傅立叶分析、Stein 和 Shakarchi
第 6 章 $\mathbb{R}^d$ 上的傅立叶变换

黄永祥*

2019 年 1 月 7 日

Abstract

我在担任南洋理工大学 2018 年春季课程“分析 II”课程的助教时完成了这个解决方案文件。以下学生贡献了一些答案：

练习 13-15：Chin-Bin Hsu。

问题1：Chi-An Chen（部分是从幂级数解贝塞尔方程的角度出发，即用（h）作为J_n的定义，而不是197页的最后一行。）

问题 2(c) 与 Ge-Cheng Cheng 讨论。

问题 6 与 Mighty Yeh、Guan-Lin Lin 和 Chi-An Chen 讨论。

问题 7(a)(b)(d)：Andy Huang。

问题8：许国灿。

我们还建议读者参阅第三册的第 7.4 章和第四册的第 8.7 章，以获取有关 Radon 变换的更多讨论。

文件于2018年6月19日完成。稍微完善了备注9的解释，并于2018年12月26日更新了备注11的参考文献[9]。

Exercises

1. 答案：(a) $D := ad - bc = \pm 1$ 和 $a = dD, b = -cD, c = -bD, d = aD$。(b) 由于 $D = ad - bc = a^2D + b^2D, D = \pm 1 \neq 0$，$a^2 + b^2 = 1$。(c) 如果 $D = 1$，则 $ze^{-i\varphi} = (x + iy)(a - ib) = (ax + by) + i(-bx + ay) = (ax + by) + i(cx + dy) = R(z)$。与 $D = -1$ 类似。

*国立台湾大学数学系。邮箱：d04221001@ntu.edu.tw

2. **Suppose that R: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is a proper rotation.**

**(a) Show that $p(t) =$ 检测（$R - tI$）
is a polynomial of degree 3, and prove that there
exists $\gamma \in \mathcal{S}^2$ (where $\mathcal{S}^2$ denotes the unit sphere in $\mathbb{R}^3$) with**

$$R(\gamma) = \gamma.$$

(b) If $\mathcal{P}$ denotes the plane perpendicular to γ and passing through the origin, show that

$$R : \mathcal{P} \to \mathcal{P},$$

and that this linear map is a rotation in $\mathbb{R}^2$.

Proof. (a) 作为提示，由于 $p(t)$ 是多项式，$p(0) = 1$ 且 $p(t) = t^3 \det(\frac{1}{t}R - I) \to -\infty$ 为 $t \to \infty$，因此根据中间值定理，我们可以看到 $p(\lambda) = 0$ 对于某些 $\lambda > 0$ 。那么 $R - \lambda I$ 的内核是不平凡的，比如说 $(R - \lambda I)(x) = 0$ 对于某些 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ，因此 $R(\frac{x}{\|x\|}) = \lambda \frac{x}{\|x\|}$。使用旋转的定义，我们看到 $\lambda^2 = 1$，因此 $0 < \lambda = 1$。

(b) 给定 $z \in \mathcal{P}$，我们发现 $R(z) \in \mathcal{P}$ 自 $\langle R(z), \gamma \rangle = \langle z, R^t(\gamma) \rangle = \langle z, \gamma \rangle = 0$ 起。$R \downharpoonright_{\mathcal{P}}$ 的线性度和内积保持性继承自 R。 □

3. **Recall the formula**

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(x)\,dx = \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^\infty F(r\gamma) r^{d-1}\,dr\,d\sigma(\gamma).$$

Apply this to the special case when $F(x) = g(r)f(\gamma)$, where $x = r\gamma$, to prove that for any rotation R, one has

$$\int_{\mathcal{S}^{d-1}} f(R(\gamma))\,d\sigma(\gamma) = \int_{\mathcal{S}^{d-1}} f(\gamma)\,d\sigma(\gamma).$$

whenever f is a continuous function on the sphere $\mathcal{S}^{d-1}$.

Proof. 考虑 $F(x) = g(r)f(\gamma)$ 其中 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 使得 $\int_0^\infty g(r) r^{d-1}\,dr > 0$。然后我们完成证明

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(r) r^{d-1}\,dr \int_{\mathcal{S}^{d-1}} f(\gamma)\,d\sigma(\gamma) &= \int_{\mathbb{R}^3} F(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} F(R(x))\,dx \\ &= \int_0^\infty g(r) r^{d-1}\,dr \int_{\mathcal{S}^{d-1}} f(R(\gamma))\,d\sigma(\gamma).\end{aligned}$$

□

4. 令A_d和V_d分别表示$\mathbb{R}^d$中单位球和单位球的面积和体积。标准是证明(a)公式$A_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$和(b) $dV_d = A_d$。

（这里$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$是Gamma函数）。

5. **Let A be a $d \times d$ positive definite symmetric matrix with real coefficients. Show that**

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi(x,A(x))}\,dx = (\det A)^{-1/2}$$

When $A = I$, it's the standard gauss integral [Hint: Apply the spectral theorem to write $A = RDR^{-1}$ where R is a rotation and, D is diagonal with entries $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$, where $\{\lambda_i\}$ are the eigenvalues of A.]

Proof. 由于 A 是实对称正定，因此 $A = PDP^{-1}$ 对于某些正交矩阵 P和具有正对角线元素 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ 的对角矩阵 D 而言。剩下的就是利用变量的变化。

□

6. **Suppose $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$ satisfies $\int |\psi(x)|^2\,dx = 1$. Show the Heisenberg uncertainty principle in $\mathbb{R}^d$:**

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\psi(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi\Big) \geq \frac{d^2}{16\pi^2}.$$

Extremal functions are $C_\gamma e^{-\gamma|x|}2$ for any $\gamma > 0$.

