Ejercicio 1

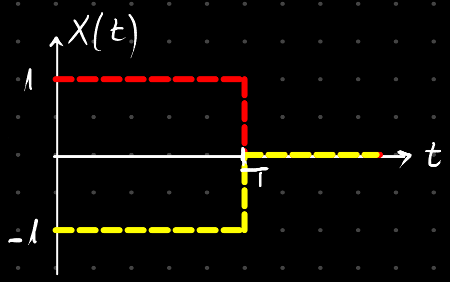
Sea $g(t)$ un pulso determinístico, definido como

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{para otro } t \end{cases}$$

Considere el proceso aleatorio $X(t) = Ag(t)$, donde $A \in \{-1, 1\}$ es una variable aleatoria binaria con $\mathbb{P}(A = 1) = p$ y $\mathbb{P}(A = -1) = 1 - p$.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(t)$ y grafique el conjunto de realizaciones $\mathcal{S}$.

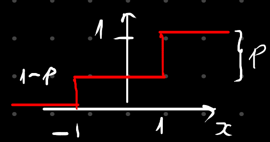
$X(t)$ es un proceso discreto en tiempo continuo.



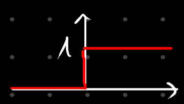
2. Halle la función de distribución de primer y segundo orden de $X(t)$.

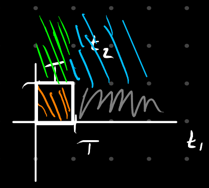
$$F_{X(t)}(x) = \mathbb{P}(X(t) \le x)$$

Si $0 \le t \le T$: $F_{X(t)}(x) = \mathbb{P}(A \le x) = (1-p)\,\mathbb{1}\{x > -1\} + p\,\mathbb{1}\{x > 1\}$



Si $T < t$: $F_{X(t)}(x) = \mathbb{P}(0 \le x) = \mathbb{1}\{x \ge 0\}$

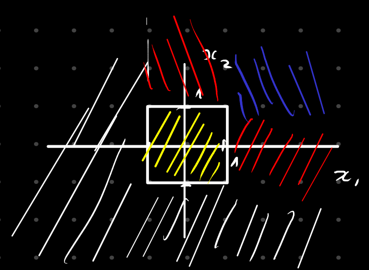




$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X(t_1) \le x_1,\ X(t_2) \le x_2)$$

- Si $0 \le t_1 \le T$ y $0 \le t_2 \le T$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(A \le x_1, A \le x_2)$
  - Si $x_1 < -1 \lor x_2 < -1$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = 0$

  Si $(-1 < x_1 < 1) \lor (-1 < x_2 < 1)$
  - Si $-1 < x_1 < 1$ y $-1 < x_2 < 1$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = 1 - p$
  - Si $(-1 < x_1 < 1$ y $x_2 > 1) \lor (x_1 > 1$ y $-1 < x_2 < 1)$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = 1 - p$
  - Si $x_1 > 1 \lor x_2 > 1$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = 1$



- Si $t_1 > T$ y $t_2 > T$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(0 \le x_1, 0 \le x_2) = \mathbb{1}\{x_1 \ge 0\}\mathbb{1}\{x_2 \ge 0\}$
- Si $0 \le t_1 \le T$ y $t_2 > T$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(A \le x_1, 0 \le x_2) = \left[(1-p)\,\mathbb{1}\{x_1 > -1\} + p\,\mathbb{1}\{x_1 > 1\}\right]\mathbb{1}\{x_2 \ge 0\}$
- Si $t_1 > T$ y $-1 \le t_2 \le T$: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = \left[(1-p)\,\mathbb{1}\{x_2 > -1\} + p\,\mathbb{1}\{x_2 > 1\}\right]\mathbb{1}\{x_1 > 0\}$.

3. Determine $\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ y $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$.

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A g(t)] = \mathbb{E}[A]\, g(t) = [(-1)(1-p) + p]\, g(t) = \begin{cases} 2p-1 & 0 \le t \le T \\ 0 & eoc \end{cases}$$

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)\, X_2(t_2)] = \mathbb{E}[A^2 g(t_1) g(t_2)] = \underbrace{\mathbb{E}[A^2]}_{1}\, g(t_1) g(t_2)$$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \le t_1 < T \wedge 0 \le t_2 \le T \\ 0 & eoc \end{cases}$$

4. Analice si el proceso es estacionario tanto en sentido estricto como en sentido amplio.

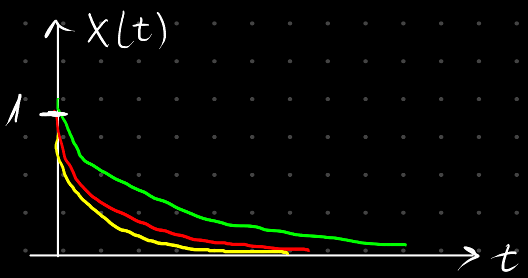
No es ESA pues $\mu_X(t)$ varía con el tiempo. Menos va a ser ESE.

