

IFT 3515

Fonctions à plusieurs variables

Optimisation avec contraintes

Méthodes de points intérieurs

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

# Problèmes non-convexes avec contraintes d'inégalité

Partiellement basé sur [https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view\\_material/1377](https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view_material/1377)

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{t.q. } g_i(x) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

où  $f : \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $g_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ . De plus, nous supposons que  $f$  et  $g_i$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) sont des fonctions suffisamment “douces” (typiquement deux fois continûment différentiables).

Note : on ignore la présence de contraintes d'égalité (linéaires) pour la simplicité.

# Problèmes non-convexes avec contraintes d'inégalité

Notons l'ensemble réalisable par

$$\mathcal{X} = \{x \mid g_i(x) \leq 0 \ i \in \mathcal{I}\}$$

et l'intérieur par

$$\mathcal{X}^\circ = \{x \mid g_i(x) < 0 \ i \in \mathcal{I}\}$$

**Hypothèse de travail** : la condition de Slater tient, i.e.  $\mathcal{X}^\circ \neq \emptyset$ .

But : trouver des points KKT du problème ainsi défini.

## Barrière logarithmique

Pour (chaque)  $\mu > 0$ , nous associons le sous-problème barrière logarithmique

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x) &:= f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \log(-g_i(x)) \\ \text{t.q. } -g(x) &> 0. \end{aligned}$$

Il s'agit essentiellement d'un problème sans contrainte comme chaque contrainte  $-g_i(x) > 0$  est assurée par le terme log-barrière correspondant de  $f_\mu$ , mais le domaine de la fonction  $f_\mu$  est restreint à l'ensemble

$$\mathcal{X} = \{x \mid g(x) < 0\}$$

# Barrière logarithmique

Supposons que  $x(\mu)$  est solution du problème

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x) \\ \text{t.q. } -g(x) > 0 \end{aligned}$$

Comme  $g_i(x) \rightarrow 0$  implique  $-\log(-g_i(x)) \rightarrow +\infty$ ,  $x(\mu)$  doit se trouver à l'intérieur de l'ensemble réalisable, "loin" de ses frontières, en particulier lors  $\mu > 0$  est "grand". La faisabilité stricte est assurée.

## Barrière logarithmique

Quand  $\mu$  est petit,  $\mu \rightarrow 0$ , le terme  $f(x)$  “domine” les termes de barrière logarithmique dans l’objectif, et donc  $x(\mu)$  est proche de la frontière optimale de  $\mathcal{X}$ , mais cela peut à nouveau occasionner du mauvais conditionnement.

Sous certaines conditions, certains minimiseurs de  $f_\mu$  convergent vers des solutions locales du problème initial, comme  $\mu \rightarrow 0$ . Mais  $f_\mu$  peut avoir d’autres points stationnaires, inutiles pour nos besoins.

## Barrière logarithmique

De la définition de  $f_\mu(x)$ , nous tirons l'expression du gradient

$$\begin{aligned}\nabla f_\mu(x) &= \nabla f(x) - \mu \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\nabla g_i(x)}{g_i(x)} \\ &= \nabla f(x) - \mu J(x)^T G^{-1}(x) \mathbf{e}\end{aligned}$$

où  $J(x)$  est le Jacobien de  $g(x)$ ,  $G(x) := \text{diag}(g(x))$ ,  
 $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$ .

## Conditions nécessaires au premier ordre

Conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre pour le problème avec barrière logarithmique :  $x(\mu)$  est un minimiseur local de  $f_\mu$  entraîne  $\nabla f_\mu(x(\mu)) = 0$ , ou

$$\nabla f(x) = \mu \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\nabla g_i(x)}{g_i(x)}$$

avec  $-\frac{\mu}{g_i(x(\mu))} > 0, \forall i \in \mathcal{I}$ .



## Conditions nécessaires au premier ordre

Les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre pour le problème initial, en utilisant les conditions KKT, s'expriment comme

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

et nous supposons  $\mathcal{X}^o \neq \emptyset$ .

