



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

ELT016 - TÉCNICAS DE MODELAGEM DE SISTEMAS
DINÂMICOS

Tarefa 5:
Identificação de Sistemas

Felipe Bartelt de Assis Pessoa 2016026841

14 de fevereiro de 2022

1 Parte 1

1.1 Projeto de teste

Primeiramente definiu-se os parâmetros para a função de transferência do sistema contínuo por meio de tentativa e erro, de forma a se obter um sistema subamortecido assintoticamente estável. O sistema considerado é apresentado em (1), que posteriormente foi discretizado por meio de um segurador de ordem zero (ZOH), cujo sistema resultante é (2).

$$H(s) = \frac{0.1s + 1}{0.5s^2 + 0.3s + 0.1} \quad (1)$$

$$H(z) = \frac{0.9591z + 0.5201}{z^2 - 1.401z + 0.5488} \quad (2)$$

Tomando-se a resposta ao degrau do sistema, estimou-se a constante de tempo como 3.71 s. Dessa forma, pode-se estimar o valor $T_b = 1$ para o sinal PRBS por meio da heurística. (3).

$$\frac{\tau_{min}}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau_{min}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3.71}{10} \leq T_b \leq \frac{3.71}{3} \implies T_b = 1 \quad (4)$$

Utilizando-se, arbitrariamente, 700 amostras para o sinal PRBS, adotou-se um sinal de 9 bits, de forma a garantir certa repetição de sinal, ainda garantindo uma característica aleatória. Assim, o sinal PRBS e as respostas para essa entrada sem ruído y e com ruído de 20dB y_m .

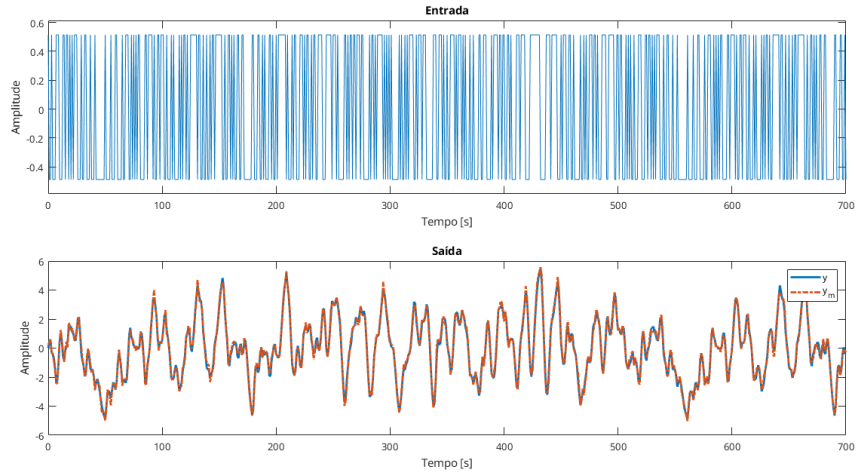


Figura 1: Sinal de entrada e sinais de saída, com e sem ruído.

1.2 Estimação de Parâmetros

Estimou-se os parâmetros do sistema por meio de mínimos quadrados, utilizando-se todas as amostras disponíveis, assim estimou-se os valores presentes na Tabela 1. Percebe-se que os parâmetros estimados pela resposta sem ruído são aproximadamente iguais aos parâmetros reais. Os parâmetros aproximados pela saída com ruído, mesmo que distintos, se aproximam satisfatoriamente dos parâmetros reais, devido ao uso de todas as amostras disponíveis. Pode-se notar que ambas as aproximações são satisfatórias pela Figura 2.

Parâmetros	Sem ruído	Com ruído	Real
$\hat{\theta}_1$	-1.40	-1.24	-1.401
$\hat{\theta}_2$	0.55	0.4	0.5488
$\hat{\theta}_3$	0.96	0.95	0.9591
$\hat{\theta}_4$	0.52	0.67	0.5201

