Ejercicio 1 - Senoidal ruidosa

Sea $X(n) = A\cos(2\pi\omega_0 n + \Phi) + N(n)$, donde A y ω_0 son constantes, Φ se encuentra uniformemente distribuida en $[0; 2\pi)$ y $N(n)$ es ruido blanco de densidad de potencia σ^2.

1. Obtenga la media $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Si $X(n)$ es un proceso ESA, obtenga la densidad espectral de potencia del mismo.
3. Suponga que $X(n)$ es la señal de entrada a un filtro pasabanda de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Compare la relación señal a ruido (SNR) a la entrada y a la salida del filtro. Extraiga conclusiones.

1. $$\mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\Big[\overbrace{A\cos(2\pi\omega_0 n + \phi)}^{M(n)} + N(n)\Big] = A\,\mathbb{E}[\cos(2\pi\omega_0 n + \phi)] + \cancelto{0}{\mathbb{E}[N(n)]}$$

$$= A\int_0^{2\pi} \cos(2\pi\omega_0 n + \varphi)\,\frac{1}{2\pi}\,d\varphi = \frac{A}{2\pi}\,\mathrm{sen}(2\pi\omega_0 n + \varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.$$

2. $$R_X(\tau) = \mathbb{E}\big[\{M(n) + N(n)\}\{M(n+\tau) + N(n+\tau)\}\big]$$

$$= R_M(\tau) + R_N(\tau) + R_{NM}(\tau) + R_{MN}(\tau)$$

Como N y M son independientes y con media nula, $R_{NM}(\tau) = 0 = R_{MN}(\tau)$.

$$R_M(\tau) = \mathbb{E}[A\cos(2\pi\omega_0 n + \phi)\,A\cos(2\pi\omega_0(n+\tau) + \phi)]$$

$$= A^2\,\mathbb{E}\Big[\tfrac{1}{2}\big(\cancelto{0}{\cos(4\pi\omega_0 n + 2\pi\omega_0\tau + 2\phi)} + \cos(2\pi\omega_0\tau)\big)\Big]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\omega_0\tau)$$

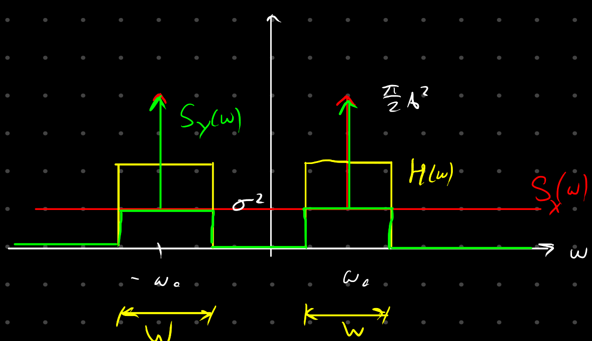
$$\therefore\ R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\omega_0\tau) + \sigma^2\delta(\tau)$$

$$S_X(\omega) \overset{WK}{=} \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}(\omega) = \frac{A^2}{2}\pi\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big) + \sigma^2$$

3. $$SNR_{in} = \frac{R_M(0)}{R_N(0)} = \frac{A^2/2}{\sigma^2} = \frac{A^2}{2\sigma^2}.$$

$$SNR_{out} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_R(\omega)\,d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_V(\omega)\,d\omega} = \frac{A^2/2}{\sigma^2\ W/\pi} = \frac{\pi A^2}{2\sigma^2 W}$$

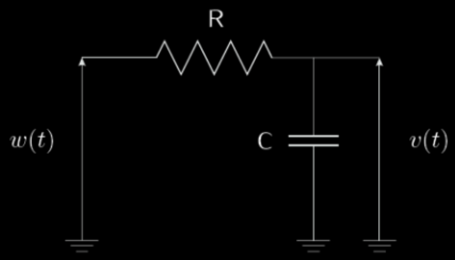
$$\boxed{\frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{\pi}{W}}$$



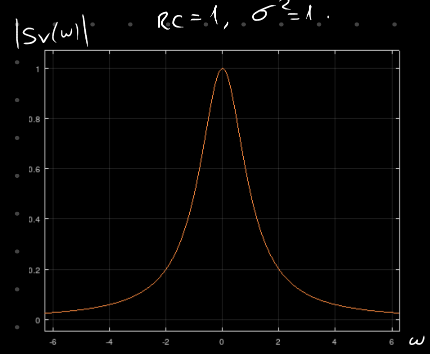
$$Y(n) = R(n) + \underbrace{V(n)}_{\text{ruido}}$$

Ejercicio 2 - Circuito RC

El circuito RC de la figura es excitado por una señal de ruido blanco con densidad espectral de potencia constante e igual a $N_0/2$. Calcule y grafique la densidad espectral de potencia de la salida del filtro y el valor de potencia total.



$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{W(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$



$w(t)$ ruido blanco con $S_w(\omega) = \sigma^2$.　　$\tilde{h}(t) = h(-t)$

$$v(t) = (h * w)(t) \Rightarrow R_v(\tau) = (h * \tilde{h} * R_w)(\tau)$$

$$\boxed{S_V(\omega) = \mathcal{F}\{R_V\}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_w(\omega) = \frac{\sigma^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{\sigma^2}{2RC}}$$

Ejercicio 3 - Promediador en tiempo continuo

Supongamos que $X(t)$ es un proceso integrable. La integral

$$Y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} X(u) du$$

representa el promedio del proceso $X(t)$ en el intervalo $(t - T, t + T)$.

