



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

ELT016 - TÉCNICAS DE MODELAGEM DE SISTEMAS  
DINÂMICOS

---

## **Tarefa 2:**

### **Métodos Determinísticos**

---

Felipe Bartelt de Assis Pessoa      2016026841

4 de dezembro de 2021

# 1 Planta de bombeamento

Para todos os modelos, adotou-se a informação fornecida por Aguirre [1], que o degrau se inicia em  $t = 100$  s. Ainda, também para todos os modelos, adotou-se o primeiro conjunto de dados (ENS\_25.dat) como conjunto base para a aproximação, sendo então o segundo conjunto (ENS\_26.dat) utilizado para validação dos modelos.

## 1.1 Modelos de Primeira Ordem

Para a determinação do ganho  $K$  para o método da Seção 3.2.1 de Aguirre [2], tomou-se o valor de saída final como a média das 20 últimas amostras, procedimento que foi também tomado analogamente para o valor inicial da saída. Por inspeção visual, determinou-se  $\tau_d = 126$  s. Para a determinação da constante de tempo  $\tau$ , tomou-se o tempo  $t_\tau$  tal que  $y(t_\tau) \approx 0.63 \cdot y(\infty)$ , ou seja, o tempo para qual a resposta do sistema apresenta valor de 63% do valor em estado estacionário, tomado então como a média das últimas 20 amostras, assim fez-se  $\tau = t_\tau - \tau_d = 360 - 126$ . Os valores determinados não realizaram a melhor aproximação possível, dessa forma, empiricamente, determinou-se os novos valores:

$$K = \frac{1}{24} \cdot \frac{\sum_{i=N-19}^N y_i - \sum_{i=1}^{20} y_i}{20(u(\infty) - u(0))} \approx 0.012$$
$$\tau_d = 120 \text{ s}$$
$$\tau = 370 \text{ s}$$

Esses valores garantiram uma resposta satisfatória para o modelo nos dados utilizados para a aproximação. Para a inclusão do atraso puro de tempo, utilizou-se a aproximação de Padé de quinta ordem.

Para o modelo de 1° ordem obtido por meio do método das áreas, tomou-se o mesmo procedimento para definição do ganho  $K$ . Também, estimou-se o tempo de amostragem  $T_s$  por meio da média da diferença entre os intervalos de tempo dos dados. Após, foi feita uma normalização nos dados de entrada e saída, de forma a se obter a resposta do sistema dentro do intervalo  $[0, 1]$ , obtendo-se os sinais de entrada e saída normalizados pelo mesmo fator,  $u_n$  e  $y_n$  respectivamente. Assim, pôde-se obter  $\tau + \theta = \sum_{k=0}^N T_s(u_n(kT_s) - y_n(kT_s))$ , a área aproximada. Obtendo-se o número de amostra  $N_\tau = \left\lfloor \frac{\tau + \theta}{T_s} + 0.5 \right\rfloor$ , foi possível determinar  $\tau = e^1 \cdot \sum_{k=0}^{N_\tau} T_s y_n(kT_s)$ . Por último, obtém-se  $\theta = \tau + \theta - \tau$ . Para esse modelo, também foi utilizada a aproximação de Padé de 5° ordem para simulação do atraso puro de tempo. Empiricamente, refinou-se os valores estimados de forma a se obter uma melhor aproximação, obtendo-se ao final:

$$K \mapsto K \cdot 0.042 \approx 0.012$$
$$\tau \mapsto \tau \cdot 19 \approx 403.93$$
$$\theta = 119.87$$

## 1.2 Modelo de Segunda Ordem

Escolheu-se o modelo dado por meio da resposta complementar. Para tal, normalizou-se a entrada  $u$ , de forma que o degrau se torna-se unitário e, ainda, descontou-se o efeito do atraso puro de tempo, ou seja, fez-se com que a resposta tivesse início em  $t = 0$ .

Para a obtenção do modelo, utilizou-se as aproximações polinomiais de primeiro grau fornecidas pela função `polyfit` do Matlab. Adotou-se como atraso de tempo, o mesmo obtido anteriormente via método das áreas ( $\theta$ ). Compensou-se de forma empírica as eventuais discrepâncias entre sinal original e sinal aproximado, modificando as constantes de tempo, assim

como o ganho. Dessa forma, obteve-se ao final:

$$K \mapsto \frac{K}{24} \approx 0.012$$

$$\tau_1 \mapsto \tau_1 \cdot 0.005$$

$$\tau_2 \mapsto \tau_2 \cdot 0.7$$

### 1.3 Resultados

Para todos os modelos obtidos, é necessário adicionar um *offset* à resposta aproximada, uma vez que o ponto de operação dos dados verdadeiros é diferente de 0. Dessa forma, nota-se na [Figura 1](#) que os modelos obtidos, frente às modificações feitas, aproximam bastante bem o sinal utilizado para a modelagem, havendo pequenas diferenças de velocidade de resposta enquanto o sinal não alcança o estado estacionário.

