

# Revisão de Métodos de Estimação de Parâmetros de Sistemas Dinâmicos Lineares de Primeira e Segunda Ordens

Prof. Bruno O. S. Teixeira

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

brunoot@cpdee.ufmg.br

18 de agosto de 2009

## 1 Introdução

Em controle de processos, a sintonia de controladores pressupõe o conhecimento prévio de um modelo matemático do processo. Esse modelo deve ser capaz de representar a dinâmica dominante do processo. Assim, funções de transferência (com ou sem atraso puro de tempo) de primeira ordem, segunda ordem, ou com pólo na origem são comumente empregadas para representar a relação entre a entrada e a saída do sistema. Processos que envolvem o controle de variáveis como vazão, temperatura e nível são geralmente modelados por meio desses tipos de modelos.

Nesse contexto, este documento objetiva descrever sucintamente métodos para estimação de parâmetros de modelos de primeira ou segunda ordem, com atraso puro de tempo. Também é considerado o caso de sistemas integradores. São apresentados exemplos para ilustrar os métodos revisados.

## 2 Formulação do Problema

Considere um sistema dinâmico linear monovariável de tempo contínuo cuja relação entre a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$  é descrita pela *função de transferência*  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ , em que  $U(s)$  é a transformada de Laplace da entrada  $u(t)$  e  $Y(s)$  é a transformada de Laplace da saída  $y(t)$ . Note que, em linguagem de controle de processos,  $u(t)$  é conhecida como *variável manipulada* (MV) e  $y(t)$  é conhecida como *variável de processo* (PV). Neste documento, são considerados três tipos de sistemas com atraso puro de tempo  $\theta$ , especificamente: sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}, \quad (2.1)$$

sistema de segunda ordem sobreamortecido

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad (2.2)$$

e sistema integrador

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{s}, \quad (2.3)$$

em que  $K$  é o ganho DC do sistema e  $\tau$ ,  $\tau_1$ , e  $\tau_2$  são as constantes de tempo.

Assuma que seja realizado um *teste de resposta ao degrau* no sistema representado por  $G(s)$ . A partir do sinal correspondente de saída  $y$ , medido com período de amostragem  $T_s$ , é possível determinar qual tipo de função de transferência (2.1), (2.2), ou (2.3) caracteriza a dinâmica dominante do sistema. Assume-se que os sinais  $u$  e  $y$  são superamostrados, tal que os mesmos aproximem os sinais correspondentes de tempo contínuo. Semelhantemente, sem perda de generalidade, assumo que  $u(0) = y(0) = 0$ .

Uma vez definido o tipo de função de transferência, objetiva-se estimar os *parâmetros* da função de transferência, a saber:  $K$ ,  $\theta$ ,  $\tau$ ,  $\tau_1$ , e  $\tau_2$ .

### 3 Métodos

A seguir, são apresentados alguns métodos para estimação dos parâmetros de (2.1), (2.2) e (2.3). Em todos os casos, é empregada uma *abordagem determinística no domínio do tempo*. Ou seja, assume-se que o nível de ruído nos dados medidos é suficientemente pequeno e não são considerados métodos de resposta em frequência [1]. Em [7], é descrita uma abordagem baseada no ajuste de curvas para estimação de parâmetros de quaisquer tipos de função de transferência.

#### 3.1 Sistemas de Primeira Ordem

Considere que um degrau unitário seja aplicado à entrada  $u$  de um processo caracterizado por (2.1). Nesse caso, a saída correspondente é dada por

$$y(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}} \right), \quad t \geq \theta.$$

A Figura 1 ilustra os sinais  $u$  e  $y$  para  $K = 0,75$ ,  $\theta = 3$  e  $\tau = 4$ . Neste exemplo, a fim de aproximar o caso prático,  $y$  é contaminado com ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão igual à 0,02. Deseja-se estimar  $K$ ,  $\theta$  e  $\tau$  a partir dos sinais ilustrados na Figura 1.

Primeiramente,  $K$  é dado por

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad (3.1)$$

em que  $\Delta u$  é a magnitude do degrau de entrada e  $\Delta y$  é a variação correspondente da saída.

