1.-

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$ Usamos coordenadas esféricas; $\vec{p}\cdot\vec{r} = pr\cos\theta$

$$\vec{\nabla}\Phi = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\frac{pr\cos\theta}{r^3}\right)$$

$$= \hat{r}\left(p\cos\theta\right)\left(-\frac{2}{r^3}\right) + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{p(-\sin\theta)}{r^2}$$

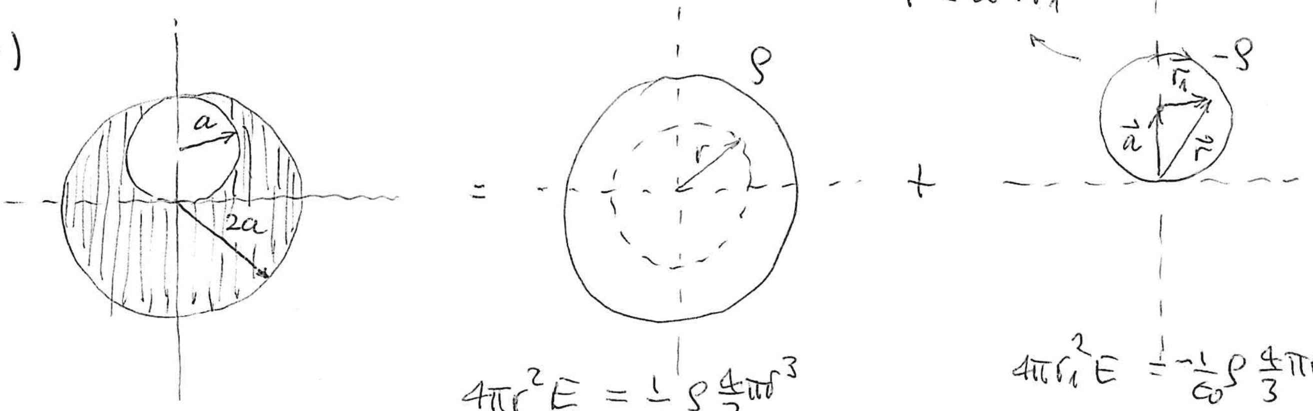
$$= -\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{r} - \frac{p\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

2.- (a) El campo $\vec{E}$ satisface el ppio. de superposición porque es un vector $\Rightarrow$ en un punto, el campo total es igual a la suma de los campos de cada fuente individual, $\vec{E}_{Tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$. Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, el potencial en un punto es igual a la suma de los potenciales de c/ fuente.

(b) La energía o densidad de energía es proporcional a $\vec{E}^2$. Luego, como el campo en un punto es la suma, la energía total $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \vec{E}_N)^2 \neq \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + \dots \vec{E}_N^2$, por tanto no satisface el ppio. de superposición.

(c)

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}_1$



$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

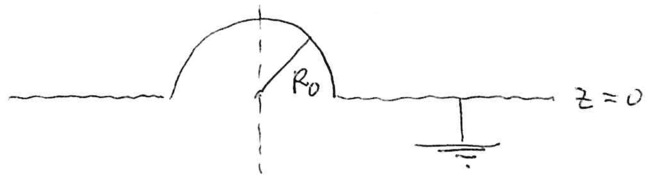
$$\Rightarrow \vec{E}_+ = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0}$$

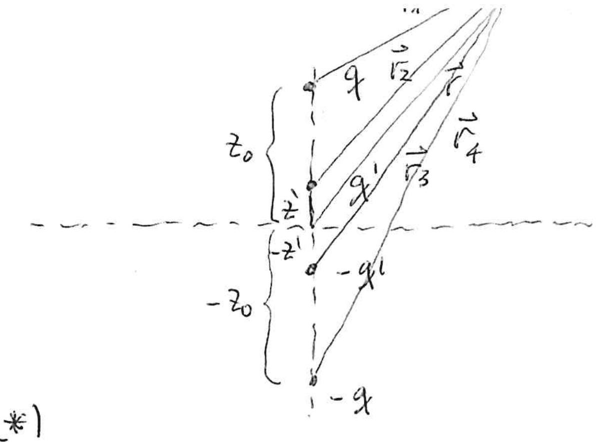
$$4\pi r_1^2 E = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}_- = -\frac{\rho\vec{r}_1}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{Tot} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho\vec{a}}{3\epsilon_0} \quad //$$

