Actividad 3

Sea X(n) un proceso ESA en tiempo discreto con media μ_X y autocovarianza $C_X(k)$, y W(n) un proceso ESA de media nula y autocovarianza $C_W(k)$. Demuestre que si W(n) y X(n) son procesos independientes, la densidad espectral de potencia de Y(n) = aX(n) + bW(n) es:

$$S_Y(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega),$$

donde $S_X(\omega)$ y $S_W(\omega)$ son las densidades espectrales de potencia de X(n) y W(n), respectivamente, con a y b constantes.

$$R_Y(k) = \mathbb{E}\left[\left(aX(n) + bW(n)\right)\left(aX(n+k) + bW(n+k)\right)\right]$$

$$= a^2\, \mathbb{E}[X(n)X(n+k)] + b^2\, \mathbb{E}[W(n)W(n+k)] + ab\, \mathbb{E}[X(n)W(n+k)] + ab\, \mathbb{E}[X(n+k)W(n)]$$

$$= a^2 R_X(k) + b^2 R_W(k) + ab\left(R_{X,W}(k) + R_{X,W}(-k)\right).$$

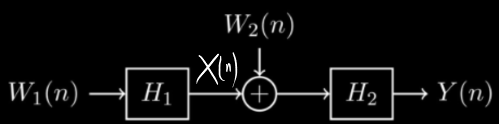
Como X y W son independientes, $R_{X,W}(k) = \underbrace{\mathbb{E}[X(n)]}_{0}\, \mathbb{E}[W(n+k)] = 0.$

$$\therefore R_Y(k) = a^2 R_X(k) + b^2 R_W(k)$$

$$\therefore S_Y(\omega) \overset{WK}{=} \mathcal{F}\{R_Y\}(\omega) = a^2 S_X(\omega) + b^2 S_W(\omega) \quad \blacksquare$$

Actividad 4

Considere el siguiente sistema en tiempo discreto, donde $W_1(n)$ y $W_2(n)$ son ruidos blancos independientes de media nula y varianza unitaria:



1. Halle la PSD teórica de *Y*(*n*) sabiendo que $H_1(z)$ y $H_2(z)$ tienen las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = 2 + z^{-1} \qquad H_2(z) = 4 - 2z^{-1}$$

   Sugerencia: utilice propiedades de independencia entre procesos.

2. Genere el proceso *Y*(*n*) a partir de dos procesos iid N(0,1)siguiendo el esquema propuesto. Grafique la función de autocorrelación de y(n) y su PSD estimada y teórica.

$$S_X(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \underbrace{S_{W_1}(\omega)}_{1} = \left|2 + \cos(\omega) - j\,\mathrm{sen}(\omega)\right|^2 = (2+\cos(\omega))^2 + \mathrm{sen}^2(\omega) = 4 + 4\cos(\omega) + 1 = 5 + 4\cos(\omega).$$

$$Y(n) = \underbrace{(h_2 * X)(n)}_{R(n)} + \underbrace{(h_2 * W_2)(n)}_{V(n)}.$$

Como W_1 y W_2 son independientes, también lo serán X y W_2. Entonces, también son independientes R y V.

$$\therefore \quad S_Y(\omega) = S_R(\omega) + S_V(\omega).$$

$$S_R(\omega) = |H_2(\omega)|^2 S_X(\omega) = \left(20 - 16\cos(\omega)\right)\left(5 + 4\cos(\omega)\right)$$

$$= 100 - 64\cos^2(\omega) = 100 - 32\cos(2\omega) - 32$$

$$= 68 - 32\cos(2\omega)$$

$$S_V(\omega) = |H_2(\omega)|^2 \underbrace{S_{W_2}(\omega)}_{1} = 20 - 16\cos(\omega)$$

$$\boxed{S_Y(\omega) = 88 - 16\cos(\omega) - 32\cos(2\omega)}$$

$$4 - 2\cos(\omega) + 2j\,\text{sen}(\omega)$$

$$\left(4 - 2\cos(\omega)\right)^2 + 4\,\text{sen}^2(\omega)$$

$$16 - 16\cos(\omega) + 4 = 20 - 16\cos(\omega)$$