《傅里叶分析》，斯坦因与沙卡奇著

第5章 在$\mathbb{R}$上的傅里叶变换

黄永祥*

2018年7月10日

Abstract

问题3(c)需要用到复分析中的留数理论。此处我们直接引用该理论，并修正第二卷第83页所给出的计算方法。

在问题6之后，我们收录了带形区域$S_T := \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T)\}$中热方程非负解类的维德唯一性定理证明，该证明取自[4, 第5.14节]。在此证明中，我们需要热方程的内部梯度估计，即命题25，其证明可参考[4, 第5.12节与5.12c节]。

在此，我们还将问题7与第三册中关于Hermite函数的问题4.11结合起来。

我在2018年春季学期担任台湾大学“分析二”课程助教时完成了这份习题解答文件。以下学生提供了部分解答：

问题3(b)(e)：郑格成。

问题3(c)：山姆·王。

问题8与李双燕和蔡宜恒讨论过。

Exercises

1. **Corollary 2.3 in Chapter 2 leads to the following simplified version of the Fourier inversion formula. Suppose f is a continuous function supported on $[-M, M]$, whose Fourier transform $\hat{f}$ is of moderate decrease.**

(a) Fix L with $L/2 > M$, and show that $f(x) = \sum a_n(L) e^{2\pi i n x/L}$ where

$$a_n(L) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-2\pi i n x/L}\, dx = \frac{1}{L}\hat{f}(n/L).$$

*麻省理工学院数学系国立台湾大学硕士论文。电子邮件：d04221001@ntu .tw 教育网

Alternatively, we may write $f(x) = \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n\delta)e2^{\pi n\delta x}$ **with** $\delta = 1/L$**.**

(b) Prove that if F **is continuous and of moderate decrease, then**

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, d\xi = \lim_{\delta \to 0^+} \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\delta n).$$

(c) Conclude that $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{二\pi x\xi}\, d\xi$**.**

Proof. (通过取(b)中的$F(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$然后应用(a)来证明)。

对于(a)，我们注意到f在$[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$上的傅里叶级数为$\sum a_n(L)e^{2\pi inx/L}$。该级数绝对收敛，因此一致收敛，因为根据$\widehat{f}$的适度递减性质，我们有

$$|a_n(L)| = |\frac{1}{L}\hat{f}(n/L)| \leq \frac{L}{L^2 + n^2}.$$

傅里叶级数的唯一性定理与 f 的连续性意味着 x. 在每一点处都满足所求的等式。

(给定ϵ >0，我们有$N = N(\epsilon)$使得$\left|\int_{-n}^{n} F(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, d\xi\right| < \epsilon$每当$n \geq N$。注意存在$L_\epsilon$ >0，使得对于每个$L \geq L_\epsilon$和每个0<< δ <<1,

$$|\delta \sum_{|n| > \frac{L+1}{\delta}} F(\delta n)| \leq A\delta \sum_{|n| > \frac{L}{\delta}+1} \frac{1}{1 + \delta^2 n^2} \leq 2A \int_{\frac{L}{\delta}}^{\infty} \frac{\delta}{1 + \delta^2 x^2}\, dx = 2A(\frac{\pi}{2} - \arctan L) < \epsilon.$$

因此，对于 $M =$: 最大值 $\{N, L_\epsilon + 1\}$ 我们有

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, d\xi - \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\delta n)\Big| \leq& \Big|\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, d\xi - \int_{-M}^{M} F(\xi)\, d\xi\Big| + \Big|\int_{-M}^{M} F(\xi)\, d\xi - \delta \sum_{|n| \leq \frac{M}{\delta}} F(\delta n)\Big| \\
&+ \Big|\delta \sum_{|n| \leq \frac{M}{\delta}} F(\delta n) - \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\delta n)\Big| \\
&\leq 2\epsilon + \Big|\int_{-M}^{M} F(\xi)\, d\xi - \delta \sum_{|n| \leq \frac{M}{\delta}} F(\delta n)\Big|.
\end{aligned}$$

则由 F 在 $[-M, M]$ 上的一致连续性可知，存在 $\delta_\epsilon > 0$，使得当 $\delta \in (0, \delta_\epsilon)$ 时，末项小于 ϵ。

□

2. 设 f 和 g 为以下定义的函数:

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \text{ and } g(x) = \chi_{[-1,1]}(x)\big(1 - |x|\big).$$

虽然f并不连续，但是其傅里叶变换的积分定义仍有意义。容易看出

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} \text{ and } \widehat{g}(\xi) = \Big(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\Big)^2$$

前提是$\widehat{f}(0)$ $= 2$ 且 $\widehat{g}(0)$ $= 1$。注意对于某些 $c, \delta \in \mathbb{R}$ 和 $f_\delta(x)$，可将 g 理解为 cf_δ 与其自身的卷积：$= f(\delta x)$。

3. The following exercise illustrates the principle that the decay of $\widehat{f}$ is related to the continuity properties of f.

(a) Suppose that f is a function of moderate decrease on $\mathbb{R}$ whose Fourier transform $\widehat{f}$ is continuous and satisfies

$$\widehat{f}(\xi) = O\Big(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\Big) \text{ as } |\xi| \to \infty$$

for some 零 $< \alpha <$ 一. Prove that f satisfies a Hölder condition of order α.

(b) Let f be a continuous function on R which vanishes for $|x| \geq 1$, with $f(0) = 0$, and which is equal to $1/$ 对数$(1/|x|)$
for all x in a neighborhood of the origin. Prove
that $\widehat{f}$ is not of moderate decrease. In fact, there is no $\epsilon > 0$ so that $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^{1+\epsilon})$ as $|\xi| \to \infty$.

Proof. (自$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$以来，对于每个$|h| >$，我们有a)

$$\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)[e^{2\pi i(x+h)\xi} - e^{2\pi i x\xi}]\, d\xi \Big| \\
&\leq \Big| \int_{|\xi|>|h|^{-1}} \widehat{f}(\xi)[e^{2\pi i(x+h)\xi} - e^{2\pi i x\xi}]\, d\xi \Big| + \Big| \int_{|\xi|\leq|h|^{-1}} \widehat{f}(\xi)[e^{2\pi i(x+h)\xi} - e^{2\pi i x\xi}]\, d\xi \Big| \\
&\leq 2\int_{|h|^{-1}}^{\infty} 2C|\xi|^{-1-\alpha}\, d\xi + \int_{|\xi|\leq|h|^{-1}} |\widehat{f}(\xi)| 2\sin(\pi|h\xi|)\, d\xi.
\end{aligned}$$

根据假设，存在某个 $M > 0$ 使得对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 均有 $|\widehat{f}| \leq M/(1 + |\xi|^{1+\alpha})$

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\leq 4C\alpha|h|^{\alpha} + 2M \int_0^{|h|^{-1}} \frac{\sin(\pi|h\xi|)}{1 + |\xi|^{1+\alpha}}\, d\xi \\
&\leq 4C\alpha|h|^{\alpha} + 2M|h|^{\alpha} \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{u^{1+\alpha}}\, du \\
&\leq 4C\alpha|h|^{\alpha} + 2M|h|^{\alpha} M' \int_0^1 \frac{1}{u^{\alpha}}\, du = K|h|^{\alpha},
\end{aligned}$$

其中K独立于h。

(b)$\widehat{f}$ 的连续性是一个普遍事实。假设$\widehat{f}$ 对某个 $1 > \epsilon > 0$ 满足衰减条件，则 f 是 ϵ-赫尔德连续的，尤其在原点附近。然而可以发现当 $|h| \to$ 趋近于 0 时，

$$\Big|\frac{f(h) - f(0)}{h^{\epsilon}}\Big| = \frac{|h|^{-\epsilon}}{\log|h|^{-1}} \to \infty.$$

这是一个矛盾。

□

4. Examples of compactly supported functions in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ are very handy in many applications in analysis. Some examples are:

(a) Suppose $a < b$, and f is the function such that $f(x) = 0$ if $x \le a$ or $x \ge b$ and $f(x) = e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)}$ if $a < x < b$. Show that f is indefinitely differentiable on $\mathbb{R}$.

(b) Prove that there exists an indefinitely differentiable function F on $\mathbb{R}$ such that $F(x) =$ 零 if $x \le a$, $F(x) =$ 一 if $x \ge b$, and F is strictly increasing on 【a, b】.

(c) Let $\delta > 0$ be so small that $a + \delta < b - \delta$. Show that there exists an indefinitely differentiable function g such that g is 0 if $x \le a$ or $x \ge b$, g is 1 on $[a + \delta, b - \delta]$, and g is strictly monotonic on $[a, a + \delta]$ and $[b - \delta, b]$.

Proof. 我们可以假定 $a > 0$（为何如此？）。(a) 部分很简单（通过数学归纳法）。对于 (b)，考虑 $F(x) = c\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$，其中 c 是 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ 的倒数。对于 (c)，我们首先注意到 $\widetilde{h}(x) = 1 - F(x^2)$ 是一个在 $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$ 上等于 1、在 $\{\sqrt{a} \le |x| \le \sqrt{b}\}$ 上递减、且在 $\{|x| \ge \sqrt{b}\}$ 外消失的函数。经过适当的缩放和平移后，我们便得到所需函数。

$\square$

5. **Suppose f is continuous on $\mathbb{R}$ and of moderate decrease.**

(a) Prove that $\widehat{f}$ is uniformly continuous and vanishes at infinity.

(b) Show that if $\widehat{f}(\xi) = 0$ for all ξ, then f is identically 0.

Proof. (a) (第一个证明，不使用勒贝格控制收敛定理) 给定$\epsilon > 0$，选取足够大的N使得 2 $A\int_{|x|>N} \frac{1}{1+x^2}\,dx < \epsilon/2$，其中$A > 0$为适中的常数。于是

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-2\pi ixh} - 1|\,dx \le 2A\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin \pi hx|}{1 + x^2}\,dx \\ &\le 2A\Big(\int_{-N}^{N} \frac{|\sin \pi hx|}{1 + x^2} + \int_{|x|>N} \frac{1}{1 + x^2}\,dx\Big) < \epsilon\end{aligned}$$

假设 h 足够小，使得对所有 $x \in [-\pi, \pi]$ 满足 $|\sin \pi hx| < \frac{\epsilon}{8AN}$。注意 h 的小量性与 ξ 无关，因此连续性是一致的。

（第二种证明，使用LDCT。）连续性直接来自LDCT。注意到

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} -f(y - \frac{1}{2\xi})e^{-2\pi iy\xi}\,dy.$$

因此$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[f(x) - f(x - \frac{1}{2\xi})\right]e^{-2\pi ix\xi}\,dx$，从而勒贝格控制收敛定理意味着 ∞ 处的衰减。

(b) 给定$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，则由富比尼定理可知

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi iyx}\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iyx}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)\widehat{f}(y)\,dy = 0.$$

具体而言，对于每个 $y\in\mathbb{R}$，我们选取其傅里叶变换为$\widehat{g}_y(x)=e^{-\pi(x-y)^2/\delta}\delta^{-1/2}$ 的 $g_y(\xi)=e^{-\pi\xi^2\delta}e^{2\pi i\xi y}$。令 $\delta\to 0$，则有 $f(y)=0$。

$\square$

Remark 1. 参见第三册中的习题2.22（黎曼-勒贝格引理）和2.25（$\widehat{f}$的衰减速率可能慢至任意ϵ的$|\xi|^{-\epsilon}$）。另可参考[18, Section I.4.1]或[15, Exercise 1.6]以说明从$L^1(\mathbb{R}^d)$到$C_0(\mathbb{R}^d)$的傅里叶变换映射不是满射。对于$L^1(\mathbb{T})$的情形，参见第四册第四章第3.1节。

Remark 2. 对于$\mathbb{T}$上的函数，可以构造其傅里叶变换具有任意缓慢衰减的函数，参见[9, Section 3.3.1]。

六、

The function $e^{-\pi x^2}$ is its own Fourier transform. Generate other functions that (up to a constant multiple) are their own Fourier transforms. What must the constant multiples be? To decide this, prove that $\mathcal{F}^4=I$. Here $\mathcal{F}(f)=\widehat{f}$ is the Fourier transform, $\mathcal{F}^4=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F}$, and I is the identity operator $(If)(x)=f(x)$ (see also Problem 7).

