《傅里叶分析》，斯坦因与沙卡奇著

第二章 傅里叶级数的基本性质

黄永祥*

2018年03月12日

Abstract

符号：$\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$。请注意，我们在练习14中提供了关于切萨罗和的Big-O陶伯定理证明，这比阿贝尔和的证明要简单得多。

Exercises

1. 微不足道。

2. 简单。

3. 容易看出，拨弦问题中初始条件 f 的傅里叶级数通过魏尔斯特拉斯 M 判别法绝对且一致收敛。因此唯一性定理意味着该级数处处等于 f（参见第17页）。

4. 通过计算定义在$[0, \pi]$上、由$f(x) = x(\pi - x)$给出的2π-周期奇函数的傅里叶系数，并运用收敛性与唯一性定理，可以证明

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 1, \, \mathrm{odd}} \frac{\sin kx}{k^3}.$$

需要注意的是，该结果与帕塞瓦尔恒等式可用于计算黎曼ζ函数$\zeta(z)$在$z =$6处的取值。参见习题3.8(b)。

5. 如同练习4所示，可以证明定义在$[-\pi, \pi]$上的帐篷映射$f(x) = (1 - |x|/\delta)^{+}$等于其傅里叶级数，即：

$$f() = \frac{\delta}{2\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\delta}{n^2 \pi \delta} \cos nx.$$

*國立台灣大學數學系。電子郵件：d04221001@ntu.edu.tw

6. 类似地，通过考虑 $f(x) = |x$ 的傅里叶级数，可以证明以下恒等式

$$\sum_{n\geq 1,\,\mathrm{odd}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7. 离散求和部分公式及狄利克雷判别法与阿贝尔判别法的证明均为标准内容。

8. **Verify that $\frac{1}{2i}\sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{n}$ is the Fourier series of the 2π-periodic sawtooth function illustrated in Figure 6, defined by $f(0) = 0$, $f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ if $-\pi < x < 0$, and $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ if $0 < x < \pi$. Note that this function is not continuous. Show that nevertheless, the series converges for every x (by which we mean, as usual, that the symmetric partial sums of the series converge). In particular, the value of the series at the origin, namely 0, is the average of the values of $f(x)$ as x approaches the origin from the left and the right.**

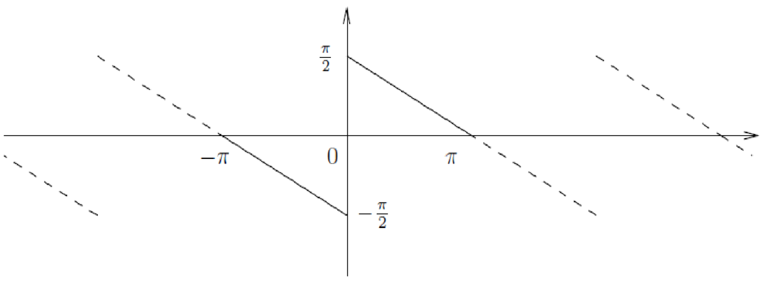


Figure 6. The sawtooth function

Proof. 当 $n \neq 0$ 且 $\hat{f}(0) = 0$ 时，计算 $\hat{f}(n) = \frac{1}{n}$ 很容易。随后我们可以应用阿贝尔-狄利克雷判别法证明该级数对任意 $x \neq 0$ 均收敛。需注意当 $x = 0$ 时，对称部分和始终为零。

□

Remark . 计算数列极限有两种方法，参见问题3及其备注。另外参考问题3.1及其备注。

9. **Let $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ be the characteristic function of the interval $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$.**

(a) **Show that the Fourier series of f is given by**

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n\neq 0} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx}.$$

(b) **Show that if $a \neq -\pi$ or $b \neq \pi$ and $a \neq b$, then the Fourier series does not converge absolutely for any x.**

(c) However, prove that the Fourier series converges at every point x. What happens if $a = -\pi$ and $b = \pi$?

Proof. ((a))是标准的，我们将其省略。(b) 标准计算表明

$$\sum_{n\neq 0} \left|\frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx}\right| = \frac{2}{\pi} \sum_{n>0} \left|\frac{\sin(n\frac{b-a}{2})}{n}\right|,$$

根据假设，存在 $\theta_0 := \frac{b-a}{2} < \pi$。因此我们可以找到一个 $c > 0$，使得 $\pi - \theta_0 > 2\sin^{-1} c$。注意，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们可以找到一个 $n_k \in \mathbb{N}$，使得 $n_k\theta_0 \in ((k-1)\pi + \sin^{-1} c, k\pi - \sin^{-1} c) =: I_k$，因为如果 $m\theta_0 \in ((k-1)\pi - \sin^{-1} c, (k-1)\pi + \sin^{-1} c)$，则 $(m+1)\theta_0 \in I_k$；而如果 $m\theta_0 \in (k\pi - \sin^{-1} c, k\pi + \sin^{-1} c)$，则 $(m-1)\theta_0 \in I_k$。（这就是为什么我们在一开始取 $2\sin^{-1} c$ 而不是 $\sin^{-1} c$。）

还需注意：(1) $I_k \cap I_j = \emptyset$，因此当 $k \neq j$ 时 $n_k \neq n_j$；(2) 对所有 k 满足 $|\sin n_k\theta_0| \geq c$；(3) $n_k \leq \frac{k\pi}{\theta_0}$。由此，鉴于对所有 x 均有

$$\sum_{n>0} \frac{|\sin(n\theta_0)|}{n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(n_k\theta_0)|}{n_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{\frac{\pi k}{\theta_0}} = \frac{\theta_0}{c\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

(注意该级数是$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\neq 0} \frac{e^{in(x-a)} - e^{in(x-b)}}{n}$。若 $x \notin \{a, b\}$，则根据阿贝尔-狄利克雷判别法，$\sum_{n\neq 0} \frac{e^{in(x-a)}}{n}$ 与 $\sum_{n\neq 0} \frac{e^{in(x-b)}}{n}$ 均收敛。若 $x = a$，则“对称”部分和为$\frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\leq N} \frac{-e^{in(a-b)}}{n}$，由于 $a \neq b$，根据阿贝尔-狄利克雷判别法可知当 $N \to \infty$ 时该部分和收敛。类似论证可应用于 $x = b$ 的情形。

最后，在此情况下$a = -\pi$和$b = \pi$，级数系数为0。 □

10. 当f更光滑时，$\hat{f}$衰减越快。（利用黎曼-勒贝格引理可将大O记号改进为小o记号，参见习题3.13）。

11. $L^1(\mathbb{T})$ 的收敛性蕴含 f_k 的一致收敛性，即 $C(\mathbb{Z})$)

12. 收敛级数的证明是 Ces{v*} 可求和的，这是标准结论。

13. {v六十一} {v六十二} {v六十三} {v六十四}

(a) Show that $\sum c_n = \sigma$ implies that $\sum c_n = \sigma$ (Abel).

