



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

ELT016 - TÉCNICAS DE MODELAGEM DE SISTEMAS
DINÂMICOS

Tarefa 1:
Modelagem e Simulação de um Atuador Solenoide

Felipe Bartelt de Assis Pessoa 2016026841

14 de novembro de 2021

Sumário

1	Introdução	2
2	Objetivos	3
3	Simulações	3
3.1	Entrada Degrau	3
3.2	Entrada Pulso	6
3.3	Entrada Senoidal	8
3.4	Entrada Ruidosa	10
3.5	Superposição	12
3.6	Diferentes pontos de operação	12
4	Conclusão	13
	Referências	14

1 Introdução

Um atuador solenoide é um sistema eletromecânico que permite a conversão de energia elétrica em energia mecânica translacional. Esse tipo de atuador permite com que se exerça uma força tanto para puxar ou empurrar uma carga, uma válvula em um sistema hidráulico, por exemplo.

Esse atuador, [Figura 1](#), é formado por uma bobina enrolada em torno de um pistão (armadura) de ferro, de forma que o pistão se mova livremente na direção perpendicular ao plano que contém cada enrolamento. A aplicação de uma tensão e_{in} nos terminais da bobina, induz a circulação de uma corrente I na mesma, o que por sua vez induz um campo magnético. Dessa forma, pode-se mover o pistão para a direita, tomando como referência o diagrama apresentado na [Figura 1](#), o que por sua vez move a massa de carga. Uma mola de retorno é comumente utilizada para que o pistão, e conseqüentemente a carga, retornem à posição inicial quando a corrente se anula.

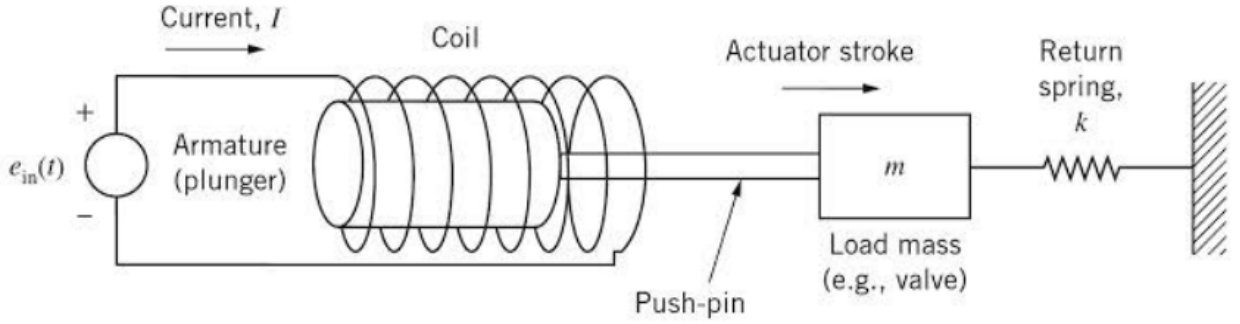


Figura 1: Atuador solenoide [2]

Utilizando a mecânica newtoniana, as leis de Kirchhoff e as equações de conversão eletromecânica da energia, derivadas das equações de Maxwell, pode-se encontrar as relações elétrica (1) e mecânica (2) para o sistema.

$$L(z) \frac{dI}{dt} + RI = e_{in}(t) - \frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot I, \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = \frac{1}{2} \frac{dL}{dz} \cdot I^2, \quad (2)$$

onde z é o deslocamento da armadura; L a indutância da bobina, dependente deslocamento da armadura; R a resistência de armadura; I é a corrente; e_{in} a tensão aplicada; m a massa da carga; b é o atrito viscoso; e k é a constante elástica da mola.

Tomando-se a indutância L como constante, assim como a permeabilidade magnética $\frac{dL}{dz} = K$, pode-se obter a representação em espaço de estados, (3)-(5), em função dos estados $x_1 = I$, $x_2 = z$ e $x_3 = \dot{z}$, corrente, posição da armadura e velocidade de armadura, respectivamente, e entrada $u = e_{in}$.

$$\dot{x}_1 = \dot{I} = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{K}{L}x_1x_3 + \frac{1}{L}u \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{z} = x_3 \quad (4)$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{z} = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{b}{m}x_3 + \frac{K}{2m}x_1^2 \quad (5)$$

Por meio das equações apresentadas, percebe-se que o sistema configura um sistema não linear, devido à corrente, de terceira ordem, não autônomo, a tempo contínuo, invariante no

tempo e estável em malha aberta. O sistema tem somente uma entrada, a tensão aplicada e uma ou duas saídas, mesmo que a saída desejada seja a posição da armadura, devido às equações em espaço de estados, é possível obter a velocidade da armadura também como saída.

2 Objetivos

- I. Simular um sistema não linear, estável em malha aberta, de ordem superior a 1, a tempo contínuo, não autônomo e a parâmetros concentrados para entradas:
 - i. Degrau;
 - ii. Pulso;
 - iii. Senoidal;
 - iv. Aleatória com distribuição Gaussiana
- II. Demonstrar a não linearidade do sistema por meio do princípio de superposição;
- III. Demonstrar a não linearidade do sistema por meio da simulação de diversos pontos de operação;

3 Simulações

Para que fosse possível simular o sistema escolhido, tornou-se necessário a determinação dos parâmetros físicos a ele associados. Assim, optou-se por utilizar os mesmos valores definidos por Kluever [2], uma vez que são provavelmente baseados em parâmetros reais. Os parâmetros são apresentados na [Tabela 1](#).

Parâmetro	Valor
R	$3\ \Omega$
L	$5\ \text{mH}$
K	$6\ \text{N/A}^2$
m	$0.03\ \text{kg}$
b	$12\ \text{N s/m}$
k	$6\ \text{kN/m}$

Tabela 1: Parâmetros físicos adotados para o atuador solenoide

Para todas as simulações, adotou-se um tempo de integração de $0.1\ \text{ms}$, que se mostrou adequado empiricamente para uma boa resolução de análise para o problema. Utilizou-se a integração numérica por meio do algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem, fornecido por Aguirre [1]. Adotou-se também todas as condições iniciais como nulas, isso é, corrente, posição de armadura e velocidade de armadura.

3.1 Entrada Degrau

Para a simulação do degraú, adotou-se a aplicação de uma tensão constante $e_{in} = 10\ \text{V}$ a partir do instante $t = 0.5\ \text{s}$, sendo então inicialmente nula, o que condiz com o sistema desligado sendo acionado após 0.5 segundos.

O comportamento da corrente, posição de armadura e velocidade de armadura em resposta ao degraú podem ser vistos nas Figuras 2, 3 e 4, respectivamente.

Nota-se que o sistema tem resposta bastante rápidas para essas condições, atingindo o estado estacionário de 5.55 mm, [Figura 3](#), após, aproximadamente, 0.1 s. Para o comportamento da corrente, [Figura 2](#), percebe-se que, quase instantaneamente, ela tende para um máximo local, próximo a 2 A, tendo em seguida uma queda e, após, uma nova subida que tende para o estado estacionário próximo a 3.3 A. A pequena queda de corrente pode ser explicada pela ação da força eletromotriz contrária $K\dot{z}I$. A ação dessa força eletromotriz pode ser analisada por meio da resposta da velocidade de armadura, [Figura 4](#), para a qual a queda de corrente está diretamente relacionada ao rápido aumento da velocidade, assim como a queda da velocidade está relacionada à diminuição da força eletromotriz e, conseqüentemente, ao crescimento da corrente.

