Ejercicio 1 - Senoidal ruidosa

Sea $X(n) = A\cos(2\pi\omega_0 n + \Phi) + N(n)$, donde A y ω_0 son constantes, Φ se encuentra uniformemente distribuida en $[0; 2\pi)$ y $N(n)$ es ruido blanco de densidad de potencia σ^2.

1. Obtenga la media $\mathbb{E}[X(n)]$.
2. Si $X(n)$ es un proceso ESA, obtenga la densidad espectral de potencia del mismo.
3. Suponga que $X(n)$ es la señal de entrada a un filtro pasabanda de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_0| \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Compare la relación señal a ruido (SNR) a la entrada y a la salida del filtro. Extraiga conclusiones.

1. $$\mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\Big[\underbrace{A\cos(2\pi\omega_0 n + \phi)}_{M(n)} + N(n)\Big] = A\,\mathbb{E}[\cos(2\pi\omega_0 n + \phi)] + \cancel{\mathbb{E}[N(n)]}^{\,0}$$

$$= A\int_0^{2\pi} \cos(2\pi\omega_0 n + \varphi)\frac{1}{2\pi}\,d\varphi = \frac{A}{2\pi}\,\operatorname{sen}(2\pi\omega_0 n + \varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.$$

2. $$R_X(\tau) = \mathbb{E}\big[\{M(n) + N(n)\}\{M(n+\tau) + N(n+\tau)\}\big]$$

$$= R_M(\tau) + R_N(\tau) + R_{NM}(\tau) + R_{MN}(\tau)$$

Como N y M son independientes y con media nula, $R_{NM}(\tau) = 0 = R_{MN}(\tau)$.

$$R_M(\tau) = \mathbb{E}[A\cos(2\pi\omega_0 n + \phi)\,A\cos(2\pi\omega_0(n+\tau) + \phi)]$$

$$= A^2\,\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2}\Big(\cancel{\cos(4\pi\omega_0 n + 2\pi\omega_0\tau + 2\phi)}^{\,0} + \cos(2\pi\omega_0\tau)\Big)\Big]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\omega_0\tau)$$

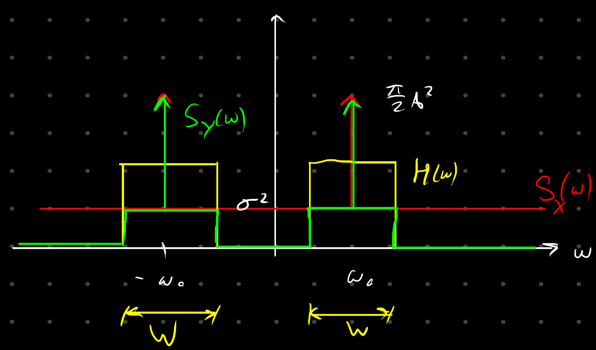
$$\therefore\ R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\omega_0\tau) + \sigma^2\delta(\tau)$$

$$S_X(\omega) \overset{\text{WK}}{=} \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}(\omega) = \frac{A^2}{2}\pi\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big) + \sigma^2$$

3. $$SNR_{in} = \frac{R_M(0)}{R_N(0)} = \frac{A^2/2}{\sigma^2} = \frac{A^2}{2\sigma^2}.$$

$$SNR_{out} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_R(\omega)\,d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_V(\omega)\,d\omega} = \frac{A^2/2}{\sigma^2\ W/\pi} = \frac{\pi A^2}{2\sigma^2 W}$$

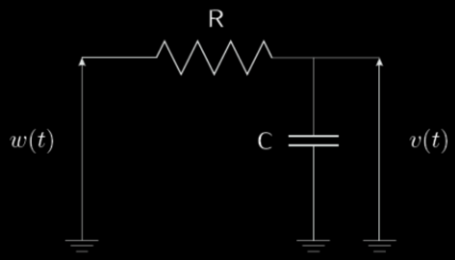
$$\boxed{\frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{\pi}{W}}$$