1. Identifique la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema que al ser excitado por $X(t)$ produce a $Y(t)$ como salida.

$$h(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \delta(u) du = \frac{1}{2T} \left(u(t+T) - u(t-T) \right)$$

$$\boxed{H(\omega)} = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \frac{1}{2T} \left[\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \left(\underbrace{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}_{2j} \right) \right]$$

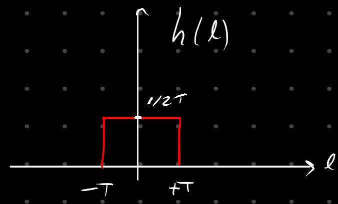
$$= \frac{1}{2T} \left[\left(2\pi j\delta(\omega) + \frac{2}{\omega} \right) \sin(\omega T) \right] = \boxed{\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi} \right)}$$

2. Encuentre la media, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $Y(t)$.

3. ¿Qué tipo de filtrado representa el promediador?

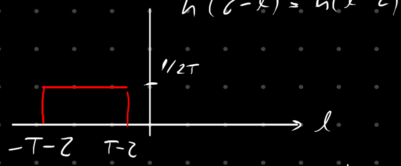
2. $E[Y(t)] = \mu_X H(0) = \mu_X$.

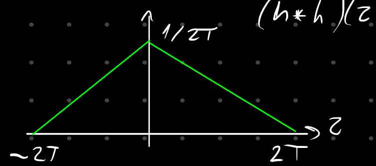
$$\boxed{R_Y(\tau) = (h * \tilde{h} * R_X)(\tau) = ((h * \tilde{h}) * R_X)(\tau)}$$



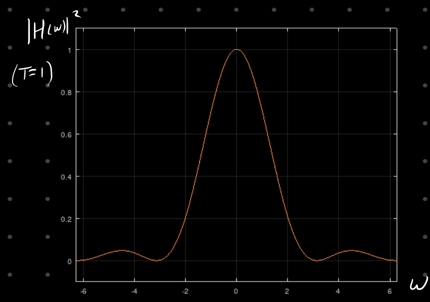
$$(h*\tilde{h})(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2T+\tau}{4T^2} & -2T < \tau < 0 \\ \dfrac{2T-\tau}{4T^2} & 0 < \tau < 2T \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

$\tilde{h}(\tau-\ell) = h(\ell-\tau)$





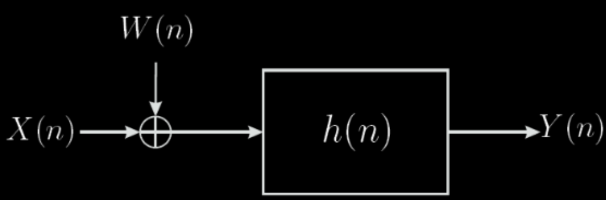
$$\boxed{S_Y(\tau) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) S_X(\omega)}$$



3. Realiza un filtrado pasabajos.

Ejercicio 4 - Escalamiento de señal ruidosa

Considere el sistema LTI mostrado en la figura, donde $X(n)$ y $W(n)$ son procesos ESA descorrelacionados entre sí. La varianza de $W(n)$ es σ_W^2 y la de $X(n)$ es σ_X^2.



1. Hallar la función de autocorrelación del proceso $Y(n)$.
2. Definiendo $E(n) = Y(n) - X(n)$, determine su función de autocorrelación.
3. Si $h(n) = \alpha\,\delta(n)$, elija el valor de α que minimice la varianza de $E(n)$.

1. $Y(n) = [h * (X+W)](n) = \underbrace{(h*X)(n)}_{Y_X} + \underbrace{(h*W)(n)}_{Y_W}$.

$R_Y(\tau) = R_{Y_X}(\tau) + R_{Y_W}(\tau) + R_{Y_X,Y_W}(\tau) + R_{Y_W,Y_X}(\tau)$

$$R_{Y_X,Y_W}(\tau) = E[(h*X)(n)\,(h*W)(n+\tau)] = E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\,X(n-m) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(p)\,W(n+\tau-p)\right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(m)h(p)\,E[X(n-m)\,W(n+\tau-p)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(m)h(p)\,\underbrace{R_{X,W}(\tau-p+m)}_{0} = 0.$$

$R_{Y_X}(\tau) = (h * \tilde{h} * R_X)(\tau)$, $\quad \tilde{h}(n) = h(-n)$

$R_{Y_W}(\tau) = (h * \tilde{h} * R_W)(\tau)$.

$$\boxed{R_Y(\tau) = (h * \tilde{h} * (R_X + R_W))(\tau)}$$

2. $\mathcal{E}(n) = Y(n) - X(n)$

$$R_{\mathcal{E}}(\tau) = \mathbb{E}\left[(Y(n) - X(n))(Y(n+\tau) - X(n+\tau)) \right] = R_Y(\tau) - R_{X,Y}(-\tau) - R_{X,Y}(\tau) + R_X(\tau)$$

$$= (h * \tilde{h} * (R_X + R_W))(\tau) + R_X(\tau) - (h * R_X)(\tau) - (h * R_X)(-\tau)$$

3. $\sigma_{\mathcal{E}}^2 = R_{\mathcal{E}}(0) - \mu_{\mathcal{E}}^2$

$$\mu_{\mathcal{E}} = \mathbb{E}[Y(n) - X(n)] = \mu_Y - \mu_X = (H(0) - 1)\mu_X = (\alpha - 1)\mu_X \, . \quad \text{supongo} \begin{cases} \mu_X = 0 \\ \mu_W = 0 \end{cases} \therefore \mu_{\mathcal{E}} = 0 \, .$$

