MSA

TD 5
2018

Exercice 1. Soit X une v.a. de densité :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, x \in \mathbb{R}$$

où θ est un paramètre réel inconnu.

1. Calculer $E_\theta[X]$ et $\text{Var}_\theta[X]$. En déduire un estimateur T_n de θ.

2. Construire un intervalle de confiance de niveau asymptotique 95% pour θ dans le cas où $n = 200$.

Exercice 2. On rappelle que dans le modèle uniforme $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}[0, \theta], \theta > 0\}$, l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance de θ est $\hat{\theta}_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}_\theta(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} \leq x)$ et en déduire que la loi de $\frac{\hat{\theta}_n}{\theta}$ ne dépend pas de θ.

2. Construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour θ.

Exercice 3. Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon de loi

$$f(x, \theta) \;=\; e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty[}(x)$$

1. Donner la vraisemblance associée à l'échantillon ci-dessus.

2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$.

3. Déterminer la loi de $\hat{\theta}_n$. Est-il un estimateur sans biais ? asymptotiquement sans biais ?

4. Montrer que $T_n = \hat{\theta}_n - \theta$ est une statistique libre pour θ. Déterminer sa loi.

5. Construire un intervalle de confiance de θ à un niveau de confiance $\alpha \in [0, 1]$.

6. Montrer que $\hat{T}_n = n\left(1 - e^{-(\hat{\theta}_n - \theta)}\right)$ est une statistique libre pour θ. Déterminer sa loi.

7. En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour θ avec un niveau de confiance α.

Exercice 4. Les lecteurs de tension artérielle systolique (TAS) (en mm Hg) sur un individu ła même heure pendant 7 jours consécutifs ont fournis les données suivantes

jour	1	2	3	4	5	6	7
x_i	161	155	142	157	150	192	156

1. Calculer la moyenne empirique et la médiane de l'échantillon.
2. En faisant l'hypothèse que la mesure de tension X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = 100$, donner un intervalle de confiance (IC) (bilatéral) à 95% pour μ.

3. Combien de jours faut-il observer la TSA pour que la longueur de l'IC à 95% n'excède pas 5mm de Hg.
4. Que devient l'IC calculé pour répondre à la question (b) si on suppose que σ^2 est inconnue.
5. Donner un intervalle de confiance unilatéral (de la forme $[0, U]$) à 95% sur σ^2 en supposant $\mu = 160$, puis en supposant μ inconnu.