TD 4
2018

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie comme l'instant de premier succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre $q \in]0,1[$.

1. Vérifier que la loi de X est une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2. Vérifier qu'il s'agit d'un modèle exponentiel. Donner une statistique exhaustive.

3. Déterminer I(q), l'information de Fisher sur q d'un échantillon de taille 1.

Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon indépendant de taille n de même loi que X.

4. Déterminer $\hat{q}_n$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de q.

5. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement normal.

Exercice 2. On considère le modèle d'échantillonnage $X_1 ..., X_n$ de taille n associé à la famille de lois exponentielles $P = \{\mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0\}$. On veut estimer λ

1. A partir de la méthode des moments, construire un estimateur convergent $\hat{\lambda}_n$ de λ.

2. Vérifier qu'il s'agit de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

3. Déterminer la loi de $\Sigma_{i=1}^n X_i$. Calculer $E_\lambda[\hat{\lambda}_n]$. L'estimateur est-il sans biais ?

4. Déterminer un estimateur $\hat{\lambda}_n^*$ sans biais et un estimateur $\hat{\lambda}_n^o$ qui minimise le risque quadratique parmi les estimateurs

$$\hat{\lambda}_n^{(c)} = \frac{c}{\Sigma_{i=1}^n X_i}, \text{ où } c > 0$$

5. Calculer l'information de Fisher et la borne Cramer-Rao pour un ESB de λ.
6. Les estimateurs étudiés font intervenir la statistique $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Est-elle exhaustive ?
7. Résumé : quelles propriétés $\hat{\lambda}_n^*$ a-t-il parmi les suivantes ?
(a) Sans biais. (b) Efficace. (c) Asymptotiquement normal.