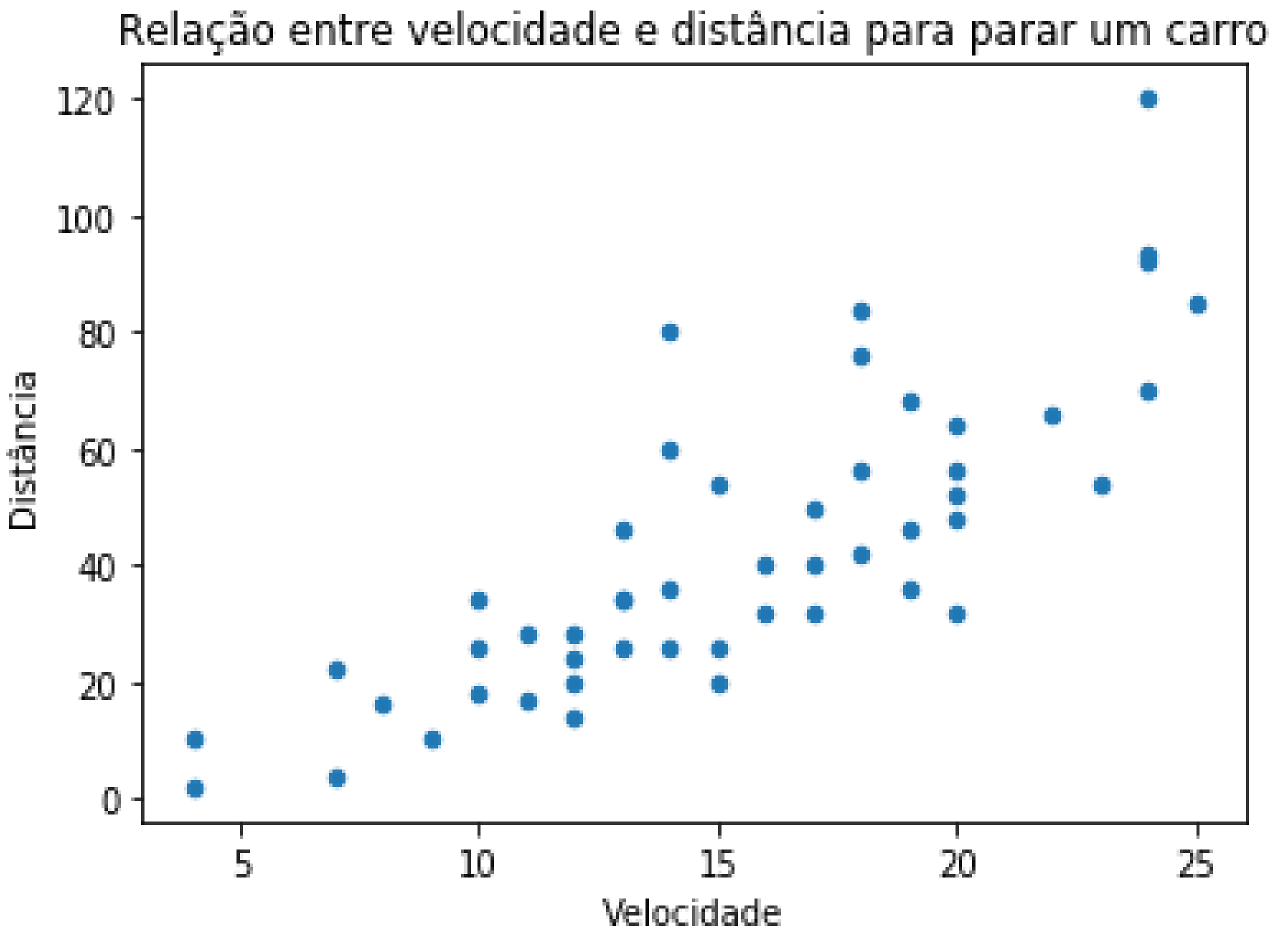
Regressão Linear

Fabrício Barth

Setembro de 2019

Dados sobre carros



Código para plotar o exemplo anterior

```
import matplotlib.pyplot as plt
cars.plot(kind='scatter', x='speed', y='dist',
        style='o')
plt.title('Relação entre velocidade e distância')
plt.xlabel('Velocidade')
plt.ylabel('Distância')
plt.show()
```

[a]

[a] O DataFrame cars já foi carregado anteriormente.

