实验指导 2

微积分的应用

【实验目的】

1. 熟悉 Matlab 命令求函数微分、定积分、解代数方程和一元数值方程。
2. 加深对微分、导数、函数极（最）值、积分等基本概念的理解。
3. 通过实例学习用微积分解决实际问题。

【软件功能】

Matlab 中的 MuPAD 提供了命令 diff 用于建设表达式类型的函数的导数，结果也属于表达式类型。语法格式与功能如下：

diff(f, x)　　对 x 求一阶导数 df/dx

diff(f, x, $n)　对 x 求 n 阶导数 $d^n f/dx^n$

参数说明：

f：函数的表达式；

x：求导的变量名；

n：求导的阶数，必须是正整数。

例1.　一弹性球作竖直上抛运动，初始高度 *h*=10m，向上初速度 v_0=15m/s，与地相碰的速度衰减系数 *k*=0.8，计算任意时刻球的速度和位置，并用可视化图形表示。

分析：根据牛顿第二定律有：$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$，即$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$

$$v=\frac{dy}{dt}=\int -gdt=v_0-gt$$

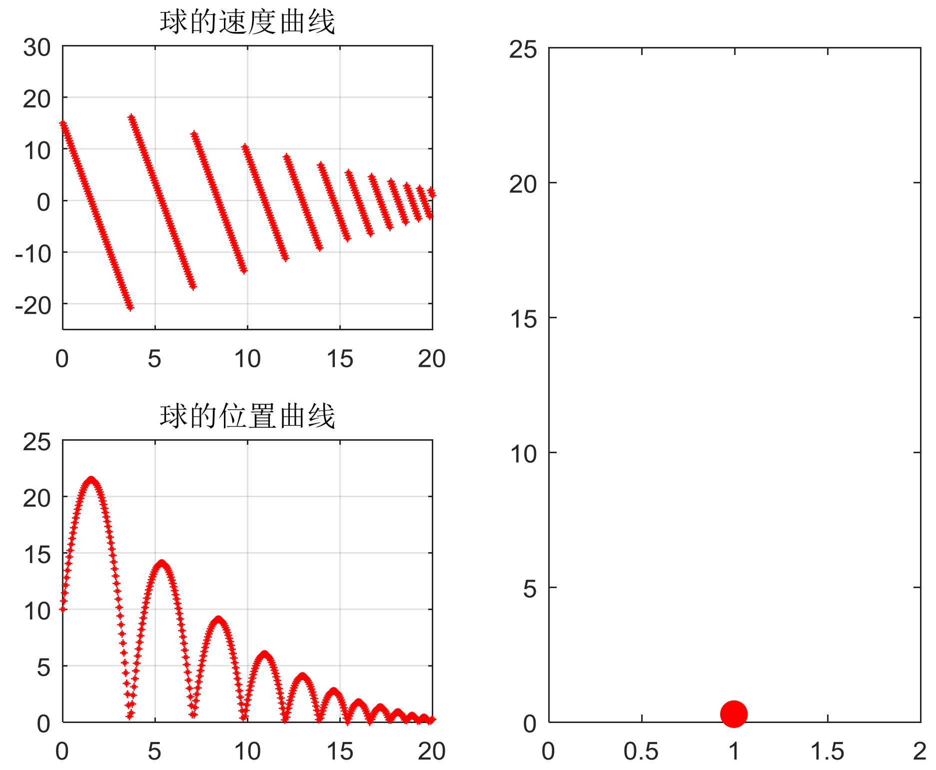
$$\int dy=\int vdt，y_0=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

程序代码如下：

```
clear all
v0=15;  h=10;      %初速度和初始高度
g=-9.8; k=0.8;        %重力加速度和衰减系数
T=0;
for t=0:.05:20
    v=v0+g*(t-T);      %求速度
    y=h+v0*(t-T)+g*(t-T)^2/2;        %求高度
    if y<=0
        v0=-0.8*v;
        T=t;           %取球每次落地时所用的时间
        h=0;
    end
    subplot(1,2,2)        %画球的运动图像
    pause(0.1)
    plot(1,y,'or','MarkerSize',10,'MarkerFace',[1,0,0])
    axis([0,2,0,25])
```

```
    subplot(2,2,1)             %画球的速度曲线
    axis([0,20,-25,30])
    title('ÇòµÄËÙ¶ÈÇúÏß')
    grid on
    plot(t,v,'*r','MarkerSize',2)
    hold on
    subplot(2,2,3)          %画球的位置曲线
    axis([0,20,0,25])
    title('ÇòµÄÎ»ÖÃÇúÏß')
    grid on
    plot(t,y,'*r','MarkerSize',2)
    hold on
    disp(['t=',num2str(t,4),',   v=',num2str(v,4),...
    ',   y=',num2str(y,2)])
end
```

输出结果如下图：



输出数据如下：

t=0，v=15，y=10

t=0.05，v=14.51，y=11

t=0.1，v=14.02，y=11

……（略）

t=19.9，v=1.961，y=0.11

t=19.95，v=1.471，y=0.2

t=20，v=0.9807，y=0.26

例2. 洗过的衣服含有洗衣粉残液，现用总量为 A m³ 的清水漂洗，漂洗一遍再甩干后衣服上有 a m³ 的洗衣粉残液。若规定漂洗两遍，问如何分配两次的用水量，才能使漂洗效果最佳。

