Ej: $X_1 = s + N_1$, $X_2 = s + N_2$, $X_3 = s + N_3$

$N_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$C_X = I^T C_N I = C_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu_X = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{|C_X|}} \exp\left(\frac{1}{2}(x-\mu_X)^T C_X^{-1}(x-\mu_X)\right)$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right)} \qquad X \sim \mathcal{N}(C_X, \mu_X).$$

2) Son indep. pues C_X es diagonal.

3) $P(\min\{X_i\} > 0\} = \mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0)$

$$\underset{\text{indep.}}{=} P(X_1 > 0)\,\mathbb{P}(X_2 > 0)\,\mathbb{P}(X_3 > 0) = \underbrace{\mathbb{P}(N_1 > -s)^3}_{\text{son iid.}} = (1 - \phi(-s))^3 = \phi(s)^3.$$

4) $P(\text{"mayoría de } X_1, X_2, X_3 \text{ positivas"}) = \mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0)$

$+ \mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 < 0, X_3 > 0) + \mathbb{P}(X_1 < 0, X_2 > 0, X_3 > 0)$

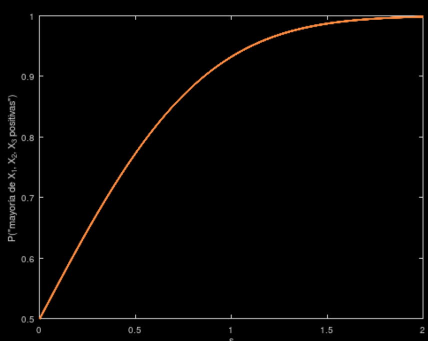
$= \mathbb{P}(N_1 > -s)\,\mathbb{P}(N_2 > -s) + \mathbb{P}(N_1 > -s)\,\mathbb{P}(N_2 < -s)\,\mathbb{P}(N_3 > -s) + \mathbb{P}(N_1 < -s)\,\mathbb{P}(N_2 > -s)\,\mathbb{P}(N_3 > -s)$

$= \phi(s)\,\phi(s) + \phi(s)\,\phi(-s)\,\phi(s) + \phi(-s)\,\phi(s)\,\phi(s)$

$= \phi(s)^2\left[1 + 2(1 - \phi(s))\right]$

$= \phi(s)^2\left[3 - 2\phi(s)\right]$

Parece que da bien (simulado).



Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Definimos el VeA

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ 2Z+1 \end{bmatrix}.$$

Calcular la pdf conjunta $f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x})$.

$X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ Además, $X_2 = 2X_1 + 1$.

$X_2 \sim \mathcal{N}(1, 4)$

$$\boxed{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2}\, \delta\left(x_2 - (2x_1+1)\right)}$$

Sean $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $B \sim \mathrm{Ber}(1/2)$, independientes entre sí. Definimos

$$Y = (2B-1)X.$$

Determinar si X e Y son conjuntamente gaussianas o no.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((2B-1)X \leq y) = P(-X \leq y \mid B=0)\, P(B=0) + P(X \leq y \mid B=1)\, P(B=1)$$

$$= \underbrace{P(X \geq -y)}_{=P(X \leq y)} \frac{1}{2} + P(X \leq y)\frac{1}{2} = P(X \leq y) \quad \therefore \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Pero $W = X + Y = 2BX$ no es Gaussiana pues

$$P(W \leq w) = P(0 \leq w \mid B=0)\, P(B=0) + P(2X \leq w \mid B=1)\, P(B=1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbb{1}\{w \geq 0\} + F_X\left(\frac{w}{2}\right)\right]$$

O sea que hay una CL de X e Y Gaussianas que no es Gaussiana $\divideontimes$.

Ejercicio 2

Sean X e Y dos variables aleatorias Gaussianas. Se necesita caracterizar a $Z = \text{máx}(X, Y)$ en los siguientes casos:

1. X e Y son independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza unitaria.

$$F_Z(z) = P(\max(X,Y) \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) \overset{\text{indep.}}{=} P(X \leq z)\, P(Y \leq z) \overset{\text{id. dist.}}{=} P(X \leq z)^2$$

$$\boxed{F_Z(z) = \phi(z)^2} \Rightarrow f_Z(z) = 2\,\phi(z)\,\varphi(z) = 2\phi(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

2. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}1$.

$$F_Z(z) = P(X \leq z, Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy =$$