Capítulo 1

Analisis Vectorial

1.1. Definiciones

El analisis vectorial se hace indispensable para el estudio y la comprensión de la teoría electromagnética debido a que los entes primordiales son *campos vectoriales* en el espacio. Comenzaremos entregando las definiciones básicas que nos permiten entender las nociones de escalares y vectores. Un *escalar* es una cantidad (positiva o negativa) que queda completamente definida dando su magnitud. Ejemplos de escalares son la longitud, la masa, la temperatura y la carga eléctrica. Un *vector* es un objeto definido por una magnitud (un escalar no-negativo), y su línea de acción (una línea en el espacio) junto con su sentido (dirección) a lo largo de la línea. Ejemplos de cantidades vectoriales son la velocidad, la aceleración, el campo eléctrico y el campo magnético.

1.2. Algebra Vectorial

Necesitamos una representación de los vectores para nuestro posterior desarrollo de la teoría electromagnética. Por su importancia y sencilles, introducimos primeramente el sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, (X, Y, Z), caracterizado por los vectores base

$$\widehat{e}_x \equiv \widehat{i} = (1, 0, 0), \qquad \widehat{e}_y \equiv \widehat{j} = (0, 1, 0), \qquad y \qquad \widehat{e}_z \equiv \widehat{k} = (0, 0, 1),$$

que corresponden a la llamada *base canónica* de $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector del espacio $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como una combinación lineal de estos tres vectores. Así, por ejemplo, el vector dado por

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \tag{1.1}$$

se puede escribir también en la forma alternativa usando los vectores base

$$\vec{A} = A_x\, \widehat{\imath} + A_y\, \widehat{\jmath} + A_z\, \widehat{k}. \tag{1.2}$$

La cantidad escalar

$$A \equiv |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \tag{1.3}$$

se denomina la magnitud o norma del vector $\vec{A}$, y nos permite escribir este vector en la forma

$$\vec{A} = A\, \widehat{e}_A, \tag{1.4}$$

donde $\widehat{e}_A$ es un vector unitario (de norma 1) a lo largo de la dirección del vector $\vec{A}$. En términos de la norma de $\vec{A}$ podemos definir los cosenos directores de los ángulos formados por el vector y los ejes cartesianos, digamos, cada componente del vector queda determinado por un coseno director,

$$A_x = A\cos\alpha_x, \qquad A_y = A\cos\alpha_y, \qquad A_z = A\cos\alpha_z. \tag{1.5}$$

Notemos que estos cosenos directores satisfacen la relación

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1. \tag{1.6}$$

En estricto rigor, los vectores en $\mathbb{R}^3$ forman un grupo algebraico con respecto a la operación de suma. Es decir tenemos las siguientes definiciones que satisface cualquier vector en el espacio

i).- Sean $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vectores $\in \mathbb{R}^3$. La suma de estos vectores se define como el vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ cuyas componentes son la suma de las componentes de los vectores originales:

$$C_x = A_x + B_x, \qquad C_y = A_y + B_y, \qquad C_z = A_z + B_z. \tag{1.7}$$

ii).- El vector nulo, $\vec{0}$, es un vector de magnitud nula y por lo tanto sin dirección ni sentido.

iii).- Con respecto a la operación suma, $\vec{0}$ representa el elemento neutro para el conjunto $\mathbb{R}^3$, y por lo tanto nos permite definir el elemento inverso al vector $\vec{A}$, digamos $\vec{A}_{inv}$ tal que

$$\vec{A} + \vec{A}_{inv} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \vec{A}_{inv} = -\vec{A}. \tag{1.8}$$

iv).- La resta de vectores queda definida como

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \tag{1.9}$$

v).- La suma (y la resta) de vectores es asociativa

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}), \tag{1.10}$$

y conmutativa

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \tag{1.11}$$

vi).-Sea $c \in \mathbb{R}$ un escalar. La multiplicación de este escalar por un vector $\vec{A}$ es un nuevo vector $\vec{B} = c\vec{A}$, cuyas componentes son

$$B_x = cA_x, \quad B_y = cA_y, \quad B_z = cA_z. \tag{1.12}$$

Existen dos operaciones entre vectores definidos como productos. El primero de ellos es el llamado *producto escalar* o *producto interno.* Debemos notar que los vectores en $\mathbb{R}^3$ no forman un grupo con respecto a esta operación, pues el producto entre ellos no es un elemento del grupo (no es un vector) sino como dice su nombre es un escalar. Tenemos las siguientes definiciones para este producto