Ejercicio 2

Considere el proceso aleatorio $X(t) = e^{At}, t \ge 0$, donde $A \sim \mathcal{U}[-2, -1]$.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(t)$ y grafique el conjunto de realizaciones $\mathcal{S}$.

Es un PA continuo en tiempo continuo.



2. Halle la función de distribución de primer y segundo orden de $X(t)$.

$$F_{X(t)}(x) = \mathbb{P}(X(t) \le x) = \mathbb{P}(e^{At} \le x) = \mathbb{P}\left(A \le \tfrac{1}{t}\ln(x)\right)$$

$$= F_A\left(\tfrac{1}{t}\ln(x)\right) = \begin{cases} \frac{1}{t}\ln(x) + 2 & \text{si } e^{-2t} \le x \le e^{-t} \\ 1 & \text{si } x > e^{-t} \\ 0 & eoc \end{cases}$$

$$F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(e^{At_1} \le x_1, e^{At_2} \le x_2) = \mathbb{P}\left(A \le \tfrac{1}{t_1}\ln(x_1),\ A \le \tfrac{1}{t_2}\ln(x_2)\right)$$

Si $x_1 < e^{-2t_1} \vee x_2 < e^{-2t_2}$: $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = 0$

Si $x_1 > e^{-t_1}$: $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{t_2}\ln(x_2) + 2 & \text{si } e^{-2t_2} \le x_2 \le e^{-t_2} \\ 1 & \text{si } x_2 > e^{-2t_2} \\ 0 & eoc \end{cases}$

Si $x_2 > e^{-t_2}$: $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{t_1}\ln(x_1) + 2 & \text{si } e^{-2t_1} \le x_1 \le e^{-t_1} \\ 1 & \text{si } x_1 > e^{-2t_1} \\ 0 & eoc \end{cases}$

Si $e^{-2t_1} \le x_1 \le e^{-t_1}$ y $e^{-2t_2} \le x_2 \le e^{-t_2}$:

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} F_A\left(\frac{1}{t_1}\ln(x_1)\right) & \text{si} \quad \frac{1}{t_1}\ln(x_1) \leq \frac{1}{t_2}\ln(x_2) \\ F_A\left(\frac{1}{t_2}\ln(x_2)\right) & \text{eoc.} \end{cases}$$

3. Determine $\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ y $R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$.

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[e^{At}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} f_A(a)\,da = \int_{-2}^{-1} e^{at}\,da = \frac{1}{t} e^{at}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{t}\left[e^{-t} - e^{-2t}\right]$$

(para $t \neq 0$)

$\mu(0) = \underline{1}$.

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[e^{At_1} e^{At_2}] = \mathbb{E}[e^{A(t_1+t_2)}] = \int_{-2}^{-1} e^{a(t_1+t_2)}\,da = \frac{1}{t_1+t_2}\left[e^{-(t_1+t_2)} - e^{-2(t_1+t_2)}\right]$$

(para $t_1 \neq 0 \vee t_2 \neq 0$)

$R_X(0,0) = 1$.

4. Analice si el proceso es estacionario tanto en sentido estricto como en sentido amplio.

No es ESA pues $\mu_X(t)$ depende de t. Menos es ESE.

Ejercicio 3

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio tal que

$$\mathbb{E}[X(t)] = 3, \qquad \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = 9 + 4e^{-2|t_1-t_2|}.$$

1. Encuentre la media, la varianza y la covarianza de las variables aleatorias $X(5)$ y $X(8)$.
2. ¿Es $X(t)$ un proceso ESA?

1\. $\mu_X(5) = \mathbb{E}[X(5)] = 3$ $\qquad \mu_X(8) = 3$

$$\sigma_X^2(5) = \mathbb{E}[X^2(5)] - \mathbb{E}[X(5)]^2$$
$$= \mathbb{E}[X(5)X(5)] - \mu_X^2(5)$$

$\therefore \sigma_X^2 = 13$ $\qquad \sigma_X^2(8) = 13$

$$C_X(5,8) = R_X(5,8) - \mu_X(5)\mu_X(8) = \mathbb{E}[X(5)X(8)] - 9 = 4 \times e^{-6} \cong 0{,}01.$$

2\. Es ESA pues $\mu_X(t)$ es constante y $R_X(t_1,t_2)$ solo depende de $\tau = |t_1 - t_2|$.

Ejercicio 4

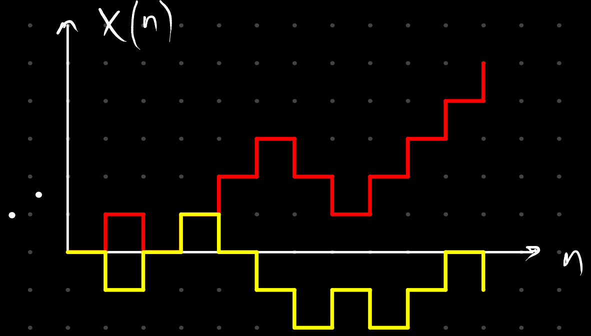
El objetivo de este ejercicio es analizar un proceso aleatorio particular conocido como *random walk*. Sea $U(n)$ un proceso aleatorio en tiempo discreto que a cada instante n puede tomar los valores $\{-1,+1\}$ de modo independiente, con

$$p_U(+1) = p, \qquad p_U(-1) = 1-p.$$

A cada instante n, definimos $X(n) = X(n-1) + U(n)$, con $X(0) = 0$ para todas las realizaciones del proceso. El proceso $X(n)$ es un *random walk*.