Si  $x^*$  est un minimum local (nondégénéré) du problème initial (p.e. les conditions suffisantes d'optimalité au deuxième ordre tiennent), alors

$$-\frac{\mu}{g_i(x(\mu))} \rightarrow \lambda_i^*, \quad i \in \mathcal{I}$$

comme  $\mu \rightarrow 0$ .

# Existence locale du chemin central

## Théorème (Existence locale du chemin central)

*Supposons que  $\mathcal{X}^o \neq \emptyset$ , que  $x^*$  est un minimiseur local du problème original, tel que*

- 1. la condition de complémentarité stricte tient en  $x^*$*
- 2. la LICQ tient en  $x^*$*
- 3.  $\exists \alpha > 0$  tel que  $d^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq \alpha \|d\|_2^2$ , où  $d \in \text{Ker}(J(x^*))$*

*Alors il existe une unique multifonction continûment différentiable  $x(\mu)$  de minimiseurs de  $f_\mu$  dans un voisinage de  $\mu = 0$  et  $x(\mu) \rightarrow x^*$  comme  $\mu \rightarrow 0$ .*

# Méthode barrière basique

Fiacco-McCormick, 1960s

Étant donné  $\mu_0 > 0$ , poser  $k = 0$ . Jusqu'à "convergence", faire

1. Choisir  $0 < \mu_{k+1} < \mu_k$ .
2. Trouver  $x_0^k$  tel que  $g(x_0^k) < 0$  (possiblement,  $x_0^k := x_k$ )
3. Partant de  $x_0^k$ , utiliser un algorithme de minimisation sans contraintes pour trouver un minimiseur "approximatif"  $x_{k+1}$  de  $f_{\mu_{k+1}}$ . Poser  $k := k + 1$ .

On doit avoir  $\mu_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Par exemple,  $\mu_{k+1} := 0.1\mu_k$ ,  
 $\mu_{k+1} := \mu_k^2, \dots$

## Algorithmes pour minimiser $f_\mu$

Prendre des pas de Newton au sein des algorithmes suivant.

- Méthodes de recherche linéaire : utiliser une recherche linéaire spéciale pour faire face à la singularité du log.
- Méthodes de région de confiance : “mettre en forme” la région de confiance pour faire face aux contours de la singularité du log.

Rejeter les points dont la valeur  $g(x_k + d_k) > 0$ . Retourner à l'étape 2.

# Un résultat de convergence pour la méthode barrière

## Théorème (Convergence globale de l'algorithme barrière)

*Appliquons l'algorithme barrière basique au problème initial.*

*Supposons que  $f, g \in C^2$ ,  $\lambda_i^k = -\mu_k/g_i(x^k)$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , et*

$$\|\nabla f_{\mu^k}(x^k)\| \leq \epsilon^k,$$

*où  $\epsilon^k \rightarrow 0$  comme  $k \rightarrow \infty$ , et  $\mu^k \rightarrow 0$  comme  $k \rightarrow \infty$ . Supposons de plus que  $x^k \rightarrow x^*$ , et que la LICQ tient en  $x^*$ .*

*Alors  $x^*$  est un point KKT du problème initial, et  $\lambda^k \rightarrow \lambda^*$ , où  $\lambda^*$  est le vecteur de multiplicateurs de Lagrange du problème initial.*

## Minimiser la fonction barrière $f_\mu$

Utiliser la méthode de Newton avec une recherche linéaire ou une région de confiance. Comme

$$f_\mu(x) := f(x) - \mu \sum_{i \in \mathcal{I}} \log(-g_i(x)),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \nabla f_\mu(x) &= \nabla f(x) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla g_i(x) \\ &= \nabla f(x) - \mu J(x)^T G^{-1}(x) \mathbf{e} \end{aligned}$$

où  $J(x)$  est la matrice jacobienne de  $g(x)$  et  $G(x) := \text{diag}(g(x))$ .

