Prueba I
Métodos Matemáticos
Licenciatura en Física - 2015
IPGG

Algo de tensores

---

a).- Considere dos tensores de rango dos, A_{ij} y B_{ij} . Suponga que $A_{ij} = A_{ji}$ y $B_{ij} = -B_{ji}$, entonces A_{ij} es llamado simétrico y B_{ij} es antisimétrico. Muestre que $A_{ij}B_{ij} = 0$. Note que este es un resultado general independientemente del rango del tensor: la contracción de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico es nula.
b).- Determine la validez de las siguientes ecuaciones indiciales. Si no son válidas, justifique:

- $a_{ij} = b_{ik}c_jd_k$
- $\phi = m_{ii} + n_{ii}x_{ii}$
- $L_{ijk} = \epsilon_{imn}r_{jm}p_{kn}$
- $x = y$
- $d_n = \epsilon_{lkn}q_l\epsilon_{ijk}r_iu_j$
- $a_k = r_{ijk}\eta_{ij} + S_{ijklm}f_ig_{jl}$
- $y_3 = q_{ij3}z_{ij}$

Misceláneos

- Si $\psi = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})$, muestre que $\boldsymbol{\nabla}\psi = \mathbf{b} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{b})$. Donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores constantes.
- Si $\mathbf{A}$ es un campo vectorial constante y unitario, muestre que $\mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{A})] = \nabla \cdot \mathbf{v}$.
- Evalúe $\nabla \times \nabla [\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$

Ecuaciones de onda electromagnéticas

Las ecuaciones de Maxwell (en vacío) en un espacio libre de cargas y de corrientes de conducción se resumen como sigue:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)
\end{aligned}$$

Halle las ecuaciones de onda para las componentes de los campos electromagnéticos: $B_i\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)$ y $E_i\left(\vec{\mathbf{r}}, t\right)$.

Interacción entre dipolos eléctricos puntuales

El potencial eléctrico de un dipolo situado en el origen y cuyo momento dipolar es $\mathbf{p}$ está dado por la siguiente expresión:

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}.$$

Se tiene un segundo dipolo puntual, cuyo momento dipolar es $\mathbf{P}$ y el cual está ubicado en la posición $\mathbf{r}$ respecto al primer dipolo. La energía potencial de este dipolo está dada por $U\left(\mathbf{r}\right) = -\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right)$, siendo $\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right)$ el campo eléctrico debido al primer dipolo.

- Determine la fuerza sobre $\mathbf{P}$ debido a la presencia de $\mathbf{p}$ mediante la expresión $\mathbf{F} = -\nabla U\left(\mathbf{r}\right)$.
- Determine la condición para que ambos dipolos no interactúen, esto es $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.