Mathématiques pour la Mise à Niveau CAV

F. BEN MENA

[2025-09-04 jeu.]

Table des matières

1 Constructions fondamentales

1.1 Avant propos

Au cours de ce chapitre, seront présentés les idées qui font que les mathématiques sont avant tout un langage expressif. Il convient de se familiariser avec les formes syntaxiques, et à moindre niveau, sémantique de ce langage. L'idée est celle de mettre en avant la notion d'énoncé **bien formé** avant de se pencher sur la vérité d'un tel énoncé.

Note 1.1 Dans le cas où le sujet abordé est familier

Pour ceux qui sont familiers avec le contenu de cette partie il est est bon d'y jeter un coup d'œil pour être bien sûr que l'ensemble des concepts abordés sont bien compris.

!

1.2 Notations mathématiques et ensembles

1.2.1 Énoncés logiques et valeurs de vérité

Notre discussion commence avec le concept mathématique clé de **proposition**. Une proposition est un énoncé mathématique **bien formé** qui peut être **vrai** ou **faux**.

Exemple 1.1 Vérité de quelques propositions

- $3 > 1$ (**vrai**)
- $-2 = 5 - 7$ (**vrai**)
- $7 < 5$ (**faux**)
- Le rayon de la terre est supérieur au rayon de la lune. (**vrai**)
- Le Mot «Mathématique» commence par la lettre «G». (**faux**)

Les propositions forment des groupes à l'aide **d'opérateurs logiques**. Parmi ces derniers, les plus communs dans le langage mathématique se retrouvent dans le langage courant. Il s'agit de l'opérateur de **conjonction** **ET** et de l'opérateur de **disjonction** **OU**.

Le **ET** renvoie une proposition vraie lorsque les deux propositions combinées sont elles-mêmes vraies. Dans le cas contraire la proposition résultante de la conjonction est fausse.

Exemple 1.2 L'opérateur de conjonction : ET

- $2 + 4 = 6$ est **vrai**, $4 - 2 = 2$ est **vrai**. $(2 + 4 = 6 \textbf{ ET } 4 - 2 = 2)$ est donc **vrai**.
- $2 + 4 = 6$ est **vrai**, $2 > 6$ est **faux**. $(2 + 4 = 6 \textbf{ ET } 2 > 6)$ est donc **faux**.
- $\frac{10}{2} = 1$ est **faux**, $2^4 = 16$ est **vrai**. Ainsi, $\left(\frac{10}{2} = 1 \textbf{ ET } 2^4 = 16\right)$ est **faux**.
- $7 < 5$ est **faux**, $10 + 2 = 13$ est **faux**. Ainsi, $(7 < 5 \textbf{ ET } 10 + 2 = 13)$ est **faux**.

Le **OU** renvoie une proposition vraie pour peu que l'une au moins des deux propositions combinées soit vraie.

Exemple 1.3 L'opérateur de disjonction : OU

- $2 + 4 = 6$ est **vrai**, $4 - 2 = 2$ est **vrai**. $(2 + 4 = 6 \textbf{ OU } 4 - 2 = 2)$ est donc **vrai**.
- $2 + 4 = 6$ est **vrai**, $2 > 6$ est **faux**. $(2 + 4 = 6 \textbf{ OU } 2 > 6)$ est donc **vrai**.
- $\frac{10}{2} = 1$ est **faux**, $2^4 = 16$ est **vrai**. Ainsi, $\left(\frac{10}{2} = 1 \textbf{ OU } 2^4 = 16\right)$ est **vrai**.
- $7 < 5$ est **faux**, $10 + 2 = 13$ est **faux**. Ainsi, $(7 < 5 \textbf{ OU } 10 + 2 = 13)$ est **faux**.

Les règles des deux opérateurs sont résumées à l'aide de **tables de vérité** :

Parfois, il est commode d'utiliser des symboles pour représenter ces opérateurs logiques. L'opérateur **ET** est noté par $\wedge$, alors que l'opérateur **OU** est noté par $\vee$. L'utilisation de ces notations, bien que répandue, est **facultative**.

TABLE 1.1 Tables de vérité des opérateurs **ET** et **OU**.

A	B	A ET B	A OU B
vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	vrai
faux	vrai	faux	vrai
faux	faux	faux	faux

Exemple 1.4 Utilisation des notations spécifiques du ET et du OU

$$\underbrace{(2+2=5)}_{\text{faux}} \wedge \underbrace{(1-1=0)}_{\text{vrai}} \Rightarrow \textbf{faux}$$
$$\underbrace{(2+2=5)}_{\text{faux}} \vee \underbrace{(1-1=0)}_{\text{vrai}} \Rightarrow \textbf{vrai}$$

1.2.2 Notations mathématiques usuelles

Quelques notations mathématiques sont omniprésentes. Elles sont rappelées dans le tableau qui suit.

TABLE 1.2 Notations mathématiques usuelles

Symbole	**En quelques mots...**
$\neg a$	**non** a
$a \wedge b$	a **et** b
$a \vee b$	a **ou** b
$a \Rightarrow b$	a **implique** b
$a \Leftrightarrow b$	a **est équivalent à** b
$\forall x$	**Pour tout** x (...)
$\exists x$	**Il existe** x **tel que** (...)
$a := b$	a **est défini par** b

La notation $\Rightarrow$ mérite clarification. L'implication signifie que l'on peut déduire une proposition à partir d'une autre. Par exemple, si $x = 3$ alors $x > 2$. L'implication réciproque est fausse dans l'exemple précédent. Souvent, l'implication est traduite par une phrase de la forme « **Si** prop-A **alors** prop-B ». Elle se note prop-A $\Rightarrow$ prop-B. La proposition prop-A s'appelle la **prémisse** de l'implication et la proposition prop-B en est la **conclusion**.

On dit que deux propositions sont **équivalentes** lorsqu'elles s'impliquent mutuellement. Par exemple, $x = 2$ implique que $\frac{x}{2} = 1$ et $\frac{x}{2} = 1$ implique $x = 2$. On peut écrire symboliquement :

$$\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2. \tag{1.1}$$

En lieu et place du terme **équivalent**, on retrouve souvent la formulation **si et seulement si** (parfois abrégée en **ssi**) :

$$x = 2 \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{x}{2} = 1. \tag{1.2}$$

1.2.3 Ensembles et sous-ensembles

Le concept d'ensemble est l'une des idées les plus basiques dans les mathématiques modernes. L'essantiel du contenu de ce cours, et de l'enseignement de cette matière, est construit sur les ensembles et leurs proporiétés.

Demeure que la formalisation précisede cette notion est hors de propos. On se contentera d'une desccription des **propriétés standards** des ensembles.

Dans toute la suite, un ensemble est une collection d'**éléments**. Ces éléments couvrent à la fois des concepts **concrets** (une table, une chaise, un vélo) ou des concepts abstraits (un nombre, un point du plan). Sauf, dans des exemples particuliers, les éléments considérés sont des nombres ou des points (d'une droite, du plan ou de l'espace). On distingue deux types d'ensembles : ceux qui sont **finis** (leur finitude est associée à une notion de **cardinalité**) et ceux qui sont infinis (que l'on assimile à des **sous-ensembles** d'ensembles connus).

On note les ensembles à l'aide d'accolades, du moins lorsque la taille de l'ensemble le permet. Les éléments sont séparés les uns des autres par des points-virgules (**convention adoptée en France**). Les ensembles infinis sont notés en prenant en compte un ensemble qui les englobe et une proposition qui détermine une condition d'appartenance de leurs éléments.

Exemple 1.5 Quelques ensembles simples

$$\{1;2;3;4\} \qquad \left\{-4;\frac{3}{7};0;\pi;0,13;-2,5;\frac{\sqrt{2}}{3};2^{-3,5}\right\} \qquad \{\text{tous les entiers naturels qui sont pairs}\} \tag{1.3}$$

Les ensembles vérifient deux propriétés :

- Les éléments d'un ensemble ne se répètent pas, i.e, chaque élément est **unique**.
- L'ordre dans lequel s'écrivent les éléments n'a aucune incdence sur la structure de l'ensemble qui les contient.

Exemple 1.6 Illustration des propriétés précédentes

1. La notation ci-dessous ne désigne pas un ensemble :

$$\{1;1;0;1;0;0;-1;0;0;-1;-1;1\} \tag{1.4}$$

2. Les ensembles suivants sont **identiques** :

$$\{1;2;3;4\} \qquad \{1;3;2;4\} \qquad \{3;4;1;2\} \qquad \{1;3;2;4\} \qquad \{4;3;2;1\} \tag{1.5}$$

Les ensembles sont souvent écrits en précisant la proposition vérifiée par leurs éléments. On emploie la formulation qui consiste à dire que l'on sélectionne les éléments en utilisant l'expression «/tel que/» (sous-entendu tel que la proposition est **vrai**). Le symbole mathématique | représente cette expression «tel que».

Exemple 1.7 Définition d'un ensemble suivant une condition

Considérons l'ensemble donné par :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid (0 < x < 10) \wedge (x \text{ est pair})\}. \tag{1.6}$$

Cet ensemble se lit ainsi : «tous les entiers strictement plus grands que 0, strictement plus petit que 10 et qui sont pairs». Parfois, l'indication selon laquelle on prend x dans l'ensemble des entiers naturels est omise car elle se déduit du contexte de l'énonciation. Cependant, dans le présent texte, on préfère adopter des notations explicites.

