《傅里叶分析》，斯坦因与沙卡奇著
第4章 傅里叶级数的一些应用

黄永祥*

2018年05月31日

注释：$\mathbb{T}\colon=[-\pi,\pi]$。

Exercises

1. **Let $\gamma\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}^2$ be a parametrization for the closed curve Γ.**

   (a) Prove that γ is a parametrization by arc-length if and only if the length of the curve from $\gamma(a)$ to $\gamma(s)$ is precisely $s-a$ for each $s\in[a,b]$, that is,

$$\int_a^s |\gamma'(t)|\,dt = s-a.$$

   (b) Prove that any curve Γ admits a parametrization by arc-length. [Hint: If η is any parametrization, let $h(s)=\int_a^s|\eta'(t)|\,dt$ and consider $\gamma=\eta\circ h^{-1}$.]

Proof. (a) ($\Rightarrow$)是平凡的。($\Leftarrow$) 这是弧长的定义。

(b) 如提示所示，与 (a) 同理可证。 □

2. 假设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是一条闭合曲线 Γ 的参数化表示，其中 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$。

   (a) 利用分部积分法可以证明

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x(s)y'(s)-y(s)x'(s))\,ds = \int_a^b x(s)y'(s)\,ds = -\int_a^b y(s)x'(s)\,ds.$$

   () 定义 γ 的反向参数化为 $\gamma^-\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}^2$，其中 $\gamma^-(t)=\gamma(b+a-t)$。$\gamma^-$ 的像恰好是 Γ，只是点 $\gamma^-(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的移动方向相反。因此 γ^- 逆转了曲线的定向。不难证明

$$\int_\gamma (xdy-ydx) = -\int_{\gamma^-}(xdy-ydx).$$

*國立台灣大學數學系。電子郵件：d04221001@ntu.edu.tw

特别地，我们可以假定（可能在改变定向后）

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\,ds = \int_a^b x(s)y'(s)\,ds.$$

3. 大一微积分应该教授如何计算{v*}的面积

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1 \text{ and } g(x) \le y \le f(x)\}.$$

4. **Observe that with the definition of ℓ and $\mathcal{A}$ given in the text, the isoperimetric inequality continues to hold (with the same proof) even when Γ is not simple.**

Show that this stronger version of the isoperimetric inequality is equivalent to Wirtinger's inequality, which says that if f is 2_π-periodic, of class C^1, and satisfies $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$, then

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt$$

with equality if and only if $f(t) = A$ 正弦 $t + B$ 余弦 t (Exercise 11, Chapter 3).

Remark 1. 有几种方法可以放宽 Γ 的光滑性假设，一种方法是通过几何测度论（GMT），例如可参考本书第三册第3.4节或其他几何测度论教材（如 Evans-Gariepy、Simon 或 Federer 的著作）。

2013年，Cabre、Ros-Oton和Serra发现，适用于椭圆型偏微分方程的亚历山德罗夫-巴基尔曼-普雷利方法（见于经典教材如Gilbarg-Trudinger第9.1节、Lin-Han第五章或Cabre-Caffarelli第三章）可用来推导若干尖锐的等周不等式，其论文发表于
J. Eur. Math. Soc., 18, 2016, 2971 - 2998。

Proof. (等周⇒维尔丁格)

若我们将 $t = ks$ 用 $k = T/(2\pi)$ 重新参数化，则变量替换表明，只需证明周期为 2π 的情形即足以论证该论断。

给定f均值为0，我们得到$F(t)$：$= \int_0^t f(s)\,ds$是一个2π周期函数。因此等周不等式和Hl̈der不等式意味着

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)F'(t)\,dt \le \frac{1}{4\pi}\Big(\int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t))^2 + (F'(t))^2}\,dt\Big)^2$$
$$\le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 + f(t)^2\,dt,$$

等价于维尔丁格不等式。

(等周⇐维尔丁格)

假设闭曲线$\Gamma(s)=(x(s),y(s))$由从$[0,L]\to\mathbb{R}^2$的弧长参数化，则x,y是L周期的，并且

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\equiv 1.$$

请注意，$f(\theta)=x(\frac{L}{2\pi}\theta)$ 和 $g(\theta)=y(\frac{L}{2\pi}\theta)$ 是 2π 周期的，且

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dg}{d\theta}\right)^2\equiv\frac{L^2}{4\pi^2}.$$

设$\bar{f}$表示f的均值，则由Wirtinger不等式及$\int_0^{2\pi}g'=0=\int_0^{2\pi}(f-\bar{f})$可推出

$$\begin{aligned}2\mathcal{A}=2\int_0^{2\pi}fg'\,d\theta=2\int_0^{2\pi}(f-\bar{f})g'\,d\theta&=\int_0^{2\pi}(f-\bar{f})^2+(g')^2-(f-\bar{f}-g)^2\,d\theta\\ \le\int_0^{2\pi}(f-\bar{f})^2+(g')^2\,d\theta\le\int_0^{2\pi}(f')^2+(g')^2\,d\theta&=2\pi\frac{L^2}{4\pi^2},\end{aligned}$$

这是此处所述的等周不等式。 □

Remark 2. [1, 5, 9, 3, 12] 是有关等周不等式和 Brunn-Minkowski 不等式的经典教材与综述。

五. Prove that the sequence $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, where γ_n is the fractional part of

$$W_n:=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

is not equidistributed in $[0,1]$.

Proof. 根据提示，可以观察到$U_n=W_n+\overline{W_n}$满足$U_r=U_{r-1}+U_{r-2}$，其中$r\ge2$且$U_0=2$，$U_1=1$。因此对所有$n\in\mathbb{Z}_{\ge0}$有$U_n\in\mathbb{N}$。注意到当$n\to\infty$时$W_n\to$~~0，~~因为$|\frac{1-\sqrt{5}}{2}|<1$。由于对所有较大的n有$\gamma_n\notin(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$，我们完成了证明。 □

6. Let $\theta=p/q$ be a rational number where p and q are relatively prime integers (that is, θ is in lowest form). We assume without loss of generality that $q>0$. Define a sequence of numbers in $[0,1)$ by $\xi_n=\langle n\theta\rangle$ where $\langle\cdot\rangle$ denotes the fractional part. Show that the sequence $\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$ is equidistributed on the points of the form

$$0,1/q,2/q,\cdots,(q-1)/q.$$

In fact, prove that for any $0\le a<q$, one has

$$\frac{\#\{n:1\le n\le N,\langle n\theta\rangle=a/q\}}{N}=\frac{1}{q}+O(\frac{1}{N}).$$

