Guía de ejercicios N° 4
Matrices y determinantes

1. (a) Siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & -1 & 0\\ 1+2 & 0+1 & 5+3\end{pmatrix}$$

decide la validez de las propiedades:
   1. $\det C = \det A + \det B$
   2. $\det A = \det A^t$

2. Considera la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 0\\ 1 & 2 & k\end{pmatrix}$$

Halla el valor de k para que $\det A = 0$. ¿Se podría haber previsto ese resultado sin cálculo alguno?

3. Calcula el siguiente determinante desarrollando por la primera fila:

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 1 & 1\\ 1 & x & 1 & 1\\ 1 & 1 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x^2\end{vmatrix}$$

Resp: $(x-1)^3(x^2+3x+3)$

4. Calcula:

$$\begin{vmatrix}x-y-z & 2x & 2x\\ 2y & -x+y-z & 2y\\ 2z & 2z & -x-y+z\end{vmatrix}$$

Resp: $(x+y+z)^3$

5. (a) Desarrolla el determinante de la matriz A, utilizando la regla de Sarrus:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

(b) Comprueba que si intercambias las filas 2 y 3 de dicha matriz, el determinante de la matriz B así obtenida cambia de signo.

(c) Calcula los determinantes de las matrices A y B. ¿Qué observas? ¿Puedes justificarlo mediante la propiedad anterior?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 4 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\\ 1 & 5 & 3\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

6. (a) Calcula el determinante de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Podrías haber previsto dicho resultado mediante propiedades?

7. (a) Mediante ejemplos con matrices 2 x 2, comprueba que: $\det(A.B) = \det A. \det B$
(b) Comprueba que siendo I la matriz identidad 3 x 3, $\det I = 1$.

8. (a) Demuestra mediante desarrollos por adjuntos que en el caso de una matriz triangular,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

será:

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33}.a_{44}$$

(b) Justifica porqué entonces, la condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es $\det A \neq 0$.

9. Dada la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) comprueba que es invertible.

(b) Halla la matriz

$$adj\ A = (A_{ij})^t$$

(**matriz adjunta de A**, la matriz traspuesta de aquella cuyas elementos son los adjuntos (o cofactores) de los elementos de A).

(c) Comprueba que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.(adj\ A)$$

(d) ¿Coincide esto con lo que encontramos para matrices 2 x 2 en clase?

10. Muestra que el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 2t = 2 \\ -y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 9z + 6t = -3 \\ 3x + 2y + 4z + 8t = -1 \end{cases}$$

es determinado, y encuentra x por el método de Cramer.

Sol: $\det A = 160 \neq 0,\ x = -\frac{29}{10}$

Y recuerda que en el Grossman puedes encontrar más ejercicios al respecto.