Relacões entre variáveis

- Será que existe relação entre a distância com que um carro consegue parar e a velocidade com que ele estava no momento da freada?
- Métodos de regressão tentam identificar se existe uma relação entre a variável dependente (o valor que precisa ser predito) e a variável independente.
- Distância = variável dependente
- Velocidade = variável independente

Definindo linhas

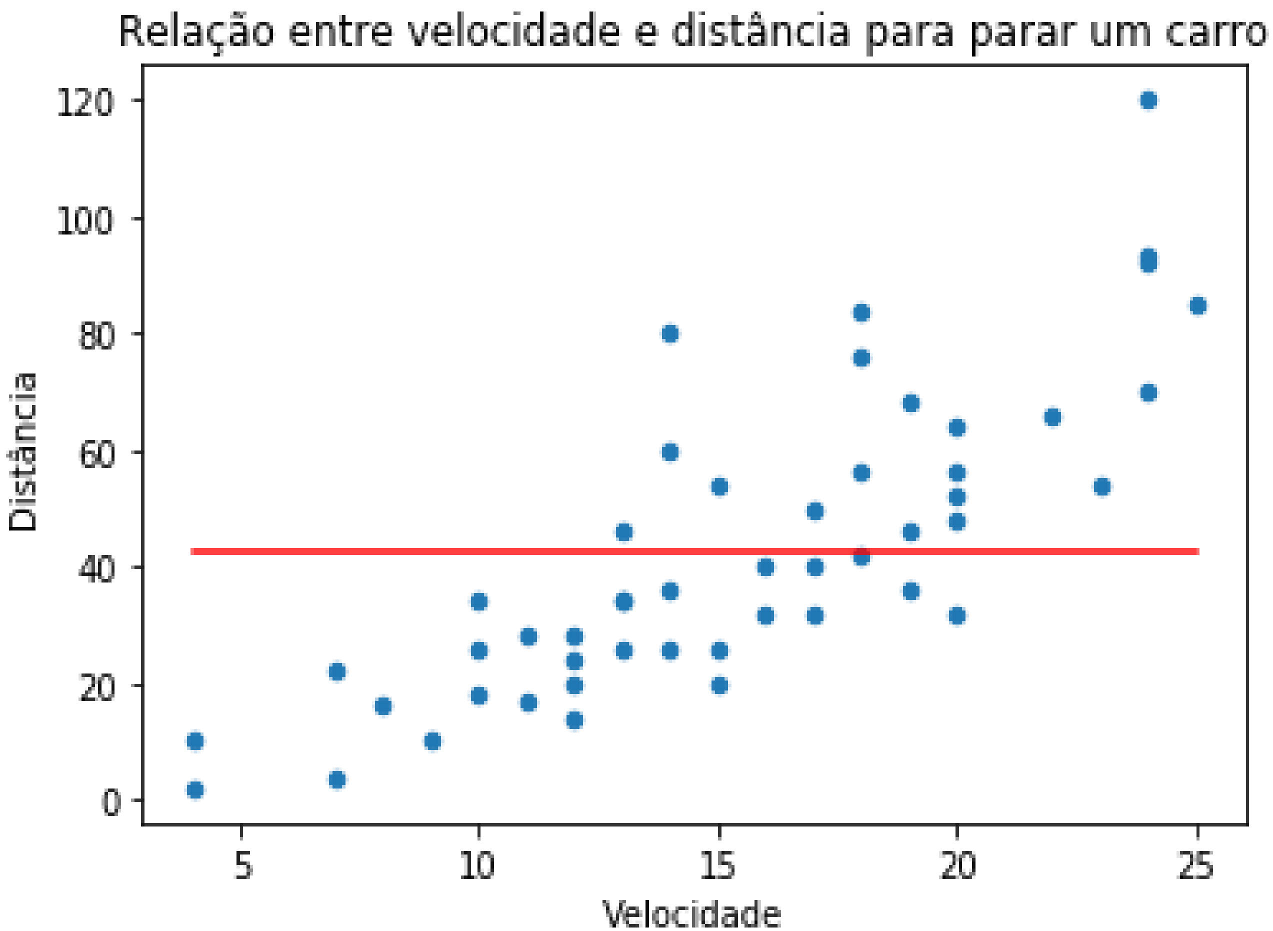
- Uma linha pode ser definida na forma de $y = \alpha + \beta \times x$
- onde x é a variável independente e y a variável dependente.
- b indica quanto a linha cresce a cada incremento de x.
- A variável α indica o valor de y quando $x = 0$.