Percebe-se também por meio da [Figura 1](#) que o modelo obtido não é um bom modelo para aproximar o segundo conjunto de dados. Isso pode ser justificado pela diferença de pontos de operação dos conjuntos, assim como a incapacidade do modelo "enxergar" a aplicação de um degrau decrescente como uma variação negativa, ou seja, como o ganho o modelo para a planta apresenta um ganho positivo e não depende do valor anterior da saída (não há *feedback*), o modelo não responde com um decrescimento de magnitude, o que seria esperado pelo comportamento do degrau aplicado.

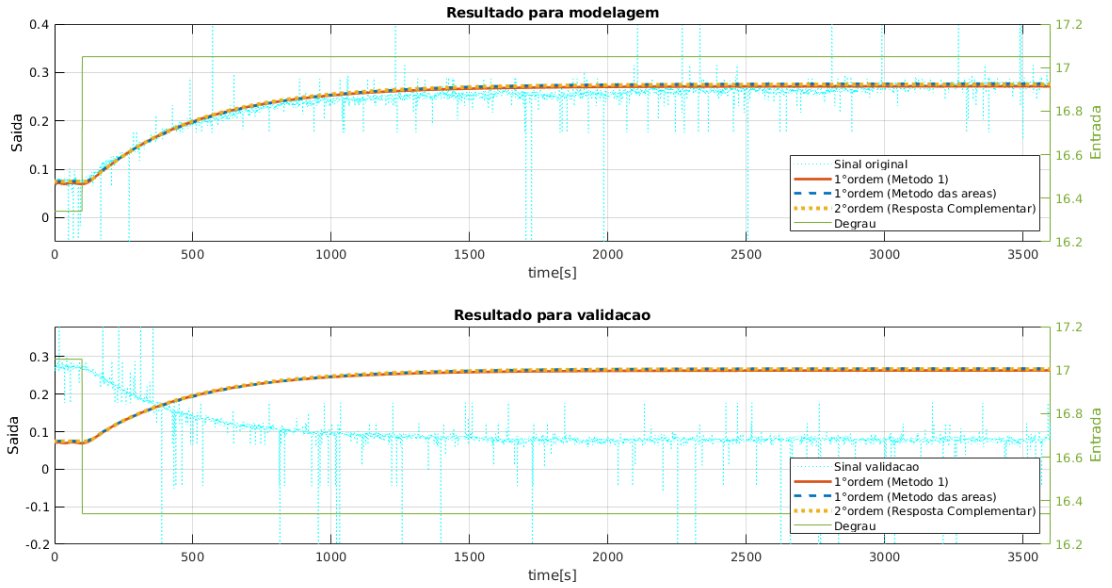


Figura 1: Resultados para modelagem e validação

Visto que o o modelo de segunda ordem exigiu maiores modificações para que os dados fossem bem aproximados, toma-se o modelo de primeira ordem como uma melhor aproximação para as amostras, apesar de ser possível atingir uma boa aproximação com ambos os modelos, as aproximações sem qualquer correção são melhores para os modelos de primeira ordem.

## 2 Balança de *Strain Gauges*

Para a modelagem de segunda ordem desse sistema, percebe-se que o sistema é sub-amortecido. Assim, pode-se utilizar o modelo (1), tomando-se a aproximação  $\zeta = \frac{0.6}{N_{\text{ciclos visíveis}}}$  e  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}$ .

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (1)$$

Visualmente, o primeiro conjunto de dados (`test1.txt`) aparenta ter 61 ciclos visíveis, dessa forma  $\zeta \approx 0.0098$ . Para obter o período dos ciclos  $T$ , tomou-se a média do intervalo de tempo entre os 20 primeiros ciclos, assim  $T \approx 0.061$ . Para se estimar o ganho  $K$ , supôs-se entrada degrau unitário e utilizou-se como valor em estado estacionário a média das 20 últimas amostras.

Com o modelo obtido, percebe-se que o modelo construído não apresenta o período correto para os ciclos, uma vez que se nota no primeiro gráfico da Figura 2 um defasamento crescente com os ciclos entre o sinal original e aproximado. Ainda, para esse mesmo gráfico, nota-se que as amplitudes no começo do sinal diferem.

Supondo que o segundo conjunto de dados (`test2.txt`) corresponde a uma nova medição sob as mesmas condições, isso é, utilizando também o degrau unitário, nota-se que a resposta do modelo está muito mais coerente que para o teste anterior, segundo gráfico da Figura 2. A menos do defasamento crescente já antes existente, nota-se que as amplitudes desse sinal de validação e o modelado se assemelham bem mais. Dessa forma, permite-se afirmar o modelo como satisfatório.