L'ensemble indiqué est **fini**. Dès lors, il est possible de noter ses éléments sans faire référence à la condition qu'ils vérifient. Cet ensemble est simplement :

$$\{1;3;5;7;9\}. \tag{1.7}$$

D'autres conventions ont cours. En particulier, les ensembles sont généralement notés par des majuscules alors que les éléments sont notés à l'aide de minuscules. Les lettres de l'alphabet latin ne suffisent pas toujours. On leur adjoint les lettres grecques : α, (alpha), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ϵ (epsilon), θ (theta), ϕ (phi), ψ (psi). Notons que la lettre grecque π (pi) est **réservée** à un nombre très célèbre.

Le symbole d'**appartenance** est noté : $\in$, celui de **non-appartenance** est noté : $\notin$.

Exemple 1.8 Éléments d'un ensemble

Pour les ensembles

$$A = \{1;2;5;7\}; \quad B = \{\text{even numbers}\}, \tag{1.8}$$

toutes les propositions qui suivent sont associées au **vrai** :

$$\begin{array}{cccc} 1 \in A, & 2 \in A, & 5 \in A, & 7 \in A, \\ 2 \in B, & 1 \notin B, & 5 \notin B, & 7 \notin B. \end{array}$$

Le nombre d'éléments d'un ensemble **fini** s'appelle son **cardinal**. Voici un exemple :

Exemple 1.9 Cardinalité

Pour $E = \left\{-3;0;-2;7;1;\frac{1}{2};5\right\}$, on a $\mathrm{Card}\,(S) = 7$.

Un ensemble est omniprésent, c'est l'**ensemble vide** qui ne contient aucun élément. Il est noté $\emptyset$, Il s'agit du seul ensemble dont le cardinal est nul.

1.2.4 Intersection, union et complémentaire

Deux ensembles sont égaux lorsqu'ils contiennent les mêmes éléments.

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B). \tag{1.9}$$

Cette proposition se lit ainsi : «les ensembles A et B sont égaux **si et seulement si** tout élément x dans A est également dans B et tout élément y dans B est dans A». Lorsque tous les éléments d'un ensemble B sont des éléments d'un autre ensemble A, on dit que B est **inclus** dans A ou que B est une partie (un sous-ensemble) de A. Conventionnellement, on écrit : B⊂ A.

Note 1.2 Propriétés des sous-ensembles

Deux propriétés sont immédiates compte-tenu de la définition précédente :
- L'ensemble vide $\emptyset$ est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.
- Tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même.

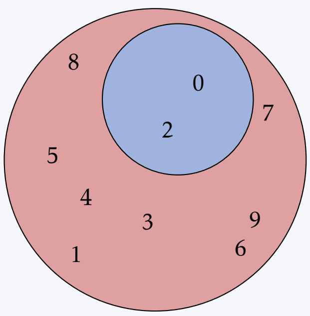
Note 1.3 Unicité de l'ensemble $\emptyset$

L'ensemble vide est unique dans le sens où il est le seul sous-ensemble de tout ensemble.

Les diagrammes de Venn sont une représentation éclairante des relations entre ensembles. Dans la suite les diagrammes de Venn seront représentés à l'aide de cercles qui figurent des ensembles quelconques.

Exemple 1.10 Sous-ensembles et diagrammes de Venn

Un diagrammes de Venn qui figure l'ensemble $B = \{0, 2\}$ en tant que sous-ensemble de $A = \{0;1;2;3;4;\ldots;9\}$:



Si on a deux ensembles A, B pour lesquels $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$. Cela se traduit à l'aide en une proposition en langage mathématique :

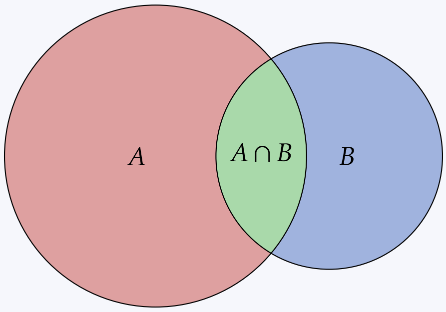
$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A = B. \tag{1.10}$$

L'**intersection** de deux ensembles (qui font partie d'un même ensemble les englobant) est notée $A \cap B$: cette **intersection** est formée des éléments x tels que $x \in A$ **ET** $x \in B$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \tag{1.11}$$

Exemple 1.11 Intersection d'ensembles

L'intersection des ensembles $A = \{1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{3; 4; 5; 6\}$ est l'ensemble $A \cap B = \{3; 4\}$.
L'intersection des ensembles $C = \{0; 1; 2; 6; 7\}$ et $D = \{3; 9; -4; 5\}$ est l'ensemble vide ($\emptyset$) puisqu'aucun élément n'est **commun** aux deux ensembles.
Le diagramme de Venn qui suit figure l'intersection de deux ensembles (zone représentée en vert) :



Note 1.4 Ensembles disjoints

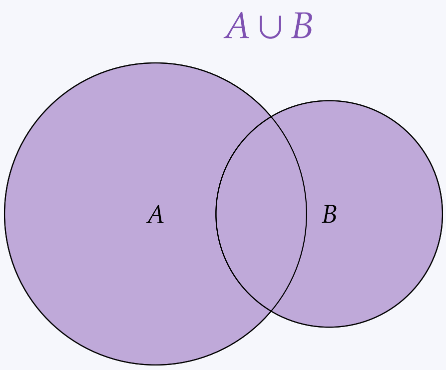
Lorsque l'intersection de deux ensembles est vide, on dit que ces deux ensembles sont **disjoints**.

L'**union** de deux ensembles (qui font partie d'un même ensemble les englobant) est notée $A \cup B$: cette **union** (ou réunion) est formée des éléments x tels que $x \in A$ **OU** $x \in B$:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \tag{1.12}$$

Exemple 1.12 Union d'ensembles

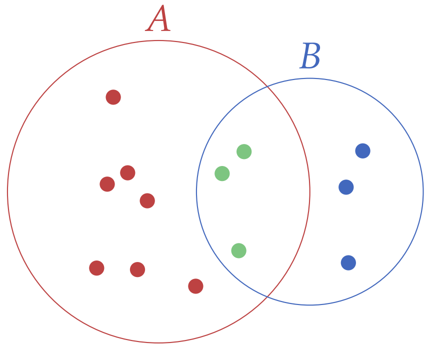
L'union des ensembles $A = \{1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{3; 4; 5; 6\}$ est l'ensemble $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
L'union des ensembles $C = \{0; 1; 2; 6; 7\}$ et $D = \{3; 9; -4; 5\}$ est l'ensemble $C \cup D = \{0; 1; 2; 3; -4; 5; 6; 7; 9\}$.
Le diagramme de Venn qui suit figure l'union de deux ensembles (zone représentée en violet) :



Naïvement le nombre d'éléments d'une union $A \cup B$ est simplement la **somme** du nombre d'éléments de A et du nombre d'éléments de B. Toutefois, cette approche dénombre doublement les éléments qui appartiennet à la fois à A et à B, autrement dit, les éléments de l'intersection de A et B. Ainsi la formule correcte du cardinal d'une union est donnée par :

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) - \text{Card}\,(A \cap B). \tag{1.13}$$

Un diagramme de Venn figure cette situation :



Il va de soi que lorsque les ensembles A et B sont disjoints alors on a $\text{Card}\,(A \cap B) = 0$. Il en résulte, un **cas particulier** de la formule précédente qui est alors : $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B)$.
Dans ce qui précède l'intersection et l'union ont été abordées pour **deux** ensembles. Rien n'interdit d'envisager une extension de ces notions au cas de trois ensembles (ou plus).

Exemple 1.13 Intersection et union de trois ensembles

L'intersection des trois ensembles $A = \{1;2;3;4;5\}$, $B = \{-2;-1;0;1;2\}$ et $C = \{2;3;4;5;6\}$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A **ET** dans B **ET**dans C. Cela donne : $A \cap B \cap C = \{2\}$.
L'union de ces trois ensembles est formée des éléments qui se trouvent dans l'un d'entre eux. Cela donne : $A \cup B \cup C = \{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$.

Soit A, B et C trois ensembles (qui font partie d'un même ensemble les englobant). De manière formelle, on écrit :

$$A \cap B \cap C = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)\} \tag{1.14}$$
$$A \cup B \cup C = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)\}. \tag{1.15}$$

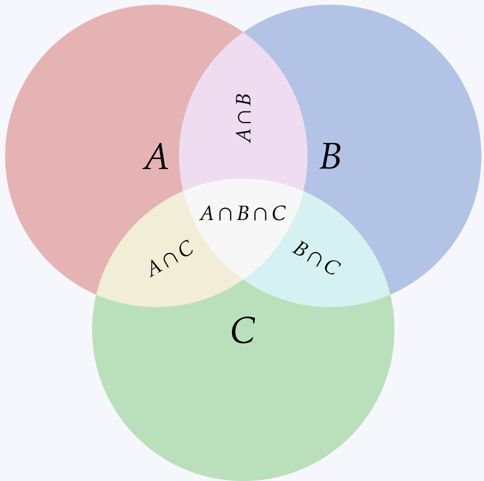
La formule du cardinal d'une union de trois ensembles devient :

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(A \cup B \cup C) &= \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) + \text{Card}\,(C)\\ &\quad - \text{Card}\,(A \cap B) - \text{Card}\,(A \cap C) - \text{Card}\,(B \cap C) + \text{Card}\,(A \cap B \cap C).\end{aligned} \tag{1.16}$$

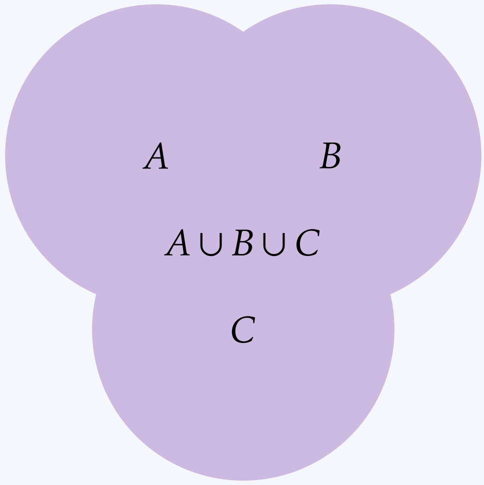
À nouveau, un diagramme de Venn pour l'union et l'intersection de trois ensembles est précieux :

Exemple 1.14 intersection et union de 3 ensembles (diagramme de Venn)

On représente les différentes intersections dans des couleurs différentes



Pour l'union des trois ensembles précédents, on a une couleur violette qui la figure :



On considère un ensemble A inclus dans un ensemble E. Le complémentaire de A dans E est formé de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On note $\overline{A}$ cet ensemble (l'ensemble englobant E est supposé être identifié).