Si $h(n) = \alpha \delta(n)$ entonces $(h * \tilde{h})(n) = \alpha^2 \delta(n) \Rightarrow R_{\mathcal{E}}(0) = \alpha^2 R_X(0) + \alpha^2 R_W(0) + R_X(0) - 2\alpha R_X(0)$

$$R_{\mathcal{E}}(0) = (\sigma_X^2 + \sigma_W^2)\alpha^2 - 2\alpha\sigma_X^2 + \sigma_X^2 = \sigma_{\mathcal{E}}^2 .$$

$$\frac{\partial(\sigma_{\mathcal{E}}^2)}{\partial \alpha} = 2(\sigma_X^2 + \sigma_W^2)\alpha - 2\sigma_X^2 \overset{\text{quiero}}{=} 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2}} \longleftarrow \text{minimiza la varianza } \sigma_{\mathcal{E}}^2$$

Allí vale $\sigma^2_{\mathcal{E}(\text{mín})} = \dfrac{\sigma_X^2 \sigma_W^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2}$.

Ejercicio 5 - Sistema no lineal

Considere el proceso aleatorio en tiempo continuo $X(t)$ definido por las siguientes 4 realizaciones, todas ellas equiprobables:

$$x_1(t) = -1, \qquad x_2(t) = -2, \qquad x_3(t) = \sin(t), \qquad x_4(t) = \cos(t).$$

1. Calcule la media y la función de autocorrelación del proceso. Determine si el proceso es ESA.
2. Suponga que el proceso $X(t)$ ingresa a un sistema rectificador cuya salida es $Y(t) = X^2(t)$. Calcule la media y la autocorrelación del proceso de salida e indique si el proceso es ESA.

1. $\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{4}\left(-1 - 2 + \sin(t) + \cos(t)\right) = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin(t + \frac{\pi}{4})$

$$R_X(t,\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] = \frac{1}{4}\left((-1)^2 + (-2)^2 + \sin(t)\sin(t+\tau) + \cos(t)\cos(t+\tau)\right)$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\cos(\tau)$$

No es ESA pues μ_X no es constante. Es cicloestacionario.

2. $\mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[X^2(t)] = \frac{1}{4}\left((-1)^2 + (-2)^2 + \sin^2(t) + \cos^2(t)\right) = \frac{3}{2}$.

$$R_Y(t,\tau) = \mathbb{E}[X^2(t)X^2(t+\tau)] = \frac{1}{4}\left((-1)^4 + (-2)^4 + \sin^2(t)\sin^2(t+\tau) + \cos^2(t)\cos^2(t+\tau)\right)$$

$$= \frac{17}{4} + \frac{1}{4}\left(\sin^2(t)\sin^2(t+\tau) + \cos^2(t)\cos^2(t+\tau)\right)$$

No es ESA pues $R_Y(t,\tau)$ depende de t.

Ejercicio 6 - Superposición de procesos

Sea $X(t)$ un proceso ESA en tiempo continuo con media μ_X y autocovarianza $C_X(\tau)$. Sea W un proceso ESA de media nula y autocovarianza $C_W(\tau)$. Demuestre que si W y X están descorrelacionados la densidad espectral de potencia de $Y(t) = aX(t) + bW(t)$ es

$$S_Y(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega),$$

donde S_X y S_W son las densidades espectrales de potencia de X y W, respectivamente. a y b son constantes cualesquiera.

$Y(t) = a X(t) + b W(t).$

$$R_Y(\tau) = E\left[(aX(t) + bW(t))(aX(t+\tau) + bW(t+\tau))\right] = a^2 R_X(\tau) + b^2 R_W(\tau) + ab\, R_{W,X}(\tau) + ab\, R_{X,W}(\tau)$$

Como X y W están descorrelacionados, $C_{X,W}(\tau) = R_{X,W}(\tau) + \cancel{\mu_X \underbrace{\mu_W}_{0}} = 0 \Rightarrow R_{X,W}(\tau) = 0$

$\therefore R_{W,X}(\tau) = 0$

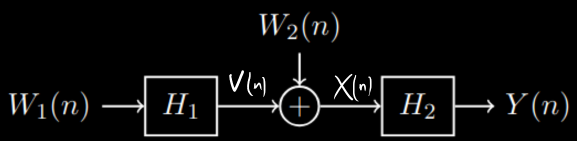
(pues $R_{W,X}(\tau) = R_{X,W}(-\tau)$)

$$R_Y(\tau) = a^2 R_X(\tau) + b^2 R_W(\tau)$$

$$\therefore \boxed{S_Y(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega)}$$

Ejercicio 7

Considere el siguiente sistema en tiempo discreto:



donde W_1 y W_2 son ruidos blancos independientes de media nula y varianza unitaria. Halle la autocorrelación de Y sabiendo que H_1 y H_2 tienen las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \qquad\qquad H_2(z) = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}.$$

Sugerencia: utilice el Ejercicio 6 para calcular en forma separada las densidad de potencia obtenidas por cada proceso.

$$S_V(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \underbrace{S_{W_1}(\omega)}_{1} = \left|1 + \tfrac{1}{2} e^{-j\omega}\right|^2 = \left(1 + \tfrac{1}{2}\cos(\omega)\right)^2 + \tfrac{1}{4}\sin^2(\omega) = 1 + \cos(\omega) + \tfrac{1}{4}(\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)) = \tfrac{5}{4} + \cos(\omega),$$

$\mu_{W_1} = 0 \Rightarrow \mu_V = 0.$ Como W_1 y W_2 están descorrelacionados, también lo están V y W_2. Entonces:

$S_X(\omega) = S_{W_2}(\omega) + S_V(\omega) = \frac{9}{4} + \cos(\omega)$ (pues además W_2 y V tienen media nula).