Proof. 若 $\mathcal{F}(g)=cg$，则由于 $\mathcal{F}^4=I$，有 $c^4=1$。因此 $c\in\{1,-1,i,-i\}$。情况 $c=1$ 已在陈述中通过 $g(x)=e^{-\pi x^2}$ 解决。注意 $g'=-2\pi xg(x)$，因此$\widehat{g'}(x)=2\pi ix\widehat{g}(x)=2\pi ixg(x)=-ig'(x)$，即情况 $c=-i$ 具有本征函数 $g'(x)=-2\pi xe^{-\pi x^2}$。

此外，我们再次对 g' 求导，发现 $g''(x)=-2\pi g(x)+4\pi^2x^2g(x)$，因而$\widehat{g''}(x)=-4\pi^2x^2\widehat{g}(x)=-4\pi^2x^2g(x)=-2\pi g(x)-g''(x)$，也就是说，由于 $\widehat{g''+\pi g}(x)=-(\pi g(x)+g''(x))$，当 $c=-1$ 时存在特征函数。

最后，我们再次对g''求导，可得$g'''(x)=-2\pi g'(x)+8\pi^2xg(x)+4\pi^2x^2g'(x)=-6\pi g'+4\pi^2x^2g'(x)$。对两边进行傅里叶变换，得到：

$$\widehat{g'''+3\pi g'}(\xi)=-3\pi\widehat{g'}(\xi)-\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{g'}=i(3\pi g'+g''')(\xi),$$

也就是说，$g'''+3\pi g'$ 是 $c=i$ 的一个本征函数。 $\square$

Remark 注意这四个特征空间E_1,E_{-1},E_i,E_{-i}张成了整个$L^2(\mathbb{R}^d)$，也就是说，给定 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$，我们正在$f_k\in E_k$中寻找满足$f=f_1+f_{-1}+f_i+f_{-i}$的$k=\pm1,\pm i$。为了找到这些f_k，可以通过以下三个方程用线性代数（矩阵）求解：$\mathcal{F}f=f_1-f_{-1}+if_i-if_{-i}$、$\mathcal{F}^2f=f_1+f_{-1}-f_i-f_{-i}$、$\mathcal{F}^3f=f_1-f_{-1}-if_i+if_{-i}$。

对L^2的这种分解可用于给出$\mathcal{F}$特征函数的新例子，例如之前的f_1应为$(f+\mathcal{F}f+\mathcal{F}^2f+\mathcal{F}^3f)/4$，现在我们取$f(x)=e^{-2\pi|x|}$ (所以$\mathcal{F}f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

且$\mathcal{F}^2 f = f$。因此，$2f_1(x) = e^{-2\pi|x|} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$也是$c =$的一个本征函数，与练习中给出的不同。这一观点是我从[12，第338-339页]了解到的。

第七:
Prove that the convolution of two functions of moderate decrease is a function of moderate decrease.

Proof. 设 f, g 为缓减函数。若在勒贝格意义下理解积分，则可通过勒贝格控制收敛定理证明 $f * g$ 的连续性；若在黎曼意义下理解积分，则可参照下述缓减函数证明中的标准方法，将积分分解为“局部”部分与“远端”部分进行处理，我们在此省略其细节。

另一方面，适度递减性质可按如下方式证明:

$$\begin{aligned}|f * g(x)| &\leq \int_{|t|\leq\frac{|x|}{2}} |f(t)||g(x-t)|\,dt + \int_{|t|>\frac{|x|}{2}} |f(t)||g(x-t)|\,dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt \frac{c_g}{1+\frac{|x|^2}{4}} + \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\,dt \frac{c_f}{1+\frac{|x|^2}{4}} \leq \frac{M}{1+|x|^2}.\end{aligned}$$

□

8. **Prove that if f is continuous, of moderate decrease, and $\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}\,dy = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, then $f \equiv 0$.**

Proof. 我们知道对于所有 $z \in \mathbb{R}$，都有 $[f * e^{-x^2}](z) = e^{-z^2} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-y^2}e^{2zy}\,dy = 0$。因此，由于对于所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 都有 $\widehat{f}(\xi)\widehat{e^{-x^2}}(\xi) = \widehat{f * e^{-x^2}}(\xi) = 0$，可得$\widehat{f} \equiv 0$。于是根据傅里叶逆定理，有 $f \equiv 0$。□

Remark 4. 对于所有$L^1(\mathbb{R}^d)$或$L^2(\mathbb{R}^d)$函数都成立。

九. **If f is of moderate decrease, then**

$$\int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}\,d\xi = (f * F_R)(x),$$

where the Fejér kernel on the real line is defined by $F_R(t) = R\left(\frac{\cancel{\text{正弦}}\ \pi tR}{\pi tR}\right)^2$ if $t \neq 0$ and $F_R(0) = R$. Show that $\{F_R\}$ is a family of good kernels as $R \to \infty$, and therefore $(f * F_R)$ tends uniformly to $f(x)$ as $R \to \infty$. This is the analogue of Fejér's theorem for Fourier series in the context of the Fourier transform.

Proof. 请注意，对于所有 $R > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |F_R(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} F_R(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = 1$$

因此对于所有$\delta > 0$

$$\int_{[-\delta,\delta]^c} F_R(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi R\delta}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \to 0 \text{ as } R \to \infty$$

□

一零. **Below is an outline of a different proof of the Weierstrass approximation theorem**

Dfine the Landau kernels by

$$L_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{c_n}\chi_{|x|\leq 1}.$$

where c_n is chosen so that 下确界 $^{\infty}_{-\infty} L_n(x)\,dx =$
. Prove that $\{L_n\}_{n\geq 0}$ is a family of good
kernels as $n \to \infty$. As a result, show that if f is a continuous function supported in $[-1/2, 1/2]$, then $(f * L_n)(x)$ is a sequence of polynomials on $[-1/2, 1/2]$ which converges uniformly to f.

Proof. 注意 $c_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = 2\int_0^1(1-x^2)\,dx \geq 2\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{n+1}$。因此对于任意 $\delta > 0$，有 $\int_{\delta\leq|x|} L_n(x)\,dx \leq (1-\delta^2)^n(n+1) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时。 □

11. **Suppose that u is the solution to the heat equation given by $u = f * \mathcal{H}_t$ where $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. If we also set $u(x,0) = f(x)$, prove that u is continuous on the closure of the upper half-plane, and vanishes at infinity, that is, $u(x,t) \to 0$ as $|x| + t \to \infty$.**

Remark 5. 我们不仅需要考虑切向极限，即$(x_0,t) \to (x_0,0)$，还需考虑非切向极限(x,t) $\to (x_0,0)$。然而，证明思路几乎相同。此外，关于f的条件可以弱化为$f \in C(\mathbb{R})$且具有适度递减性。

Proof. 根据注记中陈述的更弱假设，f 是一致连续的。因此对于每个 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得当 $|y - x_0| < \delta$ 时总有 $|f(y) - f(x_0)| < \epsilon$。注意到对于每个满足 $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ 的 x，我们有 $\{y : |x - y| < \frac{\delta}{4}\} \subset \{|x_0 - y| < \delta\}$，因此

$$\begin{aligned}|u(x,t) - f(x_0)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} \Big[f(y) - f(x_0)\Big]\mathcal{H}_t(x-y)\,dy\Big| \\ &\leq \int_{|x-y|<\frac{\delta}{4}} 2\epsilon\mathcal{H}_t(x-y)\,dy + 2\|f\|_\infty \int_{|x-y|\geq\frac{\delta}{4}} \mathcal{H}_t(x-y)\,dy.\end{aligned}$$

因此存在一个独立于x的$t_\epsilon > 0$，使得当条件满足时，$|u(x,t) - f(x_0)| \leq 3\epsilon$
$t \in (0, t_\epsilon)$ 和 $|x - x_0| < \frac{\delta}{4}$。

注意到对于所有$x \in \mathbb{R}, t > 0$，有$|u(x,t)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}(4\pi t)^{-1}$。因此当$|x| + t \to \infty$且$|x| \le 2t$时，它趋近于零。对于$|x| > t$的情况，我们注意到

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(y)|(4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-|x-y|^2/4t}\, dy \\
&= \int_{|x-y|>\frac{|x|}{2}} |f(y)|(4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-|x-y|^2/4t}\, dy + \int_{|x-y|\le\frac{|x|}{2}} |f(y)|(4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-|x-y|^2/4t}\, dy \\
&\le (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-|x|^2/16t} \int_{|x-y|>\frac{|x|}{2}} |f(y)|\, dy + \int_{|x-y|\le\frac{|x|}{2}} \frac{M}{1+|y|^2}(4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-|x-y|^2/4t}\, dy \\
&\le (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-|x|^2/16t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{M}{1+\frac{|x|^2}{4}}.
\end{aligned}
$$

如果 $|x| + t \to \infty$ 与 $t \ge \epsilon$ 对于某个 $\epsilon > 0$ 成立，则 $|x| \to \infty$ (，因为我们假设 $|x| > t$) 且

$$|u(x,t)| \le (4\pi\epsilon)^{-\frac{1}{2}} e^{-|x|/16} + \frac{4M}{4+|x|^2} \to 0 \text{ as } |x| \to \infty.$$

如果 $|x| + t \to \infty$ 带 $t \to 0^+$，那么 $|x| \to \infty$ 和

$$|u(x,t)| \le (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-1/16t} + \frac{4M}{4+|x|^2} \to 0 \text{ as } |x| \to \infty,\ t \to 0^+.$$

□

十二、**Show that the function**

$$u(x,t) = \frac{x}{t}\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t}$$

(1) satisfies the 1-d heat equation for $t > 0$, (2) 极限$_{t\to 0}\, u(x,t) = 0$ for every $x \in \mathbb{R}$,

(3) 极限$_{(x,t)\to(x_0,0)}\, u(x,t) = 0$ for every $x_0 \ne 0$ and (4) u is not continuous at the origin.

Remark 因此，它不能作为$\mathbb{R} \times (0,T)$中热方程非唯一性现象的例子。确切的反例由问题4给出。

Proof. (1)(2)是平凡的。(3) 是洛必达法则和标准夹逼定理的推论。(4) 当 $x \to$ 趋近于 0 时，$u(x,x^2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^2}} e^{-1/4} \to \infty$。 □

13. **Prove the following uniqueness theorem for harmonic functions in the strip $S = \{(x,y)\colon\ 0 < y < 1, -\infty < x < \infty\}$: if u is harmonic in S, continuous on S with $u(x, 0) = u(x,1) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, and u vanishes at infinity, then $u = 0$.**

Proof. 对于每个$\epsilon > 0$，可利用最大模原理（教材中已证明均值定理）推出$|u| \le \epsilon$在S上成立。因此$u \equiv 0$。

我们概述另一种方法，类似于定理2.7的证明。假设不是这样，我们可以设 $M =$ 上确界 $u > 0$。因此对于某个 $(x_1, y_1) \in S$ 有 $u(x_1, y_1) = M$。根据一致连续性

在u和球$B_{r\min\{|y_1|,1-|y_1|\}}(x_1,y_1)$的均值性质下，我们得出一个矛盾：当$r$接近1时，对于某个$\delta >>0$有$M \leq M-\delta$成立。

$\square$

14. **Prove that the periodization of the Fejér kernel $\mathcal{F}_N$ on the real line (Exercise 9) is equal to the Fejér kernel for periodic functions of period 1. In other words,**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_N(x+n) = F_N(x),$$

when $N \geq$ 一 is an integer, and where

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \Big(1-\frac{|n|}{N}\Big)e^{2\pi inx} = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(N\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

Proof. 由于$\widehat{\mathcal{F}_R}(\xi) = (1-\frac{|\xi|}{R})\chi_{[-R,R]}(\xi)$对于所有$R>0, \xi\in\mathbb{R}$成立，根据泊松求和公式可得所需结果。

$\square$

十五. **This exercise provides another example of periodization.**

(a) **Apply the Poisson summation formula to the function g in Exercise 2 to obtain**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin\pi\alpha)^2}$$

whenever α is real, but not equal to an integer.

(b) **Let $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Prove as a consequence that**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan\pi\alpha}$$

where the series is defined through the symmetric partial sum about $\lfloor\alpha\rfloor$, the largest integer $\leq\alpha$. (Note that this series is not absolutely convergent, so we need to assign the order of summation here.)