Proof. 根据辗转相除法，我们知道存在$x,y\in\mathbb{Z}$使得$xp+yq=1$，即对每个$t\in\mathbb{Z}$有$(ax+tq)p+(ay-tp)q=a$。对每个$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，通过调整t，可以找到满足$\langle n\frac{p}{q}\rangle=\frac{a}{q}$的$n=ax+tq\in[kq,(k+1)q)$。另一方面，易证这样的$n$是唯一的。对于满足$0\leq l$且$0\leq r<q$的$N=lq+r$，可推导出不等式

$$l\leq \#\{n:1\leq n\leq N,\langle n\frac{p}{q}\rangle=\frac{a}{q}\}\leq l+1.$$

于是，期望的结论很容易得出。 $\square$

七、
Prove the second part of Weyl's criterion: if a sequence of numbers $\xi_1,\xi_2,\cdots$ in $[0,1)$ is equidistributed, then for all $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ik\xi_n}\to 0 \quad \textbf{as} \quad N\to\infty.$$

Proof. 首先，$\{\xi_n\}$的等分布性质意味着对于每一个（a,b）$\subset[0,1)$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(\xi_n)\to b-a \quad \text{as} \quad N\to\infty.$$

根据线性性质，我们知道对于每个阶梯函数 $S(x)=\sum_{k=1}^{M}a_k\chi_{I_k}(x)$。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S(\xi_n)\to\int_0^1 S(x)\,dx \quad \text{as} \quad N\to\infty.$$

最后，对于每个定义在[0,1]上的连续函数$f(x)$，其一致连续性表明：对于任意给定的$\epsilon>$0，总存在阶梯函数S_ϵ，使得$\|f-S_\epsilon\|_\infty<\epsilon$成立。进而对每个$N\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\xi_n)-\int_0^1 f(x)\,dx| &\leq |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\xi_n)-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S_\epsilon(\xi_n)|+|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S_\epsilon(\xi_n)-\int_0^1 S_\epsilon(x)\,dx| \\ &\quad +|\int_0^1 S_\epsilon(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx| \\ &\leq 2\epsilon+|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S_\epsilon(\xi_n)-\int_0^1 S_\epsilon(x)\,dx|.\end{aligned}$$

因此 $|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\xi_n)-\int_0^1 f(x)\,dx|\leq 3\epsilon$ 对于大的 N。 $\square$

8. Show that for any $a\neq 0$, and σ with $0<\sigma<1$, the sequence $\langle an^\sigma\rangle$ is equidistributed in $[0,1)$. For arbitrary non-integer $\sigma>0$, see Problem 3.

Proof. 在以下计算中，我们使用中值定理。对于给定的 $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi k\langle an^\sigma\rangle) = \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi kan^\sigma) \\
&= \int_1^N \cos(2\pi kax^\sigma)\,dx + \cos(2\pi ka) + \sum_{n=2}^{N} \cos(2\pi kan^\sigma) - \int_1^N \cos(2\pi kax^\sigma)\,dx \\
&= \frac{\sin 2\pi kax^\sigma}{2\pi ka\sigma x^{\sigma-1}}\Big|_{x=1}^{N} - \int_1^N \frac{\sin 2\pi kax^\sigma}{2\pi ka\sigma}(1-\sigma)x^{-\sigma}\,dx + \cos(2\pi ka) + \sum_{n=2}^{N} \cos(2\pi kan^\sigma) - \cos(2\pi kax_n^\sigma) \\
&= O(N^{1-\sigma}) + \cos(2\pi ka) - \sum_{n=2}^{N} 2\pi ka\sigma \sin(2\pi ka(y_n)^\sigma) y_n^{\sigma-1}(n-x_n),
\end{aligned}$$

其中 $x_n \in [n-1, n]$ 和 $y_n \in [x_n, n]$ 对于每个 n。

因此 $|\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi k\langle an^\sigma\rangle)| \le O(N^{1-\sigma}) + O(\sum_{n=1}^{N} n^{\sigma-1}) = O(N^{1-\sigma}) + O(N^\sigma)$。

类似地，对于正弦（虚部）部分，因此$\{\langle an^\sigma\rangle\}_n$依Weyl准则等分布。 □

Remark 3. 该估计不能直接应用于问题 3，即$\sigma > 1$。对于$\sigma \in (1, 2)$，可参照 van der Corpu t 引理的方式“分段”修改积分，详见我对习题 3.16(d) 及问题 3 第二部分的解答。

9. In contrast with the result in Exercise 8, prove that $\langle a$ 对数 $n\rangle$ for any a.

Proof. 在以下计算中我们使用中值定理。注意到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi\langle a\log n\rangle) = \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi a\log n) \\
&= \int_1^N \cos(2\pi a\log x)\,dx + \sum_{n=2}^{N} \cos(2\pi a\log n) - \int_1^N \cos(2\pi a\log x)\,dx \\
&= \int_0^{\log N} \cos(2\pi az)e^z\,dz + \sum_{n=2}^{N} \cos(2\pi a\log n) - \cos(2\pi a\log x_n) \\
&= \frac{N[\cos(2\pi a\log N) + 2\pi a\sin(2\pi a\log N)] - (1+2\pi a)}{1+(2\pi a)^2} - \sum_{n=2}^{N} 2\pi a\sin(2\pi a\log y_n)y_n^{-1}(n-x_n),
\end{aligned}$$

其中 $x_n \in [n-1, n]$ 和 $y_n \in [x_n, n]$ 对于每个 n。因此

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi k\langle a\log n\rangle) \ge \frac{1}{2\sqrt{1+(2\pi a)^2}} - \limsup_{N\to\infty} C\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{1+(2\pi a)^2}}.$$

并且$\{\langle a \log n\rangle\}_n$ 依据Weyl判别法不是等分布的。 □

10. Suppose that f is a periodic function on $\mathbb{R}$ of period 1, and $\{\xi_n\}$ is a sequence which is equidistributed in $[0, 1)$. Prove that:

(a) If f is continuous and satisfies $\int 10\, f(x)\,dx = 0$, then

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+\xi_n) = 0 \ \ \textbf{uniformly in}\ \ x.$$

(b) If f is merely in $L2$(零,一) and satisfies $\int_0^1 f(x)\,dx =$ 零, then

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+\xi_n)\Big|^2\,dx = 0.$$

Proof. (a) 一般来说，有 $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+\xi_n) = \int_0^1 f(t)\,dt$ 在 x 上一致。

