Uso de la representación en serie de potencias genérica del integrando obtenida a partir de la transformada de Mellin

Es posible asignar una serie de potencias de cualquier función a partir del conocimiento de su transformada de Mellin, esto es muy útil si se desea utilizar MoB con funciones que no poseen una representación en serie en torno a cero, en términos simples, esta técnica permite asociar una serie de potencias genérica a cualquier función.

A continuación describiremos brevemente el formalismo. Sea $f(\xi)$ una función arbitraria tal que su transformada de Mellin es conocida y dada por la expresión:

$$M(s) = \int_0^\infty \xi^{s-1} f(\xi)\ d\xi, \tag{1}$$

supongamos que queremos determinar la serie de potencias de $f(\xi)$ la cual la representamos como sigue:

$$f(\xi) = \sum_n \phi_n\ F(n)\, \xi^{an+b}, \tag{2}$$

siendo a y b parámetros elegibles a conveniencia y los cuales supondremos **reales**, en este caso la tarea es hallar el valor del coeficiente $F(n)$, veamos:

$$\begin{aligned} M(s) &= \int_0^\infty \xi^{s-1} f(\xi)\ d\xi \\ &= \sum_n \phi_n\ F(n) \int_0^\infty \xi^{s+an+b-1}\ d\xi \\ &= \sum_n \phi_n\ F(n) \langle s+an+b \rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

a partir de lo cual se obtiene que:

$$M(s) = \frac{1}{|a|} \Gamma(-n)\, F(n) \Big|_{n=-\frac{s+b}{a}}, \tag{4}$$

o equivalentemente:

$$M(s)|_{s=-an-b} = \frac{1}{|a|} \Gamma(-n)\, F(n), \tag{5}$$

con lo cual podemos hallar el valor para el coeficiente:

$$F(n) = |a| \frac{M(-an-b)}{\Gamma(-n)}, \tag{6}$$

finalmente la serie que se asigna a $f(\xi)$ es la siguiente:

$$f(\xi) = |a| \sum_{n} \phi_n \ \frac{M(-an-b)}{\Gamma(-n)} \xi^{an+b}. \tag{7}$$

Ahora bien, evaluaremos la integral:

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \operatorname{Ei}\left(-x^2 y\right) K_0\left(\frac{x}{y}\right) \ dxdy, \tag{8}$$

utilizando esta idea y conociendo que:

$$\int_0^\infty \xi^{s-1} K_0(\xi) \ d\xi = \frac{2^s}{4} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)^2, \tag{9}$$

y:

$$\int_0^\infty \xi^{s-1} \operatorname{Ei}(-\xi) \ d\xi = -\frac{\Gamma(s)}{s}, \tag{10}$$

por lo tanto supongamos las siguientes series de potencias para para las funciones del integrando:

$$K_0(\xi) = \sum_n \phi_n \ C(n) \, \xi^{An+B}, \tag{11}$$

y para $\operatorname{Ei}(-x)$:

$$\operatorname{Ei}(-\xi) = \sum_l \phi_l \ F(l) \, \xi^{al+b}, \tag{12}$$

con a, b, A y B cantidades supuestas reales, esto determina los siguientes valores para los coeficientes:

$$F(l) = |a| \, \frac{\Gamma(-al-b)}{(al+b)\,\Gamma(-l)}, \tag{13}$$

$$C(n) = 2^{-An-B} \frac{|A|}{4} \frac{\Gamma\left(-\frac{An+B}{2}\right)^2}{\Gamma(-n)}. \tag{14}$$

Por lo tanto las representaciones en serie buscadas son las siguientes:

$$K_0(\xi) = \frac{|A|}{2^{2+B}} \sum_n \phi_n \ 2^{-An} \frac{\Gamma\left(-\frac{An+B}{2}\right)^2}{\Gamma(-n)} \xi^{An+B}, \tag{15}$$

$$\operatorname{Ei}(-\xi) = |a| \sum_l \phi_l \ \frac{\Gamma(-al-b)}{(al+b)\,\Gamma(-l)} \xi^{al+b}, \tag{16}$$

finalmente con estas dos series podemos hallar la serie de brackets de la integral, veamos:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \operatorname{Ei}\left(-x^2 y\right) K_0\left(\tfrac{x}{y}\right)\ dxdy \\
&= \frac{|A|\,|a|}{2^{2+B}} \sum_l \sum_n \phi_{n,l}\, \frac{\Gamma\left(-al-b\right)\Gamma\left(-\frac{An+B}{2}\right)^2}{2^{An}\left(al+b\right)\Gamma\left(-l\right)\Gamma\left(-n\right)} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha+2al+2b+An+B-1} y^{\beta+al+b-An-B-1}\ dxdy,
\end{aligned} \tag{17}
$$

lo que nos permite encontrar la siguiente serie de brackets:

$$
I = \frac{|A|\,|a|}{2^{2+B}} \sum_l \sum_n \phi_{n,l}\, \frac{\Gamma\left(-al-b\right)\Gamma\left(-\frac{An+B}{2}\right)^2}{2^{An}\left(al+b\right)\Gamma\left(-l\right)\Gamma\left(-n\right)} \left\langle \alpha+2al+2b+An+B \right\rangle \left\langle \beta+al+b-An-B \right\rangle \quad \boxed{\checkmark} \tag{18}
$$

Se puede comprobar fácilmente que la solución de esta serie es:

$$
I = -\frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{3}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{6}-\dfrac{\beta}{3}\right)^2}{4^{\frac{\beta}{3}-\frac{\alpha}{6}}\left(\alpha+\beta\right)}, \tag{19}
$$

Lo importante aquí es notar que el resultado obtenido es independiente de la elección de los parámetros $\{a, b, A, B\}$, lo anterior es equivalente a pensar que una función tiene infinitas representaciones en torno a cero.