IFT 3515
Fonctions à une variable
Méthode de Newton

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Développement de Taylor d'ordre n

Supposons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^n$ (n fois continûment différentiable)

Théorème (Développement de Taylor d'ordre n)

Il existe un point z entre x et x_k tel que

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(x_k)}{(n-1)!}(x - x_k)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - x_k)^n \end{aligned}$$

Approximation quadratique

Hypothèse : au point d'évaluation x_k, il est possible d'évaluer $f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f''(x_k)$, et de plus $f''(x_k) \neq 0$.

Étant donné un point d'évaluation x_k, considérons l'approximation quadratique de f autour de x_k

$$m(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2.$$

Le développement de Taylor d'ordre 2 nous donne

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(z)}{2}(x - x_k)^2.$$

avec $z \in [x_k, x]$ si $x \geq x_k$, $z \in [x, x_k]$ sinon. De plus,

$$m(x_k) = f(x_k).$$

Dérivées du modèle

Nous avons

$$m'(x_k) = f'(x_k)$$

et

$$m''(x_k) = \frac{f''(x_k)}{2} \left. \frac{d^2}{dx^2} \right|_{x=x_k} (x - x_k)^2 = \frac{f''(x_k)}{2} 2 = f''(x_k)$$

Le modèle m et la fonction f coïncident jusqu'à l'ordre 2 en x_k.

m est vu comme une approximation quadratique de f en x_k

Il est facile de minimiser le modèle en annulant sa dérivée. Si $f''(x_k) \neq 0$, nous pouvons écrire

$$m'(x) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à définir le nouvel itéré comme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Théorème (Convergence de la méthode de Newton)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^3$. *Supposons que* x^* *satisfait les conditions* $f'(x^*) = 0$ *et* $f''(x^*) \neq 0$. *Si* x_0 *(le point initial) est choisi suffisamment près de* x^*, *alors la suite des points* $\{x_k\}$ *générés par la méthode de Newton converge vers* x^* *avec un ordre de convergence d'au moins 2.*

Méthode de Newton

Démonstration.

Soient $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tels que $|f''(x^*)| < k_1$ et $|f'(x^*)| > k_2$. Par continuité de f'' et de f', il existe un scalaire $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon_1) := \{\xi \mid |\xi - x^*| < \epsilon_1\}$, $|f''(\xi)| < k_1$ et
$|f'(\xi)| > k_2$.

Comme $f(x^*) = 0$, on peut réécrire la récurrence de Newton comme

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(x_k) - f(x^*)}{f'(x_k)}$$

ou encore

$$x_{k+1} - x^* = \frac{f'(x_k)(x_k - x^*) - f(x_k) + f(x^*)}{f'(x_k)}$$

□

Méthode de Newton

Démonstration.

Du développement de Taylor d'ordre 2, appliqué à f, $\exists\gamma$ entre x^* et x_k tel que

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x^* - x_k)^2$$

d'où

$$f(x^*) - f(x_k) + f'(x_k)(x_k - x^*) = \frac{f''(\gamma)}{2!}(x^* - x_k)^2$$

et donc on peut remplacer le numérateur dans l'expression précédente pour obtenir

$$x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\gamma)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

Méthode de Newton

Démonstration.

Il s'ensuit
$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{1}{2}\frac{|f''(\gamma)|}{|f'(x_k)|}(x^* - x_k)^2$$

Posons
$$\epsilon = \min\left\{\epsilon_1, \frac{2k_2}{k_1}\right\}$$

Soit $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$. Si $|x_k - x^*| < \epsilon$, $x_k \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon_1)$, et donc
$$|f''(x_k)| < k_1 \quad |f'(x_k)| > k_2.$$

De plus, alors $\exists \gamma \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon_1)$ tel que
$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\gamma)}{2}(x^* - x_k)^2.$$
et $|f''(\gamma)| < k_1,\ |f'(\gamma)| > k_2.$

Méthode de Newton

Démonstration.

Il en découle

$$|x_{k+1} - x^*| < \frac{1}{2}\frac{k_1}{k_2}(x^* - x_k)^2.$$

De plus, par hypothèse,

$$|x_k - x^*| < \epsilon \leq \frac{2k_2}{k_1}.$$

Par conséquent

$$|x_k - x^*|\frac{k_1}{2k_2} < 1$$

et

$$|x_{k+1} - x^*| < |x_k - x^*|$$

et la méthode converge. $\square$

Méthode de Newton

Démonstration.

De plus, la méthode est au moins d'ordre 2 puisque

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{(x_k - x^*)^2} = \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2}.$$

$\square$

Note : l'hypothèse $f''(x^*) \neq 0$ assure que x^* est un maximun ou un minimum de f, et qu'il est possible d'utiliser un $k_2 \neq 0$.

Méthode de Newton : recherche de zéro

La méthode de Newton est également utilisée pour déterminer un point où la fonction s'annule.

Supposons que nous cherchions une racine de la fonction $g(x) \in C^1$. Par analogie aux précédents développements, et en se rappelant que le minimum correspond à un point où la dérivée s'annule, la récurrence s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$$

ou encore

$$g'(x_k) = \frac{g(x_k) - 0}{x_k - x_{k+1}}$$

Interprétation géométrique : x_{k+1} est choisi de telle sorte que de la droite passant par les points $(x_k, g(x_k))$ et $(x_{k+1}, 0)$ a pour pente $g'(x_k)$, celle de g au point x_k.

Méthode de la position fausse

Hypothèses : au point d'évaluation x_k, il est possible d'évaluer $f(x_k)$ et $f'(x_k)$.

Étant donné un point d'évaluation x_k, considérons l'approximation quadratique suivante de f en x_k, ne nécessitant pas la connaissance de $f''(x_k)$:

$$m(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}\frac{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)}{x_{k-1} - x_k}(x - x_k)^2$$

En d'autres termes, le modèle est construit comme la méthode de Newton, mais en remplaçant la dérivée seconde $f''(x_k)$ par $\frac{f'(x_{k-1})-f'(x_k)}{x_{k-1}-x_k}$.

Propriétés

Nous avons

1. $m(x_k) = f(x_k)$
2. $m'(x_k) = f'(x_k)$
3. $m'(x_{k-1}) = f'(x_k) + f'(x_{k-1}) - f'(x_k) = f'(x_{k-1})$

Comme pour la méthode de Newton, on va chercher un itéré annulant la dérivée du modèle, celle-ci coïncidant à la dérivée de la fonction à cet itéré, soit

$$0 = m'(x_{k+1}) = f'(x_k) + \frac{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)}{x_{k-1} - x_k}(x_{k+1} - x_k)$$

d'où

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_{k-1} - x_k}{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)} f'(x_k)$$

Convergence

Théorème

Soit $f \in C^3$. Supposons que x^* satisfait les conditions $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \neq 0$. Si x_0 et x_1 (les points initiaux) sont choisis suffisamment près de x^*, alors la suite des points $\{x_k\}$ générés par la méthode de la fausse position converge vers x^* avec un ordre de convergence égal à $\tau \approx 1,618$ (le nombre d'or).

Démonstration.

Admis. □

Comme pour la méthode de Newton, la méthode peut être adaptée pour la recherche d'un zéro d'une fonction, et souffre des mêmes limitations de convergence locale.

La vitesse de convergence est moindre. C'est le prix à payer de ne pas calculer la dérivée seconde.