首先，如果 $f(x) = e^{2\pi ikx}$、$k \neq$ 等于 0，那么

$$\lim_{N\to\infty} |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+\xi_n)| = \lim_{N\to\infty} |e^{2\pi ikx}||\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ik\xi_n}| = 0 \ \ \text{uniformly in}\ \ x.$$

由线性性质，这对于常数项为零的三角多项式均成立。我们随后通过魏尔斯特拉斯逼近定理完成证明。

(b) 这一结论可通过(a)及在L^2意义下用连续函数逼近f来实现（估计过程中可能需要在某处使用闵可夫斯基不等式）。逼近步骤与我对问题3.2(d)的解答相同。注意该结论对于L^p情形同样成立，其中$p \in [1,\infty)$（本题中$p = 2$。）

$\square$

Remark 关于遍历理论的更多结果，请参见[2]、[6]、[10]和[13]。

11. **Show that if $u(x,t) = (f * H_t)(x)$ where H_t is the heat kernel, and f is Riemann integrable, then**

$$\int_0^1 |u(x,t)-f(x)|^2\,dx \to 0 \ \ \textbf{as}\ \ t\to 0.$$

Proof. 令 $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi inx}$。给定 $\epsilon > 0$，由 Parseval 恒等式可得

$$\int_0^1 |u(x,t)-f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2(1-e^{-4\pi^2n^2t})^2 \le \sum_{0<|n|\le N} |a_n|^2(1-e^{-4\pi^2n^2t})^2 + \sum_{|n|>N} |a_n|^2,$$

其中选择 $N = N(\epsilon)$ 足够大，使得第二项小于 ϵ。于是我们可知，存在一个 $t_\epsilon > 0$，使得只要 $0 < t < t_\epsilon$，第一项就小于 ϵ。

$\square$

12对(8)式进行变量替换得出解　　　　　　　　离子

$$u(\theta,\tau)=\sum a_n e^{-n^2\tau}e^{in\theta}=(f*h_\tau)(\theta)$$

的等式

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\quad\text{with }\ 0\le\theta\le 2\pi\ \text{ and }\ \tau>0,$$

具有边界条件$u(\theta,0)=f(\theta)\sim\sum a_n e^{in\theta}$。此处$h_\tau(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\tau}e^{in\theta}$。该版本在$[0,2\pi]$上的热核是泊松核的类比，后者可表示为$P_r(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-|n|\tau}e^{in\theta}$，其中$r=e^{-\tau}$ (，因此0 $< r<1$对应于$\tau>0$)。

13. The fact that the kernel $H_t(x)$ is a good kernel, hence $u(x,t)\to f(x)$ at each point of continuity of f, is not easy to prove. This will be shown in the next chapter. However, one can prove directly that $H_t(x)$ is "peaked" at $x=0$ as $t\to 0$ in the following sense:

(a) Show that $\int 1/2\ -1/2\ |H_t(x)|^2\,dx$ is of the order of magnitude of $t^{-1/2}$ as $t\to 0$. More precisely, prove that $t^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}|H_t(x)|^2\,dx$ converges to a non-zero limit as $t\to 0$.

(b) Prove that ∫一/二 –一/二 x二|$H_t(x)$|二 $dx=O(t$ 一/二) as $t\to$ 零.

Proof. (注意到由帕塞瓦尔恒等式 $\int_{-\frac12}^{\frac12}|H_t(x)|^2\,dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}$，那么我们有如下上界估计

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}&=\sum_{n\ge 0}e^{-4\pi^2n^2t}+\sum_{n\le 0}e^{-4\pi^2n^2t}-1\ge\int_0^\infty e^{-4\pi^2x^2t}\,dx+\int_{-\infty}^0 e^{-4\pi^2x^2t}\,dx-1\\&=\sqrt{\pi}(2\pi\sqrt{t})^{-1}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}&=\sum_{n\ge 1}e^{-4\pi^2n^2t}+\sum_{n\le -1}e^{-4\pi^2n^2t}+1\le\int_0^\infty e^{-4\pi^2x^2t}\,dx+\int_{-\infty}^0 e^{-4\pi^2x^2t}\,dx+1\\&=\sqrt{\pi}(2\pi\sqrt{t})^{-1}+1\end{aligned}$$

所以 $t^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}|H_t(x)|^2\,dx\to\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ 和 $t\to$ 一样 0^+。

(b) 提示：当$|x|\le\frac12$时，$x^2\le\frac14\sin^2\pi x$，因此根据均值定理及帕塞瓦尔

恒等式（注意 $\{e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 也构成 $L^2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ 的一组标准正交基，我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2|H_t(x)|^2\,dx \le \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}}{2i}\Big)^2|H_t(x)|^2 = \frac{1}{16}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}}(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x})e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi inx}\Big|^2\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(e^{-4\pi^2n^2t}-e^{-4\pi^2(n-1)^2t}\Big)e^{2\pi i(n+\frac{1}{2})x}\Big|^2\,dx = \frac{1}{16}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|e^{-4\pi^2n^2t}-e^{-4\pi^2(n-1)^2t}|^2$$
$$= \frac{1}{16}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|e^{-4\pi^2(n-\delta_n^t)^2t}|^2 16\pi^4(2n-1)^2t^2,\ \text{ where }\ \delta_n^t\in(0,1)\ \ \forall n\in\mathbb{Z}$$
$$\le \pi^4t^2\Big[\sum_{n\le 0}|e^{-4\pi^2n^2t}|^2(2n-1)^2+\sum_{n\ge 1}|e^{-4\pi^2(n-1)^2t}|^2(2n-1)^2\Big]$$
$$\le \pi^4t^2\Big[1+\int_{-\infty}^{0}e^{-8\pi^2x^2t}(2x-3)^2\,dx+1+\int_{0}^{\infty}e^{-8\pi^2x^2t}(2x+3)^2\,dx\Big]$$
$$= 2\pi^4t^2\Big[1+\int_0^{\infty}e^{-8\pi^2x^2t}(4x^2+12x+9)\,dx\Big] = Ct^{\frac{1}{2}}+o(t^{\frac{1}{2}})\ \text{ as }\ t\to 0^+.$$

同样地，我们利用被积函数的对称性以及$\pi^2x^2\ \ge \sin^2\pi x$在$x\ \in[0,\frac{1}{2}]$上的性质，得到 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2|H_t(x)|^2\,dx \ge Dt^{\frac{1}{2}}+o(t^{\frac{1}{2}})$为$t\to 0^+$。

□

Problems

问题2和3选自[4, 第1章第2,3节]。

1. This problem explores another relationship between the geometry of a curve and
包含
Fourier series. The diameter of a closed curve Γ parametrized by $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ on $[-\pi,\pi]$ 在线传输 is defined by

$$d=\sup_{P,Q\in\Gamma}|P-Q|=\sup_{t_1,t_2\in[-\pi,\pi]}|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)|.$$

If a_n is the n-th Fourier coecient of $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ and l denotes the length of Γ, then (a) $2|a_n|\le d$ for all $n\neq 0$. (b) $l\le\pi d$, whenever Γ is convex.