Proof. 自 $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$ 起，散度定理意味着

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\cdot(x|\psi(x)|^2) = d + \int_{\mathbb{R}^d} (x\cdot\nabla\psi)\overline{\psi} + (x\cdot\nabla\overline{\psi})\psi$$

所以,

$$d \leq 2\int_{\mathbb{R}^d} |x||\nabla\psi||\psi|$$

其余与情况$d = 1$相同。 □

Remark 1. 看一下[12，第 11.3 节]。我们还可以尝试证明以下来自[7，练习8.19]的定理：

Theorem 2. *If $f \in L2(\mathbb{R}^d)$ and the set $S = \{x : f(x) \neq 0\}$ has finite measure, then for any measurable $E \subset \mathbb{R}^d$, $\int_E |\widehat{f}|^2 \leq \|f\|_2^2 m(S)m(E)$.*

这就是所谓的局部不确定性原理。最初的海森堡不等式表示，如果 f 高度局部化，则$\widehat{f}$ 不能集中在单个点附近。这个练习说明了更多：它不能集中在两个或更多相距较远的点的小邻域中。请参阅[6]进行全面讨论。

7. **Consider the time-dependent heat equation in $\mathbb{R}^d$:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}, \text{ where } t > 0,$$

with boundary values $u(x, 0) = f(x) \in S(\mathbb{R}^d)$. If

$$\mathcal{H}_t^{(d)}(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

is the d-dimensional heat kernel, show that the convolution

$$u(x,t) = (f * \mathcal{H}_t^{(d)})(x)$$

is indefinitely differentiable when $x \in \mathbb{R}^d$ and $t > 0$. Moreover, u solves the heat equation, and is continuous up to the boundary $t = 0$ in the following two senses: (1) $u(x,t) \to f(x)$ uniform in x as $t \to 0$; (2) $u(x,t) \to f(x)$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ as $t \to 0$.

Moreover, $u(\cdot, t) \in S(\mathbb{R}^d)$ uniformly in t, in the sense that for any $T > 0$, for each $k, l \geq 0$, there is some constant $M_{k,l,T}$ such that

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d, 0<t<T} |x|^k \left|\frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t)\right| \leq M_{k,l,T}$$

Proof. 稍微修改了第 5 章中给出的 $d = 1$ 的证明。 □

8. 参见[17，第7页]。从属原理的充分证明需要留数理论。

9. **A spherical wave is a solution $u(x,t)$ of the Cauchy problem for the wave equation in $\mathbb{R}^d$, which as a function of x is radial. Prove that u is a spherical wave if and only if the initial data $f, g \in \mathcal{S}$ are both radial.**

Proof. 如果 u 是球面波，则所需结果是在逐点收敛下保持径向对称性的结果，即，如果所有 h_n 都是径向的，则 $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$ (逐点) 是径向的。

相反，我们可以利用这样一个事实：径向函数的傅里叶变换和傅里叶逆变换是径向的，因此对于每个 $t > 0$，$u(x,t)$ 都是径向的，因为

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$$

对于每个 $t > 0$ 都是径向的（因为$\widehat{f}, \widehat{g}$ 是径向的）。 □

10. 令$u(x,t)$为波动方程的平滑解（可以从初始数据的平滑度来检验），并令$E(t)$表示该波的能量

$$E(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2+\sum_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right|^2 dx.$$

我们已经使用 Plancherel 公式看到 $E(t)$ 是常数。人们可以通过对 t 的积分进行微分并证明这一事实来给出这一事实的另一种证明

$$\frac{dE}{dt}=0.$$

11. **Show that the solution of the wave equation**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial 2u}{\partial x_3^2}$$

subject to $u(x,0)=f(x)$ **and** $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$**, where** $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$**, is given by**

$$u(x,t)=\frac{1}{|S(x,t)|}\int_{S(x,t)}[tg(y)+f(y)+rf(y)\cdot(y-x)]d\sigma(y),$$

where $S(x,t)$ **denotes the sphere of center** x **and radius** t**, and** $|S(x,t)|$ **its area. This is an alternate expression for the solution of the wave equation given in Theorem 3.6. It is sometimes called Kirchhoff's formula.**

Proof. 参见 [3，第 2.4.1(b) 节]。其基本策略是利用平均算子将三维波动方程转化为可显式求解的一维波动方程。高维情况在问题 4 和问题 5 中说明。

□

12. **Establish the identity (14) about the dual transform given in the text. In other words, prove that**

$$\iint_{\mathbb{R}\times S^2}\mathcal{R}(f)(t,\gamma)\overline{F(t,\gamma)}\,d(t,\sigma(\gamma))=\iiint_{\mathbb{R}^3}f(x)\overline{\mathcal{R}^*(F)(x)}\,dx$$

where $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3),F\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times S^2)$**, and**

$$\mathcal{R}(f)=\int_{P_{t,\gamma}}f\quad\text{and}\quad\mathcal{R}^*(F)(x)=\int_{S^2}F(x\cdot\gamma,\gamma)\,d\sigma(\gamma).$$

Proof. 我们注意到$\mathcal{R}(f)$是有界的，所以我们可以自由地使用富比尼定理。对于固定的 $\gamma\in S^2$，我们将使用坐标 $(t,u_1,u_2)\mapsto x=t\gamma+u_1e_1^\gamma+u_2e_2^\gamma$ 从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的变化，其中

$\{\gamma, e_1^\gamma, e_2^\gamma\}$ 形成 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基。所以我们有 $t = x \cdot \gamma$ 和

$$\iint_{\mathbb{R}\times S^2} \mathcal{R}(f)(t,\gamma)\overline{F(t,\gamma)}\, d(t,\sigma(\gamma)) = \int_{S^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 e_1^\gamma + u_2 e_2^\gamma)\overline{F(t,\gamma)}\, d(u_1,u_2)\, dt\, d\sigma(\gamma)$$
$$= \int_{S^2}\iiint_{\mathbb{R}^3} f(t\gamma + u_1 e_1^\gamma + u_2 e_2^\gamma)\overline{F(t,\gamma)}\, d(u_1,u_2,t)\, d\sigma(\gamma)$$
$$= \int_{S^2}\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x)\overline{F(x\cdot\gamma,\gamma)}\, dx\, d\sigma(\gamma) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\int_{S^2}\overline{F(x\cdot\gamma,\gamma)}\, d\sigma(\gamma)\, dx$$
$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x)\overline{\mathcal{R}^*(F)(x,y)}\, dx.$$

□

13. **For each (t,θ) with $t \in \mathbb{R}$ and $|\theta| \le \pi$, let $L = L_{t,\theta}$ denote the line in the (x,y)-plane given by**

$$x\cos\theta + y\sin\theta = t.$$

This is the line perpendicular to the direction (余弦 θ, 罪孽 θ) **at "distance" t from the origin (we allow negative t). For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ the X-ray transform or two- dimensional Radon transform of f is defined by**

$$X(f)(t,\theta) = \int_{L_{t,\theta}} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos\theta + u\sin\theta, t\sin\theta - u\cos\theta)\, du.$$

Calculate the X-ray transform of the function $f(x,y) = e^{-\pi(x^2+y^2)}$.

