
FoxTrot
by Bill Amend
AAAA! I CAN'T DO THESE MATH PROBLEMS! WHY AM I SO STUPID?!
"IF 2X + Y = 60 AND X + 2Y = 75, SOLVE FOR X AND Y." HOW THE HECK DO I FIGURE THAT OUT?!
IF TWO SHIRTS AND A SWEATER COSTS $60, AND A SHIRT AND TWO SWEATERS COSTS $75, WHAT DOES EACH ITEM COST?
THE SHIRTS ARE $15 AND THE SWEATERS ARE $30. DUH.
YOU AREN'T STUPID, PAIGE, JUST WEIRD.
COME BACK! YOU STILL HAVEN'T TOLD ME HOW TO SOLVE THE PROBLEM!
www.foxtrot.com
©2009 Bill Amend / Dist. by Universal Press Syndicate
1-25
AMEND

SW2/ETALA
ANVENDT LINEÆR ALGEBRA

LARS MANDRUP
LEKTOR, CAND.SCIENT., PHD

SW2/ETALA - INTRODUKTION

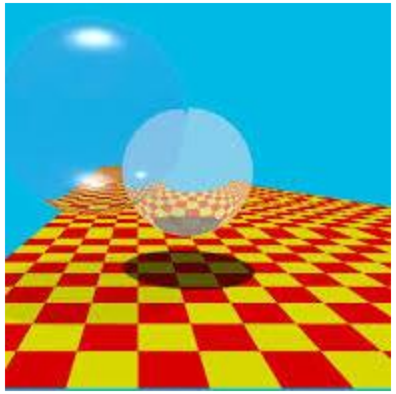
Matematisk grund-introduktion til Lineær Algebra:

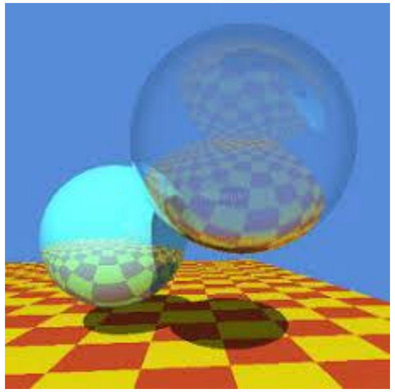
- Definitioner
- Metoder
- Notation
- Matematisk abstraktion og argumentation
- Matematisk bevisførelse
- Anvendelse

SW2/ETALA - INTRODUKTION

Lineære systemer:

- Kredsløbsanalyse/-design
- Netværksanalyse/-design
- Signal-/Billedbehandling
- Computergrafik
- Datahåndtering
- CAD/CAM/FEM/.....
- Økonomi
- Produktionstyring
- …





SW2/ETALA - INTRODUKTION

Lineære systemer:

- ➢ Ofte meget store systemer/datamængder
- ➢ Computer-beregning v.hj.a. metoder fra lineær algebra
- ➢ MEN: Afrundingsfejl kan have store konsekvenser
- ➢ DERFOR: Vi skal lære metoderne til bunds (og "i hånden") for at kunne håndtere computerberegninger!!!
- ➢ Metoder læres på overskuelige systemer (2-4 dimensioner)

SW2/ETALA - INTRODUKTION

Undervisning:

- 2 timer forelæsning:
  - Fokus på begreber og metoder
  - Eksempler live
  - Refleksionsspørgsmål/Quiz'er
- 2 timer opgaveregning:
  - Metoderne/begreberne læres
  - Argumentation skærpes
- Anvendelse:
  - Indledende eksempler i start af hvert kapitel
  - 4 cases til selvstudium (en del af pensum)

SW2/ETALA - INTRODUKTION

Mål:

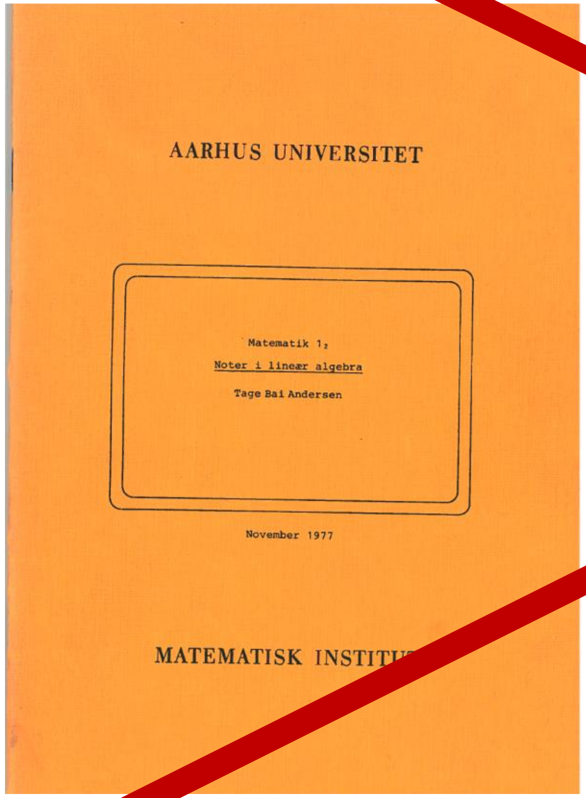
- Forstå: Begreber, metoder, notation
- Anvende: Matematiske metoder og beregninger
- Argumentation: Argumentere matematisk
- Abstraktion: Kunne udvide/overføre begreber og metoder til store systemer indenfor forskellige anvendelsesområder

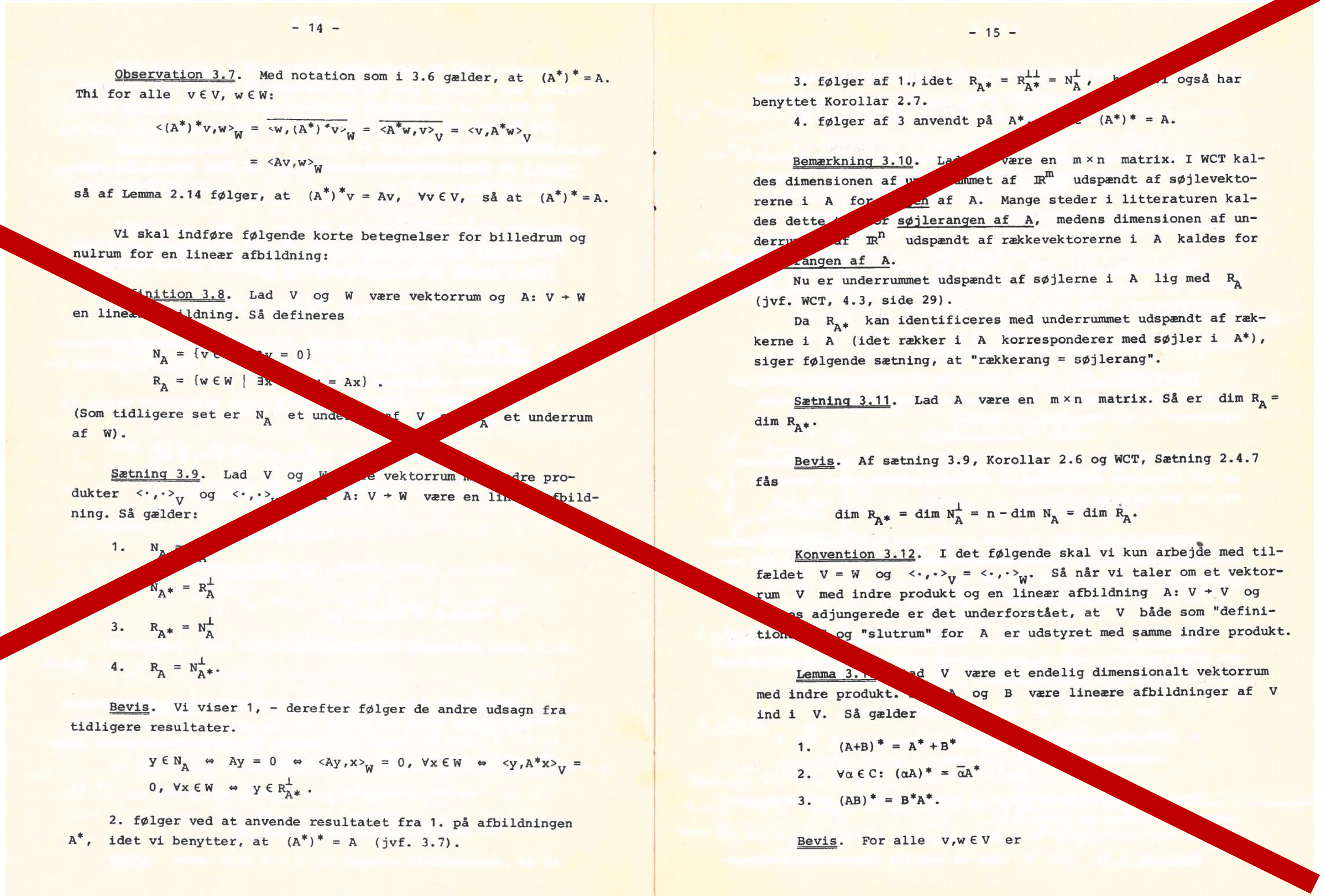
Eksamen:

- 3 timer skriftlig:
  - Definitions-/begrebsopgaver
  - Regneopgaver
  - Argumentationsopgaver

SW2/ETALA - INTRODUKTION

Bog[illegible]





- 14 -

Observation 3.7. Med notation som i 3.6 gælder, at $(A^*)^* = A$. Thi for alle $v \in V$, $w \in W$:

$$<(A^*)^*v,w>_W = \overline{<w,(A^*)^*v>_W} = \overline{<A^*w,v>_V} = <v,A^*w>_V$$
$$= <Av,w>_W$$

så af Lemma 2.14 følger, at $(A^*)^*v = Av$, $\forall v \in V$, så at $(A^*)^* = A$.

Vi skal indføre følgende korte betegnelser for billedrum og nulrum for en lineær afbildning:

[illegible]inition 3.8. Lad V og W være vektorrum og $A: V \to W$ en linea[illegible]ildning. Så defineres

$$N_A = \{v [illegible] v = 0\}$$
$$R_A = \{w \in W \mid \exists x [illegible] = Ax\} .$$

(Som tidligere set er N_A et unde[illegible]f V [illegible] A et underrum af W).

Sætning 3.9. Lad V og W [illegible]e vektorrum [illegible]dre produkter $<\cdot,\cdot>_V$ og $<\cdot,\cdot>$[illegible] $A: V \to W$ være en lin[illegible]fbildning. Så gælder:

1. N_A [illegible]
2. [illegible] $N_{A^*} = R_A^{\perp}$
3. $R_{A^*} = N_A^{\perp}$
4. $R_A = N_{A^*}^{\perp}$.

Bevis. Vi viser 1, - derefter følger de andre udsagn fra tidligere resultater.

$$y \in N_A \Leftrightarrow Ay = 0 \Leftrightarrow <Ay,x>_W = 0, \forall x \in W \Leftrightarrow <y,A^*x>_V =$$
$$0, \forall x \in W \Leftrightarrow y \in R_{A^*}^{\perp} .$$

2. følger ved at anvende resultatet fra 1. på afbildningen A^*, idet vi benytter, at $(A^*)^* = A$ (jvf. 3.7).

- 15 -

3. følger af 1., idet $R_{A^*} = R_{A^*}^{\perp\perp} = N_A^{\perp}$, h[illegible] også har benyttet Korollar 2.7.

4. følger af 3 anvendt på A^*, [illegible] $(A^*)^* = A$.

Bemærkning 3.10. La[illegible] være en $m \times n$ matrix. I WCT kaldes dimensionen af u[illegible]mmet af $\mathbb{R}^m$ udspændt af søjlevektorerne i A for[illegible]en af A. Mange steder i litteraturen kaldes dette [illegible]r søjlerangen af A, medens dimensionen af underr[illegible]af $\mathbb{R}^n$ udspændt af rækkevektorerne i A kaldes for [illegible]angen af A.

Nu er underrummet udspændt af søjlerne i A lig med R_A (jvf. WCT, 4.3, side 29).

Da R_{A^*} kan identificeres med underrummet udspændt af rækkerne i A (idet rækker i A korresponderer med søjler i A^*), siger følgende sætning, at "rækkerang = søjlerang".

Sætning 3.11. Lad A være en $m \times n$ matrix. Så er $\dim R_A = \dim R_{A^*}$.

Bevis. Af sætning 3.9, Korollar 2.6 og WCT, Sætning 2.4.7 fås

$$\dim R_{A^*} = \dim N_A^{\perp} = n - \dim N_A = \dim R_A .$$

Konvention 3.12. I det følgende skal vi kun arbejde med tilfældet $V = W$ og $<\cdot,\cdot>_V = <\cdot,\cdot>_W$. Så når vi taler om et vektorrum V med indre produkt og en lineær afbildning $A: V \to V$ og [illegible]s adjungerede er det underforstået, at V både som "defini[illegible]tion[illegible]" og "slutrum" for A er udstyret med samme indre produkt.