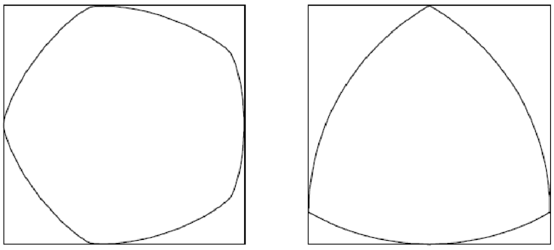
Property (a) follows from the fact $2_{a_n}=1_{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\gamma(t)-\gamma(t+\pi/n)]e^{-int}\,dt$.

**The equality $l=\pi d$ is satisfied when Γ is a circle, but surprisingly, this is not the only case. In fact, one finds that $l=\pi d$ is equivalent to $2|a1$
$|=d$. We re-parametrize γ so that for each t in $[-\pi,\pi]$
the tangent to the curve makes an angle t with the y-axis. Then, if $a_1=1$
we have**

$$\gamma'(t)=ie^{it}(1+r(t)),$$

**where r is a real-valued function which satisfies $r(t)+r(t+\pi)=0$, $\int^{\pi}0\ e^{ix}r(x)\,dx=$ 0 and $|r(t)|\le 1$. Figure 7 (a) shows the curve obtained by setting $r(t)=$ 余弦 5
t. Also,**

Figure 7 (b) consists of the curve where $r(t) = h(3t)$, with $h(s) = -1$ 和 if $-\pi \le s \le 0$ 和 and $h(s) = 1$ 和 if 0 和 $< s < \pi$. This curve (which is only piecewise of class C^1) is known as the Reuleaux triangle and is the classical example of a convex curve of constant width which is not a circle.



(a) (b)

Figure 7. Some curves with maximal length for a given diameter

Remark 5. 这源于 [7, 8] 的研究。另见第二册书的习题 2.7。在仔细核查这些论文的细节后，我认为 [8] 中省略的条件 $\int_0^\pi e^{ix} r(x)\,dx =$ 实际上是必要的。

我们在此总结[7, 8, 定理1]及其证明过程，最后给出(b)的证明。

令$R = R_\gamma$为包含Γ的最小闭圆盘的半径。易见$d \le 2R$，且对所有$n \neq 0$有较弱的不等式$|a_n| \le R$。如(a)中所述并证明，我们可得到更强的不等式$|a_n| \le \frac{d}{2}$。通过傅里叶级数与Parseval恒等式，容易看出较弱不等式取等号当且仅当$\gamma(t) = a_0 + a_n e^{int}, |a_n| = R$。本文引用的论文旨在确定上述更强不等式$|a_n| \le \frac{d}{2}$何时取等号。由于$d = 0$的情形是平凡的，我们可将函数$\gamma$按条件$a_n = 1$进行归一化，即只考虑形如

$$\Gamma(t) = e^{int} + \sum_{k \neq n} a_k e^{ikt},$$

于是到了班级

$$\mathcal{F}_n = \{\Gamma : a_n = 1, d_\Gamma = 2\}.$$

由(a)中使用的恒等式可知，$|\Gamma(t) - \Gamma(t + \frac{\pi}{n})| \equiv 2$。此外，对$\Gamma(t) - \Gamma(t + \frac{\pi}{n}) \sim \sum_k a_k(1 - e^{\frac{\pi i k}{n}}) e^{ikt}$应用帕塞瓦尔恒等式意味着对于所有$k \neq n$有$a_k(1 - e^{\frac{\pi i k}{n}}) = 0$，因此除某些$\nu \in \mathbb{Z}$对应的$k = 2n\nu$外，皆有$a_k = 0$。故而得

$$\Gamma(t) = e^{int} + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{2n\nu} e^{2n\nu it}. \tag{1}$$

当 $\gamma(t) := \Gamma(\frac{t}{n})$ 且 $g(t) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{2n\nu} e^{2\nu it}$ 时，方程（1）简化为

$$\gamma(t) = e^{it} + g(t),\ g(t + \pi) = g(t) \tag{2}$$

由于曲线γ, Γ具有相同的直径，因此对于任意$n \neq$0)确定类别$\mathcal{F}_n$ (的问题便归结为$n =$1的特殊情况。

在那些论文中的主要结果之一是

Theorem 6. *Let the function γ be absolutely continuous on $\mathbb{R}$ and* 二 *π-periodic, and let γ have its first Fourier coefficient normalized by $a_1 =$* 一 *. Then the curve corresponding to this function has a diameter $d_\gamma \geq$* 二 *and the equality holds if and only if γ' admits the representation*

$$\gamma'(t) = ie^{it}(1 + r(t)),$$

where r is a real-valued function which satisfies $r(t) + r(t+\pi) = 0$, $\int^{\pi} 0\, e^{ix} r(x)\, dx = 0$ and $|r(t)| \leq 1$ for all t.

Proof. 对于if部分，假设$\theta \in (0, \pi)$。存在$\alpha = \alpha_{t,\theta}$使得

$$\gamma(t+\theta) - \gamma(t) = \int_t^{t+\theta} ie^{ix}(1 + r(x))\, dx = -Re^{i\alpha}$$

且 $R \geq 0$。这意味着

$$\int_t^{t+\theta} (1 + r(x)) \sin(x - \alpha)\, dx = R$$

我们将证明对于所有t, θ，$R = R_{t,\theta} \leq 2$成立。令J表示$[t, t+\theta]$中使sin($x - \alpha$)为≥ 0的子集。那么

$$\begin{aligned} R &\leq \int_J (1 + r(x)) \sin(x - \alpha)\, dx \leq \int_\alpha^{\alpha+\pi} (1 + r(x)) \sin(x - \alpha)\, dx \\ &= 2 + \int_\alpha^{\alpha+\pi} r(x) \sin(x - \alpha)\, dx = 2 \end{aligned}$$

其中最后一个等式源于 r 的周期性。至此，我们完成了关于 $d_\gamma = 2$ 的证明，因为 $|\gamma(\pi) - \gamma(0)| = |\int_0^\pi ie^{ix} + ie^{ix} r(x)\, dx| = 2\pi$。