Em seguida,  $\theta$  e  $\tau$  são determinados pelo *método das áreas* [2] por meio de

$$\tau + \theta = \int_0^\infty u_n(t) dt - \int_\theta^\infty y_n(t) dt$$

e

$$\tau = e \int_0^{\tau+\theta} y_n(t) dt,$$

em que  $u_n(t) = \frac{1}{\Delta u} u(t)$  e  $y_n(t) = \frac{1}{\Delta y} y(t)$  são versões escalonadas de  $u$  e  $y$ , respectivamente.

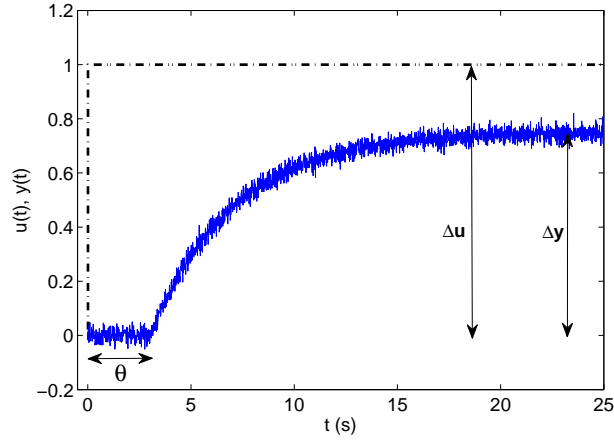


Figura 1: Dados de entrada  $u$  (---) e saída  $y$  (—) obtidos a partir de um teste ao degrau para o sistema representado por (2.1). São destacados os valores do atraso puro de tempo  $\theta$ , da magnitude do degrau de entrada  $\Delta u$ , e da variação da saída  $\Delta y$ .

Na prática, considerando sinais amostrados, tais integrais são aproximadas por

$$\tau + \theta = \sum_{k=0}^N T_s (u_n(kT_s) - y_n(kT_s)), \quad (3.2)$$

e

$$\tau = e \sum_{k=0}^{N_\tau} T_s y_n(kT_s), \quad (3.3)$$

em que  $N$  é o tamanho da massa de dados obtida durante o teste ao degrau e  $N_\tau = \text{arredondar}\left(\frac{\tau + \theta}{T_s}\right)$ . Ou seja, primeiro calcula-se  $\tau + \theta$  e, em seguida, tal valor é usado para determinar  $\tau$ . Conhecendo  $\tau$  e  $\tau + \theta$ , é possível determinar  $\theta$ .

A Figura 2 compara a saída do modelo estimado usando (3.1)-(3.3) com a massa de dados usada para estimação dos parâmetros. Foram obtidos os seguintes valores de parâmetros:  $K = 0,749$ ,  $\theta = 2,99$  e  $\tau = 3,97$ .

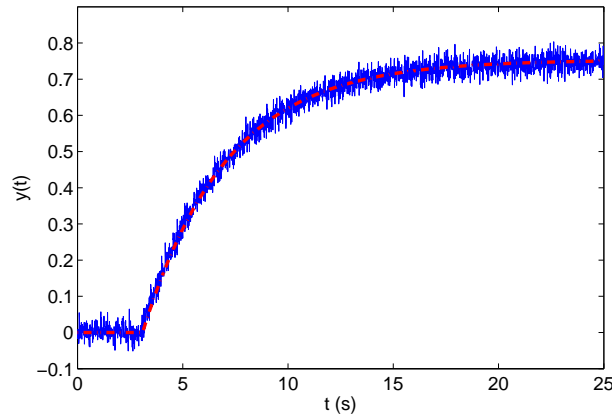


Figura 2: Sinal verdadeiro da variável de processo de (2.1) (—) e sinal simulado a partir do modelo estimado (— · —) pelo método das áreas.

### 3.2 Sistemas de Segunda Ordem Sobreamortecidos

Considere agora que um degrau unitário seja aplicado à entrada  $u$  de um processo caracterizado por (2.2). Nesse caso, a saída correspondente é dada por

$$y(t) = K \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau_2}} \right), \quad t \geq \theta. \quad (3.4)$$

Assuma que  $\tau_1 > \tau_2$ . A Figura 3 ilustra os sinais  $u$  e  $y$  para  $K = 0,75$ ,  $\theta = 3$ ,  $\tau_1 = 3$  e  $\tau_2 = 2$ . Neste exemplo,  $y$  é contaminado com ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão igual à 0,02. Deseja-se estimar  $K$ ,  $\theta$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  a partir dos sinais mostrados na Figura 3.