1. Identifique qué tipo de proceso es $X(n)$ y grafique dos posibles realizaciones.

Es un proceso discreto en tiempo discreto.



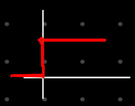
Obs:

$$X(n) = \sum_{j=1}^{n} U(j)$$

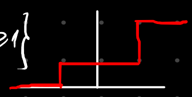
2. Encuentre la función de distribución de primer orden de $X(n)$.

$$F_{X(n)}(x) = \mathbb{P}(X(n) \leq x)$$

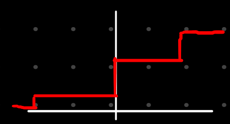
Para $n=0$: $F_{X(0)}(x) = \mathbb{1}\{x \geq 0\}$



Para $n=1$: $F_{X(1)}(x) = (1-p)\,\mathbb{1}\{x \geq -1\} + p\,\mathbb{1}\{x \geq 1\}$



Para $n=2$: $F_{X(2)}(x) = (1-p)^2\,\mathbb{1}\{x \geq -2\} + 2(1-p)p\,\mathbb{1}\{x \geq 0\} + p^2\,\mathbb{1}\{x \geq 2\}$



Para $n=3$: $F_{X(3)}(x) = (1-p)^3\,\mathbb{1}\{x \geq -3\} + 3(1-p)^2 p\,\mathbb{1}\{x \geq -1\} + 3(1-p)p^2\,\mathbb{1}\{x \geq 1\} + p^3\,\mathbb{1}\{x \geq 3\}$.

$$\boxed{F_{X(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} p^j (1-p)^{n-j}\,\mathbb{1}\{x \geq n-2j\}}$$

3. Calcule la media, la varianza, y la función de autocorrelación de $X(n)$.

$$\boxed{\mu_{X}(n)} = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} U(j)\right] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[U(j)]}_{p-(1-p)} = \boxed{n(2p-1)}$$

$$\sigma_X^2(n) = \mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{n} U(j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}(U(j)) = \sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{\mathbb{E}[U^2(j)]}_{1} - \mathbb{E}[U(j)]^2\right) = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(1-(2p-1)^2\right)}$$

$$= 1 - 4p^2 + 4p - 1$$
$$= 4p(1-p)$$

$$\boxed{\sigma_X^2(n) = 4np(1-p)}$$

$$\boxed{R_X(n_1,n_2)} = \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n_1} U(j)\right)\left(\sum_{k=1}^{n_2} U(k)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2} U(j)U(k)\right]$$

$$= m + (n_1 n_2 - m)(2p-1)^2 = \boxed{4p(1-p)m + n_1 n_2 (2p-1)^2}, \quad m = \min\{n_1, n_2\}.$$

4. Genere $N = 10^4$ realizaciones de $X(n)$ para $p = 0,1; 0,5; 0,9$ y verifique numéricamente los resultados anteriores.

Ver archivo de Matlab.

Ejercicio 5

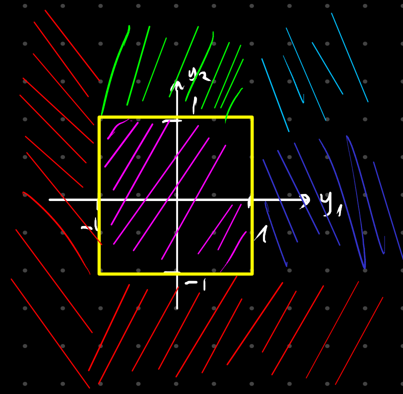
Sea $X(t)$ un proceso aleatorio a partir del cual se construye un nuevo proceso $Y(t) = \text{sign}[X(t)]$, es decir, $Y(t) = 1$ si $X(t) \geq 0$, $Y(t) = -1$ en otro caso.

1. Determine la función de distribución de primer y segundo orden de $Y(t)$.
2. Hallar $\mu_Y(t)$ y $R_Y(t_1, t_2)$.
3. Suponga que $X(t)$ es ESA. ¿Es $Y(t)$ un proceso ESA?

1.

$$F_{Y(t)}(y) = \mathbb{P}(Y(t) \leq y) = \mathbb{P}(\text{sign}(X(t)) \leq y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < -1 \\ \mathbb{P}(X(t) \leq 0) = F_{X(t)}(0) & , \quad -1 \leq y < 1 \\ 1 & , \quad y > 1 \end{cases}$$

$$F_{Y(t_1), Y(t_2)}(y_1, y_2) = \mathbb{P}(Y(t_1) \leq y_1, \ Y(t_2) \leq y_2) = \mathbb{P}(\text{sign}(X(t_1)) \leq y_1, \ \text{sign}(X(t_2)) \leq y_2)$$



$$F_{Y(t_1), Y(t_2)}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & y_1 < -1 \ \vee \ y_2 < -1 \\ F_{X(t_1), X(t_2)}(0,0) & -1 \leq y_1 < 1 \ \wedge \ -1 \leq y_2 < 1 \\ F_{X(t_2)}(0) & y_1 > 1 \ \wedge \ -1 \leq y_2 < 1 \\ F_{X(t_1)}(0) & -1 \leq y_1 < 1 \ \wedge \ y_2 > 1 \\ 1 & \text{eoc} \end{cases}$$