对于仅当部分，我们首先假设γ是二次可微的。令t为任意但固定的值，并设$z(x) = \gamma(t) - \gamma(t+x)$。由于通过(1)之前的分析可知$\gamma$具有形式(2)，我们得到$z(\pi) = \gamma(t) - \gamma(t+\pi) = 2e^{it}$，并且根据假设，对于任意$x$都有$|z(x)| \leq d_\gamma = 2$，那么函数$|z(x)|^2$在$x = \pi$处达到最大值。因此

$$\frac{d}{dx}|z(x)|^2 = 2\,\mathrm{Re}\Big(\overline{z(x)}\frac{dz}{dx}(x)\Big) = 0 \text{ at } x = \pi.$$

即，对所有 t，实部 $\{2e^{-it}(ie^{it} - g'(t+\pi))\} = 0$ 或实部 $\{e^{-it} g'(t))\} = 0$。令

$$e^{-it} g'(t) = ir(t),$$

我们得出 $r(t)$ 是实值的且满足 $r(t+\pi) = -r(t)$ 对于所有 t。此外，
$\int_0^\pi e^{ix} r(x)\, dx = -i \int_0^\pi g'(x)\, dx = -i[g(\pi) - g(0)] = 0$.

最后，由于函数$|z(x)|^2$在$x=\pi$处达到其最大值，

$$\frac{d^2}{dx^2}|z(x)|^2 = 2\,\mathrm{Re}\Big(\Big|\frac{dz}{dx}(x)\Big|^2 + \overline{z(x)}\frac{d^2 z}{dx^2}(x)\Big) \leq 0 \text{ at } x = \pi.$$

即对于所有 t，$-2(1-r^2(t)) \leq 0$，等价于 $|r(t)| \leq 1$。 □

Proof for (b) $l \leq \pi d$. 该证明摘录自{v*}。

令 $\gamma(t) = x(y) + iy(t)$，采用复数记号。对任意 $\theta \in [0, \pi]$，函数 $f_\theta(t) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}\gamma(t))$ 在某个长度至多为 d 的区间内取值。由凸性可知，该函数在圆上有两个单调区间（可将 $[-\pi, \pi]$ 视作端点黏合而成的圆）（可利用詹森不等式证明中的支撑线概念严格论证此结论）。因此，其全变差至多为 $2d$。全变差即导函数绝对值的积分，前提是选择合理的（绝对连续）参数化 γ：例如弧长参数化即可满足。故有，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\gamma'(t))|\, dt \leq 2d$$

对两边关于θ积分并交换积分次序（根据Fubini-Tonelli定理），可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} |\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\gamma'(t))|\, d\theta dt \leq 2\pi d.$$

注意到对于任意 $\zeta \in \mathbb{C}$，我们有 $\int_0^\pi |\mathrm{Re}(e^{i\theta}\zeta)|\, d\theta = 2|\zeta|$，所以上述不等式变为

$$2l = \int_{-\pi}^{\pi} 2|\gamma'(t)|\, dt \leq 2\pi d.$$

□

二. Here we present an estimate of Weyl which leads to some interesting results.

(a) Let $S_N = \sum_{n=一}^{N} e^{二\pi i f(n)}$. Show that for $H \leq N$, one has

$$|S_N|^2 \leq c\frac{N}{H}\sum_{h=0}^{H}\Big|\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i (f(n+h)-f(n))}\Big|,$$

for some constant $c >$ 零 independent of N, H, and f.

(b) Use this estimate to show that the sequence $\langle n2\gamma\rangle$ is equidistributed in $[0, 1)$ whenever γ is irrational.

(c) More generally, show that if $\{\xi_n\}$ is a sequence of real numbers so that for all positive integers h the difference $\langle \xi_{n+h} - \xi_n \rangle$ is equidistributed in $[0, 1)$
, then $\langle \xi_n \rangle$ is also equidistributed in $[0, 1)$.

(d) Suppose that $P(x) = c_k x^k + \cdots + c_0$ is a polynomial with real coefficients, where at least one of c_1
$, \cdots, c_k$ is irrational. Then the sequence $\langle P(n) \rangle$ is equidistributed in $[0, 1)$. y落入区间的概率

***Remark* 7.** (a)是van der Corput不等式的一种特殊形式。(c)被称为van der Corput差分定理。

Proof. (作为提示，我们考虑$a_n = e^{2\pi i f(n)}$若$1 \leq n \leq N$而对其他指标为零的情况。那么根据柯西-施瓦茨不等式，我们可以得到范·德·科普特不等式的一个（广义的）形式如下

$$\begin{aligned}
H^2 \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\Big|^2 &= \Big|\sum_{k=1}^{H}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n+k}\Big|^2 = \Big|\sum_{n=1-H}^{N-1}\sum_{k=1}^{H} a_{n+k}\Big|^2 \leq (N+H-1)\sum_{n}\Big|\sum_{k=1}^{H} a_{n+k}\Big|^2 \\
&= (N+H-1)\sum_{n}\sum_{k=1}^{H}\sum_{j=1}^{H} a_{n+k}\overline{a_{n+j}} = (N+H-1)\sum_{k=1}^{H}\sum_{j=1}^{H}\sum_{n} a_{n+k}\overline{a_{n+j}} \\
&= (N+H-1)\Big\{\sum_{1\leq j\leq k\leq H}\sum_{n} a_{n+k}\overline{a_{n+j}} + \sum_{1\leq k<j\leq H}\sum_{n} a_{n+k}\overline{a_{n+j}}\Big\} \\
&= (N+H-1)\Big\{H\sum_{n}|a_n|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq H}\sum_{n} a_{n+k-j}\overline{a_n} + \sum_{1\leq k<j\leq H}\sum_{n} a_n\overline{a_{n+j-k}}\Big\} \\
&= (N+H-1)\Big\{H\sum_{n}|a_n|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{1\leq j<k\leq H}\sum_{n} a_{n+k-j}\overline{a_n}\Big\} \\
&= (N+H-1)\Big\{H\sum_{n}|a_n|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{H-1}\sum_{1\leq h\leq H-j}\sum_{n} a_{n+h}\overline{a_n}\Big\} \\
&= (N+H-1)\Big\{H\sum_{n}|a_n|^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\sum_{n} a_{n+h}\overline{a_n}\Big\}
\end{aligned}$$

具体来说，

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)}\Big|^2 \leq \frac{N+H-1}{H} 2\sum_{h=0}^{H-1}\Big(1-\frac{h}{H}\Big)\Big|\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i(f(n+h)-f(n))}\Big| \leq \frac{2N}{H} 2\sum_{h=0}^{H-1}\Big|\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i(f(n+h)-f(n))}\Big|.$$