Exemple 1.15 Complémentaire d'un ensemble

Soit E l'ensemble des entiers relatifs ($E = \mathbb{Z}$) et $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est impair}\}$.
Le complémentaire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble de tous les entiers relatifs **pairs**.
Soit E l'ensemble des entiers naturels ($E = \mathbb{N}$) et $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est impair}\}$.
Le complémentaire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble de tous les entiers naturels **pairs**.

Il ne faut pas perdre de vue que le complémentaire d'un ensemble se définit par rapport à un ensemble qui l'englobe.

1.2.5 Nombre de sous-ensembles d'un ensemble fini

Soit A un ensemble fini. On note $\mathrm{Card}\,(A)$ son cardinal. Dans un premier temps, on considère le cas particulier pour lequel $A = \{1, 2, 3\}$. Posons la question de savoir quels sont tous les sous-ensembles de A (on tient compte de l'ensemble vide et de A lui-même). Les sous-ensembles sont au nombre de 8, à savoir :

$$\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; \{1;2;3\}. \tag{1.17}$$

Challenge 1.1 Sous-ensembles d'un ensemble fini

1. Indiquer le nombre de sous-ensembles de A lorsque A est formé de 4 éléments. Même question lorsque A est formé de 5 puis de 6 éléments.
2. On peut imaginer qu'il existe une formule qui permet d'indiquer le nombre de sous-ensembles d'un ensemble A comportant n éléments. Conjecturer cette formule.

?

1.2.6 Les ensembles de nombres

Il est temps d'introduire les ensembles de nombres. Comme on l'a déjà évoqué les ensembles que l'on rencontre sont souvent des parties (sous-ensembles) de l'un de ces ensembles. On connaît, a priori, l'ensemble des **entiers naturels** et l'ensemble des **entiers relatifs**. Le premier est **inclus** dans le second. On a donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}. \tag{1.18}$$

Avec ces deux ensembles de nombres il est loisible d'effectuer des opérations comme l'addition, la soustraction ou la multiplication entre deux entiers quelconques. Il est également loisible d'effectuer une **division euclidienne** entre deux entiers pour peu que le second (le diviseur) soit **non nul**. Cette opération donne un **quotient** et un **reste** entiers.
Toutefois, la notion de fraction, indissociable de la multiplication ne prend son sens que dans le cadre d'un ensemble de nombres qui englobe les deux ensembles précédents. Cet ensemble est celui des nombres **rationnels**. À partir de la donnée de deux entiers a et b, avec $b \neq 0$, il existe un **unique rationnel** x pour lequel : $ax = b$. Ce réel x s'écrit $\frac{a}{b}$ et s'appelle la fraction de a par b. Autrement dit, on a l'équivalence :

$$ax = b \quad \text{si et seulement si} \quad x = \frac{a}{b}. \tag{1.19}$$

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels. On a :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; (a, b \in \mathbb{Z}) \wedge (b \neq 0) \right\}. \tag{1.20}$$

Pour certaines valeurs de a et de b, il est connu que la fraction $\frac{a}{b}$ donne lieu à un entier. Ainsi, nul n'est surpris de voir des égalités telles que : $\frac{3}{1} = 3$; $\frac{-8}{4} = -2$ et $\frac{-2}{2} = -1$. En particulier tout entier relatif b s'écrit $\frac{b}{1} = b$ avec la conséquence suivante en termes d'inclusion :

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}. \tag{1.21}$$

Il y a environ 2500 ans, une découverte aussi fondamentale que paradoxale allait paver le questionnement autour de la notion de nombre. L'exemple fameux est ce nombre que l'on note $\sqrt{2}$. Il n'entre pas dans la catégorie des nombres qui sont des fractions et cela se prouve sans grande difficulté. Dès lors, il devient nécessaire de concevoir un ensemble de nombre assez riche pour contenir des nombres tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, les solutions d'équations comme $x^2 - 2x - 1 = 0$, etc. Avec la construction de l'ensemble des **réels**, on élabore un cadre complet (dans un sens précis) pour la gestion des nombres. Le revers de la médaille tient au fait que la notion de nombre se détache de la notion de grandeur pour devenir quelque chose d'assez abstrait.
L'histoire ne se termine pas là. Il est d'usage de poursuivre la construction des nombres avec d'autres ensembles. En particulier, les nombres complexes répond au besoin de concevoir un nombre dont le carré est -1. Ce nombre, **qui n'est pas réel**, s'obtient en même temps que la construction d'un ensemble de nombres plus vaste que les réels, conventionnellement connu comme étant l'ensemble des complexes.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes. On obtient la séquence d'inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{1.22}$$

1.2.7 Intervalles réels

Tous les nombres réels se positionnent sur un axe gradué en désignant l'abscisse de l'un des points de cette droite. Pour cette raison, on parle parfois de «la droite des réels». Sur cette droite, il est possible d'identifier des sous-ensembles représentés par des portions délimitées par un ou deux nombres. Ces portions s'appellent des **intervalles réels** (ou tout simplement des intervalles). Lorque l'intervalle est délimité par deux nombres, on dit qu'il s'agit d'un intervalle **borné**, et lorsqu'il n'est délimité que par un seul nombre on dit qu'il est **non borné**.

Pour chaque borne d'un intervalle, il existe deux possibilités : lorsque la borne appartient à l'intervalle on dit que ce dernier est **fermé** à l'endroit de cette borne et dans le cas contraire, on dit qu'il est **ouvert**.
Pour les intervalles bornés, on rencontre quatre possibilités que voici :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \tag{1.23}$$
$$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} \tag{1.24}$$
$$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \tag{1.25}$$
$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \tag{1.26}$$

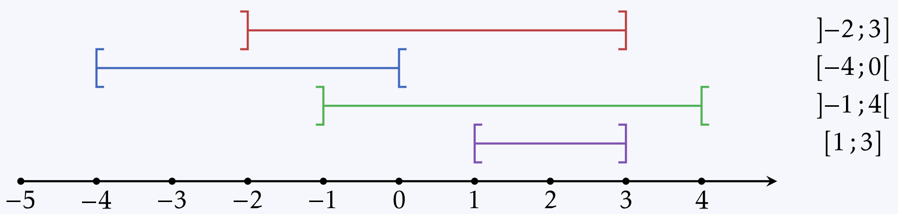
Pour les intervalles non bornés, la convention consiste à introduire la notation $+\infty$ ou $-\infty$ pour marquer l'absence de borne. Ce symbole est systématiquement lié à un crochet extérieur (ouvert). Les cinq possibilités pour les intervalles non bornés sont donnés par :

$$]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\} \tag{1.27}$$
$$]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \tag{1.28}$$
$$[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\} \tag{1.29}$$
$$]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \tag{1.30}$$
$$]-\infty;+\infty[= \mathbb{R} \tag{1.31}$$

Représentation de plusieurs intervalles sur un même graphique. Il est permis de représenter un intervalle avec un décalage vertical par rapport à l'axe des réels pour en donner un aperçu. Cela est particulièrement utile lorsque plusieurs intervalles s'intersectent.

Exemple 1.16 Intervalles réels

Des intervalles représentés par des couleurs différentes au dessus de l'axe des réels.