Finalmente:

$$S_Y(\omega) = |H_2(\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{8} + \cos(\omega)\right)\left(\frac{9}{4} + \cos(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{153}{32} + \frac{35}{8}\cos(\omega) + \cos^2(\omega)\right)$$

$$S_Y(\omega) = \frac{169}{64} + \frac{35}{16}\cos(\omega) + \frac{1}{4}\cos(2\omega)$$

$$\boxed{R_Y(\tau) = \frac{169}{64}\delta(\tau) + \frac{35}{32}\left(\delta(\tau-1) + \delta(\tau+1)\right) + \frac{1}{8}\left(\delta(\tau-2) + \delta(\tau+2)\right)}$$

Ejercicio 8 - Modulación de fase

Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano ESA con media nula y autocorrelación $R_X(\tau) = \frac{1}{1+|\tau|}$ y sea U un variable aleatoria uniforme en $(0,\ 2\pi)$, independiente de X. Halle la media y autocorrelación del proceso:

$$Y(t) = \cos(X(t) + U)$$

y analice si es ESA.

Ayuda: exprese el coseno como exponenciales complejas y utilice la función característica.

$$\mu_Y(t) = E[\cos(X(t)+U)] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{jx} e^{ju} + e^{-jx} e^{-ju}\right) dx\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{jx} \int_0^{2\pi} \cancelto{0}{e^{ju} du} + e^{-jx} \int_0^{2\pi} \cancelto{0}{e^{-ju} du} \right] dx = 0.$$

$$R_Y(t, t+\tau) = E\left[\cos(X(t)+U) \cos(X(t+\tau)+U)\right] = E\left[\left(\frac{e^{jX(t)} e^{jU} + e^{-jX(t)} e^{-jU}}{2}\right)\left(\frac{e^{jX(t+\tau)} e^{jU} + e^{-jX(t+\tau)-jU}}{2}\right)\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{2}\cos(X(t) - X(t+\tau)) + \frac{1}{2} \cancelto{0}{\cos(X(t) + X(t+\tau) + 2U)}\right]$$

Como antes, la parte con U tiene esperanza nula.

$Z(\tau) = X(t) - X(t+\tau)$ es Gaussiana de media nula y $\mathrm{var}(X(t) - X(t+\tau)) = E[(X(t) - X(t+\tau))^2]$

$$= R_X(0) - 2R_X(\tau) + R_X(0) = 2 - \frac{2}{1+|\tau|} = \frac{2|\tau|}{1+|\tau|}$$

propiedad que no vimos

Como $E[\cos(Z(\tau))] = e^{-\sigma_Z^2/2}$

entonces $R_Y(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\frac{|\tau|}{1+|\tau|}}$.

Es ESA.

Ejercicio 9 - Procesos MA-m con entrada blanca

Un proceso $Y(n)$ es un proceso MA-m (*moving average*) si responde a la recursión:

$$Y(n) = a_0 X(n) + a_1 X(n-1) + \ldots + a_m X(n-m),$$

donde $a_0, \ldots, a_m$ son constantes y $X(n)$ es un proceso ESA, típicamente un proceso de ruido blanco[1].

1. Demuestre que el proceso MA-m puede escribirse matricialmente como:

$$Y(n) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n),$$

donde

$$\mathbf{a} = [a_0, \ldots, a_m]^T,$$

$$\mathbf{x}(n) = [X(n), \ldots, X(n-m)]^T.$$

Obvio. $Y(n) = [a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_m] \begin{bmatrix} X(n) \\ X(n-1) \\ X(n-2) \\ \vdots \\ X(n-m) \end{bmatrix},$

2. Suponga que el proceso X es un proceso blanco de media nula, es decir,

$$\mathbb{E}[X(n)X(n+k)] = \sigma_x^2 \delta(k).$$

Demuestre que la autocorrelación del proceso MA-m, $R_Y(k) = \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)]$, para $k > 0$ puede escribirse como:

$$R_Y(k) = \mathbf{a}^T \mathbb{E}\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n+k)^T\right]\mathbf{a}$$
$$= \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_m \\ \mathbf{0}_k \end{bmatrix} \sigma_x^2,$$

donde $\mathbf{0}_k$ es una columna de ceros de largo k. Deduzca entonces que si el MA-m es excitado por ruido blanco entonces $|R_Y(k)| = 0$ si $|k| > m$.

Supongo $k>0$:

$$\mathbb{E}[Y(n)\,Y(n+k)] = \mathbb{E}\Big[\big(a_0 X(n) + a_1 X(n-1) + \dots + a_m X(n-m)\big)\big(a_0 X(n+k) + a_1 X(n+k-1) + \dots + a_m X(n+k-m)\big)\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_i a_j X(n-i) X(n+k-j)\Big]$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_i a_j \underbrace{\mathbb{E}\big[X(n-i)\,X(n+k-j)\big]}_{\substack{\neq 0 \text{ solo si} \\ n-i = n+k-j \\ \iff j = k+i}} = \sum_{i=0}^{m} a_i \tilde{a}_{k+i}\, \sigma_x^2, \quad \text{donde } \tilde{a}_j = \begin{cases} a_j & 0 \le j \le m \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

$$= \Big(a_0 a_k + a_1 a_{k+1} + \dots + a_{m-k} a_m + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{k\text{-veces}}\Big)\sigma_X^2$$

$$R_Y(k) = a^T \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_m \\ 0_k \end{bmatrix} \sigma_X^2, \qquad R(-k) = R(k).$$

Si $|k| > m$, $\quad R_Y(k) = a_T\, 0_k\, \sigma_X^2 = 0$.