(b) 设$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。注意在(a)中对于$f(n) = kn^2\gamma$，$f(n+h) - f(n) = k(2nh\gamma + h^2\gamma)$。由于$\langle n\gamma \rangle$在$[0, 1)$中等分布，因此对每个$H \in \mathbb{N}$我们有

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k n^2\gamma}\Big|^2 &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{c}{H}\sum_{h=0}^{H}\frac{1}{N}\Big|\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i 2nkh\gamma}\Big| \\
&= \frac{c}{H} + \limsup_{N\to\infty}\sum_{h=1}^{H}\frac{c(N-h)}{N}\frac{1}{N-h}\Big|\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i(2kh)n\gamma}\Big| = \frac{c}{H}.
\end{aligned}$$

所以$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ik\langle n^2\gamma\rangle} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikn^2\gamma} = 0$。由于$k$是任意的，根据Weyl判别法可知$\langle n^2\gamma\rangle$是等分布的。

(c) 对(b)的证明稍作修改。

(d) 首先我们考虑情形 $c_1 \in \mathbb{Q}^c$ 与 $c_2, \cdots c_k \in \mathbb{Q}$。记 $P(x) = Q(x)+c_1x+c_0$。令 D 为 $c_2, \cdots c_k$ 各分母的最小公因子。则对于 $k \geq 0$ 与 $d \geq 1$，我们有 $\langle Q(Dk+d)\rangle = \langle Q(d)\rangle$。因此，对于每个 $s \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi isP(n)} &= \frac{1}{N}\sum_{n=[\frac{N}{D}]D+1}^{N} e^{2\pi isP(n)} + \frac{1}{N}\sum_{d=1}^{D}\sum_{k=0}^{[\frac{N}{D}]-1} e^{2\pi is(Q(Dk+d)+c_1(Dk+d)+c_0)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=[\frac{N}{D}]D+1}^{N} e^{2\pi isP(n)} + \Big(\sum_{d=1}^{D} e^{2\pi is(Q(d)+c_1d+c_0)}\Big)\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[\frac{N}{D}]-1} e^{2\pi isDc_1k}\Big)\end{aligned}$$

由于$c_1 \notin \mathbb{Q}$，$\langle c_1k\rangle$是等分布的，因此上述不等式的第二项在$N \to \infty$时趋于零。注意到第一项有$\frac{D}{N}$的上界，该项在$N \to \infty$时也趋于零。所以$\langle P(n)\rangle$在[0,1)上是等分布的。

一般情况下，我们采用归纳法证明。令 $k \geq q \geq$ 为满足 $c_q \in \mathbb{Q}^c$ 的最大下标。此时可证断言对 $k =$ 成立。现假设断言对 $k = m$ 成立，考虑情形 $k = m +$ ：对每个$h \in \mathbb{N}$，存在多项式 Q_h 使得 $P(n+h) - P(n) = Q_h(n)$，且该多项式中具有无理系数的指标均为 $\leq m$。故由 Wey l 准则可知，对每个 $s \in \mathbb{Z}\setminus\{\ \}$

$$\frac{1}{N-h}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi isQ_h(n)} \to 0$$

因此，根据(a)，对于每个$H \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{N\to\infty} |\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi isP(n)}|^2 \leq \frac{c}{H} + \limsup_{N\to\infty}\sum_{h=1}^{H}\frac{c(N-h)}{N}\frac{1}{N-h}\Big|\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi isQ_h(n)}\Big| = \frac{c}{H}.$$

因此极限$_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi is\langle P(n)\rangle} =$ 极限$_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi isP(n)} = 0$。由于$s$是任意的，根据外尔判别法可知$\langle P(n)\rangle$在[0, 1)中等分布。

□

3. **If $\sigma > 0$ is not an integer and $a \neq 0$, then $\langle an^\sigma\rangle$ is equidistributed in $[0, 1)$.**

在呈现取自[4, Theorem 1.3.5]的证明之前，我们基于[4, Exercise 1.2.23]的启发，给出针对 $\sigma \in$ (1,2)的证明，该证明采用了与习题8相似的思路。详见注记3。这反映了韦伊估计（范德科普技巧）在问题2中对一致分布序列理论的重要性。

A proof for the special case $\sigma \in (1,2)$. 根据外尔准则，只需证明对所有$k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k a n^{\sigma}} \to 0 \quad \text{as} \quad N \to \infty.$$

我们回忆练习3.16(d)中证明的范德科普特定理。

给定一个实值函数 $f(u)$ 和数 $a < b$，我们定义 $F(u) = e^{2\pi i f(u)}$，

$$I(F;a,b) = \int_a^b F(u)\,du, \ \ S(F;a,b) = \sum_{a<n\le b} F(n), \ \ D(F;a,b) = I(F;a,b) - S(F;a,b).$$

Lemma 8. *(i) If f has a monotone derivative f', and if there is a $\lambda > 0$ such that $f' \ge \lambda$ or $f' \le -\lambda$ in (a,b), then $|I(F;\ a,b)| < \lambda^{-1}$.*

(ii) If $f'' \ge \rho > 0$ or $f'' \le -\rho < 0$, then $|I(F;a,b)| \le 4\rho^{-\frac{1}{2}}$.

Lemma 9. *If f' is monotone and $|f'| \le$ 土二 in (a,b), then*

$$|D(F;a,b)| \le A$$

where A is an absolute constant independent of a,b. In fact, we have $A = \sum_{n=}^{\infty}$ 二 $\pi n(n-\frac{1}{2})$ + 二.

Lemma 10. *If $f'' \ge \rho > 0$ or $f'' \le -\rho < 0$, then*

$$|S(F;a,b)| \le \Big(|f'(b) - f'(a)| + 2\Big)(4\rho^{-\frac{1}{2}} + A).$$

不失一般性，我们假设 $a > 0$ 且 $\sigma \in (1,\infty) \setminus \mathbb{Z}$。函数 $f(u) = kau^{\sigma}$ 具有递增的导数 $f'(u) = ka\sigma u^{\sigma-1}$。在后续估计中，$C$ 表示仅依赖于 k,a,σ 的不同一般常数。

现在我们先处理情形$\sigma \in (1,2)$，对于每个$j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，考虑$[2^j,2^{j+1}]$上的$f''(u) = ka\sigma(\sigma-1)u^{\sigma-2} \ge C2^{j(\sigma-2)}$。直接应用引理10可知，对于每个$j \ge 0$

$$|S(F;2^j,2^{j+1})| \le \{C2^{j(\sigma-1)} + 2\}\{C2^{j(2-\sigma)/2} + A\} \le C2^{j\sigma/2}.$$

