# ABC坐标系下电压方程的推导

首先，设永磁同步电机内部的相量图如下图所示。下图中，abc为电机各相定子绕组的轴线，也是各相定子绕组产生的磁场的正反向。α与a轴重合，d轴在0时刻与定子a轴重合。ωr为转子旋转的电角速度，θ为转子与定子a相轴线之间的电角度。



永磁同步电机在abc坐标系下的的定子电压方程如下所示。



上式中，R为定子电阻，ψabc为定子各相绕组铰链的磁链瞬时值，其表达式为。



上式中，L为定子电流对应的电感矩阵，其表达式为：



其中，Laa、Lbb、Lcc为各相绕组的自感，Lab、Lac、Lca、Lba、Lca、Lcb为各相绕组之间的互感。且有

Lab=Lba Lac=Lca Lbc=Lcb

由参考文献[1]的推导可知，自感可以表示为：



各相绕组间的互感可以表示为：



上面两式中，Lsl是磁力线通过定子铁芯的槽之间的气隙闭合所导致的漏感。Lml是磁力线通过定子铁芯端部之间的气隙闭合所导致的漏感。现在假定永磁同步电机转子d轴与A相绕组轴线重合时，A相绕组的自感为Lsl+Laad，当转子q轴与A相绕组重合时A相自感为Lsl+Laaq，即：



可以算得：



将上式代入前面的自感与漏感的表达式中可得：





将上面两式代入ψsa、ψsb、ψsc的表达式。可得：



将ia+ib+ic=0的约束条件代入上式，得到：



将上式代入电压方程的表达式，即得abc坐标系下永磁同步电机的电压方程。

# 坐标变换方程的选取

## 等功率变换

3s->2r变换方程：





2s->2r变换方程如下所示：





3s->2s变换方程





三相电压变换结果：





## 等矢量变换

3s->2r变换方程：





2s->2r变换方程如下所示：





3s->2s变换方程





三相电压变换结果：





## 两相坐标系下任意角度旋转变换

### 推导

现有一矢量，V1的模值为*Vm*，相角为。其作Park变换后的矢量为：



由上式中可以得出以下结论：一个矢量做Park变换，就是将其相角往后旋转γ角度。

### 应用-三相线电压变换为三相相电压

电机控制中，采样电路通常采的三相线电压，做控制需要三相相电压（或其等效2相电压）。可以运用上面的结论，通过坐标变换将线电压向后旋转30°，并把幅值除以即得到相电压。

三相相电压在αβ坐标系中的表达式为（应用等功率变换）：



三相线电压在αβ坐标系中的表达式为：



可以通过下面的坐标变换公式将线电压变换成相电压：



再考虑三相*Vab+Vbc+Vca=0*的约束，则得：



# dq与αβ坐标系下电压方程的推导

根据dq变换公式，有



将前面ψsa、ψsb、ψsc的表达式代入上式，得到：



设



那么，ψsd、ψsq的公式变为：



由dq变换方程，Ud、Uq的表达式为：

将ψsa、ψsb、ψsc的表达式代入上式，并且注意不要混淆下面两个运算的顺序。



经过整理后可得dq轴的电压方程为：



根据αβ变换方程，αβ轴下的电压方程可表示为：



将Ud、Uq的表达式代入上式，并作一定的整理，可得：



设：



其中p为微分算子，那么αβ坐标系下的电压方程可以写为：



上式中包含展开的微分项，如果不展开微分项，那么αβ坐标系下的电压方程还可以写为：



需要指出，在一些文献中，将αβ轴的电压方程写成如下形式，



这是一种不严谨的写法。

## 功率与转矩方程

永磁同步电机的输入功率为：



上式中，i0是电机的零序电流。式中第一项是电机的铜损，第二项是电机定子电感的瞬时功率，第三项是定子电流作用在电机的反电动势上产生的功率，是定子通过电磁耦合传递到转子上去的功率，电磁转矩由这一部分功率产生。电机的电磁转矩为：



上式中ωm是机械转速，式中第一项是磁阻转矩，对于隐极电机，没有这一项。电磁功率还可以表示成如下形式。



[1] 高景德，等. 交流电机及其系统的分析 [M]. 北京：清华大学出版社，1993.