Remark 其他证明可参阅习题3.9及第二卷习题3.12.。

Proof. (a) 泊松求和公式应用于 $f=\widehat{g}$ 和 $x=\alpha$ 意味着

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\pi\alpha}{\pi^2(n+\alpha)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(n+\alpha))}{\pi^2(n+\alpha)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(-n)e^{2\pi in\alpha} = 1.$$

(假设$0<\alpha<1$首先成立。注意到对于$n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{-n+\alpha} = -\int_0^{\alpha} \frac{1}{(n+x)^2}+\frac{1}{(-n+x)^2}\,dx$$

注意到通过带$\sup_{x\in(0,1)}(n+x)^{-2}=n^{-2}$和$\sup_{x\in(0,1)}(-n+x)^{-2}=(n-1)^{-2}$的$M$检验，$\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n+x)^2}$在(0, 1)上一致收敛，对所有$n\geq 2$成立。因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{-n+\alpha}&=\frac{1}{\alpha}-\int_0^{\alpha}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n+x)^2}\,dx=\frac{1}{\alpha}-\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{\alpha}\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}-\frac{1}{x^2}\,dx\\&=\frac{1}{\alpha}-\Big(-\frac{\pi}{\tan\pi\alpha}+\frac{1}{\alpha}\Big)+\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big(-\frac{\pi}{\tan\pi\epsilon}+\frac{1}{\epsilon}\Big)=\frac{\pi}{\tan\pi\alpha}.\end{aligned}$$

最后，对于任意$\alpha\in\mathbb{R}$、$\alpha=\lfloor\alpha\rfloor+\alpha_1$，其中$0<\alpha_1<1$。因此，根据这个级数的定义和前述结果

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n+\alpha}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n+\alpha_1}=\frac{\pi}{\tan\pi\alpha_1}=\frac{\pi}{\tan\pi\alpha}$$

□

16. **The Dirichlet kernel on the real line is defined by**

$$\int_{-R}^{R}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi=(f*\mathcal{D}_R)(x)\ \textbf{ so that }\ \mathcal{D}_R(x)=\widehat{\chi_{[-R,R]}}(x)=\frac{\sin(2\pi Rx)}{\pi x}.$$

Also, the modified Dirichlet kernel for periodic functions of period 1 is defined by

$$D_N^*(x)=\sum_{|n|\leq N-1}e^{2\pi inx}+\frac{1}{2}(e^{-2\pi iNx}+e^{2\pi iNx}).$$

Show that the result in Exercise 15 gives

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{D}_N(x+n)=D_N^*(x),$$

where $N\geq$ 一
is an integer, and the infinite series must be summed symmetrically.
In other words, the periodization of $\mathcal{D}_N$ is the modified Dirichlet kernel D_N^*. Also show that if $R\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$, then

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{D}_R(x+n)=D_{[R]}(x),$$

where $[R]$ is the largest integer $\leq R$.

Remark 对应于问题3.1，可以类似地定义修正的共轭狄利克雷核$\widetilde{D}_N^*$，即

$$\widetilde{D}_N^*(x)=\sum_{|n|\leq N-1}\operatorname{sign}(n)e^{2\pi inx}+\frac{1}{2}(-e^{-2\pi iNx}+e^{2\pi iNx}).$$

Proof. 注意，由于$\mathcal{D}_R$不在$L^1(\mathbb{R})$ (中，我们无法应用泊松求和公式，因此反演公式失效)。所以我们回到对称部分和:

$$\sum_{k=-L}^{L} D_R(x+k) = \sum_{k=-L}^{L}\int_{-R}^{R} e^{-2\pi i\xi(x+k)}\,d\xi = \int_{-R}^{R} e^{-2\pi i\xi x}\sum_{k=-L}^{L} e^{-2\pi i\xi k}\,d\xi = \int_{-R}^{R} e^{-2\pi i\xi x} D_L(\xi)\,d\xi$$
$$= \sum_{m\le[R]-1} e^{-2\pi i\xi m}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_x(0-\xi)D_L(\xi)\,d\xi + e^{-2\pi i[R]x}\int_{-\frac{1}{2}}^{R-[R]} f_x(0-\xi)D_L(\xi)\,d\xi$$
$$+\, e^{2\pi i[R]x}\int_{-R+[R]}^{\frac{1}{2}} f_x(0-\xi)D_L(\xi)\,d\xi$$

其中 $f_x(s) := e^{2\pi i\xi s}$。因此关于 $f_x(s)$、$f_x(s)\chi_{(-\frac{1}{2},\delta)}(s)$ 和 $f_x(s)\chi_{(-\delta,\frac{1}{2})}(s)$ $(\delta\ge 0)$ 的傅里叶级数的切萨罗或阿贝尔和的陶伯定理（见习题2.14与问题2.3）意味着当 $L\to\infty$ 时,

$$\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} f_x(0-\xi)D_L(\xi)\,d\xi \to f(0)=1 \text{ if } \delta>0 \text{ and } \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_x(0-\xi)D_L(\xi)\,d\xi \to \frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{1}{2}.$$

另一种情况类似，因此证明完成。 □

17. 伽马函数定义为适用于 $s>0$

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx.$$

(可以很容易地证明，当$s>0$时上述积分有意义，即以下两个极限存在:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx \text{ and } \lim_{A\to\infty}\int_1^A e^{-x}x^{s-1}\,dx.$$

(然后可以利用分部积分法证明$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$当$s>0$时成立，并得到结论：(1)对任意整数$n\ge 1$都有$\Gamma(n+1)=n!$；(2)$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$与$\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\pi}{2}$显然成立。

18. **The zeta function is defined for $s>1$ by $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$. Verify the identity**

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}(\vartheta(t)-1)\,dt \quad \textbf{whenever } s>1$$

where Γ and ϑ are the gamma and theta functions, respectively. $\vartheta(s) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}$. **More about the zeta function and its relation to the prime number theorem can be found in Book II.**

Proof. 对于 $s>$ 一

$$\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}(\vartheta(t)-1)\,dt = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}-1\Big)\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t}t^{\frac{s}{2}-1}\,dt$$
$$=2\sum_{n=1}^\infty \pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}\int_0^\infty e^{-z}z^{\frac{s}{2}-1}\,dz = 2\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

其中，求和与积分顺序的交换可通过单调收敛定理（若使用勒贝格积分）或通过一致收敛与反常黎曼积分的严谨论证实现（此处涉及两次交换：一次是关于$[0, M]$上的积分与求和，另一次是关于极限$_{M\to\infty}$与求和）。

□

19. **The following is a variant of the calculation of $\zeta(二m) = \sum_{n=1}^{\infty}$ 一 $/n^{2m}$ found in Problem 4, Chapter 3.**

(a) **Applying the Poisson summation formula to $f(x) = t/(\pi(x2_{+}t^2))$ and $\widehat{f}(\xi) = e^{-2}$ $_{\pi t|\xi|}$ where $t > 0$, we get**

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|}.$$

(b) **Prove the following identity valid for 零 $< t <$ 一:**

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+n^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\zeta(2m)t^{2m-1}.$$

Also note the following trivial fact

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|} = \frac{2}{1-e^{-2\pi t}} - 1.$$

(c) **Use the fact that**

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m},$$

where B_k are the Bernoulli numbers to deduce from the above formula,

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}.$$

Proof. (b) 对于 $0 < t < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{n^2}\frac{1}{(t/n)^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{n^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\frac{t}{n})^{2m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{t^{2m-1}}{n^{2m}}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}t^{2m-1}\sum_{n=1}\frac{1}{n^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}t^{2m-1}\zeta(2m),$$

其中富比尼定理——即对求和$\sum_n$与$\sum_m$的次序进行互换——是允许的，因为二重级数$\sum_{n,m}(-1)^{m+1}\frac{t^{2m-1}}{n^{2m}}$绝对收敛，这一点很容易证明。

(c) 注意到对于 $z = -2\pi t$, $(0 < t < 1)$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{(2m)!} t^{2m} = \frac{-2\pi t}{e^{-2\pi t} - 1} - 1 - \pi t = -1 + \pi t \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|}$$

$$= -1 + \pi t \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + n^2} = -1 + 1 + 2t \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \zeta(2m) t^{2m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} 2(-1)^{m+1} \zeta(2m) t^{2m}.$$

根据幂级数的唯一性（参见《数学分析原理》定理8.5），

$$\frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{(2m)!} = 2(-1)^{m+1} \zeta(2m).$$

□

20. **The following results are relevant in information theory when one tries to recover a signal from its samples.**

Suppose f is of moderate decrease and that its Fourier transform $\widehat{f}$ is supported in $I = [-1/2, 1/2]$
. Then, f is entirely determined by its restriction to $\mathbb{Z}$. This means that if g is another function of moderate decrease whose Fourier transform is supported in I and $f(n) = g(n)$ for all $n \in \mathbb{Z}$, then $f = g$. More precisely:

(a) Prove that the following reconstruction formula holds:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) K(x-n) \quad \textbf{where} \quad K(y) = \frac{\sin \pi y}{\pi y}$$

Note that $K(y) = O(一/|y|)$ as $|y| \to \infty$.

(b) If $\lambda >$ 一, then

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} f(\frac{n}{\lambda}) K_\lambda(x - \frac{n}{\lambda}) \quad \textbf{where} \quad K(y) = \frac{\cos \pi y - cos \pi \lambda y}{\pi^2 (\lambda - 1) y^2}.$$

Thus, if one samples f "more often," the series in the reconstruction formula converges faster since $K_\lambda(y) = O(一/|y|^{二}$
$)$ as $|y| \to \infty$. Note that $K_\lambda(y) \to K(y)$ as $\lambda \to$ 一.

(c) Prove that $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2$.

Remark 9. 对比练习7.8。

Remark 10. 这是著名的香农采样定理。详见综述文章[1]。其与连续小波变换的关系可参考[3, 第二章]。

Proof. (a) 对于$g(x) = \widehat{f}(x)$使用泊松求和公式，可得

$$\widehat{f}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + n) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{2\pi i(-n)\xi}.$$

因此

$$f(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)e^{2\pi i\xi(x-n)}\,d\xi=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)\frac{\sin\pi\xi(x-n)}{\pi(x-n)},$$

其中，和与积分的交换由具有上界$|f(n)|\le\frac{M}{1+n^2}$的缓减一致收敛性所保证。

(b) 思路相同：利用泊松求和公式，将特征函数 $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ 替换为图2中描述的函数 $\phi(\xi)$。此处我们略去关于 $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\phi(\xi)e^{2\pi i\xi(x-\frac{n}{\lambda})}\,d\xi$ 的繁琐计算。

(c) 根据普朗歇尔定理及泊松求和公式，可得

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)e^{2\pi i(-n)\xi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\overline{f(m)}e^{2\pi im\xi}\,d\xi$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}f(n)\overline{f(m)}e^{2\pi i(m-n)\xi}\,d\xi=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}f(n)\overline{f(m)}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{2\pi i(m-n)\xi}\,d\xi=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|^2,$$

其中第三个和第四个等式是由于该级数以 $|f(n)f(m)|\le\frac{M^2}{(1+n^2)(1+m^2)}$. 为界绝对（从而一致）收敛。

□

21. **Suppose that f is continuous on $\mathbb{R}$. Show that f and $\widehat{f}$ cannot both be compactly supported unless $f=0$. This can be viewed in the same spirit as the uncertainty principle.**

**[Hint: Assume f is supported in $[0,1/2]$
. Expand f in a Fourier series in the interval $[0,1]$
, and note that as a result, f is a trigonometric polynomial.]**

Proof. 假设 f 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上具有紧支集，且 $\widehat{f}$ 同样具有紧支集（例如在某个 $M>0$. 的 $[-M,M$
$]$ 内）

作为提示，$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{2\pi inx}=\sum_{|n|\le M}\widehat{f}(n)e^{2\pi inx}$ 其中 $\widehat{f}(n)=\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-2\pi int}\,dt=\int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}$.
所以这个级数是$\mathbb{R}$上的一个收敛三角多项式。

傅里叶级数的唯一性表明f等于该多项式。除非$f\equiv 0$, f在$[0,1]$内仅能有有限个根，因此不可能在$[0,\frac{1}{2}]$.内具有紧支撑性。

□

Remark 11. 关于$widehat f$的假设可以弱化为指数衰减，即$|widehat f(\xi)|\lesssim e^{-k|\xi|}$.。证明思路是：首先，我们利用反演公式考察$f$的光滑性及其幂级数在固定收敛半径内的收敛性，该收敛半径至少为

最小$\frac{k}{2\pi}$处处成立。因此，它在 $\mathbb{R}$, 上是实解析的，且除非恒等于 0，否则不可能具有紧支撑集。

二十二、

The heuristic assertion stated before Theorem 4.1 can be made precise as follows. If F is a function on $\mathbb{R}$, then we say that the preponderance of its mass is contained in an interval I (centered at the origin) if

$$\int_I x^2|F(x)|^2\,dx \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2|F(x)|^2\,dx \tag{1}$$

Now suppose $f \in \mathcal{S}$, and (1) holds with $F = f$ and $I = I_1$; also with $F = \widehat{f}$ and $I = I_2$. Then if L_j denotes the length of I_j , we have

$$L_1L_2 \geq \frac{1}{2\pi}.$$

A similar conclusion holds if the intervals are not necessarily centered at the origin.