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{1.13}$$

y alternativamente

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}), \tag{1.14}$$

donde $\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$ es el ángulo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Notemos que si estos vectores son perpendiculares, entonces $\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) = \pi/2$ y por lo tanto $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. El producto escalar es conmutativo, es decir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \tag{1.15}$$

y además nos permite escribir la magnitud de un vector en la forma general

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}. \tag{1.16}$$

El segundo producto es el llamado *producto vectorial* o *producto externo* y tiene como resultado otro vector que es siempre perpendicular a los dos vectores originales. Escribimos esto como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Formalmente la definición es dada por medio del determinante

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \widehat{\imath}(A_y B_z - A_z B_y) + \widehat{\jmath}(A_z B_x - A_x B_z) + \widehat{k}(A_x B_y - A_y B_x). \tag{1.17}$$

La magnitud de $\vec{C}$ se puede escribir como

$$C \equiv |\vec{C}| = AB \sin \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}), \tag{1.18}$$

así, si los vectores son paralelos (o anti-paralelos), entonces $\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) = 0(\pi)$ y $\vec{C} = \vec{0}$. Debemos notar que el conjunto de los vectores en $\mathbb{R}^3$ forman un grupo con respecto a esta operación, sin embargo este grupo es de el tipo *no-abeliano* o *no-conmutativo* pues

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \tag{1.19}$$

Ya que los vectores de la base canónica son mutuamente ortogonales, estos satisfacen las relaciones

$$\widehat{\imath} = \widehat{\jmath} \times \widehat{k}, \qquad \widehat{\jmath} = \widehat{k} \times \widehat{\imath}, \qquad \widehat{k} = \widehat{\imath} \times \widehat{\jmath}, \tag{1.20}$$

las cuales pueden ser verificadas directamente usando la definición (1.17).

El volumen generado por tres vectores puede obtenerse considerando el llamado *triple producto escalar*, el cual se define como

$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{1.21}$$

También existe otro producto de importancia entre tres vectores, el llamado *triple producto vectorial* y del cual se obtiene otro vector

$$\vec{D} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \tag{1.22}$$

Hasta aqui hemos considerado las operaciones de suma y algunos productos, es lógico preguntarnos que ocurre con la operación de división. En este sentido podemos decir que la división de un vector por un escalar está bien definido al igual que para dos vectores paralelos. Sin embargo para vectores que no son paralelos no lo esta. Es posible expresar soluciones de ecuaciones vectoriales. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$c = \vec{A} \cdot \vec{X}, \tag{1.23}$$

donde c es un escalar conocido y $\vec{A}$ un vector conocido. Una solución general de esta ecuación es

$$\vec{X} = \frac{c\vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} + \vec{B}, \tag{1.24}$$

donde $\vec{B}$ es un vector de magnitud arbitraria y perpendicular a $\vec{A}$, tal que $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. No existe una solución única y esta depende de $\vec{B}$.

Del mismo modo, consideremos la ecuación vectorial

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{X}, \tag{1.25}$$

con $\vec{A}$ y $\vec{C}$ vectores conocidos. La solución general es

$$\vec{X} = \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} + k\vec{A}, \tag{1.26}$$

cuando $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$, siendo k un escalar arbitrario. Si $\vec{C} \cdot \vec{A} \neq 0$ no existe solución. Por otro lado, si pedimos que $\vec{X}$ satisfaga (1.23) junto con (1.25) tenemos que la solución general es

$$\vec{X} = \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} + \frac{c\vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}}. \tag{1.27}$$

1.2.1. Ejemplos

1. *Demuestre que los vectores dados por*

$$\vec{A} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}, \qquad \vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},$$

son perpendiculares.

