



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

ELT016 - TÉCNICAS DE MODELAGEM DE SISTEMAS
DINÂMICOS

Tarefa 4:
Estimação de Parâmetros

Felipe Bartelt de Assis Pessoa 2016026841

4 de fevereiro de 2022

1 Parte 1

1.1 Exercício 5.1

Tomando-se a medição de tensão V_3 sobre o resistor R_3 e a corrente i_3 que passa pelo mesmo resistor, pode-se, por meio das equações de Kirchhoff induzir a [Equação 1](#) e, a partir de (2) e (3), deduzir a equação normal (4).

$$V_3(t) = \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \cdot i_3(t) + \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot v(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{Y} = \Psi \hat{\theta} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_3[k] \\ V_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_3[k] & v[k] \\ i_3[k+1] & v[k+1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \\ \frac{R_2}{R_2 - R_1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \\ \frac{R_2}{R_2 - R_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_3[k] & v[k] \\ i_3[k+1] & v[k+1] \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} V_3[k] \\ V_3[k+1] \end{bmatrix} \quad (4)$$

Assim, adotando-se o sinal de entrada PRBS $v(t)$ e um número suficiente de amostras de forma a tornar o problema redundante com $\Psi \in \mathbb{M}^{m \times 2}$, $m > 2$, pode-se estimar $\hat{\theta}$ com robustez à ruído. A partir de $\hat{\theta}$, determina-se facilmente R_1 e R_2 , uma vez que é conhecido o valor de R_3 e os elementos de $\hat{\theta}$ são combinações lineares entre si. Ou seja, tomando $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} & \frac{R_2}{R_2 - R_1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^T$, pode-se determinar R_1 e R_2 por (5) e (6), respectivamente.

$$R_1 = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5)$$

$$R_2 = -\frac{R_1}{\frac{1}{\beta} - 1} \quad (6)$$

1.2 Exercício 5.3

$$\begin{aligned} H(z^{-1}) &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ \Rightarrow \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ \Rightarrow Y(z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) &= X(z^{-1})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \\ \therefore y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] &= b_1 x[k-1] + b_2 x[k-2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(k-1) &= \begin{bmatrix} -y[k-1] & -y[k-2] & x[k-1] & x[k-2] \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} y[2] & y[3] & y[4] & y[5] \end{bmatrix}^T \\ \hat{\theta} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{Y} &= \Psi \hat{\theta} + \xi, \mathbf{Y} \in \mathbb{M}^{4 \times 1}, \Psi \in \mathbb{M}^{4 \times 4}, \hat{\theta} \in \mathbb{M}^{4 \times 1}, \xi \in \mathbb{M}^{4 \times 1} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \Psi^+ \mathbf{Y} \quad (8)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y[1] & -y[0] & x[1] & x[0] \\ -y[2] & -y[1] & x[2] & x[1] \\ -y[3] & -y[2] & x[3] & x[2] \\ -y[4] & -y[3] & x[4] & x[3] \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \end{bmatrix} \quad (9)$$

A partir de (7), obtém-se a equação normal (8) por meio da pseudo-inversa e assim determina-se os parâmetros do sistema conforme (9). Dessa forma, são necessárias 6 observações do sinal para a determinação dos parâmetros ou 5 observações, tendo-se conhecimento das condições iniciais do sistema.

1.3 Exercício 5.18

Adotando-se um sinal de entrada PRBS de 500 amostras e 6 bits com $T_b = 1$, simulou-se a resposta do sistema (10) para duas situações, uma considera $e[k] = 0 \forall k$ e a outra considera o ruído gaussiano $e[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, onde σ é o desvio padrão do vetor y correspondente ao sistema sem ruído. A resposta de ambos os sistemas pode ser vista na Figura 1.

$$y[k] = 1.5 \cdot y[k-1] - 0.7 \cdot y[k-2] + u[k-1] + 0.5 \cdot u[k-2] + e[k] \quad (10)$$