Definindo modelos de regressão linear

- O objetivo de um algoritmo que cria este tipo de função é definir valores para α e β de tal maneira que a linha consiga representar o conjunto de dados.
- Esta linha pode não representar o conjunto de dados perfeitamente. Portanto, é necessário calcular o erro de alguma forma.

$$distancia = 42.3 + 0 \times velocidade$$

É uma função válida. Mas é uma função boa?

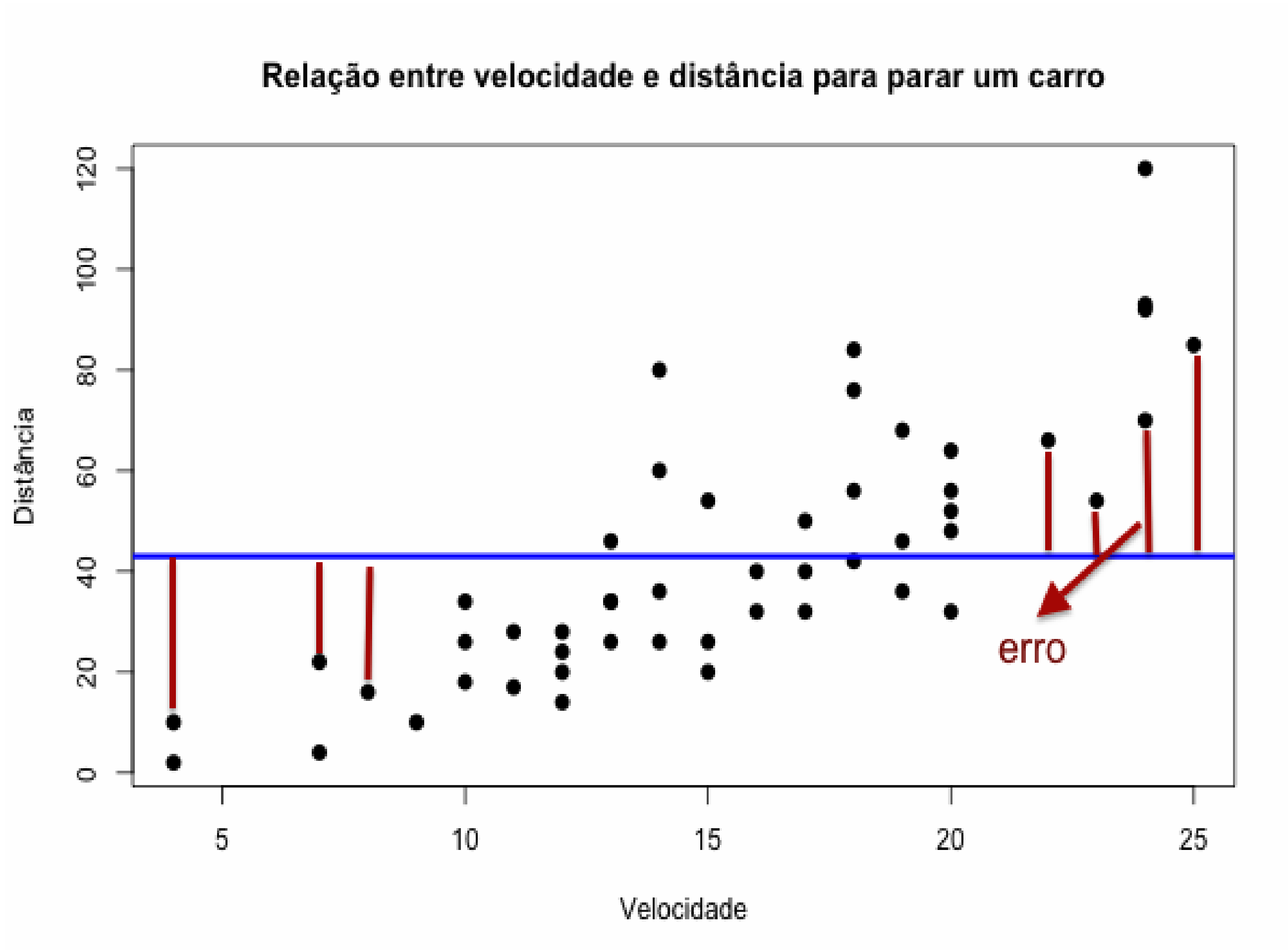


$distancia = 42.3 + 0 \times velocidade$ em Python