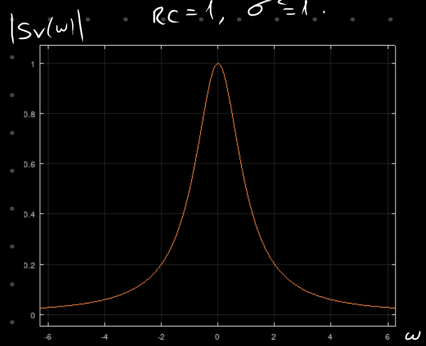
$Y(n) = R(n) + \underbrace{V(n)}_{\text{ruido}}$

Ejercicio 2 - Circuito RC

El circuito RC de la figura es excitado por una señal de ruido blanco con densidad espectral de potencia constante e igual a $N_0/2$. Calcule y grafique la densidad espectral de potencia de la salida del filtro y el valor de potencia total.



$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{W(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$



$w(t)$ ruido blanco con $S_w(\omega) = \sigma^2$. $\quad \tilde{h}(t) = h(-t)$

$$v(t) = (h * w)(t) \Rightarrow R_V(\tau) = (h * \tilde{h} * R_w)(\tau)$$

$$\boxed{S_V(\omega) = \mathcal{F}\{R_V\}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_w(\omega) = \frac{\sigma^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{\sigma^2}{2RC}}$$

Ejercicio 3 - Promediador en tiempo continuo

Supongamos que $X(t)$ es un proceso integrable. La integral

$$Y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} X(u) du$$

representa el promedio del proceso $X(t)$ en el intervalo $(t - T, t + T)$.

1. Identifique la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema que al ser excitado por $X(t)$ produce a $Y(t)$ como salida.

$$h(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \delta(u) du = \frac{1}{2T} \left(u(t+T) - u(t-T) \right)$$

$$\boxed{H(\omega)} = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \frac{1}{2T} \left[\left(\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \left(\underbrace{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}_{2j} \right) \right]$$

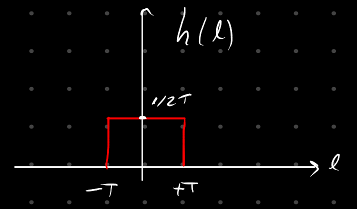
$$= \frac{1}{2T} \left[\left(2\pi j \delta(\omega) + \frac{2}{\omega} \right) \sin(\omega T) \right] = \boxed{\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi} \right)}$$

2. Encuentre la media, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $Y(t)$.

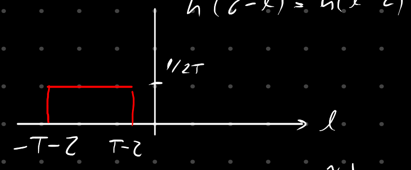
3. ¿Qué tipo de filtrado representa el promediador?

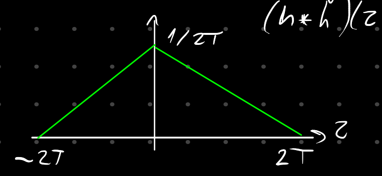
2. $E[Y(t)] = \mu_X H(0) = \mu_X$.

$$\boxed{R_Y(\tau) = (h * \tilde{h} * R_X)(\tau) = ((h*\tilde{h}) * R_X)(\tau)}$$



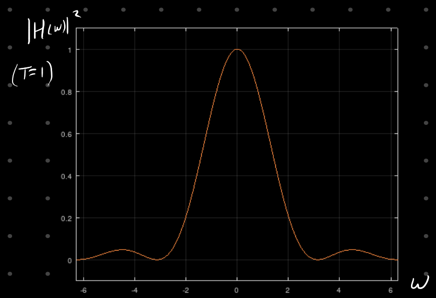
$$(h*\tilde{h})(\tau) = \begin{cases} \dfrac{2T+\tau}{4T^2} & -2T<\tau<0 \\ \dfrac{2T-\tau}{4T^2} & 0<\tau<2T \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$