(b) However, show that there exist series which are Abel summable, but that do not converge.

(c) Argue similarly to prove that if a series $\sum c_n = \sigma$ (Cesàro), then $\sum c_n = \sigma$ (Abel)

[Hint: Note that

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n=1} n\sigma_n r^n$$

and assume $\sigma =$ 零.]

(d) Give an example of a series that is Abel summable but not Cesàro summable.

[Hint: Try $c_n = (-1)^{n-1} n$, which is highly oscillated. Note that if $\{c_n\}$ is Cesàro summable, then $\frac{c_n}{n}$ tends to 0.]

Proof. 尽管 (a) 是练习 12 和 (c) 的推论，但我们在此给出一个直接证明。

可假设 $\sigma = 0$。注意对于每个 $0 < r < 1$ 和 $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n = \sum_{n=1}^{N} (s_n - s_{n-1}) r^n = (1-r) \sum_{j=1}^{N} s_j r^j + s_N r^{N+1}$$

经过 $N \to \infty$，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r) \sum_{j=1}^{\infty} s_j r^j$$

给定 $\epsilon > 0$。由于 $\sigma = 0$，右侧的级数绝对收敛，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r) \sum_{j=1}^{M} s_j r^j + (1-r) \sum_{M+1}^{\infty} s_j r^j,$$

其中M被选择以满足所有$j > M$的$|s_j| < \epsilon$。注意第二项的绝对值小于$\epsilon r^{M+1} < \epsilon$，且当$r$接近1时，第一项小于$\epsilon$。

(b) 示例为$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$，该序列不收敛，但在阿贝尔意义下收敛于$\frac{1}{2}$。

(c) 可假定 $\sigma = 0$。注意到对于每个 $0 < r < 1$ 与 $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} c_n r^n &= \sum_{n=1}^{N} (s_n - s_{n-1}) r^n = \sum_{n=1}^{N} (n\sigma_n - 2(n-1)\sigma_{n-1} + (n-2)\sigma_{n-2}) r^n \\ &= (1-r)^2 \sum_{n=1}^{N} n\sigma_n r^n - N\sigma_N r^{N+2} + (2N\sigma_N - (N-1)\sigma_{N-1}) r^{N+1}\end{aligned}$$

通过 $N \to \infty$，我们得到（根据洛必达法则）

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r)^2 \sum_{j=1}^{\infty} j\sigma_j r^j$$

给定$\epsilon > 0$。由于$\sigma = 0$，右侧级数绝对收敛，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r)^2 \sum_{j=1}^{M} j\sigma_j r^j + (1-r)^2 \sum_{M+1}^{\infty} j\sigma_j r^j,$$

其中 M 的选择需满足对所有 $j > M$ 均有 $|\sigma_j| < \epsilon$。注意第二项的绝对值小于 $\epsilon r^{M+1} < \epsilon$，且第一项在 r 接近 1 时小于 ϵ。

(d) 标准做法是证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}x^n = \frac{x}{(1+x)^2}$。我们还注意到，如果 $\{c_n\}$ 是 Cesáro 可和的，那么我们会得到一个矛盾：

$$(-1)^n = \frac{c_n}{n} = \frac{n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}}{n} = \sigma_n - \sigma_{n-1} + \frac{\sigma_{n-1}}{n} \to 0, \text{ as } n \to \infty.$$

□

Exercise 13 says that "Convergent $\Rightarrow_{\not\Leftarrow}$ Cesàro summable $\Rightarrow_{\not\Leftarrow}$ Abel summable."

14. This exercise deals with a theorem of Tauber which says that under an additional condition on c_n, the above arrows can be reversed.

(a) If $\sum c_n = \sigma$ (Cesàro) and $c_n = o(\text{一}/n)$, then $\sum c_n = \sigma$.
(b) The above statement holds if we replace Cesàro summable by Abel summable. [Hint: Estimate the difference between $\sum_{n=1}^{N} c_n$ and $\sum_{n=1}^{N} c_n r^n$ where $r = \text{一} - \frac{1}{N}$.]
(c)-(d) are from Rudin [4, Exercise 3.14]. Recall that $s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j$ and $\sigma_n = \frac{s_1+\cdots+s_n}{n}$.

(c) Can it 上极限 $_{N\to\infty} s_N = \infty$ but $\sum c_j = 0$ (Cesàro)?

(d) Prove (a) under a weaker assumption $c_n = O(\text{一}/n)$. Also see Problem 4.5.

[Hint: Say, $|nc_n| \leq M$. If $m < n$, then

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m}\sum_{j=m+1}^{n}(s_n - s_j).$$

For these i,

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

Fix $\epsilon > 0$ and associate with each n the integer m that satisfies

$$m \leq \frac{n-\epsilon}{1+\epsilon} < m+1.$$

Then $(m+1)/(n-m) \leq 1/\epsilon$ and $|s_n - s_i| < M\epsilon$. Hence

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - \sigma| \leq M\epsilon.$$

Since ϵ is arbitrary, 极限 $s_n = \sigma$.]

(e) We will also prove (b) under a weaker assumption $c_n = O(\text{一}/n)$ in Problem 3.