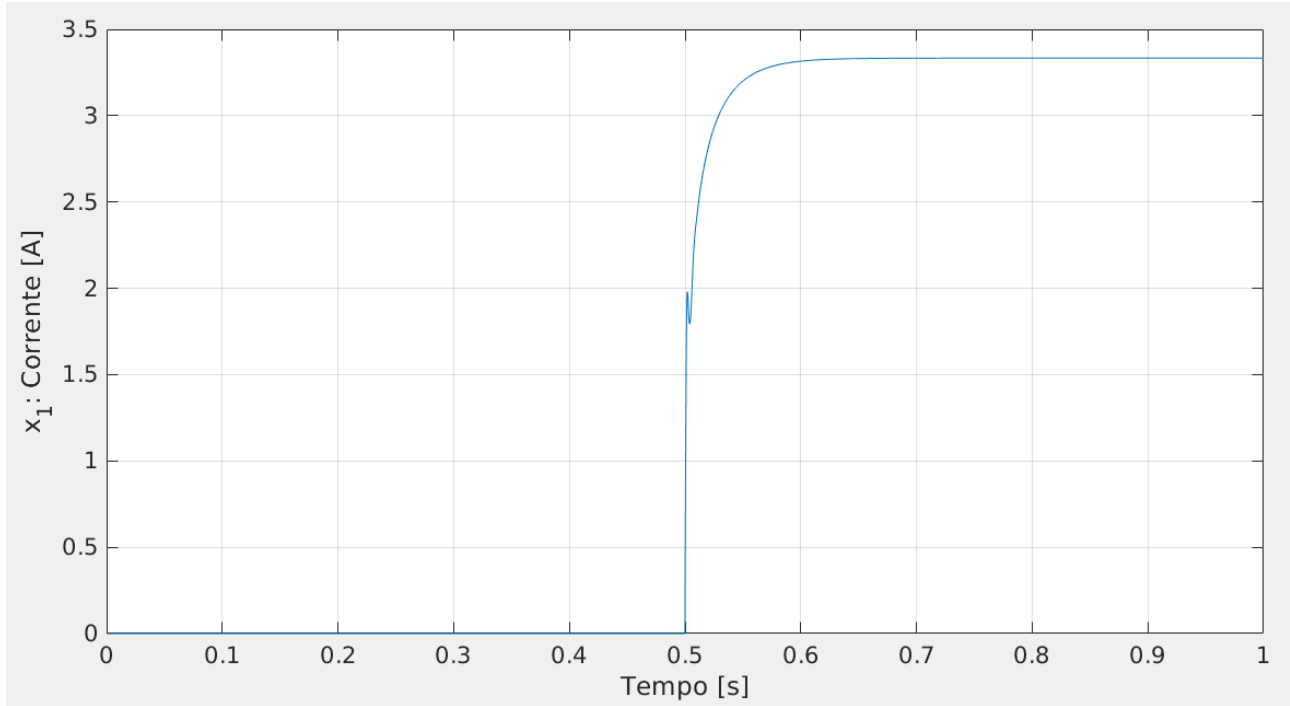


Figura 2: Resposta ao degrau para a variável de estado x_1 (Corrente)

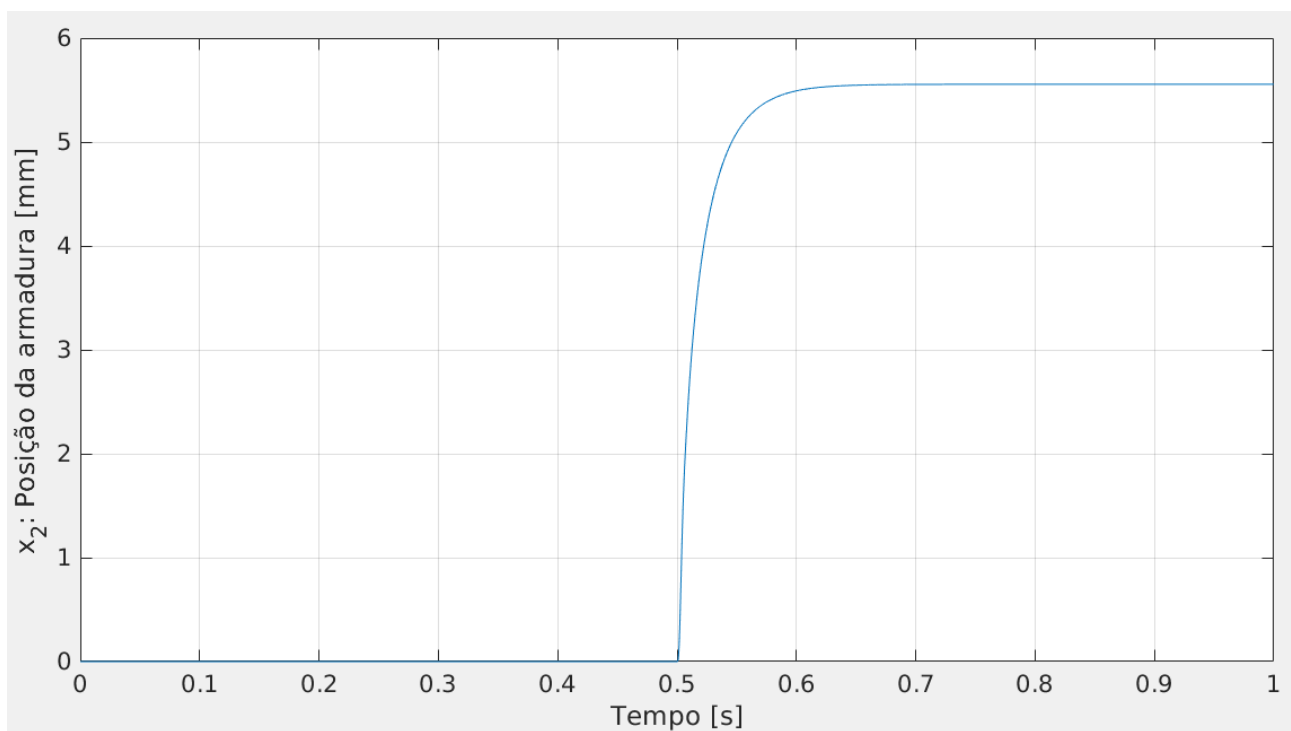


Figura 3: Resposta ao degrau para a variável de estado x_2 (Posição da armadura)