Proof. 我们不妨假设 $\|f\|_2 = 1$，从而根据 Plancherel 定理有 $\|\widehat{f}\|_2 = 1$。因此定理 1.4 蕴含了所需结果如下:

$$\begin{aligned}(L_1L_2)^2 &= 16\Big(\frac{L_1}{2}\Big)^2\Big(\frac{L_2}{2}\Big)^2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \geq 16\int_{I_1}x^2|f(x)|^2\,dx\int_{I_2}|\xi|^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\\ &\geq 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\,dx\int_{\mathbb{R}}|\xi|^2|\widehat{f}(\xi)|^2 \geq \frac{1}{4\pi^2}.\end{aligned}$$

□

23. **The Heisenberg uncertainty principle can be formulated in terms of the operator $L = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, which acts on Schwartz functions by the formula**

$$L(f) = -\frac{d^2f}{dx^2} + x^2f.$$

This operator, sometimes called the Hermite operator, is the quantum analogue of the harmonic oscillator. Consider the usual inner product on $\mathcal{S}$ given by

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \textbf{whenever} \quad f,g \in \mathcal{S}.$$

(a) Prove that the Heisenberg uncertainty principle implies

$$(Lf,f) \geq (f,f) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

This is usually denoted by $L \geq I$.

(b) Consider the operators A and A^* defined on $\mathcal{S}$ by

$$A(f) = \frac{df}{dx} + xf \quad \text{and} \quad A^*(f) = -\frac{df}{dx} + xf.$$

The operators A and A^* are sometimes called the annihilation and creation operators, respectively. Prove that for all $f, g \in \mathcal{S}$ we have

(i) $(Af, g) = (f, A^*g)$**, (ii)** $(A^*Af, f) = (Af, Af) \geq 0$**, (iii)** $A^*A = L - I$**.**

In particular, this again shows that $L \geq I$.

(c) Now for $t \in \mathbb{R}$, let

$$A_t(f) = \frac{df}{dx} + txf \quad \text{and} \quad A_t^*(f) = -\frac{df}{dx} + txf.$$

Use the fact that $(A_t^* A_t f, f) \geq$ 零
to give another proof of the Heisenberg uncertainty
principle which says that whenever $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx =$ 一 then

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{df}{dx}\right|^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

Remark 12. 参见问题7和[6，第6章]。

Proof. (根据定理1.4和算术-几何平均不等式

$$\begin{aligned}(Lf, f) &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{df}{dx}\right|^2 + x^2|f(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 x^2 |\widehat{f}(x)|^2 + x^2 |f(x)|^2 \\ &\geq 2\left(\int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 x^2 |\widehat{f}(x)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\right)^{1/2} \geq 4\pi \frac{1}{4\pi}(f, f).\end{aligned}$$

(b) (i)(ii) 使用分部积分法，（iii）是显然的。

(c) 注意 $0 \leq (A_t f, A_t f) = (A_t^* A_t f, f) = t^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx - t \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}} |\frac{df}{dx}(x)|^2\, dx$。

随后我们通过基本代数完成证明

$$\left(-\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^2 - 4\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |\frac{df}{dx}(x)|^2\right) \leq 0.$$

$\square$

Problems

一、**The equation**

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ax\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

with $u(x, 零) = f(x)$ for $零 < x < \infty$ and $t > 零$
is a variant of the heat equation which
occurs in a number of applications. To solve this equation, make the change of variables $x = e^{-y}$ so that $-\infty < y < \infty$. Set $U(y,t) = u(e^{-y}, t)$ and $F(y) = f(e^{-y})$. Then the problem reduces to the equation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (1-a)\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

with $U(y, 零) = F(y)$. This can be solved like the usual heat equation (the case $a =$ 一)
by taking the Fourier transform in the y variable. One must then compute the integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-4\pi^2\xi^2+(1-a)2\pi i\xi)t} e^{2\pi i\xi v}\, d\xi$. Show that the solution of the original problem is then given by

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_0^\infty e^{-(\log(v/x)+(1-a)t)^2/(4t)} f(v)\, \frac{dv}{v}.$$

Proof. 我们省略这两个方程等价性的简单证明。在y中对方程进行傅里叶变换，得到

$$(-4\pi^2\xi^2 + (1-a)2\pi i\xi)\widehat{U}(\xi,t) = \partial_t \widehat{U}(\xi,t)$$

所以$\widehat{U}(\xi,t) = e^{(-4\pi^2\xi^2+2\pi i(1-a)\xi)t}\widehat{F}(\xi) =$，其中 $G(y,t)$ 由反演公式决定，即

$$G(y,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{(-4\pi^2\xi^2+2\pi i(1-a)\xi)t} e^{2\pi i\xi y}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2\pi i\xi(t(1-a)+y)}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(t(1-a)+y)^2/(4t)}.$$

因此 $U(y,t) = \int_{\mathbb{R}} F(s) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(t(1-a)+y-s)/(4t)}\, ds$ 然后（当 $s = -$ 取对数 v 且 $y = -$ 取对数 x 时）

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_0^\infty e^{-(\log(v/x)+(1-a)t)^2/(4t)} f(v)\, \frac{dv}{v}.$$

□

2. 金融理论中的布莱克-舒尔斯方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rV = 0, \quad 0 < t < T,$$

满足"最终"边界条件$V(s,T) = F(s)$。适当的变量变换可将其简化为问题1中的方程。或者，通过代换$V(s,t)$ $=e^{ax+b\tau}U(x,\tau)$（其中x $=\log s, \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t), a = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$，且 $b = -(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2})^2$）可将该方程化简为具有初始条件$U(x,0) = e^{-ax}F(e^x)$的一维热方程。因此布莱克-舒尔斯方程的一个解为

$$V(s,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\log(s/s^*)+(r-\sigma^2/2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} F(s^*)\, ds^*.$$

3. **The Dirichlet problem in a strip. Consider the equation $\Delta u = 0$ in the horizontal strip**

$$\{(x, y) : 0 < y < 1; -\infty < x < \infty\}$$

with boundary conditions $u(x, 0) = f0(x)$ and $u(x, 1) = f_1(x)$, where f_0 and f_1 are both in the Schwartz space.

(a) Show (formally) that if u is a solution to this problem, then

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{2\pi\xi y} + B(\xi)e^{-2\pi\xi y}.$$

Express A and B in terms of $\widehat{f_{零}}$ and $\widehat{f}_{\rightarrow}$, and show that

$$\widehat{u}(\xi, y) = \frac{\sinh(2\pi(1-y)\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}\widehat{f}_0(\xi) + \frac{\sinh(2\pi y\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}\widehat{f_1(\xi)}.$$

(b) Prove as a result that we have L^2-convergence to the boundary conditions, that is,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - f_0(x)|^2 \, dx \to 0 \quad \text{as} \quad y \to 0$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - f_1(x)|^2 \, dx \to 0 \quad \text{as} \quad y \to 1.$$

(c) If $\Phi_a(\xi) = (双曲正弦\ 2\pi a\xi)/(双曲正弦\ 2\pi\xi)$, with $0 \leq a < 1$
, then Φ_a is the Fourier transform of φ_a where

$$\varphi_a(x) = \frac{\sin \pi a}{2} \cdot \frac{1}{\cosh \pi x + \cos \pi a}.$$

This can be shown, for instance, by using contour integration and the residue formula from complex analysis (see Book II, Chapter 3).

(d) Use this result to express u in terms of Poisson-like integrals involving f_0 and : f_1 as follows:

$$u(x, y) = \frac{\sin \pi y}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(x-t)}{\cosh \pi t - \cos \pi y} \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x-t)}{\cosh \pi t + \cos \pi y} \, dt\right).$$

(e) Finally, one can check that the function $u(x, y)$ defined by the above expression is harmonic in the strip, and converges uniformly to $f_{零}(x)$ as $y \to 零$
, and to $f_1(x)$ as $y \to 一$
which are improvements of (b). Moreover, one sees that $u(x, y)$ vanishes at infinity, that is, $极限_{|x|\to\infty} u(x, y) = 零$, uniformly in y.

Remark 13. (c) 中的恒等式同样可应用于证明二平方和定理，详见第二册第十章第3.1节。

Proof. 我们省略了(a)(d)，因为它们很简单。

(b) 根据Planchel定理，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y) - f_1(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi,y) - \widehat{f}_0(\xi)|^2 \, d\xi$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}_1(\xi)\Big(\frac{\sinh 2\pi y\xi}{\sinh 2\pi\xi} - 1\Big) + \widehat{f}_0(\xi)\frac{\sinh 2\pi(1-y)\xi}{\sinh 2\pi\xi} \right|^2 d\xi. \tag{2}$$

请注意，通过简单的几何论证可以证明，对于每个 $0 < a < 1$，径向函数 $\xi \mapsto \frac{\sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi}$ 关于 $|\xi|$ 递减，从而以 a 为界。

因此，(2)中的被积函数以

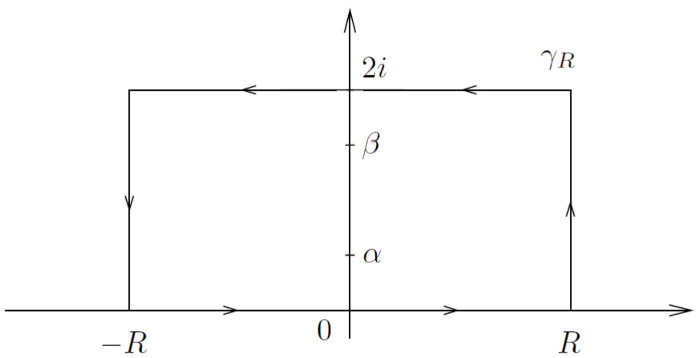
$$2\Big|\widehat{f}_1(\xi)(y+1)\Big|^2 + 2\Big|\widehat{f}_0(\xi)(1-y)\Big|^2 \le 2\Big|\widehat{f}_1(\xi)\cdot 2\Big|^2 + 2\Big|\widehat{f}_0(\xi)\Big|^2 \in L^1(\mathbb{R}).$$

那么由LDCT可得所需结果。对于$y \to 0$同理。

(c) 我们的目标是证明对于固定 $\xi \in \mathbb{R}$：

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh \pi x + \cos \pi a} \, dx = \frac{2}{\sin \pi a} \frac{\sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi}.$$

令 γ_R 如下所示（抄自第二卷）的图形，其宽度趋近于无穷，但高度固定。



令$f(z) = \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{\cosh \pi z + \cos \pi a}$并注意$f$的分母恰好当$e^{\pi z} + e^{-\pi z} = -e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}$时为零。因此$f$在$\gamma_R$内的极点仅为$\alpha = i(1-a)$与$\beta = i(1+a)$。为求$f$在$\alpha$处的留数（记作Res$(f,\alpha)$），我们注意到根据洛必达法则，

留数$(f,\alpha) =$ 极限$_{z\to\alpha}$ $(z-\alpha)f(z) =$ 极限$_{z\to\alpha}$ $\frac{2(z-\alpha)e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z} + e^{\pi i a} + e^{-\pi i a}} = \frac{2e^{-2\pi i\alpha\xi}}{\pi(e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha})} = \frac{e^{2\pi(1-a)\xi}}{\pi i \sin \pi a}$

类似地对于 Res$(f,\beta) = \frac{e^{2\pi(1+a)\xi}}{-\pi i \sin \pi a}$

那么留数定理表明

$$\oint_{\gamma_R} f(z) = 2\pi i\Big(\text{Res}(f,\alpha) + \text{Res}(f,\beta)\Big) = \frac{2}{\sin \pi a} e^{2\pi\xi}(e^{-2\pi a\xi} - e^{2\pi a\xi}) \tag{3}$$

对于竖直边上 f 的积分，注意到当 $R\to\infty$ 时它趋于零。实际上，若 $z=R+iy$ 满足 0
$\le y\le 2$，则

$$|e^{-2\pi iz\xi}|\le e^{4\pi|\xi|}$$

和

$$|\cosh\pi z+\cos\pi a|\ge|\frac{1}{2}(e^{\pi R}-e^{-\pi R})-1|\to\infty \ \text{ as } \ R\to\infty,$$

