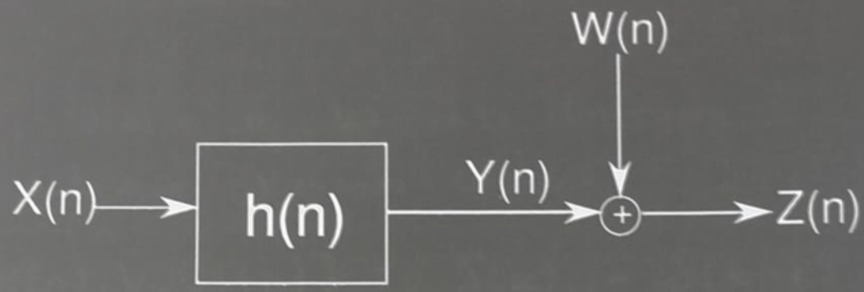
Ejercicio 1



El diagrama en bloque de la figura muestra un sistema causal en tiempo discreto donde:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{4} & n = 0, \cdots 3 \\ 0 & \text{todo otro } n \end{cases}.$$

- $X(n)$ es un proceso blanco de varianza unitaria.
- $W(n)$ también es blanco y de varianza unitaria, para el cual

$$\mathbb{E}[X(n)W(n+k)] = \delta(k) + \delta(k-1).$$

1. Determine si $Y(n)$ y $Z(n)$ son procesos ESA.
2. Obtenga $R_Y(k_1, k_2)$ y $S_Y(\omega)$.
3. Obtenga $R_Z(k_1, k_2)$ y $S_Z(\omega)$.

1. Como X(n) es ruido blanco, es ESA. Como además el sistema H es LTI, entonces, la salida Y(n) es ESA.

$Z(n) = Y(n) + W(n)$

$\mathbb{E}[Z(n)] = \mathbb{E}[Y(n)] + \overbrace{\mathbb{E}[W(n)]}^{0} = \mu_Y$

$\mathbb{E}[Y(n)W(n+k)] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j)X(n-j)\, W(n+k)\right]$

$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j)\, \mathbb{E}[X(n-j)W(n+k)] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j) R_{X,W}(k+j)$

$= h(-k) + h(1-k)$: función de k

Y es ESA ↓ W es ESA ↓

$\mathbb{E}[Z(n)Z(n+k)] = \mathbb{E}\left[(Y(n)+W(n))(Y(n+k)+W(n+k))\right] = R_Y(k) + R_W(k) + \mathbb{E}[Y(n+k)W(n)] + \mathbb{E}[Y(n)W(n+k)]$

$= R_Y(k) + R_W(k) + R_{Y,W}(-k) + R_{Y,W}(k)$: función solo de k.

$0 \leq 1-k \leq 3 \Rightarrow 0 \geq k-1 \geq -3$

$1 \geq k \geq -2$

Alcanzaba con decir que como Y(n) y W(n) son ESA, su suma es ESA?

2. $R_Y(k) = (h * \tilde{h} * R_X)(k)$

$(h*\tilde{h})(k) = \frac{1}{16}\left(\delta(k+3) + \delta(k-3)\right) + \frac{2}{16}\left(\delta(k+2) + \delta(k-2)\right)$

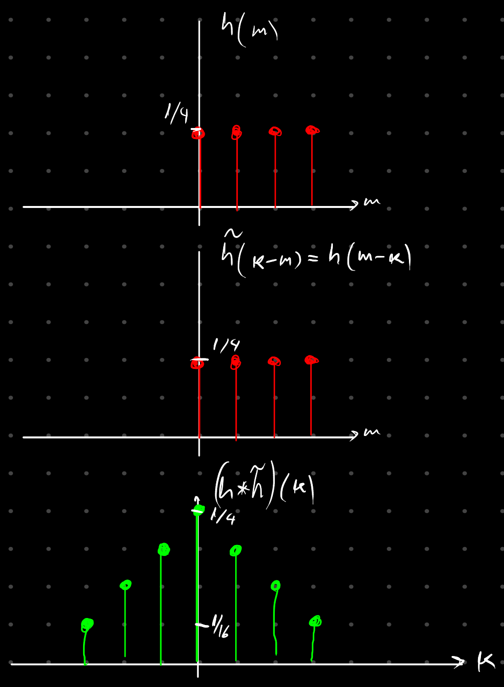
$+ \frac{3}{16}\left(\delta(k+1) + \delta(k-1)\right) + \frac{4}{16}\delta(k) = \begin{cases} \frac{4-|k|}{16} & |k| \leq 3 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$

Como $R_X(k) = \delta(k)$, entonces

$$\boxed{R_Y(k) = (h*\tilde{h})(k) = \begin{cases} \frac{4-|k|}{16} & |k| \leq 3 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}}$$

$S_Y(\omega) \overset{WK}{=} \mathcal{F}\{R_Y\}(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\, 2\cos(\omega) + \frac{1}{8}\, 2\cos(2\omega) + \frac{1}{16}\, 2\cos(3\omega)$

$$\boxed{S_Y(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\cos(\omega) + \frac{1}{4}\cos(2\omega) + \frac{1}{8}\cos(3\omega)}$$



3. $R_Z(k) = R_Y(k) + R_W(k) + R_{Y,W}(-k) + R_{Y,W}(k)$

$$= \frac{4-|k|}{16} \mathbb{1}\{|k| \le 3\} + \delta(k) + \underbrace{\frac{1}{4} \mathbb{1}\{-3 \le k \le 0\} + \frac{1}{4} \mathbb{1}\{-2 \le k \le 1\}}_{R_{Y,W}(k)} + \underbrace{\frac{1}{4} \mathbb{1}\{0 \le k \le 3\} + \frac{1}{4} \mathbb{1}\{-1 \le k \le 2\}}_{R_{Y,W}(-k)}$$

$$\boxed{R_Z(k) = \frac{9}{4} \delta(k) + \frac{15}{16} \delta(|k|-1) + \frac{5}{8} \delta(|k|-2) + \frac{5}{16} \delta(|k|-3)}$$

$$\boxed{S_Z(\omega) = \frac{9}{4} + \frac{15}{8} \cos(\omega) + \frac{5}{4} \cos(2\omega) + \frac{5}{8} \cos(3\omega)}$$