Proof. (a) $n(s_n - \sigma_n) = ns_n - \sum_{j=1}^{n} s_j = ns_n - \sum_{j=1}^{n}(j-(j-1))s_j = \sum_{j=1}^{n}(j-1)s_j - \sum_{j=1}^{n-1} js_j = \sum_{k=1}^{n-1} k(s_{k+1}-s_k) = \sum_{k=1}^{n-1} kc_k$。因此，给定 $\epsilon > 0$，则存在 N_1 使得当 $k > N_1$ 时有 $|ka_k| < \epsilon$。故存在某个 $N_2(\epsilon)$ 使得

$$|s_n - \sigma_n| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} kc_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|kc_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-1}|kc_k| \leq 2\epsilon,$$

每当$n > N_2(\epsilon)$。

(b) 给定 $\epsilon > 0$，则存在 $N = N(\epsilon)$ 使得当 $n > N$ 时总有 $n|c_n| \leq \epsilon$。将 $r_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1^-$ 视为 $n \to \infty$。注意 $\sup_{n\in\mathbb{N}} n|c_n| =: M < \infty$，因此当 n 充分大时,

$$\begin{aligned}|s_n - A_{r_n}| &\leq \sum_{j=1}^{N}|c_j|(1-r_n^j) + \sum_{j=N+1}^{\infty} r_n^j|c_j| \leq \sum_{j=1}^{n}|c_j|(1-(1-\frac{1}{n})^j) + \epsilon\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{r_n^j}{j} \\ &\leq \sum_{j=1}^{N}|c_j|\frac{j}{n} + \frac{\epsilon}{n}\frac{(1-\frac{1}{n})^{N+1}}{1-(1-\frac{1}{n})} \leq \frac{MN}{n} + \epsilon \leq 2\epsilon.\end{aligned}$$

(c) 一个例子是$s_n = 2^{-n}$ 如果$n \notin 2^{\mathbb{N}}$ 且$s_{2^m} = m$ 当且仅当$m \in \mathbb{N}$。那么上极限$_{n\to\infty} s_n = \infty$。然而$0 \leq \sigma_n < 2^{-m}(\frac{(m+1)m}{2} + 2)$ 如果 $2^m \leq n < 2^{m+1}$。因此$\sigma_n \to 0$。

(d) 我们首先证明一个类似于提示的恒等式：对于 $n > m$,

$$\begin{aligned}&n\sigma_n - m\sigma_m - \sum_{j=m+1}^{n}(n-j+1)a_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}(n-j+1)a_j - \sum_{j=1}^{m}(m-j+1)a_j - \sum_{j=m+1}^{n}(n-j+1)a_j \\ &= (n-m)\sum_{j=1}^{m} a_j = (n-m)s_m\end{aligned}$$

那么 $s_m - \sigma_m = \frac{n}{n-m}\Big(\sigma_n - \sigma_m\Big) - \frac{1}{n-m}\sum_{j=m+1}^{n}(n-j+1)a_j =: I - II$。

现在通过积分检验来估计II，即（其中$\sup_{n\in\mathbb{N}} n|c_n| =: M < \infty$）

$$\begin{aligned}|II| &\leq \frac{M}{n-m}\sum_{j=m+1}^{n}(n+1-j)\frac{1}{j} = \frac{M(n+1)}{n-m}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{M(n+1)}{n-m}\int_m^n \frac{dt}{t} - M.\end{aligned}$$

所以 $|s_m - \sigma_m| \leq \frac{n}{n-m}|\sigma_n - \sigma_m| + M\Big(\frac{n+1}{n-m}\log\frac{n}{m} - 1\Big)$。

给定 $\epsilon > 0$，根据切萨罗求和法，存在 N_ϵ 使得当 $n, m > N_\epsilon$ 时 $|\sigma_n - \sigma_m| < \epsilon^2$。

值得注意的是

$$(1-\epsilon)\epsilon \leq \frac{n-m}{m} \leq \epsilon \Leftrightarrow (1+\epsilon-\epsilon^2)m \leq n \leq (1+\epsilon)m$$

所以$\frac{n}{n-m} < \frac{n+1}{n-m} = 1 + \frac{m}{n-m}\frac{m+1}{m} \leq 1 + \frac{1}{(1-\epsilon)\epsilon}(1+\frac{1}{m}) < 1 + \frac{1+\epsilon}{(1-\epsilon)\epsilon}$ 如果 $m > \frac{1}{\epsilon}$ 故而

$$
\begin{aligned}
|s_m - \sigma_m| &\leq (1 + \frac{1+\epsilon}{(1-\epsilon)\epsilon})\epsilon^2 + M\Big((1 + \frac{1+\epsilon}{(1-\epsilon)\epsilon})\log(1+\epsilon) - 1\Big) \\
&\leq \epsilon^2 + 2\epsilon + M(\epsilon + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} - 1) = \epsilon^2 + (2 + M + \frac{2}{1-\epsilon})\epsilon,
\end{aligned}
$$

每当 $m >$ 最大$(\frac{1}{\epsilon}, N_\epsilon)$。 □

Remark 2. 关于(d)的另一个证明，通过延迟方法，在问题4.5中给出。

15. 我们省略了展示费耶尔核等于的基本计算

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

这一结果也可从$\widehat{F_N}$的图像中预测得出，即对于某些 c, M 满足$\widehat{F_N} = c\widehat{D_M} * \widehat{D_M}$。我从 [5, page 9] 中了解到这一观点。

16. Prove the Weierstrauss approximation theorem by Fejér's theorem (Corollary 5.4).

Proof. 将f从$[a,b]$连续延拓到$[a,c]$，使得$f(a) = f(c)$。因此存在$Q(x) = \sum_{k=M}^{N} a_k e^{ikx}$满足$\|Q - f\| < \frac{\epsilon}{2}$。注意这些有限个$e^{ikx}$可以被多项式一致逼近。

□

第17章
In Section 5.4 we proved that the Abel means of f converge to f at all points of continuity, that is,

$$\lim_{r\to 1^-} Ar(f)(\theta) = \lim_{r\to 1^-}(Pr * f)(\theta) = f(\theta)$$

whenever f is continuous at θ. In this exercise, we will study the behavior of $A_r(f)(\theta)$ at certain points of discontinuity. An integrable function is said to have a jump discontinuity at θ if the two limits

$$\lim_{h\to 0^+} f(\theta + h) = f(\theta+) \text{ and } \lim_{h\to 0^-} f(\theta + h) = f(\theta-)$$

exist.