2.

$$\mu_{Y(t)} = \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[\text{sign}(X(t))] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\text{sign}(X(t)) \mid M]\big], \quad M = \mathbb{1}\{X \geq 0\}$$

$$= -1 \times \mathbb{P}(X(t) < 0) + 1 \times \mathbb{P}(X(t) \geq 0) = -\mathbb{P}(X(t) < 0) + (1 - \mathbb{P}(X(t) < 0))$$

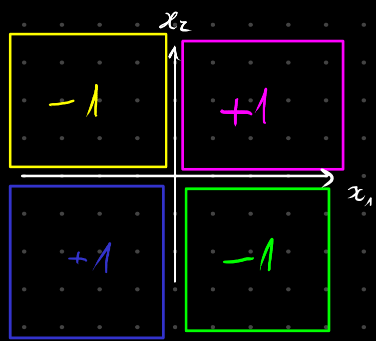
$$\mathbb{E}[\text{sign}(X(t)) \mid M = 0] = -1$$
$$\mathbb{E}[\text{sign}(X(t)) \mid M = 1] = 1$$

$$\boxed{\mu_{Y}(t) = 1 - 2\mathbb{P}(X(t) < 0)}$$

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[Y(t_1) \, Y(t_2)] = \mathbb{E}[\text{sign}(X(t_1)) \, \text{sign}(X(t_2))]$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 + \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$

$$- \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{+\infty} f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 - \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$



3. Si $X(t)$ es ESA, entonces $\mu_X(t)$ es constante, y $R_X(t_1, t_2)$ es solo función de $|t_1 - t_2|$.

El chat se puso creativo. sea $X(t)$ de tiempo discreto, tal que

$$X(t) = \begin{cases} 2 & \text{con prob. } 1/3 \\ -1 & \text{con prob. } 2/3 \end{cases} \quad \text{si } t \text{ es par.}$$

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 2/3 \\ -2 & \text{con prob. } 1/3 \end{cases} \quad \text{si } t \text{ es impar.}$$

$$\boxed{\mu_X(t) = 0}$$ para todo t.

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[X(t_1)\,X(t_2)\right]$$

Si t_1 y t_2 son pares

$$R_X(t_1,t_2) = 4\times\frac{1}{9} - 2\times\frac{4}{9} + 1\times\frac{4}{9} = 0$$

Si t_1 y t_2 son impares

$$R_X(t_1,t_2) = 1\times\frac{4}{9} + 4\times\frac{1}{9} - 2\times\frac{4}{9} = 0$$

Si t_1 par y t_2 impar:

$$R_X(t_1,t_2) = 2\times\frac{2}{9} - 4\times\frac{1}{9} - 1\times\frac{4}{9} + 2\times\frac{2}{9} = 0$$

Si t_1 impar y t_2 par

$$R_X(t_1,t_2) = \cdots = 0.$$

$$\boxed{R_X(t_1,t_2) = 0}$$

X es ESA.

$Y = \text{sign}(X)$

$$\mu_Y(t) = \begin{cases} -1\times\frac{2}{3} + 1\times\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} & \text{si } t \text{ es par} \\ 1\times\frac{2}{3} - 1\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3} & \text{si } t \text{ es impar} \end{cases}$$

Y no es ESA.

Ejercicio 6

En este ejercicio vamos a considerar la generación de procesos aleaotorios a partir de un proceso Bernoulli con muestras independientes. Sea $B(n)$ un proceso Bernoulli de parámetro λ, es decir, $\mathbb{P}(B(n) = 1) = \lambda$, $\mathbb{P}[B(n) = 0] = 1 - \lambda$, i.i.d.

1. Considere $X(n) = B(n)^2$. ¿Es éste un proceso estacionario? Calcule $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Ahora $X(n) = (-1)^n B(n)$.¿ Es éste un proceso estacionario? Calcule $\mathbb{E}[X(n)]$.
3. Considere ahora 2 procesos Bernoulli independientes, $B_1(n)$, con parámetro λ_1 y $B_2(n)$, con parámetro λ_2. Forme ahora el siguiente proceso

$$X(n) = \begin{cases} B_1(n) & \text{si } X(n-1) = 0 \\ B_2(n) & \text{si } X(n-1) = 1 \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

con $\mathbb{P}[X(0) = 1] = p$. Grafique distintas realizaciones de dicho proceso para $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = 0{,}1$. Determine si $X(n)$ es estacionario o no y analice el comportamiento asintótico, es decir, cuando $n \to \infty$.

