Contrôle Optimal Numérique, Application Biomécanique

KIN-6839

François Bailly

5 Février 2020

Université de Montréal

Contact: francois.bailly@umontreal.ca

1 Introduction

1 Introduction

- Définition

Contrôle Optimal - Définition :

Trouver une loi de contrôle pour un système dynamique donné lui permettant d'optimiser un objectif sur une période temps.

Contrôle Optimal - Définition :

Trouver une loi de contrôle pour un système dynamique donné lui permettant d'optimiser un objectif sur une période temps.

Une fusée

Une réaction chimique

L'économie

Contrôle Optimal - Définition :

Trouver une loi de contrôle pour un système dynamique donné lui permettant d'optimiser un objectif sur une période temps.

Une fusée

Une réaction chimique

L'économie

Exemples :

- Systèmes : Vaisseau, solution chimique, économie nationale...
- Contrôles : Poussée des moteurs, température/catalyseur, politique fiscale...
- Optimisation : Distance Terre/Lune, produit de réaction, chômage...

Contrôle Optimal - En pratique :

Il faut:

- Choisir un état $\mathbf{x}$ pour le système (en mécanique, position/vitesse)
- Choisir un contrôle $\mathbf{u}$ pour le système (en mécanique, forces/moments)
- Choisir un objectif $\mathbf{J}$ à minimiser (en mécanique, énergie, temps, activation musculaire...)
- Calculer la dynamique du système $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$
- Identifier un jeu de contraintes (contacts, limites cinématiques, forces max, etc...)

Contrôle Optimal - Ensuite :

On a un problème mathématique de grande dimensions (état + contrôle + contraintes), potentiellement non linéaire, non convexe et fortement contraint.
2 options :

- Faire des calculs compliqués (équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, principe du maximum de Pontriaguine)
- Transformer le problème pour le résoudre numériquement avec un ordinateur

Programmes non linéaires :

Il existe des solveurs de problèmes non linéaires très aboutis et facilement utilisables.
Ils permettent de résoudre des problèmes de la forme :

$$
\begin{aligned}
\min_{z} \quad & J(z) && (1a)\\
\text{subject to} \quad & f(z) = 0 && (1b)\\
& g(z) \leq 0 && (1c)\\
& z_{low} \leq z \leq z_{upp} && (1d)\\
& && (1e)
\end{aligned}
$$

Contrôle Optimal - Transcription :

Idée : transformer un problème de contrôle optimal en programme non linéaire.

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{2a}$$

$$\text{subject to} \quad \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{2b}$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{low}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\mathbf{upp}} \tag{2c}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{low}} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\mathbf{upp}} \tag{2d}$$

$$\tag{2e}$$

Contrôle Optimal - Discrétisation :

Passer d'un problème continu à un problème discret.
Méthode :

- choisir des points de contrôle sur la trajectoire -> nombre fini de variables de décision.
- convertir la dynamique continue du système en un jeu de contraintes égalités

Contrôle Optimal - Discrétisation :

Passer d'un problème continu à un problème discret.
Méthode :

- choisir des points de contrôle sur la trajectoire -> nombre fini de variables de décision.
- convertir la dynamique continue du système en un jeu de contraintes égalités

Contrôle Optimal - Conversion de la dynamique :

Idée : la valeur de l'état au point $k+1$ ($\mathbf{x_{k+1}}$) est égale a la dynamique intégrée à partir de l'état au point k ($\mathbf{x_k}$) en appliquant le contrôle ($\mathbf{u_k}$). (Schéma)

Contrôle Optimal - Exemple :

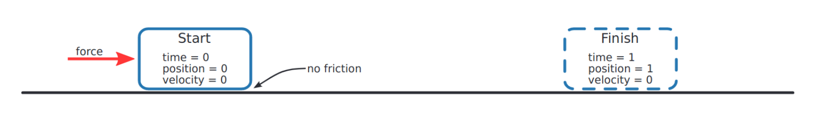

Figure: Un problème mécanique simple. From http://www.matthewpeterkelly.com

Contrôle Optimal - Exemple :

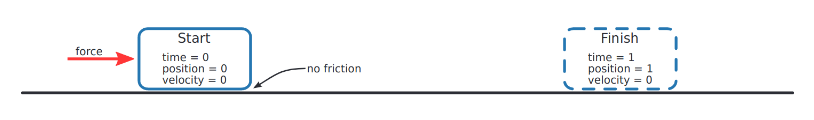

Figure: Un problème mécanique simple. From http://www.matthewpeterkelly.com

Contrôle Optimal - Problème :

- État : position,vitesse. $x = [p, v]^T$.
- Contrôle : accélération. $u = a$.
- Dynamique : $\dot{x} = [\dot{p}, \dot{v}]^T = [v, a]^T$