Tabela 1: Parâmetros estimados

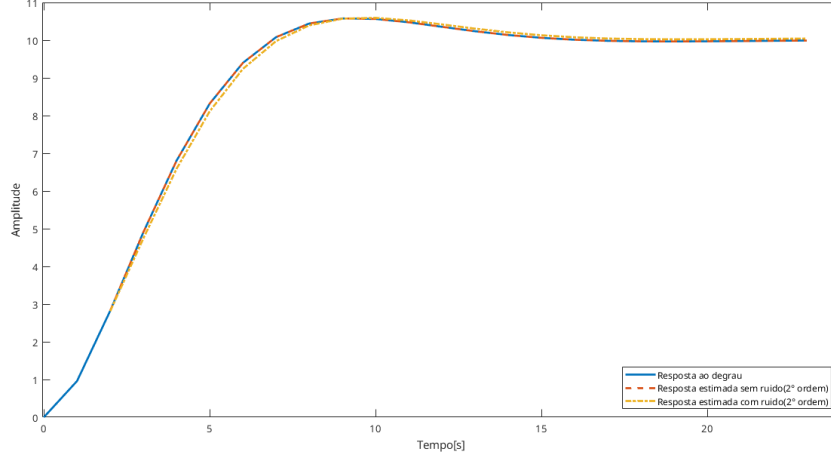


Figura 2: Respostas ao degrau para o sistema real e parâmetros aproximados

1.3 Estrutura do modelo

Tomando-se o mesmo processo anterior, estimou-se parâmetros para modelos de primeira e terceira ordem, conforme apresentado na [Tabela 2](#).

Parâmetros	Sem ruído 1º ordem	Com ruído 1º ordem	Sem ruído 3º ordem	Com ruído 3º ordem	Referência	Real
$\hat{\theta}_1$	-0.93	-0.92	-1.03	-0.73	$y[k-1]$	-1.401
$\hat{\theta}_2$	-	-	0.02	-0.36	$y[k-2]$	0.5488
$\hat{\theta}_3$	-	-	0.21	0.33	$y[k-3]$	-
$\hat{\theta}_4$	0.95	0.98	0.96	0.99	$u[k-1]$	0.9591
$\hat{\theta}_5$	-	-	0.88	1.14	$u[k-2]$	0.5201
$\hat{\theta}_6$	-	-	0.2	0.37	$u[k-3]$	-

Tabela 2: Parâmetros estimados

As respostas para os modelos estimados de 1º e 3º ordem podem ser vistos na [Figura 3](#) e [Figura 4](#), respectivamente. Nota-se que devido ao uso de todas as amostras para a estimativa dos modelos, obteve-se uma resposta razoavelmente satisfatória para o modelo de 1º ordem e um modelo de 3º ordem mais preciso que o obtido considerando sabida a ordem do sistema, desprezando-se praticamente todo o ruído. É claro que todos os modelos estimados podem sofrer, e provavelmente sofrem, de *overfitting*, devido à forma como foram modelados, entretanto, com isso foi possível perceber que a ordem do modelo não necessita ser igual à ordem do sistema original para que se estime um bom modelo.

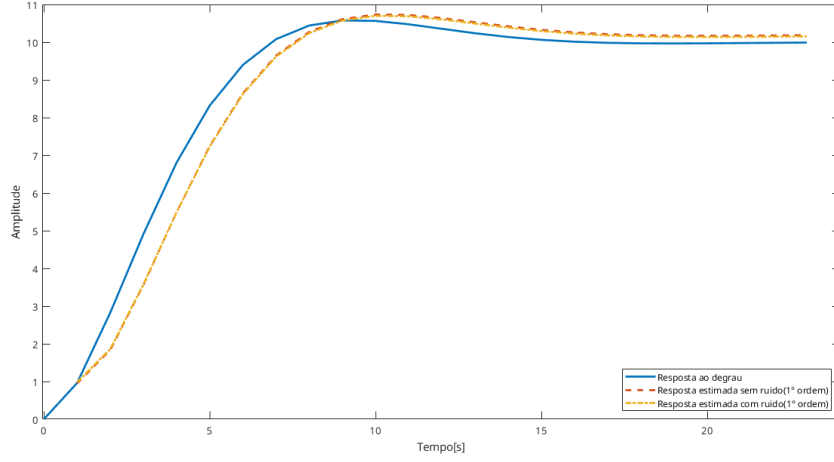


Figura 3: Respostas ao degrau para o sistema real e parâmetros aproximados para um modelo de 1º ordem