3. Utilizando el inciso anterior, halle la media y la autocorrelación de un proceso MA-3 dado por la siguiente recursión:

$$Y(n) = X(n) + \frac{1}{2}X(n-2) + \frac{1}{3}X(n-3),$$

cuando es excitado por un proceso blanco de media nula y varianza σ_X^2. ¿Cómo hallaría la autocovarianza si la media del proceso X fuese no nula?

- $\mathbb{E}[Y(n)] = \mathbb{E}[a^T \underline{x}(n)] = a^T \underbrace{\mathbb{E}[\underline{x}(n)]}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = 0.$

- $R_Y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{49}{36}\sigma_X^2$

$R_Y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{1}{6}\sigma_X^2$

$R_Y(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{1}{2}\sigma_X^2$

$R_X(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{1}{3}\sigma_X^2$

$R_X(-k) = R(k).$

$R_X(k) = 0, \ |k| > 3.$

Ejercicio 10 - Relación de recurrencia de primer orden

Suponga que tiene la siguiente relación de recurrencia:

$$y(n) = ay(n-1) + b, \quad n = 1, 2, ...,$$

donde a y b son constantes ($|a| < 1$), y la condición inicial $y(0) = y_0$.

1. Demuestre que la solución de la ecuación es de la forma:

   $$y(n) = c_1 + c_2 r^n,$$

   donde c_1, c_2 y r son constantes a determinar.
2. Halle las constantes c_1, c_2 y r en función de a, b e y_0.
3. ¿Qué sucede si $|a| > 1$?

1 y 2. $y(n) = a\,y(n-1) + b = a\left(a\,y(n-2) + b\right) + b = a^2 y(n-2) + (a+1)b$

$= a^2\left(a\,y(n-3) + b\right) + (a+1)b = a^3 y(n-3) + (a^2+a+1)\,b$

$= \cdots = a^n y_0 + b\sum_{j=0}^{n-1} a^j = c_2 r^n + c_1$

con $r = a$, $c_1 = b\sum_{j=0}^{n-1} a_j$, $c_2 = y_0$.

3. Si $|a|>1$, $y(n)$ crece indefinidamente.

Ejercicio 12 - Cascada de MAs

Sea $X(n)$ ruido blanco de media nula y potencia σ_X^2. La señal $X(n)$ es filtrada por una realización en serie de dos filtros.

$$Y(n) = 0{,}5\,[X(n) + X(n-1)]$$
$$Z(n) = Y(n) - Y(n-1).$$

Calcular $\mathbb{E}[Z]$, σ_Z^2, $R_Z(k)$ y $S_Z(\omega)$.

$$Z(n) = Y(n) - Y(n-1) = \left[\tfrac{1}{2}X(n) + \cancel{\tfrac{1}{2}X(n-1)}\right] - \left[\cancel{\tfrac{1}{2}X(n-1)} + \tfrac{1}{2}X(n-2)\right] = \tfrac{1}{2}\left[X(n) - X(n-2)\right].$$

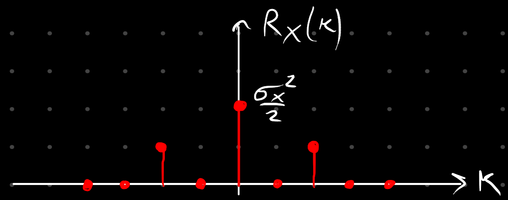
$$\mathbb{E}[Z(n)] = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[X(n)] - \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[X(n-2)] = 0.$$

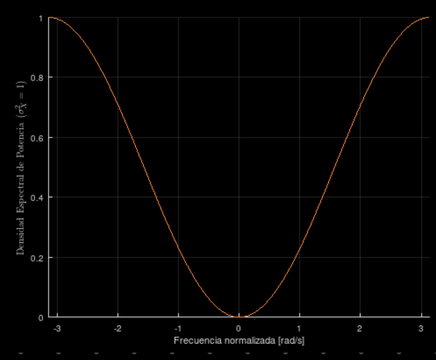
$$R_Z(k) = \mathbb{E}\left[Z(n)\,Z(n+k)\right] = \mathbb{E}\left[\tfrac{1}{2}(X(n)-X(n-2))\,\tfrac{1}{2}\left(X(n+k)-X(n+k-2)\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[R_X(k) - R_X(k-2) - R_X(k+2) + R_X(k)\right] = \frac{\sigma_X^2}{2}\delta(k) - \frac{\sigma_X^2}{4}\left(\delta(k-2) + \delta(k+2)\right).$$

$$S_Z(\omega) = \mathcal{F}(R_Z)(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{2}\left(1 - \cos(\omega)\right)$$

$$\sigma_Z^2 = R_Z(0) = \frac{\sigma_X^2}{2}$$



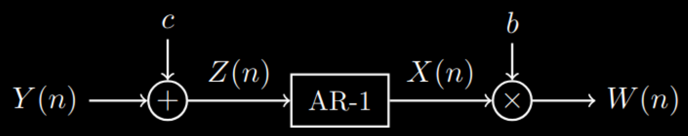


Ejercicio 13 - Sistema blanqueador

Se dispone de muestras de un proceso ESA gaussiano $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Se desea procesar a Y de modo de transformarlo en un proceso blanco $W(n)$ de media nula y varianza $\sigma_W^2 = 1$. Para ellos se implementa el siguiente sistema:



La constante c se elige de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula. El proceso AR-1 es de la forma:

$$X(n) = aX(n-1) + Z(n),$$

es utilizado para eliminar la correlación entre las muestras (a es una constante a determinar tal que $|a| < 1$). Por último, la constante b es utilizada para ajustar la varianza de $X(n)$ al valor deseado.