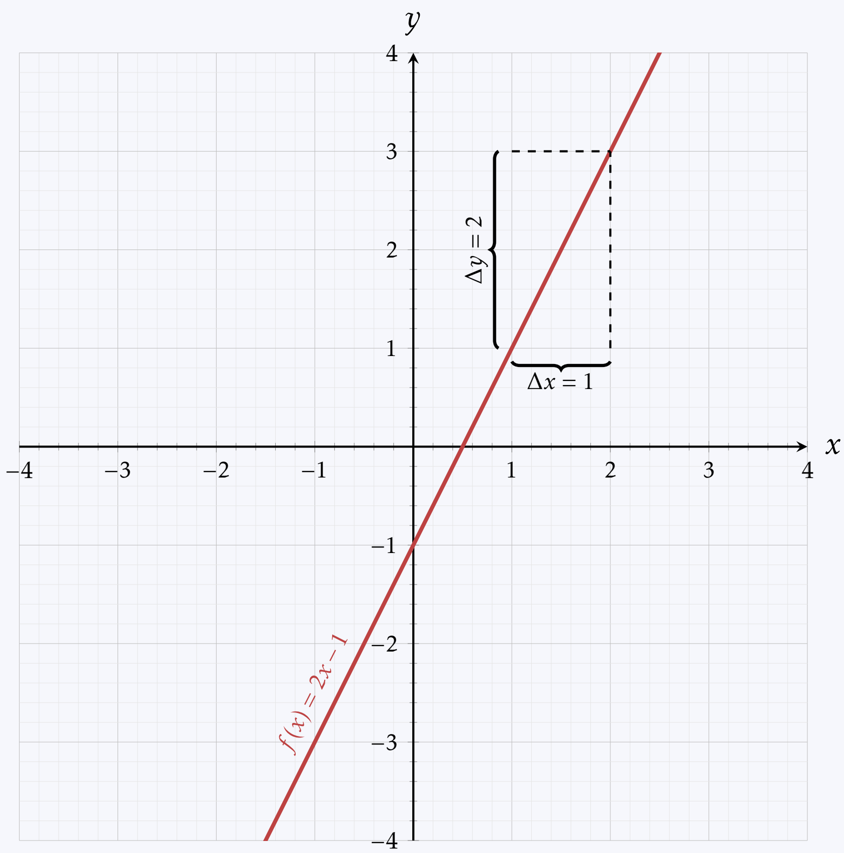
1.3 fonctions linéaires et fonctions affines

La famille des fonction **affines** est l'une des plus simples qui puissent se définir. Les fonctions de cette famille sont données par :

$$f(x) = mx + p, \tag{1.32}$$

où m and p sont des nombres réels. Le réel m s'appelle la **pente** ou **coefficient directeur** alors que le réel p s'appelle l'**ordonnée à l'origine**. La pente de la fonction f est le **rapport** entre l'augmentation des images et l'augmentation de la variable x. Ce rapport est constant et donne son sens à cette idée de **pente**. Rappelons simplement que la représentation graphique d'une telle fonction est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Rappelons également que toute droite du plan qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est associée à une unique fonction affine f.

Exemple 1.17 Représentation d'une fonction affine



Exemple 1.18 Lien entre accroissement horizontal et accroissement vertical

Reprenons la fonction affine f donnée par $f(x) = 2x - 1$. Sa pente est $m = 2$ et son ordonnée à l'origine est $p = -1$ (voir le graphique ci-dessus).

- Pour $x = 2$, la fonction prend la valeur $f(2) = 4 - 1 = 3$. Si on augmente la valeur de x par $\Delta x = 3$ pour arriver à $x = 5$ alors l'image passe de 3 à $3 + (\Delta y) = 3 + (2\Delta x) = 9$.
- Pour $x = 8$, on a $f(8) = 15$. Un accroissement $\Delta x = 4$ de la valeur de x se traduit par un accroissement de $\Delta y = 2(\Delta x) = 8$. Ainsi $f(12) = f(8) + (\Delta y) = 15 + 8 = 23$.

Note 1.5 Fonctions linéaires

La famille des **fonctions linéaires** est une sous-famille de la famille des fonctions affines. Une fonction linéaire n'est autre qu'une fonction affine pour laquelle l'ordonnée à l'origine p est **nulle**. Graphiquement, les fonctions linéaires se reconnaissent en ce que les droites qui leurs sont associées passent par l'origine du repère.

Note 1.6 Fonctions constantes

La famille des **fonctions constantes** est une sous-famille de la famille des fonctions affines. Une fonction constante n'est autre qu'une fonction affine pour laquelle la pente m est **nulle**. Graphiquement, les fonctions constantes se reconnaissent en ce que les droites qui leurs sont associées sont parallèles à l'axe des abscisses.

Définition 1.1 Équations réduites de droites

À chaque fonction affine f de la forme $f(x) = mx + p$ correspond une unique droite. Lorsque $(x;y)$ est un point de cette droite alors on a la relation : $y = mx + p$. Cette relation s'appelle l'**équation réduite** de la droite associée à f. On emploie de manière cohérente les termes de pente et d'ordonnée à l'origine pour désigner respectivement m et p à partir de l'équation réduite de la droite.

π

1.4 Fonctions polynômes

Une famille très importante de fonctions vient de trois opérations que l'on peut effectuer à partir de la variable x : l'addition, la multiplication et l'exponentiation. Cette construction est **étagée**. On définit les **fonctions polynômes** de degré 0, les **fonctions polynômes** de degré 1, les **fonctions polynômes** de degré 2, les **fonctions polynômes** de degré 3, les **fonctions polynômes** de degré 4, etc. Dans la pratique on ne rencontre que rarement des fonctions polynômes dont le degré dépasse 4.

Donnons l'écriture **explicite** de ces fonctions polynômes. Dans ce qui suit les notations a_0, a_1, a_2, etc. désignent des réels donnés qui caractérisent la fonctions polynôme. Ces réels s'appellent les **coefficients** de la fonction polynôme.

$$P_0(x) = a_0 \quad \text{avec } a_0 \neq 0 \quad \text{fonction polynôme de degré 0} \tag{1.33}$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x \quad \text{avec } a_1 \neq 0 \quad \text{fonction polynôme de degré 1} \tag{1.34}$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{avec } a_2 \neq 0 \quad \text{fonction polynôme de degré 2} \tag{1.35}$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \text{avec } a_3 \neq 0 \quad \text{fonction polynôme de degré 3} \tag{1.36}$$

$$P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \quad \text{avec } a_4 \neq 0 \quad \text{fonction polynôme de degré 4} \tag{1.37}$$

Les polynômes sont des fonctions caractérisées par un **degré** il s'agit de l'entier associé à la plus grande puissance de x dans l'expression de l'image et pour lequel le coefficient attaché est **non nul**.

Dans la pratique, voici comment **identifier** les coefficients d'une fonction polynôme. On présente un exemple avec une fonction de degré 6.

Exemple 1.19 Polynômes — identification des coefficients

Voici un polynôme de degré $n = 6$:

$$P(x) = 4 + 2x - 3x^2 + 7x^4 - x^5 + 3x^6. \tag{1.38}$$

En voici les termes constituants :

$$\begin{array}{ccccccc}
P(x) = & 4 & +2x & -3x^2 & +7x^4 & -x^5 & +3x^6 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & a_0 = 4 & a_1 = 2 & a_2 = -3 & a_4 = 7 & a_5 = -1 & a_6 = 3
\end{array}$$

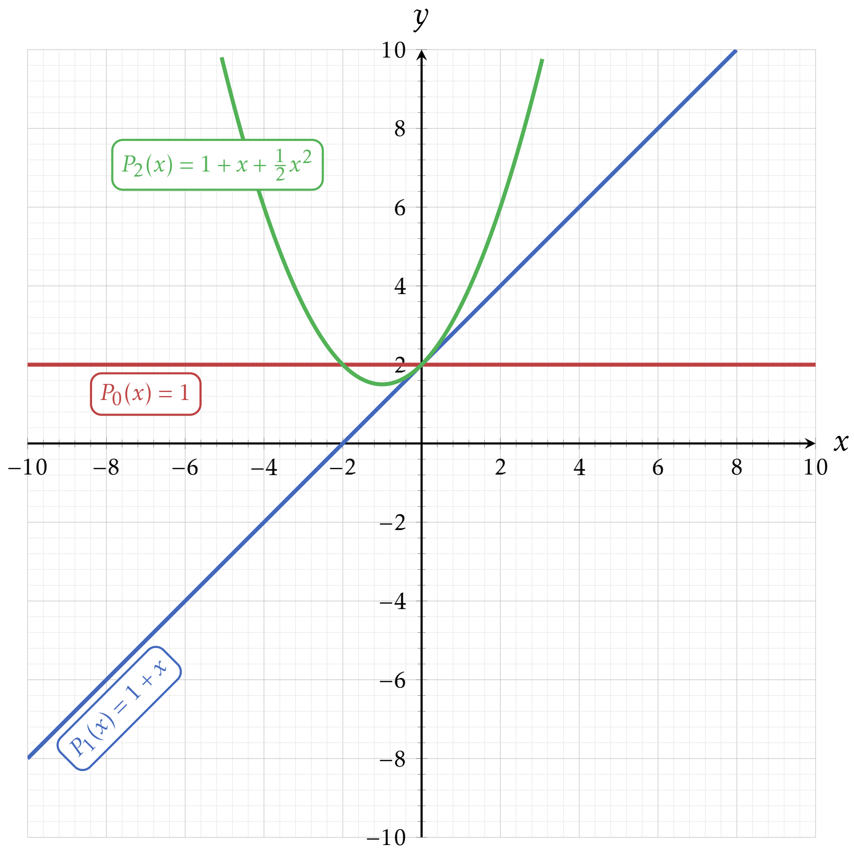
Comme le coefficient a_3 est absent de l'écriture cela signifie simplement que ce coefficient est nul.

Note 1.7 Fonctions polynômes de degré 0 et 1

- les fonctions polynômes de degré 0 ne sont autres que les fonctions constantes non nulles.
- les fonctions polynômes de degré 1 ne sont autres que les fonctions affines non constantes.

!

Les courbes ci-dessous représentent des fonctions polynômes de degré 0, 1 et 2. Ces fonctions sont notées P_0, P_1 et P_2.