(a) Prove that if f has a jump discontinuity at θ, then

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(\theta) = \frac{f(\theta+) + f(\theta-)}{2}.$$

(b) Using a similar argument, show that if f has a jump discontinuity at θ, the Fourier series of f at θ is Cesáro summable to $\frac{f(\theta+)+f(\theta-)}{2}$.

Proof. (a) 由于$P_r(t) = P_r(-t) \geq 0$且$\int_{-\pi}^{\pi} P_r = 1$，我们对所有$r < 1$有$\int_0^{\pi} P_r = \int_{-\pi}^{0} P_r = \frac{1}{2}$。给定$\epsilon > 0$，存在$\delta = \delta(\epsilon) > 0$使得$|f(\theta - t) - f(\theta-)| < \epsilon$，且对所有$0 < t < \delta$满足$|f(\theta + t) - f(\theta+)| < \epsilon$。因此

$$
\begin{aligned}
&A_r(f)(\theta) - \frac{f(\theta+) + f(\theta-)}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) P_r(t)\, dt - \frac{f(\theta+) + f(\theta-)}{2} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) P_r(t)\, dt - \frac{f(\theta+) + f(\theta-)}{2} \\
&= \int_{0}^{\pi} [f(\theta + t) - f(\theta+)] P_r(t)\, dt + \int_{-\pi}^{0} [f(\theta - t) - f(\theta-)] P_r(t)\, dt \\
&= (\int_{\delta}^{\pi} + \int_{0}^{\delta})[f(\theta + t) - f(\theta+)] P_r(t)\, dt + (\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{0})[f(\theta - t) - f(\theta-)] P_r(t)\, dt \\
&=: I + II + III + IV
\end{aligned}
$$

容易看出对所有$r <\geqslant 1$都有$|II|, |IV| < \epsilon$。由于单位圆盘上的泊松核是优良核，存在$R = R(\delta) = R(\epsilon) <> 1$使得当$r > R$时满足$|I|, |III| < \epsilon$。因此若$r > R(\epsilon)$，则$|A_r(f)(\theta) - \frac{f(\theta+)+f(\theta-)}{2}| <\geqslant 4\epsilon$。

(b) 证明与 (a) 相同，只是将 P_r 替换为 F_N。 □

Remark 3. 参见问题3及其注解，推导出傅里叶级数收敛于$\frac{f(\theta+)+f(\theta-)}{2}$。

第18条 **This is an example mentioned in Remark of Theorem 5.7.**

If $P_r(\theta)$ denotes the Poisson kernel, show that the function

$$
u(r, \theta) = \frac{\partial P_r}{\partial \theta},
$$

defined for $0 \leq r < 1$ and $\theta \in \mathbb{R}$, satisfies:

(i) $\Delta u = 0$ in the disc. (ii) 极限$_{r \to 1} u(r, \theta) = 0$
for each θ. (iii) u does not converges to 0 uniformly as $r \to 1$.

However, u is not identically zero.

Proof. 直接计算。注意$u(x, y) = \frac{2y(x^2+y^2-1)}{((1-x)^2+y^2)^2}$，因此当$\epsilon \to 0^+$时，$u(1 - \epsilon, \epsilon) \to -\infty$。 □

19. **Solve Laplace's equation $\Delta u =$ 零 in the semi infinite strip**

$$
S = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y\},
$$

subject to the following boundary conditions

$$
u(0, y) = 0 = u(1, y) \;\textbf{ when }\; 0 \leq y, \;\; u(x, 0) = f(x) \;\textbf{ when }\; 0 \leq x \leq 1,
$$

where f is a given C^α function ($\alpha > 12$, see Exercise 3.16), with $f(0) = f(1) =0$ .Write

$$f(x)" = " \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

and expand the general solution in terms of the special solutions given by

$$u_n(x,y) = e^{-n\pi y} \sin(n\pi x).$$

Express u as an integral involving f, analogous to the Poisson integral formula.

Proof. 注意到当 $y > 0$ 且 $x \in [0, 1]$ 时，根据 Weierstrass M 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi y}$ sin($n\pi x$) sin($n\pi z$) 在 $z \in [0, 1]$ 上一致收敛。因此

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\pi y} \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi y} \sin(n\pi x) 2 \int_0^1 f(z) \sin(n\pi z)\, dz \\ &= \int_0^1 f(z) \Big(2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi y} \sin(n\pi x) \sin(n\pi z) \Big)\, dz =: \int_0^1 f(z) \Phi_y(x,z)\, dz \end{aligned}$$

我们首先注意到$u(x, y)$确实解决了这个问题。其次我们有

$$\begin{aligned} \Phi_y(x,z) &= \frac{2}{-4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi y} \Big\{ \big(e^{in\pi(x+z)} + e^{-in\pi(x+z)}\big) - \big(e^{in\pi(x-z)} + e^{-in\pi(x-z)}\big) \Big\} \\ &= \frac{-1}{2} \Big\{ \frac{1}{1-e^{\pi[-y+i(x+z)]}} + \frac{1}{1-e^{\pi[-y-i(x+z)]}} - \frac{1}{1-e^{\pi[-y+i(x-z)]}} - \frac{1}{1-e^{\pi[-y-i(x-z)]}} \Big\} \\ &= \frac{-1}{2} \Big\{ \frac{2 - e^{-\pi y}\big(e^{i\pi(x+z)} + e^{-i\pi(x+z)}\big)}{1 - e^{-\pi y}\big(e^{i\pi(x+z)} + e^{-i\pi(x+z)}\big) + e^{-2\pi y}} - \frac{2 - e^{-\pi y}\big(e^{i\pi(x-z)} + e^{-i\pi(x-z)}\big)}{1 - e^{-\pi y}\big(e^{i\pi(x-z)} + e^{-i\pi(x-z)}\big) + e^{-2\pi y}} \Big\} \\ &= \frac{1 - e^{-\pi y}\cos\pi(x-z)}{1 - 2e^{-\pi y}\cos\pi(x-z) + e^{-2\pi y}} - \frac{1 - e^{-\pi y}\cos\pi(x+z)}{1 - 2e^{-\pi y}\cos\pi(x+z) + e^{-2\pi y}}. \end{aligned}$$