## Minimiser la fonction barrière $f_\mu$

De plus,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_\mu(x) &= \nabla^2 f(x) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla^2 g_i(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mu}{g_i^2(x)} \nabla g_i(x) \nabla g_i(x)^T \\ &= \nabla^2 f(x) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla^2 g_i(x) + \mu J(x)^T G^{-2}(x) J(x)\end{aligned}$$

Étant donné  $x$  tel que  $g(x) < 0$ , calculer la direction de Newton pour  $f_\mu$  en résolvant

$$\nabla^2 f_\mu(x) d = -\nabla f_\mu(x) \quad (\mu = \mu^{k+1})$$

Estimateurs des multiplicateurs de Lagrange :  $\lambda_i(x) := -\mu/g_i(x)$ ,  
 $i \in \mathcal{I}$ .

## Minimiser la fonction barrière $f_\mu$

Dès lors

$$\nabla f_\mu(x) = \nabla f(x) + J(x)\lambda(x).$$

Rappelons l'expression du Lagrangien :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i g_i(x)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x, \lambda) &= \nabla_x f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \nabla_x g_i(x) \\ &= \nabla_x f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} J(x)_i \lambda_i\end{aligned}$$

Ainsi

$$\nabla f_\mu(x) = \nabla_x L(x, \lambda(x))$$



## Minimiser la fonction barrière $f_\mu$

Nous avons aussi

$$\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) = \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \nabla^2 g_i(x)$$

Rappelons, comme  $\lambda_i(x) = -\mu/g_i(x)$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_\mu(x) &= \nabla^2 f(x) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla^2 g_i(x) + \mu J(x)^T G^{-2}(x) J(x) \\ &= \nabla^2 f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i(x) \nabla^2 g_i(x) + \mu J(x)^T G^{-2}(x) J(x) \end{aligned}$$

Avec  $\Lambda(x) = \text{diag}(\lambda(x))$ ,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_\mu(x) &= \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda(x)) + \mu J(x)^T G^{-2}(x) J(x) \\ &= \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda(x)) - J(x)^T G^{-1}(x) \Lambda(x) J(x) \\ &= \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) + \frac{1}{\mu} J(x)^T \Lambda^2(x) J(x) \end{aligned}$$

## Difficultés potentielles

Mauvais nombre de conditionnement de la matrice hessienne de  $f_\mu$

Estimateurs asymptotiques des valeurs propres de  $\nabla^2 f_{\mu^k}(x^k)$  : certaines valeurs propres de  $\nabla^2 f_{\mu^k}(x^k)$  tendent vers l'infini comme  $k \rightarrow \infty$  tandis que les autres restent bornées ; le nombre de conditionnement de  $\nabla^2 f_{\mu^k}(x^k)$  est en  $O(1/\mu^k)$ , et explose comme  $k \rightarrow \infty$ .

Dès lors, on pourrait ne pas être capable de calculer  $x_k$  avec précision.

Il s'agit de la principale raison expliquant l'impopularité des méthodes barrières en optimisation non linéaire dans les années 1960s.

## Difficultés potentielles

Mauvais point de départ.

Rappelons que nous avons besoin d'un point de départ  $x_0^k$  pour la minimisation (approximative) de  $f_{\mu^{k+1}}$ , après la réduction du paramètre barrière de  $\mu^k$  à  $\mu^{k+1}$ .

Il est possible de montrer que l'itéré  $x^k$ , obtenu à la fin de la minimisation de  $f_{\mu^k}$ , est un très mauvais candidat comme point de départ  $x_0^k$ , dans le sens où le pas de Newton  $x^k + d^k$  sera asymptotiquement non réalisable (i.e.  $g(x^k + d^k) > 0$ ) quand  $\mu^{k+1} < 0.5\mu^k$ , c'est-à-dire pour n'importe quel réduction intéressante de  $\mu^k$ .

Par conséquent, il y a peu d'espoir pour une convergence rapide de la méthode barrière.

## Méthodes primales-duales

Solution à ces deux problèmes : utiliser des méthodes de points intérieurs primales-duales.

Comme pour les méthodes de pénalité, nous allons partir des conditions d'optimalité perturbées.

Rappelons les conditions nécessaires au premier ordre pour le problème barrière : comme  $x(\mu)$  est un minimiseur local de  $f_\mu$ ,  $\nabla f_\mu(x(\mu)) = 0$ , ou de manière équivalente,

$$\nabla f(x) = \mu J(x(\mu))^T G^{-1}(x(\mu)) \mathbf{e}$$

Soit  $\lambda(\mu) = -\mu G^{-1}(x(\mu))$ .

