01 Potencial y magnificacion

Para empezar el objeto mas importante es el mapa de convergencia $\kappa(\vec{\theta})$, este hace el papel de la densidad efectiva de masa. Si bien la distribucion de masa es algo tridimensional $\rho(\vec{r})$ lo que se hace es proyectarla a los ejes del plano de vision $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ de manera que la densidad es $\Sigma(\vec{\theta})$. En particular se usa una constante de normalizacion la cual es Σ_c lo que se refiere a la densidad critica.

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_c}$$

Donde el potencial bidimensional efectivo que controla la curva de los rayos de luz obedece la ecuación de Poisson, todo sera tomado en estas coordenadas del plano $\nabla_\theta \to \nabla$ y se usara a modo de notación simplificada

$$\nabla^2 \psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta})$$

De manera que construyendo la función de Green para el problema $\nabla^2 G(\vec{\theta}, \vec{\theta}') = \delta(\vec{\theta} - \vec{\theta}')$ lo cual tiene por solucion

$$G(\vec{\theta}, \vec{\theta}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$$

De manera que se puede calcular el potencial a partir del mapa de convergencia usando la formula de Green

$$\int G\nabla^2\psi - \psi\nabla^2 G \; d^2\theta' = \oint G\partial_n\psi - \psi\partial_n G \; d\ell$$

El lado derecho puede ser definido a partir de distintas condiciones, la primera es que la funcion de Green decae mientras nos alejamos, por tanto evaluada en los bordes tiende a 0. El potencial bidimensional por otro lado no decae pues la distribución de materia oscura permea todo el universo observable, y la función de Green queda libre a definirse su derivada en el borde para determinarla por completo, de manera que el lado derecho puede describirse como una constante a elegir libremente:

$$\oint G\partial_n\psi - \psi\partial_n G \; d\ell = 0 - \oint \psi\partial_n G \; d\ell = -\psi_0$$

Puede ser elegido como 0 si se desea, el potencial solo importan sus derivadas.
El lado izquierdo por otro lado puede ser resuelto utilizando $\nabla^2\psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta})$, $\nabla^2 G(\vec{\theta}, \vec{\theta}') = \delta(\vec{\theta} - \vec{\theta}')$ de manera que:

$$\int G\nabla^2\psi - \psi\nabla^2 G\, d^2\theta' = \int G\, 2\kappa - \psi\, \delta(\vec{\theta}-\vec{\theta}')d^2\theta'$$

$$\int 2G\kappa d^2\theta' - \psi(\vec{\theta}) = -\psi_0$$

Despejando se obtiene el potencial bidimensional

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi}\int \kappa(\vec{\theta}')\ln|\vec{\theta}-\vec{\theta}'|d^2\theta' + \psi_0$$

Curvatura de rayos

El angulo de curvatura viene a ser la gradiente del potencial, la gradiente puede ingresar a la integral y obtener una formula mas resumida

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \nabla\psi = \frac{1}{\pi}\int \kappa(\vec{\theta}')\frac{\vec{\theta}-\vec{\theta}'}{|\vec{\theta}-\vec{\theta}'|^2}d^2\theta',$$

Ademas es posible linearizar a modo de obtener una matriz que describe las transformaciones

$$\mathbb{A}_{ij} \equiv \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\vec{\theta}} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial\alpha_i(\vec{\theta})}{\partial\theta_j}\right) = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^2\psi(\vec{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right) = \mathbb{M}^{-1}.$$

Se utiliza una notacion resumida

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \equiv \psi_{ij}.$$

De manera que cantidades pueden ser definidas por este tensor ψ_{ij}

$$\kappa = \frac{1}{2}(\psi_{11}+\psi_{22}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\psi_{ij}.$$

Asi como definir el "shear", el shear simetrico

$$\gamma_1(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi_{11}-\psi_{22}) \equiv \gamma(\vec{\theta})\cos\left[2\phi(\vec{\theta})\right],$$

como el componente antisimetrico

$$\gamma_2(\vec{\theta}) = \psi_{12} = \psi_{21} \equiv \gamma(\vec{\theta})\sin\left[2\phi(\vec{\theta})\right].$$

Lo cual permite escribir de manera resumida

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1-\kappa-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1-\kappa+\gamma_1 \end{pmatrix} = (1-\kappa)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

El mapa de convergencia afecta la magnificacion, la parte del Shear introduce astigmatismo lo cual modifica los circulos a elipses,

Lista de ejemplos

Lens Model	$\psi(\theta)$	$\alpha(\theta)$
Point mass	$\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\frac{4GM}{D_{\mathrm{d}}c^2}\ln\|\theta\|$	$\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\frac{4GM}{c^2 D_{\mathrm{d}}\|\theta\|}$
Singular isothermal sphere	$\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\|\theta\|$	$\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\frac{4\pi\sigma^2}{c^2}$
Softened isothermal sphere	$\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\left(\theta_{\mathrm{c}}^2+\theta^2\right)^{1/2}$	$\frac{D_{\mathrm{ds}}}{D_{\mathrm{s}}}\frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\frac{\theta}{(\theta_{\mathrm{c}}^2+\theta^2)^{1/2}}$
Constant density sheet	$\frac{\kappa}{2}\theta^2$	$\kappa\|\theta\|$