□

Remark 4. 请注意，若采用从(0, 1)到(−1, 1)的奇延拓，则此计算与计算$P_r(\theta)$的方法相同。另需注意，此结果中不存在P_r里出现的零阶项$\omega^0 = 1$，这正是分母中$1 - e^{-\pi y}\cos t$的原因。

20. **Consider the Dirichlet problem in the annulus defined by $\{(r, \theta)\colon\ \rho < r < 1\}$, where $0 < \rho < 1$ is the inner radius. The problem is to solve**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

subject to the boundary conditions $u($一 $,\theta) = f(\theta), u(\rho, \theta) = g(\theta)$, where f and g are given continuous functions.

Arguing as we have previously for the Dirichlet problem in the disc, we can hope to write

$$u(r,\theta) = \sum c_n(r) e^{in\theta}$$

with $c_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}, n \neq 0$**. Set**

$$f(\theta) \sim \sum a_n e^{in\theta} \ \text{ and } \ g(\theta) \sim \sum b_n e^{in\theta}.$$

We want $c_n(1) = a_n$ **and** $c_n(\rho) = b_n$**. This leads to the solution**

$$u(r,\theta) := \sum_{n\neq 0} \Big(\frac{1}{\rho^n - \rho^{-n}}\Big)[((\rho/r)^n - (r/\rho)^n)a_n + (r^n - r^{-n})b_n]e^{in\theta} + a_0 + (b_0 - a_0)\frac{\log r}{\log \rho}.$$

Show that as a result we have

$$u(r,\theta) - (P_r * f)(\theta) \to 0 \ \text{ as } \ r \to 1 \ \text{ uniformly in } \ \theta,$$

and

$$u(r,\theta) - (P_{\rho/r} * g)(\theta) \to 0 \ \text{ as } \ r \to \rho \ \text{ uniformly in } \ \theta.$$

Proof. 首先我们确认级数{v*}的绝对收敛性

$$u_1(r,\theta) := \sum_{n\neq 0} \Big(\frac{(\frac{\rho}{r})^n - (\frac{\rho}{r})^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}}\Big) a_n e^{in\theta}$$

和

$$u_\rho(r,\theta) := \sum_{n\neq 0} \Big(\frac{r^n - r^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}}\Big) b_n e^{in\theta}$$

因此$u =$： $u_1 + u_\rho + u_0$被确认为定义良好的。这是一个推论，

$$\sup_n \Big\{|a_n|, |b_n|\Big\} \leq \frac{1}{2\pi} \max\Big(\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}, \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}\Big)$$

对于每个 $n \neq 0$

$$\Big|\frac{(\frac{\rho}{r})^n - (\frac{\rho}{r})^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}}\Big| = r^{|n|}\Big(\frac{(\frac{\rho}{r})^{2|n|} - 1}{\rho^{2|n|} - 1}\Big) = \frac{r^{|n|}(1 - \frac{\rho^2}{r^2})}{1 - \rho^{2|n|}}\Big(1 + (\frac{\rho}{r})^2 + \cdots + (\frac{\rho}{r})^{2|n|-2}\Big) \leq (1 - \frac{\rho^2}{r^2})\frac{|n|}{1 - r^2} r^{|n|} \tag{1}$$

$$\Big|\frac{r^n - r^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}}\Big| = \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{|n|}\Big(\frac{1 - r^{2|n|}}{1 - \rho^{2|n|}}\Big) = \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{|n|}\frac{(1 - r^2)(1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2|n|-2})}{1 - \rho^2} \leq |n|\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{|n|}\frac{1 - r^2}{1 - \rho^2}. \tag{2}$$

注意，上述推导估计值的方法也意味着 u 在年度上是调和的。我们省略了细节。要检查它是否满足边界条件，只需证明其余断言即可。

为了达到这一点，我们首先证明 $u_\rho \to 0$ 和 $u_1 + u_0 - P_r * f \to 0$ 作为 $r \to 1$ 在 θ 中一致成立。注意到 u_ρ 部分是 (2) 式的推论。对于 $1-\delta < r < 1$ 和 $n \neq 0$,

$$\left|\frac{(\frac{\rho}{r})^n - (\frac{\rho}{r})^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}} - r^{|n|}\right| = r^{|n|}\frac{\rho^{|n|}[r^{-2|n|}-1]}{\rho^{-|n|}-\rho^{|n|}} = \frac{r^{|n|}\rho^{2|n|}}{1-\rho^{2|n|}}\left(\frac{1}{r^2}-1\right)\left[1+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}+\cdots\frac{1}{r^{2|n|-2}}\right]$$
$$\leq \frac{r^{-2}-1}{1-\rho^2}|n|\frac{\rho^{2|n|}}{(1-\delta)^{2|n|-2}}.$$

特别地，我们选取$1-\delta > \rho$，使得$u_1 + u_0 - P_r * f$的优级数（通过比值判别法）收敛，从而被与θ无关的常数倍$r^{-2}-1$所界定。由此证明，当$r \to 1$时，$u_1 + u_0 - P_r * f \to 0$在$\theta$中一致地成立。

最后我们证明，当$r \to \rho$在θ上一致地趋于某一极限时，有$u_1 \to$趋于0且$u_\rho + u_0 - P_{\rho/r} * f \to$趋于0。注意到$u_1$部分是(1)式的推论。当$\rho < r <$为1且$n \neq$为0时，

$$\left|\frac{r^n - r^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}} - (\frac{\rho}{r})^{|n|}\right| = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{|n|}\frac{r^{2|n|}-\rho^{2|n|}}{1-\rho^{2|n|}} = \frac{\rho^{|n|}r^{|n|}}{1-\rho^{2|n|}}(1-\frac{\rho^2}{r^2})\left[1+(\frac{\rho}{r})^2+(\frac{\rho}{r})^4+\cdots(\frac{\rho}{r})^{2|n|-2}\right]$$
$$\leq \frac{1-\frac{\rho^2}{r^2}}{1-\rho^2}\rho^{|n|}|n|.$$