Proof. $X(f)(t,\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t^2+u^2)}\, du = e^{-\pi t^2}$ 为所有 $(t,\theta) \in \mathbb{R}\times S^1$。 □

14. **Let X be the X-ray transform. Show that if $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ and $X(f) = 0$, then $f = 0$ a.e., by taking the Fourier transform in one variable.**

Remark 3. 有一个非平凡的完整函数 f 使得 $X(f) = 0$，请参阅[11，第 4.3 节]快速回顾 2D Radon 变换的唯一性和非唯一性。

Proof. 我们将看到对于所有 $(\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}_t X(f))(\xi,\theta) = (\mathcal{F}_{x,y}(f))(\xi(\cos\theta,\sin\theta)),$$

其中，$\mathcal{F}_t$ 是 $t \in \mathbb{R}^1$ 中的傅里叶变换，$\mathcal{F}_{x,y}$ 是 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 中的傅里叶变换。然后通过傅里叶逆变换得出所需的结果。

然而，上面的公式只是富比尼定理和坐标变化 $(t,u) \mapsto (x,y) = (t\cos\theta + u\sin\theta, t\sin\theta - u\cos\theta)$ 的结果。请注意，假设 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 用于证明富比尼定理的有效性。

□

15. **For $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times S^1)$, define the dual X-ray transform $X^*(F)$ by integrating F over all lines that pass through the point (x, y) (that is, those lines $L_{t,\theta}$ with x 余弦 $\theta + y$ 罪孽 $\theta = t$):**

$$X^*(F)(x,y) = \int_0^{2\pi} F(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\, d\theta.$$

Check that in this case, if $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times S^1)$, then

$$\iint_{\mathbb{R}\times S^1} X(f)(t,\theta)\overline{F(t,\theta)}\, d(t,\theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\overline{X^*(F)(x,y)}\, d(x,y).$$

Proof. 我们注意到$X(f)$是有界的，所以我们可以自由地使用富比尼定理。使用与练习 14 相同的坐标变化，我们有

$$\iint_{\mathbb{R}\times S^1} X(f)(t,\theta)\overline{F(t,\theta)}\, d(t,\theta) = \int_{S^1}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t\cos\theta + u\sin\theta, t\sin\theta - u\cos\theta)\overline{F(t,\theta)}\, du\, dt\, d\theta$$
$$= \int_{S^1}\iint_{\mathbb{R}^2} f(t\cos\theta + u\sin\theta, t\sin\theta - u\cos\theta)\overline{F(t,\theta)}\, d(u,t)\, d\theta$$
$$= \int_{S^1}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\overline{F(x\cos\theta + y\sin\theta,\theta)}\, d(x,y)\, d\theta = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\int_{S^1}\overline{F(x\cos\theta + y\sin\theta,\theta)}\, d\theta\, d(x,y)$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\overline{X^*(F)(x,y)}\, d(x,y).$$

□

Problems

问题3-6参见[5，第5章]。

1. **Let J_n denote the n-th order Bessel function, for $n \in \mathbb{Z}$. Prove that**

(a) $J_n(\rho)$ is real for all real ρ. (b) $J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho)$. (c) $2J_n'(\rho) = J_{n-1}(\rho) - J_{n+1}(\rho)$. (d) $\left(\frac{2n}{\rho}\right) J_n(\rho) = J_{n-1}(\rho) + J_{n+1}(\rho)$. (e) $(\rho^{-n}J_n(\rho))' = -\rho^{-n}J_{n+1}(\rho)$.

(f) $(\rho^n J_n(\rho))' = \rho^n J_{n-1}(\rho)$.

(g) $J_n(\rho)$ satisfies the second order differential equation

$$J_n''(\rho) + \frac{1}{\rho}J_n'(\rho) + (1 - \frac{n^2}{\rho^2})J_n(\rho) = 0.$$

(h) Show that

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\rho^{2m}}{2^{2m} m!(n+m)!},$$

where the series sums from $m = -n$ if $n < 0$.

(i) Show that for all integers n and all real numbers a and b we have

$$J_n(a+b) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} J_\ell(a)J_{n-\ell}(b).$$

This is called addition formula or addition theorem.

Remark 4. (g) 中描述的 Bessel 方程的来源是 Ginzburg-Landau 方程 $\Delta_{(x,y)}u + (1-|u|^2)u = 0$，其中 $u = u(x,y) \in \mathbb{C}$。当一个搜索解形式为 $u(r,\theta) = \phi(r)e^{in\theta}$ 时，ϕ 将满足第 n 个贝塞尔方程。另一个来源是柱坐标系中的拉普拉斯方程。人们还可以参阅[4，第5章]和[20]以获取有关贝塞尔方程的更多讨论。

Proof. (a) 是微不足道的（通过观察 $\int_0^{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$ 和被积函数的奇数。 (b) 使用变量 $\theta = \pi - t$ 的变化。 (c) 如果可以互换微分和积分的顺序，则计算是标准的。这个问题可以通过从差商减去目标函数开始，然后使用中值定理和被积函数导数的连续性来看到极限趋于零来解决。

(d) 通过分部积分证明。 (e)(f)由(c)和(d)证明。

(g) 以两种方式计算$[\rho^{-2n+1}(\rho^n J_n(\rho))']'$：直接计算和使用(e)(f)。

(h) 因为级数 e^z 均匀地收敛于 $\mathbb{C}$ 的每个紧子集，所以我们有

$$\begin{aligned}
J_n(\rho) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\rho\sin\theta)^m}{m!}e^{-in\theta}\,d\theta = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\rho^m}{2^m m!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^m e^{-in\theta}\,d\theta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\rho^m}{2^m m!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{k!(m-k)!}e^{-ik\theta}e^{i(m-k)\theta}e^{-in\theta}\,d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\rho^m(-1)^k}{2^m k!(m-k)!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{m-2k-n}\,d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{2k+n}(-1)^k}{2^{2k+n}k!(k+n)!}, \quad \text{if } n\geq 0.
\end{aligned}$$