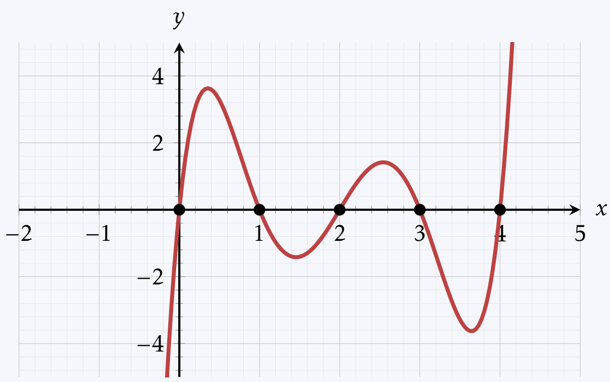
Définition 1.2 Racines d'une fonction polynôme

Les nombres réels x pour lesquels on $P(x) = 0$ sont appelés les **racines** du polynôme P.

π

Exemple 1.20 Racines d'une fonction polynôme

Voici une fonction polynôme donnée par $P(x) = 24x - 50x^2 + 35x^3 - 10x^4 + x^5$. Elle admet 5 racines : $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ et $x_4 = 4$. Le graphique ci-dessous montre que les racines sont à l'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses.



Théorème 1.1 Théorème fondamental sur les racines d'une fonction polynôme

- Une fonction polynôme de degré n admet au maximum n racines.
- Une fonction polynôme de degré n impair admet au moins une racine.

Note 1.8 Recherche des racines d'une fonction polynôme

- la question de savoir comment trouver les racines d'une fonction polynôme est en général une **question difficile** qui sort du cadre de ce texte.
- Dans certaines situations cette recherche est facilitée par des informations sur la nature de la fonction polynôme.
- Entre deux racines consécutives une fonction polynôme est de signe constant. Cette observation conduit à résoudre sans difficulté les inéquations $P(x) \leqslant 0$ ou encore $P(x) \geqslant 0$ pour peu que l'on connaisse toutes les racines de P.

On pourrait sans difficulté reprendre l'exemple de la fonction polynôme $P(x) = 24x - 50x^2 + 35x^3 - 10x^4 + x^5$ et résoudre les **inéquations** $P(x) \leqslant 0$ et $P(x) \geqslant 0$.

Note 1.9 Factorisation d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme de degré n avec $n \geqslant 1$. Chaque racine r de cette fonction donne lieu à une factorisation partielle sous la forme :

$$P(x) = (x - r)Q(x) \tag{1.39}$$

où Q est une fonction polynôme de degré $n-1$. La détermination de la fonction Q à partir de la connaissance de la racine r s'opère en développant le membre de droite de l'égalité puis en égalant les coefficients. Cette opération est un peu technique sans être difficile.
Si on connait plusieurs racines distinctes, par exemple r_1 et r_2, alors la factorisation de P revêt la forme suivante :

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q(x) \tag{1.40}$$

où, cette fois-ci, Q est une fonction polynôme de degré $n - 2$. La détermination de Q s'effectue comme précédemment en développant le membre de droite puis en égalant les coefficients.

Exemple 1.21 Factorisation d'un polynôme de degré 3 lorsque ces racines sont connues

Posons $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. En calculant tour à tour $P(-1)$; $P(1)$ et $P(2)$ on observe que toutes ces images sont nulles. Dès lors, -1 ; 1 et 2 sont trois racines distinctes de P. Comme P est de degré 3, il en résulte qu'il ne peut y avoir d'autres racines. On peut donc rechercher une factorisation de P sous la forme :

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)Q(x). \tag{1.41}$$

où Q est une fonction polynôme de degré 0. Autrement dit, Q est une fonction constante. On écrit $Q(x) = a$. On développe :

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x-2)a &= (x^2-1)(x-2)a \\ &= (x^3 - 2x^2 - x + 2)a \\ &= ax^3 - 2ax^2 - ax + 2a.\end{aligned}$$

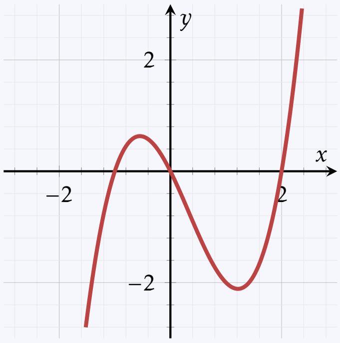
Comme ce polynôme doit s'identifier à $x^3 - 2x^2 - x + 2$, il vient que :

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ -2a &= -2 \\ -a &= -1 \\ 2a &= 2. \end{aligned}$$

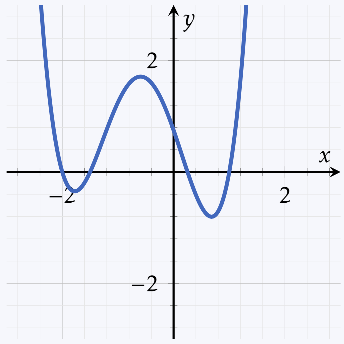
Toutes ces équations sont équivalentes à $a = 1$. En conclusion, la forme factorisée de P est donnée par $P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2) \times 1 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$.

Exemple 1.22 Représentations grahiques de quelques fonctions polynômes de degrés $n = 3, 4, 5, 6$

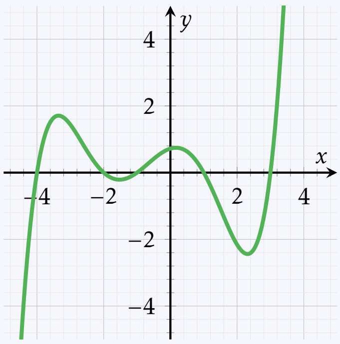
Voici quatre fonctions polynômes notées P_3, P_4, P_5 et P_6.



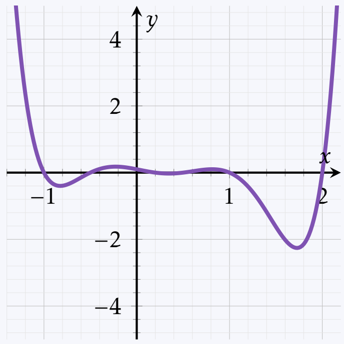
$P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$



$P_4(x) = x^4 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 - \frac{23}{8}x + \frac{3}{4}$



$P_5(x) = \frac{3}{100}\left(x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24\right)$



$P_6(x) = \frac{1}{20}\left(20x^6 - 44x^5 - 17x^4 + 55x^3 - 5x^2 - 11x + 2\right)$

Challenge 1.2 Sur les polynômes

On reprend les polynômes P_3 ; P_4 ; P_5 et P_6 de l'exemple précédent.

1. Indiquer les coefficients de ces 4 polynômes.
2. (a) Vérifier, par calcul, que 0 et 2 sont des racines de P_3. Trouver la valeur la dernière racine de ce polynôme.
   (b) Vérifier, par calcul, que -2 ; $-\frac{3}{2}$ et 1 sont des racines de P_4. Trouver la dernière racine de ce polynôme.
   (c) Vérifier, par calcul, que -4 ; -2 et 3 sont des racines de P_5. Trouver les deux dernières racines de ce polynôme.
   (d) Vérifier, par calcul, que $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$ et 2 sont des racines de P_6. Trouver les deux dernières racines de ce polynôme.

1.5 Dérivée formelle d'une fonction polynôme

La **dérivée formelle** d'une fonction polynôme P_n de degré n, avec $n \geqslant 1$ est une fonction polynôme, notée P', de degré $n-1$ que l'on obtient comme suit :

$$\text{Si } P_0(x) = a_0 \text{ alors } P_0'(x) = 0 \tag{1.42}$$

$$\text{Si } P_1(x) = a_0 + a_1 x \text{ alors } P_1'(x) = a_1 \tag{1.43}$$

$$\text{Si } P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \text{ alors } P_2'(x) = a_1 + 2a_2 x \tag{1.44}$$

$$\text{Si } P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \text{ alors } P_3'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \tag{1.45}$$

$$\text{Si } P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \text{ alors } P_4'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3. \tag{1.46}$$

Exemple 1.23 Calcul formel de dérivées de fonctions polynômes

Indiquons des calculs de dérivés de fonctions polynômes déjà rencontrés :

Si $P_1(x) = 1 + x$ alors $P_1'(x) = 1$.

Si $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ alors $P_2'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{2}x = 1 + x$.

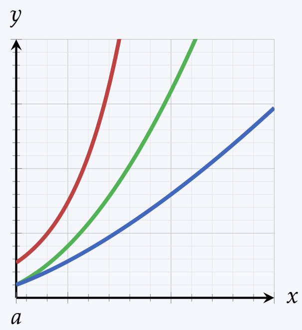
Si $P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$ alors $P_3'(x) = 3x^2 - 2x - 2$.

Si $P_4(x) = x^4 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 - \frac{23}{8}x + \frac{3}{4}$ alors $P_4'(x) = 4x^3 + 3 \times \frac{9}{4}x^2 - 2 \times \frac{9}{8}x - \frac{23}{8} = 4x^3 + \frac{27}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{23}{8}$.

Cet aspect formel du calcul de la dérivée d'une fonction polynôme n'aurait pas grand intérêt s'il ne rencontrait pas une interprétation sur le comportement de la fonction concernée. La notion de dérivée est indicative du sens et du rythme de variation d'une fonction.