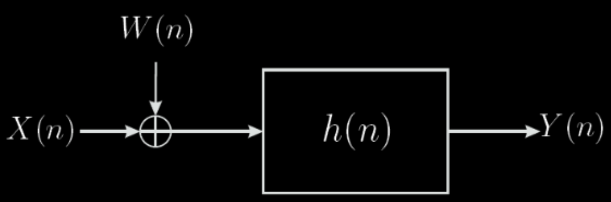
$$\boxed{S_Y(\tau) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) S_X(\omega)}$$

3. Realiza un filtrado pasabajos.



Ejercicio 4 - Escalamiento de señal ruidosa

Considere el sistema LTI mostrado en la figura, donde $X(n)$ y $W(n)$ son procesos ESA descorrelacionados entre sí. La varianza de $W(n)$ es σ_W^2 y la de $X(n)$ es σ_X^2.



1. Hallar la función de autocorrelación del proceso $Y(n)$.
2. Definiendo $E(n) = Y(n) - X(n)$, determine su función de autocorrelación.
3. Si $h(n) = \alpha\,\delta(n)$, elija el valor de α que minimice la varianza de $E(n)$.

1. $Y(n) = [h*(X+W)](n) = \underbrace{(h*X)(n)}_{Y_X} + \underbrace{(h*W)(n)}_{Y_W}$.

$$R_Y(\tau) = R_{Y_X}(\tau) + R_{Y_W}(\tau) + R_{Y_X,Y_W}(\tau) + R_{Y_W,Y_X}(\tau)$$

$$R_{Y_X,Y_W}(\tau) = E[(h*X)(n)\,(h*W)(n+\tau)] = E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\,X(n-m) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(p)\,W(n+\tau-p)\right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(m)h(p)\,E[X(n-m)\,W(n+\tau-p)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(m)h(p)\,\cancelto{0}{R_{X,W}(\tau-p+m)} = 0.$$

$R_{Y_X}(\tau) = (h*\tilde{h}*R_X)(\tau)$, $\tilde{h}(n) = h(-n)$

$R_{Y_W}(\tau) = (h*\tilde{h}*R_W)(\tau)$.

$$\boxed{R_Y(\tau) = (h*\tilde{h}*(R_X+R_W))(\tau)}$$

2. $\mathcal{E}(n) = Y(n) - X(n)$

$$R_{\mathcal{E}}(\tau) = \mathbb{E}\left[\left(Y(n) - X(n)\right)\left(Y(n+\tau) - X(n+\tau)\right)\right] = R_Y(\tau) - R_{X,Y}(-\tau) - R_{X,Y}(\tau) + R_X(\tau)$$

$$= \left(h * \tilde{h} * (R_X + R_W)\right)(\tau) + R_X(\tau) - (h * R_X)(\tau) - (h * R_X)(-\tau)$$

3. $\sigma_{\mathcal{E}}^2 = R_{\mathcal{E}}(0) - \mu_{\mathcal{E}}^2$

$\mu_{\mathcal{E}} = \mathbb{E}[Y(n) - X(n)] = \mu_Y - \mu_X = (H(0) - 1)\mu_X = (\alpha - 1)\mu_X$. supongo $\begin{cases} \mu_X = 0 \\ \mu_W = 0 \end{cases}$ $\therefore \mu_{\mathcal{E}} = 0$.