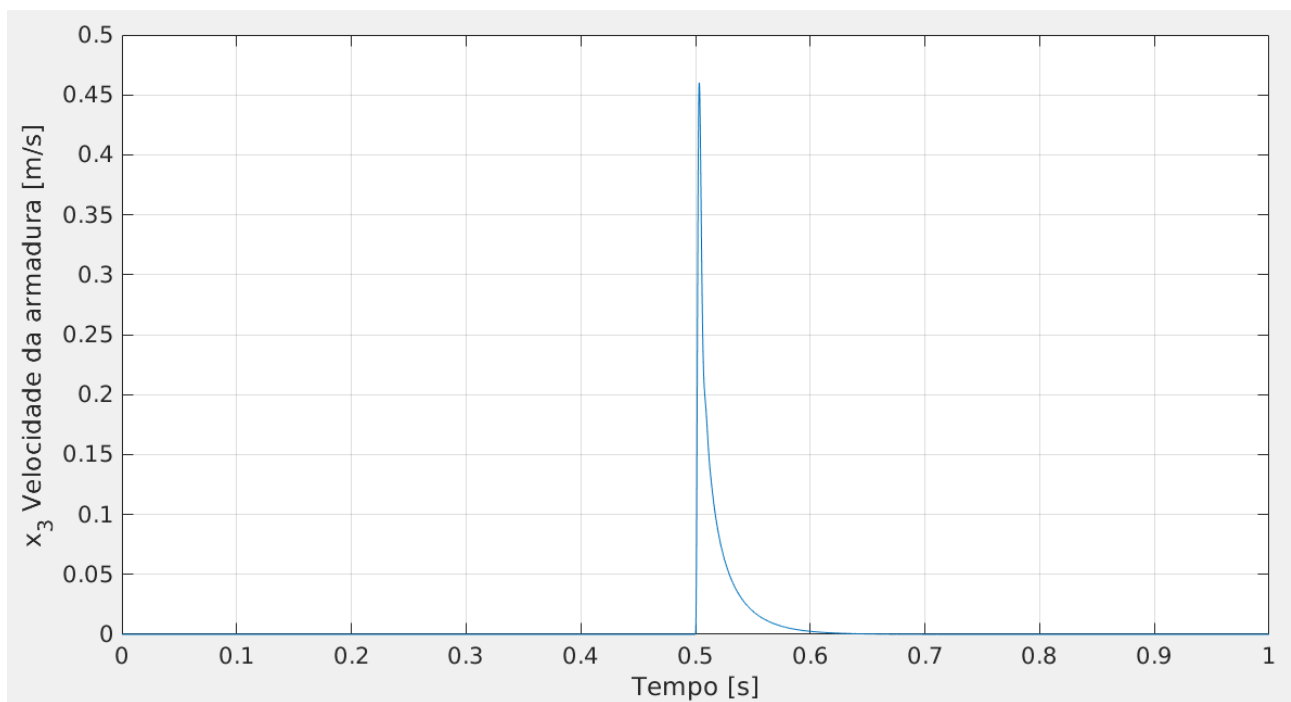


Figura 4: Resposta ao degrau para a variável de estado x_3 (Velocidade da armadura)

3.2 Entrada Pulso

De forma a se simular a resposta do sistema a um impulso não ideal, adotou-se a aplicação de uma tensão, inicialmente nula, $e_{in} = 10 \text{ V}$ no instante $t = 0.5 \text{ s}$, tendo uma duração de 1 ms . Essa simulação condiz com um rápido ligamento e desligamento do sistema, possivelmente dado por uma falha.

Nota-se que a corrente, [Figura 5](#), não apresenta queda devido à força eletromotriz para essa simulação, tendo um crescimento praticamente instantâneo e um decrescimento mais lento logo em seguida. Ainda, nota-se uma oscilação tanto da posição quanto da velocidade de armadura, [Figuras 6 e 7](#) respectivamente, um reflexo do acionamento da mola. Para o comportamento da velocidade, percebe-se o motivo de não haver dois máximos locais para a corrente, seu crescimento e decrescimento ocorrem praticamente no mesmo instante, não refletindo assim uma queda de corrente. Por meio do comportamento da posição, [Figura 6](#), pode-se confirmar que o sistema de fato é dinâmico, uma vez que a saída não se anula quando a entrada se anula.

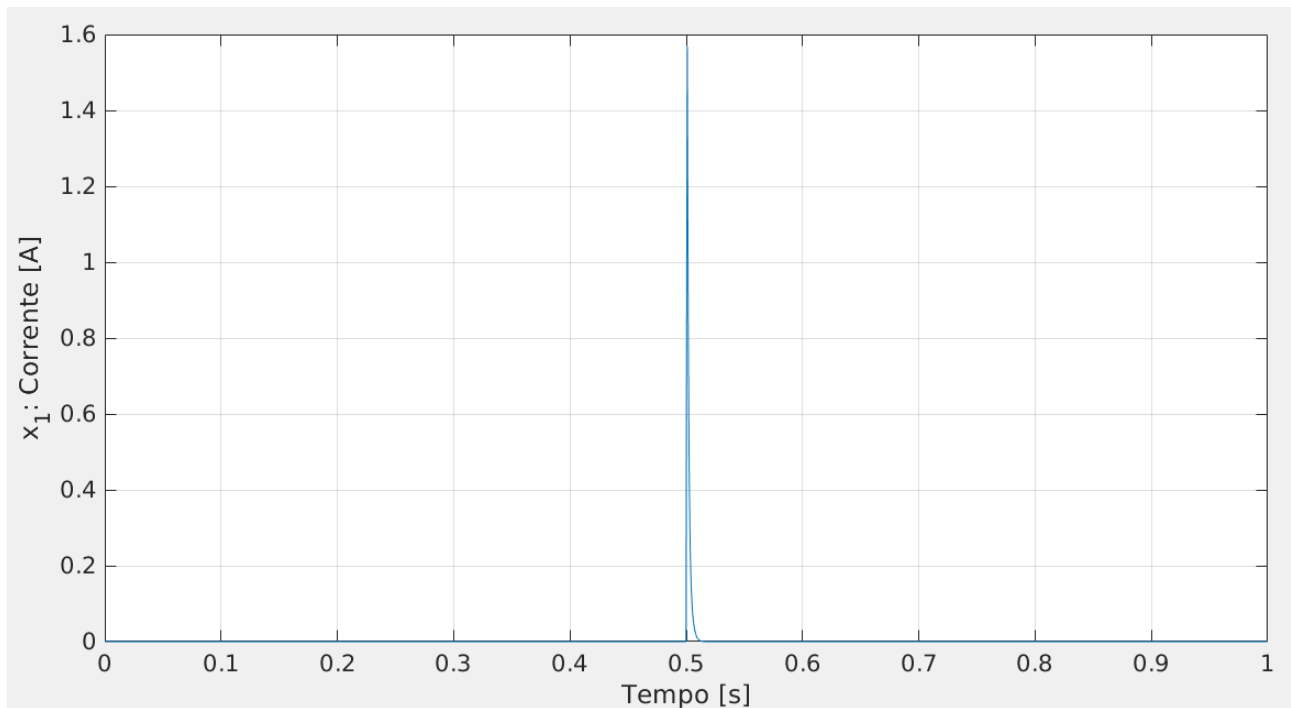


Figura 5: Resposta ao impulso para a variável de estado x_1 (Corrente)