因此，$u_1 + u_0 - P_{\rho/r} * f$的强级数通过比值判别法收敛，从而被一个与$\theta$无关的常数倍$1 - \rho^2 r^{-2}$所界定。由此证明$u_1 + u_0 - P_{\rho/r} * f \to$在$\theta$上当$r \to \rho$时一致趋于0。

$\square$

Problems

1. One can construct Riemann integrable functions on [0,1] that have a dense set of discontinuities as follows.

(a) Let $f(x) = 0$ when $x < 0$ and $f(x) = 1$ if $x \geq 0$. Choose a countable dense sequence $\{r_n\}$ in $[0,1]$. Then, show that the function

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(x - r_n)$$

is integrable and discontinuous precisely at each r_n.

[Hint: F is monotonic and bounded.]

(b) Consider next

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}g(x-r_n)$$

where $g(x)=\sin(1/x)$ when $x\neq$ 竖, and g(元) $=$ 零
. Then F is integrable, discontinuous
precisely at each $x=r_n$, and fails to be monotonic in any subinterval of [零, 一]
. [Hint: Use the fact that 三$^{-k}>\sum_{n>k}$三$^{-n}$.]

(c) The original example of Riemann is the function

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$$

where $(x)=x$ for $x\in(-1/2,1/2]$ and extended to $\mathbb{R}$ by periodicity, that is, $(x+1)=(x)$. It can be shown that F is discontinuous whenever $x\in D:=\{\frac{2k+1}{2m}|k,m\in\mathbb{Z},m\neq 0\}$
and continuous at $\mathbb{R}-D$. Moreover, F is Riemann-integrable on every bounded interval.

(d) If the above (nx) is replace by $\{nx\}$, where $\{nx\}$ is the fractional part of nx (that is, $\{z\}:=z$ if $z\in[0,1)$ and then extend periodically), then we have F is discontinuous precisely at $\mathbb{Q}$.

Remark 5. (c)(d)中的函数F是否单调?

Proof. 我们不妨假设所有 r_n 互不相同（为什么？）

(a) 对任意 $x\in[0,1]$，该级数收敛且小于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$，故 F 是良定义的且有界的。由 F 的明显单调性可轻易证得其可积性。在 $[0,1]\setminus\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 上的连续性及在 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 上的不连续性，可以类似爆米花函数的情况证明（注意 $F(r_n+)-F(r_n-)\geq\frac{1}{n^2}$）。

Remark 6. 关于 r_n 处不连续性的另一证明采用矛盾法，即假设 F 在 r_n 处连续，则利用一致收敛性的优势可知函数 $F_n=\sum_{j\neq n}\frac{1}{j^2}f(x-r_j)$ 在 r_n 处连续。因此
$\frac{1}{n^2}f(x-r_n)=F(x)-F_n(x)$ 在 r_n 处连续，这与前提矛盾。此方法同样适用于(b)部分。

(b) 由于F的黎曼可积性、连续性及不连续性的证明方式同(a)，在此仅证明最后一个断言。

给定 $I\subseteq[0,1]$，由 $\{r_j\}_j$ 的稠密性可知存在某个 r_k 和一个区间 I'_k 使得 $r_k\in I'_k\subseteq I_k$ 且 $r_1,r_2,\cdots,r_{k-1}\notin I'_k$。因此 $F_k(x)=\sum_{n=1}^{k-1}3^{-n}g(x-r_n)$ 在 I'_k 上连续，进而在 r_k 的某个小邻域 J_k 内 $|F_k|\leq\frac{3^{-k}}{100}$。

注意 $3^{-k}=2\sum_{j=k+1}^{\infty}3^{-j}$ 以及

$$F(x)=F_k(x)+3^{-k}g(x-r_k)+\sum_{j=k+1}^{\infty}3^{-j}g(x-r_j).$$

因此对于任意邻域 $J\subseteq J_k$ 的 r_k，我们可以找到 $z<w<z'$ 使得 $g(z-r_k)=1=g(z'-r_k)$ 且 $-1=g(w-r_k)$，故有 $F(z)\geq -\frac{3^{-k}}{100}+3^{-k}-\sum_{j=k+1}3^{-j}>\frac{3^{-k}}{100}-3^{-k}+\sum_{j=k+1}3^{-j}\geq F(w)$，类似地 $F(z')>F(w)$。

我们首先证明(d)以清晰地阐述思路。由于对每个$N\in\mathbb{N}$，$F_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\{nx\}}{n^2}$都是黎曼可积的，且在任意有界区间上一致收敛于$F(x)$（根据魏尔斯特拉斯$M$判别法），因此$F$在任意有界区间上黎曼可积。此外，$F$在$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$上的连续性可由$F_N$的连续性推得，从而由每个$n\in\mathbb{N}$对应的$\frac{\{nx\}}{n^2}$在$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$上的连续性得到，这一点很容易证明。

现在我们考察 F 在任何 $z\in\mathbb{Q}$ 处的不连续性，以 $z=\frac{p}{q}$ 为例，其中 $\gcd(p,q)=1$。注意级数 $F(x)$ 与 $f_r(x)$ 的收敛性：$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(kq+r)x\}}{(kq+r)^2}$ 对每个 $1\leq r\leq q$ 意味着

$$F(x)=\sum_{r=1}^{q}f_r(x).$$

如果我们证明当$1\leq r<q$时f_r在$\frac{p}{q}$处连续，且f_q在$\frac{p}{q}$处不连续，则证明完成。

对于每个 $x\in(\frac{p}{q}-\frac{1}{4q},\frac{p}{q})$，即 $qx\in(p-\frac{1}{4},p)$，我们有 $\{qx\}>\frac{3}{4}$，因此

$$f_q(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\{jqx\}}{j^2q^2}>\frac{3}{4q^2}-\frac{1}{q^2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{1}{q^2}(\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6})>0=f_q(\frac{p}{q}).$$