```
y_predicted = cars['speed'].apply(
        lambda x : 42.3 + 0 * x)


cars.plot(kind='scatter', x='speed', y='dist',
        style='o')
plt.title('Relação entre velocidade e distância')
plt.xlabel('Velocidade')
plt.ylabel('Distância')
plt.plot(cars['speed'], y_predicted, color='r')
plt.show()
```

Erro de $distancia = 42.3 + 0 \times velocidade$



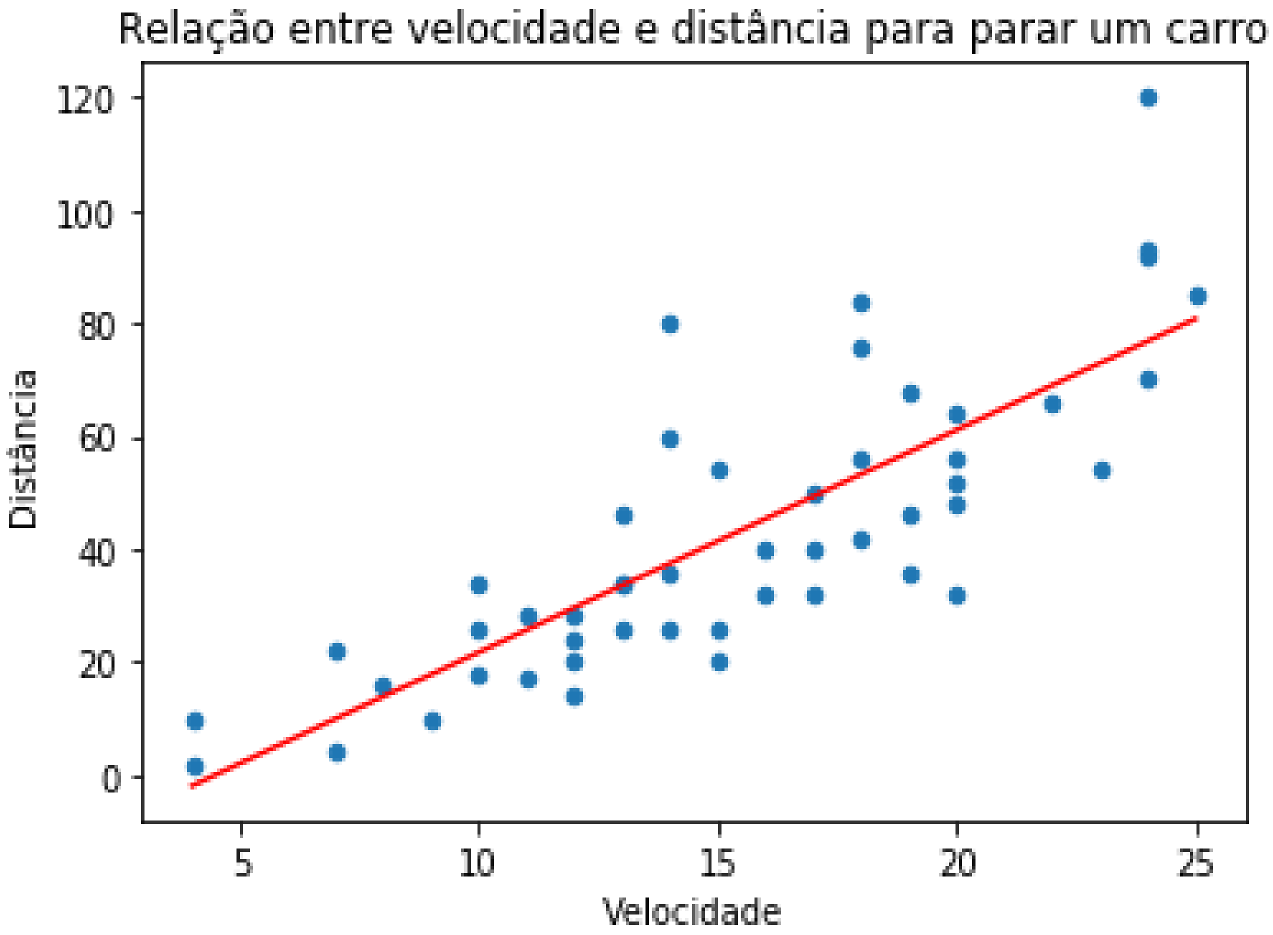
Determinando o valor de α e β em uma regressão linear simples

