1) Sean X e Y dos VA discretas que toman valores en {1, 2, 3, ... }. Se sabe que

$$p_{XY}(x,y) = c\left(1-\frac{1}{3}\right)^x\left(1-\frac{1}{5}\right)^y$$

Hallar c tal que $p_{XY}(x,y)$ sea una función de masa de probabilidad válida.
Hallar la función de masa de probabilidad marginal $p_X(x)$.

- Para que sea válida, debe ocurrir que

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} p_{XY}(x,y) = 1$$

$$\Leftrightarrow c \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x \sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^y = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left(\frac{1}{1-2/3}-1\right)\left(\frac{1}{1-4/5}-1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow c \times 2 \times 4 = 1 \quad \therefore \quad \boxed{c = 1/8}$$

- $$p_X(x) = \sum_{y=1}^{\infty} p_{XY}(x,y) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^y = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{1-4/5}-1\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{p_X(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

2) Queremos analizar la respuesta de un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

- Sea h(n) la respuesta impulsiva del sistema. Hallar $y(n) = h(n) \star x(n)$ cuando $x(n) = \delta(n-4)$.

Él sistema es LTI con $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

Entonces, $y(n) = h(n) * \delta(n-4) = h(n-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} u(n-4)$.

- Proponga un pseudocódigo para simular y(n) para entradas x(n) arbitrarias.

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow X(z)\left[1-\frac{1}{2}z^{-1}\right] = Y(z)$$

$$\Leftrightarrow X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(n) = Y(z)$$

És la transformada Z de $x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) = y(n)$

Pseudocódigo:

```
y(0) = x(0);
For k in 1..N:
    y(k) = x(k) - 1/2 x(k-1))
```