## Conditions d'optimalité perturbées

Dès lors,  $(x(\mu), \lambda(\mu))$  satisfait

$$\begin{cases} \nabla f(x) + J(x)^T \lambda = 0, \\ G(x) \Lambda \mathbf{e} = -\mu \mathbf{e}, \\ -g(x) > 0, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Le système KKT du problème s'écrit quant à lui

$$\begin{cases} \nabla f(x) + J(x)^T \lambda = 0, \\ G(x) \Lambda \mathbf{e} = 0, \\ -g(x) > 0, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

## Méthodes primales-duales de poursuite de chemin (1990s)

On cherche à satisfaire  $g(x) < 0$  et  $\lambda > 0$ , et on utilise la méthode de Newton pour résoudre le système

$$\begin{cases} \nabla f(x) + J(x)^T \lambda = 0, \\ G(x) \Lambda \mathbf{e} = -\mu \mathbf{e}, \end{cases}$$

La direction de Newton direction  $(\Delta x, \Delta \lambda)$  satisfait

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) & J(x)^T \\ \Lambda J(x) & G(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x) + J(x)^T \lambda \\ G(x) \Lambda \mathbf{e} + \mu \mathbf{e} \end{pmatrix}$$

Éliminons  $\Delta \lambda$ . Nous avons

$$\Lambda J(x) \Delta x + G(x) \Delta \lambda = -G(x) \Lambda \mathbf{e} - \mu \mathbf{e},$$

ou

$$\Delta \lambda = -G^{-1}(x) \Lambda J(x) \Delta x - \Lambda \mathbf{e} - G^{-1}(x) \mu \mathbf{e}$$

## Méthodes primales-duales de poursuite de chemin (1990s)

En remplaçant dans la première équation, et notant que  $\Lambda \mathbf{e} = \lambda$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) \Delta x + J(x)^T (-G^{-1}(x) \Lambda J(x) \Delta x - \lambda - G^{-1}(x) \mu \mathbf{e}) \\ = -\nabla f(x) - J(x)^T \lambda\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) \Delta x - J(x)^T G^{-1}(x) \Lambda J(x) \Delta x = -\nabla f(x) + J(x)^T G^{-1}(x) \mu \mathbf{e}$$

$\Leftrightarrow$

$$(\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) - J(x)^T G^{-1}(x) \Lambda J(x)) \Delta x = -(\nabla f(x) - \mu J(x)^T G^{-1}(x) \mathbf{e})$$

ce qui peut encore se réécrire

$$(\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) - J(x)^T G^{-1}(x) \Lambda J(x)) \Delta x = -\nabla_x L(x, \lambda)$$

# Méthodes primales-duales vs méthodes primales

## Primal

$$\nabla^2 f_{\mu}(x) \Delta x = -\nabla f_{\mu}(x)$$

ou de manière équivalente, à partir des relations précédentes,

$$(\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda(x)) - J(x)^T G^{-1}(x) \Lambda(x) J(x)) \Delta x = -\nabla_x L(x, \lambda(x))$$

## Primal-dual

$$(\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) - J(x)^T G^{-1}(x) \Lambda J(x)) \Delta x = -\nabla_x L(x, \lambda)$$

Dans les méthodes primales-duales, les changements des multiplicateurs de Lagrange sont calculés explicitement à chaque itération. Dans les méthodes primales, ils sont mis à jour implicitement.

Pour les méthodes de points intérieurs primales-duales,  $x_0^k = x_k$  est un bon point de départ pour la solution du sous-problème. Le problème de conditionnement de la matrice hessienne peut être contourné en résolvant dans des sous-espaces adaptés.



## Complexité

Si  $\mu^{k+1}$  est choisi en  $O((\mu^k)^2)$ , on obtient une convergence superlinéaire.

Plusieurs itérations de Newton sont menées pour chaque valeur de  $\mu$  (à l'aide d'une région de confiance ou d'une recherche linéaire).