Solución: Haciendo el producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1 \cdot 4) + (4 \cdot 2) + (3 \cdot (-4)) = 4 + 8 - 12 = 0,$$

es decir, los vectores son perpendiculares.

2. *Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación*

$$\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$$

e interpretando el resultado geométricamente, demuestre la ley de los cosenos.

Solución: Elevendo al cuadrado ambos miembros obtenemos

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\vec{B} \cdot \vec{C},$$

pero por definición (1.14), $\vec{B} \cdot \vec{C} = BC \cos\alpha$, por lo tanto

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos\alpha.$$

La interpretación geométrica de esto es que estos tres vectores forman un triángulo, en donde el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el producto de estos lados multiplicado por el coseno del ángulo opuesto al lado en cuestión. Notemos que esto es una generalización del teórema de Pitágoras, en donde el ángulo resulta ser un ángulo recto, es decir, $\alpha = \pi/2$.

1.3. Cálculo Vectorial

En esta sección estamos interesados en estudiar las operaciones de diferenciación e integración de funciones (campos) escalares y vectoriales. Nos preguntamos por la relación entre un campo vectorial y las derivadas de un campo escalar. Por este motivo debemos definir el concepto de derivada direccional para la subsecuente introducción de los operadores diferenciales.

Definición: la *derivada direccional* es el valor de cambio de una función, φ, en una dirección determinada,

$$d_s\varphi = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{1.28}$$

donde $d\vec{s}$ es un desplazamiento infinitesimal en la dirección considerada, de magnitud ds. Si $d\vec{s}$ tiene componentes dx, dy, dz, entonces la definición queda escrita como

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)}{\Delta s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}. \quad (1.29)$$

Para que veamos como trabaja la derivada direccional, consideremos el siguiente ejemplo. Sea la función bidimensional $\varphi(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, y escogamos la dirección arbitraria correspondiente a $dy/dx = \alpha$ en un punto (x_0, y_0); entonces, considerando que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, obtenemos

$$\left[\frac{d\varphi}{ds}\right]_{x_0,y_0} = -\frac{2(x_0 + \alpha y_0)}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \quad (1.30)$$

Si derivamos con respecto a α y este resultado lo igualamos a cero encontramos el valor de α para el cual la derivada es un máximo o un mínimo. Realizando estas operaciones encontramos que $\alpha = y_0/x_0$, lo cual significa que ésta dirección es radial (dada por las líneas $y = \alpha x$)

Si ahora buscamos un α tal que el valor de cambio sea cero, encontramos que $\alpha = -x_0/y_0$. Esta dirección es tangente al circulo $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Claramente, sobre esta curva, $\varphi(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, no cambia, es decir, sobre estas curvas, llamadas *curvas de nivel*, tenemos que $\varphi = constante$. La idea de curvas de nivel puede generalizarse a una función de tres variables, en cuyo caso las superficies, $\varphi(x,y,z) = constante$, se denominan *superficies de nivel* o *superficies equipotenciales*.

Gradiente: El *gradiente* de una función escalar φ es un vector cuya magnitud es la máxima derivada direccional en el punto en consideración y cuya dirección es la dirección de la máxima derivada direccional en ese punto. Denotaremos el gradiente por medio del simbolo nabla, $\vec{\nabla}$.

Debemos hacer notar que el gradiente tiene siempre la dirección normal a las superficies de nivel de φ en el punto considerado. En términos del gradiente, la derivada direccional viene dada por

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\vec{\nabla}\varphi| \cos\theta, \quad (1.31)$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de $d\vec{s}$ y la dirección del gradiente. De esta forma podemos escribir en forma general

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \frac{d\vec{s}}{ds}, \quad (1.32)$$

lo que nos permite determinar el gradiente en cualquier sistema de coordenadas donde conozcamos la forma del elemento de línea $d\vec{s}$. Por ejemplo, si el campo escalar se expresa en coordenadas cartesianas, $\varphi(x, y, z)$, su diferencial viene dado por

