Ejercicio 1

Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio gaussiano cuya media y matriz de covarianza son:

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Obtenga las curvas de nivel $\mathcal{C}_\alpha = \{(x,y) : f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$.
2. Grafique en el plano (x,y) $N = 10^3$ realizaciones del vector $\mathbf{X}$ junto con las curvas de nivel anteriores.

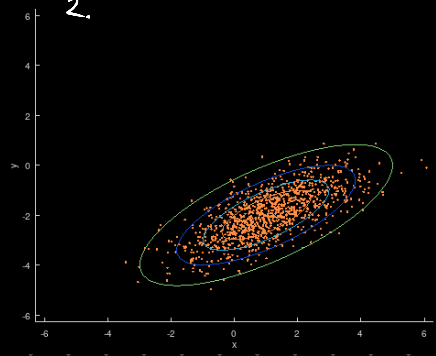
1.
$$C_\alpha = \{(x,y): f_X(x) = \alpha\} = \left\{(x,y): \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x-1 \quad y+2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}} = \alpha\right\}$$

$$= \left\{(x,y): e^{-\frac{1}{2}(x^2+2y^2-2xy-6x+10y+13)} = 2\pi\alpha\right\}$$

$$= \left\{(x,y): x^2+2y^2-2xy-6x+10y+13 = -2\ln(2\pi\alpha)\right\}$$

$$\boxed{C_\alpha = \{(x,y): x^2-6x-2xy+10y+2y^2 = c\}}$$

2.

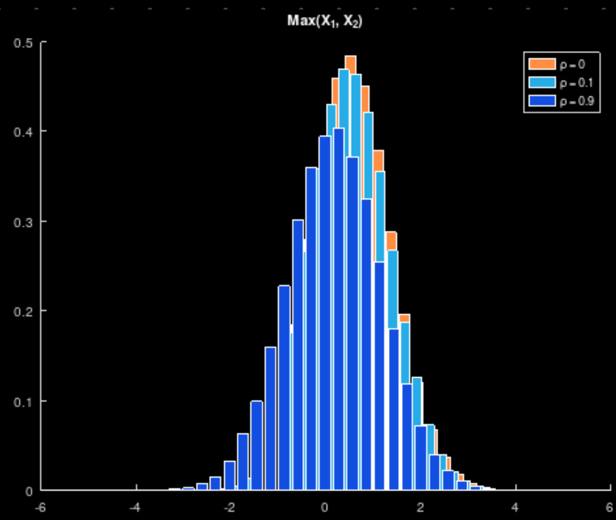


Ejercicio 2

Sean X e Y dos variables aleatorias Gaussianas. Se necesita caracterizar a $Z = \max(X, Y)$ en los siguientes casos:

1. X e Y son independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza unitaria.
2. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}1$.
3. X e Y tiene ambas media nula, varianza unitaria, y coeficiente de correlación $0{,}9$. Discuta los resultados obtenidos.

A medida que las variables están más correlacionadas, el máximo tiende a ser más chico y se parece más a simplemente una normal de media 0 y varianza 1.
A medida que rho tiende a uno, las variables X1 y X2 tienden a ser la misma y max(X1, X2) = X1 = X2.
Para las descorrelacionadas, el máximo tiende a ser más grande porque es más probable que alguna de las dos sea grande.



Ejercicio 3

Se tiene un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1\ X_2]^t$ cuya distribución es Gaussiana con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $C_{\mathbf{X}}$.

1. Utilizando un cambio de variables, genere un vector aleatorio $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^t$ de componentes descorrelacionadas y media nula.

a) Hay que blanquear X.

$$Y = AX + b, \quad \text{con} \quad A = P^T \quad \text{y} \quad B = -A\mu_X,$$

donde P es la matriz de autovectores de C_X.

$$\therefore \quad \boxed{Y = P^T(X - \mu_X)}$$

P ortogonal $\Rightarrow P^T P = I$

Esto funciona porque $C_Y = P^T C_X (P^T)^T = P^T C_X P = P^T(P\Delta_X P^T)P = \Delta_X$,

entonces $\rho_Y = 0$ y además $\mu_Y = P^T(E[X] - \mu_X) = 0$. ✓

2. Demuestre que los autovalores de la matriz $C_{\mathbf{Y}}$ son proporcionales a la longitud de los ejes mayores y menores de la elipse que contiene a los puntos del plano con igual función de densidad de probabilidad, es decir, $f_Y(\mathbf{y}) = \alpha$.