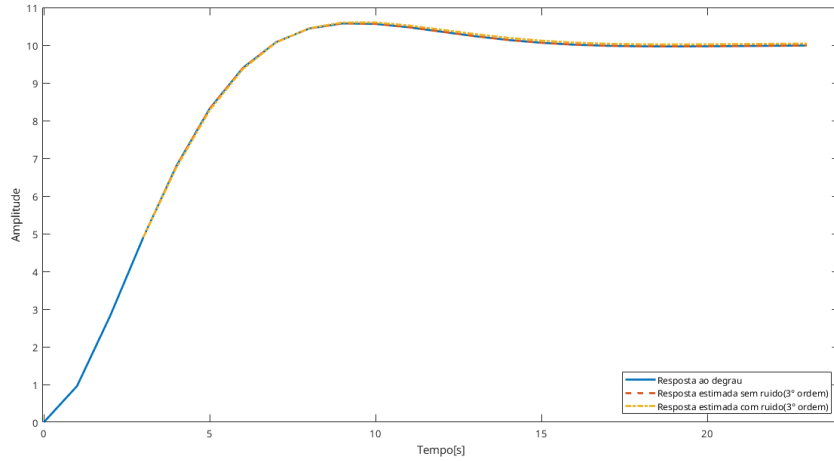


Figura 4: Respostas ao degrau para o sistema real e parâmetros aproximados para um modelo de 3º ordem

2 Parte 2

2.1 Preparação dos dados

Inicialmente, removeu-se valores médios dos sinais de entrada e saída, além de se definir os dados de identificação de modelo e dados de validação. Escolheu-se uma proporção de 70% – 30%, para dados de identificação e validação, respectivamente. Isso pode ser visto na [Figura 5](#). O conjunto definido para identificação contém maiores informações quanto à dinâmica do processo, uma vez que há maiores variações nos instantes iniciais do sinal.

Em seguida, tornou-se necessário a escolha do período de amostragem, que foi feita por meio de funções de correlação cruzada, conforme Aguirre [2]. Dessa forma, tomou-se as funções de autocorrelação do sinal de saída e do quadrado do sinal de saída, conforme [Figura 6](#). Tomando-se o mínimo dos tempos nos quais são atingidos os mínimos dessas funções, isso é $\tau_m = \min(\arg \min_t (\text{FAC}(y(t))), \arg \min_t (\text{FAC}(y^2(t))))$, encontra-se $\tau_m = 33$. De forma a se reduzir o tempo de amostragem tal que $10 \leq \tau_m \leq 20$, utilizou-se uma decimação de 2, obtendo-se como resultante $\tau_m = 17$, o que pode ser visto na [Figura 7](#). Os sinais decimados de identificação resultantes são mostrados na [Figura 8](#).