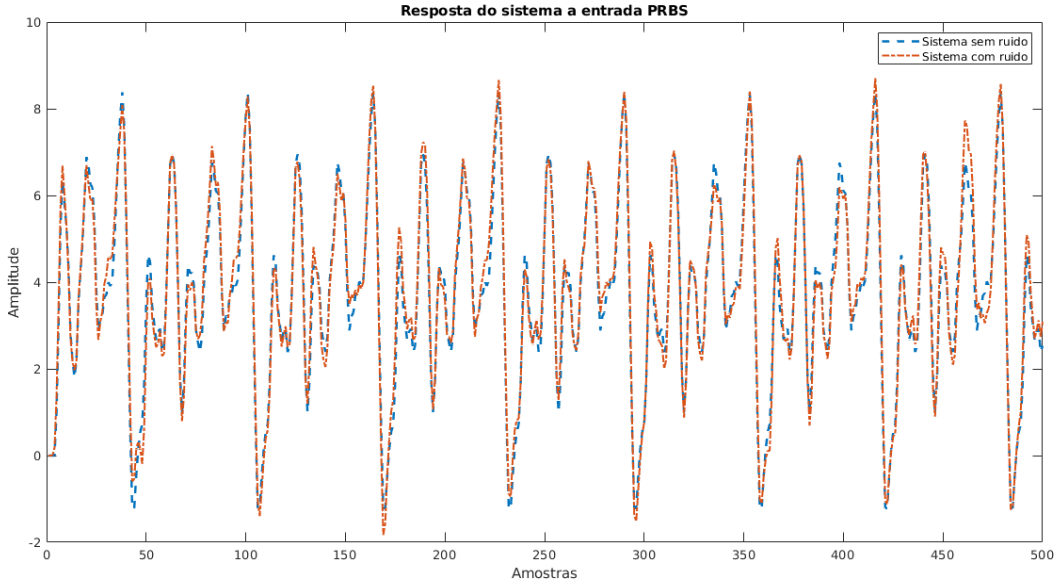


Figura 1: Resposta de ambos os sistemas, com e sem ruído, para o sinal de entrada PRBS.

Utilizando-se a equação normal para o método de mínimos quadrados (8), utilizando-se como vetores $\mathbf{Y}_1 = [y[5] \ y[6] \ y[7] \ y[8]]^T$, $\mathbf{Y}_2 = [y[205] \ y[206] \ y[207] \ y[208]]^T$ e suas respectivas matrizes $\Psi \in \mathbb{M}^{4 \times 4}$, obteve-se as aproximações dos parâmetros do sistema. Os parâmetros estimados são apresentados na Tabela 1, adotando-se os coeficientes a_n como coeficientes da saída e coeficientes b_n como de entrada, ainda adota-se o subscrito e para indicar os vetores correspondentes ao sistema com ruído não nulo.

Notou-se que os parâmetros estimados para o sistema sem ruído se apresentaram idênticos ao do sistema original. Entretanto, há uma inconsistência para os parâmetros estimados por \mathbf{Y}_1 , obtendo um erro maior ao se "rodar" o *script* diversas vezes, o que se conjectura devido ao transiente do sinal, sendo então os parâmetros estimados por \mathbf{Y}_2 mais robustos. Para os parâmetros estimados para o sistema com ruído, nota-se uma alta sensibilidade à ruído, uma vez que os valores estimados diferem bastante.

Após, tomou-se a estimação de parâmetros, também via mínimos quadrados (MQ), utilizando o máximo de amostras possível, ou seja, $\Psi \in \mathbb{M}^{498 \times 4}$. Os parâmetros estimados para esse caso também são mostrados na Tabela 1, onde \mathbf{Y} , \mathbf{Y}_e representam as matrizes de saída 498×1 para os sistemas sem e com ruído, respectivamente. Nota-se dessa forma que o acréscimo de certa

redundância na equação matricial, equivalente a ter mais equações do que variáveis, aumenta consideravelmente a robustez à ruído e, ainda, não prejudica os resultados obtidos para um sistema sem ruído. Sabe-se que isso o uso do máximo de observações possível para estimação de parâmetros pode ocasionar em *overfitting*, sendo então necessário um conjunto de validação, com amostras ainda não utilizadas, para se ter certeza que a estimativa é boa.