这表明当$R\to\infty$时，右侧垂直段上的积分趋于0。类似地可以证明，当$R\to\infty$时左侧垂直段上f的积分也趋于0。因此

$$\frac{2}{\sin\pi a}e^{2\pi\xi}(e^{-2\pi a\xi}-e^{2\pi a\xi})=\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}f(z)=(1-e^{4\pi\xi})I$$

因此 $I=\frac{2}{\sin\pi a}(e^{-2\pi a\xi}-e^{2\pi a\xi})\frac{e^{2\pi\xi}}{1-e^{4\pi\xi}}=\frac{2}{\sin\pi a}\frac{\sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi}$。

(e) 我们省略了u在带状区域内调和性的证明。（关于微分与积分次序的互换，参见[12, 第154页]）。

为了证明向边界条件的一致收敛，我们采用恒等逼近（good kernels）的思想。

给定 $\epsilon>>0$。首先我们注意到，(c) 中研究的核 φ_a 是正的且 $\int_{\mathbb{R}}\varphi_a=\widehat{\varphi_a}(0)=\Phi_a(0)=a$。其次，由 f_1 (在无穷远处衰减所导致的一致连续性)，存在 $\eta>>0$，使得对所有 $x\in\mathbb{R}$ 和
$|t|<\eta$ 均有 $|f_1(x-t)-f_1(x)|<\epsilon$。因此，我们对 $\|u(\cdot,y)-f_1(\cdot)\|_\infty$ 得到如下上界估计:

$$\begin{aligned}\Big|u(x,y)-f_1(x)\Big|&=\Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_{1-y}(t)f_0(x-t)\,dt+\int_{\mathbb{R}}\varphi_y(t)[f_1(x-t)-f_1(x)]\,dt-(1-y)f_1(x)\Big|\\&\le(1-y)\|f_0\|_\infty+\int_{|t|\ge\eta}\varphi_y(t)2\|f_1\|_\infty\,dt+\int_{|t|<\eta}\varphi_y(t)|f_1(x-t)-f_1(x)|\,dt+(1-y)\|f_1\|_\infty\\&\le(1-y)(\|f_0\|_\infty+\|f_1\|_\infty)+2\|f_1\|_\infty\int_{|t|\ge\eta}\varphi_y(t)\,dt+\epsilon y.\end{aligned}$$

首项和末项在 y 足够接近 1 时显然小于 ϵ。对于第二项，注意到被积函数以 $\frac{\sin\pi y}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}-2}$ 为上界。虽可求得 $\int_\eta^\infty(e^{\pi t}+e^{-\pi t}-2)^{-1}\,dt=\int_\eta^\infty\frac{e^{\pi t}}{(e^{\pi t}-1)^2}\,dt$ 的显式解，但对于不存在原函数的情况，我们指出可通过观察函数在无穷远处的指数衰减性，以及分母具有严格正下界（由 $|t|\ge\eta$ 保证）来证明该积分有限。因此只要 y 足够接近 1，目标项便小于 ϵ。

最后，我们证明当$|x|\to\infty$在y中一致时，$u(x,y)\to$趋于0。

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{1-y}(t)f_0(x-t)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_y(t)f_1(x-t)\,dt=\Big(\int_{|t|>\frac{|x|}{2}}+\int_{|t|\le\frac{|x|}{2}}\Big)\cdots$$

对于$|t|>\frac{|x|}{2}$部分，我们利用每个a的φ_a递减性质，可知该积分被

$$\varphi_{1-y}(\frac{|x|}{2})\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R})}+\varphi_y(\frac{|x|}{2})\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})}\le\frac{\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})}}{e^{\pi\frac{|x|}{2}}+e^{-\pi\frac{|x|}{2}}-2}.$$

对于$|t|\le\frac{|x|}{2}$部分，可以通过

$$\Big(\sup_{|z-x|\le\frac{|x|}{2}}|f_0(z)|\Big)\|\varphi_{1-y}\|_{L^1(\mathbb{R})}+\Big(\sup_{|z-x|\le\frac{|x|}{2}}|f_1(z)|\Big)\|\varphi_y\|_{L^1(\mathbb{R})}\le\sup_{|z-x|\le\frac{|x|}{2}}|f_0(z)|+\sup_{|z-x|\le\frac{|x|}{2}}|f_1(z)|.$$

注意到所有这些上界均与 y 无关，且当 $|x|\to\infty$ 时趋于零。至此我们完成了 (e) 的证明。

$\square$

4. (Tychonoff's counterexample) For $a>1$, consider the function defined by

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{if } t\le 0\\ e^{-t^{-a}} & \text{if } t>0\end{cases}\tag{4}$$

(a) Show that there exists $0<\theta<1$ depending on a so that for $t>0$,

$$|g^{(k)}(t)|\le\frac{k!}{(\theta t)^k}e^{-\frac{1}{2}t^{-a}}.$$

Moreover, show that g is in the Gevrey class $1+\frac{1}{a}$ on $\mathbb{R}$, that is, there are M,R only depending on a, such that for all $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$

$$|g^{(k)}(x)|\le(k!)^{1+\frac{1}{a}}MR^k.$$

Note that real analytic functions are of Gevrey class 1.

(b) Apply (a) to show that for each $x\in\mathbb{R}$ and $t>0$, the series

$$u(x,t):=\sum_{n=0}^{\infty}g^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

converges. Moreover, u solves the heat equation , vanishes for $t=0$, continuous up to the initial $t=0$ and satisfies the estimate

$$|u(x,t)|\le c_1e^{c_2|x|^{2a/(a-1)}}$$

for some constants $c_{一},c_{二}>零$.

This example shows that the growth condition $|u(x,t)| \le Ae^{a|x|^{二}}$ we meet in the class is almost optimal, since for each $\epsilon >$ 零, we can find $a >$ 零 such that the growth exponent 二$a/(a-$一$) =$ 二 $+$ 二$/(a-$一$) =$ 二 $+ \epsilon$. (Also see Exercise 12 and Problem 6.)

Remark 14. (a) 中的 Gevrey 部分取自 [11, 第73页问题3]。

Proof. (函数 $z \mapsto g(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内全纯。我们将 t 轴视为复平面的实轴。若固定 $t > 0$，当 $0 < \theta < 1$ 时（该条件将在后文确定），圆周 $\partial B_{\theta t}(t)$ 不经过原点。根据柯西积分公式（见第二册），对所有 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 我们有

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial_{\theta t}(t)} \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}}\,dz$$

因此

$$|\frac{d^k g}{dt^k}(t)| \le \frac{k!}{2\pi}(\frac{1}{\theta t})^k \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{Re}(z^{-a})}\,d\phi$$

注意对于$z \in \partial_{\theta t}(t)$，有$z = t + \theta t e^{i\phi} = r_\phi e^{i\varphi_\phi}$，因此$z^{-a} = r_\phi^{-a} e^{-ia\varphi_\phi}$。由于对所有$\phi$满足$(1-\theta)t \le r_\phi \le (1+\theta)t$，若选取足够小的$\theta$，则Re$(z^{-a}) \ge (\frac{1}{(1+\theta)t})^a > \frac{1}{2}t^{-a}$。故得$|\frac{d^k g}{dt^k}(t)| \le \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2}t^{-a}}$。

注意该上界的最大值为 $t^{-a} = \frac{2k}{a}$，即

$$\begin{aligned}|\frac{d^k g}{dt^k}(t)| &\le \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2}t^{-a}} \le k!(\frac{2k}{a\theta^a})^{\frac{k}{a}} e^{-\frac{k}{a}} = (k!)^{1+\frac{1}{a}} (\frac{k^k}{e^k k!})^{\frac{1}{a}} (\frac{2}{a\theta^a})^{\frac{k}{a}} \\ &\le (k!)^{1+\frac{1}{a}} \widetilde{M}^{\frac{1}{a}} \left(\frac{2^{\frac{1}{a}}}{a^{\frac{1}{a}}\theta}\right)^k,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是斯特林公式的结果，且$\widetilde{M}$与a无关。

(b) 首先，我们利用(a)来检验$u(x,t)$的一致收敛性。

$$\begin{aligned}|u(x,t)| &\le \sum_{n=0}^{\infty} |g^{(n)}(t)| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-\frac{1}{2}t^{-a}} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = e^{-\frac{1}{2}t^{-a}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^n \frac{n!}{(2n)!} \\ &\le e^{-\frac{1}{2}t^{-a}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\frac{1}{2}t^{-a}} e^{\frac{x^2}{\theta t}} \qquad (5)\end{aligned}$$

这意味着$u(x,t)$在$x \in [-M,M]$上一致收敛，且对于每个$M, t_0 > 0$和$u(x_0,0) = 0$，有$t > t_0 > 0$，因为$a > 1$且$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} e^{-\frac{1}{2}t^{-a}} e^{\frac{x^2}{\theta t}} = 0$。类似地，对于$\partial_t u, \partial_x u$和$\partial_{xx} u$的情况也成立。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n+1)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{\infty} g^{(j)}(t) \frac{x^{2j-2}}{(2j-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n+1)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

所以我们看到$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T))$ 在初始条件为零的情况下求解热方程。

最后，对于最优空间增长率，我们固定 x 并观察公式(5)中得到的上界函数 $f_x(t) := e^{-\frac{1}{2}t^{-a}} e^{\frac{x^2}{\theta t}}$ 在 $t = (\frac{a\theta}{2x^2})^{\frac{1}{a-1}}$ 处取得最大值。

$$f_x((\frac{a\theta}{2x^2})^{\frac{1}{a-1}}) = \exp(-\frac{1}{2}(\frac{2x^2}{a\theta})^{\frac{a}{a-1}} + \frac{x^2}{\theta}(\frac{2x^2}{a\theta})^{\frac{1}{a-1}}) = \exp\Big((\frac{2}{a\theta^a})^{\frac{1}{a-1}}(1-\frac{1}{a})|x|^{\frac{2a}{a-1}}\Big).$$

所以我们在这里有 $c_1 = 1$ 和 $c_2 = (\frac{2}{a\theta^a})^{\frac{1}{a-1}}(1-\frac{1}{a})$。 □

$4\frac{1}{2}$ **Prove that the function**

$$u(x,t) = \int_0^\infty \Big[e^{xy}\cos(xy+2ty^2) + e^{-xy}\cos(xy-2ty^2)\Big] ye^{-y^{\frac{4}{3}}}\cos y^{\frac{4}{3}}\,dy$$

is another non-trivial solution of the Cauchy Problem in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ with vanishing initial data. This was observed by Rosenbloom and Widder [16]. I saw it in [4, page 180].