Lemma 3.[illegible]ad V være et endelig dimensionalt vektorrum med indre produkt. [illegible] A og B være lineære afbildninger af V ind i V. Så gælder

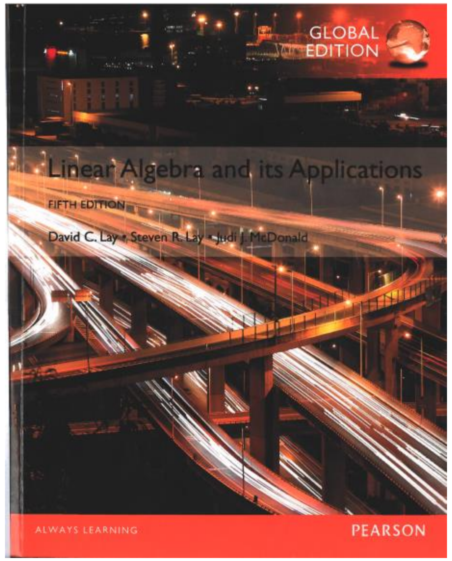
1. $(A+B)^* = A^* + B^*$
2. $\forall \alpha \in C: (\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$
3. $(AB)^* = B^*A^*$.

Bevis. For alle $v,w \in V$ er

SW2/ETALA - INTRODUKTION

Bog:

- Lay/Lay/McDonald: Linear Algebra and its Applications, Pearson (5th Ed./Global Edition)
  - Grundig og ”let” læselig
  - Mange eksempler og opgaver
  - Matematisk bevisførelse
  - Case/eksempel i start af hvert kapitel
  - Ordbog (engelsk) bagerst
  - Study guide



Blackboard:

- Kursusbeskrivelse med læringsmål
- Opslagstavle/meddelelser
- Vejledende lektionsplan for hele kurset
- Detaljeret lektionsplan en uge frem
- Løsningsforslag
- Tidligere eksamensopgaver
- Andet materiale

SW2/ETALA - INTRODUKTION

Indre produkt Echelon form Egenfunktion Hovedakse Kvadratisk form Rækkevektor Enhedsvektor
Underbestemt Pivot Ortonormal basis Potensmetode QR faktorisering Singulær værdi dekomposition
Matrix Transformation Næsten-singulær 1-til-1 Komplement Range Rækkeækvivalent Singulær matrix
Dilation Dimension Determinant Underrum Normalvektor Overbestemt Ligedannet Symmetrisk
Negativ definit Transponeret Prik produkt Positiv semidefinit Ortogonal sæt Trajectory Nulrum
Attraktor Augmenteret Rank Konsistent Singulær vektor Ikke-triviel Rækkerum Vektor Rækkeækvivalent
Diagonal matrix Blok-diagonal Begrænset optimering Lineær afhængig Søjlevektor Transponere Kommutativ
Blok-matrix Basis Cauchy-Schwartz Kontraktion Venstre multiplikation Spektral dekomposition Adjugeret
Invers matrix Invertibel Isomorf Kernel Mindste kvadrat Højre multiplikation Undermatrix Ikke-singulær
Inkonsistent Uendelig-dimensional Invarians Ledende indgang Norm Singulær værdi Triviel Domæne
Karakteristisk ligning Koefficient-matrix Konvergent Enhedsmatrix Rækkeoperation Vektorrum Skalar
Karakteristisk polynomium Cofaktor Koordinatafbildning Identitetsmatrix Trekantsmatrix Vægte Span
Cholesky faktorisering Søjle-rum Koordinatvektor Gram-Schmidt Ortogonal projektion Nulvektor Trace
Egenværdi Covariance Dynamisk system Positiv definit Strengt dominerende egenværdi Egenrum
Søjlevektor Negativ semidefinit Gaussisk elimination Lineær uafhængig Distributiv Indefinit Associativ
Egenvektor Ortogonal Diagonalværdi Ligevægtsvektor Faktorisering Reduceret echelon form Rang
Diagonaliserbar Differensligning Elementær matrix Ekspansion Ortogonal matrix Rækkeoperation