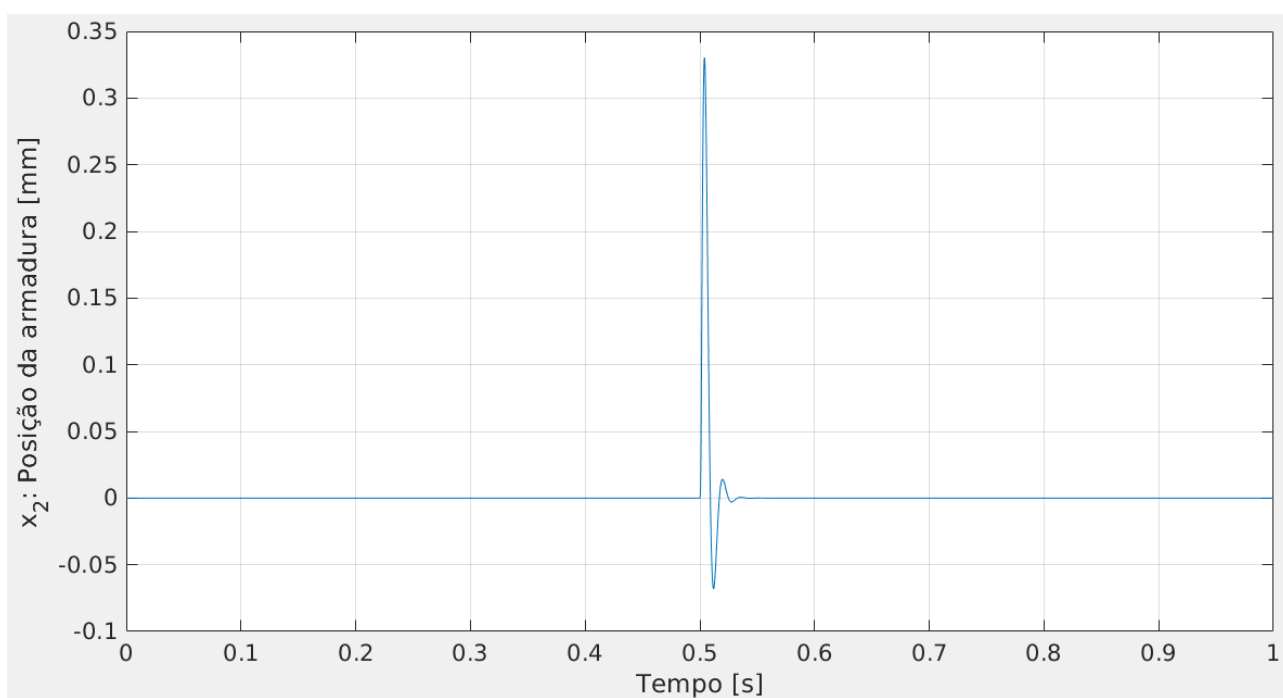


Figura 6: Resposta ao impulso para a variável de estado x_2 (Posição da armadura)

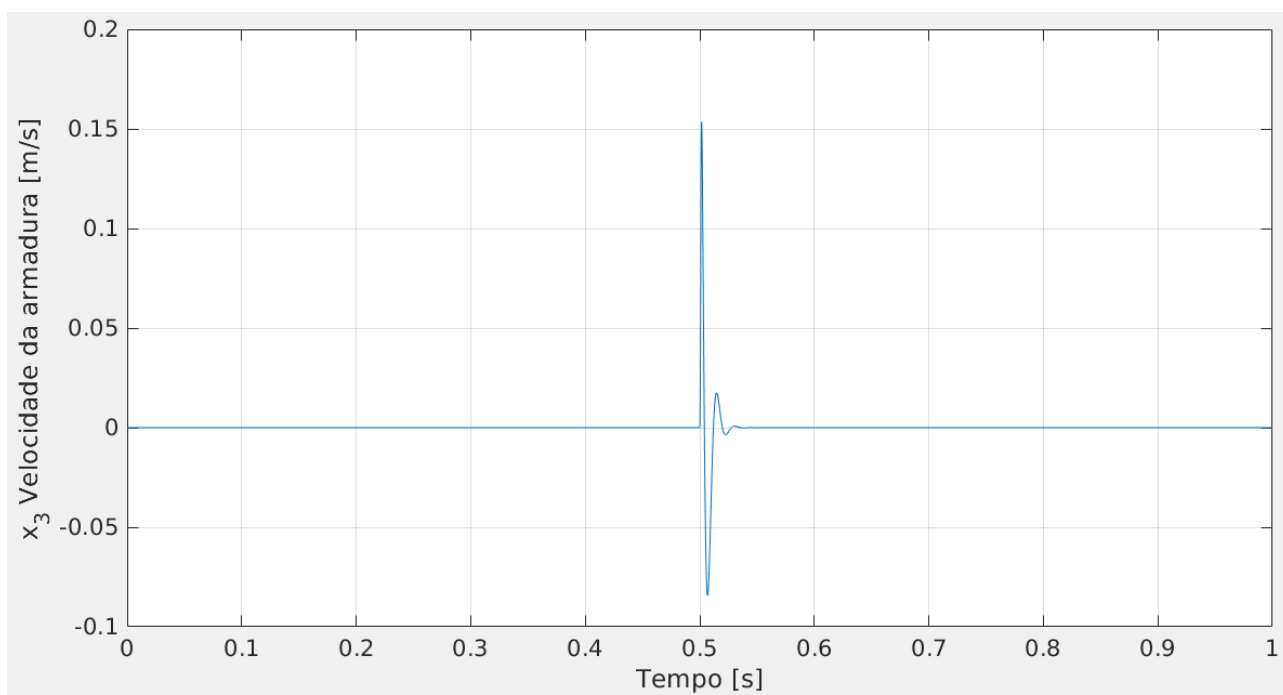


Figura 7: Resposta ao impulso para a variável de estado x_3 (Velocidade da armadura)

3.3 Entrada Senoidal

Para a entrada senoidal, adotou-se a aplicação de uma tensão senoidal $e_{in} = 10 \sin(\omega t)V$, com $\omega = 5\pi$ rad/s, de forma a se obter seu segundo pico em $t = 0.5$ s. O comportamento a ser analisado poderia corresponder a um estudo quanto a um bombeamento feito por esse atuador, a partir do instante inicial $t = 0$.

Nota-se que a corrente, [Figura 8](#), apresenta aproximadamente três ciclos, assim como a entrada, esboçando um formato de uma senoide inclinada, tendo seus picos e vales descentralizados, devido à força contraeletromotriz. A corrente, conforme esperado oscila entre valores positivos e negativos de mesmo módulo. Ao se avaliar o comportamento da velocidade, [Figura 10](#), percebe-se que os retardos da senoide de corrente correspondem ao crescimento da velocidade, ou seja, do crescimento da força contraeletromotriz. Percebe-se ainda que a velocidade, e consequentemente a posição, exibem um comportamento senoidal com, aproximadamente, o dobro da frequência, ou seja, o atuador empurra a carga independente do sinal de corrente, atuando duas vezes em um único ciclo. Por esse motivo, a velocidade negativa tem módulo maior que a positiva, uma vez que a carga deve voltar à posição inicial antes da segunda atuação do atuador em um ciclo, o que pode ser visto no comportamento da posição, [Figura 9](#).

