Løsningsforslag til ET-ALA eksamen (Q1-2012)

OPGAVE 1.

Lad 3 invertible 2×2 matricer, A, B og C være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Beregn løsningerne, både algebraisk og numerisk, til følgende fem matrixligninger

$$AX = B, \qquad A^2X + B = \mathbf{0}, \qquad AXB = C, \qquad AX + BX = C, \qquad ACX = \mathbf{0}$$

OPGAVE 1. løsning

Ligningern løses ved brug af de gængse regneregler for matricer da det vides at A, B og C er invertible. Numeriske resultater beregnes i Matlab

$$I: \qquad AX = B \iff X = A^{-1}B, \qquad X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$II: \qquad A^2X + B = \mathbf{0} \iff X = -(A^2)^{-1}B, \qquad X = \begin{bmatrix} -8.5 & -5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Hvor det vides at A^2 er invertibel da A er invertibel.

$$III: \qquad AXB = C \iff X = A^{-1}CB^{-1}, \qquad X = \begin{bmatrix} 2.5 & -4.5 \\ -1.75 & 3.25 \end{bmatrix}$$

$$IV: \qquad AX + BX = C \iff X = (A+B)^{-1}C, \qquad X = \begin{bmatrix} 2 & -1.2 \\ -0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Hvor der er brugt at matricen $A + B$ er invertibel med de givne tal.

$$V: \qquad ACX = \mathbf{0} \iff X = (AC)^{-1}\mathbf{0}, \qquad X = \mathbf{0}$$

OPGAVE 2.
I denne opgave tages der udgangspunkt i case 5: Error-Detecting and Error-Correcting codes. Lad en vektorligning være givet ved

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor alle vektorer er elementer i $\mathbb{Z}_2^4$ og x_1, x_2 og x_3 er elementer i $\mathbb{Z}_2$.

1. Bestem samtlige løsninger til vektorligningen.

OPGAVE 2. løsning
Af opgaven ses det umiddelbart at $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 0$ er en løsning. Spørgsmålet reducerer dermed til at afgøre om der er andre løsninger. Hvis totalmatricen opskrives og reduceres med $\mathbb{Z}_2$ regnereglerne fås

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Da der i ovenstående totalmatrix ikke er frie variable, svarende til at de tre vektorer er lineært uafhængige, er der dermed kun den ene løsning.

$$\underline{\underline{x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0}}$$

OPGAVE 3.
Differensligningen $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k)$ har den generelle løsning $\mathbf{x}(k) = A^k\mathbf{x}(0)$. Lad en 3×3 matrix A have egenværdierne $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 0.7$ med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$.

1. Redegør for opførslen af $\mathbf{x}(k)$ i grænsen $k \to \infty$ for en vilkårlig vektor $\mathbf{x}(0)$.

OPGAVE 3. løsning
Da A er en 3×3 matrix med 3 forskellige egenværdier udgør egenvektorerne en basis for $\mathbb{R}^3$. En vilkårlig vektor $\mathbf{x}(0)$ kan derfor opløses som en linearkombination af egenvektorerne for A.

$$\mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Hvor c_1, c_2 og c_3 er de nødvendige vægte. Når A^k ganges på $\mathbf{x}(0)$ fås

$$\begin{aligned} A^k\mathbf{x}(0) &= A^k(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) \\ &= A^k c_1\mathbf{v}_1 + A^k c_2\mathbf{v}_2 + A^k c_3\mathbf{v}_3 \\ &= c_1 A^k\mathbf{v}_1 + c_2 A^k\mathbf{v}_2 + c_3 A^k\mathbf{v}_3 \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^k\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_1^k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty}\lambda_2^k = 1, \qquad \lim_{k\to\infty}\lambda_3^k = 0$$

Afhænger $A^k\mathbf{x}(0)$ således af vægtene c_1, c_2 og c_3. Hvis $\mathbf{x}(0)$ har en komponent i $\mathbf{v}_1$'s retning ($c_1 \neq 0$) vil $\mathbf{x}(k)$ divergere. Hvis $c_1 = 0$ og $c_2 \neq 0$ vil $\mathbf{x}(k)$ gå mod en konstant værdi: $\mathbf{x}(\infty) = c_2\mathbf{v}_2$. Hvis $\mathbf{x}(0)$ er parallel med $\mathbf{v}_3$, dvs $c_1 = c_2 = 0$ da er $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$.

OPGAVE 4.
Antag at der er målt sammenhørende værdier af tid t og output y for et system som angivet i nedenstående tabel

t	y
0	1
2	6
5	17
6	19

Det antages at systemet kan tilpasses en lineær model af formen $y_1(t) = \beta_0 + \beta_2 t^2$ eller $y_2(t) = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2$.

1. Bestem modelparametrene for de to modeller.
2. Angiv, med begrundelse, hvilken af de to modeller der passer bedst med de målte data.