1. Determine la constante c de modo que el proceso $Z(n)$ tenga media nula, y halle la autocorrelación de Z.
2. Determine a y b de modo que W cumpla las especificaciones pedidas.
3. ¿Qué puede concluir de la relación entre los procesos MA-1 y un proceso AR-1? ¿Y en el caso del MA-m y el AR-m?

1. Si $c = -\mu_Y = -\frac{1}{2}$, entonces

$X(\omega) = a e^{-j\omega} X(\omega) + Z(\omega)$

$H(\omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$

$E[Z(n)] = E[Y(n) - \frac{1}{2}] = 0$.

$R_Z(k) = E[(Y(n) - \frac{1}{2})(Y(n+k) - \frac{1}{2})] = C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}(\delta(k-1) + \delta(k+1))$

2. $R_W(k) = E[W(n)W(n+k)] = b^2 E[X(n)X(n+k)]$

Quiero que $R_W(k)$ sea una δ en cero, o sea, que $S_W(k)$ sea constante.

$S_W(\omega) = b^2 S_X(\omega) = b^2 |H(\omega)|^2 S_Z(\omega) = b^2 \frac{1}{2(1+a^2-2a\cos(\omega))}\left(1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)\right) = C_1$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}\cos(\omega) = C_2(1+a^2) - 2C_2 a \cos(\omega)$

$\Rightarrow \begin{cases} (1+a^2)C_2 = 1 \\ -2C_2 a = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+a^2) = 1/C_2 = -4a \\ C_2 = -\frac{1}{4a} \end{cases}$

$\Rightarrow 1 + 4a + a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{3} - 2}$

Además quiero $1 = \sigma_W^2 = R_W(0) - \cancel{\mu_W}^{0}$

Sabemos que $R_W(0) = S_W(\frac{\pi}{2}) = b^2 \frac{1}{2(1+(\sqrt{3}-2)^2)} = \frac{b^2}{2(1+3-4\sqrt{3}+4)} = \frac{b^2}{16-8\sqrt{3}} \Rightarrow b = \sqrt{16-8\sqrt{3}}$

solo en este caso particular

Ejercicio 14 - Generación de muestras de un proceso

Se desea generar muestras de un proceso ESA $Y(n)$ con media $\mu_Y = \frac{1}{2}$ y autocovarianza:

$$C_Y(k) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right].$$

Para ello se tienen muestras de un proceso de ruido blanco $W(n)$ de media nula y varianza unitaria. Para generar las muestras de Y se utiliza el siguiente sistema:

$$W(n) \rightarrow \boxed{\text{MA-1}} \xrightarrow{X(n)} \underset{\uparrow b}{\otimes} \xrightarrow{Z(n)} \underset{\uparrow c}{\oplus} \longrightarrow Y(n)$$

El proceso MA-1 es de la forma:

$$X(n) = aW(n-1) + W(n).$$

Las constantes a, b y c deben determinarse de modo que el proceso Y cumpla lo pedido.

1. Utilice lo aprendido en el ejercicio 9 para justificar que la estructura propuesta tiene sentido.
2. Halle $\mathbb{E}[Z(n)]$ y verifique que no depende de a ni de b. Elija c de modo que $\mathbb{E}[Y(n)] = \mu_Y = \frac{1}{2}$.
3. Determine las constantes a y b de modo que la covarianza de Z sea igual a la de Y, es decir: $C_Z(k) = C_Y(k)$ para todo k. Elija a de modo que $|a| < 1$.

1. Del ej. 9 sabemos que

$$R_X(0) = [1\ a]\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}\sigma_W^2 = (a^2+1)\sigma_W^2$$

$$R_X(1) = [1\ a]\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}\sigma_W^2 = a\,\sigma_W^2$$

$$\therefore R_X(k) = (a^2+1)\,\delta(k) + a\left(\delta(k+1) + \delta(k-1)\right)$$

Tiene sentido la estructura pues R_X tiene una forma parecida a la deseada para R_Y, y solo varía, tras elegir 'a', en un factor de escala que se corrige con la elección de 'b'.

2. $\mathbb{E}[Z(n)] = b\,\mathbb{E}[X(n)] = b\,\mathbb{E}[aW(n-1) + W(n)] = ba\mu_W + b\mu_W = 0.$

$\mathbb{E}[Y(n)] = \mathbb{E}[Z(n) + c] = c \quad \therefore \quad c = 1/2.$

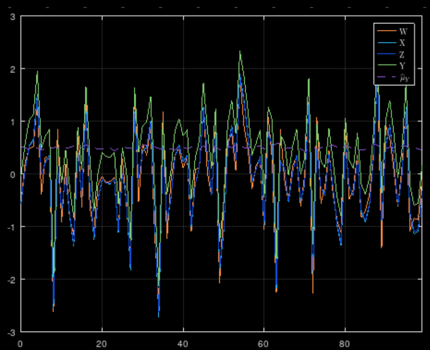
3. $$C_Y(k) = \mathbb{E}\left[(Y(n)-\mu_Y)(Y(n+k)-\mu_Y)\right] = \mathbb{E}\left[Z(n)\,Z(n+k)\right] = b^2 R_X(k)$$