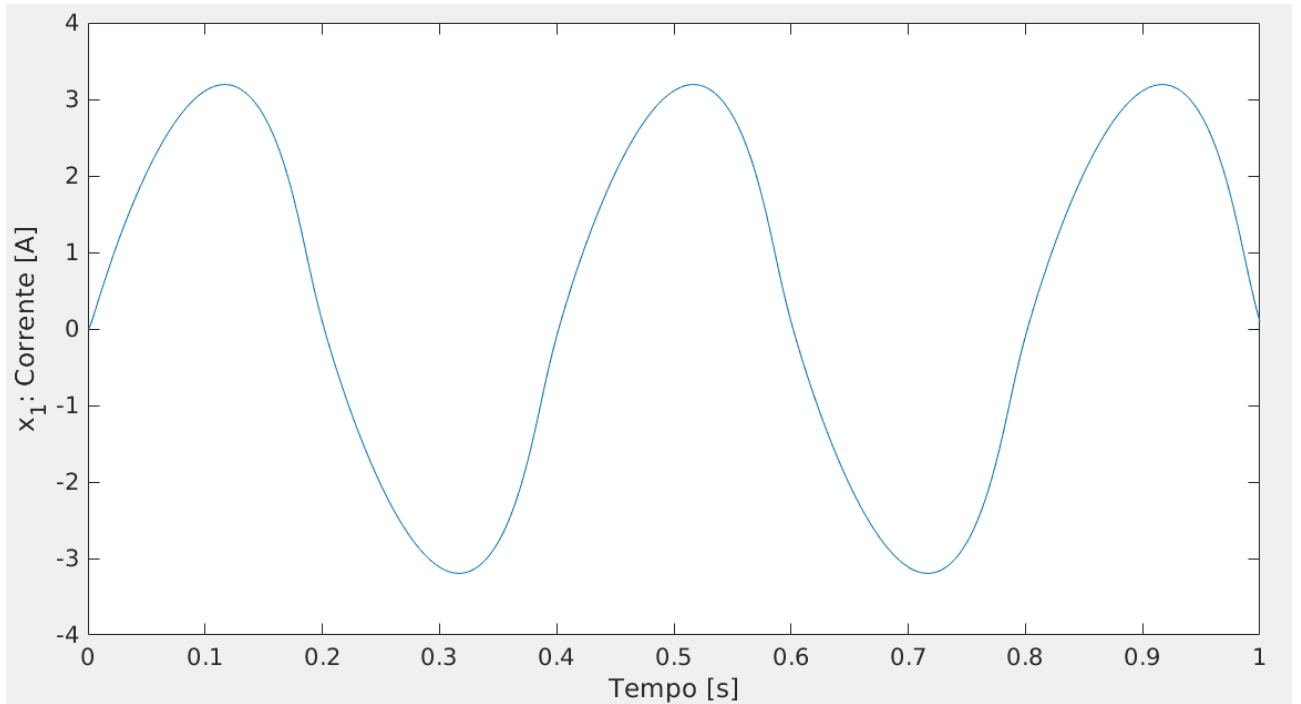


Figura 8: Resposta à senoide para a variável de estado x_1 (Corrente)

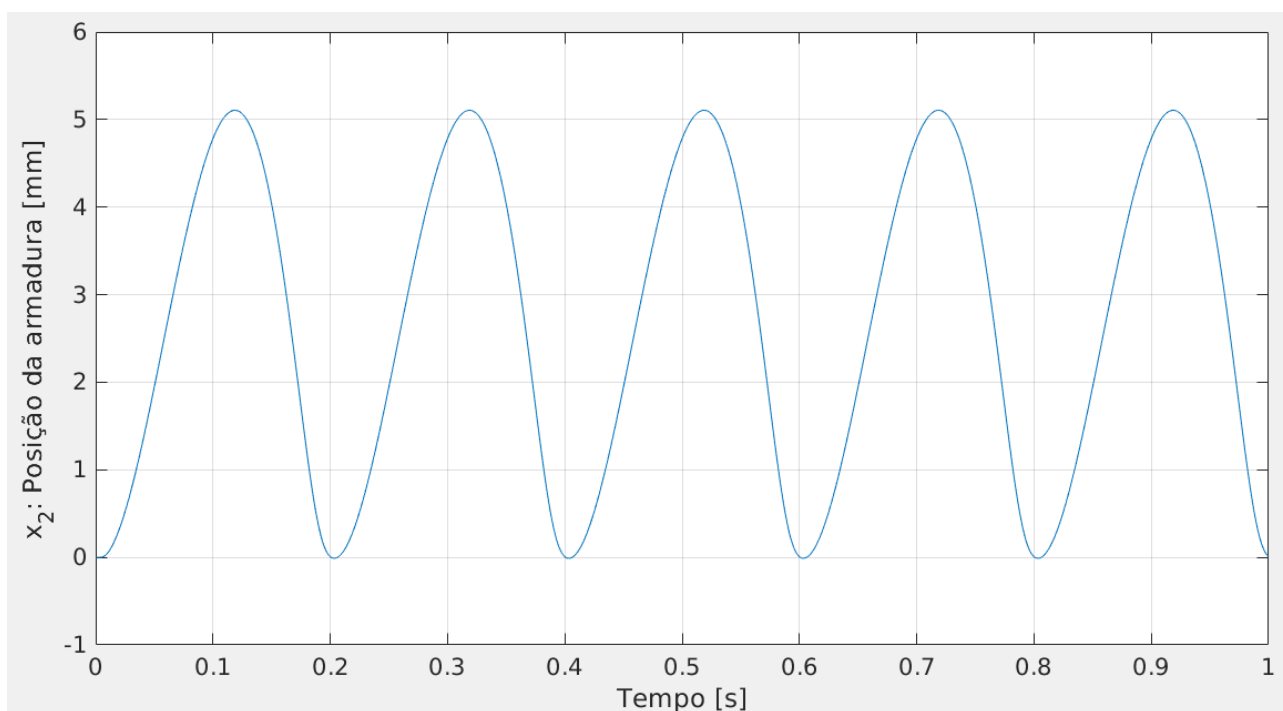


Figura 9: Resposta à senoide para a variável de estado x_2 (Posição da armadura)