Dans les implémentations, il est essentiel de garder les itérés éloignés des frontières au cours des premières itérations (sinon, les itérés peuvent être coincés à proximité de la frontière, entraînant une convergence lente). Le calcul d'un point de départ initial  $x_0$  satisfaisant  $g(x_0) < 0$  est non trivial. Plusieurs heuristiques existent (p.e., calcul du centre analytique).

Logiciel de référence exploitable avec Julia : IPOPT

Programmation linéaire : les méthodes de points intérieurs résolvent un programme linéaire en temps polynomial.

# Implantation

Bien que les méthodes de points intérieurs se soient révélées comme une des méthodes modernes les plus efficaces, les performances numériques restent sensibles à l'implantation.

La direction  $(\Delta x, \Delta \lambda)$  calculée, comment déterminer la longueur de pas ? Nous voulons

- progresser rapidement vers la solution
- rester à l'intérieur de l'ensemble réalisable
- comment gérer les contraintes d'égalité ?

On se limite souvent aux contraintes d'égalité linéaires ( $Ax = b$ ). Nous allons illustrer les idées principales en programmation linéaire.

# Programmation linéaire

Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \Leftrightarrow b - Ax = 0 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Conditions KKT :

$$\begin{aligned} c - A^T y - s &= 0 \\ Ax &= b \\ x_i s_i &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\ x, s &\geq 0 \end{aligned}$$

## Programmation linéaire

La première condition (annulation du gradient du lagrangien) correspond aux contraintes duales, en notant que  $s$  peut s'interpréter comme un vecteur de variables d'écart :

$$A^T y \leq c$$

La dernière condition condition correspond aux contraintes de complémentarité et rendent difficile la résolution directe du système KKT.

On peut les relâcher en prenant

$$x_i s_i = \mu, \quad i = 1, \dots, n$$

avec  $\mu > 0$ , ce que nous pouvons réécrire comme

$$Xs = \mu e$$

où  $X = \text{diag}(x)$ ,  $e = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^T$ .

# Conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité deviennent

$$A^T y + s = c$$

$$Ax = b$$

$$Xs = \mu e$$

$$x, s \geq 0$$

Comme précédemment, on considère la réalisation en utilisant la méthode de Newton (en ignorant pour le moment les contraintes de non-négativité).

## Conditions d'optimalité : système non-linéaire

Définissons

$$F_\gamma(x, y, s) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ Xs - \gamma \rho e \end{pmatrix}, \quad \mu := \gamma \rho = \gamma x^T s / n$$

$\gamma \geq 0$  est un paramètre à choisir.

Étant donné  $(x^0, s^0)$ , une étape de la méthode de Newton appliquée à

$$F_\gamma(x, y, s) = 0, \quad x, s \geq 0$$

est donnée par

$$\nabla_\gamma F_\gamma(x^0, y^0, s^0) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = -F_\gamma(x^0, y^0, s^0).$$

## Conditions d'optimalité : système non-linéaire

Mise à jour :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ s^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ s^0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix}$$

$\alpha \in (0, 1]$  est la longueur de pas.

# Algorithme primal-dual

Étape 1. Choisir  $(x^0, y^0, s^0)$  tels que  $x^0, s^0 > 0$ . Poser  $k = 0$ .

Étape 2. Choisir  $\gamma, \theta \in (0, 1)$ ,  $\epsilon > 0$ .

Étape 3. Tant que

$$\max\{\|Ax^k - b\|, \|A^T y^k + s^k - c\|, (x^k)^T s^k\} \geq \epsilon,$$

répéter la mise à jour de la solution, et prendre  
 $k := k + 1$ .



## Mise à jour de la solution

1.  $\mu^k := ((x^k)^T s^k)/n$
2. Résoudre

$$A\Delta x = -(Ax^k - b)$$

$$A^T \Delta y + \Delta s = -(A^T y^k + s^k - c)$$

$$S^k \Delta x + X^k \Delta s = -X^k s^k + \gamma \mu^k e$$

3. Calculer

$$\alpha^k := \theta \max_{\alpha} \{x^k + \alpha \Delta x \geq 0, s^k + \alpha \Delta s \geq 0, \theta \alpha \leq 1\}$$

4. Poser

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ s^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ s^k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix}$$