1. $$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}[B(n)^2] = \underbrace{\text{var}(b(n))}_{\lambda(1-\lambda)} + \underbrace{\mathbb{E}[B(n)]^2}_{\lambda^2} = \lambda$$

$$\boxed{\mu_X(n) = \lambda}$$

$$R_X(n,m) = \mathbb{E}\left[X(n)\,X(m)\right] = \mathbb{E}\left[B(n)^2\,B(m)^2\right] = \begin{cases} \lambda & m = n \\ \lambda^2 & m \neq n \end{cases}$$

$$\boxed{R_X(\tau) = \begin{cases} \lambda & \tau = 0 \\ \lambda^2 & \tau \neq 0 \end{cases}}$$ Es ESA.

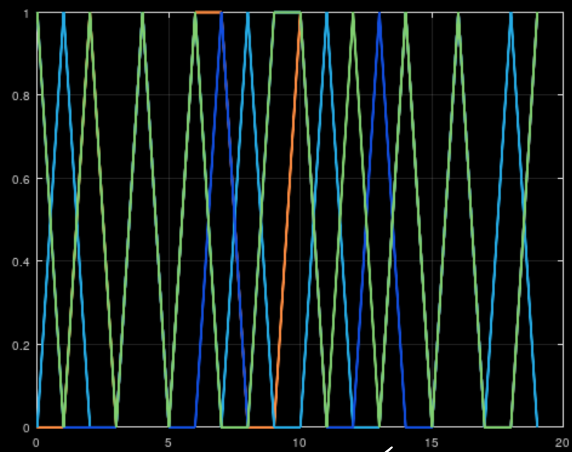
2. $X(n) = (-1)^n B(n)$.

$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}[(-1)^n B(n)] = (-1)^n \lambda$ (no es ESA)

$$\boxed{\mu_X(n) = (-1)^n \lambda}$$

3. $X(n) = \begin{cases} B_1(n) & \text{si } X(n-1) = 0 \\ B_2(n) & \text{si } X(n-1) = 1 \end{cases}$, $n \geq 1$.

$\mathbb{P}(X(0)=0) = p$.



$\mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X(n) | X(n-1)]]$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X(n) | X(n-1) = 0] = \mathbb{E}[B_1(n)] = \lambda_1 \\ \mathbb{E}[X(n) | X(n-1) = 1] = \mathbb{E}[B_2(n)] = \lambda_2 . \end{cases}$$

$\mathbb{E}[X(0)] = p$. $\mathbb{E}[X(n)] = \underbrace{\mathbb{P}(X(n-1)=0)}_{1-\mathbb{P}(X(n-1)=1)} \lambda_1 + \underbrace{\mathbb{P}(X(n-1)=1)}_{\mathbb{E}[X(n-1)]} \lambda_2$ $(p = 0,5)$

$= (1 - \mathbb{E}[X(n-1)]) \lambda_1 + \lambda_2 \mathbb{E}[X(n-1)] = (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbb{E}[X(n-1)] + \lambda_1$

No es ESA.

$\lim_{n\to\infty} (\mathbb{E}[X(n)] - (\lambda_2 - \lambda_1) \underbrace{\mathbb{E}[X(n-1)]}_{\to \mathbb{E}[X(n)]}) = \lambda_1$ ¿cómo justifico?

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X(n)] (1 - (\lambda_2 - \lambda_1)) = \lambda_1$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X(n)] = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 - \lambda_2}$

Para n muy grande, $\mathbb{E}[n] = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1-\lambda_2} = 0,3571$ (constante).

Creo que es ESA para $n \to \infty$ pero no sé qué hacer.

Chat sugiere: $p_n = \mathbb{P}(X(n) = 1)$.

$p_n = \lambda_1 (1 - p_{n-1}) + \lambda_2 p_{n-1} = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) p_{n-1}$.

Para $n \to \infty$, $p_n \to p_{n-1}$ y entonces

$p_n = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) p_n \Rightarrow p_n = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 - \lambda} \Rightarrow \mathbb{E}[X(n)] \to \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1-\lambda_2}$

Es más o menos lo mismo que hice antes pero más fácil.

$X(n)$ converge en distribución a un Bernoulli con parámetro $\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1-\lambda_2}$

Ejercicio 7

Un módem transmite una secuencia de datos del siguiente modo: transmite un 1 enviando un pulso de duración T segundos y amplitud 1; transmite un 0 enviando el mismo pulso con amplitud -1. En la figura se muestra como ejemplo la transmisión de la secuencia de datos 1011. La señal transmitida $X(t)$ responde a la ecuación siguiente

$$X(t) = \sum_n A_n p(t - nT - T_0),$$

donde $p(t)$ es un pulso de amplitud unitaria y duración T, A_n son variables aleatorias i.i.d. que toman el valor 1 o -1 según los datos a transmitir, y T_0 es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ que representa la fase de la señal transmitida. Se asume que T_0 y A_n son variables aleatorias independientes entre sí. Éste es un ejemplo de una señal binaria aleatoria.