对于 $n<0$，我们使用 (a)。

(i) (方法一：比较傅里叶级数 + 柯西积) 由于 $e^{i(a+b)t}, e^{iat}, e^{ibt}$ 在 t 中是平滑的，因此它们的傅里叶级数绝对收敛并且等于它们自己，利用柯西积，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_n J_n(a+b)e^{int} &= e^{i(a+b)\sin t} = e^{ia\sin t}e^{ib\sin t} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}J_n(a)e^{ikt}\Big)\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}J_m(b)e^{imt}\Big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k+m=n}J_k(a)J_m(b)\Big)e^{int}
\end{aligned}$$

[备注：我所说的“使用柯西积”的意思是可以将[15，定理 3.50 或 3.51] 应用于

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m + \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m}\Big).]$$

通过傅里叶级数的唯一性，我们得到了期望的结果。

（方法二：生成函数+ (h)）参见[20，第30页]。 □

2. **Another formula for $J_n(\rho)$ that allows one to define Bessel functions for non-integral values of $\mu, (\mu > -1/2)$ is**

$$J_\mu(\rho) = \frac{(\rho/2)^\mu}{\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} e^{i\rho t}(1-t^2)^{\mu-(1/2)}\,dt, \quad \rho \in \mathbb{C}.$$

(a) **Check that the above formula agrees with the definition of $J_n(\rho)$ for integral $n \geq 0$.**

(b) **Note that $J_{1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}$ 罪 ρ.**

(c) **Prove that**

$$\lim_{\mu\to(-1/2)^+} J_\mu(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\rho, \quad \rho > 0.$$

(d) **Observe that the formulas we have proved in the text giving F_0 in terms of f_0 (when describing the Fourier transform of a radial function) take the form**

$$F_0(\rho) = 2\pi\rho^{-(d/2)+1}\int_0^\infty J_{(d/2)-1}(2\pi\rho r) f_0(r) r^{d/2}\,dr,$$

for $d = 1, 2,$ and 3, if one uses the formulas above with the understanding that $J_{-1/2}(\rho) =$ 林$_{\mu\to-1/2} J_\mu(\rho)$. It turns out that the relation between F_0 and f_0 given by the above formula is valid in all dimensions d.

Remark 5. 这个定义称为泊松表示公式或 Mehler-Sonine 积分，参见 [20，第 24 页和第六章] 。这个公式在使用傅里叶变换时似乎很有用。

Proof. (a) 作为提示，我们可以通过改变变量 $t = \sin x$ 来轻松验证情况 $n = 0$，然后使用分部积分来检查问题 1 中的递归公式 (e) 在该定义下是否成立，即对于 $n \in \mathbb{N}$

$$\rho^{-n}J_n(\rho) = \frac{\frac{1}{2^n}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(\rho t)(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt.$$

（请注意，定义中的积分对于 $\mu > -\frac{1}{2}$ 是明确定义的，并且微分和积分顺序的互换可以严格验证，正如我们在问题中提到的

1(c).)

(b) 是微不足道的。

(c) 如 (a) 所示，我们受问题 1(f) 中的递归公式的启发，得出 $\mu > \frac{1}{2}$

$$(\rho^\mu J_\mu(\rho))' = \rho^\mu J_{\mu-1}(\rho)$$

严格地采用分部积分的方法。因此，我们“正式”

$$\lim_{\mu\to(-\frac{1}{2})^+} J_\mu(\rho) = \lim_{\mu\to(\frac{1}{2})^+} J_{\mu-1}(\rho) = \lim_{\mu\to(\frac{1}{2})^+} \rho^{-\mu}(\rho^\mu J_\mu(\rho))'" = "\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\rho))' = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\rho.$$

为了证明上述红色等式，必须逐点地显示 $\rho^\mu J_\mu(\rho) \to \rho^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\rho)$ 以及在任何紧区间 $[a,b]$ 上均匀地显示导数 $(\rho_\mu J_\mu(\rho))' \to (\rho^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\rho))'$，请参见[15，定理 7.17]。由于计算是常规的，我们将其留给读者。

(d) 由于 f_0 是径向的，因此其傅里叶变换是径向的$\widehat{f}_0(\xi) = \widehat{f}_0((|\xi|, 0, \cdots, 0))$，因此

$$\begin{aligned} F_0(\xi) = \widehat{f}_0((|\xi|, 0, \cdots, 0)) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x) e^{-2\pi i x\cdot(|\xi|,\cdots,0)}\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi e^{i(2\pi|\xi|r)(-\cos\phi_1)} \sin^{d-2}(\phi_1)\sin^{d-3}(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{d-2}) \\ &\quad d\phi_1\,d\phi_2\cdots\,d\phi_{d-1} f_0(r) r^{d-1}\,dr \end{aligned}$$

请注意，通过使用坐标 $t = -\cos\phi_1$ 的变化，我们可以得到：

$$\int_0^\pi e^{i(2\pi|\xi|r)(-\cos\phi_1)} \sin^{d-2}(\phi_1)\,d\phi_1 = \int_{-1}^1 e^{i(2\pi|\xi|r)t}(\sqrt{1-t^2})^{d-3}\,dt = J_{\frac{d}{2}-1}(2\pi|\xi|r)\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\sqrt{\pi}}{(\frac{\rho}{2})^{\frac{d}{2}-1}}.$$

其余积分可以通过 Beta 函数计算，即

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^k\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^k\,d\theta = B(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k+2}{2})}.$$

□

Remark 6. 另请参阅第二册的附录 A 和第四册的第 8.1 节和练习 8.1。

3. 这个问题解释了波动方程解的有限传播速度，参见[3，第2.4.3(b)和7.2.4节]和[14，第1-2章]。

Exercise 4 and 5 are Hadamard's method of descent and Huygens' principle, their proofs can be found in many PDE textbooks, e.g. [5, Section 5.2] or [3, Section 2.4]. We state the results here and post another related problem [5] [12] **concerning the decay rate in time t.**

4. 波动方程柯西问题的解存在公式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial_{x_1^2}} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} \quad \text{with} \;\; u(x,0) = f(x) \;\; \text{and} \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 中以球面方式表示，它概括了文本中给出的 $d = 3$ 的公式。事实上，偶数维度的解是从奇数维度的解推导出来的，所以我们首先讨论这种情况。