OPGAVE 4. løsning
For y_1 modellen bliver designmatrix, X_1, og observationsvektor, $\mathbf{y}$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 25 \\ 1 & 36 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Modelparametrene beregnes med $\boldsymbol{\beta} = (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T \mathbf{y}$. Beregningen udført i Matlab giver

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2.7380 \\ 0.4930 \end{bmatrix}$$

For y_2 modellen fås designmatricen X_2. Observationsvektoren er den samme i begge modeller

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 5 & 25 \\ 6 & 36 \end{bmatrix}$$

Modelparametrene bliver

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 3.2383 \\ 0.0015 \end{bmatrix}$$

For at afgøre hvilken model der fitter bedst beregnes $||\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}||$ for de to modeller. For y_1 modellen fås

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = X_1 \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2.7380 \\ 4.7102 \\ 15.0641 \\ 20.4877 \end{bmatrix}$$

og

$$||\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}_1|| = 3.2627$$

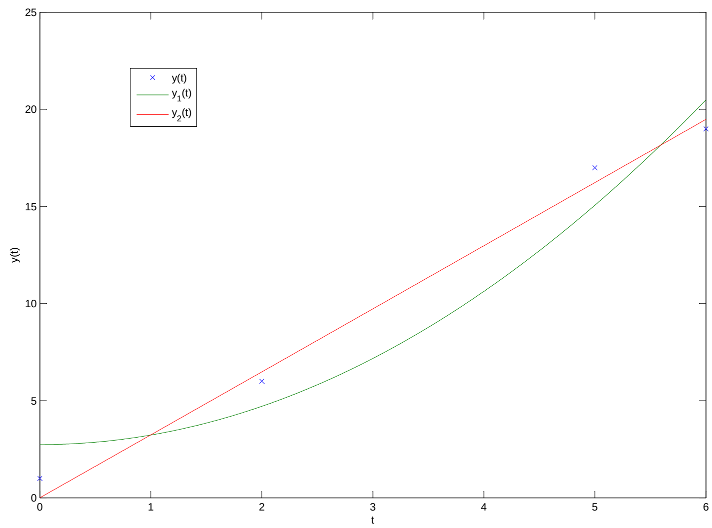
Tilsvarende fås for y_2 modellen

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = X_2\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.4825 \\ 16.2281 \\ 19.4825 \end{bmatrix}$$

med

$$||\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}_2|| = 1.4358$$

Heraf ses at y_2 modellen fitter data bedst. Plottes resultaterne fås følgende graf



OPGAVE 5.
Lad det indre produkt for matricer i $\mathbb{R}^{m\times n}$ være defineret som

$$< A, B >= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

To matricer i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Beregn $< A, B >$.

A og B udspænder et 2-dimensionelt vektorrum, $\mathbb{H}$.

2. Beregn en ortogonal basis for $\mathbb{H}$.

OPGAVE 5. løsning
Skrives dobbeltsummen ud ses udtrykket at blive

$$< A, B >= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Som med de givne matricer udregnes til

$$< A, B >= 24$$

En ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ kan beregnes med Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= A \\ \mathbf{v}_2 &= B - \frac{< B, \mathbf{v}_1 >}{< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >}\mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

Da $< A, B >=< B, A >$ og $< A, A >= 30$ fås

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \frac{24}{30}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.4 \\ 1.6 & -2.2 \end{bmatrix}$$

OPGAVE 6.
Lad en matrix A og en vektor $\mathbf{b}$ være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 6 & -6 & 5 \\ 9 & -9 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1. Redegør for at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har en løsning.
2. Beregn mindste-kvadraters løsningen ved brug af den pseudoinverse matrix.

OPGAVE 6. løsning
Når totalmatricen opskrives og rækkereduceres fås

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 1 \\ 6 & -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & 10 & 4 \end{array}\right] \sim\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Hvoraf ligningssystemet ses at være inkonsistent.

For at beregne den pseudoinverse matrix beregnes SVD'en af A i Matlab

```
>> [U,S,V]=svd(A)

U =

   -0.2928    0.5063   -0.8111
   -0.4950   -0.8061   -0.3244
   -0.8181    0.3065    0.4867

S =

   19.7801         0         0
         0    1.3222         0
         0         0    0.0000

V =

   -0.5668   -0.4228   -0.7071
    0.5668    0.4228   -0.7071
   -0.5979    0.8016    0.0000
```

Heraf ses, at der kun er to singulære værdier forskellige fra nul.

Den pseudoinverse matrix er givet ved $A^+ = V_r D^{-1} U_r^T$ hvor V_r, D og U_r er defineret i formel 9 i kapitel 7.4. Disse matricer bliver

$$U_r = \begin{bmatrix} -0.2928 & 0.5063 \\ -0.4950 & -0.8061 \\ -0.8181 & 0.3065 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 19.7801 & 0 \\ 0 & 1.3222 \end{bmatrix}, \qquad V_r = \begin{bmatrix} -0.5668 & -0.4228 \\ 0.5668 & 0.4228 \\ -0.5979 & 0.8016 \end{bmatrix}$$

Heraf beregnes

$$A^+ = \begin{bmatrix} -0.1535 & 0.2719 & -0.0746 \\ 0.1535 & -0.2719 & 0.0746 \\ 0.3158 & -0.4737 & 0.2105 \end{bmatrix}$$

og

$$\hat{\mathbf{x}} = A^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0921 \\ -0.0921 \\ 0.2105 \end{bmatrix}$$

Denne løsning kan sammenholdes med det ønskede $\mathbf{b}$.

$$\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.3947 \\ 2.1579 \\ 3.7632 \end{bmatrix}$$