[2] 李永东，等. 交流电机数字控制系统 [M]. 北京：机械工业出版社，2017.

# 永磁同步电机高频注入原理

## 正弦波注入

在定子电压中叠加高频电压，永磁同步电机的电压方程变为：

|  |  |
| --- | --- |
| *Vsdh*、*Vsqh*：dq轴上的注入电压。  *isdh*、*isqh*：dq轴上的高频响应电流。 | (4-1) |

上式中忽略了电压方程中的耦合项，因为耦合项中的频率值为*ωr*，而*ωr*相对于高频注入频率很小，因此耦合项可以忽略。上式中的*Vsdh*、*Vsqh*指的是真实dq轴上的高频电压，*isdh*、*isqh*也是指的是真实dq轴上的高频电流。考虑到观测的dq轴不一定准确，因此不能直接用式（4-1）计算高频响应。而应该作一定折算。

假设观测的dq轴与真实dq轴之间的角度误差为，即：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-2) |

那么假设在观测坐标系的d轴注入电压*Vsdh*，q轴不注入电压。那么可以推得在观测坐标系上，看到的响应电流为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-3) |

上式中*R(θerr)*为坐标变换方程，将电压电流矢量从观测坐标系变换到真实的dq轴坐标系。*R(θerr)*的表达式为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-4) |

*Z*为PMSM在高频作用下的阻抗矩阵，由式（4-1）得到，其表达式为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-5) |

将（4-4）和（4-5）代入（4-3）得到高频电流的表达式为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-6) |

上式中*Zavg*是*Zd*、*Zq*的平均值，*Zdiff*是*Zd*、*Zq*的差值。从上式可以看出，永磁同步电机*Zdiff*不为0时上式才能包含观测误差*θerr*的量。即永磁同步电机表现出凸极性才能计算出观测误差。

注入电压的表达式为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-7) |

将注入电压的表达式代入高频电流的表达式，并且将高频电流的表达式展开，忽略分母中的电阻项（因为高频下电阻要比电感小得多）。得到高频电流的表达式：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-8) |

由上面高频电流的表达式可以看出，*isqh*的幅值大小与观测误差*θerr*成正比，并且符号相反。因此拿*isqh*去做PI控制即可实现观测误差为0。

这就是正弦波高频注入的原理。

## 方波注入

方波注入的原理为：在*d*轴注入高频方波电压，所激起的高频电流不变换到*dq*轴，而是变换到*αβ*轴。在*αβ*轴的高频电流的表达式为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-9) |

注意上式中第一个坐标变换矩阵不是用的*θerr*，而是用的转子角度*θ*。注入方波电压的表达式为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-10) |

将方波的表达式代入*isαh*和*isβh*的表达式，并且*isαh*和*isβh*取微分（本次采样与前一次采样的差值）即可得到高频电流的微分为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-11) |

上式中*Ts*是电流采样周期，上式的物理含义为：在高频电压的作用下高频电流*isαh*和*isβh*的在一个采样周期内的增量，就是电压乘以时间再除以电感，上式就是一个伏秒平衡方程。

假定在稳态下，观测误差接近0，则上式中sin*θerr*相关的量都是0，那么可以得到，在稳态下*αβ*轴高频电流的变化量约为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-12) |

由上式可以看出，在稳态下将*αβ*轴高频电流的变化量取atan函数即可得到当前转子位置，即：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4-13) |

由于电流采样纹波的影响，由上式算出来的转子角度会存在纹波，因此不能直接用于控制，因此一般用上式的转子角度作为锁相环给定，通过下面的结构锁相得到转子角度和转子速度。



Figure 1

经过上图锁相之后的转子角度会干净得多。

以上就是永磁同步电机方波高频注入的原理。