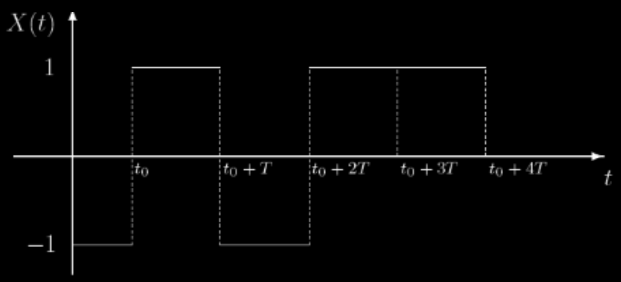


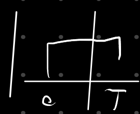
Figura 1: Ejemplo de transmisión de la secuencia de datos 1011

1. Calcular $\mathbb{E}[X(t)]$.

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\Big[\sum_n A_n p(t-nT-T_0)\Big] = \sum_n \mathbb{E}[A_n p(t-nT-T_0)] = \sum_n \mathbb{E}[A_n]\,\mathbb{E}[p(t-nT-T_0)]$$

$$= \sum_n \mu_{A_n} \int_0^T p(t-nT-t_0)\frac{1}{T}\,dt_0$$

$$\int_0^T p(t-nT-t_0)\,dt_0 \underset{\substack{w = t-nT-t_0 \\ dw = -dt_0}}{=} \int_{t-(n+1)T}^{t-nT} p(w)\,dw = \begin{cases} t-nT & nT < t < (n+1)T \\ (n+2)T - t & (n+1)T < t < (n+2)T \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$



$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{\mu_A}{T}\left(t - \lfloor \tfrac{t}{T} \rfloor T + (\lfloor \tfrac{t}{T} \rfloor + 1)T - t\right) = \mu_A .$$

2. Calcular la función de autocorrelación de $X(t)$. Para ello, suponga que $\mu_A = 0$.

$$R_X(t, t+\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] = \mathbb{E}\Big[\sum_n A_n p(t-nT-T_0) \sum_m A_m p(t+\tau-nT-T_0)\Big]$$

$$= \sum_n \sum_m \mathbb{E}[A_n A_m]\,\mathbb{E}[p(t-nT-T_0)\,p(t+\tau-nT-T_0)]$$

Para $n \neq m$, $\mathbb{E}[A_n A_m] = \mathbb{E}[A_n]\mathbb{E}[A_m] = 0$.
Para $n = m$, $\mathbb{E}[A_n^2] = 1$

$$= \sum_n \mathbb{E}[p(t-nT-T_0)\,p(t+\tau-nT-T_0)]$$

Si $|\tau| > T$, $p(t-nT-T_0)\,p(t+\tau-nT-T_0) = 0 \quad \forall n$

Si $|\tau| < T$: $\sum_n \mathbb{E}[p(t-nT-T_0)\,p(t+\tau-nT-T_0)] = \sum_n \frac{1}{T}\int_0^T p(t-nT-t_0)\,p(t+\tau-nT-t_0)\,dt_0$

$\alpha = t - nT - t_0$
$d\alpha = -dt_0$
$\alpha(t_0 = 0) = t - nT$
$\alpha(t_0 = T) = t - (n+1)T$

$$= \sum_n \frac{1}{T}\int_{t-(n+1)T}^{t-nT} p(\alpha)\,p(\alpha+\tau)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{T}\begin{cases} \tau + T, & -T < \tau < 0 \\ T - \tau, & 0 < \tau < T \end{cases}$$

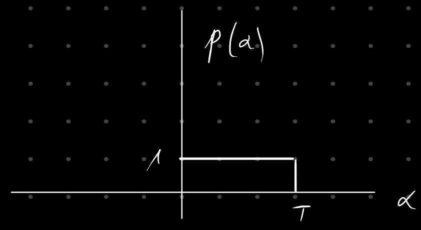
$\tau + T,$

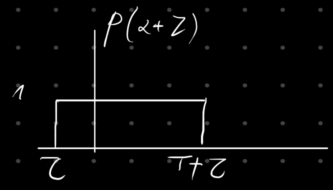
$, \quad T < \tau < 2T$

$\tau = -T \to 0$

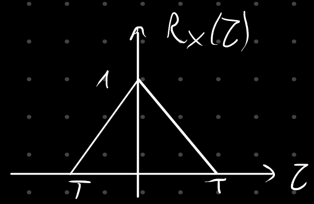
$\tau = 0 \to T$

$\tau = T \to 0$





$$R_X(\tau) = \begin{cases} \tau + T, & -T < \tau < 0 \\ T - \tau, & 0 < \tau < T \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$



3. Determinar si $X(t)$ es ESA o no.

Sí es ESA (μ_X cte. y $R_X(t, t+\tau)$ solo función de τ).

4. ¿Varían los resultados si siempre $T_0 = 0$?

Ahora $p(t - nT - T_0)$ ya no es VA.

- $E[X(t)] = \sum_n p(t-nT)\, E[A_n] = \mu_A \sum_n p(t-nT) = \mu_A$ (no cambia).

- $R_X(t, t+\tau) = E\left[\sum_n A_n\, p(t-nT) \sum_m A_m\, p(t+\tau-mT)\right]$

$= \sum_n p(t-nT)\, p(t+\tau-nT)$, suponiendo $\mu_A = 0$.