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz. \tag{1.33}$$

Por otro lado, el elemento de línea en estas coordenadas es $d\vec{s} = dx\,\widehat{i} + dy\,\widehat{j} + dz\,\widehat{k}$, por lo que reemplazando en el lado derecho de (1.32), obtenemos

$$\vec{\nabla}\varphi \cdot \frac{d\vec{s}}{ds} = (\vec{\nabla}\varphi)_x\frac{dx}{ds} + (\vec{\nabla}\varphi)_y\frac{dy}{ds} + (\vec{\nabla}\varphi)_z\frac{dz}{ds}. \tag{1.34}$$

Así, comparando (1.33) con (1.34), es evidente que

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\widehat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\widehat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\widehat{k}. \tag{1.35}$$

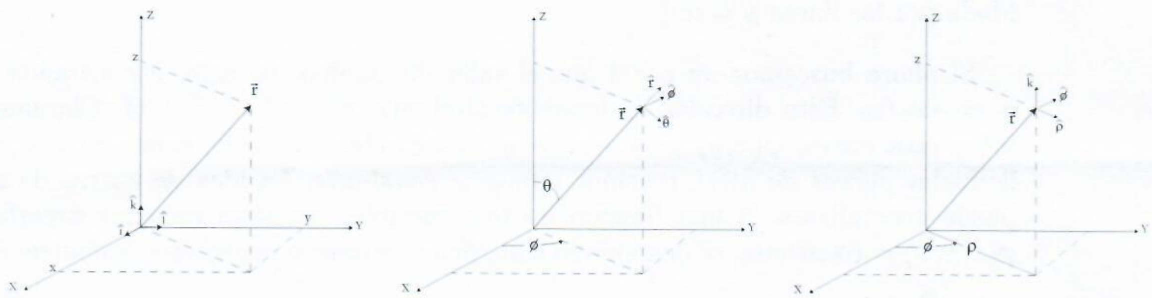

Figura 1.1: Representación gráfica del vector posicion en: a.- coordenadas Cartesianas, (X, Y, Z); b.- coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ); c.- coordenadas cilíndricas, (ρ, ϕ, Z).

Para el caso de coordenadas esféricas, tenemos $d\vec{s} = dr\,\widehat{r} + r\,d\theta\,\widehat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\widehat{\phi}$ y

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}d\phi,$$

con lo que reemplazando en (1.32) obtenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}d\phi = (\vec{\nabla}\varphi)_r dr + (\vec{\nabla}\varphi)_\theta\; r\,d\theta + (\vec{\nabla}\varphi)_\phi\; r\sin\theta\,d\phi,$$

lo que nos conduce a

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\widehat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\widehat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\widehat{\phi}. \tag{1.36}$$

En el caso de coordenadas cilíndricas, tenemos $d\vec{s} = d\rho\ \widehat{\rho} + \rho d\phi\ \widehat{\phi} + dz\ \widehat{k}$, y

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

de tal forma que reemplazando en (1.32), obtenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = (\vec{\nabla}\varphi)_\rho d\rho + (\vec{\nabla}\varphi)_\phi\ \rho\ d\phi + (\vec{\nabla}\varphi)_z\ dz,$$

por lo que comparando ambos lados de esta igualdad llegamos a

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\widehat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\widehat{\phi} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\widehat{k}. \tag{1.37}$$

Divergencia: La *divergencia* de un campo vectorial $\vec{F}$ mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente del campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene *fuentes* o *sumideros* la divergencia de dicho campo será diferente de cero.

Para un campo expresado en coordenadas cartesianas, $\vec{F}(x, y, z) = F_x\,\widehat{\imath} + F_y\,\widehat{\jmath} + F_z\,\widehat{k}$, la divergencia de este puede ser escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{1.38}$$

Si el campo es expresado en coordenadas esféricas, $\vec{F}(r, \theta, \phi) = F_r\,\widehat{r} + F_\theta\,\widehat{\theta} + F_\phi\,\widehat{\phi}$, la divergencia se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}. \tag{1.39}$$

Por último, si el campo es expresado en coordenadas cilíndricas, $\vec{F}(\rho, \phi, z) = F_\rho\,\widehat{\rho} + F_\phi\,\widehat{\phi} + +F_z\,\widehat{k}$, la divergencia se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{1.40}$$