O ganho  $K$  também é obtido conforme (3.1). O atraso puro de tempo  $\theta$  pode ser obtido tanto por inspeção visual quanto pelo método das áreas (3.2)-(3.3). Usando o *método da resposta complementar* [4], as constantes de tempo  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são estimadas conforme apresentado a seguir.

Primeiramente, traça-se a curva do logaritmo da resposta complementar  $w$  em função do tempo,

$$w = \ln \left| 1 - \frac{y_a(t)}{Ku(t)} \right|, \quad (3.5)$$

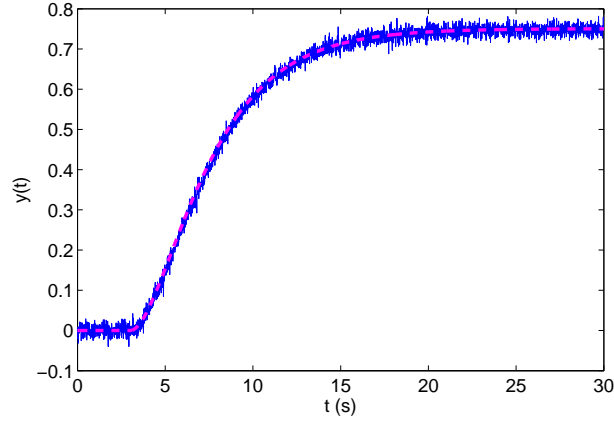


Figura 3: Sinal verdadeiro da variável de processo de (2.2) (—) e sinal simulado a partir do modelo estimado ( $-\cdot-$ ) pelo método da resposta complementar.

em que  $y_a(t) = y(t + \theta)$  desconta o efeito do atraso puro de tempo; veja a Figura 4a. Em seguida, é feito o ajuste linear da assíntota de  $w$  para valores elevados de  $t$  conforme

$$w = at + b, \quad (3.6)$$

em que os coeficientes da assíntota são relacionados com  $\tau_1$  e  $\tau_2$  por meio de

$$a = -\frac{1}{\tau_1}, \quad (3.7)$$

$$b = \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\right). \quad (3.8)$$

Ou seja, determina-se  $\tau_1$  a partir de  $a$ . Note que, para valores elevados de  $t$  em (3.4) e  $\tau_1 > \tau_2$ , obtém-se a assíntota dada por (3.6), tal que  $w$  representa a parcela da resposta devido à constante de tempo dominante  $\tau_1$ . A Figura 4a mostra a assíntota estimada usando  $w(t)$  para  $9\text{ s} \leq t \leq 16\text{ s}$ .<sup>1</sup>

Usando  $\tau_1$  (3.7) e  $e^b = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$  (3.8), traça-se a curva de

$$v = \ln\left|\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(1 - \frac{y_a(t)}{Ku(t)}\right)\right| \quad (3.9)$$

em função do tempo, em que  $v$  considera o efeito transitório de  $\tau_2$  em (3.4); veja a Figura

---

<sup>1</sup>Devido à presença de ruído, para  $t > 16\text{ s}$ , o logaritmando  $1 - \frac{y_a(t)}{Ku(t)}$  torna-se negativo. Portanto, não são usados os dados em estado estacionário.