Si $|\tau| > T$: $R_X(t, t+\tau) = 0$

Si $|\tau| < T$: $R_X(t, t+\tau)$ depende de t.

No es ESA.

Ejercicio 8

Este ejercicio tiene mayor dificultad y trabaja las habilidades analíticas. En particular, recurre a las observaciones que se utilizaron al demostrar el teorema de Wiener-Kintchin.

Sea $X(t)$ un proceso ESA gaussiano de media nula y autocorrelación

$$R_X(\tau) = (1 - |\tau|)\mathbb{1}\{|\tau| \leq 1\}.$$

Hacer

Suponga que se genera el siguiente proceso en tiempo discreto:

$$Z(n) = \int_{n-1}^{n} X(s)ds, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1. Halle la media y la autocorrelación R_Z del proceso $Z(n)$, y demuestre que el proceso es ESA.
   Ayuda: Recuerde la demostración del teorema de WK.
2. Halle la función de distribución conjunta del vector $\mathbf{Z}(n) = [Z(n), Z(n-1), Z(n-2)]^T$.

Ejercicio 9

Un PLL es un dispositivo utilizado en los receptores de comunicaciones para estimar la fase de la "portadora"$\sin(w_c t + \Theta_i(t))$, donde w_c es su frecuencia angular y $\Theta_i(t)$ es su fase en medidas en el receptor. En la Fig. 2 se muestra un modelo lineal del PLL, donde K_d y K_0 son constantes y $F(s)$ es la transferencia del *filtro de lazo*. En este problema consideraremos $F(s) = \alpha$. Por último, $N(t)$ es un proceso estocástico blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia (PSD) $N_0/2$.

De este modo, el PLL resulta un sistema con dos entradas, $N(t)$ y Θ_i y una salida, Θ_o.

1. Obtenga las dos transferencias a lazo cerrado del PLL $H(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)}$ y $G(s) = \frac{\theta_o(s)}{n(s)}$.
2. Obtenga la PSD y varianza de la componente de ruido a la salida del PLL cuando sólo se considera el ruido a la entrada.
3. Calcule $R_o(k)$, la función de autocorrelación del ruido a la salida del PLL cuando se considera sólo el ruido. Verifique el cálculo de la varianza del punto anterior evaluando $R_o(0)$.—

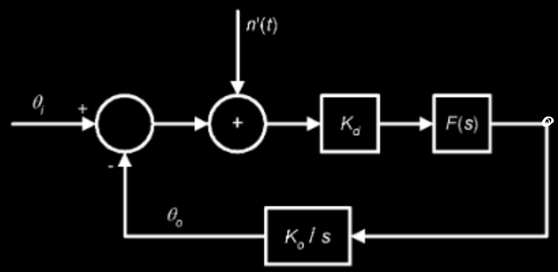


Figura 2: Modelo lineal de un PLL.

1. $$H(s) = \frac{K_d F(s) K_o/s}{1 + K_d F(s) K_o/s} = \frac{\alpha K_d K_o}{s + \alpha K_d K_o}$$

$$G(s) = \frac{K_d F(s) K_o/s}{1 + K_d F(s) K_o/s} = \frac{\alpha K_d K_o}{s + \alpha K_d K_o}$$

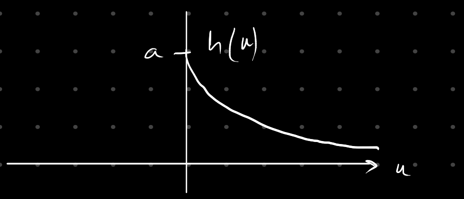
son la misma.

3. Como $N(t)$ es ESA, la salida tendrá la siguiente autocorrelación:

$$R_{\theta_o}(\tau) = (h * \tilde{h} * R_N)(\tau)$$

Pero $R_N(\tau) = \frac{N_o}{2}\delta(t) \Rightarrow R_{\theta_o}(\tau) = \frac{N}{2}(h * \tilde{h})(\tau)$, $\quad \tilde{h}(t) = h(-t)$

vemos que $h(t) = a e^{-at}$, $\quad a = \alpha K_d K_o$.

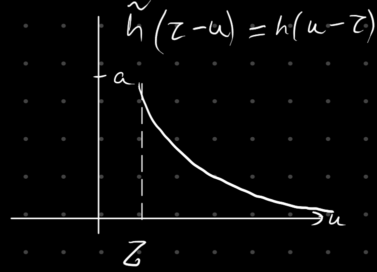


Si $\tau < 0$:

$$R_{\theta_o}(\tau) = \frac{N_o}{2} a^2 \int_0^{+\infty} e^{-au} e^{-a(u-\tau)} du$$

$$= \frac{N_o}{2} a^2 e^{a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2au} du$$

$$= \frac{N_o}{2} a^2 e^{a\tau} \frac{1}{2a} = \frac{N_o}{4} a e^{a\tau}$$



Si $\tau > 0$:

$$R_{\theta_o}(\tau) = \frac{N_o}{2} a^2 e^{a\tau} \int_\tau^{+\infty} e^{-2au} du = \frac{N_o}{2} a^2 e^{a\tau} \frac{e^{-2a\tau}}{2a} = \frac{N_o}{4} a e^{-a\tau}$$

$$\therefore \boxed{R_{\theta_o}(\tau) = \frac{N_o}{4} a e^{-a|\tau|}}$$

$$\mu_{\Theta_0} = \overset{0}{\tilde{\mu}_N}\,|H(0)| = 0$$

$$\boxed{Var(\Theta_0) = R_{\Theta_0}(0) - \mu_{\Theta_0}^2 = \frac{N_0 a}{4}}$$

2.