Proof. 设$g(x,t) = e^x\cos(x+2t) + e^{-x}\cos(x-2t)$ 和 $a(y) = e^{-y^{\frac{4}{3}}}y\cos(\sqrt{3}y^{\frac{4}{3}})$。因此

$$u(x,t) = \int_0^\infty a(y)g(xy,ty^2)\,dy.$$

首先，我们检查 $u(x,0) = \int_0^\infty a(y)(e^{xy}+e^{-xy})\cos(xy)\,dy \equiv 0$。

值得注意的是

$$|e^{\pm xy\pm ixy}| = |\sum_0^\infty (\pm1\pm i)^n\frac{(xy)^n}{n!}| \le \sum_0^\infty \frac{2^n|xy|^n}{n!}$$

因此

$$|(e^{xy}+e^{-xy})\cos(xy)| = |\sum_0^\infty \frac{a_n(xy)^n}{n!}| \le \sum_0^\infty \frac{2^{n+1}|xy|^n}{n!} = 2e^{2|xy|}$$

其中$2a_n = (1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n = 2^m4(-1)^m$，如果$n = 4m$对于某些 $m\in\mathbb{Z}_{\ge0}$成立；且$2a_n = 0$，如果n不是4的倍数。

因为对于每个$x\in\mathbb{R}$都有$\int_0^\infty e^{-y^{\frac{4}{3}}}ye^{2|xy|}\,dy < \infty$，所以从LDCT可得

$$u(x,0) = \int_0^\infty a(y)\sum_{m=0}^\infty \frac{a_{4m}(xy)^{4m}}{(4m)!}\,dy = \sum_{m=0}^\infty \frac{a_{4m}x^{4m}}{(4m)!}\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-y^{\frac{4}{3}}(1-i\sqrt{3})}y^{4m+1}\,dy$$

最后一项积分对于每个 $m\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ 都为零，因为对于所有 $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$\int_0^\infty e^{-y^{\frac{4}{3}}z}y^{4m+1}\,dy = \frac{3}{4}\Gamma(3n+\frac{3}{2})z^{-3n-\frac{3}{2}}$$

并且当$z = 1 - i\sqrt{3}$时，右侧为纯虚数。因此我们证明$u(\cdot,0)\equiv 0$。

（该公式可通过留数定理证明，如习题3(c)所示；亦可先验证其在$z\in\mathbb{R}^+$情形下成立，再利用解析延拓理论将公式推广至所有$\mathrm{Re}z > 0$的情况。）

其次，我们注意到根据函数傅里叶余弦变换的唯一性定理，$u(0,t)$ =2$\int_0^\infty a(y)$cos(2ty^2)dy并非恒等于零。

最后，我们检验 u 是 C^∞ 且满足热方程。显然对于每个固定的 y，$g(xy,ty^2)$ 均满足热方程。仍需证明我们可以在 y 中交换积分顺序，并在 x 和 t 中交换微分顺序。

通过使用LDCT和中值定理来实现这一点存在一种标准方法（参见[12, 第154页]）。这里我们应用该推论，并指出导数的主导函数是:

$$\left|\frac{\partial^{2n} g}{\partial x^{2n}}(x,t)\right| = \left|\frac{\partial^{n} g}{\partial t^{n}}(x,t)\right| \leq 2^{n+1}\cosh x,$$

然后考虑每个$R>0$时的$|x| \leq R$（由于微分是局部性质），使得其进一步的控制积分是有限的，即，

$$2^{n+1}\int_0^\infty e^{-y^{\frac{4}{3}}} y^{2n+1}\cosh(Ry)\,dy < \infty.$$

□

5. **(Weak Maximum Principle for Heat Equation)**

Theorem 15. *Suppose that $u(x,t)$ is a real-valued solution of the heat equation in the upper half-plane, which is continuous on its closure. Let R denote the rectangle*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq c\}$$

and $\partial' R$ be the part of the boundary of R which consists of the two vertical sides and its base on the line $t = 0$. Then

$$\min_{(x,t)\in\partial' R} u(x,t) = \min_{(x,t)\in R} u(x,t) \quad \text{and} \quad \max_{(x,t)\in\partial' R} u(x,t) = \max_{(x,t)\in R} u(x,t).$$

The steps leading to a proof of this result are outlined below.

(a) Show that it suffices to prove that if $u \geq 0$ on $\partial' R$, then $u \geq 0$ in R.

**(b) For $\epsilon > 0$, let $v(x,t) = u(x,t) + \epsilon t$. Then, v has a minimum on R, say at $(x1$ $,t_1)$.Show that $x_1 = a$ or b, or else t_1 =0
. To do so, suppose on the contrary that$a < x_1 < b$ and0
$< t_1 \leq c$, and prove that $v_{xx}(x_1,t_1) - v_t(x_1,t_1) \leq -\epsilon$. However, show also that the left-hand side must be non-negative.**

(c) Deduce from (b) that there is some t $1 \in [0,c]$ such that $u(x,t) \geq \epsilon(t_1 - t)$ for any $(x,t) \in R$ and let $\epsilon \to 0$.

Remark 16. 如果将边界条件改为零诺伊曼条件会怎样？更准确的表述详见我对Evans《偏微分方程》第七章的解答文件。

Proof. (由于该线性偏微分方程没有零阶项，我们可以分别考虑 v: $= u-$最小值$_{(x,t)\in\partial' R}\, u(x,t)$ 和 $V =$ 最大值$_{(x,t)\in\partial' R}\, u(x,t) - u$。注意根据 $\partial' R$ 的紧性以及 u 直至闭包的连续性，这些极值是有限的。这就是为什么我们需要空间域有界。

(b) 注意在最小值点处，$v_t \leq 0$ 且 $v_{xx} \geq 0$。

(c) 根据(b)可知，存在$(x_1, t_1) \in \partial' R$使得

$$u(x,t) + \epsilon t = v(x,t) \geq v(x_1,t_1) = u(x_1,t_1) + \epsilon t_1 \geq \epsilon t_1.$$

□

Remark 17. 如 (a) 所述，可将空间域 R 替换为任意维度 $\mathbb{R}^d$ 中的任何有界区域 Ω。证明过程几乎完全相同。

Remark 18. 关于强最大值原理（即排除内部极值存在的可能性），可查阅[17, 第9.B章]与[14, 第2章]。

6. **The examples in Problem 4 are optimal in the sense of the following uniqueness：theorem due to Tychonoff.**

Theorem 19. *Suppose $u(x,t)$ satisfies the following conditions:*

(i) it is continuous on $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ and solves the heat equation in $\mathbb{R}^d \times$ (版本0 $, T)$ with zero initial condition. (ii) $|u(x,t)| \leq Me^{a|x|^2}$ for some $M, a,$ and all $x \in \mathbb{R}^d$, 0 $\leq t < T$.

Then $u \equiv$ 零.

Remark 20. 该增长条件(ii)可放宽为$|u(x,t)| \leq C \exp\left((\frac{a}{t})^\alpha + a|x|^2\right)$，其中$C > 0, a > 0$且$0 < \alpha < 1$。此结论在文献[2]中得到证明。研究同时表明条件$0 < \alpha < 1$是最优的，无法放宽至$\alpha = 1$——通过构造非平凡函数$u$满足$|u(x,t)| \leq M\exp(\frac{a}{t})$即可证得（其中$M, a > 0$为常数；需注意与问题4及$4\frac{1}{2}$的不同之处在于：对于固定的$t$，本问题中的$u$在$x$上有界）。

Proof. 读者可在 [4, Section 5.4]、[5, Section 2.3] 或 [11, Section 7.1(b)] 中找到相关讨论和证明。 □

六、十二。
There is another well-known uniqueness theorem for heat equation in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ due to David Widder:

Theorem 21. *Let $T > 0$ and $S_T := \mathbb{R}^d \times (0, T]$. Suppose $u \in C^{2,1}(S_T) := \{u_t, u_{x_i,x_j} \in C(S_T)\}$ is a nonnegative solution to heat equation in S_T and $u(\cdot, t) \to 0$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ as $t \to 0^+$. Then $u \equiv 0$ in S_T.*

Remark 22. 该定理对物理学家而言非常直观，且在热力学中很有用。我从[4, 第5.14节]学到了其证明方法，该方法适用于任意维度，而Widder的原始证明[11, 第7.1(d)节]仅适用于一维情形。另请注意，问题4中定义的Tychonoff函数是变号函数。

Proof. 首先，有一个更一般的结果将在最后得到证明：

Theorem 23. *Let u be a solution for heat equation and satisfies all the regularity (smoothness) hypotheses and initial data describe above. If u satisfies*

$$\sup_{s\in[0,t)} \int_{\mathbb{R}^d} |u(y,s)|\mathcal{H}_{t-s}(x-y)\,dy := M_{x,t} < \infty \quad \forall (x,t) \in S_T,$$

then $u \equiv 0$ in S_T.

利用定理23，维德定理的证明条件是对于每个$(x_0, t_0) \in S_T$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(y,s)|\mathcal{H}_{t_0-s}(x_0-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(y,s)\mathcal{H}_{t_0-s}(x_0-y)\,dy \le u(x_0,t_0) \quad \forall s \in [0,t_0). \tag{6}$$

注意到，通过引入变量替换，我们可假设式(6)中$T = 1$, $(x_0, t_0) = (0, 1)$且$s = 0$。

$$\tau = \frac{t-s}{t_0-s}, \quad \eta = \frac{y-x_0}{\sqrt{t_0-s}}$$

而该函数

$$U(\eta,\tau) = u(x_0 + \sqrt{t_0-s}\eta, s + (t_0-s)\tau).$$

为了证明(6)，我们固定$\rho > 0$并考虑柯西问题：$v \in \mathcal{H}(\overline{S_1})$在$S_1$中求解热方程，并满足初始条件$v(x,0) = \zeta(x)u(x,0)\chi_{B_{2\rho}(0)}(x)$，其中$\chi_E$是$E$上的特征函数，$x \mapsto \zeta(x) \in C_0^\infty(B_{2\rho})$为非负函数且在$B_\rho$ (上等于1（称为截断函数或隆起函数，参见练习4））。由于初始数据在$B_{2\rho}$中具有紧支集，唯一有界解v由以下公式给出：

$$v(x,t) = \int_{|y|<2\rho} \zeta(y)u(y,0)\mathcal{H}_t(x-y)\,dy.$$

(唯一性源于能量方法或弱极值原理。)

Lemma 24. *$u \ge v$ in $\overline{S_{-}}$.*

根据引理24，我们有

$$u(0,1) \geq v(0,1) = \int_{|y|<2\rho} \zeta(y)u(y,0)\mathcal{H}_1(-y)\,dy \geq \int_{|y|<\rho} u(y,0)\mathcal{H}_1(-y)$$

接着我们通过令$\rho \to \infty$来证明(6)，从而完成维德定理的证明。 $\square$

Proof of Lemma 24. 令 n_0 为一个大于 2ρ 的正整数，对于 $n \geq n_0$，考虑齐次狄利克雷问题的序列（存在性参见备注26）。

$$\begin{cases} \partial_t v_n - \Delta v_n = 0 \ \text{ in } \ B_n \times (0,1) \\ v_n = 0 \ \text{ on } \ \partial B_n \times (0,1) \\ v_n(x,0) = \zeta(x)u(x,0)\chi_{B_{2\rho}(0)}(x). \end{cases} \tag{7}$$

我们将函数 v_n 视为通过零延拓定义于整个 S_1 中。根据弱极大值原理（参见注记17，其中取 Ω 为 $= B_n$）以及 u 的非负性

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(B_{2\rho})} \ \text{ and } \ v_n \leq u \tag{8}$$

对于所有 $n \geq n_0$。根据第二条，引理的证明归结为证明递增序列 v_n 收敛于 v。我们将此分解为两个步骤:

第一步：利用阿尔泽拉-阿斯科利定理，在C^∞的每个紧子集上推断S_1和$v_n \to w$的关系。

因此，w 在 S_1 中解热方程。

步骤2：将$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$中的$w(\cdot,t) \to \zeta(\cdot)u(\cdot,$显示为$t \to$0。

假设这些步骤暂时完成。由于w以$\|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(B_{2\rho})}$为界，$w = v$由柯西问题有界解的唯一性定理（问题6）可得。因此我们完成了引理24的证明。

我们首先假设步骤1成立，并通过用赫维赛德函数测试(7)的弱形式来证明步骤2，该函数在$\mathbb{R}^+$上取值为1，在$\mathbb{R}^-$上取值为-1。然而，此赫维赛德函数不连续，我们需要用连续函数逼近它，以便能够使用分部积分。

给定 $B_R \subset \mathbb{R}^d$ 带有 $R \geq 2\rho$。首先，我们将 (7) 重写为

$$\begin{cases} f_n(x,t) = v_n(x,t) - \zeta(x)u(x,0) \\ \partial_t f_n - \Delta f_n = \Delta[\zeta(\cdot)u(\cdot,0)] \ \text{ in } \ S_1 \\ f_n = 0 \ \text{ on } \ \partial B_n \times (0,1) \\ f_n(x,0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

对于 $\delta > 0$，令

$$h_\delta(u) = \begin{cases} [left]\ 1, & \text{if } u > \delta \\ \dfrac{u}{\delta}, & \text{if } |u| \le \delta \\ -1, & \text{if } u < -\delta. \end{cases} \tag{10}$$

(将此视为赫维赛德函数的近似（当$\delta \to$趋近于)时），注意尽管在$\pm\delta$处存在拐点，但我们认为$h'_\delta(s) = \frac{1}{\delta}\chi_{|s|\le\delta}$是$h_\delta$的弱导数。

将(9)式乘以$h_\delta(f_n)$并在$B_n \times (0,t)$上对$t \in$ (0,1)进行积分，利用弱导数的著名链式法则（参见例如[8, 定理7.8]）可得

$$\int_{B_n\times\{t\}} \Big(\int_0^{f_n} h_\delta(\xi)\,d\xi\Big)\,dy + \frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{B_n} |Df_n|^2\chi_{\{|f_n|<\delta\}}(y)\,dyds = \int_0^t\int_{B_{2\rho}} \Delta[\zeta(y)u(y,0)]h_\delta(f_n)\,dyds.$$