假设$d > 1$ 是奇数，令$h \in \mathcal{S}(R^d)$。以 x 为中心、半径为 t 的球上 h 的球面平均值定义为

$$M_r h(x) = Mh(x,r) = \frac{1}{A_d} \int_{S^{d-1}} h(x - r\gamma)\, d\sigma(\gamma),$$

其中A_d表示$\mathbb{R}^d$中单位球体S^{d-1}的面积。

(a) 表明

$$\Delta_x Mh(x,r) = \left[\partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\right] Mh(x,r),$$

其中Δ_x表示空间变量x和$\partial_r = \partial/\partial_r$中的拉普拉斯算子。

(b) 证明二次可微函数 $u(x,t)$ 满足波动方程当且仅当

$$\left[\partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\right] Mu(x,r,t) = \partial_t^2 Mu(x,r,t),$$

其中 $Mu(x,r,t)$ 表示函数 $u(x,t)$ 的球面平均值。

(c) 如果 $d = 2k+1$，则定义 $T\varphi(r) = (r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\varphi(r)]$，并设 $\widetilde{u} = TMu$。然后该函数求解每个固定 x 的一维波动方程:

$$\partial_t^2 \widetilde{u}(x,r,t) = \partial_r^2 \widetilde{u}(x,r,t).$$

然后，我们可以使用达朗贝尔公式找到以初始数据表示的该问题的解 $\widetilde{u}(x,r,t)$。

(d) 现在证明

$$u(x,t) = Mu(x,0,t) = \lim_{r \to 0} \frac{\widetilde{u}(x,r,t)}{\alpha r}$$

其中 $\alpha = 1 \cdot 3 \cdots (d-2)$。

(e) 得出结论，当 $d > 1$ 为奇数时，d 维波动方程的柯西问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-2)} \left[\partial_t (t^{-1}\partial_t)^{(d-3)/2} \left(t^{d-2} M_t f(x) \right) + (t^{-1}\partial_t)^{(d-3)/2} \left(t^{d-2} M_t g(x) \right) \right],$$

5、用下降法可以证明，当d为偶数时，波动方程的柯西问题的解由下式给出

$$u(x,t) = \frac{1}{1\cdot 3\cdots(d-2)}\Big[\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{(d-3)/2}\Big(t^{d-2}\widetilde{M}_t f(x)\Big) + (t^{-1}\partial_t)^{(d-3)/2}\Big(t^{d-2}\widetilde{M}_t g(x)\Big)\Big],$$

其中 $\widetilde{M}_t$ 表示修改后的球面平均值，定义为

$$\widetilde{M}_t h(x) = \frac{2}{A_{d+1}}\int_{B^d}\frac{h(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy.$$

5-12 .
This exercise shows that the decay rates for solutions of wave equation in 3-dimension and 2-dimension are different.

(a) Let u be the solution of

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \ \text{ on } \ \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

where $f \in C3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ have compact support. Show there exists a constant $C > 0$ such that for each $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$,

$$|u(x,t)| \le C/t$$

(b) Let u be the unique solution of

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^2\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \ \text{ on } \ \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

where $f \in C3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ have compact support. Prove that for each $x \in \mathbb{R}^2$, there exists a constant C_x, such that for each $t > 0$

$$|u(x,t)| \le C_x/t$$

(c) Let u be the same function as (b). Prove that there exists a constant $C > 0$ such that for each $x \in \mathbb{R}2, t > 0$,

$$|u(x,t)| \le C/t^{1/2}$$

Remark 7. 一般来说，时间衰减率为$t^{\frac{1-d}{2}}$（，其中d 是空间维度)。这可以通过修改此处给出的 $d = 2, 3$ 的证明来证明。

Remark 8. Strichartz 估计是波动方程的另一个重要估计。半线性波动方程的证明和应用参见[10]和[16，第四章]。

Proof. 我们假设f和g的支持都包含在$B_R(0)$中。

(a) 由唯一性定理（由能量守恒定律证明）以及课本和问题4给出的解公式，即：

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \partial_t\Big(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} f(x-t\gamma)\,d\sigma(\gamma)\Big) + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} g(x-t\gamma)\,d\sigma(\gamma) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x-t\gamma)\,d\sigma(\gamma) + \frac{t}{4\pi}\Big(\int_{S^2} g(x-t\gamma)\,d\sigma(\gamma) - \int_{S^2} (\nabla f)(x-t\gamma)\cdot\gamma\,d\sigma(\gamma)\Big).
\end{aligned}
$$

我们使用散度定理如下：

$$
\begin{aligned}
\int_{S^2} f(x-t\gamma)\gamma\cdot\gamma\,d\sigma(\gamma) &= \frac{1}{t^3}\int_{\partial B_t(x)} f(y)(y-x)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\,d\sigma(y) = \frac{1}{t^3}\int_{B_t(x)} \mathrm{div}_y(f(y)(y-x))\,dy \\
&= \frac{1}{t^3}\int_{B_t(x)} \nabla f(y)\cdot(y-x)+3f(y)\,dy \le \frac{1}{t^2}\|\nabla f\|_{L^1} + \frac{3}{t^3}\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

同样，$t\int_{S^2} g(x-t\gamma)\,d\sigma(\gamma) \le \frac{1}{t}\|\nabla g\|_{L^1} + \frac{3}{t^2}\|g\|_{L^1}$。为了估计剩余项，我们利用 f 具有紧凑的支持：

$$
t\int_{S^2}(\nabla f)(x-t\gamma)\cdot\gamma\,d\sigma(\gamma) = \frac{1}{t}\int_{\partial B_t(x)} \nabla f(y)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\,d\sigma(y) = \frac{1}{t}\|\Delta f\|_{L^1(B_R)},
$$

(或者以 $\frac{4\pi R^2}{t}\|\nabla f\|_\infty$ 为界，因为 $\partial B_t(x)$ 和 $B_R(0)$ 的交集面积至多为 $4\pi R^2$)。

（我们注意到，在很短的时间内，我们可以找到更好的估计，即 u 显然受 $(\|\nabla f\|_\infty + \|g\|_\infty)$ $t + \|f\|_\infty$ 支配）。