因此 f_q 在 $\frac{p}{q}$ 处不连续。

对于 $1\leq r<q$，我们注意到对于每个 $k\geq 0$，映射 $x\mapsto\{(kq+r)x\}$ 在 $\frac{p}{q}$ 处连续，因为 ($kq+r)\frac{p}{q}=kp+\frac{rp}{q}\notin\mathbb{Z}$。因此，根据级数的一致收敛性，$f_r$ 在 $\frac{p}{q}$ 处连续。最后，在 (c) 中，为方便标记，我们将符号 $(\cdot)$ 改为 $[\cdot]$，并将 $F(x)$ 改为 $G(x)$。对于 $G(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[nx]}{n^2}$，黎曼可积性与连续性如 (d) 所示得到证明。

现在我们考察 G 在任何 $z\in D$ 处的不连续性，以 $z=\frac{p}{2q}$ 为例，其中 $\gcd(p,q)=1$，且 p 为奇数。注意到级数 $G(x)$ 与 $g_r(x)$ 的绝对收敛性：$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(kq+r)x]}{(kq+r)^2}$ 意味着

$$G(x)=\sum_{r=1}^{q}g_r(x).$$

要完成证明，只需证得g_r在$\frac{p}{2q}$处连续，且若$1\leq r<q$，则g_q在$\frac{p}{2q}$处不连续。

对于每个$x\in(\frac{p}{2q},\frac{1}{2q}+\frac{p}{2q})$，也就是$qx\in(\frac{p}{2},\frac{p+1}{2})$，我们有$[qx]<0$，因为$p$是奇数。因此

$$g_q(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[jqx]}{j^2q^2}<\frac{1}{2q^2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{1}{2q^2}(\frac{\pi^2}{6}-1)<\frac{1}{2q^2}(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2^2}\frac{\pi^2}{6})=\frac{1}{2q^2}(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j)^2})=g_q(\frac{p}{2q}).$$

因此 g_q 在 $\frac{p}{q}$ 处不连续。

对于1$\leq r < q$，注意到对每个$k \geq 0$，映射$x \mapsto [(kq+r)x]$在$\frac{p}{2q}$处连续（因为若$(kq+r)$ $\frac{p}{2q} \notin \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ (∵ 若$(kq+r)\frac{p}{2q} \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$，则$kp+\frac{rp}{q} = (kq+r)\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$，这将导致矛盾）。因此，根据其级数的一致收敛性，$g_r$在$\frac{p}{2q}$处连续。

□

Remark 7. 另一种构造是所谓的爆米花函数。更有趣的是，存在**no**在有理点处**precisely**连续的函数。这可以通过贝尔纲理论加以证明，参见第四卷习题4.6。

2. **Let D_N denote the Dirichlet kernel**

$$D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\theta} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\theta/2)},$$

and define

$$L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)|\, d\theta.$$

(a) Prove that

$$L_N \geq c\log N$$

for some constant $c > 0$. A more careful estimate gives

$$L_N = \frac{4}{\pi^2}\log N + O(1).$$

(b) Prove the following as a consequence: for each $n \geq 1$, there exists a continuous function f_n such that $|f_n| \leq 1$ and $S_n(f_n)(0) \geq c'$ 日志 n.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}
L_N =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\theta/2)}|\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\theta/2}|\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(N+\frac{1}{2})\theta|\Big(\frac{1}{\sin(\theta/2)} - \frac{1}{\theta/2}\Big)\, d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin z|}{z}\, dz + O(1) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-\frac{1}{2})\pi}^{(j+\frac{1}{2})\pi} |\sin z|\Big(\frac{1}{j\pi} + \frac{1}{z} - \frac{1}{j\pi}\Big)\, dz + O(1) \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j} + O(1) = \frac{4}{\pi^2}\log N + O(1).
\end{aligned}$$

(由于D_n具有有限零点，$F_n(t)$：$=$ sgn$D_n(t)$存在有限多个间断点。注意到$S_n(F_n)(0) = L_n$，且由于[0,1]具有有限勒贝格测度，我们可用连续函数在L^1范数下逼近F_n。通过观察$D_n(0) \neq$对所有$n \in \mathbb{N}$成立，可得$|D_n|$在每个F_n的间断点邻域内一致有界，由此推出所需结论。

□

Remark 在第四册第四章中，可将此问题与一致有界性原理结合，证明存在傅里叶级数在给定点发散的函数，该结果亦将通过P. du Bois-Reymond（1873）在3.2.2节中的具体构造予以证明。另一方面，结合开映射定理可证映射$f \in L^1[-\pi,\pi] \mapsto \{\hat{f}(n)\} \in C_0(\mathbb{Z})$不满足的。

3. **Littlewood provided a refinement of Tauber's theorem:**

(a) If $\sum c_n$ is Abel summable to s and $nc_n \geq -M$ for all n, then $\sum c_n$ converges to s.

(b) As a consequence of Exercise 13(c), we know that if $\sum c_n$ is Cesàro summable to s and $nc_n \geq -M$ for all n, then $\sum c_n$ converges to s. Note that another easier proof is also given in Exercise 14(c).

These results may be applied to Fourier series. By Exercise 17, they imply that if f is an integrable function that satisfies $\hat{f}(\nu) = O(\text{一}/|\nu|)$, then:

(i) If f is continuous at θ, then

$$S_N(f)(\theta) \to f(\theta) \text{ as } N \to \infty$$

(ii) If f has a jump discontinuity at θ, then

$$S_N(f)(\theta) \to \frac{f(\theta^+) + f(\theta^-)}{2} \text{ as } N \to \infty$$

(iii) If f is continuous on $[-\pi,\pi]$, then $S_N(f) \to f$ uniformly.