$$\boxed{S_{\Theta_0}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{\Theta_0}\}(\omega) = \mathcal{F}\{h * \tilde{h} * R_N\}(\omega) = \frac{N_0}{2} H(\omega)\underbrace{\tilde{H}(\omega)}_{H^*(\omega)} = \frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2 = \frac{N_0}{2}\frac{a^2}{\omega^2+a^2}}$$

$$\boxed{\sigma_{\Theta_0}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Theta_0}(\omega)\,d\omega = \frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2}{\omega^2+a^2}\,d\omega = \frac{N_0}{4}a}$$

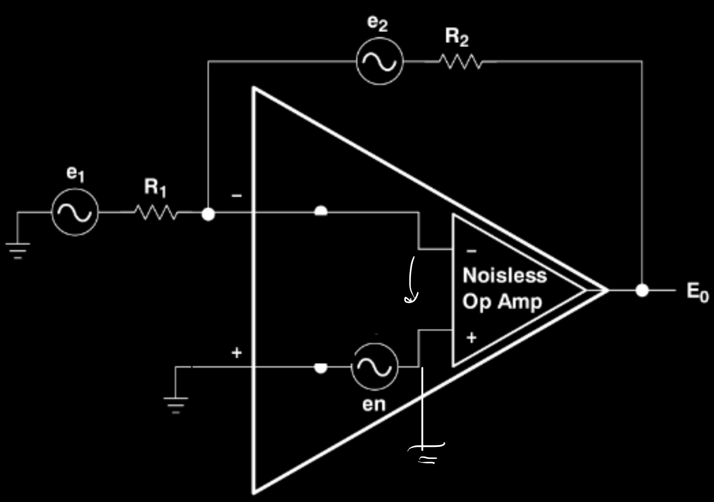
Ejercicio 10

Un amplificador operacional (OPAMP) presenta fundamentalmente dos fuentes de ruido: ruido térmico (ó ruido Johnson-Nyquist) y ruido *flicker* (ó ruido $1/f$). Ambos son modelados a través de la fuente de tensión $e_n(t)$ en la Fig. 3, cuyo valor cuadrático medio es $\bar{e_n^2} = \bar{e_w^2}(f_h - f_l + f_{nc}\log\frac{f_h}{f_l})$, donde $\bar{e_w^2}$ es el valor cuadrático medio del ruido blanco, f_h y f_l especifican el ancho de banda de funcionamiento del circuito y f_{nc} es la frecuencia de corte del ruido $1/f$. $\bar{e_w^2}$ y f_{nc} son datos del fabricante.

Por otro lado, un resistor de resistencia R presenta ruido térmico que puede ser modelado por ruido blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia unilateral $N_0 = 4kTR$ $[V^2/Hz]$, donde k e sla constante de Boltzmann y T es la temperatura en el circuito . Todas las fuentes de ruido pueden ser consideradas independientes.

1. Determine la ganancia del circuito inversor A.
2. Usando el principio de superposición, determine la varianza de ruido a la salida del OPAMP en términos de A. ¿Cómo influyen los resistores, el ancho de banda, la ganancia del circuito y la frecuencia de corte de ruido del OPAMP en dicha varianza?

1. $A = -R_2/R_1$



2. El ruido térmico de R_1 sufre una ganancia de

$$\frac{E_0}{e_1} = \frac{-R_2}{R_1}$$

por lo que su contribución a la varianza aumenta a

$$|A|^2 4kTR_1B = 4kT\frac{R_2^2}{R_1}B$$

con $B = f_h - f_l$ el ancho de banda.

El ruido térmico de R_2 no sufre ganancia pues está en serie con la salida, entonces contribuye con

$$4kTR_2B$$

a la varianza.

Finalmente, el ruido flicker y térmico del opamp se amplifica según

$$\frac{E_0}{e_n} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

así que contribuye a la varianza de la salida según

$$\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \bar{e_w^2}\left(B + f_{nc}\log\left(\frac{f_h}{f_l}\right)\right)$$

La varianza del ruido a la salida es $$\sigma_o^2 = 4kTBR_2\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) + \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \bar{e}_w^2 \left(B + f_{nc}\log\left(\frac{f_h}{f_l}\right)\right)$$

A mayor R_2, mayor varianza del ruido (mayor potencia), lógico pues aumenta la ganancia.
A mayor R_1, menor varianza del ruido, pues disminuye la ganancia.
A mayor ancho de banda, mayor varianza del ruido de salida pues entra más ruido a la entrada.
A mayor ganancia, más ruido.
A mayor frecuencia de corte, más ruido también.