(b) 同样，唯一性定理意味着

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \partial_t\Big(\frac{t}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{f(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy\Big) + \frac{t}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{g(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{f(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy + \frac{t}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{(\nabla f)(x-ty)\cdot(-y)+g(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{f(z)}{\sqrt{t^2-|x-z|^2}}\,dz + \frac{1}{2\pi}\int_{B_t(x)} \frac{(\nabla f)(z)\cdot\frac{x-z}{t}+g(z)}{\sqrt{t^2-|x-z|^2}}\,dz
\end{aligned}
$$

注意积分$\int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr = t$，所以我们需要分别考虑大时间和小时间的情况。由于如何确定 t 的合适阈值是一个有点微妙的问题，因此我们在这里不描述如何找到它。

如果 $|x|+2R<t$，则 $B_R(0)\subset B_t(x)$

$$
\int_{B_t(x)} \frac{|f(z)|}{\sqrt{t^2-|x-z|^2}}\,dz = \frac{1}{t}\int_{B_R(0)} \frac{|f(z)|}{\sqrt{1-\frac{|x-z|^2}{t^2}}}\,dz \le \frac{\|f\|_\infty}{t}\frac{\pi R^2}{\sqrt{1-\frac{(R+|x|)^2}{(2R+|x|)^2}}}
$$

如果 $0 < t < |x| + 2R$，则

$$\int_{B_t(x)} \frac{|f(z)|}{\sqrt{t^2 - |x-z|^2}} \, dz \le 2\pi \|f\|_\infty \int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \, dr = 2\pi \|f\|_\infty t \le 2\pi \|f\|_\infty \frac{(|x| + 2R)^2}{t} \tag{1}$$

涉及 g 和 $|\nabla f|$ 的术语类似。

(c) 为了获得L^∞_x界，我们使用散度定理(a)，将球$B_t(x)$分成半径为$t-1$的内球$B_{t-1}(x)$和外环 $A = B_t(x) \setminus \overline{B_{t-1}(x)}$。

请注意，对于 $t \ge 2$ ($\Leftrightarrow t - 1 \ge \frac{t}{2}$)，

$$\int_{B_{t-1}(x)} \frac{|f(z)|}{\sqrt{t^2 - |x-z|^2}} \, dz \le \int_{B_{t-1}(x)} \frac{|f(z)|}{\sqrt{t^2 - (t-1)^2}} \, dz \le \frac{\|f\|_{L^1}}{\sqrt{2t-1}} \le \frac{\|f\|_{L^1}}{\sqrt{t}}.$$

对于 A 上的积分，可以观察到 $\nabla_y \sqrt{t^2 - y^2} = -\frac{y}{\sqrt{t^2-y^2}}$ 和 $\nabla_z \frac{x-z}{|x-z|^2} \equiv$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上为 0，因此

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{f(z)}{\sqrt{t^2 - |x-z|^2}} \, dz &= -\int_A f(z) \frac{x-z}{|x-z|^2} \cdot \nabla_z \sqrt{t^2 - |x-z|^2} \, dz \\
&= \int_A \operatorname{div}(f(z) \frac{x-z}{|x-z|^2}) \sqrt{t^2 - |x-z|^2} - \int_{\partial A} f(z) \sqrt{t^2 - |x-z|^2} \frac{x-z}{|x-z|^2} \cdot n \, d\sigma(z) \\
&= \int_A (\nabla f)(z) \cdot \frac{x-z}{|x-z|^2} \sqrt{t^2 - |x-z|^2} - \int_{\partial B_{t-1}(x)} f(z) \sqrt{2t-1} \frac{1}{t-1} \, d\sigma(z).
\end{aligned}$$

请注意，第一项以 $\frac{\sqrt{2t-1}}{t-1} \|\nabla f\|_{L^1(A)} \le \frac{\sqrt{2t}}{t/2} \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ 为主。对于第二项，我们发现

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\partial B_{t-1}(x)} f(z) \frac{(x-z)}{t-1} \cdot \frac{(x-z)}{t-1} \, d\sigma(z) \Big| = \Big| \frac{1}{t-1} \int_{B_{t-1}(x)} \operatorname{div}_z [f(z)(x-z)] \, dz \Big| \\
&= \frac{1}{t-1} \Big| \int_{B_{t-1}(x)} \nabla f(z) \cdot (x-z) - 2f(z) \, dz \Big| \le \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f(z)| \, dz + \frac{2}{t-1} \int_{\mathbb{R}^2} |f(z)| \, dz.
\end{aligned}$$

所以对于 $t \ge 2$,

$$\Big| \int_{B_t(x)} \frac{f(z)}{\sqrt{t^2 - |x-z|^2}} \, dz \Big| \le \frac{1}{\sqrt{t}} \Big(4\sqrt{2} \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + (1 + \frac{2}{t-1}) \|f\|_{L^1} \Big).$$

对于 $t \in (0, 2)$，我们从 (1) 中看到 $\Big| \int_{B_t(x)} \frac{f(z)}{\sqrt{t^2-|x-z|^2}} \, dz \Big| \le 2\pi \|f\|_\infty t$。

涉及 g 和 $|\nabla f|$ 的术语类似。 □

Remark 9. 人们还应该尝试从第 186 页的傅立叶表示公式 (3) 来证明这一时间衰减估计，其中人们可以学习如何应用固定相公式来估计某些振荡积分。有关此方向的更多结果，请参阅[19，第 2.2 节]。

6. **Given initial data f and g of the form**

$$f(x) = F(x \cdot \eta) \;\; \textbf{and} \;\; g(x) = G(x \cdot \eta),$$

check that the plane wave given by

$$u(x,t) = \frac{F(x\cdot\eta+t)+F(x\cdot\eta-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x\cdot\eta-t}^{x\cdot\eta+t} G(s)\,ds$$

is a solution of the Cauchy problem for the d-dimensional wave equation.

In general, the solution is given as a superposition of plane waves. For the case $d=3$, this can be expressed in terms of the Radon transform as follows.

