Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba II
Métodos Matemáticos I
Licenciatura en Física - 2016
IPGG

I).- Demuestre la siguiente identidad:

$$\arctan(z) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

II).- Sea C un círculo con ecuación:

$$|z-a| = R$$

con $a \in \mathbb{C}$. Una Transformación de Mobius lleva círculos o rectas a círculos o rectas, una de estas transformaciones es la Inversión, esto es $w = \frac{1}{z}$. Determine la condición para que el mapeo de origen a una recta.

III).- Halle la región de analiticidad de la siguiente función:

$$f(z) = \frac{(x-1) - iy}{(x-1)^2 + y^2}$$

IV).- Si $F = u(x,y) + iv(x,y)$ y $\overline{F} = u(x,y) - iv(x,y)$ son analíticas, pruebe que F es constante.

V).- Sea $u(x.y) = y^3 - 3x^2y$. Demuestre que $u(x.y)$ es una función armónica. Halle $v(x.y)$, tal que $f(z) = u(x.y) + iv(x.y)$ es analítica.

I) sea

$\operatorname{tg} w = z$

$\Downarrow$

$w = \operatorname{tg}^{-1}(z)$ debemos hallar w.

I. 1

Ahora

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{iw}} = -i\,\frac{\cancel{e^{iw}}\left(1-e^{-2iw}\right)}{\cancel{e^{iw}}\left(1+e^{-2iw}\right)}$$

luego $\operatorname{tg} w = i\,\dfrac{\left[e^{-2iw}-1\right]}{\left[e^{-2iw}+1\right]}$

pero $\operatorname{tg} w = z$

$\therefore$

$$z = i\,\frac{[\xi - 1]}{[\xi + 1]} \quad ; \quad \text{con } \xi = e^{-2iw}$$

$\Downarrow$

$$\xi z + z = i\xi - i$$

$$\xi(z - i) = -(z + i)$$

$$\xi = \frac{i+z}{i-z}$$

I.2

luego

$$\xi = \left(e^{-2iw}\right)$$

$$\therefore \quad e^{-2iw} = \frac{i+z}{i-z} \quad \Big/ \log$$

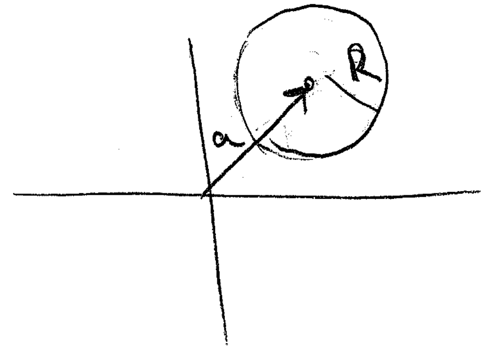
$$-2iw = \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

$$w = -\frac{1}{2i} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

con $w = tg^{-1}(z)$

$$\Downarrow$$

$$tg^{-1}(z) = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$ QED.

II) $|z-a| = R$  II.1

$$\Downarrow$$

$$|z-a|^2 = R^2$$

$$\overline{(z-a)}\,(z-a) = R^2$$

$$(\bar{z}-\bar{a})(z-a) = R^2$$

$$z\bar{z} - \bar{z}a - z\bar{a} + a\bar{a} = R^2$$

$$z\bar{z} - \bar{z}a - z\bar{a} = R^2 - |a|^2$$

dado que $z = \frac{1}{w}$ entonces

$$\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} - \frac{1}{\bar{w}}a - \frac{1}{w}\bar{a} = R^2 - |a|^2 \quad \Big/ \; w\bar{w}$$

$$1 - wa - \bar{w}\bar{a} = (R^2 - |a|^2)\, w\bar{w}$$

$$\Downarrow$$

$$[R^2 - |a|^2]\, w\bar{w} + wa + \bar{w}\bar{a} = 1$$

La condición para obtener una recta en el plano w es $R^2 - |a|^2 = 0$ ///

III

$$f(z) = \frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2} = \underbrace{\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{\frac{(-y)}{(x-1)^2+y^2}}_{v(x,y)}$$

Región de analiticidad es aquella donde las ecs. de Cauchy-Riemann se cumplen:

si $u(x,y) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$

$v(x,y) = -\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$

$\Downarrow$

entonces:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\left[\frac{x^2-y^2-2x+1}{(x^2+y^2-2x+1)^2}\right] \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\left[\frac{x^2-y^2-2x+1}{(x^2+y^2-2x+1)^2}\right]\end{aligned}\right\} \therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Lo anterior lo reescribimos de manera más compacta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\left[\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}\right]$$

Por otro lado

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\left[\frac{2(x-1)y}{[(x-1)^2+y^2]^2}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left[\frac{2(x-1)y}{[(x-1)^2+y^2]^2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left[\frac{2(x-1)y}{[(x-1)^2+y^2]^2}\right].$$

Entonces
Las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen.

Obs. Los ecuaciones de Cauchy-Riemann son continuos $\forall z$, excepto para

$z=1 \Rightarrow x=1$
$y=0$

entonces no existe la derivada en $z=1$.
y por lo tanto $f(z)$ no es analítica.
También notar que $f(z)$ no está definida en $z=1$

IV $F = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$\bar{F} = u(x,y) - i\,v(x,y) = U(x,y) + i\,V(x,y)$

$\Downarrow$

siendo

$$\left.\begin{array}{l} U = u \\ V = -v \end{array}\right\} (*)$$

si F y $\bar{F}$ son analíticas entonces ambas cumplen las ecs. de Cauchy-Riemann

$\Downarrow$

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (b)

y

(c) $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$ (d)

usando ecs. en $(*)$ en (c) y (d)

(e) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\quad\wedge\quad$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ (f)

Los ecs. (a), (b), (e) y (d) tienen solución solo si $u = cte$
$v = cte.$

<u>Demo</u>

Sumando (a) y (e)

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies \therefore u = \text{función de } y \text{ a lo más.}$$

Sumando (b) y (f)

$$2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \implies \therefore u = \text{tampoco, es función de } y.$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}_{u = cte.}$$

para demostrar que $v = cte$, se resta (a)-(e) y (b)-(f).

$\therefore F = u + iv = cte + i\tilde{cte} = \tilde{\tilde{cte}}$ //h.

$\overline{\text{V}}$ $u = y^3 - 3x^2 y$

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$??

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y + 6y = 0 \,//$$

$u(x,y)$ ES ARMÓNICA

b) de las ec. de Cauchy-Riemann

(*) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow -6xy = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$\Downarrow$$

$$-6x\frac{y^2}{2} + f(x) = v$$

$$\Downarrow$$

$$v = -3xy^2 + f(x)$$

Por otro lado

(**) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$

$$\therefore \quad \frac{df(x)}{dx} = 3x^2.$$

$$f(x) = x^3 + cte.$$

finalmente:

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + cte.$$