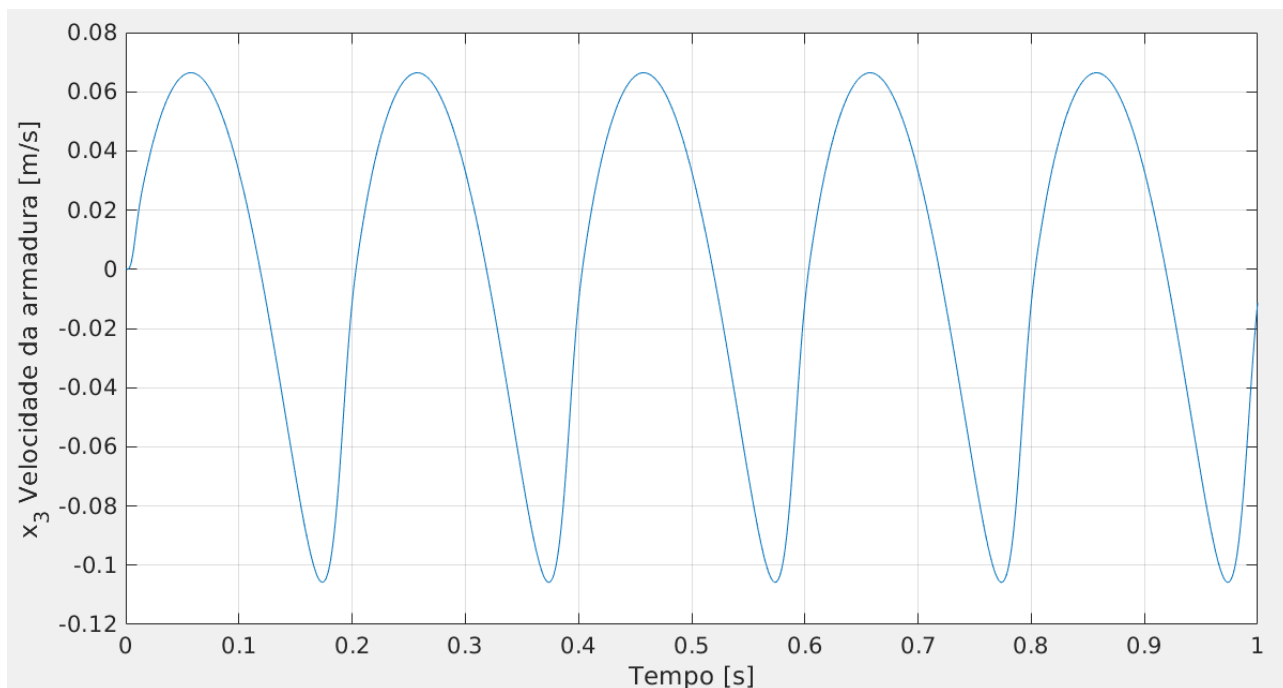


Figura 10: Resposta à senoide para a variável de estado x_3 (Velocidade da armadura)

3.4 Entrada Ruidosa

Para avaliar o comportamento do sistema frente à uma entrada aleatória, somou-se ao mesmo degrau utilizado na [Subseção 3.1](#) um ruído gaussiano de média nula e desvio padrão 0.3. Essa simulação busca então estudar o comportamento da mesma entrada já estudada, porém agora de forma não ideal.

Nota-se que a corrente, [Figura 11](#), apresenta o mesmo comportamento visto para a entrada sem ruído adicionado, porém é notável que é sensível ao ruído, uma vez que tem comportamento aleatório quando o degrau é nulo, assim como em estado estacionário, sendo praticamente idêntica no intervalo de crescimento da onda. A velocidade, [Figura 13](#) não é afetada pelo ruído até o momento do acionamento do degrau, assim que a velocidade decresce o ruído a afeta bastante. O comportamento da velocidade é diretamente refletido para o comportamento da posição, [Figura 12](#), para o qual nota-se também uma representação ínfima do ruído antes do acionamento do degrau e, após o acionamento do mesmo, uma variação da posição em estado estacionário, muito mais suave que a variação da velocidade, o que era esperado devido ao seu comportamento de integrador implícito.

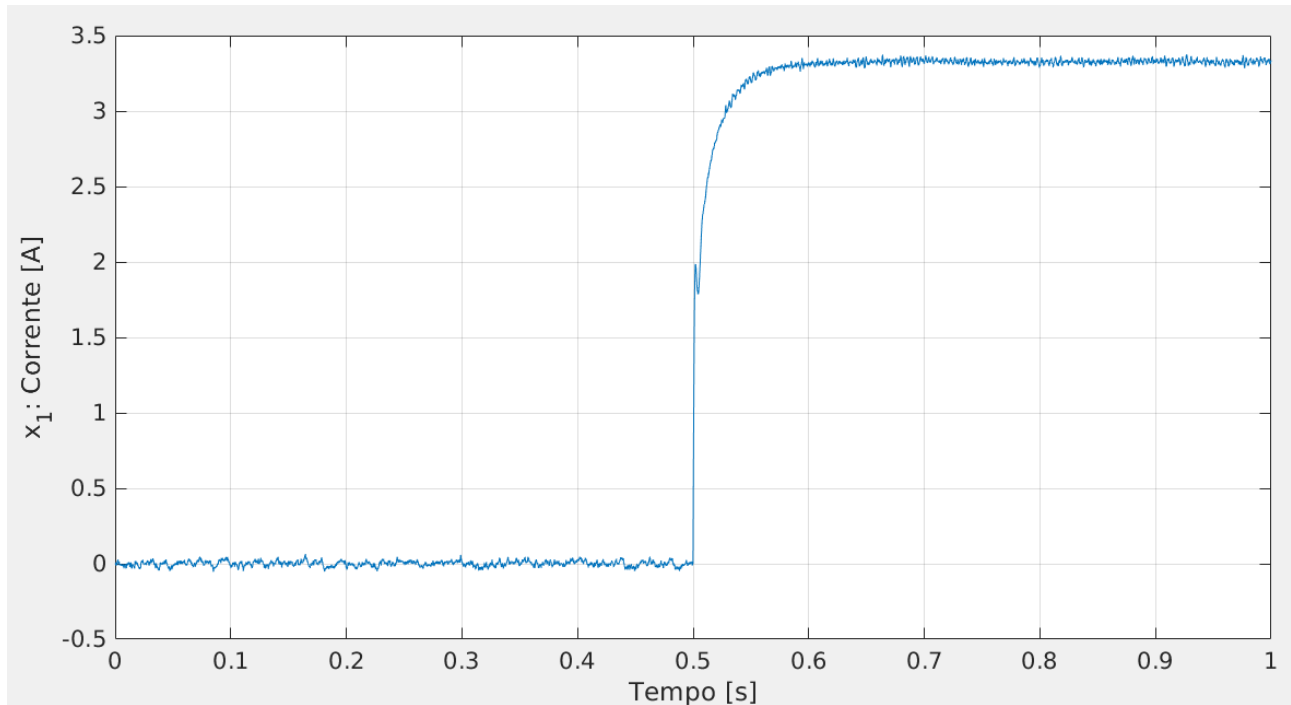


Figura 11: Resposta ao degrau ruidoso para a variável de estado x_1 (Corrente)