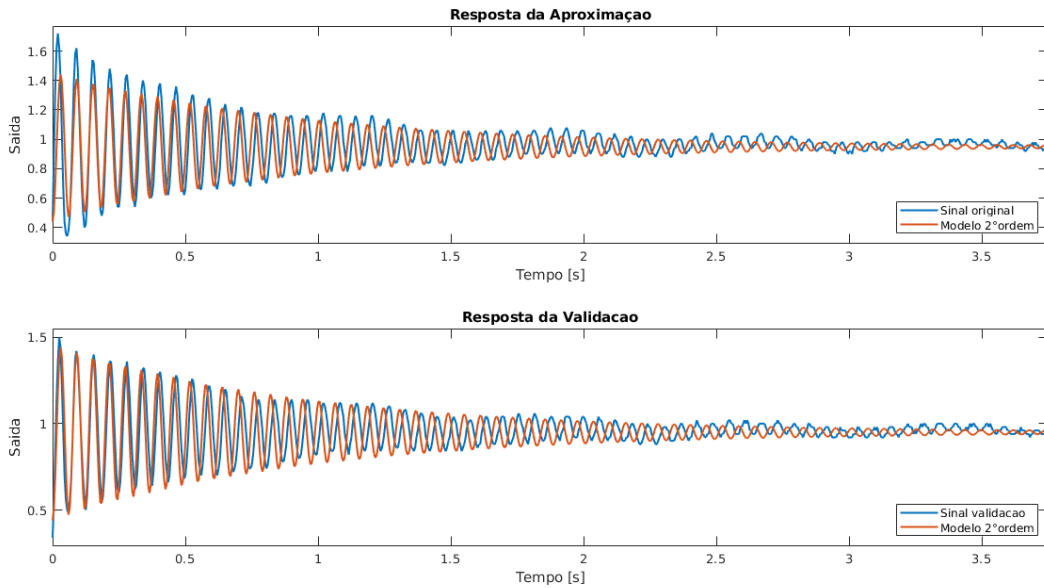


Figura 2: Resultados do modelo para os dois conjuntos de dados

## 3 Atuador Solenoide

Para a construção dos modelos para o atuador solenoide, utilizou-se os mesmos parâmetros definidos para a sua modelagem. Dessa forma, para a modelagem de primeira e segunda ordem, utilizou-se condições iniciais nulas, ou seja, o ponto de operação para modelagem corresponde ao sistema desligado, sendo acionado por uma tensão de 10 V. Para o outro ponto de operação, tomado como a validação do modelo, tomou-se o correspondente a uma aplicação de 15 V sobre

o experimento anterior, já em estado estacionário. Tomou-se como saída o segundo estado definido para o atuador solenoide, a posição da armadura.

Para o modelo de primeira ordem, adotou-se o modelo da Seção 3.2.1 de Aguirre [2], uma vez que é possível aproximar o sistema sem qualquer atraso puro de tempo, visto que sua resposta é muito rápida e, portanto, esse método de modelagem é consequentemente mais simples. Para esse modelo, percebe-se pela Figura 3, que se obteve uma aproximação muito boa para o ponto de operação sob o qual foi projetado. Entretanto, para o segundo ponto de operação, essa aproximação já não é viável, o que já é esperado, visto que o sistema é não linear e o modelo foi projetado para outro ponto de operação.