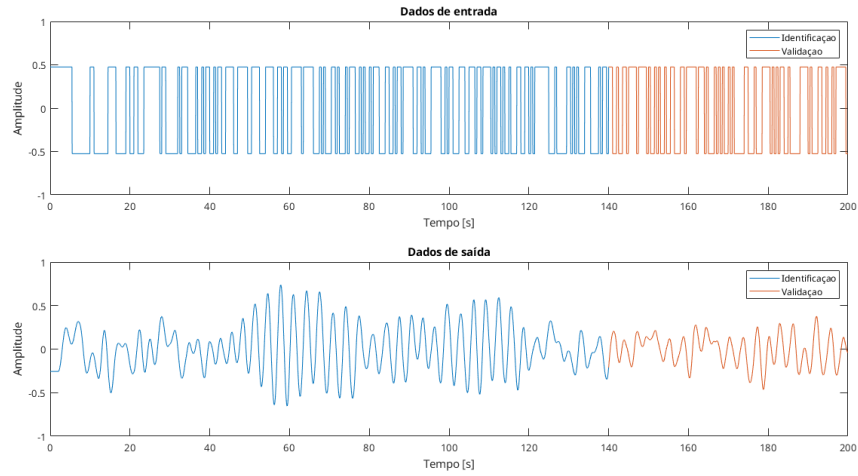


Figura 5: Separação dos dados entre identificação e validação

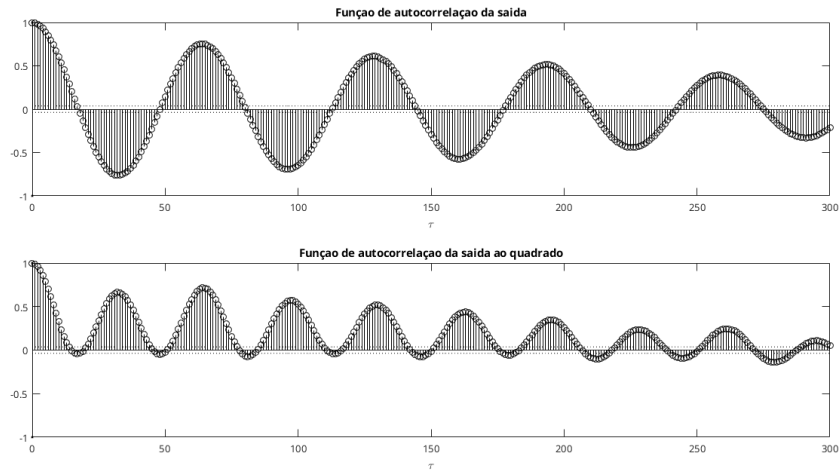


Figura 6: Funções de autocorrelação para sinal de saída e sinal de saída ao quadrado.

Utilizando-se a função de correlação cruzada entre os dados de identificação de entrada e saída decimados, é possível notar que a maioria das amostras apresenta correlação significativa, conforme [Figura 9](#), e portanto são bons dados para identificação do sistema.

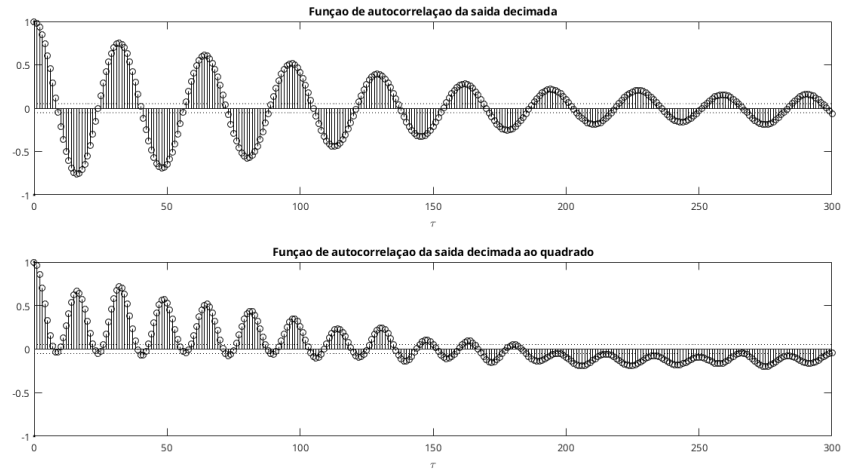


Figura 7: Funções de autocorrelação para sinal de saída decimado e sinal de saída decimado ao quadrado.

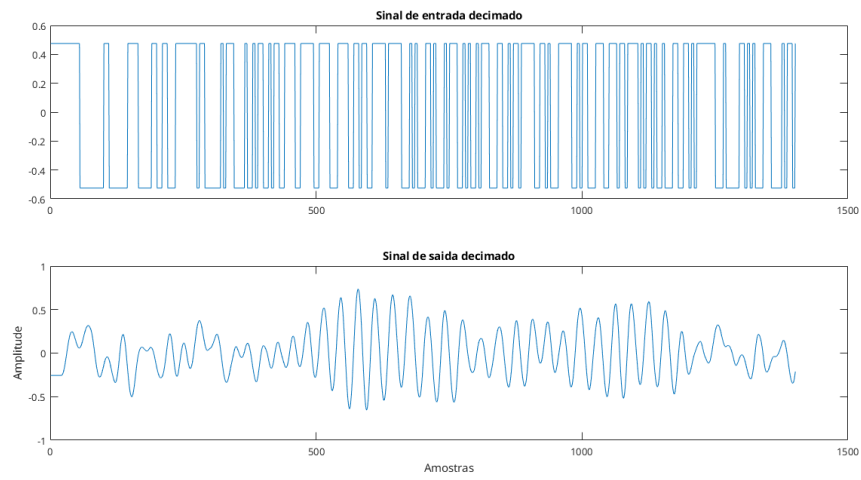


Figura 8: Sinais de entrada e saída decimados.

