1) Sean X e Y dos VA discretas que toman valores en {1, 2, 3, ... }. Se sabe que

$$p_{XY}(x,y) = c\left(1-\frac{1}{3}\right)^x\left(1-\frac{1}{5}\right)^y$$

Hallar c tal que $p_{XY}(x,y)$ sea una función de masa de probabilidad válida.
Hallar la función de masa de probabilidad marginal $p_X(x)$.

- Para que sea válida, debe ocurrir que

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} p_{XY}(x,y) = 1$$

$$\Longleftrightarrow c\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^y = 1$$

$$\Longleftrightarrow c\left(\frac{1}{1-2/3}-1\right)\left(\frac{1}{1-4/5}-1\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow c\times 2\times 4 = 1 \quad \therefore \quad \boxed{c = 1/8}$$

- $$p_X(x) = \sum_{y=1}^{\infty} p_{XY}(x,y) = \sum_{y=1}^{\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^y = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{1-4/5}-1\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{p_X(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

2) Queremos analizar la respuesta de un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

- Sea h(n) la respuesta impulsiva del sistema. Hallar $y(n) = h(n) \star x(n)$ cuando $x(n) = \delta(n-4)$.

El sistema es LTI con $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

Entonces, $y(n) = h(n) * \delta(n-4) = h(n-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} u(n-4)$.

- Proponga un pseudocódigo para simular y(n) para entradas x(n) arbitrarias.

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow X(z)\left[1-\frac{1}{2}z^{-1}\right] = Y(z)$$

$$\Longleftrightarrow X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(n) = Y(z)$$

Es la transformada z de $x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) = y(n)$

Pseudocódigo:

```
y(0) = x(0);
For k in 1..N:
    y(k) = x(k) - 1/2 x(k-1)
```

1) Sean X y W dos VA discretas. Sabemos que Y = X + W.

- Hallar la función de distribución condicional $F_{Y|X}(y|x)$

$$F_{Y|X}(y|x) = \frac{F_{Y,X}(y,x)}{F_X(x)} = \frac{F_{W,X}(y-x,\, x)}{F_X(x)} \overset{\text{indep.}}{=} \frac{F_W(y-x)\,\cancel{F_X(x)}}{\cancel{F_X(x)}} = F_W(y-x)$$

- Sabemos que W toma valores en todo el conjunto de enteros y X toma valores en el conjunto {1, 2, 3, 4} con función de masa de probabilidad $p_X(x)$. A partir de la respuesta anterior, calcule

$$P(Y > a), a \in \mathbb{Z}$$

$$P(Y>a) = 1 - P(Y \leq a) = 1 - P(W \leq a - X) = 1 - [P(W \leq a-1)p_X(1) + \dots + P(W \leq a-4)p_X(4)]$$

$$\boxed{P(Y>a) = 1 - F_W(a-1)p_X(1) - F_W(a-2)p_X(2) - F_W(a-3)p_X(3) - F_W(a-4)p_X(4)}$$

2) Las señales de entrada y salida de un sistema LTI se relacionan a partir de la ecuación en diferencias siguiente $8y(n) - 6y(n-1) + y(n-2) = 6x(n-1) - 2x(n-2)$.

- Obtenga la función de transferencia del sistema.

$$8\,Y(z) - 6z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = 6z^{-1}X(z) - 2z^{-2}X(z)$$

$$Y(z)[8 - 6z^{-1} + z^{-2}] = X(z)[6z^{-1} - 2z^{-2}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6z^{-1} - 2z^{-2}}{8 - 6z^{-1} + z^{-2}} = \frac{6z - 2}{8z^2 - 6z + 1}$$

$$z = \frac{+6 \pm \sqrt{36-32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

- Explique si el largo de la respuesta es finito o infinito.

La respuesta es de largo infinito pues tiene polos fuera de $z=0$ (por ejemplo, $z = 1/2$ es un polo).

- Proponga un pseudocódigo para calcular y graficar las primeras N muestras de h(n).

De la ecuación en diferencias despejamos y(n) = 1/8 * (6x(n-1) - 2x(n-2) + 6y(n-1) - y(n-2)).
Entonces podemos calcular las primeras N muestras de h(n) así:

```
h(0) = 0        // todos los términos de la ec. en dif. son nulos
h(1) = 3/4      // solo sobrevive 6/8*delta(1 - 1)
h(2) = 5/16     // solo sobrevive -2/8*delta(2 - 2) + 6/8 h(1)

Para cada k de 3 a N-1:
  h(k) = (6*h(k-1) - h(k-2)) / 8     // sale de la ecuación en diferencias

// Gráfico
plot tipo stem con eje x = 0..N-1, eje y = h(0)...h(n-1)
```