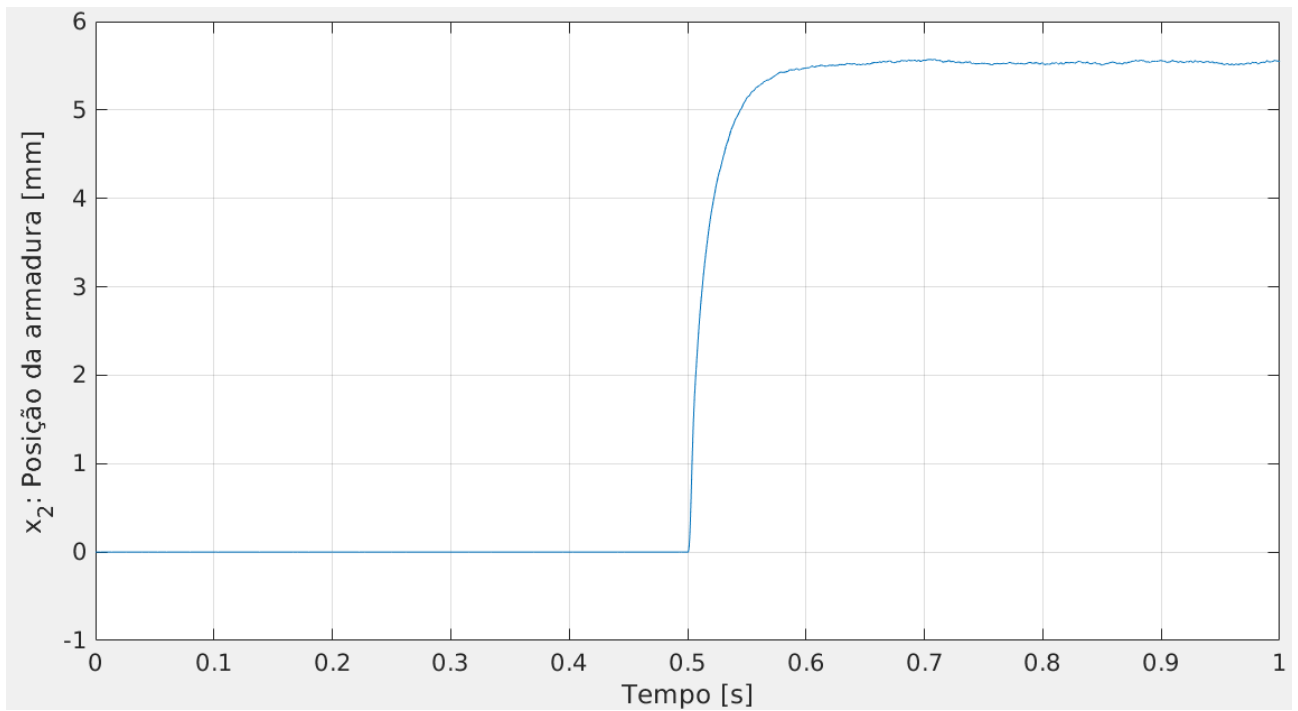


Figura 12: Resposta ao degrau ruidoso para a variável de estado x_2 (Posição da armadura)

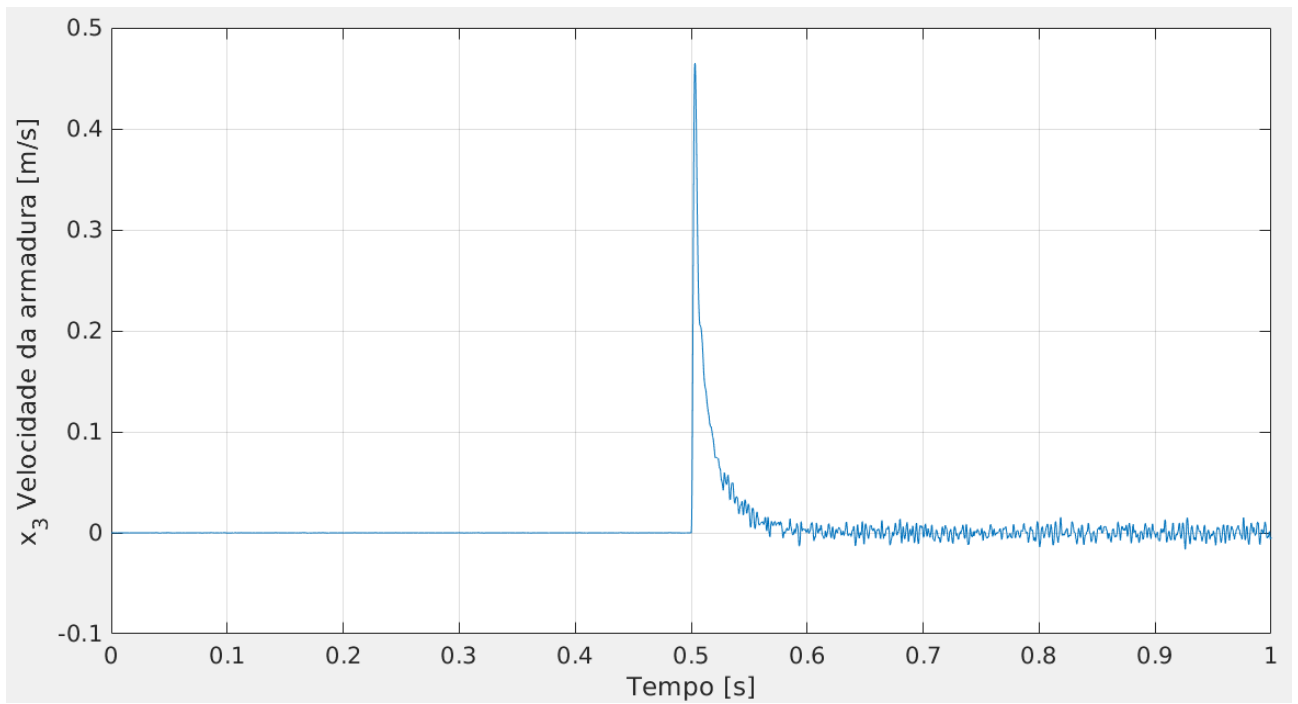


Figura 13: Resposta ao degrau ruidoso para a variável de estado x_3 (Velocidade da armadura)

3.5 Superposição

Um sistema linear satisfaz $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, assim, pode-se demonstrar a não linearidade de um sistema pelo princípio de superposição. Para isso, tomou-se o degrau utilizado na Subseção 3.1, ou seja uma tensão de entrada u_{10} em degrau com amplitude de 10 V aplicada a partir de $t = 0.5$ s, sendo a resposta do sistema à essa entrada então o equivalente à $f(\alpha x + \beta y) = f(10)$. Dessa forma, basta tomar duas outras tensões degrau u_7, u_3 , aplicadas no mesmo intervalo e com amplitudes 7 V e 3 V, respectivamente, e analisar se a soma das respostas à esses sinais corresponde à resposta à u_{10} , ou seja, se o sistema fosse linear, espera-se que $f(u_{10}) = f(10) = f(7 + 3) = f(7) + f(3) = f(u_7) + f(u_3)$.

Tomou-se como referência a saída de posição da armadura, estado x_2 , uma vez que é a saída mais importante. Pode-se ver na Figura 14 todos os sinais de entrada aplicados, assim como a soma $u_7 + u_3$, para a qual nota-se a linearidade da entrada. Por outro lado, ao se analisar o comportamento de x_2 , nota-se claramente a não linearidade do sistema. Tomou-se a notação x_2^k como símbolo para o sinal de da variável x_2 em resposta à tensão degrau u_k . A soma das respostas $x_2^7 + x_2^3 \approx 3.2$, que é diferente da resposta $x_2^{10} \approx 5.55$, ou seja, o sistema é não linear.