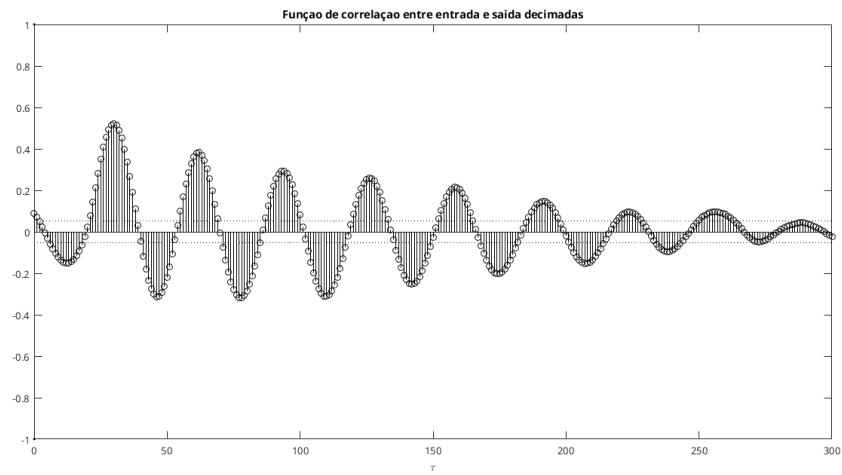


Figura 9: Funções de correlação cruzada entre sinal de entrada e saída decimados

2.2 Seleção de estrutura

Utilizou-se o critério de Akaike e o método de agrupamento de termos para estimar a ordem do modelo ARX, utilizando-se um máximo de sexta ordem.

O resultado do critério de Akaike é mostrado na [Figura 10](#), na qual pode-se notar que um modelo de 5º ordem apresenta maior representatividade para os dados. Esses resultados condizem com os obtidos para o método de agrupamento de termos, conforme [Figura 11](#), no qual também é estimado um melhor modelo quando a ordem é 5

