Corrigé du TD 3
Février 2011

Exercice 1. On observe la réalisation d'un échantillon $X_1, ..., X_n$ de taille n de loi P_θ de densité

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}(1-x)^{\frac{1}{\theta}-1}\mathbf{1}_{]01[}(x),\ \theta \in \mathbb{R}_+^*.$$

1.1. Donner une statistique exhaustive.
Pour obtenir une statistique exhaustive, une solution consiste à appliquer le théorème de Darmois. On doit donc d'abord montrer que le modèle $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta > 0\}$ forme un modèle exponentiel, autrement que la fonction densité s'écrit sous forme exponentielle.

$$\ln f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}\ln(1-x) - \ln\theta - \ln(1-x) + \ln \mathbf{1}_{]01[}(x).$$

Donc le modèle est bien de forme exponentielle. De plus, en appliquant le théorème de Darmois, on obtient une statistique exhaustive : $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - X_i)$.

1.2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance T_n de θ.
La log-vraisemblance du modèle est donnée par :

$$l_n(x_1, ..., x_n; \theta) = \ln L_n(x_1, ..., x_n; \theta) = -n\ln\theta + (\frac{1}{\theta} - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i) + \Pi_{i=1}^{n}\ln(\mathbf{1}_{]01[}(x_i)).$$

La log-vraisemblance vaut $-\infty$ sur la frontière (quand $\theta \to 0^+$ et $\theta \to +\infty$). Donc son maximum est atteint au point θ qui annule sa dérivée,i.e. au point $\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} - \ln(1-x_i)$. On obtient ainsi l'EMV :

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} - \ln(1 - X_i)$$

1.3. Montrer que $-\ln(1 - X_i)$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En utilisant la méthode de la fonction muette et le changement de variable $y = -\ln(1-x)$, on obtient pour une fonction h mesurable bornée :

$$E_\theta\left[h(-\ln(1 - X_i))\right] = \int_0^1 h(-\ln(1-x))\frac{1}{\theta}(1-x)^{\frac{1}{\theta}-1}dx = \int_0^\infty h(y)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy.$$

On en déduit que $-\ln(1 - X_i)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

1.4. Calculer le biais et le risque quadratique de T_n. Cet estimateur est-il convergent ?
- Le biais $b_n(T_n, \theta) = E_\theta[T_n] - \theta = E_\theta[1 - \ln(1 - X_1)] - \theta = 0$. L'estimateur T_n est donc sans biais.

- Le risque quadratique est :

$$R_n(T_n, \theta) = E_\theta\left[(T_n - \theta)^2\right] = \text{Var}_\theta(T_n) = \frac{\theta^2}{n}.$$

- Convergence : Les variables aléatoires $-\ln(1 - X_i), i \geq 1$ sont indépendantes, de même loi et intégrables. La loi forte de grands nombres assure que la suite $(T_n, n > 1)$ converge presque sûrement vers θ.

Exercice 2. 2.1. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de n variables i.i.d. de loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \; ; k \in \mathbb{N}^*$$

Calculer la vraisemblance de l'échantillon, déterminer si le modèle est exponentiel et exhiber une statistique exhaustive.

Le paramètre du modèle est $\lambda \in \Theta = \mathbb{R}_+^*$. On a pour $x \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\Pi_{i=1}^n x_i!} \\
\log L_n(x) &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i + b(x) + \beta(\lambda).
\end{aligned}$$

Par conséquent, le modèle est exponentiel et une statistique exhaustive est la statistique canonique $S(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$.

2.2. Mêmes questions avec une loi de Pareto de paramètres α et θ avec $\alpha > 1$, $\theta > 0$ de densité

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{\theta}(\frac{\theta}{x})^\alpha \mathbf{1}_{[\theta,\infty[}(x).$$

Le paramètre du modèle est $(\alpha, \theta) \in \Theta = \mathbb{R}^2$, on a

$$L_n(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\theta}\right)\theta^{n\alpha}e^{-\alpha\sum_{i=1}^n x_i}\mathbf{1}_{[\theta,\infty[}(\min x_i)$$

Le modèle n'est pas exponentiel car $\mathbf{1}_{[\theta,\infty[}(\min x_i)$ dépend à la fois des paramètres et des observations, et ne peut être écrit sous forme exponentielle.

2.3. Mêmes questions avec une loi de Weibull de paramètres α et θ avec $\alpha > 1$, $\theta > 0$ de densité

$$f(x) = \alpha\theta x^{\alpha-1}e^{-\theta x^\alpha}1_{[0,\infty[}(x).$$

Cette fois le paramètre du modèle est $(\alpha, \theta) \in \Theta = \mathbb{R}^{+*2}$. On a

$$L_n(x) = \alpha^n\theta^n\left(\Pi_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right)1_{[0,\infty[}(\min x_i).$$

En calculant $LogL_n$, on ne voit que lorsque α est inconnu, on ne peut écrire L_n sous forme exponentielle, et on ne peut exhiber de statistique exhaustive autre que $T(X_1, ..., X_n) = (X_1, ..., X_n)$. En revanche, si α est connu, le modèle est exponentiel et $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i^\alpha$ est une statistique exhaustive.