# Progression

Observons que

$$\begin{pmatrix} Ax^1 - b \\ A^T y^1 + s^1 - c \end{pmatrix} = (1 - \alpha) \begin{pmatrix} Ax^0 - b \\ A^T y^0 + s^0 - c \end{pmatrix}$$

et

$$(x^1)^T s^1 = (1 - (1 - \gamma)\alpha)(x^0)^T s^0 + \alpha^2 \Delta_x \Delta_s$$

En prenant  $\alpha > 0$  et  $\gamma \in [0, 1)$

- les résidus sont réduits
- $(x^1)^T s^1 < (x^0)^T s^0$  pour  $\alpha$  suffisamment petit
- difficulté : peu de contrôle sur  $\Delta_x \Delta_s$
- toujours intérieur :  $x, s > 0$

# Notes

- algorithme simple
- peu d'itérations, mais chaque itération peut être coûteuse
- l'analyse de convergence théorique est complexe

L'algorithme a subi de nombreux raffinements.

# Méthodes de points intérieurs en programmation non-linéaire

Référence : chapitre 19, Nocedal & Wright

Nous suivons à présent les notations de Nocedal & Wright et considérons le problème

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{t.q.} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

- $l$  contraintes d'égalité
- $m$  contraintes d'inégalité

# Reformulation

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{t.q.} \quad & -c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, \\ & -c_i(x) + s \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \\ & s \geq 0. \end{aligned}$$

## Conditions KKT

$$\nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}^T(x)y - J_{\mathcal{I}}^T(x)z = 0$$

$$Sz - \mu \mathbf{e} = 0$$

$$c_{\mathcal{E}}(x) = 0$$

$$c_{\mathcal{I}}(x) - s = 0,$$

avec  $\mu = 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $s \geq 0$ .

$J_{\mathcal{E}}(x)$  et  $J_{\mathcal{I}}(x)$  sont les matrices jacobiennes des contraintes d'égalité et d'inégalité, respectivement.

$$\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

$$S = \text{diag}(s), Z = \text{diag}(z).$$

## Système perturbé

$$\begin{aligned}\nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}^T(x)y - J_{\mathcal{I}}^T(x)z &= 0 \\ Sz - \mu_k \mathbf{e} &= 0 \\ c_{\mathcal{E}}(x) &= 0 \\ c_{\mathcal{I}}(x) - s &= 0,\end{aligned}$$

avec  $\mu_k > 0$ .

Résoudre approximativement pour  $\mu_k > 0$ , et  $\mu_k \rightarrow 0$  comme  $k \rightarrow \infty$ .

## Équations de Newton

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x, s, y, z) & 0 & -J_{\mathcal{E}}^T(x) & -J_{\mathcal{I}}^T(x) \\ 0 & Z & 0 & S \\ J_{\mathcal{E}}(x) & 0 & 0 & 0 \\ J_{\mathcal{I}}(x) & -I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}^T(x)y - J_{\mathcal{I}}^T(x)z \\ Sz - \mu_k \mathbf{e} \\ c_{\mathcal{E}}(x) \\ c_{\mathcal{I}}(x) - s \end{pmatrix}$$

avec

$$L(x, s, y, z) = f(x) - y^T c_{\mathcal{E}}(x) - z^T (c_{\mathcal{I}}(x) - s).$$



## Mise à jour de la solution

$$\begin{aligned}x^+ &= x + \alpha_s^{\max} \Delta x, & s^+ &= s + \alpha_s^{\max} \Delta s, \\y^+ &= y + \alpha_z^{\max} \Delta y, & z^+ &= z + \alpha_z^{\max} \Delta z,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha_s^{\max} &= \max\{\alpha \in (0, 1] \mid s + \alpha \Delta s \geq (1 - \tau)s\}, \\ \alpha_z^{\max} &= \max\{\alpha \in (0, 1] \mid z + \alpha \Delta z \geq (1 - \tau)z\},\end{aligned}$$

où  $\tau \in (0, 1)$  (valeur typique : 0.995).

But : empêcher  $s$  et  $z$  d'atteindre 0 trop rapidement.