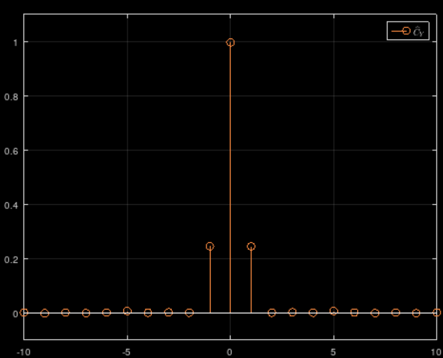
Quiero que $\quad b^2(a^2+1)\,\delta(k) + ab^2\left(\delta(k+1)+\delta(k-1)\right) = \delta(k) + \frac{1}{4}\left(\delta(k-1)+\delta(k+1)\right)$

$$\begin{cases} ab^2 = 1/4 \Rightarrow b^2 = 1/4a \\ b^2a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{4a} = 1 \Rightarrow a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$a = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$

$b = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \approx 0{,}966$





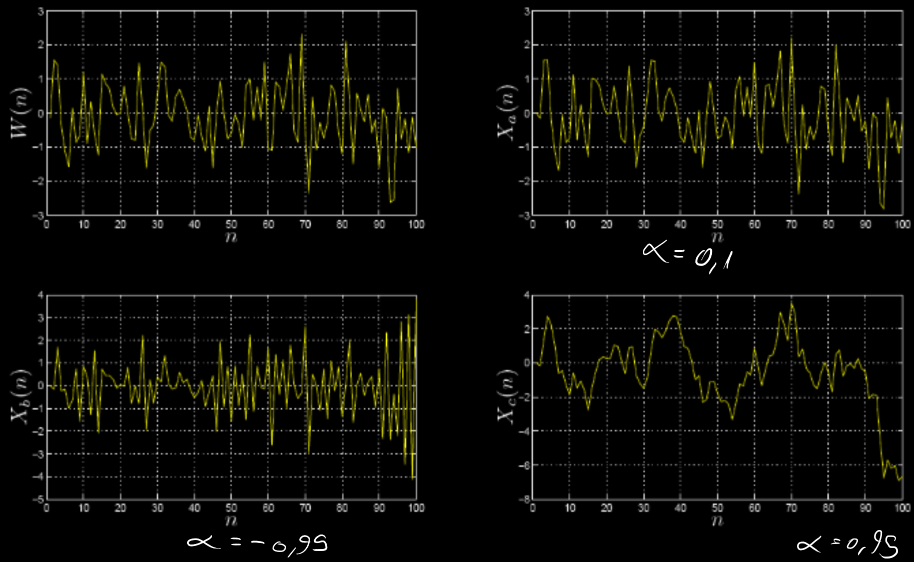
Ejercicio 15 - Realizaciones de procesos AR-1

Se simula numéricamente un proceso autoregresivo de primer orden

$$X(n) = \alpha X(n-1) + W(n)$$

excitado por un ruido blanco de media nula y varianza unitaria. Se realizan tres simulaciones diferentes mostradas en la figura utilizando los siguientes valores del parámetro α:

$$\alpha_1 = 0{,}95 \quad \alpha_2 = 0{,}1 \quad \alpha_3 = -0{,}95$$



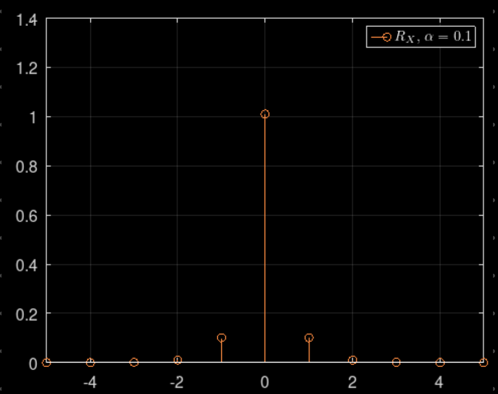
1. Asigne el coeficiente α que corresponde a cada uno de los gráficos de la figura.
2. Grafique la autocorrelación del proceso $X(k)$ en cada caso.

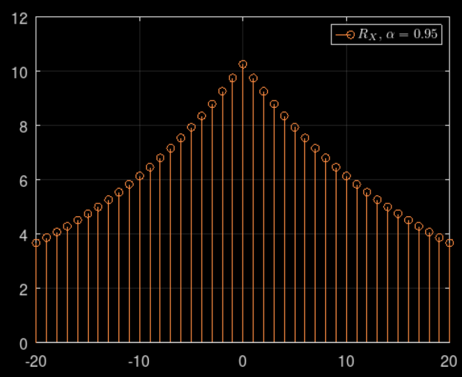
2. $h(n) = \delta(n) + \alpha\,\delta(n-1) + \alpha^2\delta(n-2) + \cdots = \alpha^n\, \mathbb{1}\{n \geq 0\}$. $\quad \tilde{h}(n) = h(-n)$

si $k \geq 0$: $R_X(k) = (h * \tilde{h} * R_W)(k) = (h * \tilde{h})(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\,h(m-k) = \sum_{m=k}^{+\infty} \alpha^m \alpha^{m-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha^{p+k}\alpha^p$ $\quad p = m-k$

$= \alpha^k \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha^{2p} = \alpha^k \frac{1}{1-\alpha^2}$. $\qquad R_X(-k) = R_X(k)$.

$$\boxed{R_X(k) = \frac{\alpha^{|k|}}{1-\alpha^2}}$$





Ejercicio 16 - Procesos AR-2

El modelo del proceso AR2, $X(n)$ es:

$$X(n) = a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + W(n)$$

donde $W(n)$ es una secuencia de ruido blanco y a_1 y a_2 son coeficientes reales.