Si $h(n) = \alpha\delta(n)$ entonces $(h * \tilde{h})(n) = \alpha^2\delta(n) \Rightarrow R_{\mathcal{E}}(0) = \alpha^2 R_X(0) + \alpha^2 R_W(0) + R_X(0) - 2\alpha R_X(0)$

$$R_{\mathcal{E}}(0) = (\sigma_X^2 + \sigma_W^2)\alpha^2 - 2\alpha\sigma_X^2 + \sigma_X^2 = \sigma_{\mathcal{E}}^2.$$

$$\frac{\partial(\sigma_{\mathcal{E}}^2)}{\partial\alpha} = 2(\sigma_X^2 + \sigma_W^2)\alpha - 2\sigma_X^2 \overset{\text{quiero}}{=} 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2}} \longleftarrow \text{minimiza la varianza } \sigma_{\mathcal{E}}^2$$

Allí vale $\sigma^2_{\mathcal{E}(\min)} = \dfrac{\sigma_X^2\sigma_W^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2}$.

Ejercicio 5 - Sistema no lineal

Considere el proceso aleatorio en tiempo continuo $X(t)$ definido por las siguientes 4 realizaciones, todas ellas equiprobables:

$$x_1(t) = -1, \qquad x_2(t) = -2, \qquad x_3(t) = \sin(t), \qquad x_4(t) = \cos(t).$$

1. Calcule la media y la función de autocorrelación del proceso. Determine si el proceso es ESA.
2. Suponga que el proceso $X(t)$ ingresa a un sistema rectificador cuya salida es $Y(t) = X^2(t)$. Calcule la media y la autocorrelación del proceso de salida e indique si el proceso es ESA.

1. $\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{4}\left(-1 - 2 + \sin(t) + \cos(t)\right) = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

$$R_X(t,\tau) = \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)] = \frac{1}{4}\left((-1)^2 + (-2)^2 + \sin(t)\sin(t+\tau) + \cos(t)\cos(t+\tau)\right)$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\cos(\tau)$$

No es ESA pues μ_X no es constante. Es cicloestacionario.

2. $\mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[X^2(t)] = \frac{1}{4}\left((-1)^2 + (-2)^2 + \sin^2(t) + \cos^2(t)\right) = \frac{3}{2}$.

$$R_Y(t,\tau) = \mathbb{E}[X^2(t)X^2(t+\tau)] = \frac{1}{4}\left((-1)^4 + (-2)^4 + \sin^2(t)\sin^2(t+\tau) + \cos^2(t)\cos^2(t+\tau)\right)$$

$$= \frac{17}{4} + \frac{1}{4}\left(\sin^2(t)\sin^2(t+\tau) + \cos^2(t)\cos^2(t+\tau)\right)$$

No es ESA pues $R_Y(t,\tau)$ depende de t.

Ejercicio 6 - Superposición de procesos

Sea $X(t)$ un proceso ESA en tiempo continuo con media μ_X y autocovarianza $C_X(\tau)$. Sea W un proceso ESA de media nula y autocovarianza $C_W(\tau)$. Demuestre que si W y X están descorrelacionados la densidad espectral de potencia de $Y(t) = aX(t) + bW(t)$ es

$$S_Y(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega),$$

donde S_X y S_W son las densidades espectrales de potencia de X y W, respectivamente. a y b son constantes cualesquiera.

$Y(t) = a\,X(t) + b\,W(t)$.

$R_Y(\tau) = E[(a X(t) + b W(t))(a X(t+\tau) + b W(t+\tau))] = a^2 R_X(\tau) + b^2 R_W(\tau) + ab\,R_{W,X}(\tau) + ab\,R_{X,W}(\tau)$

Como X y W están descorrelacionados, $C_{X,W}(\tau) = R_{X,W}(\tau) + \cancelto{0}{\mu_X \underbrace{\mu_W}_{0}} = 0 \Rightarrow R_{X,W}(\tau) = 0$

$\therefore R_{W,X}(\tau) = 0$

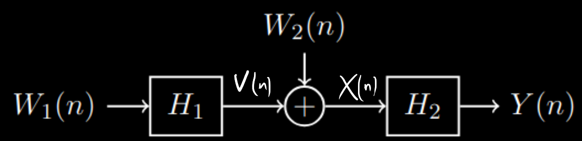
(pues $R_{W,X}(\tau) = R_{X,W}(-\tau)$)