Let

$$\widetilde{R}(f)(t,\gamma) = -\frac{1}{8\pi^2}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2 R(f)(t,\gamma).$$

Then

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{S^2}\Big[\widetilde{R}(f)(x\cdot\gamma-t,\gamma) + \widetilde{R}(f)(x\cdot\gamma+t,\gamma) + \int_{x\cdot\gamma-t}^{x\cdot\gamma+t}\widetilde{R}(g)(s,\gamma)\,ds\Big]\,d\sigma(\gamma)$$

where $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Remark 10. 能否从该解表示中推导出问题 $5\frac{1}{2}$ 中的时间衰减结果和惠更斯原理?

Proof. 首先我们从重构公式证明$f(x)=\int_{S^2}\widetilde{R}(f)(x\cdot\gamma,\gamma)\,d\sigma(\gamma)$如下:

$$\begin{aligned}-8\pi^2 f(x) &= \Delta_x\int_{S^2} R(f)(x\cdot\gamma,\gamma)\,d\sigma(\gamma) = \int_{S^2}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^2 R(f)(x\cdot\gamma,\gamma)\gamma\cdot\gamma\,d\sigma(\gamma)\\ &= -8\pi^2\int_{S^2}\widetilde{R}(f)(x\cdot\gamma,\gamma)\,d\sigma(\gamma).\end{aligned}$$

同样，我们有$g(x)=\int_{S^2}\widetilde{R}(g)(x\cdot\gamma,\gamma)\,d\sigma(\gamma)$。因此给定的 $u(x,t)$ 满足 $u(x,0)=f(x)$ 和 $\partial_t u(x,0)=g(x)$。

其次，我们指出这个问题的第一部分可以通过读取不同坐标系中的拉普拉斯算子来证明，即标准坐标系（$e_1,e_2,\cdots,e_d$）和（$\eta,f_1,f_2,\cdots,f_{d-1}$）（它构成了$\mathbb{R}^d$的正交基）。然而，拉普拉斯算子的形式在这种坐标变化下没有改变（因为它只是旋转），但d维波动方程现在被简化为一维波动方程（可以通过达朗贝尔公式求解）。最后，人们可以检查给定的解表示，轻松求解波动方程。

□

7. **For every real number $a>0$, define the operator $(-\Delta)^a$ by the formula**

$$(-\Delta)^a f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}(2\pi|\xi|)^{2a}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}\,d\xi$$

whenever $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(a) Check that $(-\Delta)^a$ agrees with the usual definition of the a-th power of $-\Delta$ (that is, a compositions of minus the Laplacian) when a is a positive integer.

(b) Verify that $(-\Delta)^a(f)$ is indefinitely differentiable.

(c) Prove that if a is not an integer, then in general $(-\Delta)^a(f)$ is not rapidly decreasing.

(d) Let $u(x, y)$ be the solution of the steady-state heat equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, \quad \textbf{with} \quad u(x, 0) = f(x)$$

given by convolving f with the Poisson kernel (see Exercise 8). Check that

$$(-\Delta)^{1/2} f(x) = -\lim_{y \to 0^+} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

and more generally that

$$(-\Delta)^{k/2} f(x) = (-1)^k \lim_{y \to 0^+} \frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, y)$$

for any positive integer k.

Remark 11. 这是一个基本的非本地运算符。请注意，(d) 是非局部问题的基本事实。 2007年，Caffarelli和Silvestre [2]发现了分数拉普拉斯算子的一个重要的扩展定理，即对于$every$情况$a \in (0, 1)$。这使得来自简并椭圆偏微分方程的许多技术适用于该领域。后来，Stinga 和 Torrea [18] 通过半群方法将 Caffarelli-Silvestre 扩展到分数谐振子，其中热核是他们分析中的重要工具。对非本地运营商的调查可以在[13]、[1]、[9]和[8]中找到。

Proof. (a) 我们注意到，如果 $a = 1$，那么对于每个 $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
(-\Delta)(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^2 \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot (-x)}\, d\xi = 4\pi^2 \widehat{|\cdot|^2 \widehat{f}(\cdot)}(-x) \\
&= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right) \widehat{\widehat{f}}(-x) \\
&= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right) f(x).
\end{aligned}$$

然后我们应用归纳论证得出结论这对于所有 $a \in \mathbb{N}$ 都是正确的。

(b) 与 (a) 类似，我们将 $(-\Delta)^a(f)$ 实现为某个函数的傅里叶变换。那么其余证明与第五章命题1.2(v)相同（带有归纳论证）。

(c) 如果 $(-\Delta)^a f$ 在 Schwartz 空间中，则其傅立叶变换 $(2\pi|\xi|)^{2a}\widehat{f}(-\xi)$ 在 Schwartz 空间中。然而，如果 a 不是整数，则函数 $\xi \mapsto |\xi|^{2a}$ 在零处不平滑。

(d) 由于$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y} \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$ (注意到上半平面上拉普拉斯方程的狄利克雷问题没有唯一性定理，例如$f \equiv 0$ 但 $u(x, y) = y \neq 0$)，我们有

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

从$\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 开始，对于任何 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们有:

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, y) = -\int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^k \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

自 $|\xi|^k\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 以来，我们（来自 LDCT）

$$-\lim_{y\to 0^+} \frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^k \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = (-\Delta)^{\frac{k}{2}}(f)(x).$$

(证明这一点的另一种经典方法是利用$\widehat{f}(\xi)$ 快速衰减的优势将 $\mathbb{R}^d$ 的积分分解为“大”和“小”ξ，就像第 5 章的命题 1.2(v)) 的证明一样。

□

8. **The reconstruction formula for the Radon transform in $\mathbb{R}^d$ is as follows:**

(a) When $d = 2$,

$$\frac{(-\Delta)^{1/2}}{4\pi}\mathcal{R}^*(\mathcal{R}(f)) = f.$$

where $(-\Delta)^{1/2}$ is defined in Problem 7.