舍去左侧的第二项（非负项），并令 $\delta \to$ 趋于 0 可得（记 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的勒贝格测度为 $|\Omega|$）对于 $n \ge R$

$$\int_{B_R} |v_n(y,t) - \zeta(y)u(y,0)|\,dy \le \int_{B_n} |v_n(y,t) - \zeta(y)u(y,0)|\,dy \le t|B_{2\rho}|\|\Delta[\zeta u(\cdot,0)]\|_{L^\infty(B_{2\rho})}.$$

令$n \to \infty$，我们有

$$\|w(\cdot,t) - \zeta(\cdot)u(\cdot,0)\|_{L^1(B_R)} \le t|B_{2\rho}|\|\Delta[\zeta u(\cdot,0)]\|_{L^\infty(B_{2\rho})} \to 0 \ \text{ as } \ t \to 0^+.$$

由于B_R已知，我们完成了步骤2的证明。

为证明第一步，我们需要以下内部梯度估计，其证明可参见[4, Section 5.12 and 5.12c]。

Proposition 25. *Let u be a solution of the heat equation that satisfies all the regularity hypotheses as Widder's theorem. There exist constants γ and C depending only on space dimension d such that for every parabolic box* $(x_0, t_0) + Q4_\rho$ 部$= \Big\{(x,t) : |x - x_0| < 4\rho, t \in [t_0 - (4\rho)^2, t_0]\Big\} \subset S_T$

$$\sup_{(x_0,t_0)+Q_\rho} |D_x^\alpha u| \le \gamma\frac{C^{|\alpha|}|\alpha|!}{\rho^{|\alpha|}} \fint_{(x_0,t_0)+Q_{4\rho}} |u|\,dy\,ds \tag{11}$$

for all multi-indices α, where $\fint_\Omega |u|\,dy\,ds = \overline{1}\,{}_{|\Omega|}\int_\Omega |u|\,dy\,ds$ *and* $|\Omega|$ *is the Lebesgue measure of* $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$. *Moreover*

$$\sup_{(x_0,t_0)+Q_\rho} \Big|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big| \le \gamma\frac{C^{2k}(2k)!}{\rho^{2k}} \fint_{(x_0,t_0)+Q_{4\rho}} |u|\,dy\,ds$$

for all positive integers k.

考虑形如 $K = \overline{B_R} \times [\epsilon, 1-\epsilon]$ 的紧子集，其中 $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ 且 $R \ge 2\rho$。根据 (8) 中的一致上界以及上述应用于 v_n 的内部梯度估计，我们

知道对于每个多重指标 α 和每个 $k \in \mathbb{N}$，存在一个与 n 无关的常数 $M = M(d, \epsilon, R, |\alpha|, k)$，使得

$$\|D^\alpha v_n\|_{L^\infty(K)} + \|\frac{\partial^k}{\partial t^k} v_n\|_{L^\infty(K)} \le M\|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(B_{2\rho})} \ \ \forall n \ge 2R.$$

利用阿斯科利-阿尔泽拉定理及对角线法，我们可得到（在某个子列意义下）$v_n \to w$属于$C^\infty(K)$。通过进一步的对角线法（以区域为指标），我们在S_1的每个紧子集上得到（在更进一步的子列意义下）$v_n \to w$属于C^∞。至此步骤1的证明已完成。

———

□

Remark 26. 式（7）的存在性源于各球体B_n上$-\Delta$的本征对$\{(\lambda_k^n, w_k^n)\}_{k=0}^\infty$的存在性，即满足$B_n$中的$-\Delta w_k^n = \lambda_k^n w_k^n$及$\partial B_n$上$w_k^n$ ==0。证明的核心工具是弗雷德霍姆替代定理与索伯列夫紧嵌入。关于本征对的存在性、$\{w_k^n\}_k$的正交性、以及解$v_n(x,t) = \sum_{k=0}^\infty c_k^n e^{-\lambda_k^n t} w_k^n(x)$的收敛性（其中$c_k^n$满足$v_n(x,\to 0) = \sum_{k=0}^\infty c_k^n w_k^n(x)$），可参阅文献[4, 第4章及5.10节]、[5, 6.2节、6.5节与7.4节]或[13, III.5节]。另一基于极值原理的方法（佩龙方法）可见于[14, 3.3-3.4节]。

Proof of Theorem 23. 设$(x,t) \in S_T$为任意但固定的量。对于$\rho >\in |x|$，我们令$y \mapsto \zeta(t) \in C_0^2(B_{2\rho})$为一个非负截断函数，满足在$B_\rho$内$\zeta$ =≡1，且$|D\zeta| \le \frac{1}{\rho}$与$|D^2\zeta| \le (\frac{2}{\rho})^2$成立。

对于 $\delta > 0$，令 $h_\delta(\cdot)$ 为公式 (10) 中引入的赫维赛德函数近似。将热方程乘以 $h_\delta(u(y))\zeta(y)\mathcal{H}_{t-s}(x-y)$，并在圆柱域 $B_{2\rho} \times (\tau, t-\epsilon)$ 上对 $dy\,ds$ 进行分部积分，其中 0 $< \tau < t-\epsilon$ 且 $0 < \epsilon < t$。由此可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2\rho}\times\{t-\epsilon\}} \Big(\int_0^u h_\delta(\xi)\,d\xi\Big)\mathcal{H}_\epsilon(x-y)\zeta(y)\,dy + \frac{1}{\delta}\int_\tau^{t-\epsilon}\int_{B_{2\rho}} |Du|^2 \mathcal{H}_{t-s}(x-y)\chi_{\{|u|<\delta\}}(y)\zeta(y)\,dy\,ds \\
&= \int_{B_{2\rho}\times\{\tau\}} \Big(\int_0^u h_\delta(\xi)\,d\xi\Big)\mathcal{H}_{t-\tau}(x-y)\zeta(y)\,dy \\
&+ \int_\tau^{t-\epsilon} \Big(\int_0^u h_\delta(\xi)\,d\xi\Big)\Big(\mathcal{H}_{t-s}(x-\cdot)\Delta\zeta - 2(D\mathcal{H}_{t-s})(x-\cdot)D\zeta\Big)(y)\,dy\,ds.
\end{aligned}$$

当 $\tau \to$ 趋于0时，由于右侧第一积分被控制，故其趋于0。

$$\text{const.} \int_{B_{2\rho}} |u(y,\tau)|\,dy \to 0 \text{ as } \tau \to 0 \ \text{ by the hypothesis.}$$

舍去左侧第二项，因其非负，先令 $\delta \to$ 趋近于 0，再令 $\tau \to$ 趋近于 0，可得

$$
\begin{aligned}
\int_{B_\rho} |u(y,t-\epsilon)|\mathcal{H}_\epsilon(x-y)\,dy &\le \int_{B_{2\rho}} |u(y,t-\epsilon)|\mathcal{H}_\epsilon(x-y)\zeta(y)\,dy \\
&\le \frac{2}{\rho^2}\int_0^{t-\epsilon}\int_{B_{2\rho}} |u(y,s)|\mathcal{H}_{t-s}(x-y)\,dy\,ds + \frac{2}{\rho}\int_0^{t-\epsilon}\int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho} |u(y,s)||D_y\mathcal{H}_{t-s}(x-y)|\,dy\,ds.
\end{aligned}
$$

根据假设，该不等式右侧第一项当 $\rho \to \infty$ 时趋于 0 是显然的。对于第二项，我们注意到它受限于（最多差一个常数倍）

$$
\frac{1}{\rho}\int_0^{t-\epsilon}\int_{\rho<|y|<2\rho} |u(y,s)|\mathcal{H}_{t-s}(x-y)\frac{|x-y|}{t-s}\,dy\,ds \le \frac{4}{\epsilon}\int_0^{t-\epsilon}\int_{\rho<|y|<2\rho} |u(y,s)|\mathcal{H}_{t-s}(x-y)\,dy\,ds,
$$

根据假设，其随着$\rho \to \infty$趋于0。

因此对于所有 $r > 2|x|$ 和 $\epsilon \in (0,t)$

$$
\int_{B_r} |u(y,t-\epsilon)|\mathcal{H}_\epsilon(x-y)\,dy = 0.
$$

最后，令 $\epsilon \to$ 趋于 0，我们预期左侧趋于 $|u(x,t)|$，由此证明完成。此解释可证明如下:

设定 $r > 2|x|$. 写下

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r} |u(y,t-\epsilon)|\mathcal{H}_\epsilon(x-y) &= \int_{|y|<r,|y-x|>\epsilon^{\frac14}} |u(y,t-\epsilon)|(4\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}}\,dy \\
&\quad + \int_{|y-x|\le\epsilon^{\frac14}} |u(y,t-\epsilon)|(4\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}}\,dy \\
&=: I_1^\epsilon + I_2^\epsilon.
\end{aligned}
$$

由于连续函数 u 在 $B_r \times [\frac{t}{2}, t]$ 上一致有界，我们得到

$$
I_1^\epsilon \le r^d M(4\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{\epsilon^{\frac12}}{4\epsilon}} \to 0 \ \text{ as } \ \epsilon \to 0.
$$

我们还注意到

$$
\begin{aligned}
I_2^\epsilon &= \int_{|y-x|\le\epsilon^{\frac14}} \Big(|u(y,t-\epsilon)| - |u(x,t)|\Big)(4\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}}\,dy + |u(x,t)|\int_{|y-x|\le\epsilon^{\frac14}} (4\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}}\,dy \\
&= \Big[o(\epsilon) + |u(x,t)|\Big]\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(4\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{|z|^2}{4\epsilon}}\,dz - \int_{|z|>\epsilon^{\frac14}}(4\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{|z|^2}{4\epsilon}}\,dz\Big) \\
&= \Big[o(\epsilon) + |u(x,t)|\Big]\Big(1 - \int_{|z|>\frac{\epsilon^{\frac14}}{2\sqrt{\epsilon}}} \pi^{-\frac{d}{2}}e^{-|w|^2}\,dw\Big)
\end{aligned}
$$

其中当$\epsilon \to$趋于0时，$o(\epsilon) \to$也趋于0（这是由于u的连续性）。注意最后一个积分同样随着$\epsilon \to$趋于0而趋近于0。由此我们便完成了证明。 $\square$

七 (Combined with Problem 4.11 in Book III)

The Hermite function $h_k(x)$ are defined by the generating identity

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} = e^{-(x^2/2-2xt+t^2)}$$

(a) Show that an alternate definition is given by the Rodrigues' formula

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^k e^{-x^2}.$$

They also satisfy the "creation" and "annihilation" identities $(x - \frac{d}{dx})h_k(x) = h_{k+}$ 一 and $(x+ \frac{d}{dx})h_k(x) =$ 二$kh_{k-1}(x)$ for $k \geq$ 零 where $h_{-1} =$ 零.

Conclude from the above expression that each h_k is of the form $P_k(x)e^{-x}2/2$

, where

P_k is a polynomial of degree k. In particular, the Hermite functions belong to the Schwartz space and $h0(x) = e^{-x^2/2}, h_1(x) = 2xe^{-x^2/2}$. By (d), one can also show the linear span of $P_0, \cdots, P_m$ is the set of all polynomials of degree $\leq m$. (Folland [7, Exercise 8.23(f)]).

(b) Prove that the family $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$is complete in L^2, that is if $f \in L^2$ $(\mathbb{R})$

, and for all$k \geq$0,

$$(f, h_k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h_k(x) = 0,$$

then $f \equiv$ 零

. (An equivalent formulation of this fact is that the set of Hermite polynomials $\{P_k\}_0^{\infty}$ forms an orthogonal basis for $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$).

(c) Define $h_k^*(x) = h_k((2_{\pi})^{1/2}x)$. Then

$$\widehat{h_k^*}(\xi) = (-i)^k h_k^*(x).$$

Therefore, each h_k^* is an eigenfunction for the Fourier transform.

(d) Show that h_k is an eigenfunction for the operator $L = -d^2/dx^2 + x^2$, and in fact, prove that

$$Lh_k = (2k+1)h_k$$

In particular, we conclude that the functions h_k are mutually orthogonal in $L2(\mathbb{R})$.

(e) Show that $\int_{\mathbb{R}}[h_k(x)]$分析结果$^2\, dx = \pi^{1/2}2^k k!$.

