Der vil ved bedømmelsen af opgaverne blive lagt vægt på, at den benyttede fremgangsmåde tydeligt fremgår af besvarelsen, og at svarene begrundes. Opnås resultater ved hjælp af lommeregner eller computer skal dette oplyses i besvarelsen. Ved bedømmelsen vægtes alle 6 opgaver ens.

OPGAVE 1.
Bestem samtlige løsninger til den homogene matrixligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hvor A er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

OPGAVE 2.
Lad en 2×2 matrix A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Opskriv det karakteristiske polynomium og beregn egenværdierne for A.
2. Beregn egenværdier og egenvektorer for tilfældet $a = 3$.

OPGAVE 3.
Et sæt af 3 koblede differentialligninger er givet ved

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) &= -5x_1(t) + x_2(t) + 5x_3(t) \end{aligned}$$

Bestem den fuldstændige løsning når $\mathbf{x}(0) = [1 \;\; 2 \;\; 3]^T$.

OPGAVE 4.
For en sensor er der målt sammenhørende værdier af tid t og output y som angivet i nedenstående tabel

t	y
0	1
1	3
2	7
3	11
4	16
5	24

Dataene ønskes tilpasset en lineær model af formen $y(t) = \beta_0 + \beta_2 t^2$.

1. Opskriv designmatricen og observationsvektoren for problemet.
2. Bestem β_0 og β_2.

OPGAVE 5.
Antag, at der i Matlab er blevet foretaget en SVD på en kvadratisk matrix A. Resultatet af dekomponeringen er

$$U = \begin{bmatrix} -0.5574 & 0.0445 & -0.4328 & -0.7071 \\ -0.3495 & -0.8646 & 0.3611 & 0.0000 \\ -0.5574 & 0.0445 & -0.4328 & 0.7071 \\ -0.5064 & 0.4986 & 0.7035 & 0.0000 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 8.2106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.4800 & -0.3638 & 0.7678 & -0.2182 \\ -0.4184 & -0.6913 & -0.5891 & -0.0000 \\ -0.4375 & 0.2040 & 0.0712 & 0.8729 \\ -0.6349 & 0.5900 & -0.2414 & -0.4364 \end{bmatrix}$$

Redegør for, hvad der heraf kan udledes om løsningen til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

OPGAVE 6.
Lad vektorrummet $C[0, \infty[$ bestå af alle kontinuerte funktioner defineret på intervallet $0 \leq x < \infty$ og lad det indre produkt mellem to vektorer f og g være givet ved

$$< f, g >= \int_0^\infty f(x)g(x)\, dx$$

Et sæt af to vektorer fra $C[0, \infty[$ er givet ved $U = \{e^{-x},\ e^{-2x}\}$. Det kan vises, at span$\{U\}$ udgør et underrum af $C[0, \infty[$.

1. Vis, at vektorerne i U ikke er ortogonale.
2. Beregn en ortogonal basis for U ved brug af Gram-Schmidt metoden.

Det oplyses at $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$.