(b) If the Radon transform and its dual are defined by analogy to the cases $d = 2$ and $d = 3$, then for general d,

$$\frac{(2\pi)^{1-d}}{2}(-\Delta)^{(d-1)/2}\mathcal{R}^*(\mathcal{R}(f)) = f.$$

Proof. 我们只证明(b)，因为它涉及(a)。需要建立$\widehat{R(f)}(s, \gamma)$和$\widehat{f}(s\gamma)$之间的关系。然而，与引理 5.2 相同的证明意味着 $\widehat{R(g)}(s, \gamma) = \widehat{g}(s\gamma)$ 对于 $\gamma \in S^{d-1}$ 和 $s > 0$。此外，我们可以发现该证明仅使用 Fubini 定理，因此它适用于 $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (注意 $P_y, \widehat{P_y} \in L^1(\mathbb{R}^d)\backslash S(\mathbb{R}^d)$)。所以对于每个 $x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}, \gamma \in S^{d-1}$,

$$R(P_y(\cdot - x))(t, \gamma) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{P_y(\cdot - x)}(s\gamma)e^{2\pi i t s}\, ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi y|s|}e^{-2\pi i x\cdot s\gamma}e^{2\pi i t s}\, ds.$$

Hence (using the symmetry of P_y)

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)^{\frac{d-1}{2}}(R^*R(f))(x) &= \lim_{y\to 0^+}(-\frac{\partial}{\partial y})^{d-1}\int_{\mathbb{R}^d}(R^*R(f))(z)P_y(z-x)\,dz \\
&= \lim_{y\to 0^+}(-\frac{\partial}{\partial y})^{d-1}\int_{S^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}R(f))(t,\gamma)\overline{R(P_y(\cdot-x))(t,\gamma)}\,dt\,d\sigma(\gamma) \\
&= \lim_{y\to 0^+}(-\frac{\partial}{\partial y})^{d-1}\int_{S^d}\int_{\mathbb{R}}R(f)(t,\gamma)\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi y|s|}e^{2\pi ix\cdot s\gamma}e^{-2\pi its}\,ds\,dt\,d\sigma(\gamma) \\
&= \lim_{y\to 0^+}\int_{S^d}\int_{\mathbb{R}}R(f)(t,\gamma)\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi y|s|}e^{2\pi ix\cdot s\gamma}e^{-2\pi its}(2\pi|s|)^{d-1}\,ds\,dt\,d\sigma(\gamma) \\
&= (2\pi)^{d-1}\lim_{y\to 0^+}\int_{S^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi y|s|}e^{2\pi ix\cdot s\gamma}\int_{\mathbb{R}}R(f)(t,\gamma)e^{-2\pi its}\,dt|s|^{d-1}\,ds\,d\sigma(\gamma) \\
&= (2\pi)^{d-1}\lim_{y\to 0^+}\int_{S^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi y|s|}e^{2\pi ix\cdot s\gamma}\widehat{f}(s\gamma)|s|^{d-1}\,ds\,d\sigma(\gamma) \\
&= 2(2\pi)^{d-1}\lim_{y\to 0^+}\int_{S^{d-1}}\int_0^\infty e^{-2\pi ys}e^{2\pi ix\cdot s\gamma}\widehat{f}(s\gamma)s^{d-1}\,ds\,d\sigma(\gamma) \\
&= 2(2\pi)^{d-1}\lim_{y\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-2\pi y|\xi|}e^{2\pi ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \\
&= 2(2\pi)^{d-1}\int_{\mathbb{R}^d}e^{2\pi ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \\
&= 2(2\pi)^{d-1}f(x).
\end{aligned}
$$

□

References

[1] 克劳迪娅·布库尔和恩里科·瓦尔迪诺西。 “非局部扩散和应用。” arXiv 预印本 arXiv:1504.08292 (2015)。 [2] 路易斯·卡法雷利和路易斯·西尔维斯特。 “与分数拉普拉斯相关的可拓问题。”偏微分方程中的通信 32.8 (2007): 1245-1260。 [3] Evans, L.C.：偏微分方程，第二版。 AMS，普罗维登斯，罗德岛州，2010。 [4] Folland，Gerald B：傅立叶分析及其应用。卷。 4. 美国数学会，1992。

[5] Folland，Gerald B：偏微分方程简介。普林斯顿大学出版社，1995。

[6] 杰拉尔德·B.福兰德和阿拉迪·西塔拉姆。 “不确定性原理：数学调查。”傅里叶分析与应用杂志 3.3 (1997): 207-238。

[7] G.B.福兰。 *Real analysis: modern techniques and their applications.* 第二版，约翰·威利父子公司，1999 年。

[8] 尼古拉·加罗法洛。“碎片化的想法。” arXiv 预印本 arXiv:1712.03347 (2017)。

[9] Kwaśnicki，马特乌斯。“分数拉普拉斯算子的十个等价定义。”分数阶微积分和应用分析 20.1 (2017): 7-51。

[10] 基尔、马库斯和陶哲轩。“端点 Strichartz 估计。”美国数学杂志 120.5 (1998): 955-980。

[11] 拉克斯、彼得·D.和劳伦斯·扎尔克曼。“真实定理的复杂证明。”卷。 58. 美国数学会，2011。

[12] Lieb、Elliott H. 和 Michael Loss：“分析”。第二版。数学研究生学习 14 (2001)。

[13] 穆西娜、罗伯塔和亚历山大·纳扎罗夫。“论分数拉普拉斯算子。-1,2,3” 偏微分方程通讯 39.9 (2014): 1780-1790 年鉴 de l’Institut Henri Poincare (C) 非线性分析卷。 33，第 6 期，第 1667-1673 页 ESAIM：控制、优化和变分计算 22.3 (2016)：832-841。

[14] Rauch, Jeffrey：双曲偏微分方程和几何光学。卷。 133.美国数学会，2012。

[15] 沃尔特·鲁丁。“数学分析原理”。国际纯粹数学与应用数学系列。（1976）。

[16] 克里斯托弗·唐纳德·索格：“非线性波动方程讲座”。第二版。卷。 2. 马萨诸塞州波士顿：国际出版社，2008 年。

[17] Stein、Elias M. 和 Guido L. Weiss：“欧几里得空间傅立叶分析简介”。卷。 1. 普林斯顿大学出版社，1971 年。

[18] 巴勃罗·拉尔 (Pablo Raúl) 斯廷加 (Stinga)，何塞·路易斯 (Torrea)，何塞·路易斯 (Torrea)。“一些分数算子的可拓问题和哈纳克不等式。”偏微分方程通讯 35.11 (2010): 2092-2122。

[19] 陶，特伦斯。非线性色散方程：局部和全局分析。第 106 期。美国数学会，2006 年。

[20] 乔治·内维尔·沃森：“关于贝塞尔函数理论的论文。”剑桥大学出版社，1944 年。