1. Expresar la función de transferencia $H(z)$ del sistema lineal que, excitado por la secuencia de ruido blanco, entrega como salida el proceso AR2.
2. Obtener y resolver la ecuación en diferencias que debe satisfacer la secuencia de autocorrelación.
3. Verifique analíticamente las siguientes propiedades:
   a) En el caso de polos reales y distintos, la secuencia de autocorrelación decae exponencialmente. Analizar el caso en que ambos polos son positivos, ambos negativos y uno positivo y otro negativo.
   b) En el caso de polos complejos conjugados, la secuencia de autocorrelación es pseudoperiódica.

1. $X(z) = a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z) + W(z)$

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}}$$

2. $X(n) - a_1 X(n-1) - a_2 X(n-2) = W(n)$

$X(n)X(n+k) - a_1 X(n-1)X(n+k) - a_2 X(n-2)X(n+k) = W(n)X(n+k)$

$R_X(k) - a_1 R_X(k+1) - a_2 R_X(k+2) = R_{W,X}(k)$

Sabemos que $R_{W,X}(k) = (h * R_W)(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)\, \sigma_W^2\, \delta(k-m) = \sigma_W^2\, h(k)\, \mathbb{1}\{k \geq 0\}$.

$$R_X(k) - a_1 R_X(k+1) - a_2 R_X(k+2) = \sigma_W^2\, h(k)$$

$k \geq 1$: $R_X(k) = \frac{1}{a_2} R_X(k-2) - \frac{a_1}{a_2} R_X(k-1) - \frac{\sigma_W^2}{a_2} h(k-2)$

$k = 0$: $R_X(0) = a_1 R_X(1) + a_2 R_X(2) + \sigma_W^2$

Ecuación característica: $1 - a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{-2a_2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2a_2}$

$= -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{1}{a_2}}$

Solución: $R_X(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k$

$R_X(0) = C_1 + C_2$

$R_X(1) = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2$

3. a) En todos los casos, decae como $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}^k$, dado que el sistema es estable y entonces ambos lambdas son, en módulo, menores a 1.

b) Por la parte compleja aparece un término oscilatorio, el cual está modulado por un decaimiento exponencial (es cuasiperiódico).

Ejercicio 17

Se sabe que cierto proceso ESA gaussiano X tiene media nula y se conocen 3 valores de su autocorrelación $R_X(0) = 1$, $R_X(1) = 0$ y $R_X(2) = \frac{1}{4}$.

1. Halle un sistema AR-2:

$$Y(n) + aY(n-1) + bY(n-2) = W(n)$$

   donde W es ruido blanco de media nula, varianza σ^2, tal que la autocorrelación de Y coincida con los valores conocidos de R_X. Luego de hallar a, b, σ^2, obtenga la correlación completa de Y.

2. Halle la densidad espectral de potencia del proceso Y, expresándola como una función real, y realice un gráfico de la misma.
   Ayuda: halle la transferencia del sistema y use la expresión de la PSD a la salida de un sistema lineal, no haga la transformada de la autocorrelación de Y.

1. Por Yule-Walker:

$$R_Y(0) + a\,R_Y(1) + b\,R_Y(2) = \sigma_W^2$$

$$\begin{cases} R_Y(-1) + a\,R_Y(0) + b\,R_Y(1) = 0 \\ R_Y(-2) + a\,R_Y(-1) + b\,R_Y(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ \frac{1}{4} + b = 0 \iff b = -1/4 \end{cases}$$

$$\sigma_W^2 = 1 - \frac{1}{16} = 15/16$$

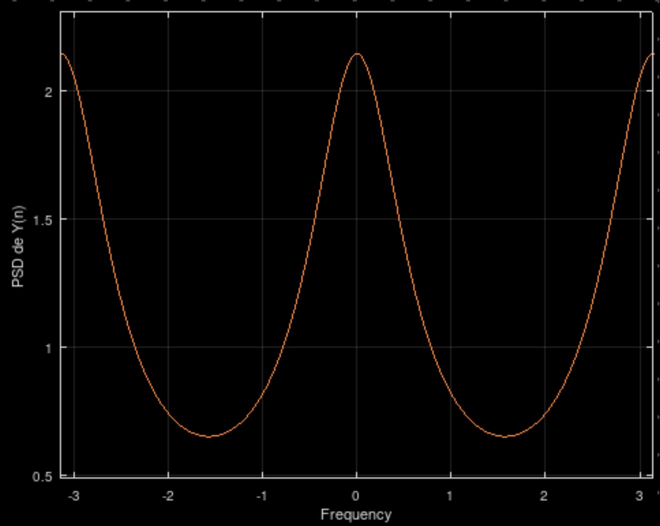
2.

$$Y(z) + a\,z^{-1}Y(z) + b\,z^{-2}Y(z) = W(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{|1-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}|^2} = \frac{1}{\left[1-\frac{1}{4}\cos(2\omega)\right]^2 + \left[\frac{1}{4}\sin(2\omega)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos(2\omega) + \frac{1}{16}\cos^2(2\omega) + \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}(2\omega)} = \frac{1}{\frac{15}{16} - \frac{1}{2}\cos(2\omega)}$$

$$\boxed{S_Y(\omega) = \frac{15}{15 - 8\cos(2\omega)}}$$



$$H(z) = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\boxed{R_Y(k) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-|k|} + \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\right]}$$