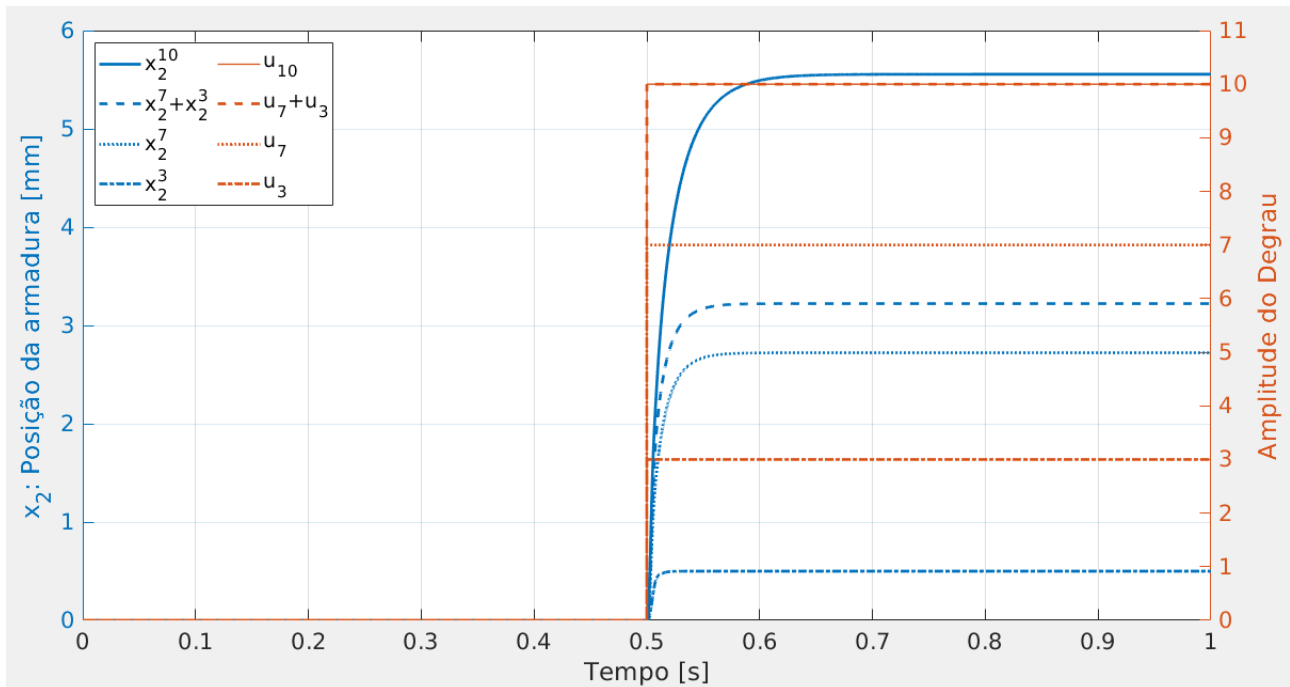


Figura 14: Aplicação do princípio de superposição para demonstrar que o sistema é não linear. x_2^k simboliza o sinal do estado x_2 em resposta à entrada u_k

3.6 Diferentes pontos de operação

Pode-se demonstrar a não linearidade de um sistema ao se simular sua resposta para diferentes pontos de operação. Assim, tomou-se a aplicação de um sinal de tensão que aumenta em 1 V a cada 0.5 s, de forma a se garantir que o sistema tenha atingido o estado estacionário antes da aplicação de tensão maior. Simulou-se assim 15 pontos de operação, que podem ser vistos na Figura 15.

Todos os degraus aplicados tem amplitude de 1 V, alterando-se somente seu ponto de início. Assim, percebe-se, pela Figura 15 que o sistema é não linear, uma vez que o estado x_2 não responde sempre com a mesma amplitude, sendo que a entrada sempre tem amplitude igual. Isso é bastante claro ao se comparar as repostas do sistema no intervalo (1, 1.5)s, cuja amplitude é aproximadamente 0.15 mm, com a resposta no intervalo (7, 7.5)s, cuja amplitude é

aproximadamente 1.5 mm. Uma diferença de 10 vezes a amplitude ao se comparar dois intervalos diferentes, sendo que respondem à mesma amplitude de entrada, claramente configura um sistema não linear.

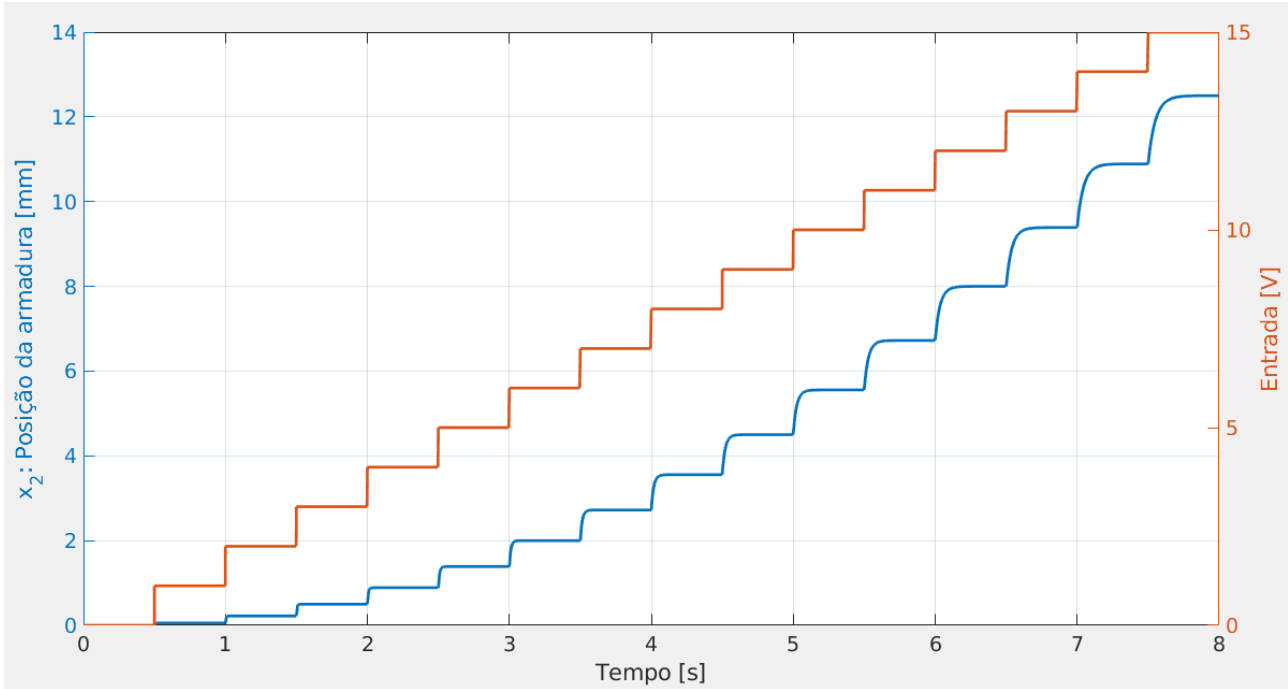


Figura 15: Sinal da posição da armadura, estado x_2 , para diferentes pontos de operação

4 Conclusão

Por meio do modelo escolhido, fornecido por Kluever [2], foi possível estudar o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares. Por meio das simulações foi possível observar a resposta do sistema para diferentes entradas, sendo possível estimar uma explicação física para seu comportamento. Ainda, tornou-se possível demonstrar a estabilidade do sistema, assim como o fato dele ser dinâmico e não ser autônomo ao longo das simulações para diferentes entradas. Demonstrou-se também sua não linearidade por meio de duas abordagens diferentes, a primeira se baseou no princípio de superposição e a segunda na simulação para diferentes pontos de operação, o que demonstra claramente que uma modelagem linear para um sistema dessa forma deve ser feita com base em um ponto de operação definido a priori.

Referências

- [1] L. A. Aguirre, “Scripts on nonlinear dynamics,” Reasearch Gate, 08 2018. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/project/Scripts-on-Nonlinear-Dynamics>
- [2] C. A. Kluever, *Dynamic systems : modeling, simulation, and control*. John Wiley And Sons, Inc, 2015.