Exemple 1.24 Comparaison qualitative de la croissance de fonctions

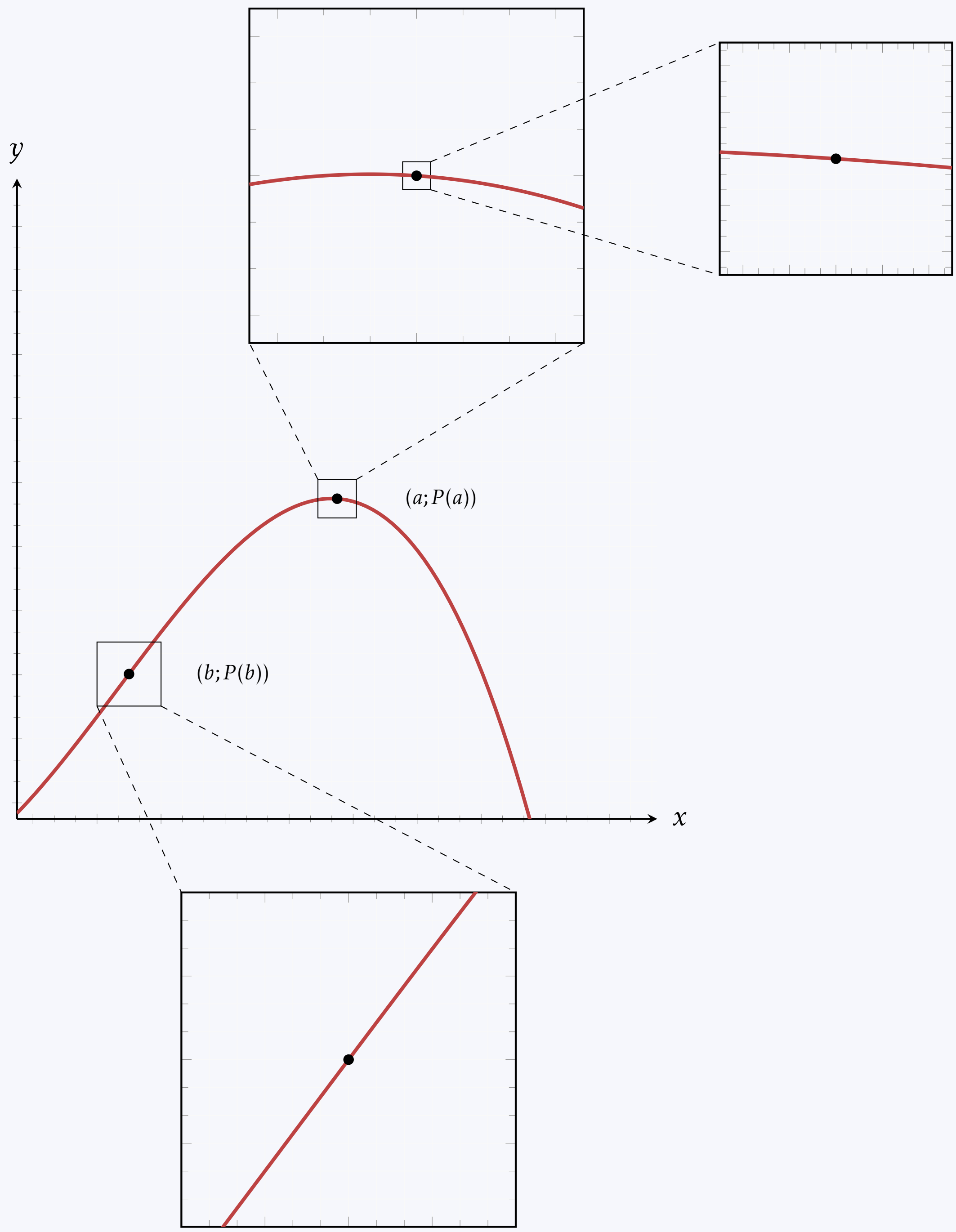
Considérons trois fonctions définies sur l'intervalle $[a;b]$.



Il est clair que les trois fonctions précédentes sont croissantes sur $[a;b]$. Cependant, on peut dire un peu plus. La fonction représentée en rouge croît plus rapidement que le fonction représentée en vert et cette dernière croît plus rapidement que celle qui est représentée en bleu. En fait, une observation plus attentive permet de dire que pour chaque fonction, la croissance est d'autant plus rapide que la valeur de x est grande.

La notion de dérivée d'un polynôme est cette notion qui permet de renseigner sur le sens et le rythme de variation de la fonction. Cela s'observe en effectuant un «zoom» autour d'un point de coordonnées $(a;P(a))$. Ce zoom laisse entrevoir une portion de la courbe comme étant très proche d'une droite. Cette droite s'appelle la **tangente à la courbe** au point de coordonnées $(a;P(a))$. Le graphique suivant traduit cette idée.

Exemple 1.25 Zoom autour de certains points d'une courbe



Zoom autour des points : $(a;P(a))$ (en haut à droite) et $(b;P(b))$ (en bas au centre). On observe qu'autour de chacun de ces points la fonction s'assimile quasiment à une fonction affine.

Théorème 1.2 Théorème fondamental sur le sens du polynôme dérivé

Soit P une fonction polynôme. On note P' son polynôme dérivé.

- En tout point $(a;P(a))$ de la courbe représentative de P, la portion de la courbe restreinte à un «petit intervalle» autour de a s'assimile à une droite (la tangente en $(a;P(a))$).
- Le coefficient directeur de la tangente au point $(a;P(a))$ est donné par $P'(a)$.

Insistons sur le fait que les points choisis n'ont rien de spécifique. Les points $(a;P(a))$ et $(b;P(b))$ ont été placés arbitrairement. Par ailleurs, la connaissance des caractéristiques de la tangente en $(a;P(a))$ n'apporte aucune information sur les caractéristiques de la tangente en $(b;P(b))$ (et vice-versa). On dit que cette notion de tangente est **locale**.

Définition 1.3 Approximation affine et équation réduite d'une tangente

Soit P une fonction polynôme. D'après le théorème précédent, la tangente à la courbe représentative de P en un point $(a;P(a))$ est associée à une fonction affine f_a avec $f_a(x) = P'(a)x + p$. Le point $(a;P(a))$ étant commun à la courbe représentative de P et à la droite associée à f_a, on doit avoir :

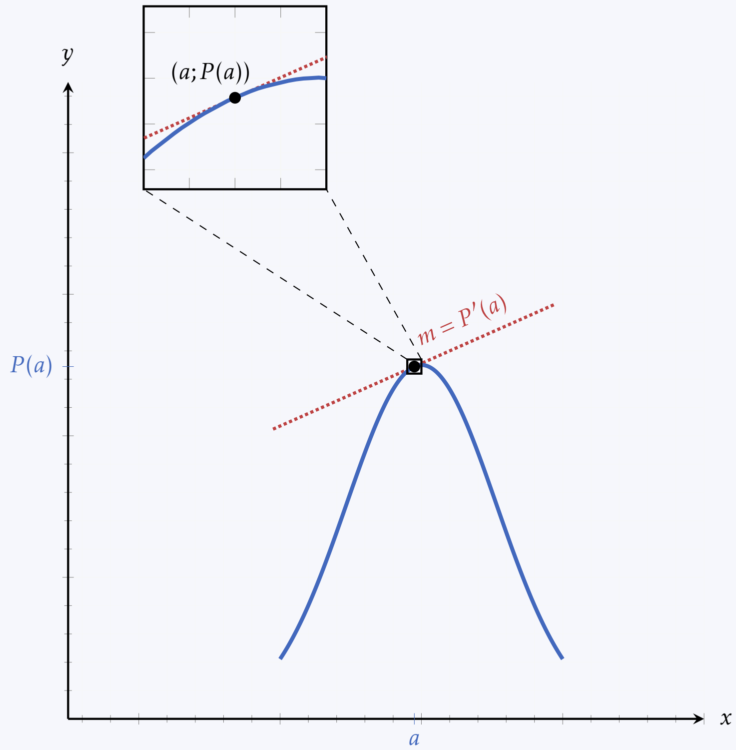
$$f_a(a) = P(a) \quad \Rightarrow \quad P'(a)a + p = P(a) \quad \Rightarrow \quad p = P(a) - aP'(a). \tag{1.47}$$

Ainsi, la fonction f_a est donnée par $f_a(x) = P'(a)x + P(a) - aP'(a) = P'(a)(x-a) + P(a)$. La fonction f_a ainsi caractérisée s'appelle **l'approximation affine** de P au point $(a;P(a))$. La droite associée à cette fonction est appelée la **tangente** à la courbe représentative de P en $(a;P(a))$. Son équation est donnée par : $y = P'(a)x + P(a) - aP'(a) = P'(a)(x-a) + P(a)$.

Il est assez remarquable qu'un objet géométrique (la tangente à une courbe) soit aussi intimement lié à un calcul sur l'image d'une valeur par la fonction dérivée. Une preuve de ce théorème sera donnée plus loin. Pour le moment, on peut se contenter de procéder au calcul d'équations de tangentes pour une fonction polynôme particulière.

Exemple 1.26 Représentation de la tangente en un point de la courbe

On représente une portion de courbe associée à une fonction polynôme.



Exemple 1.27 Calcul des tangentes pour une fonction polynôme du troisième degré

Soit P_3 la fonction polynôme donnée par $P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$. Sa dérivée est donnée par $P_3'(x) = 3x^2 - 2x - 2$.

- Considérons $a = 1$. On a $P_3(a) = -2$. D'après le théorème précédent, le coefficient directeur de la tangente au point $(1;-2)$ est donné par $P_3'(1) = -1$. De plus, la tangente en ce point est associée à la fonction affine $f_a(x) = P_3'(1)(x-1) + P_3(1)$ donc $f_a(x) = -(x-1) - 2 = -x + 1$.
- Considérons $a = -1$. On a $P_3(a) = 0$. D'après le théorème précédent, le coefficient directeur de la tangente au point $(-1;0)$ est donné par $P_3'(-1) = 3$. De plus, la tangente en ce point est associée à la fonction affine $f_a(x) = P_3'(-1)(x+1) + P_3(-1)$ donc $f_a(x) = 3(x+1) + 0 = 3x + 3$.

