)!(-1)^n(-1)\int_{-1}^{1}n(x-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}\,dx=\cdots\\
&=(2n)!(-1)^n(-1)^n\int_{-1}^{1}\frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}(x+1)^{2n}\,dx=\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

(设 f 为这样的多项式。通过维数计算及 $\{L_j\}_{j=0}^n$ 的正交性，可知 $\{x^j\}_{j=0}^n=$ 的张成空间等于 $\{L_j(x)\}_{j=0}^n$ 的张成空间，因而存在 $c_i\in\mathbb{C}$ 使得 $f(x)=\sum_{i=1}^n c_iL_i(x)$。假设条件表明 f 正交于所有满足 $1\le j\le n-1$ 的 L_j，故当 $1\le j\le n-1$ 时 $c_j=0$。

(d) 设 P_n 为通过 $\{x^j\}_{j=0}^n$ 的格拉姆-施密特过程生成的 n 次多项式，则 P_n 与 $\{x_j\}_{j=0}^{n-1}$ 正交，因此由 (c) 及 $\|P_n\|=1$ 可得 $P_n=\mathcal{L}_n$。

为了证明L^2收敛性，核心思想体现在希尔伯特空间标准正交基的表征理论中（例如第三册第四章定理2.3）。我认为所有证明方法都需要借助魏尔斯特拉斯逼近定理（参阅第78-79页或[2, 定理6.3]）。以下段落中，我将说明如何将第78-79页的证明从黎曼积分修改为L^2积分，并从$\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$推广到$\{\mathcal{L}_n\}_{n=0}^{\infty}$。

所有关于连续函数f的陈述在将$\{e^{inx}\}$替换为$\{\mathcal{L}_n\}$，并将第二章推论5.4替换为习题2.16所述的魏尔斯特拉斯逼近定理后均保持不变。接下来只需证明连续函数空间$C[-1,1]$在$L^2[-1,1]$中稠密，这可通过如下方式证明：给定$f\in L^2[-1,1]$时，根据勒贝格控制收敛定理可得存在$f_B(x):=f(x)\chi_{\{|f|\le B\}}(x)\to_{B\to\infty}f(x)$属于$L^2$，其中$\chi_E$是集合$E$上的特征函数。因此问题从逼近$f$转化为在$L^2$意义下逼近$f_B$。然而这个简化后的问题现在可参照第79页黎曼可积情形类似解决。注意用于在L^1中逼近f_B的阶梯函数的存在性由勒贝格积分的定义保证，因此可以通过收缩区间并利用附录B中引理1.5的方式用线性函数连接不同区间，从而从阶梯函数构造出在L^1中逼近f_B的连续函数。

当然，还有其他方法可以证明 $C[-1,1]$ 在 $L^2[-1,1]$ 中是稠密的，例如卷积。 $\square$

Remark 23. 关于正交多项式的讨论，参见[2，第6章]，例如勒让德（本题）、埃尔米特（习题5.7和练习5.23）和拉盖尔。

3. **Let α be a complex number not equal to an integer.**

(a) **Calculate the Fourier series of the 2π-periodic function defined on $[-\pi, \pi]$ by $f(x) =$ 余弦(αx).**

(b) **Prove the following formulas due to Euler:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

For all $u \in \mathbb{C} - \pi\mathbb{Z}$,

$$\cot u = \frac{1}{u} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

(c) **Show that for all $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ we have**

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

(d) **For all 零 $< \alpha <$ 一, show that**

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Proof. (由于 cos $\alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$，我们可以直接计算以证明$\widehat{f}(n) = (-1)^n \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$ (注意我们不能使用习题 9，因为 cos αx 不是周期函数，所以 $[0, 2\pi]$ 和 $[-\pi, \pi]$ 上的结果是不同的。)