3.-





El problema equivalente es:
Necesitamos 3 cargas imaginarias, donde

$$q' = -q\frac{R_0}{z_0} \quad \wedge \quad z' = \frac{R_0^2}{z_0} \qquad (*)$$

y así el potencial en cualquier parte del espacio es

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} - \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4} \right\}$$

donde $r_1 = |\vec{r} - z_0\hat{k}| = \sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0\cos\theta}$, $r_2 = |\vec{r} - z'\hat{k}| = \sqrt{r^2+z'^2-2rz'\cos\theta}$
$r_3 = |\vec{r} + z'\hat{k}| = \sqrt{r^2+z'^2+2rz'\cos\theta}$ y $r_4 = |\vec{r}+z_0\hat{k}| = \sqrt{r^2+z_0^2+2rz_0\cos\theta}$.

así reemplazando $(*)$

$$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0\cos\theta}} - \frac{R_0}{\sqrt{r^2z_0^2+R_0^4-2rz_0R_0^2\cos\theta}} + \frac{R_0}{\sqrt{r^2z_0^2+R_0^4+2rz_0R_0^2\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2+2rz_0\cos\theta}} \right\} \quad (a)$$

//

Para encontrar la carga inducida en la protuberancia, notemos primero que la carga total inducida se separa en $-q = q_{prot.} + q_{plano}$. La carga en el plano corresponde a $\sigma_{plano} = -\epsilon_0 E_\theta(\theta = \pi/2)$. Entonces usando

$$E_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left\{ \frac{-rz_0\sin\theta}{(r^2+z_0^2-2rz_0\cos\theta)^{3/2}} + \frac{rz_0R_0^3\sin\theta}{(r^2z_0^2+R_0^4-2rz_0R_0^2\cos\theta)^{3/2}} + \frac{rz_0R_0^3\sin\theta}{(r^2z_0^2+R_0^4+2rz_0R_0^2\cos\theta)^{3/2}} - \frac{rz_0\sin\theta}{(r^2+z_0^2+2rz_0\cos\theta)^{3/2}} \right\}$$

En el plano $\theta = \pi/2$, ...

$$E_\theta(\pi/2) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{z_0}{(z_0^2+r^2)^{3/2}} - \frac{z_0 R_0^3}{(r^2 z_0^2 + R_0^4)^{3/2}} \right\}$$

entonces

$$q_{flat} = \int_{flat} \sigma\, ds = -\int_{R_0}^{\infty} 2\pi r\, dr\, \frac{q z_0}{2\pi}\left\{ \frac{1}{(r^2+z_0^2)^{3/2}} - \frac{R_0^3}{(r^2 z_0^2+R_0^4)^{3/2}} \right\}$$

$$= -q z_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{R_0^2+z_0^2}} - \frac{R_0^2/z_0^2}{\sqrt{R_0^2+z_0^2}} \right\} = -\frac{q}{z_0}\left\{ \frac{z_0^2 - R_0^2}{\sqrt{R_0^2+z_0^2}} \right\}$$

luego, la carga inducida en la protuberancia semiesférica es

$$q_{prot.} = -q - q_{plano} = -q + \frac{q}{z_0}\left\{ \frac{z_0^2 - R_0^2}{\sqrt{R_0^2+z_0^2}} \right\}$$

y la fracción de la carga total inducida es

$$\frac{q_{prot.}}{(-q)} = 1 + \frac{1}{z_0}\frac{R_0^2 - z_0^2}{\sqrt{R_0^2+z_0^2}} \quad //$$