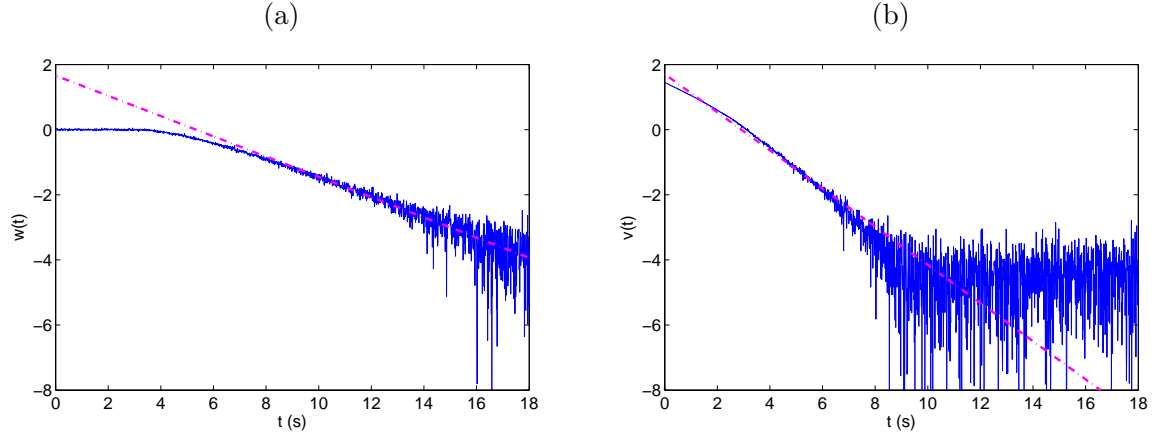


Figura 4: Sinais auxiliares (a)  $w$  (3.5) e (b)  $v$  (3.10) e respectivos ajustes das assíntotas do método da resposta complementar.

4b. Semelhantemente, é feito o ajuste linear da assíntota de  $v$  conforme

$$v = ct + d, \quad (3.10)$$

em que os coeficientes da assíntota são relacionados com  $\tau_1$  e  $\tau_2$  por meio de

$$c = -\frac{1}{\tau_2}, \quad (3.11)$$

$$d = \ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\right). \quad (3.12)$$

Ou seja, determina-se  $\tau_2$  a partir de  $c$ . A Figura 4b mostra a assíntota estimada usando  $w(t)$  para  $3s \leq t \leq 7s$ .

A Figura 3 compara a saída do modelo estimado usando o método da resposta complementar com a massa de dados usada para estimação dos parâmetros. Foram obtidos os seguintes valores de parâmetros:  $K = 0,749$ ,  $\theta = 2,99$ ,  $\tau_1 = 2,74$  e  $\tau_2 = 1,87$ .

Note que o método da resposta complementar também pode ser aplicado para procesos de primeira ordem (2.1). Nesse caso,  $w$  é uma reta e apenas (3.6)-(3.8) são utilizadas para estimar  $\tau_1 = \tau$ .

Em [1], é revisto o método de Sundaresen como extensão do método das áreas para sistemas de segunda ordem. O método de Sundaresen é recomendado para sistemas em que

$\tau_1 \approx \tau_2$  (caso criticamente amortecido).

### 3.3 Sistemas Integradores

Considere agora que um pulso retangular de magnitude  $\Delta u$  e de duração  $\Delta t_u$  seja aplicado à entrada  $u$  de um processo não auto-regulatório caracterizado por (2.3). Nesse caso, a saída correspondente é dada por

$$y(t) = \begin{cases} \Delta u K(t - \theta), & \theta < t < \theta + \Delta t_u, \\ \Delta u K \Delta t_u, & t > \theta + \Delta t_u. \end{cases} \quad (3.13)$$

A Figura 5 ilustra os sinais  $u$  e  $y$  para  $K = 0,75$  e  $\theta = 3$ . Neste exemplo,  $y$  é contaminado com ruído Gaussiano de média nula e desvio padrão igual à 0,1. Assuma que  $\theta$  é estimado por inspeção visual. Deseja-se estimar  $K$  a partir dos sinais ilustrados na Figura 5.

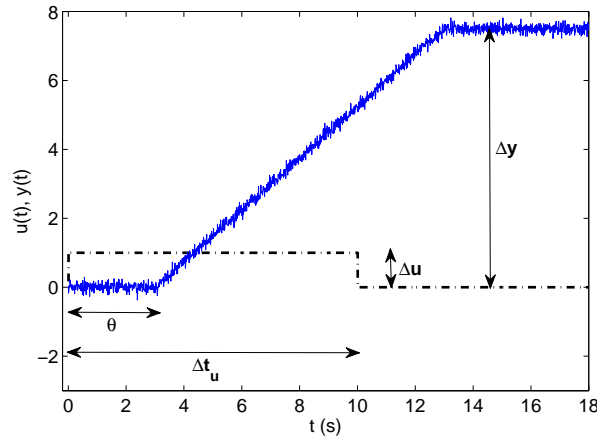


Figura 5: Dados de entrada  $u$  (— · —) e saída  $y$  (—) obtidos a partir de um teste ao pulso para o sistema representado por (2.3). São destacados os valores do atraso puro de tempo  $\theta$ , da magnitude  $\Delta u$  e da duração  $\Delta t_u$  do pulso de entrada, e da variação da saída  $\Delta y$ .

