6 Estimation par intervalle de confiance

1. (a) La moyenne empirique est $\overline{x} = 159$ et la médiane $x_{(4)} = 156$.

   (b) A partir de la fonction pivotale
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
   on obtient l'intervalle bilatéral suivant :
$$1 - \alpha = P\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < \mu < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right).$$
   A.N. : [151.59,166.41]

   (c) La longueur de l'intervalle est
$$\ell = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}.$$
   La condition $\ell \leq \epsilon$ équivaut donc à
$$n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\alpha/2}^2}{\epsilon^2}.$$
   A.N. : $n \geq 62$.

   (d) Si σ^2 est inconnu, on utilise la fonction pivotale :
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S^*/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}_{n-1}$$
   qui conduit à l'intervalle :
$$1 - \alpha = P\left(\overline{X} - \frac{S^*}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2} < \mu < \overline{X} + \frac{S^*}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}\right).$$
   A.N. : [144.41,173.59]

   (e) Dans le cas où μ est connue, on utilise la fonction pivotale
$$\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$
   avec
$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$
   On a
$$1 - \alpha = P\left[\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \chi_{n,\alpha}^2\right] = P\left[\sigma^2 < \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\chi_{n,\alpha}^2}\right].$$
   A.N. : [0,690.8].

   Dans le cas où μ est inconnue, on utilise la fonction pivotale
$$\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$
   On a
$$1 - \alpha = P\left[\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} > \chi_{n-1,\alpha}^2\right] = P\left[\sigma^2 < \frac{(n-1)S^{*2}}{\chi_{n-1,\alpha}^2}\right].$$
   A.N. : [0,909.8].

2. Il y a $n = 50$ enfants. On a donc $\widehat{p} = 15/50 = 0.3$.