## Fonction d'erreur

$$E(x, s, y, z; \mu) = \max\{\|\nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}(x)^T y - J_{\mathcal{I}}(x)^T z\|, \\ \|Sz - \mu \mathbf{e}\|, \\ \|c_{\mathcal{E}}(x)\|, \\ \|c_{\mathcal{I}}(x) - s\|\}$$

pour une certaine norme vectorielle  $\|\cdot\|$ .

## Algorithme basique de points intérieurs

Choisir  $x_0 > 0$  et  $s_0 > 0$ , et calculer des valeurs initiales pour les multiplicateurs  $y_0$  et  $z_0 > 0$ . Choisir un paramètre barrière initial  $\mu_0 > 0$  et des paramètres  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $\tau \in (0, 1]$ . Poser  $k := 0$ .

Tant qu'un critère d'arrêt n'est pas satisfait, répéter  
(Résoudre approximativement le système perturbé)

Tant que  $E(x_k, s_k, y_k, z_k; \mu_k) > \tau \mu_k$

- Calculer la direction de Newton  $(\Delta x, \Delta s, \Delta y, \Delta z)$ .
- Calculer  $\alpha_s^{\max}$ ,  $\alpha_z^{\max}$ .
- Calculer  $(x_{k+1}, s_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ .
- Poser  $\mu_{k+1} = m\mu_k$  et incrémenter  $k$ .

Choisir  $\mu_k \in (0, \sigma \mu_k)$ .

# Algorithme basique de points intérieurs

## Théorème

*Supposons que  $f$  et  $c_i$ ,  $i \in \mathcal{I} \cap \mathcal{E}$ ,  $\in C^1$ , et que l'algorithme précédent génère une séquence infinie d'itérés  $\{x_k\}$  et que  $\mu_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Alors tout point d'accumulation  $\hat{x}$  de la séquence  $\{x_k\}$  est réalisable. De plus, si un point limite  $\hat{x}$  de  $\{x_k\}$  satisfait la LICQ, alors les conditions KKT tiennent en  $\hat{x}$ .*

## Preuve

Par simplicité, supposons qu'il n'y a que des contraintes d'inégalité  $c = c_{\mathcal{I}}$  (le résultat peut s'étendre en présence de contraintes d'égalité).

Soit  $\hat{x}$  un point d'accumulation de  $\{x_k\}$ , et soit  $\{x_{k_l}\}$  une sous-séquence convergente vers  $\hat{x}$ .

Comme  $\mu_k \rightarrow 0$ , l'erreur  $E$  tend aussi vers 0 et dès lors,  $c_{k_l} - s_{k_l} \rightarrow 0$ . Par continuité,  $c(\hat{x}) \geq 0$ , et  $s_{k_l} \rightarrow c(\hat{x})$ .

Considérons l'ensemble actif en  $\hat{x}$ ,  $\mathcal{A}(\hat{x}) = \{i \mid c_i(\hat{x}) = 0\}$ .

Pour  $i \notin \mathcal{A}(\hat{x})$ ,  $c_i(\hat{x}) > 0$ , et par la complémentarité,  $(z_{k_l})_i \rightarrow 0$ .

## Preuve (suite)

Comme  $E$  tend vers 0,  $\nabla f(x_{k_l}) - J(x_{k_l})^T z_{k_l} \rightarrow 0$ , et nous avons

$$\nabla f(x_{k_l}) - \sum_{i \in \mathcal{A}(\hat{x})} (z_{k_l})_i \nabla c_i(x_{k_l}) \rightarrow 0.$$

Comme  $f$  et  $c_i \in C^1$ ,

$$\nabla f(x_{k_l}) \rightarrow \nabla f(\hat{x}), \quad \nabla c_i(x_{k_l}) \rightarrow \nabla c_i(\hat{x}), \quad i \in \mathcal{A}(\hat{x}).$$

Dès lors,  $\nabla f(\hat{x})$  s'écrit comme combinaison linéaire des  $\nabla c_i(\hat{x}), i \in \mathcal{A}(\hat{x})$ , qui est unique en vertu de la LICQ. Dès lors,  $\exists \hat{z}$  tel que  $z_{k_l} \rightarrow \hat{z}$ , et comme  $z_{k_l} \geq 0$ ,  $\hat{z} \geq 0$ .