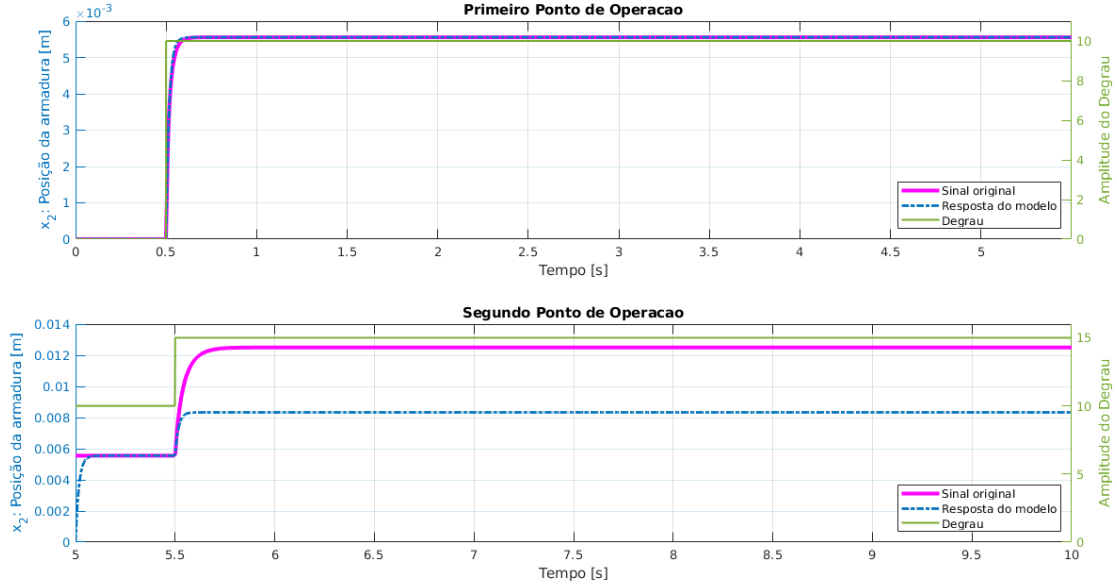


Figura 3: Resultados do modelo de primeira ordem para dois pontos de operação diferentes

Para a modelagem de segunda ordem, adotou-se o método da resposta complementar. Para esse modelo, houve grande dificuldade para aproximar o melhor possível da resposta original. A saída escolhida é claramente de primeira ordem, portanto ao se utilizar esse modelo de segunda ordem para sistemas sobreamortecidos, é necessário compensar as constantes de tempo para que o sistema se aproxime de um sistema de primeira ordem. Porém, visto que uma das constantes dadas pelas linearizações terá magnitude grande, é difícil compensar todos os parâmetros apenas com fatores multiplicativos para que o sistema se aproxime de um de primeira ordem.

Dessa forma, a melhor aproximação obtida é dada pela Figura 4, para a qual se vê que o sistema não converge para o valor esperado em estado estacionário, o que não foi possível mesmo ajustando-se o ganho do sistema. Dessa forma, não se pode afirmar muito quanto a qualidade da aproximação para quaisquer um dos dois pontos de operação. Nota-se apenas que utilizar um modelo de segunda ordem sobreamortecido para um sistema claramente de primeira ordem, além de não garantir uma aproximação perfeita, demanda mais esforço do que um simples modelo de primeira ordem, não sendo assim a opção mais viável.

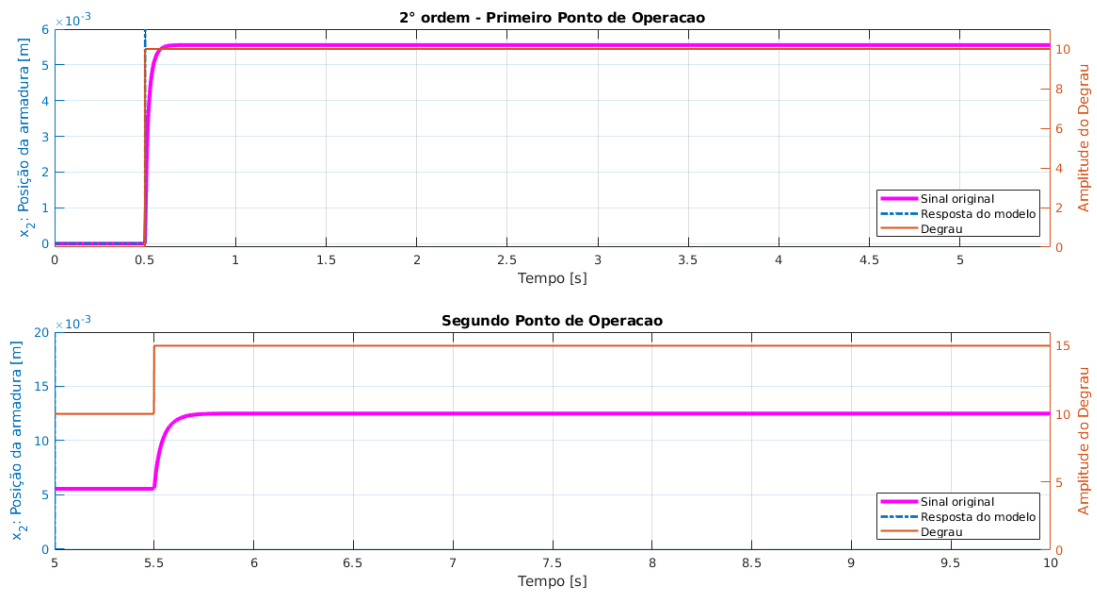


Figura 4: Resultados do modelo de segunda ordem para dois pontos de operação diferentes

## Referências

- [1] L. A. Aguirre, “Introdução à Identificação de Sistemas (Linked Data),” Research Gate, 03 2020. [Online]. Available: [https://www.researchgate.net/publication/303679484\\_Introducao\\_a\\_Identificacao\\_de\\_Sistemas](https://www.researchgate.net/publication/303679484_Introducao_a_Identificacao_de_Sistemas)
- [2] —, *Introdução à Identificação de Sistemas*, 4th ed. Editora UFMG, 01 2015.