Rotacional: El *rotacional* es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

Para un campo en coordenadas cartesianas, el rotacional lo podemos encontrar a partir de la relación

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \widehat{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \widehat{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \widehat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right). \tag{1.41}$$

Operador Laplaciano: Este operador será de suma importancia para el desarrollo de la teoría electromagnética. La definición formal es

$$\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}.$$

En coordenadas cartesianas, tenemos

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{1.42}$$

Veamos ahora lo que respecta a la integración vectorial. Dependiendo de la naturaleza que aparezca en la integral tendremos tres tipos de integrales. A saber, integral de línea, integral de superficie o integral de volumen.

Integral de línea: Si $\vec{F}$ es un campo vectorial, la integral de línea de este campo se denota por

$$\int_{a\ \varsigma}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \tag{1.43}$$

donde ς es la curva sobre la cual se efectúa la integración, a y b son los puntos inicial y final en esta curva. $d\vec{\ell}$ es un desplazamiento vectorial infinitesimal a lo largo de la curva ς. Notemos que la integral de línea es un escalar, pues $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ lo es. Además, en general, (1.43) no sólo depende de a y b, sino también del camino de integración ς. En el caso que no sea asi, estaremos hablando de campos conservativos (los que nos interesan).

La integral de línea sobre una curva cerrada, denotada como

$$\oint_{\varsigma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \tag{1.44}$$

puede ser, o no, igual a cero. Este último caso se encuentra para aquellos campos que son conservativos.

Integral de superficie: Si $\vec{F}$ es un campo vectorial, la integral de superficie se denota como

$$\int_S \vec{F}\cdot\widehat{n}da, \tag{1.45}$$

donde S es la superficie sobre la cual se realiza la integración, y da es un área infinitesimal de S. La integral de superficie sobre una superficie cerrada la denotamos como

$$\oint_S \vec{F}\cdot\widehat{n}da. \tag{1.46}$$

Integral de volumen: Si $\vec{F}$ es un campo vectorial y φ un campo escalar, tenemos las siguientes integrales de volumen

$$\vec{I_v} \equiv \int_V \vec{F}dv, \tag{1.47}$$

y

$$I_e \equiv \int_V \varphi dv, \tag{1.48}$$

donde V es el volumen en el cual se realiza la integración y dv es un elemento infinitesimal de volumen.

Teoremas Integrales: Si $\vec{F}$ es un campo vectorial y φ un campo escalar, tenemos los siguientes teoremas integrales

$$\int_{a\ \varsigma}^{b} \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell} = \int_{a\ \varsigma}^{b} d\varphi = \varphi|_a^b = \varphi_b - \varphi_a, \qquad \text{(Teorema fundamental del cálculo)}. \tag{1.49}$$

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\widehat{n}da = \oint_\varsigma \vec{F}\cdot d\vec{\ell}, \qquad \text{(Teorema de Stockes)}. \tag{1.50}$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dv = \oint_S \vec{F}\cdot\widehat{n}da, \qquad \text{(Teorema de la divergencia)}. \tag{1.51}$$

La función δ de Dirac En una dimensión, la función δ de Dirac se representa como

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x = 0, \end{cases} \tag{1.52}$$

para la cual se satisface que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{1.53}$$

De acá, es directo ver que si $f(x)$ es una función continua, entonces

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x. \tag{1.54}$$

Es importante notar que en estricto rigor la δ de Dirac más que una función representa una distribución, además, posee la dimensión inversa a la diferencial $\mathrm{d}x$.