- Para estimar os melhores valores para α e β é utilizado método chamado de **ordinary least squares (OLS)**.
- Com este método, os valores de α e β são escolhidos para minimizar a soma dos erros ao quadrado, ou seja, a distância vertical entre o valor predito e o valor real.

$$erro = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{1}$$

onde, y_i é o valor real e $\hat{y}_i$ é o valor predito.

Uma função com um erro menor



Código em $Python$ para o slide anterior

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
model = LinearRegression().fit(
        cars['speed'].values.reshape(-1,1),
        cars['dist'].values.reshape(-1,1))
y_predicted = model.predict(
        cars['speed'].values.reshape(-1,1))
```

```python
cars.plot(kind='scatter', x='speed', y='dist',
          style='o')
plt.title('Relação entre velocidade e distância')
plt.xlabel('Velocidade')
plt.ylabel('Distância')
plt.plot(cars['speed'], y_predicted, color='r')
plt.show()
```

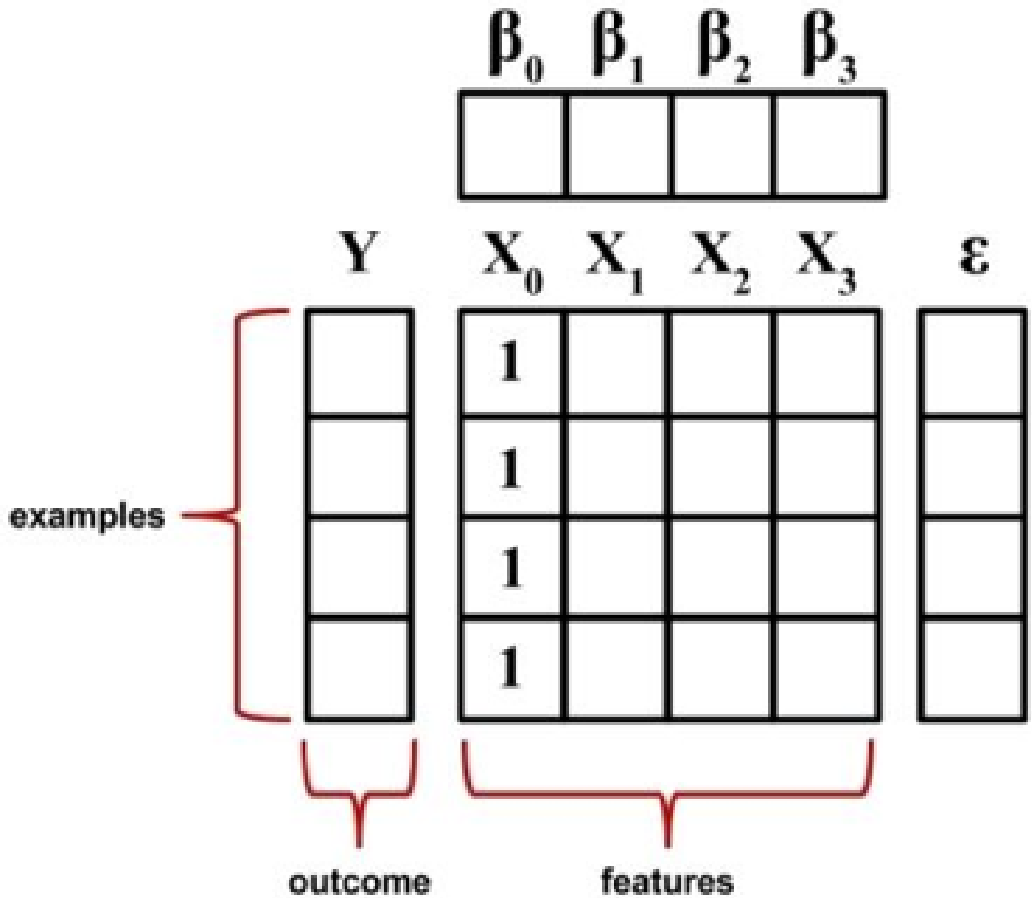
Regressão linear múltipla

$$y = \alpha + \beta_1 \times x_1 + \beta_2 \times x_2 + \cdots + \beta_i \times x_i + e \qquad (2)$$

Podemos utilizar uma equação compactada:

$$Y = X \times \beta + e \qquad (3)$$

Regressão linear múltipla



Regressão linear múltipla

Agora o objetivo é resolver $\hat{\beta}$:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{4}$$

onde:

- X^T é matriz transposta de X, e;
- X^{-1} a matriz inversa de X.

Encontrando os coeficientes para o problema do carro

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
model = LinearRegression().fit(
        cars['speed'].values.reshape(-1,1),
        cars['dist'].values.reshape(-1,1))
```