Nous avons aussi alors  $c(\hat{x})^T \hat{z} = 0$ .



## Équation de Newton en présence de non-linéarité de non-convexité

Dans le cas non-linéaire non-convexe, nous n'avons pas encore établi que le système de Newton était bien définie, i.e. que la matrice multipliant  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  est non-singulière.

Notant  $\Sigma = S^{-1}Z$ , remarquons que nous pouvons réécrire le système sous la forme symétrique

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x, s, y, z) & 0 & J_{\mathcal{E}}^T(x) & J_{\mathcal{I}}^T(x) \\ 0 & \Sigma & 0 & -I \\ J_{\mathcal{E}}(x) & 0 & 0 & 0 \\ J_{\mathcal{I}}(x) & -I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ -\Delta y \\ -\Delta z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}^T(x)y - J_{\mathcal{I}}^T(x)z \\ z - \mu_k S^{-1} \mathbf{e} \\ c_{\mathcal{E}}(x) \\ c_{\mathcal{I}}(x) - s \end{pmatrix}$$

## Solution numérique du système de Newton

Commençons par éliminer  $\Delta s$

$$\Sigma \Delta s + \Delta z = \mu_k S^{-1} \mathbf{e} - z,$$

ou

$$\Delta s = -\Sigma^{-1} \Delta z + \mu_k \Sigma^{-1} S^{-1} \mathbf{e} - \Sigma^{-1} z = -\Sigma^{-1} \Delta z + \mu_k Z^{-1} \mathbf{e} - s,$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x, s, y, z) & J_{\mathcal{E}}^T(x) & J_{\mathcal{I}}^T(x) \\ J_{\mathcal{E}}(x) & 0 & 0 \\ J_{\mathcal{I}}(x) & 0 & -\Sigma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta y \\ -\Delta z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}^T(x)y - J_{\mathcal{I}}^T(x)z \\ c_{\mathcal{E}}(x) \\ c_{\mathcal{I}}(x) - \mu_k Z^{-1} \mathbf{e} \end{pmatrix}$$



# Solution numérique du système de Newton

Il est encore possible d'éliminer  $\Delta z$  pour obtenir la matrice de coefficients

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x, s, y, z) + J_{\mathcal{I}}^T(x) \Sigma J_{\mathcal{I}}(x) & J_{\mathcal{E}}^T(x) \\ J_{\mathcal{E}}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Bien que le système linéaire devienne généralement mal conditionné comme  $\mu_k \rightarrow 0$ , les directions de recherche peuvent généralement être calculées avec précision. Le choix de la technique de résolution doit cependant être adaptée (voir la discussion dans Nocedal et Wright).

## Mise à jour du paramètre barrière

On doit avoir  $\mu_k \rightarrow 0$ .

- décroissance trop lente : beaucoup d'itérations
- décroissance trop rapide :  $s$  ou  $z$  peuvent approcher zéro prématurément, ralentissant le progrès de l'itération

Schéma de Fiacco-McCormick :

$$\mu_{k+1} = \sigma_k \mu_k, \quad \sigma_k \in (0, 1)$$

Préférable de laisser à  $\sigma_k$  de prendre deux valeurs ou plus, avec  $\sigma_k$  petit quand les plus récentes itérations ont mené à des progrès significatifs vers la solution. On peut aussi prendre  $\sigma_k \rightarrow 0$  à proximité de la solution et faire tendre  $\tau$  vers 1.

Peut être sensible au point initial, à la valeur initiale du paramètre barrière, et à l'échelle du problème.

# Mise à jour du paramètre barrière : stratégies adaptatives

Varier  $\mu$  à chaque itération en fonction du progrès de l'algorithme.

Exemple de choix :

$$\mu_{k+1} = \sigma_k \frac{s_k^T z_k}{m},$$

et (LOQO)

$$\sigma_k = 0.1 \min \left( 0.05 \frac{1 - \xi_k}{\xi_k}, 2 \right)^3$$

avec

$$\xi_k = \frac{\min_i (s_k)_i (z_k)_i}{s_k^T z_k / m}.$$