	\mathbf{Y}_1	\mathbf{Y}_2	\mathbf{Y}_{1e}	\mathbf{Y}_{2e}	\mathbf{Y}	\mathbf{Y}_e
a_1	1.5	1.5	1.72	1.96	1.5	1.5
a_2	-0.7	-0.7	-0.98	-1.34	-0.7	-0.7
b_1	1	1	1.07	1.61	1	1
b_2	0.5	0.5	0.17	0.43	0.5	0.51

Tabela 1: Parâmetros obtidos via método dos mínimos quadrados para diferentes vetores.

2 Parte 2

Considerou-se o sistema linear com ganho $K = 2$, atraso puro de tempo $\theta = 4$ e constante de tempo $\tau = 5$, conforme (11).

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} = \frac{2e^{-4s}}{5s + 1} \quad (11)$$

Dessa forma, adotou-se como sinal de entrada para estimação do atraso puro de tempo, um sinal PRBS de 400 amostras, média nula e 6 bits, de forma a se obter alguns ciclos dentro da simulação. Determinou-se T_b por meio da heurística (12), apresentada por Aguirre [2]. Dessa forma, adotou-se $T_b = \lfloor \frac{\tau}{3} + 0.5 \rfloor = 2$.

$$\frac{\tau_{\min}}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau_{\min}}{3} \quad (12)$$

Simulando-se a resposta do sistema (11) ao sinal PRBS, utilizando a função `lsim`, obteve-se o sinal resultante da Figura 2.

Utilizando-se a função de correlação cruzada, entre a resposta obtida na Figura 2 e sinal PRBS de entrada, adotando um *lag* de 20 amostras na função `myccf2` [1], obteve-se o gráfico da Figura 3. Desprezando-se os primeiros valores, com valores de correlação baixos, vê-se que o sistema passa a responder a partir de $\tau = 4$, o que implica que o atraso estimado $\hat{\theta} = 4$.

Tomando-se o atraso estimado $\hat{\theta}$, estimou-se os demais parâmetros por meio do algoritmo de mínimos quadrados, de forma recursiva, conforme [2]. Removeu-se o transiente dos sinais, desprezando-se as 28 primeiras amostras e removeu-se os valores médios de cada sinal, subtraindo-se suas respectivas médias. Observa-se os ganhos e constantes de tempo estimados a cada iteração na Figura 4. O ganho final estimado corresponde à $\hat{K} \approx 2$ e a constante de tempo $\hat{\tau} \approx 5.5$.

Dessa forma, o sistema aproximado $\hat{G}(s)$ é dado por (13), sendo bastante similar ao sistema original (11). A resposta ao impulso e ao degrau de ambos os sistemas são comparadas na Figura 5. Percebe-se que a menos de um erro na velocidade de resposta do sistema, ambos os sistemas apresentam respostas bastante próximas, com atraso e valor em estado estacionário idênticos. Assim, conclui-se que a modelagem do sistema obtida, por meio de um modelo ARX via mínimos quadrados recursivo, é satisfatória.

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{K} e^{-\hat{\theta}s}}{\hat{\tau}s + 1} = \frac{2e^{-4s}}{5.5s + 1} \quad (13)$$