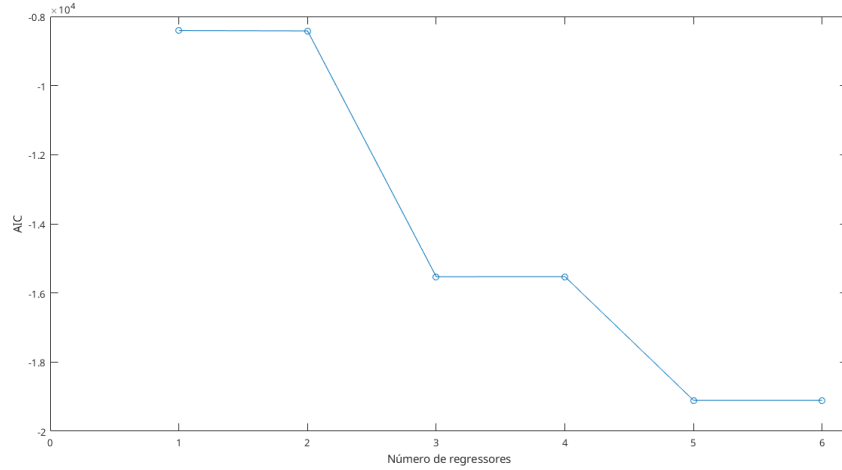


Figura 10: Resultado do critério de Akaike

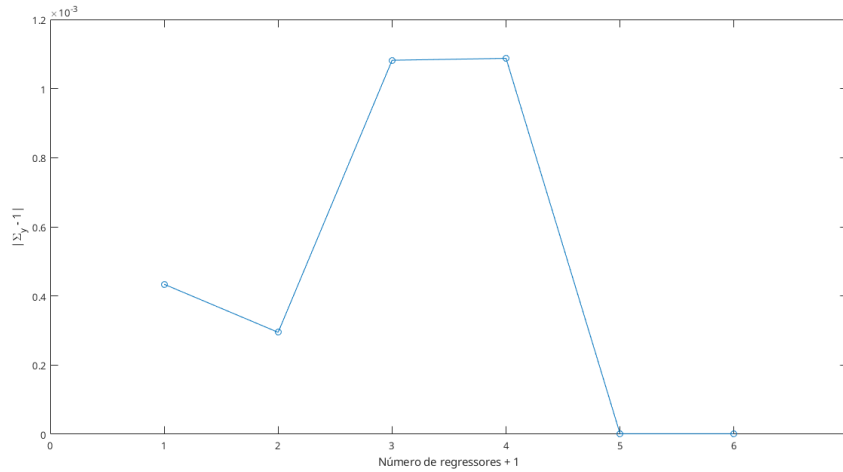


Figura 11: Resultado do método de agrupamento de termos

2.3 Estimação de parâmetros

Utilizou-se o método dos mínimos quadrados para estimação dos parâmetros do modelo ARX, utilizando-se todas as amostras possíveis de identificação, isso é, todas as amostras menos as três últimas, uma vez que a previsão de um valor depende dos 3 anteriores. Dessa forma, por meio da pseudo-inversa, estimou-se os parâmetros abaixo, onde $\hat{\theta}_1$ corresponde ao parâmetro

associado a $y[k-1]$, $\hat{\theta}_2$ a $y[k-2]$, $\hat{\theta}_3$ a $y[k-3]$, $\hat{\theta}_4$ a $u[k-1]$ e $\hat{\theta}_5$ a $u[k-2]$.

$$\hat{\theta}_1 = 2.92 \quad (5)$$

$$\hat{\theta}_2 = -2.88 \quad (6)$$

$$\hat{\theta}_3 = 959.25 \cdot 10^{-3} \quad (7)$$

$$\hat{\theta}_4 = -193.87 \cdot 10^{-6} \quad (8)$$

$$\hat{\theta}_5 = 174.42 \cdot 10^{-6} \quad (9)$$

$$(10)$$

2.4 Validação

Primeiramente, validou-se o modelo por meio de uma simulação um passo a frente, cujo resultado é apresentado na [Figura 12](#). Esse resultado aparenta que o modelo estimado é perfeito. O erro quadrático médio (RMSE) de $509.58 \cdot 10^{-6}$ também parece indicar um excelente modelo. Entretanto, nota-se pelas funções de correlação em função dos resíduos de validação, [Figura 13](#), que o modelo apresenta grande autocorrelação de resíduos e alta correlação entrada-resíduo.

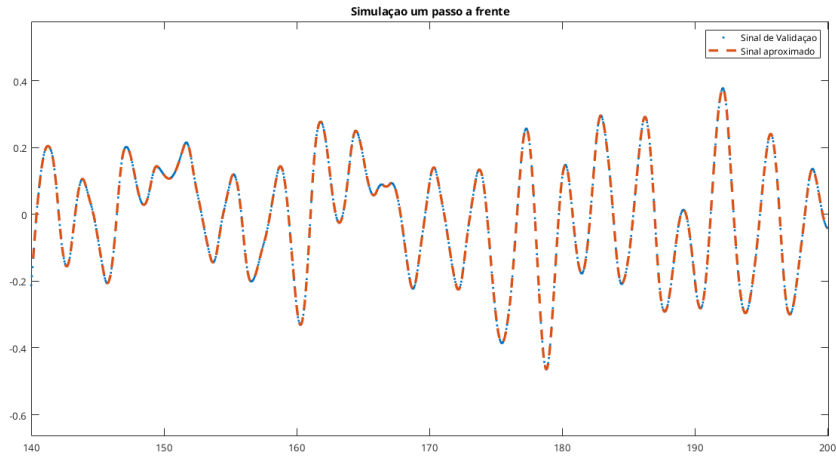


Figura 12: Resultado da validação para simulação um passo a frente

Após, fez-se a validação por meio de simulação livre, cujo resultado é exposto na [Figura 14](#). Uma vez que essa simulação utiliza previsões passadas para prever futuros valores, os erros do modelo são mais significantes, assim percebe-se que o modelo estimado não é nada satisfatório. O RMSE para essa simulação foi de $173.13 \cdot 10^{-3}$, que representa uma redução drástica do anterior, apesar de ser um valor relativamente baixo. As funções de correlação, [Figura 15](#), também indicam que o modelo não é satisfatório.