(b)(c)级数收敛性和唯一性定理意味着对于所有$x \in[-\pi, \pi]$

$$\cos \alpha x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} e^{inx}$$

特别地，$x = \pi$和$x =$为0意味着

$$\cos \alpha\pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)}.$$

和

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}$$

它们分别对应于(b)和(c)。

(d) 假设我们已经证明了提示中的事实，我们将积分改写为

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, dt &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, dt + \int_0^1 \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{t+1}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + (1-\alpha)} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \Big(\frac{1}{n - (1-\alpha)} - \frac{1}{n + (1-\alpha)} \Big) \\
&= \frac{1}{1-\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2(1-\alpha)}{n^2 - (1-\alpha)^2} = (1-\alpha)^{-1} \frac{(1-\alpha)\pi}{\sin(1-\alpha)\pi} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi},
\end{aligned}$$

在第三个等式中，级数顺序的交换是一个简单结果，因为 $S+T=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{k\to\infty}T_k=\lim_{n\to\infty}S_n+T_n$，其中 S_n, T_k 将被选择为该级数的部分和。

最后，我们通过级数展开在提示中展示事实状态，即

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1 t^{\gamma-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^1 t^{k+\gamma-1}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\gamma},$$

其中第二个等式由 $\sum(-1)^k t^{k+\gamma-1}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性得出。 □

四. **In this problem, we find the formula for the sum of the series**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

where k is any even integer. These sums are expressed in terms of the Bernoulli numbers; the related Bernoulli polynomials are discussed in the next problem.

Define the Bernoulli numbers B_n by the formula

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n.$$

(a) Show that $B_0=1, B_1=-1/2, B_2=1/6, B_3=0, B_4=-1/30$, and $B_5=0$.

(b) Show that for $n\geq$ 一 we have

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k.$$

(c) By writing

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,$$

show that $B_n=$ 零 if n is odd and $>$ 一. Also prove that

$$z\cot z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}.$$

(d) The zeta function is defined by

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \textbf{for all } s>1:$$

Deduce from the result in (c), and the expression for the cotangent function obtained in the previous problem, that for 零 $<x<\pi$

$$x\cot x=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m}.$$

(e) Conclude that

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}.$$

Remark 24. 另一种（通过泊松求和公式）计算$\zeta(2m)$的方法见于习题 5.19。

Proof. (a) 只是 $z/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 长除法的计算过程。

(b) 注意

$$\begin{aligned}1 = \frac{z}{e^z-1}\frac{e^z-1}{z} &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}z^k\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k+1)!}\Big)z^n.\end{aligned}$$

注意，最后一个等式通过使用分部求和法证明（需利用级数 $\frac{e^z-1}{z}$ 的绝对收敛性）。细节可参考《Baby Rudin》定理3.50（另见定理3.49-3.51）。

由于上述公式对所有$z\in\mathbb{R}$均成立，因此可利用幂级数的唯一性（参见《Baby Rudin》定理8.5）推导出：对于所有$n\geq$，均有$0=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k+1)!}$，此结论等价于(b)。

(c) 这些断言是以下事实的简单推论：

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}.$$

(根据问题 3(b)，可得对于 $0<x<\pi$

$$x\cot x = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{x^2}{n^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\Big)\frac{x^{2k}}{\pi^{2k}},$$

其中，富比尼定理允许交换求和次序$\sum_n$和$\sum_k$，这是由二重级数$\sum_{n,k}\frac{x^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}$的绝对收敛性所保证的，这很容易证明。

(e) 是 (c)(d) 与幂级数唯一性定理（施卢蒂（Baby Rudin）定理 8.5）的直接推论。

□

5. **Define the Bernoulli polynomials $B_n(x)$ by the formula**

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n.$$

(a) The functions $B_n(x)$ are polynomials in x and

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Show that $B_{零}(x) = 一, B_1(x) = x - 一/二, B_2(x) = x^2 - x + 一/六$, and $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