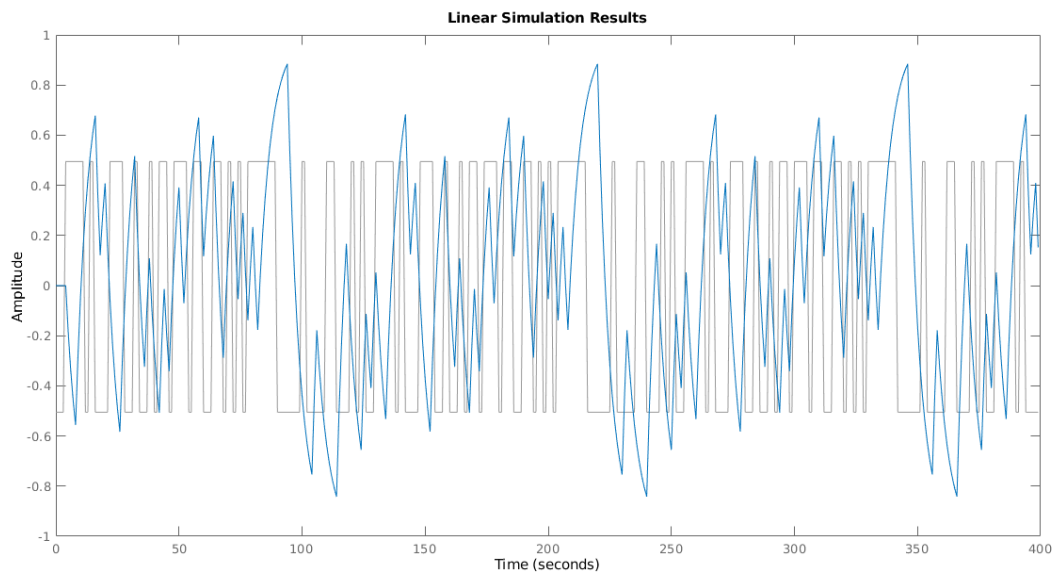


Figura 2: Resposta do sistema ao sinal PRBS.

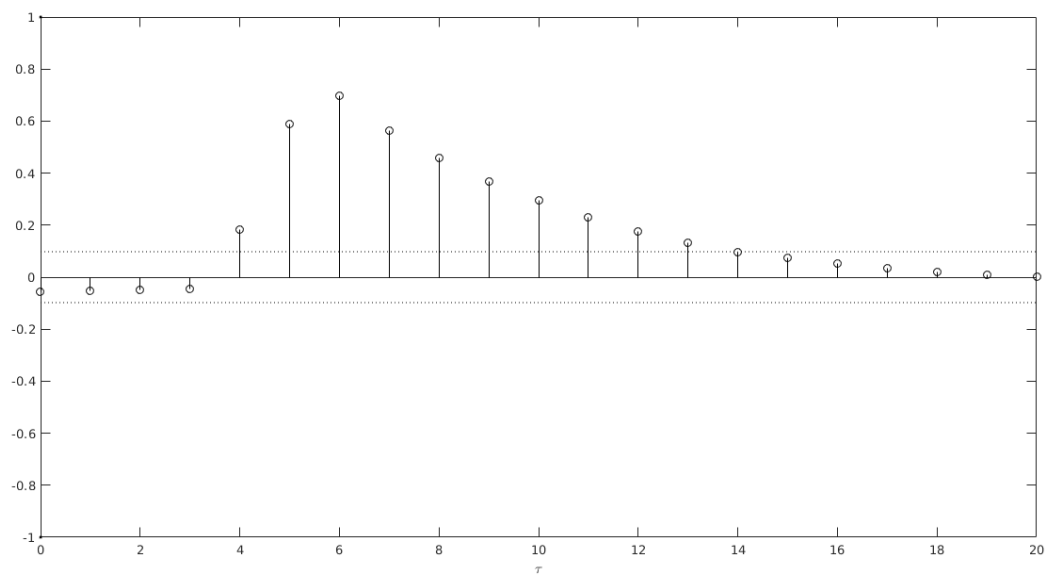


Figura 3: Função de correlação cruzada entre entrada PRBS e a respectiva resposta do sistema.

