Ejercicio 1

Se desea un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^t \sim \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}})$ donde

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Hallar $f_{X_1}(x_1)$.

Como X es Gaussiano, X_1 también lo es y resulta

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_{X_1}, \sigma_{X_1}^2), \quad \text{con } \mu_{X_1} = 1 \text{ y } \sigma_{X_1}^2 = 3/2,$$

$$\therefore f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{X_1}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu_{X_1})^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$\boxed{f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \exp\left(-\frac{(x_1 - 1)^2}{3}\right)}$$

2. Se construye una nueva variable aleatoria, $Y = \mathbf{a}^t\mathbf{X}$, donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Hallar $\mathbf{a}$ tal que $\mathbb{E}[Y] = 0$. Obtenga $\mathbf{Var}[Y]$.

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[a^T X] = a^T \mathbb{E}[X] = [a_1 \; a_2 \; a_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore a_1 = -2a_3$. Elijo por ejemplo $\boxed{a = [-2 \;\; 0 \;\; 1]}$

$$Var(Y) = C_Y = a^T C_X (a^T)^T = a^T C_X a = [-2 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [-2 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} -5/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = 9/2.$$

$$\boxed{Var(Y) = 9/2}$$

3. Escriba un pseudocódigo para obtener realizaciones de la variable aleatoria Y obtenida en el punto anterior, a partir de realizaciones del vector aleatorio $\mathbf{X}$.

Genero N muestras de un vector normal μ_X, C_X y las guardo en $X = [X_1, X_2, X_3]$.

Para cada muestra $X(i)$ guardo en Y el resultado de $-2X_1(i) + X_3(i)$.

4. Obtenga la transformación $\mathbf{Z} = A\mathbf{X} + b$ tal que $\mathbf{Z}$ tiene componentes independientes entre sí.

Ayuda :

$$C_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.924 & 0 & -0.383 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.383 & 0 & 0.924 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.707 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.293 \end{bmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.924 & 0 & 0.383 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.383 & 0 & 0.924 \end{bmatrix}}_{P^T}$$

Queremos blanquear X.

Si planteo $A = \Delta^{-1/2} P^T$, tengo que

$$C_Z = \Delta^{-1/2} P^T \underbrace{C_X}_{P\Delta P^T} \left(\Delta^{-1/2} P^T\right)^T = \Delta^{-1/2} P^T P \Delta P^T (P^T)^T (\Delta^{-1/2})^T$$

Como P es ortogonal y $\Delta^{-1/2}$ es diagonal, $P^T P = P P^T = I$ y $(\Delta^{-1/2})^T = \Delta^{-1/2}$.

$$\therefore \quad C_Z = \Delta^{-1/2} \Delta \Delta^{-1/2} = I$$

O sea que las componentes de Z están descorrelacionadas entre sí y, por ser gaussianas, también son independientes. También son todas de varianza 1.

El b puede elegirse como $-A\mu_X$ así además

$$\mu_Z = E[AX - A\mu_X] = A\,E[X] - A\mu_X = \vec{0},$$

es decir, todas las componentes tienen media nula.

$$\therefore \quad \boxed{Z = \underbrace{\Delta^{-1/2} P^T}_{A} X \underbrace{- \Delta^{-1/2} P^T \mu_X}_{b}.}$$

Olvide que con $A = P^T$ y $b = 0$ alcanza pues

$$C_Z = P^T P \Delta P^T (P^T)^T = \Delta$$ que ya da componentes independientes por ser Δ diagonal.