4.0 $\quad \min \; x_1 \quad$ u.d.N $\quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \; (g_1)$

$x_1 + x_2 \leq \mu \, (g_2)$

$L(x,\lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \mu)$

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \\ 0 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \nabla f + \nabla g_1 + \nabla g_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

LICQ ist für

alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{x_1 = x_2\}$ erfüllt.

Fall 1.

$\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0$ ($\lambda_2 = 0$ folgt aus der Gleichung $2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\lightning$$

Fall 2.

$\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 0 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \end{matrix}$$

da $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$

diese setzen wir in die aktive (g_1)-Gleichung ein:

$x_1^2 + \underbrace{x_2^2}_{0} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = 1$

$x_1 = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = \pm 1$

Fall 2.1 $(x = +1)$

$1 + 2\lambda_1 = 0$

$2\lambda_1 = -1$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \;\lightning\; \lambda \geq 0$

Fall 2.2 $(x = -1)$

$1 - 2\lambda_1 = 0$

$-2\lambda_1 = -1$

$\lambda_1 = +\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ KKT-Punkt $= (-1, 0, \frac{1}{2}, 0)$, wenn er (g_2) nicht verletzt!

$-1 \leq \mu$