2.4. Mêmes questions avec une loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$ inconnu. La fonction densité de la loi $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$ est :

$$f_{\mathcal{U}_{[0,\theta]}}(x) = \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{x>0} \mathbf{1}_{x<\theta}$$

et donc on a

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{\theta^n} \mathbf{1}_{x_1,\ldots,x_n>0} \mathbf{1}_{x_1,\ldots x_n<\theta} \\ &= \frac{1}{\theta^n} \mathbf{1}_{\min x_i>0} \mathbf{1}_{\max x_i<\theta} \end{aligned}$$

Le modèle n'est pas exponentiel.

Exercice 3. Calculer l'information de Fisher dans les modèles statistiques suivants :
3.1. Une loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(X_1 = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ ; k \in \mathbb{N}^*$$

L'information de Fisher pour n observations i.i.d. est égale à n fois l'information de Fisher pour une observation. On se contente donc de calculer l'information de Fisher dans le cas $n = 1$.

$$\begin{aligned} L_1(x, \lambda) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ \ln L_1(x, \lambda) &= -\lambda + x \ln \lambda - \ln(x!) \\ \frac{\partial \ln L_1}{\partial \lambda}(x, \lambda) &= -1 + \frac{x}{\lambda} \\ \frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial \lambda^2}(x, \lambda) &= -\frac{x}{\lambda^2} \end{aligned}$$

D'après cours :

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= -E_\lambda \left[\frac{\partial^2 L_1}{\partial \lambda^2}(X, \lambda) \right] \\ &= \frac{E_\lambda[X]}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

d'où

$$I_1(\lambda) = \frac{n}{\lambda}.$$

3.2. Une loi de Pareto de paramètres α **et** θ avec $\alpha > 1$, $\theta > 0$ de densité

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{\theta} (\frac{\theta}{x})^\alpha \mathbf{1}_{[\theta,\infty[}(x).$$

La vraisemblance n'est pas dérivable en θ : l'information de Fisher n'est pas définie pour ce modèle. Si θ est une constante connue et non un paramètre à estimer, on peut calculer l'information de Fisher pour le modèle "réduit" (paramétré par α) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_1}{\partial \lambda}(x, \alpha) &= \frac{1}{\alpha - 1} + \ln \theta - \ln x \\ \frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial \alpha^2}(x, \alpha) &= -\frac{1}{(\alpha - 1)^2} \end{aligned}$$

D'où

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

3.3. Une loi de Weibull de paramètres α **et** θ avec $\alpha > 1$, $\theta > 0$ de densité

$$f(x) = \alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} 1_{[0,\infty[}(x).$$

On a

$$\begin{aligned}
\ln L(x,\alpha,\theta) &= \ln\alpha + \ln\theta + (\alpha-1)\ln x - \theta x^\alpha \\
\frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\theta^2}(x,\alpha,\theta) &= -\frac{1}{\theta^2} \\
\frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\theta\partial\alpha}(x,\theta,\alpha) &= -x^\alpha \ln x, \\
\frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\alpha^2}(x,\alpha,\theta) &= -\frac{1}{\alpha^2} - \theta x^\alpha (\ln x)^2
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
I_1(\alpha,\theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\theta\partial\alpha} \\ \frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\theta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 \ln L_1}{\partial\theta^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha^2+\theta E[X^\alpha(\ln X)^2]} & E[X^\alpha \ln X] \\ E[X^\alpha \ln X] & \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Remarque 1 : Les expressions explicites de $E[X^\alpha(\ln X)^2]$ et $E[X^\alpha \ln X]$ peuvent évidemment être calculées, mais ici on peut s'en passer...
Remarque 2 : Dans le sous-modèle dans lequel α est connu et θ inconnu, on a simplement :

$$I_1(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$$

3.4. Une loi uniforme sur $[0;\theta]$ avec $\theta > 0$ inconnu.
La vraisemblance du modèle est :

$$L_n(x_1,...,x_n;\theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbf{1}_{\min x_i \geq 0}\mathbf{1}_{\max x_i \leq \theta}$$

donc la log-vraisemblance s'écrit pour $x \in [0,\theta]^n$:

$$\ln L_n(x_1,...,x_n;\theta) = -n\ln\theta$$

L'information de Fischer n'est pas défini la log-vraisemblance : $\theta \mapsto \log L_n(x_1,...,x_n;\theta)$ n'est pas définie (donc pas dérivable) au point $\theta = \max x_i$.