类似地，$|S(F;\ 2^n,N)| \le C2^{n\sigma/2}$，如果 $2^n < N \le 2^{n+1}$，因此

$$|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i k a n^{\sigma}}| \le 1 + |S(F;1,2)| + |S(F;2,4)| + \cdots + |S(F;2^n,N)|$$

$$\le 1 + C(1 + 2^{\sigma/2} + \cdots + 2^{n\sigma/2}) \le C2^{n\sigma/2} < CN^{\sigma/2}.$$

由于$\sigma \in (1,2)$，当$N \to \infty$时$|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i k a n^{\sigma}}| \le CN^{\sigma/2-1} \to$趋向于0。 □

A proof for all $\sigma \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$. 这是下述定理的一个特例。

Theorem 11. *Let $k \in \mathbb{N}$, and let $f(x)$ be a function defined for $x \geq 1$, which is k times differentiable for $x \geq x_0$. If $f^{(k)}(x)$ tends monotonically to zero as $x \to \infty$ and if* 极限
$_{x\to\infty} x|f^{(k)}(x)| = \infty$*, then $\langle f(n) \rangle$ is equidistributed in* [0, 1).

在我们的案例中，$f(x) = ax^\sigma$ 和 $k = [\sigma]$。

Proof for Theorem 11. 我们采用归纳论证，暂时假设对 $k =$ 成立。

现在假设对于 $k = m$ 成立，并考虑情形 $k = m + 1$. 对每个 $h \in \mathbb{N}$，我们设
$g_h(x) = f(x+h) - f(x)$. 那么 $g_h^{(m)}(x) = f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x) = \int_x^{x+h} f^{(m+1)}(t)\,dt$ 是单调的
，因为 $f^{(m+1)}$ 如此. 同时，$g_h^{(m)}$ 衰减至 0，因为 $f^{(m+1)}$ 亦然.

注意到对于每个 x，某些 $\theta_x \in$ 在 [0,1] 区间内存在对应的 $x|g_h^{(m)}(x)| = x|f^{(m+1)}(x+\theta_x h)|$。因此

$$\liminf_{x\to\infty} x|g_h^{(m)}(x)| = \liminf_{x\to\infty} (x+\theta_x h)|f^{(m+1)}(x+\theta_x h)| \frac{x}{x+\theta_x h} = \infty.$$

根据归纳假设，对于每个$h \in \mathbb{N}$，$\langle g_h(n) \rangle$在[0,1)上等分布。因此，由问题2(c)可知，$\langle f(n) \rangle$在[0,1)上等分布。

现在我们回顾以下由费耶尔提出的k =1的离散类比：

Theorem 12 (费耶定理：1 *in* n. *If* $\lim_{n\to\infty} \Delta f(n) = 0$ *and* lim
$_{n\to\infty} n|\Delta f(n)| = \infty$*, then $\langle f(n) \rangle$ is equidistributed in* [0, 1).

现在，对于情况k = 1，$\Delta f(n)$根据中值定理满足费耶定理的条件，至少对于充分大的n是如此。有限的例外项不会影响序列的一致分布。

Proof for Fejér's Theorem. 首先我们回顾一个基本不等式（考虑泰勒展开），对于每个
$u, v \in \mathbb{R}$,

$$|e^{2\pi iu} - e^{2\pi iv} - 2\pi i(u-v)e^{2\pi iv}| = |e^{2\pi i(u-v)} - 1 - 2\pi i(u-v)| = 4\pi^2 \left| \int_0^{u-v} (u-v-w)e^{2\pi iw}\,dw \right|$$
$$\leq 4\pi^2 \int_0^{u-v} (u-v-w)\,dw = 2\pi^2(u-v)^2$$

现在设 $u = sf(n+1)$ 和 $v = sf(n)$，其中 $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，代入上述不等式，我们得到

$$\left| \frac{e^{2\pi isf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi isf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ise^{2\pi isf(n)} \right| \leq 2\pi^2 s^2 |\Delta f(n)| \quad \forall n \geq 1.$$

因此

$$\left| \frac{e^{2\pi isf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi isf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ise^{2\pi isf(n)} \right| \leq \left| \frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)} \right| + 2\pi^2 s^2 |\Delta f(n)| \quad \forall n \geq 1.$$

然后

$$\Big|2\pi is\sum_{n=1}^{N-1}e^{2\pi isf(n)}\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{N-1}\Big(2\pi ise^{2\pi isf(n)} - \frac{e^{2\pi isf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi isf(n)}}{\Delta f(n)}\Big) + \frac{e^{2\pi isf(N)}}{\Delta f(N)} - \frac{e^{2\pi isf(1)}}{\Delta f(1)}\Big|$$

$$\le \sum_{n=1}^{N-1}\Big|\frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)}\Big| + \sum_{n=1}^{N-1}2\pi^2 s^2|\Delta f(n)| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|}$$

由$\Delta f(n)$的单调性，我们得到

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}e^{2\pi isf(n)}\Big| \le \frac{1}{\pi|s|}\Big(\frac{1}{N|\Delta f(N)|} + \frac{1}{N|\Delta f(1)|}\Big) + \frac{\pi|s|}{N}\sum_{n=1}^{N-1}|\Delta f(n)|,$$

随着$N \to \infty$而趋于零。由于s是任意的，$\langle f(n)\rangle$在[0, 1)上均匀分布。 □

□

□

Remark 13. 对于此问题是否存在不借助抽象定理11的直接证明?

Remark 14. 该定理由保罗·奇拉格首次证明 ¨《论模1非整数正幂的均匀分布》（Acta Szeged 5, 13-18 (1930)）。

四、
An elementary construction of a continuous but nowhere differentiable function is obtained by "piling up singularities," as follows.

On $[-1, 1]$ consider the function源音频的比特率

$$\varphi(x) = |x|$$

and extend φ to $\mathbb{R}$ by requiring it to be periodic of period 2. Clearly, φ is continuous on $\mathbb{R}$ and $|\varphi(x)| \le$ 一 for all x so the function f defined by

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^n\varphi(4^n x)$$

is continuous on $\mathbb{R}$.

(a) Fix $x_0 \in \mathbb{R}$. For every positive integer m, let $\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$ where the sign is chosen so that no integer lies in between $4^m x_0$ and $4^m(x_0+\delta_m)$. Consider the quotient

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x_0+\delta_m)) - \varphi(4^n x_0)}{\delta_m}.$$

Prove that if $n > m$, then $\gamma_n = 0$, and for $0 \le n \le m$ one has $|\gamma_n| \le 4^n$ with $|\gamma_m| = 4^m$.