Other proofs for the simpler assertion (b), hence proofs of (i),(ii),and (iii), can be found in my Exercise 2.14 and Problem 4.5

Remark 9. 维兰特方法的证明取自[3, Section 1.12]，我认为这本书是陶伯定理的一个很好的综述。

Remark 10. 另一个类似结果（条件更弱、结论也更弱）是约当判别法：当f的$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta_0) = \frac{f(\theta_0+)+f(\theta_0-)}{2}$仅在$\theta_0$的某邻域内单调（从而$f$具有有界变差）时成立，这可通过黎曼-勒贝格引理及第二积分中值定理证明。详见[1, Theorem 1.1.2]。注意狄利克雷核的控制比费耶核困难得多，参见[2, Theorem 3.4.1]。

Proof. 对于每个多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{m} b_k x^{nk} = \sum_{k=0}^{m} b_k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{nk} \to \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot s = P(1)s \tag{3}$$

如 $x \nearrow 1$。（读者应能通过 $\epsilon - N$ 论证证明（3）中的第二个等式。）定义 $g(x) = \chi_{[e^{-1},1]}(x)$，即 $[e^{-1}, 1]$ 的特征函数，使得对于 $s_N = \sum_{n\le N} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g(e^{-n/N})$；为完成 $s_N \to s$ 的证明，我们将在下方表明：将（3）中的结论以 g 替代 P 后依然成立：

$$s \le \liminf_{x\nearrow 1} \sum c_n g(x^n) \le \limsup_{x\nearrow 1} \sum c_n g(x^n) \le s.$$

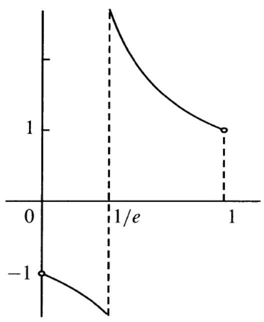
对于(3)的最后一个不等式，我们寻找一个合适的多项式强函数

$$P \ge g \text{ for which } P(0) = g(0) = 0,\, P(1) = g(1) = 1.$$

同样地，

$$\frac{P(t)-t}{t(1-t)} \text{ must be a polynomial } Q(t) \ge h(t) = \frac{g(t)-t}{t(1-t)}. \tag{4}$$

分段连续函数 h 在区间 [0, 1] 上的图像如下所示。



当0<< x <<1时，由(4)式和条件$nc_n \ge -M$可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n P(x^n) &= -\sum_{n=1} c_n\{P(x^n) - g(x^n)\} \le M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\{P(x^n) - g(x^n)\} \\ \le M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x}{1-x^n}\{P(x^n) - g(x^n)\} &= M(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \phi(x^n), \quad \text{where } \phi(t) = \frac{P(t)-g(t)}{1-t}.\end{aligned} \tag{5}$$

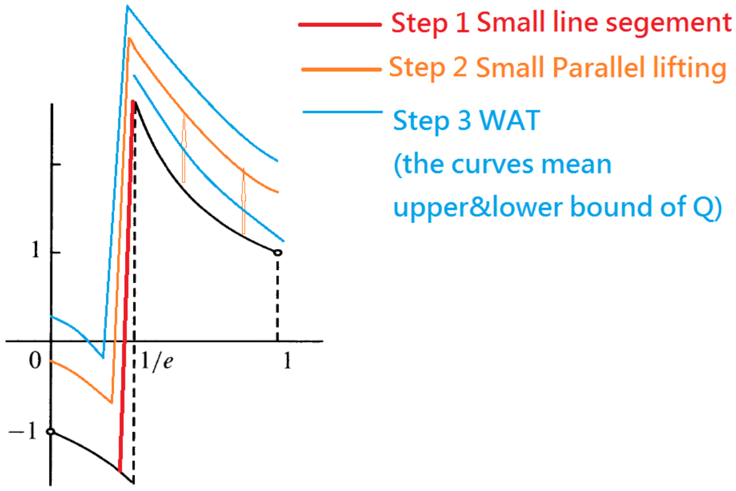
由(3)，第二项　　式（5）中首项的极限为s当x　　$\nearrow$ 1.

注意到（5）中最后一项的极限为（6），因为它可作为该积分在分割$P_x^{\infty} = \{下, x, x^2, \cdots\}$的黎曼和。（从$Q(t)-h(t)$容易看出$\frac{\phi(t)}{t}$的可积性。另一方面，将$P_x^{\infty}$化为有限集作为规则分割的细节留给读者，这并非平凡，需要观察某种一致性或单调性。）

$$M\int_0^1 \phi(t)\frac{dt}{t} = M\int_0^1 \frac{P(t)-t-(g(t)-t)}{t(1-t)}\,dt = M\int_0^1 \{Q(t)-h(t)\}\,dt. \tag{6}$$

现在对于给定的 $\epsilon > 0$，魏尔斯特拉斯逼近定理使得构造一个满足 $\int_0^1 (Q-h) \le \epsilon$ 的多项式 $Q \ge h$ 成为可能。下图展示了一种构造方法。

（请注意，因作者绘图技术和软件的限制，图示可能不够精确）



对于这样的一个Q以及由(4)确定的对应P，由(5)、(3)和(6)可得

$$\limsup_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n g(x^n)\le\lim_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n P(x^n)+\lim_{x\nearrow 1}M(l-x)\sum_{n=0}^{\infty}\phi(x^n)$$
$$=P(1)s+M\int_0^1\{\phi(t)/t\}\,dt\le s+M\epsilon.$$

由于 ϵ 是任意的，我们的上极限不超过 s。

对于(3)的第一个不等式，其方法与考察某些多项式$\widetilde{P}\le g$、$\widetilde{P}(0)=g(0)=$0以及$\widetilde{P}(1)=g(1)=$1相同。此处从略。 $\square$

References

[1] Duoandikoetxea：《傅里叶分析》，第29卷，美国数学会，2001年。[2] Loukas Grafakos：《经典傅里叶分析》（第三版），Springer，2014年。[3] Jacob Korevaar：《Tauberian理论：一个世纪的发展》，第329卷，Springer，2004年。[4] Walter Rudin：《数学分析原理》（第三版），1976年。[5] Camil Muscalu 与 Wilhelm Schlag：《经典与多线性调和分析》，第1卷。

。

剑桥大学出版社，2013年。