Este dataset tem apenas uma variável independente. Por isso é necessário fazer o reshape da mesma.

Exemplo de regressão linear simples usando *LinearRegression*

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
model = LinearRegression().fit(
        cars['speed'].values.reshape(-1,1),
        cars['dist'].values.reshape(-1,1))

print(model.intercept_)
print(model.coef_)
```

Avaliação de modelos

```
from sklearn.metrics import mean_squared_error,
      r2_score
rmse = mean_squared_error(cars['dist'],
      y_predicted)
r2 = r2_score(cars['dist'], y_predicted)

print(rmse)
print(r2)
```

Da forma como é calculado é bom para avaliar o comportamento dos seus dados no passado, mas não é adequado para avaliar a sua capacidade de generalização.

Exemplo de regressão linear múltipla

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.metrics import mean_squared_error,
        r2_score, mean_absolute_error
from sklearn.datasets import load_boston
boston = load_boston()
model = LinearRegression().fit(
        boston['data'],
        boston['target'])
```

Exemplo de regressão linear múltipla

```
print(model.intercept_)
print(model.coef_)
```

36.45948838508987

[-1.08011358e-01 4.64204584e-02 2.05586264e-02
2.68673382e+00 -1.77666112e+01 3.80986521e+00
6.92224640e-04 -1.47556685e+00 3.06049479e-01
-1.23345939e-02 -9.52747232e-01 9.31168327e-03
-5.24758378e-01]

Exemplo de regressão linear múltipla

```
y_predicted = model.predict(boston['data'])

rmse = mean_squared_error(boston['target'],
        y_predicted)
r2 = r2_score(boston['target'], y_predicted)
print(rmse)
print(r2)
print('Mean Absolute Error:',
        mean_absolute_error(
                boston['target'], y_predicted))
```

Exemplo de regressão linear múltipla

```
21.894831181729206
0.7406426641094094
Mean Absolute Error: 3.270862810900314
```

Exemplos didático para regressão linear e polinomial

Criação dados

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
x = np.array([5, 15, 25, 35, 45, 55]).reshape((-1, 1))
y = np.array([5, 20, 14, 32, 22, 38])
print(x)
```

```
[[ 5]
 [15]
 [25]
 [35]
 [45]
 [55]]
```

```
print(y)
```

```
[ 5 20 14 32 22 38]
```

Criação do modelo e uso

```
model = LinearRegression()
model.fit(x, y)
r_sq = model.score(x, y)
print('coefficient of determination:', r_sq)
print('intercept:', model.intercept_)
print('coeficients:', model.coef_)
```

```
coefficient of determination: 0.715875613747954
intercept: 5.633333333333329
coeficients: [0.54]
```