$R_Y(\tau) = a^2 R_X(\tau) + b^2 R_W(\tau)$

$\therefore \boxed{S_Y(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega)}$

Ejercicio 7

Considere el siguiente sistema en tiempo discreto:



donde W_1 y W_2 son ruidos blancos independientes de media nula y varianza unitaria. Halle la autocorrelación de Y sabiendo que H_1 y H_2 tienen las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \qquad\qquad H_2(z) = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}.$$

Sugerencia: utilice el Ejercicio 6 para calcular en forma separada las densidad de potencia obtenidas por cada proceso.

$S_V(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \underbrace{S_{W_1}(\omega)}_{1} = \left|1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right|^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2(\omega) = 1 + \cos(\omega) + \frac{1}{4}(\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)) = \frac{5}{4} + \cos(\omega)$,

$\mu_{W_1} = 0 \Rightarrow \mu_V = 0$. Como W_1 y W_2 están descorrelacionados también lo están V y W_2. Entonces:

$S_X(\omega) = S_{W_2}(\omega) + S_V(\omega) = \frac{9}{4} + \cos(\omega)$ (pues además W_2 y V tienen media nula).

Finalmente:

$S_Y(\omega) = |H_2(\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{8} + \cos(\omega)\right)\left(\frac{9}{4} + \cos(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{153}{32} + \frac{35}{8}\cos(\omega) + \cos^2(\omega)\right)$

$S_Y(\omega) = \frac{169}{64} + \frac{35}{16}\cos(\omega) + \frac{1}{4}\cos(2\omega)$

$\boxed{R_Y(\tau) = \frac{169}{64}\delta(\tau) + \frac{35}{32}\left(\delta(\tau-1) + \delta(\tau+1)\right) + \frac{1}{8}\left(\delta(\tau-2) + \delta(\tau+2)\right)}$

Ejercicio 8 - Modulación de fase

Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano ESA con media nula y autocorrelación $R_X(\tau) = \frac{1}{1+|\tau|}$ y sea U un variable aleatoria uniforme en $(0,\ 2\pi)$, independiente de X. Halle la media y autocorrelación del proceso:

$$Y(t) = \cos(X(t) + U)$$

y analice si es ESA.

Ayuda: exprese el coseno como exponenciales complejas y utilice la función característica.

$$\mu_Y(t) = \mathbb{E}[\cos(X(t)+U)] = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{jx}e^{ju}+e^{-jx}e^{-ju}\right)dx\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left[e^{jx}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}e^{ju}du} + e^{-jx}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}e^{-ju}du}\right]dx = 0.$$

$$R_Y(t,t+\tau) = \mathbb{E}\left[\cos(X(t)+U)\cos(X(t+\tau)+U)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{e^{jX(t)}e^{jU}}{2}+\frac{e^{-jX(t)}e^{-jU}}{2}\right)\left(\frac{e^{jX(t+\tau)}e^{jU}}{2}+\frac{e^{-jX(t+\tau)}e^{-jU}}{2}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\cos(X(t)-X(t+\tau)) + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\cos(X(t)+X(t+\tau)+2U)}\right]$$

Como antes, la parte con U tiene esperanza nula.

$Z(\tau) = X(t) - X(t+\tau)$ es gaussiana de media nula y $\mathrm{var}(X(t)-X(t+\tau)) = \mathbb{E}\left[(X(t)-X(t+\tau))^2\right]$

$$= R_X(0) - 2R_X(\tau) + R_X(0) = 2 - \frac{2}{1+|\tau|} = \frac{2|\tau|}{1+|\tau|}$$

propiedad que no vimos

Como $\mathbb{E}[\cos(Z(\tau))] = e^{-\sigma_Z^2/2}$

entonces $R_Y(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\frac{|\tau|}{1+|\tau|}}$.

Es ESA.