Algunas propiedades importantes de la función δ de Dirac son:

1. Es una función par, es decir, $\delta(-x) = \delta(x)$.
2. Si $a > 0$,
$$\delta(a\,x) = \frac{1}{a}\delta(x), \quad a > 0. \tag{1.55}$$
3. Corrimiento del origen:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0). \tag{1.56}$$
4. Si el argumento de $\delta(x)$ es una función $g(x)$ con ceros simples en los puntos a_i sobre el eje real (y de esta forma $g'(a_i) \neq 0$),
$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|g'(a_i)|}. \tag{1.57}$$
5. Derivada de la función delta:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - x_0)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = -f'(x_0). \tag{1.58}$$
6. En tres dimensiones, la función delta $\delta(\vec{r})$ es interpretada como $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, tal que describe una función localizada en el origen y con un peso integrado unitario, irrespectivo del sistema de coordenadas usado. Así, en coordenadas polares esféricas,
$$\int\int\int f(\vec{r}_2)\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\, r_2^2\mathrm{d}r_2\, \sin\theta_2\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\phi_2 = f(\vec{r}_1). \tag{1.59}$$

1.3.1. Ejemplos

1. *Si $\vec{A}$ es un vector constante, demuestre que*

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r}) = \vec{A}.$$

Solución: Sea $\vec{A} = A_x\,\widehat{i} + A_y\,\widehat{j} + A_z\,\widehat{k}$, un vector cuyas componentes son constante, y $\vec{r} = x\,\widehat{i} + y\,\widehat{j} + z\,\widehat{k}$, el vector posición en el espacio. Entonces el producto escalar de estos vectores es $\vec{A}\cdot\vec{r} = xA_x + yA_y + zA_z$, de tal forma que tomando la divergencia de este producto obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r}) &= \frac{\partial(xA_x + yA_y + zA_z)}{\partial x}\,\widehat{i} + \frac{\partial(xA_x + yA_y + zA_z)}{\partial y}\,\widehat{j} + \\ &\quad + \frac{\partial(xA_x + yA_y + zA_z)}{\partial z}\,\widehat{k} \\ &= A_x\,\widehat{i} + A_y\,\widehat{j} + A_z\,\widehat{k} = \vec{A}.\end{aligned}$$

2. *Considere el campo vectorial dado por*

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + yz)\widehat{i} + (y^2 + zx)\widehat{j} + (z^2 + xy)\widehat{k}.$$

Encuentre $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ y $\vec{\nabla}\times\vec{F}$. *Determine si este campo es solenoidad y, o, rotacional.*

Solución: En este caso tenemos que las componentes cartesianas del campo vectorial son $F_x = x^2 + yz$, $F_y = y^2 + zx$, $F_z = z^2 + xy$.

i).- La divergencia de $\vec{F}(x,y,z)$ resulta ser

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2(x + y + z),$$

es decir, el campo $\vec{F}(x,y,z)$ no es solenoidal.

ii).- Para el rotacional de $\vec{F}(x,y,z)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \widehat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \widehat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \widehat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \\ &= \widehat{i}(x - x) + \widehat{j}(y - y) + \widehat{k}(z - z) = \vec{0},\end{aligned}$$

es decir, el campo $\vec{F}(x,y,z)$ es irrotacional.

3. *Determinar si el campo vectorial bidimensional*

$$\vec{F}(x,y) = (6xy^2 - y^3)\widehat{i} + (6x^2y - 3xy^2)\widehat{j},$$

es conservativo. Si es así, determine la función potencial que se anula en el origen.

Solución: Si el campo vectorial es conservativo, debemos mostrar que

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Haciendo las operaciones respectivas, encontramos que

$$12xy - 3y^2 = 12xy - 3y^2,$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x,y)$ es conservativo. Calculemos, entonces, la función potencial $U(x,y)$ que se desprende de la relación general $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} U(x,y)$. Tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 6xy^2 - y^3, \qquad \text{(i)}$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 y - 3xy^2, \qquad \text{(ii)}$$

integrando (i), tenemos que

$$U(x,y) = \int (6xy^2 - y^3)dx + h(y) = 3x^2y^2 + xy^3 + h(y).$$

Derivando esto último con respecto a y, obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 y - 3xy^2 + h'(y) \qquad \text{(iii)}$$

Comparando (ii) con (iii), encontramos que $h'(y) = 0$, es decir, $h(y) = c$ (const.), de modo que podemos escribir

$$U(x,y) = 3x^2y^2 + xy^3 + c.$$

Si queremos que el potencial se anule en el origen, tenemos que $c = 0$, y la función potencial deseada es

$$U(x,y) = 3x^2y^2 + xy^3.$$