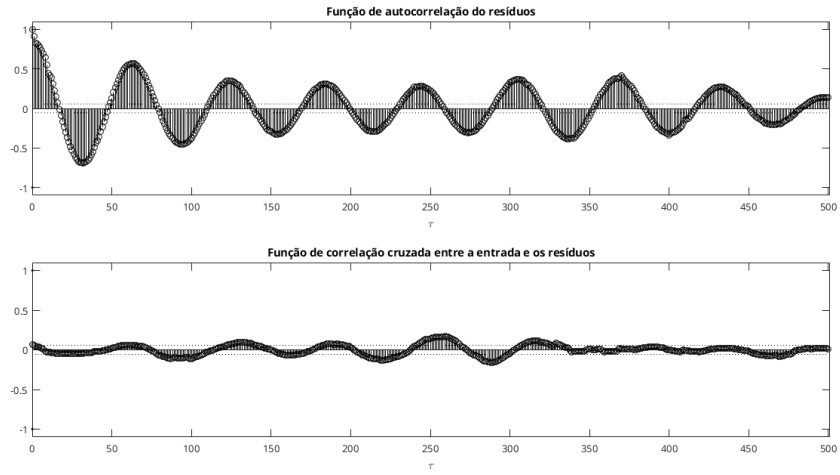


Figura 13: Funções de autocorrelação para resíduos e correlação cruzada entre resíduos e entrada para o resultado de validação na simulação um passo a frente

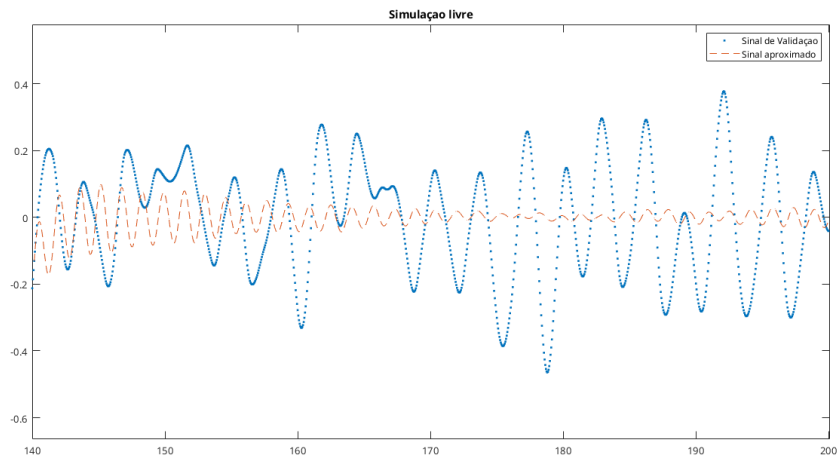


Figura 14: Resultado da validação para simulação livre

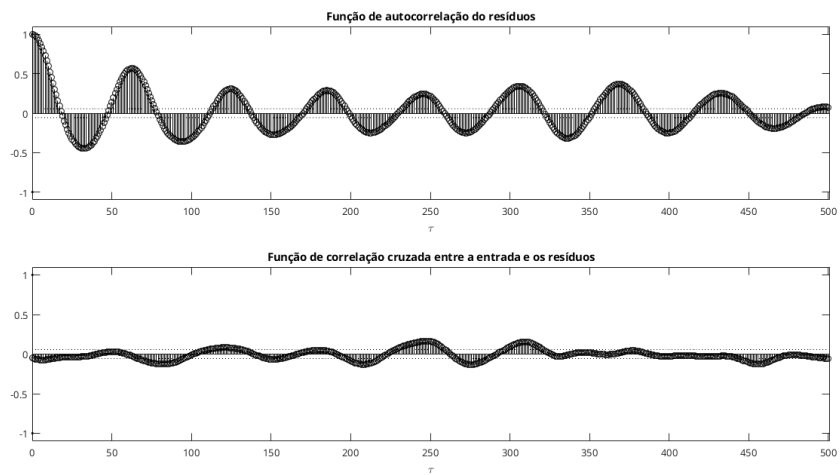


Figura 15: Funções de autocorrelação para resíduos e correlação cruzada entre resíduos e entrada para o resultado de validação na simulação um passo a frente

Referências

- [1] L. A. Aguirre, “Introdução à Identificação de Sistemas (Linked Data),” Reasearch Gate, 03 2020. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/303679484_Introducao_a_Identificacao_de_Sistemas
- [2] —, *Introdução à Identificação de Sistemas*, 4th ed. Editora UFMG, 01 2015.