Løsningsforslag til ET-ALA eksamen (Q3-2012)

OPGAVE 1.
Bestem samtlige løsninger til den homogene matrixligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hvor A er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

OPGAVE 1. løsning
Totalmatricen opskrives og reduceres i Matlab

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.75 & 2.5 & 0 \end{array}\right]$$

Heraf ses x_3 og x_4 at være frie variable og vi får ligningerne $x_1 + 0.5x_3 + x_4 = 0$ og $x_2 + 0.75x_3 + 2.5x_4 = 0$. Disse opskrives på vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5x_3 - x_4 \\ -0.75x_3 - 2.5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.75 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

OPGAVE 2.
Lad en 2×2 matrix A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Opskriv det karakteristiske polynomium og beregn egenværdierne for A.
2. Beregn egenværdier og egenvektorer for tilfældet $a = 3$.

OPGAVE 2. løsning
Det karakteriske polynomium beregnes på følgende vis

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & 2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinanten udregnes og sættes lig med nul hvorved det karakteristiske polynomium fremkommer.

$$(a - \lambda)(2 - \lambda) - 2 \cdot 1 = \lambda^2 - (a + 2)\lambda + 2a - 2 = 0$$

Løsningen af denne 2. grads ligning er

$$\lambda = \frac{(a+2) \pm \sqrt{(-(a+2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a-2)}}{2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2 - 4a + 12}}{2}$$

Indsættes $a = 3$ fås egenværdierne $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = 1$, hvorefter egenvektorerne kan beregnes med den sædvanlige metode. Alternativt benyttes blot Matlab

```
>> A=[3 2; 1 2]
A =
     3     2
     1     2

>> [v,d]=eig(A)
v =
    0.8944   -0.7071
    0.4472    0.7071


d =
     4     0
     0     1
```

Hvoraf det ses at $\lambda_1 = 4$ har egenvektor $\mathbf{v}_1 = [2 \;\; 1]^T$ og $\lambda_2 = 1$ har egenvektor $\mathbf{v}_2 = [1 \;\; -1]^T$ (hvor egenvektorerne er skalerede til pæne tal).

OPGAVE 3.
Et sæt af 3 koblede differentialligninger er givet ved

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) &= -5x_1(t) + x_2(t) + 5x_3(t) \end{aligned}$$

Bestem den fuldstændige løsning når $\mathbf{x}(0) = [1 \;\; 2 \;\; 3]^T$.

OPGAVE 3. løsning
Det ses at ligningssystemet er af typen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Den generelle løsning til dette problem er

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$$

Hvor λ_i og $\mathbf{v}_i$ er sammenhørende egenværdier og egenvektorer for A. Disse bestemmes med Matlab (egenvektorerne er her skaleret til pæne tal).

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = 3,\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Den generelle løsning bliver da

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

For at bestemme c_1, c_2 og c_3 indsættes begyndelsesværdierne og den tilhørende totalmatrix opskrives og reduceres.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Løsningen der går gennem det opgivne punkt bliver da

$$\mathbf{x}(t) = -2e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

OPGAVE 4.
For en sensor er der målt sammenhørende værdier af tid t og output y som angivet i nedenstående tabel

t	y
0	1
1	3
2	7
3	11
4	16
5	24

Dataene ønskes tilpasset en lineær model af formen $y(t) = \beta_0 + \beta_2 t^2$.

1. Opskriv designmatricen og observationsvektoren for problemet.

2. Bestem β_0 og β_2.

OPGAVE 4. løsning
Designmatricens i'te række består at indgangene 1 og t_i^2. Observationsvektoren består af de målte data (y'erne). Ialt fås

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \\ 1 & 25 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 11 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

β_0 og β_2 bestemmes med den sædvanlige mindste kvadraters løsningsmetode fra kapitel 6, $\beta = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$. En beregning i Matlab giver

$$\beta = \begin{bmatrix} 2.2703 \\ 0.8796 \end{bmatrix}$$

Hvoraf det ses at $\beta_0 = 2.2703$ og $\beta_2 = 0.8796$.

OPGAVE 5.
Antag, at der i Matlab er blevet foretaget en SVD på en kvadratisk matrix A. Resultatet af dekomponeringen er

$$U = \begin{bmatrix} -0.5574 & 0.0445 & -0.4328 & -0.7071 \\ -0.3495 & -0.8646 & 0.3611 & 0.0000 \\ -0.5574 & 0.0445 & -0.4328 & 0.7071 \\ -0.5064 & 0.4986 & 0.7035 & 0.0000 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 8.2106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.4800 & -0.3638 & 0.7678 & -0.2182 \\ -0.4184 & -0.6913 & -0.5891 & -0.0000 \\ -0.4375 & 0.2040 & 0.0712 & 0.8729 \\ -0.6349 & 0.5900 & -0.2414 & -0.4364 \end{bmatrix}$$

Redegør for, hvad der heraf kan udledes om løsningen til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

OPGAVE 5. løsning
Af Σ matricen ses det, at A har 3 singulære værdier, der er forskellige fra nul samt 1 singulær værdi, der indenfor den angivne præcision er nul. Det betyder, at A har rang=3. Det medfører at søjlerummet af A ikke udspænder hele $\mathbb{R}^4$, men kun et 3-dimensionelt plan i det 4-dimensionelle rum. Dermed vil ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kun have løsninger hvis $\mathbf{b}$ ligger på dette plan. For alle andre valg af $\mathbf{b}$ vil ligningssystemet være inkonsistent.

OPGAVE 6.

Lad vektorrummet $C[0, \infty[$ bestå af alle kontinuerte funktioner defineret på intervallet $0 \leq x < \infty$ og lad det indre produkt mellem to vektorer f og g være givet ved

$$< f, g >= \int_0^\infty f(x)g(x)\,dx$$

Et sæt af to vektorer fra $C[0, \infty[$ er givet ved $U = \{e^{-x},\ e^{-2x}\}$. Det kan vises, at span$\{U\}$ udgør et underrum af $C[0, \infty[$.

1. Vis, at vektorerne i U ikke er ortogonale.
2. Beregn en ortogonal basis for U ved brug af Gram-Schmidt metoden.

Det oplyses at $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$.

OPGAVE 6. løsning

Ortogonaliteten af de to vektorer testes ved beregning med det angivne indre produkt

$$< e^{-x}, e^{-2x} >= \int_0^\infty e^{-x}e^{-2x}\,dx = \int_0^\infty e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^\infty = \frac{1}{3} \neq 0$$

Da det indre produkt er forskelligt fra nul er de to vektorer ikke ortogonale.

Med brug af Gram-Schmidt metoden findes følgende. Den første vektor vælges som den første i det originale sæt.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = e^{-x}$$

Den anden vektor vælges som $\mathbf{u}_2$ fratrukket projektionen på $\mathbf{u}_1$ $(= \mathbf{v}_1)$.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{< \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 >}{< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >}\mathbf{v}_1$$

Ovenfor blev $< \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 >$ beregnet til $1/3$. Tilsvarende beregnes $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >$ som

$$< e^{-x}, e^{-x} >= \int_0^\infty e^{-x}e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

Hvorefter $\mathbf{v}_2$ er givet ved

$$\mathbf{v}_2 = e^{-2x} - \frac{2}{3}e^{-x}$$