```
y_pred = model.predict(x)
print('predicted response:', y_pred, sep='\n')
```

```
predicted response:
[ 8.33333333 13.73333333 19.13333333 24.53333333 29.93333333 35.33333333]
```

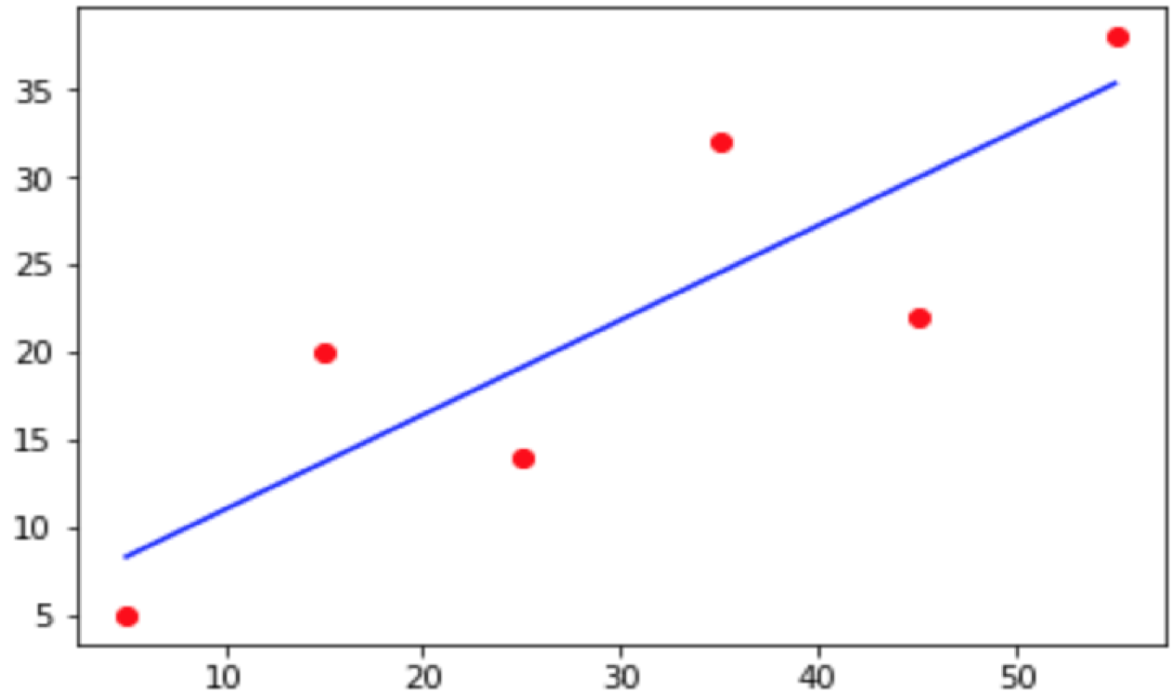
Outra forma de utilização do modelo

```
y_pred = model.intercept_ + model.coef_ * x
print('predicted response:', y_pred, sep='\n')
```

```
predicted response:
[[ 8.33333333]
 [13.73333333]
 [19.13333333]
 [24.53333333]
 [29.93333333]
 [35.33333333]]
```

Plot do modelo

```
plt.plot(x, y, 'ro')
plt.plot(x, y_pred, color='b')
plt.show()
```



Regressão polinomial

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
x = np.array([5, 15, 25, 35, 45, 55]).reshape((-1, 1))
y = np.array([15, 11, 2, 8, 25, 32])
```

```
transformer = PolynomialFeatures(degree=2, include_bias=False)
transformer.fit(x)
x_ = transformer.transform(x)
```

Atributos gerados utilizado grau 2

```
print(x_)
```

```
[[   5.   25.]
 [  15.  225.]
 [  25.  625.]
 [  35. 1225.]
 [  45. 2025.]
 [  55. 3025.]]
```

Utilização do modelo

```python
model = LinearRegression().fit(x_, y)
```

```python
r_sq = model.score(x_, y)
print('coefficient of determination:', r_sq)
print('intercept:', model.intercept_)
print('coefficients:', model.coef_)
```

```
coefficient of determination: 0.8908516262498564
intercept: 21.372321428571425
coefficients: [-1.32357143  0.02839286]
```