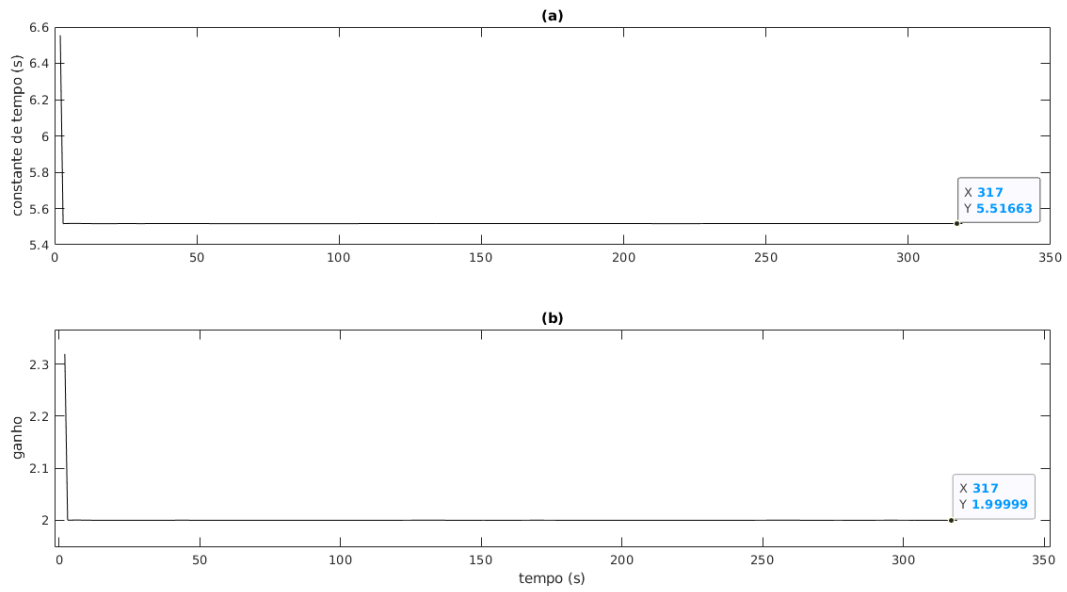


Figura 4: Ganho e constante de tempo estimados pelo algoritmo recursivo baseado em mínimos quadrados.

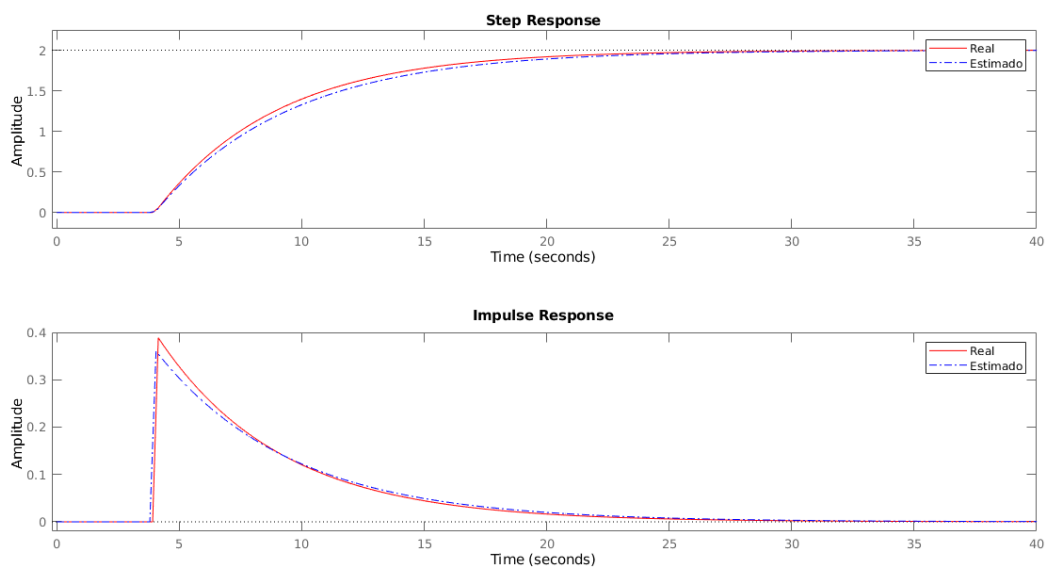


Figura 5: Resposta ao degrau e ao impulso para o sistema real $G(s)$ e sistema aproximado $\hat{G}(s)$.

Referências

- [1] L. A. Aguirre, “Introdução à Identificação de Sistemas (Linked Data),” Research Gate, 03 2020. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/303679484_Introducao_a_Identificacao_de_Sistemas
- [2] —, *Introdução à Identificação de Sistemas*, 4th ed. Editora UFMG, 01 2015.