1.6 Sens de variation d'une fonction polynôme

Définition 1.4 Sens de variation d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme. On se fixe un intervalle $[a;b]$.

- P est **croissante** sur $[a;b]$ lorsque :

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad P(x_1) \leqslant P(x_2). \tag{1.48}$$

- P est **décroissante** sur $[a;b]$ lorsque :

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad P(x_2) \leqslant P(x_1). \tag{1.49}$$

- P est **strictement croissante** sur $[a;b]$ lorsque :

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad P(x_1) < P(x_2). \tag{1.50}$$

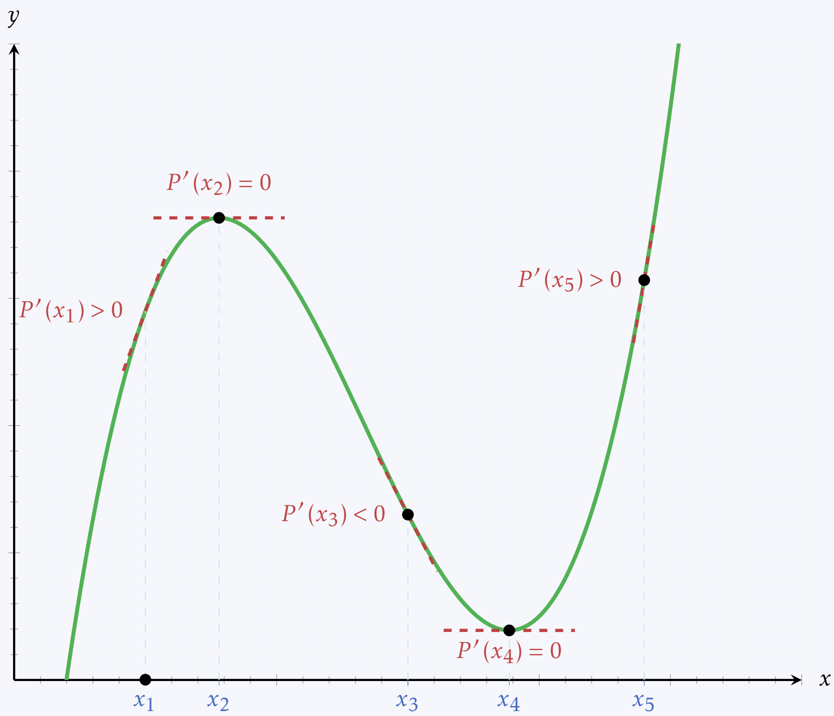
- P est **strictement décroissante** sur $[a;b]$ lorsque :

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad P(x_2) < P(x_1). \tag{1.51}$$

π

Exemple 1.28 Sens de variation d'une fonction polynôme

Une observation élémentaire permet de faire le lien entre le sens de variation d'une fonction polynôme P autour d'un point et le signe de la dérivée en ce point. Des portions des tangentes sont représentées en pointillés en quelques points de la courbe.



Le théorème qui suit formalise l'observation précédente.

Théorème 1.3 Théorème fondamental sur le sens de variation d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme. On note P' son polynôme dérivé. On se fixe un intervalle $[a;b]$.

- P est croissant sur $[a;b]$ équivaut à $P'(x) \geqslant 0$ sur $[a;b]$.
- P est décroissant sur $[a;b]$ équivaut à $P'(x) \leqslant 0$ sur $[a;b]$.
- P est constant sur $[a;b]$ équivaut à $P'(x) = 0$ sur $[a;b]$.

Il est parfois utile de rendre compte de la **stricte monotonie** d'une fonction polynôme. L'énoncé qui suit donne les conditions pour la strice monotonie d'un polynôme.

Note 1.10 Monotonie stricte d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme. On note P' son polynôme dérivé. On se fixe un intervalle $[a;b]$.

- P est **strictement croissant** sur $[a;b]$ lorsque $P'(x) > 0$, sauf éventuellement en des **valeurs isolées** pour lequelles on a $P'(x) = 0$.
- P est **strictement décroissant** sur $[a;b]$ lorsque $P'(x) < 0$, sauf éventuellement en des **valeurs isolées** pour lequelles on a $P'(x) = 0$.

!

Définition 1.5 Extrema locaux d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme. Soit x_0 un réel en lequel le sens de variation de P s'inverse. On dit que P admet un **extremum local** en x_0. L'image $P(x_0)$ est la **valeur de l'extremum local**. Souvent, on est amené à donner un peu plus de précision.

- Lorsque le sens de variation s'inverse en passant d'un intervalle $[c;x_0]$ où le polynôme P est croissant à un intervalle $[x_0;d]$ où ce même polynôme est décroissant, on dit que P admet un **maximum local** en x_0. L'image $P(x_0)$ est la **valeur du maximum local**.
- Lorsque le sens de variation s'inverse en passant d'un intervalle $[c;x_0]$ où le polynôme P est décroissant à un intervalle $[x_0;d]$ où ce même polynôme est croissant, on dit que P admet un **minimum local** en x_0. L'image $P(x_0)$ est la **valeur du minimum local**.

π

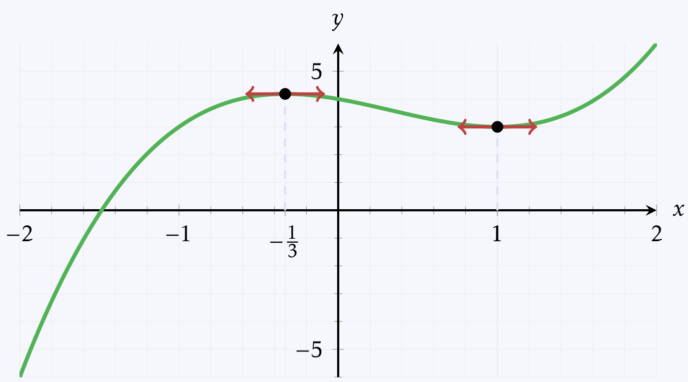
Théorème 1.4 Caractérisation des extrema locaux d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme. On note P' son polynôme dérivé. Soit x_0 un réel.

- P admet en **maximum local** en x_0 lorsque la dérivée P' **change de signe** en passant de valeurs négatives avant x_0 à des valeurs positives après x_0.
- P admet en **minimum local** en x_0 lorsque la dérivée P' **change de signe** en passant de valeurs positives avant x_0 à des valeurs négatives après x_0.

Exemple 1.29 Calcul du sens de variation d'un polynôme de degré 3

Soit P_3 la fonction polynôme donnée par $P_3(x) = x^3 - x^2 - x + 4$. Sa dérivée est donnée par $P_3'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. On donne les racines de P_3' qui sont $x_0 = -\frac{1}{3}$ et $x_1 = 1$.



Résumons le lien entre sens de variation de P_3 et signe de sa dérivée P_3'.

- La dérivée P_3' est positive sur l'intervalle $]-\infty;-\frac{1}{3}]$, la fonction P_3 est croissante sur cet intervalle.
- La dérivée P_3' est négative sur l'intervalle $[-\frac{1}{3};1]$, la fonction P_3 est décroissante sur cet intervalle.
- La dérivée P_3' est positive sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction P_3 est croissante sur cet intervalle.

La fonction P_3 admet deux extremas locaux. Elle admet un maximum local en $-\frac{1}{3}$ dont la valeur est $P_3\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{113}{27}$. Elle admet un minimum local en 1 dont la valeur est $P_3(1) = 3$.

Note 1.11 Notion de tangente horizontale

Soit P une fonction polynôme. On note P' son polynôme dérivé. Pour toute racine x_0 de P', la fonction P adment au point $(x_0; P(x_0))$ une tangente dont le coefficient directeur est nul. Autrement dit, cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Par convention, on dit qu'une telle tangente est **horizontale**.

!

Note 1.12 Relation entre tangente horizontale et extremum local

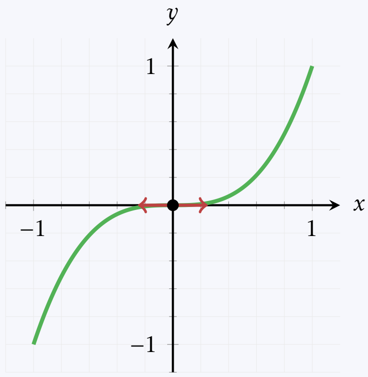
Soit P une fonction polynôme. On note P' son polynôme dérivé. Si P admet en x_0 un extremum local alors la tangente à la courbe de P en $(x_0; P(x_0))$ est **horizontale** (autrement dit : $P'(x_0) = 0$).

!

La réciproque de l'énoncé précédent n'est pas vraie. Pour le dire clairement, il existe des fonctions polynômes qui admettent des tangentes horizontales en des points $(x_0; P(x_0))$ sans admettre d'extrema locaux en x_0. L'exemple le plus mobilisé pour rendre compte de cette situation est donné par le polynôme $P_3(x) = x^3$.