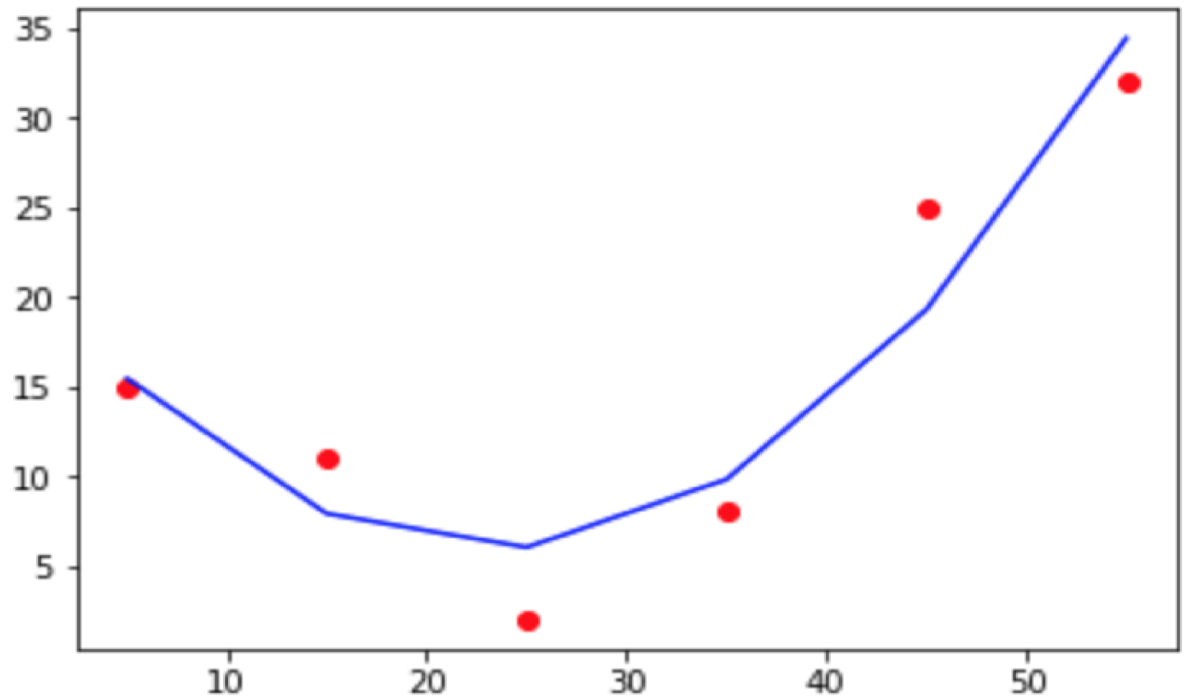
Utilização do modelo

```python
y_pred = model.predict(x_)
print('predicted response:', y_pred, sep='\n')
```

```
predicted response:
[15.46428571  7.90714286  6.02857143  9.82857143 19.30714286 34.46428571]
```

Plot do modelo polinomial

```
plt.plot(x, y, 'ro')
plt.plot(x, y_pred, color='b')
plt.show()
```



Modelo grau 4

```
transformer = PolynomialFeatures(degree=4, include_bias=False)
transformer.fit(x)
x_ = transformer.transform(x)
print(x_)
model = LinearRegression().fit(x_, y)
r_sq = model.score(x_, y)
print('coefficient of determination:', r_sq)
print('intercept:', model.intercept_)
print('coefficients:', model.coef_)
y_pred = model.predict(x_)
print('predicted response:', y_pred, sep='\n')
plt.plot(x, y, 'ro')
plt.plot(x, y_pred, color='b')
plt.show()
```

Modelo grau 4: resultados

```
[[5.000000e+00 2.500000e+01 1.250000e+02 6.250000e+02]
 [1.500000e+01 2.250000e+02 3.375000e+03 5.062500e+04]
 [2.500000e+01 6.250000e+02 1.562500e+04 3.906250e+05]
 [3.500000e+01 1.225000e+03 4.287500e+04 1.500625e+06]
 [4.500000e+01 2.025000e+03 9.112500e+04 4.100625e+06]
 [5.500000e+01 3.025000e+03 1.663750e+05 9.150625e+06]]
coefficient of determination: 0.9996871368552787
intercept: 4.085503472844266
coefficients: [ 3.67175926e+00 -3.44062500e-01  9.90740741e-03 -8.54166667e-05]
predicted response:
[15.02777778 10.86111111  2.27777778  7.72222222 25.13888889 31.97222222]
```

Modelo grau 4: plot