(b) If $n \geq 1$, then

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1},$$

and if $n \geq 二$, then

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n.$$

(c) Define $S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$. Show that

$$(m+1)S_m(n) = B_{m+1}(n) - B_{m+1}.$$

(d) Prove that the Bernoulli polynomials are the only polynomials that satisfy

(i) $B_0(x) = 1$, (ii) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ for $n \geq 1$, (iii) $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$ for $n \geq 1$, and show that from (b) one obtains

$$\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt = x^n.$$

(e) Calculate the Fourier series of $B_{一}(x)$ to conclude that for $零 < x < 一$ we have

$$B_1(x) = x - 1/2 = \frac{-1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}.$$

Integrate and conclude that

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^2n},$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}.$$

Finally, show that for $0 < x < 1$,

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{2\pi ikx}}{k^n}.$$

We observe that the Bernoulli polynomials are, up to normalization, successive integrals of the sawtooth function.

Proof. (a) 再次根据《数学分析原理》中鲁丁定理3.50，我们有

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k x^{n-k}}{k!(n-k)!} \Big) z^n.$$

再次利用幂级数的唯一性定理即可完成(a)的证明（对于$B_i(x), i=0,1,2,3$的情形我们略去其计算过程）。

(b) 利用唯一性定理及条件$\frac{ze^{(x+1)z}}{e^z-1}-\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=ze^{xz}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}z^{k+1}$得证。

(c) 由(b)可得，因为我们有

$$
\begin{aligned}
B_{m+1}(n) &= B_{m+1}(n-1)+(m+1)(n-1)^m = B_{m+1}(n-2)+(m+1)[(n-2)^m+(n-1)^m] \\
&= \cdots = B_{m+1}(1)+(m+1)S_m(n).
\end{aligned}
$$

(从(a)可知(i)(ii)。由(b)和(ii)可得

$$
(n+1)\int_0^1 B_n(t)\,dt=\int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt=B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)=0,
$$

和

$$
(n+1)\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt=\int_x^{x+1} B'_{n+1}(t)\,dt=B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)=(n+1)x^n.
$$

(通过数学归纳法证明了)。注意到当0⩽$<x<$⩽1时，该级数在x与$\frac{1}{2}$之间的区间上一致收敛，因此可以交换积分$\int_{\frac{1}{2}}^{x}$与级数求和的顺序。

□

References

[1] Evans, L. C.: 偏微分方程，第二版。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2010年。

[2] Folland, Gerald B: 傅里叶分析及其应用。第4卷。美国数学会，1992。

[3] Gottlieb, David 与 Chi-Wang Shu. "论吉布斯现象及其解决途径." 《SIAM评论》 39.4 (1997): 644-668.

[4] 格拉法科斯，卢卡斯：《经典傅里叶分析》。第三版，施普林格出版社，2014年。

[5] 琼斯，弗兰克：《欧几里得空间上的勒贝格积分》（修订版），琼斯与巴特利特出版社，2001年。

[6] 卡茨内尔松，伊扎克：《调和分析导论》。剑桥大学出版社，2004年。

[7] 蒙哥马利, 休·L: 《早期傅里叶分析》第22卷。美国数学学会，2014 。

[8] Partington, Jonathan Richard: 《插值、辨识与采样》。第17号。牛津大学出版社，1997年。

[9] 鲁丁, 沃尔特: 关于傅里叶系数的一些定理. 美国数学会会刊 10.6 (1959): 855-859.

[10] 鲁丁，沃尔特：泛函分析。纯粹与应用数学国际系列。（1991年）。

[11] 穆什卡鲁，卡米尔，与威廉·施拉格：《经典与多线性调和分析》，第1卷。剑桥大学出版社，2013年。

[12] Stein, Elias M：《调和分析：实变方法、正交性与振荡积分》（PMS-43），第43卷，普林斯顿大学出版社，1993年。

[13] 理查德·惠登，安东尼·齐格蒙德：《测度与积分：实分析导论（第二版）》第308卷，CRC出版社，2015年。

[14] 安托尼·齐格蒙德：《三角级数》第1卷，剑桥大学出版社，2002年。