(b) From the above observations prove the estimate

$$\Big|\frac{f(x_0+\delta_m) - f(x_0)}{\delta_m}\Big| \ge \frac{1}{2}(3^m + 1),$$

and conclude that f is not differentiable at $x_{零}$.

Proof. 参见[11，定理7.18]。利用贝尔纲定理可以证明，无处连续函数在拓扑意义上数量众多，即在sup-范数拓扑下构成第二范畴集，详见第四卷第四章1.2节。

□

5. **Let f be a Riemann integrable function on the interval** 他可能想 $[-\pi,\pi]$
. **We define the generalized delayed means of the Fourier series of f by**

$$\sigma_{N,K}=\frac{S_N+\cdots+S_{N+K-1}}{K}.$$

Note that in particular

$$\sigma_{0,N}=\sigma_N,\sigma_{N,1}=S_N \text{ and } \sigma_{N,N}=\Delta_N,$$

where Δ_N are the specific delayed means used in Section 3.

(a) Show that

$$\sigma_{N,K}=\frac{1}{K}((N+K)\sigma_{N+K}-N\sigma_N),$$

and

$$\sigma_{N,K}=S_N+\sum_{N+1\le|\nu|\le N+K-1}\Big(1-\frac{|\nu|-N}{K}\Big)\widehat{f}(\nu)e^{i\nu\theta}.$$

From this last expression for $\sigma_{N,K}$ conclude that

$$|\sigma_{N,K}-S_M|\le\sum_{N+1\le|\nu|\le N+K-1}|\widehat{f}(\nu)|$$

for all $N\le M<N+K$.

(b) Use one of the above formulas and Fejér's theorem to show that with $N=kn$ and $K=n$, then

$$\sigma_{kn,n}(f)(\theta)\to f(\theta) \text{ as } n\to\infty$$

whenever f is continuous at θ, and also

$$\sigma_{kn,n}(f)(\theta)\to\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2} \text{ as } n\to\infty$$

at a jump discontinuity (refer to the preceding chapters and their exercises for the appropriate definitions and results). In the case when f is continuous on $[-\pi,\pi]$, show that $\sigma_{kn,n}(f)\to f$ uniformly as $n\to\infty$.

(c) Using part (a), show that if $\widehat{f}(\nu)=O(一/|\nu|)$ and $kn\le m<(k+一)n$, we get

$$|\sigma_{kn,n}-S_m|\le\frac{C}{k}$$

for some constant $C >$ 零.

(d) Suppose that $\widehat{f}(\nu) = O(1/|\nu|)$. Prove that if f is continuous at θ then

$$S_N(f)(\theta) \to f(\theta) \text{ as } N \to \infty,$$

and if f has a jump discontinuity at θ then

$$S_N(f)(\theta) \to \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \text{ as } N \to \infty.$$

Also, show that if f is continuous on $[-\pi, \pi]$, then $S_N(f) \to f$ uniformly.

(e) The above arguments show that if $\sum c_n$ is Cesáro summable to s and $c_n = O($一$/n)$,
then $\sum c_n$ converges to s. This is a weak version of Littlewood's theorem (Problem 3, Chapter 2).

Remark 15. 关于(e)的另一个证明可在我的练习2.14(d)中找到。

Proof. (a) 很简单。（对于 S_M 部分，可以通过将第二级数中的某些项移到 S_N 来重写第二个恒等式，这就是那里有个 1 的原因）。

(b) 由 Fejér 定理及 (a) 中的第一个恒等式得证。(c)(d) 是 (a)(b) 的
直接推论。(e) 当 $\widehat{f}(\nu)e^{i\nu\theta}$ 替换为 c_ν 时，所有论证依然成立。

□

6. **Dirichlet's theorem states that the Fourier series of a real continuous periodic**
豁免检定
function f which has only a finite number of relative maxima and minima converges everywhere to f (and uniformly).

Prove this theorem by showing that such a function satisfies $\widehat{f}(n) = O($一$/|n|)$.

[Hint: Argue as in Exercise 17, Chapter 3; then use conclusion (d) in Problem 5 above, or Problem 2.3, the harder Big-O theorem of Littlewood.]

Proof. 关键观察如下：

当 $\{x_1, x_2, \cdots x_k\}$ 是 $(-\pi, \pi)$ 内部的相对极值点时。如果 x_1 是相对极大值，则 f 在 $(-\pi, x_1)$ $\cup(x_2, x_3)\cup\cdots$ 上递增，在 $(x_1, x_2)\cup(x_3, x_4)\cup\cdots$ 上递减。类似地，若 x_1 是相对极小值，则情况相反。

通过使用如练习3.17所示的分部积分法，可得$\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$。 □

References

[1] 班德尔，凯瑟琳。等周不等式及其应用。第7卷。皮特曼出版社，1980年。

[2] 科恩菲尔德、伊萨克·P，谢尔盖·V·福明，雅科夫·格里戈里耶维奇·西奈。《遍历理论》第245卷。施普林格出版社，1982年。

[3] 加德纳·理查德。《布伦-闵可夫斯基不等式》。《美国数学会通报》39卷3期（2002年）：355-405页。

[4] Kuipers, Lauwerens and Niederreiter, Harald. 序列的一致分布. John Wiley & Sons, Inc., 1974.

[5] 奥瑟曼，罗伯特。 等周不等式。 美国数学会通报 84.6 (1978): 1182-1238.

[6] 彼得森，卡尔·E.《遍历理论》. 第2卷. 剑桥大学出版社，1989年.

[7] 阿尔伯特·普夫吕格尔。论平面曲线的直径与傅里叶系数。《应用数学与物理杂志》ZAMP 30.2 (1979): 305-314。

[8] 普夫卢格，阿尔伯特。论平面曲线的直径与傅里叶系数。《雅诺什·波尔约数学会讨论会：函数、级数、算子》，第35卷：957-965页，1983年。

[9] 波利亚·乔治与塞格·加博尔。《数学物理中的等周不等式》。第27卷。普林斯顿大学出版社，1951年。

[10] Pollicott, Mark 与 Michiko Yuri.《动力系统与遍历理论》第40卷. 剑桥大学出版社, 1998.

[11] 沃尔特·鲁丁，《数学分析原理》（第3版），1976年。

[[12] 施奈德，罗尔夫。凸体：Brunn-Minkowski理论。第151卷。剑桥大学出版社，2014。

[13] 沃尔特斯, 彼得. 《遍历理论导论》. 第79卷. 施普林格出版社, 1982.