Métodos Matemáticos I

Guía IV

Licenciatura en Física

IPGG

---

1).- Determine el dominio de las siguientes funciones:

- $\dfrac{1}{z^2+1}$
- $\dfrac{z}{z+\bar{z}}$
- $Arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$
- $\dfrac{1}{1-|z|^2}$

---

2).- Suponga que $f\left(x,y\right)=x^2-y^2-2y+i\left(2x-2xy\right)$, reescriba esta función anterior en términos de la variable z.

Resp.: $f(z)=\overline{z}^2+2iz$

---

3).- Escriba la función:

$$f\left(z\right)=z+\frac{1}{z}$$

en términos de:

- $f\left(z\right)=f\left(x,y\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$.
- $f\left(z\right)=f\left(r,\theta\right)=u\left(r,\theta\right)+iv\left(r,\theta\right)$. **Resp.**: $f(z)=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

---

4).- Muestre que la función $f(z)=z^2$ transforma las líneas paralelas al eje real en parábolas. ¿En qué las transforma la aplicación $f(z)=z^3$?.

---

5).- Para que valores de $z\in\mathbb{C}$ se satisface que $\overline{\exp\left(iz\right)}=\exp\left(i\bar{z}\right)$.

---

6).- Encuentre la imagen de las rectas $x=x_0$ y $y=y_0$ bajo la transformación $\cos\left(z\right)$.

---

7).- Encuentra todos los puntos (x, y) tales que:

- $\sin(z) = 4$
- $\cos(z) = \dfrac{3+i}{4}$

8).- Demuestre que ecuación $a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=0$ con la aplicación $w=\dfrac{1}{z}$ es transformada a:

$$d\left(u^2+v^2\right)+bu-cv+a=0$$

Los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Esta aplicación transforma círculos y rectas en círculos y rectas. Analice los casos:

- $a = d = 0$
- $a = 0,\ d \neq 0$
- $a \neq 0,\ d = 0$
- $a \neq 0,\ d \neq 0$

9).- Escriba a las siguientes funciones en la forma $u + iv$:

- $(z-i)^2$
- $\dfrac{1}{\bar{z}^2} + i$

10).- Escriba en términos de $\bar{z}$ y z a:

- $w = -2xy + i(x^2 - y^2)$
- $w = x^2 + y^2$

11).- Determinar todos los valores tales que $\exp(iz) = 2$.

12.- Si $\cos(z)$ obtener $\cos(2z)$.

13.- Estudie la forma en que el conjunto $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ se transforma mediante $w = \sin(z)$.

14.- Estudie la forma en que $w = e^z$ transforma a la región $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq x \leq 1$.

15.- Determine la imagen de $|z| = 1$, bajo la transformación $w = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$.

16.- Identificar las imágenes de $w = z + z^2$ de las rectas paralelas al eje real.

17.- Suponga que $f(z) = u + iv$ es analítica y que $g(z) = v + iu$ también lo es. Demuestre que u y v deben ser constantes.

18.- Suponga que $f(z) = u + iv$ es analítica y que $\overline{f(z)} = u - iv$ también lo es. Demuestre que u y v deben ser constantes.

19.- Encuentre a una función armónica conjugada de $e^x cos\,(y) + e^y cos\,(x) + xy$.

20.- Demostrar que la función $f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$ es analítica en todo el plano complejo y que:

$$f''(z) = -f(z)$$

21.- ¿Es la siguiente función continua en $z = 3i$?:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z^2+9)}{z-3i} & , \text{ para } z \neq 3i \\ 6i & , \text{ para } z = 3i \end{cases}$$

22.- Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Suponga que existe la segunda derivada $f''(z)$. Compruebe que:

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$f''(z) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

23.- ¿En que regiones del plano son analíticas las siguientes funciones?. Si existe la derivada encuentre su valor.

- $f(z) = 2z^2 + 3$
- $f(z) = z + z^{-1}$
- $f(z) = -xy + \frac{i}{2}\left(x^2 - y^2\right)$

- $f(z) = \dfrac{z^2}{\exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y)}$

24.- En donde es analítica la función:

$$f(z) = rcos(\theta) + ir$$

25.- ¿Para cuáles valores de n la función $x^n - y^n$ es armónica?.

26.- ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas?, ¿En qué dominio?:

- $\phi = x + y$
- $\phi = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$
- $\phi = \exp\left(x^2 - y^2\right)$

27.- Determinar la región de analiticidad de la función:

$$f(z) = cos(\bar{z})$$

28.- Sea $\phi = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$. Compruebe que podría ser parte real o imaginaria de alguna función analítica. Si ϕ es la parte real de $f(z)$ encuentre la parte imaginaria. Si ϕ es la parte imaginaria de $f(z)$ encuentre la parte real.

29.- Sea $f(z)$ una función entera. Si:

$$f'(z) = \left(6x^2 - 6y^2 - 2x + 3\right) + i(12xy - 2y)$$

con $f(0) = 2 - i$. Encuentre $f(z)$. Calcular $f''(2 - i)$.