$$\{\mathbf{y} = [y_1, y_2] : \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1\},$$

$$C_y = \Lambda_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{|C_y|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y^T C_y^{-1} y\right)\right) = K_1$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(y^T C_y^{-1} y\right)\right) = K_2$$

$$-\frac{1}{2} y^T C_y^{-1} y = k_3$$

$$y^T C_y^{-1} y = K_4$$

$$[y_1 \ y_2] \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = K_4$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} [y_1 \ y_2] \begin{bmatrix} \sigma_2^2 y_1 \\ \sigma_1^2 y_2 \end{bmatrix} = K_4$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2} y_1^2 + \frac{1}{\sigma_2^2} y_2^2 = K_4$$

$$\therefore \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = K \iff \frac{y_1^2}{(\sqrt{K}\sigma_1)^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{K}\sigma_2)^2} = 1$$

Los semiejes son $\sqrt{K}\sigma_1$ y $\sqrt{K}\sigma_2$ con σ_1^2 y σ_2^2 los autovalores.

Es decir, son proporcionales a la raíz cuadrada de los autovalores.

Ejercicio 6 Secuencia Gaussiana

Considere una sucesión de variables aleatorias $\{U_1, U_2, U_3, ...\}$ independientes uniformes en $(0, 1)$. A continuación se arma la siguiente secuencia:

$$\begin{cases} X_{2j} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ X_{2j-1} &= \sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

1. Halle la densidad conjunta del vector $[X_{2j-1}, X_{2j}]$, para $j \in N$.
   Sugerencia: considere la transformación Box-Muller.

$$J = \begin{vmatrix} -\sqrt{-\ln(U_{2j})}\sin(2\pi U_{2j-1})2\pi & \frac{-\frac{1}{U_{2j}}}{2\sqrt{-\ln(U_{2j})}}\cos(2\pi U_{2j-1}) \\ \sqrt{-\ln(U_{2j})}\cos(2\pi U_{2j-1})2\pi & \frac{-\frac{1}{U_{2j}}}{2\sqrt{-\ln(U_{2j})}}\sin(2\pi U_{2j-1}) \end{vmatrix} = \frac{\pi}{U_{2j}}$$

$$U_{2j} = e^{-(x_{2j}^2 + x_{2j-1}^2)}$$

$$f_{X_{2j}, X_{2j-1}}(x) = \frac{1}{\pi / e^{-(x_{2j}^2 + x_{2j-1}^2)}} = \frac{1}{\pi} e^{-(x_{2j}^2 + x_{2j-1}^2)}$$

$$\therefore C_{X_{2j}, X_{2j-1}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \mu_{X_{2j}, X_{2j-1}} = 0$$

2. Utilizando las secuencia X se arma una nueva secuencia:

$$\begin{cases} Y_{2j} = X_{2j} + 0{,}5X_{2j-1} \\ Y_{2j-1} = 0{,}5X_{2j} + X_{2j-1} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, ...$$

Halle la densidad conjunta del vector $[Y_1, \ldots, Y_{2j}]$ para $j \in \mathbb{N}$.

Ahora, $[Y_{2j}, Y_{2j-1}]$ es Gaussiano con $C_{Y_{2j},Y_{2j-1}} = A C_{X_{2j}X_{2j-1}} A^T$, $\mu_{Y_{2j},Y_{2j-1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

donde $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$C_{Y_{2j},Y_{2j-1}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/8 & 1/2 \\ 1/2 & 5/8 \end{bmatrix}}_{\det \to 9/64}$$

$$f_{Y_{2j},Y_{2j-1}}(y) = \frac{1}{2\pi\ 3/8} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((y_{2j} \ \ y_{2j-1}) \begin{bmatrix} 40/9 & -32/9 \\ -32/9 & 40/9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{2j} \\ y_{2j-1} \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\boxed{f_{Y_{2j},Y_{2j-1}}(y) = \frac{4}{3\pi} \exp\left(-\frac{20}{9}\left(y_{2j}^2 + y_{2j-1}^2 - \frac{8}{5} y_{2j} y_{2j-1}\right)\right)}$$

Para $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{2j-1}, Y_{2j}]^T$, tenemos que

$\mathrm{cov}(Y_i, Y_k) = 0$ salvo cuando $i = k$ o $i = 2j$, $k = 2j-1$.

$$\therefore \quad C_Y = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/2 & & & & & \\ 1/2 & 5/8 & & & & 0 & \\ & & 5/8 & 1/2 & & & \\ & & 1/2 & 5/8 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & 5/8 & 1/2 \\ & & & & & 1/2 & 5/8 \end{bmatrix}, \quad \mu_Y = 0$$