Ejercicio 9 - Procesos MA-m con entrada blanca

Un proceso $Y(n)$ es un proceso MA-m (*moving average*) si responde a la recursión:

$$Y(n) = a_0X(n) + a_1X(n-1) + \ldots + a_mX(n-m),$$

donde $a_0, \ldots, a_m$ son constantes y $X(n)$ es un proceso ESA, típicamente un proceso de ruido blanco[1].

1. Demuestre que el proceso MA-m puede escribirse matricialmente como:

$$Y(n) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}(n),$$

donde

$$\mathbf{a} = [a_0, \ldots, a_m]^T,$$

$$\mathbf{x}(n) = [X(n), \ldots, X(n-m)]^T.$$

Obvio.
$$Y(n) = [a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_m]\begin{bmatrix} X(n) \\ X(n-1) \\ X(n-2) \\ \vdots \\ X(n-m)\end{bmatrix},$$

2. Suponga que el proceso X es un proceso blanco de media nula, es decir,

$$\mathbb{E}[X(n)X(n+k)] = \sigma_x^2\delta(k).$$

Demuestre que la autocorrelación del proceso MA-m, $R_Y(k) = \mathbb{E}[Y(n)Y(n+k)]$, para $k > 0$ puede escribirse como:

$$R_Y(k) = \mathbf{a}^T \mathbb{E}\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n+k)^T\right]\mathbf{a}$$
$$= \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_m \\ \mathbf{0}_k \end{bmatrix} \sigma_x^2,$$

donde $\mathbf{0}_k$ es una columna de ceros de largo k. Deduzca entonces que si el MA-m es excitado por ruido blanco entonces $|R_Y(k)| = 0$ si $|k| > m$.

Supongo $k>0$:

$$\mathbb{E}[Y(n)\,Y(n+k)] = \mathbb{E}\Big[\big(a_0X(n) + a_1X(n-1) + \cdots + a_mX(n-m)\big)\big(a_0X(n+k) + a_1X(n+k-1) + \cdots + a_mX(n+k-m)\big)\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_i a_j X(n-i)X(n+k-j)\Big]$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_i a_j \underbrace{\mathbb{E}\big[X(n-i)\,X(n+k-j)\big]}_{\substack{\neq 0 \text{ solo si} \\ \cancel{n}-i = \cancel{n}+k-j \\ \iff j = k+i}} = \sum_{i=0}^{m} a_i \tilde{a}_{k+i}\,\sigma_x^2, \quad \text{donde } \tilde{a}_j = \begin{cases} a_j & 0 \le j \le m \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

$$= \big(a_0 a_k + a_1 a_{k+1} + \cdots + a_{m-k}a_m + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{k\text{-veces}}\big)\,\sigma_X^2$$

$$R_Y(k) = a^T \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_m \\ 0_k \end{bmatrix} \sigma_X^2, \qquad R(-k) = R(k).$$

Si $|k| > m$, $\quad R_Y(k) = a^T\, 0_k\, \sigma_X^2 = 0$.

3. Utilizando el inciso anterior, halle la media y la autocorrelación de un proceso MA-3 dado por la siguiente recursión:

$$Y(n) = X(n) + \frac{1}{2}X(n-2) + \frac{1}{3}X(n-3),$$

cuando es excitado por un proceso blanco de media nula y varianza σ_X^2. ¿Cómo hallaría la autocovarianza si la media del proceso X fuese no nula?

- $\mathbb{E}[Y(n)] = \mathbb{E}[a^T \underline{x}(n)] = a^T \underbrace{\mathbb{E}[\underline{x}(n)]}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = 0.$

- $R_Y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{49}{36}\sigma_X^2$

$R_Y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{1}{6}\sigma_X^2$

$R_Y(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{1}{2}\sigma_X^2$

$R_X(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_X^2 = \frac{1}{3}\sigma_X^2$

$R_X(-k) = R(k).$

$R_X(k) = 0, \ |k| > 3.$