Em [5], é mostrado que, para processos com um integrador, a saída pode ser substituída pela variação do seu valor em um intervalo de tempo. Então, rearranjando os termos de (3.13) para  $t > \theta + \Delta t_u$ , o valor de  $K$  pode ser expresso por

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t_u \Delta u}. \quad (3.14)$$



A Figura 6 mostra a saída do modelo com ganho estimado  $K = 0,749$  usando (3.14) em comparação com a massa de dados usada para estimação do mesmo. Em [3, pp. 53–57], é documentada a aplicação desse método no Sistema STEC-NVT do Laboratório de Controle de Processos Úmidos da UFMG.

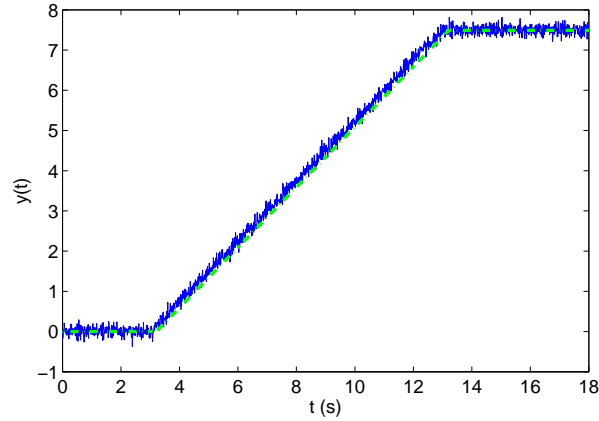


Figura 6: Sinal verdadeiro da variável de processo de (2.3) (—) e sinal simulado a partir do modelo estimado ( $- \cdot -$ ).

## 4 Conclusões

Neste documento, são revisadas as equações de métodos para estimação de parâmetros de modelos de primeira ordem e segunda ordem de sistemas dinâmicos. Para tal, assume-se que, a partir dos dados coletados, é possível escolher a ordem do modelo. São revisados três métodos, a saber: método das áreas [2], da resposta complementar [4], [6], e método de cálculo de ganho de sistemas integradores [3], [5]. Outros métodos são estudados em [1], [6], [7]. A partir dos exemplos ilustrativos, percebe-se que os métodos investigados são relativamente robustos a ruído e de fácil implementação.

## Referências

- [1] Aguirre, L.A.. *Introdução à Identificação de Sistemas*. 3a. Edição, Editora UFMG, 2007.
- [2] Åström, K. & Hägglund, T.. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA, 1995.
- [3] Baeta, É.J.S.. Implementação e Análise Comparativa de Técnicas de Controle PID em Sistemas Distribuídos e Centralizados. *Dissertação de Mestrado*. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFMG, Março de 2006.
- [4] Doebelin, E.O.. *Measurement Systems: Application and Design*. 2nd Edition, McGraw-Hill International, 1990.
- [5] Seborg, D.E., Edgar, T. F., & Mellichamp, D.A.. *Process Dynamics and Control*. 1st Edition, John Wiley and Sons, 1989.
- [6] Teixeira, B.O.S.. Modelagem e Sintonia de Controladores para um Forno de Reaquecimento. *Monografia de Graduação em Engenharia de Controle e Automação*. Escola de Engenharia, UFMG, Disponível em: [http://www.cpdee.ufmg.br/~brunoot/MonografiaECA\\_BrunoTeixeira.pdf](http://www.cpdee.ufmg.br/~brunoot/MonografiaECA_BrunoTeixeira.pdf), Fevereiro de 2004.
- [7] Tôrres, L.A.B.. Usando o MATLAB para Estimar Parâmetros de Sistemas Dinâmicos - Uma abordagem via Ajuste de Curvas, *Notas de Aula*. Departamento de Engenharia Eletrônica, UFMG, Disponível em: [http://www.cpdee.ufmg.br/~palhares/ajuste\\_curvas\\_matlab.pdf](http://www.cpdee.ufmg.br/~palhares/ajuste_curvas_matlab.pdf), Março de 2005.