分析：设第一次用水量为 x m³，则第二次用水量为(A -x) m³。又设漂洗前衣服上含有的 a m³ 的洗衣粉残液中洗衣粉占 b m³。

第一次加水后，水中洗衣粉所占百分比为

$$\frac{\frac{ab}{a+x}}{a+A-x}=\frac{ab}{(a+x)(a+A-x)}$$

将水放掉甩干后，残液中洗衣粉含量为

$$f(x)=\frac{ab}{(a+x)(a+A-x)}\cdot a=\frac{a^2b}{(a+x)(a+A-x)}$$

两次漂洗后效果最佳就是漂洗后残液中洗衣粉含量 $f(x)$最小，为此只要求出

$$g(x)=(a+x)(a+A-x)\qquad (0<x<A)$$

的最大值就可以了。

$$g'(x)=(a+A-x)-(a+x)=A-2x$$

令$g'(x)=0$解得$x=\frac{A}{2}$，因$g''(x)=-2<0$，故$g\left(\frac{A}{2}\right)=\left(a+\frac{A}{2}\right)^2$为最大。即$f\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{a^2b}{\left(a+\frac{A}{2}\right)^2}=\frac{4a^2b}{(2a+A)^2}$为最小。因此，将 A m³ 的清水平分为两次使用可使漂洗效果最佳。

程序代码如下：

```
f:=x->(a+x)*(a+A-x);
```

$x\to(a+x)(a+A-x)$

```
eq:=f'(x);
```

$A-2x$

```
S:=solve(eq,x)
```

$\left\{\frac{A}{2}\right\}$

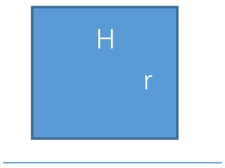
例3. 一个数学家即将迎来他九十岁的生日，很多学生要来为他祝寿，所以需要定制一个特大蛋糕。为纪念他的一项重要科研成果，他的学生要求定制的蛋糕边缘圆盘半径是下列悬链线函数：

$$r=2-\frac{e^{2h}+e^{-2h}}{5}$$

其中，$0<h<1$（单位：m）。

由于蛋糕店从来没有做过这么大的蛋糕，所以老板必须先计算一下成本。这主要涉及两个问题的计算：一个是蛋糕的质量，由此可以确定需要多少鸡蛋和面粉；另一个是蛋糕的表面积（底面除外），由此确定需要多少奶油。

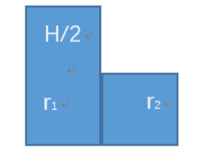
分析：首先分析一个圆盘形的单层蛋糕，如下图所示：



绕水平中心轴旋转而成，若高为 H（m），半径为 r（m），密度为 k（kg/m^3），则蛋糕的质量 W（kg）和表面积 S（m^2）分别为

$$W = k\pi r^2 H,\ S = 2\pi rH + \pi r^2$$

如果蛋糕是双层圆盘形的，则又如下图所示：

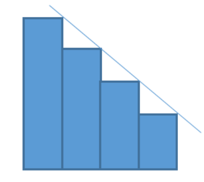


绕水平中心轴旋转而成，每层高为 $H/2$，下层蛋糕半径为 r_1，上层蛋糕半径为 r_2，此时蛋糕的质量 W（kg）和表面积 S（m^2）分别为

$$W = k\pi r_1^2 \frac{H}{2} + k\pi r_2^2 \frac{H}{2} = k\pi(r_1^2 + r_2^2)\frac{H}{2},$$

$$S = 2\pi r_1 \frac{H}{2} + 2\pi r_2 \frac{H}{2} + \pi r_1^2 = \pi(r_1 + r_2)H + \pi r_1^2.$$

以此类推，如果蛋糕是 n 层的，则如下图所示：



每层高为 H/n，半径分别为 r_1，r_2，…，r_n，则蛋糕的质量和表面积分别为

$$W = k\pi \frac{H}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^2,\quad S = 2\pi \frac{H}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i + \pi r_1^2.$$

事实上，蛋糕边缘圆盘半径

$$r = r(h) = 2 - \frac{e^{2h}+e^{-2h}}{5} \qquad (0 < h < 1),$$

那么当$n \to \infty, H = 1$时，

$$W = k\pi \frac{H}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \to k\pi \int_0^1 r^2(h)dh,$$

$$S = 2\pi \frac{H}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i + \pi r_1^2 \to 2\pi \int_0^1 r(h)dh + \pi r(0)^2$$

此时，生日蛋糕的原料用量问题就转化为求上面两个数值积分。

程序代码如下：

```
r:=h->2-(exp(2*h)+exp(-2*h))/5;
```

$$h \to 2 - \frac{e^{2h} + e^{-2h}}{5}$$

```
V:=float(int(r(h)^2,h=0..1))
```

1.724310018

```
BS:=float(subs(2-(exp(2*h)+exp(-2*h))/5,h=0))
```

1.6

```
SF:=float(int(r(h),h=0..1))
```

1.274627918

```
W:=float(k*PI*V);
```

$5.417079684\,k$

```
S:=float(2*PI*SF+PI*BS^2);
```

16.0512006

求得蛋糕的质量和表面积分别为

$$W = 5.4171k(\text{kg})，S = 16.0512(\text{m}^2)$$