Exemple 1.30 Une tangente horizontale qui ne correspond pas à un extremum local

Posons $P_3(x) = x^3$. On a $P_3'(x) = 3x^2$. La seule racine de P_3' est 0. Ainsi, au point $(0;0)$ (qui est l'origine), la courbe de P_3 admet une tangente horizontale. Cette tangente se confond avec l'axe des abscisses. Cependant, comme la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ à l'exception de 0 où elle est nulle, il en résulte que P_3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sur la figure ci-dessous les deux aspects sont clairement visualisés.



En France, il existe des conventions qui veulent que l'on représente dans un unique tableau le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction. Un tel tableau s'appelle un tableau de variation.

Exemple 1.31 Calcul du sens de variation d'un polynôme de degré 3

On reprend P_3 la fonction polynôme donnée par $P_3(x) = x^3 - x^2 - x + 4$. Sa dérivée est donnée par $P_3'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. On vérifie que P_3' admet une forme factorisée donnée par $P_3'(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)$. Dès lors le signe de P_3 s'obtient sans diffculté en combinant la règle des signes et la présentation du signe de chaque facteur dans une ligne du tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3\left(x+\frac{1}{3}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_3(x)$		$\nearrow$	$\frac{113}{27}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

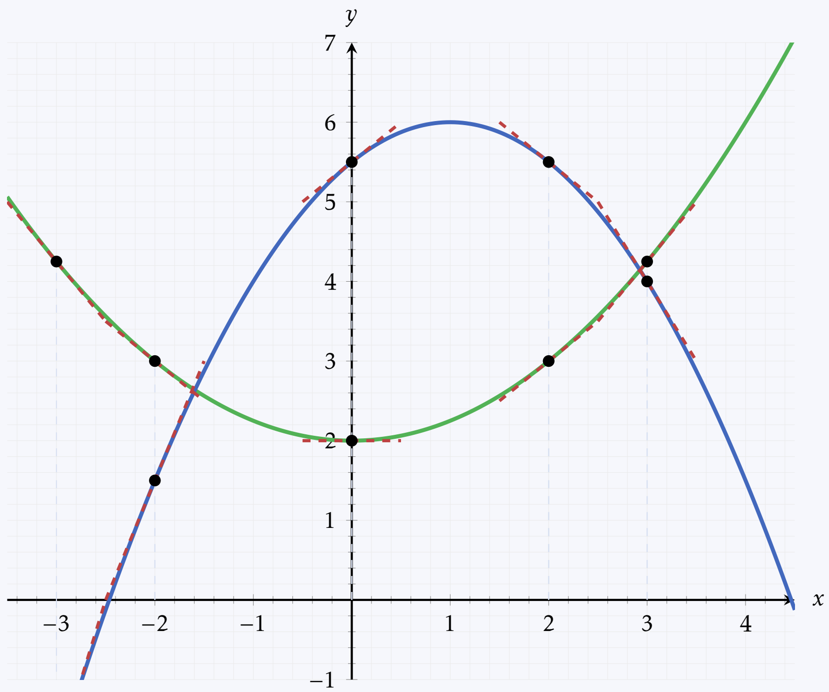
1.7 La dérivée seconde d'une fonction polynôme

La dérivée de la dérivée d'un polynôme s'appelle la dérivée seconde. Lorsque P un est polynôme de degré $n \geqslant 2$ sa dérivée seconde se note P''. Il s'agit d'un polynôme de degré $n-2$. Les règles de calcul des dérivées mentionnées plus haut s'appliquent pour déterminer l'expression de P'' (on lit «P seconde» ce polynôme). La notion de dérivée seconde est liée à une notion de **convexité**.

Définition 1.6 Convexité d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme. On considère un intervalle $[a;b]$.
- P est **convexe** sur $[a;b]$ lorsque sa courbe est située au dessus de ses tangentes.
- P est **concave** sur $[a;b]$ lorsque sa courbe est située en-dessous de ses tangentes.

Exemple 1.32 Représentation graphique d'une fonction convexe et d'une fonction concave



La courbe en vert est située au dessus de chacune de ses tangentes, elle est donc **convexe** sur $\mathbb{R}$. La courbe en bleu est située en-dessous de chacune de ses tangentes, elle est donc **concave** sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.5 Caractérisation de la convexité d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme. On note P'' sa dérivée seconde. On considère un intervalle $[a;b]$.

- P est convexe sur $[a;b]$ lorsque pour tout réel $x \in [a;b]$, $P''(x) \geqslant 0$.
- P est concave sur $[a;b]$ lorsque pour tout réel $x \in [a;b]$, $P''(x) \leqslant 0$.

Exemple 1.33 Étude de la convexité de deux fonctions polynômiales

- Posons $P_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$. On a $P_2'(x) = \frac{1}{2}x$ et donc $P_2''(x) = \frac{1}{2}$. Commme $P_2''(x) \geqslant 0$, le théorème précédent assure que P_2 est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Posons $P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2}$. On a $P_2'(x) = -x$ et donc $P_2''(x) = -1$. Commme $P_2''(x) \leqslant 0$, le théorème précédent assure que P_2 est concave sur $\mathbb{R}$.

Les deux fonctions ci-dessus sont celles dont les courbes ont été représentées (en vert et en bleu) sur le graphique un peu plus haut.

Définition 1.7 Point d'inflexion

Soit P une fonction polynôme et x_0 un réel. Lorsque $P''(x_0) = 0$ et que P'' change de signe autour de x_0 alors on dit qu'en $(x_0; P(x_0))$ le polynôme admet un **point d'inflexion**. Le polynôme change de convexité autour de ce point.

Note 1.13 Caratérisation géométrique de l'inflexion

Soit P une fonction polynôme. On considère un intervalle $[a;b]$.
Soit x_0 un réel de sorte que $(x_0; P(x_0))$ constitue un point d'inflexion pour P. En ce point la courbe de P traverse sa tangente. Si elle est située au dessus de sa tangente avant x_0 alors elle passe en-dessous après cette valeur et, inversement, si elle est située en-dessous de sa tangente avant x_0 alors elle passe au dessus après cette valeur.

1.8 Parité d'une fonction polynôme

Définition 1.8 Parité d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme.

- On dit que P est **paire** lorsque pour tout réel x, $P(-x) = P(x)$.
- On dit que P est **impaire** lorsque pour tout réel x, $P(-x) = -P(x)$.

Exemple 1.34 Étude de la parité de deux fonctions polynômiales

- Posons $P(x) = 4x^8 - 5x^6 + \frac{7}{2}x^2 - 12$. Calculons $P(-x)$.

$$\begin{aligned} P(-x) &= 4(-x)^8 - 5(-x)^6 + \frac{7}{2}(-x)^2 - 12 \\ &= 4x^8 - 5x^6 + \frac{7}{2}x^2 - 12 \\ &= P(x). \end{aligned}$$

  Ainsi, P est un polynôme pair.

- Posons $P(x) = 4x^7 - 5x^5 + \frac{7}{2}x$. Calculons $P(-x)$.

$$\begin{aligned} P(-x) &= 4(-x)^7 - 5(-x)^5 + \frac{7}{2}(-x) \\ &= -4x^7 + 5x^5 - \frac{7}{2}x \\ &= -\left(4x^7 - 5x^5 + \frac{7}{2}x\right) \\ &= -P(x). \end{aligned}$$

Ainsi, P est un polynôme impair.

Théorème 1.6 Caractérisation de la parité d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme.
- P est paire lorsque tous ses coefficients d'ordres **impairs** sont nuls.
- P est imppaire lorsque tous ses coefficients d'ordres **pairs** sont nuls.

Note 1.14 Lien entre parité d'un polynôme et parité de sa dérivée

Soit P une fonction polynôme.
- Si P est pair alors P' est impair.
- Si P est impair alors P' est pair.

Note 1.15 Lien entre parité d'un polynôme et représentation graphique

Soit P une fonction polynôme.
- P est pair lorsque sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- P est impair lorsque sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1.9 Recherche dichotomique d'un antécédent

Soit P une fonction polynôme et $[a;b]$ un intervalle. On suppose que :

$$((P(a) < 0) \wedge (P(b) > 0)) \vee ((P(a) > 0) \wedge (P(b) < 0)) \tag{1.52}$$

Il est alors légitime de penser que P admet une racine dans l'intervalle $]a;b[$. Cette racine peut être appproximée en restreignant l'intervalle de recherche de la manière suivante. On pose $c = \frac{a+b}{2}$ et on calcule $P(c)$. Si $P(c) = 0$ on a trouvé une racine exacte. Autrement, on compare les signes de $P(a)$ et de $P(c)$.
- Si ces deux nombres sont de signes opposés alors on recherche la racine dans l'intervalle $[a;c]$.
- Si ces deux nombres sont du même signe alors on recherche la racine dans l'intervalle $[c;b]$.

On répète le procédé avec ce nouvel intervalle jusqu'à obtenir un intervalle dont l'amplitude est inférieure à la précision souhaitée. Dans les conditions indiquées ce procédé **converge** vers une racine du polynôme. Cela dit, il est peu probable d'aboutir ainsi à la valeur exacte de la racine. Converger vers une valeur ne signifie pas que l'on finit par trouver un résultat exact.

La condition qui garantit que ce procédé converge vers une racine est celle qui est indiquée plus haut. De manière plus lisible cette condition se traduit en disant que $P(a)$ et $P(b)$ sont de signes opposés. Cela revient à écrire : $P(a) \times P(b) < 0$.

Le procédé précédent se généralise à la recherche d'un réel x_0 qui vérifie l'équation $P(x_0) = k$ où k est donné. La garantie de la convergence du procédé vers une solution est donnée par la condition $(P(a)-k)\times(P(b)-k) < 0$.