(f) Denote the normalized h_k by H_k, that is $\|H_k\|_{L}2 = 1$. Suppose that $K(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)H_k(y)}{\lambda_k}$, and also $F(x) = T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)\,dy$. Then T is a symmetric Hilbert-Schmidt operator, and if $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k$, then

$$F \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} H_k.$$

(g) One can show on the basis of (a) and (b) that whenever $f \in L2$个$(\mathbb{R})$
, not only
is $F \in L^2(\mathbb{R})$, but also $x^2F(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Moreover, F can be corrected on a set of measure zero, so is C^1, F' is absolutely continuous, and $F'' \in L^2(\mathbb{R})$. Finally, the operator T is the inverse of L in the sense that for every $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$LT(f) = LF = -F'' + x^2F = f.$$

Proof. (注意到$e^{-(x^2/2-2xt+t^2)} = e^{x^2/2}e^{-(t-x)^2}$且可以通过归纳法证明

$$[\left(\frac{d}{dz}\right)^k e^{-z^2}](x) = P_k(x)e^{-x^2}$$

其中p_k是一个k次多项式，当k为偶时该多项式为偶，当k为奇时该多项式为奇。

根据定义，我们知道对于每个$x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_k(x) &= e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{-(t-x)^2}|_{t=0} = e^{x^2/2}P_k(-x)e^{-x^2} = (-1)^k e^{x^2/2}P_k(x)e^{-x^2} \\ &= (-1)^k e^{x^2/2}[\left(\frac{d}{dz}\right)^k e^{-z^2}](x). \end{aligned}$$

“创生”恒等式可由该公式容易地证明，从略。对于“湮灭”恒等式，可对$e^{x^2/2}h_k(x) = (-1)^k e^{x^2}[\left(\frac{d}{dz}\right)^k e^{-z^2}](x)$求导，并对右侧应用二项式定理。

为了证明$P_0, \cdots, P_m$张成了次数为$\leq m$的多项式集合，只需验证$P_0, \cdots, P_m$是线性无关的。这一点可通过h_k的正交性轻松证明，此处从略。（另一种简易证明是注意到每个P_k恰好为k次，参见Folland [6, Lemma 6.1]。）(b) 证明该结论存在两种等价方法（Folland与Stein），其核心思想均依赖于傅里叶变换。（为求完备性，我们将呈现这两种证明）。

（方法一）给定$t \in \mathbb{R}$，注意到当$K \to \infty$时$\sum_{k=0}^{K} \frac{(2xt)^k}{k!}$逐点收敛于$e^{2xt}$，且对所有$K \in \mathbb{N}$和$f(x)e^{-x^2/2}e^{|2xt|} \in L_x^1(\mathbb{R})$有$|\sum_{k=0}^{K} \frac{(2xt)^k}{k!}| \leq \sum_{k=0}^{K} \frac{|2xt|^k}{k!} \leq e^{|2xt|}$。因此由勒贝格控制收敛定理（LDCT）及(a)可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2+2xt}\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{(2xt)^k}{k!}\,dx = \lim_{K\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{K} \frac{(2xt)^k}{k!}\,dx \\ &= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2} c_k(t)P_k(x)\,dx = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} c_k(t) \int_{\mathbb{R}} f(x)h_k(x)\,dx = 0 \end{aligned}$$

期望的结果可以从练习8推出。

（方法二）依照 Folland [7, Exercise 8.23(g)] 的提示，只需证明 $\widehat{g} \equiv 0$，其中 $g(x) = f(x)e^{-x^2/2}$。给定 $\xi \in \mathbb{R}$，注意到当 $K \to \infty$ 时 $\sum_{k=0}^{K} \frac{(-2\pi ix\xi)^k}{k!}$ 逐点收斂于 $e^{-2\pi ix\xi}$，且对所有 $K \in \mathbb{N}$ 和 $f(x)e^{-x^2/2}e^{2\pi|x\xi|} \in L_x^1(\mathbb{R})$ 均有 $|\sum_{k=0}^{K} \frac{(-2\pi ix\xi)^k}{k!}| \le \sum_{k=0}^{K} \frac{|-2\pi ix\xi|^k}{k!} \le e^{2\pi|x\xi|}$。故由 LDCT 及 (a) 可得,

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi ix\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{(-2\pi ix\xi)^k}{k!}\, dx \\
&= \lim_{K\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{K} \frac{(-2\pi ix\xi)^k}{k!}\, dx = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} c_k(\xi) \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2} P_k(x)\, dx \\
&= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} c_k(\xi) \int_{\mathbb{R}} f(x)h_k(x)\, dx = 0.
\end{aligned}
$$

(c) 利用归纳论证并对生成（或湮灭）恒等式两边进行傅里叶变换，我们得到$(-2\pi i)^{-1}\frac{d\widehat{h_{k-1}}}{d\xi} - 2\pi i\xi\widehat{h_{k-1}} = \widehat{h_k}(\xi)$。注意归纳假设等价于$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{h_{k-1}}(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}) = (-i)^{k-1}h_{k-1}(\sqrt{2\pi}\xi)$。结合这些结果，我们得到

$$
\begin{aligned}
\widehat{h_k^*}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{h_k}(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{-2\pi i}\frac{d\widehat{h_{k-1}}}{d\xi}(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}) - \sqrt{2\pi}i\xi\widehat{h_{k-1}}(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}})\Big) \\
&= \frac{1}{-2\pi i}(-i)^{k-1}2\pi\frac{dh_{k-1}}{d\xi}(\sqrt{2\pi}\xi) - i\sqrt{2\pi}\xi(-i)^{k-1}h_{k-1}(\sqrt{2\pi}\xi) \\
&= (-i)^k\Big[-\frac{dh_{k-1}}{d\xi}(\sqrt{2\pi}\xi) + \sqrt{2\pi}\xi h_{k-1}(\sqrt{2\pi}\xi)\Big] \\
&= (-i)^k h_k(\sqrt{2\pi\xi}) = (-i)^k h_k^*(\xi).
\end{aligned}
$$

据此，仍需验证期望结果对于$k =$成立，该结果在高斯分布中是众所周知的。

(d) 这一点通过产生和湮灭恒等式得到证明。

(e) 使用归纳法和 (d)，我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} [h_k(x)]^2\, dx &= \frac{1}{2k}\int_{\mathbb{R}} h_k(x)(L-I)h_k(x) = \frac{1}{2k}\int_{\mathbb{R}} h_k(x)\Big[(x-\frac{d}{dx})(x+\frac{d}{dx})h_k\Big](x)\, dx \\
&= \frac{1}{2k}\int_{\mathbb{R}} \Big[(x+\frac{d}{dx})h_k(x)\Big]^2 + \frac{1}{2k}\lim_{|x|\to\pm\infty} h_k(x)(xh_k(x) + \frac{dh_k}{dx}(x)) \\
&= \frac{(2k)^2}{2k}\int_{\mathbb{R}} h_{k-1}(x)^2\, dx + \lim_{|x|\to\pm\infty} h_k(x)h_{k-1}(x) \\
&= 2k\pi^{1/2}2^{k-1}(k-1)! + 0 = \pi^{1/2}2^k k!,
\end{aligned}
$$

边界项消失，因为它们是多项式与$e^{-x^2/2}$的乘积。

(f)

(g) □

八. **To refine the results in Chapter 4, and to prove that**

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{2\pi i 2^n x}$$

is nowhere differentiable even in the case $\alpha = 1$, we need to consider a variant of the delayed means Δ_N, which in turn will be analyzed by the Poisson summation formula. (A simplified proof can be found in Jones [12, Section 16.H]).

(a) Fix an indefinitely differentiable function Φ satisfying $\Phi \equiv 1$ on $B1(0)$ and vanishes outside $B_2(0)$. By the Fourier inversion formula, there exists $\varphi \in S$ so that $\widehat{\varphi}(\xi) = \Phi(\xi)$. Let $\varphi_N(x) = N\varphi(Nx)$ so that $\widehat{\varphi_N}(\xi) = \Phi(\xi/N)$. Finally, set

$$\widetilde{\Delta}_N(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_N(x+n).$$

Observe by the Poisson summation formula that $\widetilde{\Delta}_N(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi(n/N)e$二 πinx, thus $\widetilde{\Delta}_N$ is a trigonometric polynomial of degree ≤二 N, with terms whose coefficients 超分辨率are 1 when $|n| \leq N$. Let

$$\widetilde{\Delta}_N(f) = f * \widetilde{\Delta}_N$$

Note that

$$S_N(f_\alpha) = \widetilde{\Delta}_{N'}(f_\alpha)$$

where N' is the largest integer of the form 2^k with $N' \leq N$.

(b) If we set $\widetilde{\Delta}_N(x) = \varphi_N(x) + E_N(x)$ where

$$E_N(x) = \sum_{|n|\geq 1} \varphi_N(x+n),$$

then one sees that:

(i) 上确界$_{|x|\leq 1/2} |E'_N(x)| \to 0$ as $N \to \infty$. (ii) $|\widetilde{\Delta}'_N(x)| \leq cN^2$.

(iii) $|\widetilde{\Delta}'_N(x)| \leq c/(N|x|3)$ for $|x| \leq 1/2$.

Moreover, $\int_{|x|\leq 1/2} \widetilde{\Delta}'_N(x)\,dx = 0$ and $-\int_{|x|\leq 1/2} x\widetilde{\Delta}'_N(x)\,dx \to 1$ as $N \to \infty$.

(c) The above estimates imply that if $f'(x_{零})$ exists, then

$$(f * \widetilde{\Delta}'_N)(x_0 + h_N) \to f'(x_0) \text{ as } N \to \infty,$$

whenever $|h_N| \leq C/N$. Then, conclude that both the real and imaginary parts of f_1 are nowhere differentiable, as in the proof given in Section 3, Chapter 4.

(d) Let $a > 1, |b| < 1$. Also prove the Weierstrauss function $W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x)$ is nowhere differentiable if $a|b| \geq 1$.

Remark 27. 我们还可以查阅[12, Section 16.H]中给出的另一种表征，该表征与延迟均值的方法有所不同。

Proof. (一个)

(必)西)迪)

（ (

□

Remark 28. 关于黎曼函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n^2 x}{n^2}$ 的可微性，参见 Jarnicki 和 Pflug 的著作 [10, 第 13 章]。

References

[1] 巴策尔 P. L.、G. 施迈瑟与 R. L. 斯坦斯：《采样分析导论：非均匀采样》。Springer出版社，波士顿，马萨诸塞州，2001年，第17-121页。

[2] Chung, Soon-Yeong. “热方程柯西问题解的唯一性。”《爱丁堡数学会会刊》42.3 (1999): 455-468.[3] Daubechies, Ingrid: 《小波十讲》. 第61卷. SIAM, 1992.[4] DiBenedetto, E: 《偏微分方程》. 第2版, Springer, 2010.[5] Evans, L. C.: 《偏微分方程》. 第2版. AMS, Providence, RI, 2010.[6] Folland, Gerald B: 《傅里叶分析及其应用》. 第4卷. 美国数学会, 1992.[7] Folland, Gerald B: 《实分析：现代技术及其应用》. 第2版, John Wiley and Sons, 1999.[8] Gilbarg, David, 与 Neil S. Trudinger: 《二阶椭圆型偏微分方程》. Springer, 2001.

[9] 格拉法科斯, 卢卡斯：《经典傅里叶分析》。第3版，Springer出版社，2014年。

[[10] 雅尔尼基, 马雷克, 彼得·普夫卢格:《无处可微的连续函数》。Springer数学专著系列, 纽约 (2015年)。

[11] John, Fritz: 《偏微分方程》。第4版，Springer，1991。

[12] 琼斯，弗兰克：《欧几里得空间上的勒贝格积分》（修订版）。琼斯与巴特利特学习出版社，2001年。

[13] 拉迪任斯卡娅，奥尔加·亚历山德罗夫娜，弗谢沃洛德·阿列克谢耶维奇·索隆尼科夫，尼娜·N·乌拉利采娃。《抛物型线性方程和拟线性方程》。第23卷。美国数学会，1968。

[14] 利伯曼，加里·M. 二阶抛物型微分方程（修订版）. 世界科技出版社, 2005.

[15] 利纳雷斯、费利佩与古斯塔沃·庞塞：《非线性色散方程导论（第二版）》，Springer出版社，2015年。

[16] Rosenbloom, P. C. 与 Widder, D.: 初始值为零的温度函数。《美国数学月刊》65.8 (1958): 607-609.

[17] 斯莫勒, 乔尔. 《冲击波与反应-扩散方程》. 第二版. 第258卷. Springer出版社, 1994.

[18] 斯坦因，埃利亚斯·M.，与圭多·L.·韦斯：《欧几里得空间上的傅里叶分析导论》第1卷. 普林斯顿大学出版社, 1971年.