MSA

TD 6
2018

Exercice 1. On a relevé pendant 30 jours ouvrables consécutifs les nombres quotidiens d'actes de délinquance commis dans un centre commercial. Les résultats sont reportés dans le tableau suivant où n_k désigne le nombre de jours et k le nombre d'actes de délinquance par milliers de personnes qui ont été commis :

k	0	1	2	3	4	5
n_k	4	10	11	1	1	3

On suppose que le nombre X_i d'actes de délinquance par milliers de personnes commis le jour i, $1 \leqslant i \leqslant 30$, dans le centre commercial suit une loi de Poisson de paramètre λ inconnu et que les $X_1, \ldots, X_{30}$ sont indépendantes. D'après les statistiques du ministère de l'intérieur, il se produit en moyenne 1,5 actes de délinquance par milliers de personnes par jour dans chaque centre commercial de la région parisienne. Ce chiffre est considéré comme sous-estimé par une association de commerçants. Nous allons utiliser la théorie des tests pour tenter de trancher cette question.

1. On considère le problème de test suivant :

$$\begin{cases} H_0 : & \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : & \lambda = \lambda_1, \end{cases}$$

avec $\lambda_1 > \lambda_0$. En utilisant le théorème de Neymann-Pearson, montrer que le test optimal au niveau α pour ce problème s'exprime en fonction de la statistique $\bar{X}$. Donner la forme de la région critique du test.

2. En supposant n grand, déterminer l'expression littérale de la région critique. Décide-t-on du rejet ou non de l'hypothèse H_0 lorsque $\lambda_0 = 1.5$ et $\alpha = 0.05$?

3. Calculer la puissance du test pour $\lambda_1 = 2$.

4. On considère cette fois les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : & \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : & \lambda > \lambda_0 \ . \end{cases}$$

Quelle est la région critique de ce test ? Y a-t-il lieu de remettre en cause les statistiques du ministère de l'intérieur ?

Exercice 2. Soit $(X_n, n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi normale $N(\theta, \theta)$, avec $\theta > 0$. L'objectif de cet exercice est de présenter deux tests pour déterminer si pour une valeur déterminée $\theta_0 > 0$, on a $\theta = \theta_0$ (hypothèse H_0) ou $\theta > \theta_0$ (hypothèse H_1). On note

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \;\; V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \; = \; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2$$

1. Déterminer $\hat{\theta}_n$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Montrer directement qu'il est convergent, asymptotiquement normal et donner sa variance asymptotique. Est-il asymptotiquement efficace ?

2. Construire un test asymptotique convergent à l'aide de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

On considère la classe des estimateurs T_n^λ de la forme $T_n^\lambda = \lambda \bar{X}_n + (1-\lambda)V_n$.

3. Montrer que la suite d'estimateurs $(T_n^\lambda, n \geq 2)$ est convergente, sans biais. Donner la variance de T_n^λ .

Exercice 3. L'information dans une direction de l'espace prise par un radar de surveillance aérienne se présente sous la forme d'un n-échantillon $X = (X_1, ..., X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne de moyenne θ, paramètre inconnu, et de variance σ^2 connu. On notera $f(x, \theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$ la densité du vecteur aléatoire.

En l'absence de tout Objet Volant (Hypothèse H_0) $\theta = \theta_0 \in \mathbb{R}^+$, sinon (Hypothèse H_1),$\theta = \theta_1$, avec $\theta_1 > \theta_0$.

1. Montrer comment le lemme de Neyman-Pearson permet la construction d'un test de l'hypothèse $\theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $\theta = \theta_1$ de niveau α et de puissance maximale.

2. Quelle est la plus petite valeur de n permettant de construire un test de niveau α, $\alpha \in [0, 1]$ et d'erreur de deuxième espèce inférieure ou égale à β, $\beta \in [0, 1]$, avec $\alpha < \beta$?

3. Supposons maintenant qu'en presence d'objet volant l'information fournie par le radar est un n-échantillon $X = (X_1, ..., X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne de moyenne $\theta \neq \theta_0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et de variance σ^2. Peut-on construire un test de l'hypothèse $\theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $\theta \neq \theta_0$ de niveau α donné uniformément plus puissant ?

Exercice 4. Une agence de voyage souhaite cibler sa clientèle. Elle sait que les coordonnées du lieu de vie d'un client (X, Y) rapportées au lieu de naissance $(0, 0)$ sont une information significative pour connaître le goût de ce client. Elle distingue :

- La population 1 (Hypothèse H_0) dont la loi de répartition a pour densité :

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

- La population 2 (Hypothèse H_1) dont la loi de répartition a pour densité :

$$p_2(x, y) = \frac{1}{16} \mathbf{1}_{[-2,2]}(x) \mathbf{1}_{[-2,2]}(y)$$

L'agence souhaite tester l'hypothèse qu'un nouveau client vivant en (x, y) appartient à la population 1 plutôt qu'à la population 2.

1. Proposer un test de niveau inférieur à $\alpha = 5\%$ et de puissance maximale, construit à partir du rapport de vraisemblance.

2. Donner une statistique de test et caractériser graphiquement la région critique dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta} > 0$.

1. Construire le test de niveau α $H_0 = \{\theta = \theta_0\}$ contre $H_1 = \{\theta > \theta_0\}$.

2. Construire le test de niveau α $H_0 = \{\theta = \theta_0\}$ contre $H_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$.