Universidad de Valparaíso
CHILE

Miniprueba VII

Mecánica Intermedia (FIS 311)

Licenciatura en Física mención Astronomía

IPGG[1]

Pauta

Contenido : Gravitación

Problema 1 : Si el sistema solar estuviese sumergido en una nube esférica uniforme de partículas sólidas, los objetos en el sistema solar experimentarían una fuerza gravitatoria total que sería de la forma:

$$\vec{F}(r) = -\left(\frac{k}{r^2} + br\right)\hat{r}$$

Podemos asumir que la fuerza extra debida a la presencia de la nube es débil $\left(b << \frac{k}{r^3}\right)$. Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones radiales (perturbativas) a una órbita circular.

Problema 2 : Una partícula de masa M se mueve bajo un potencial atractivo de la forma:

$$V(r) = -\frac{\lambda}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

donde λ y a son constantes positivas. Reduzca la ecuación de movimiento al equivalente de un problema undimensional. Utilice el potencial efectivo y discuta acerca de la naturaleza de las órbitas para los distintos valores de energía E y momentum angular L.

Problema 3 : Una varilla de longitud H es puesta de forma vertical sobre la superficie de la Tierra. Esta tiene una masa total M la cual está repartida de acuerdo a la siguiente ley de distribución lineal $\lambda(h) = Ah^2$, donde h es una distancia medida desde el suelo y A es una constante. Compare la posición del centro de masa con la del centro de gravedad de la barra.

Obs. : Debe considerar el hecho que la aceleración de gravedad (o intensidad de gravedad) varía con la altura.

[1]**Fecha de entrega** : *Jueves 15/06/2012*
No se recibirán tareas después de esta fecha.

⟨ Mini $\overline{\text{VII}}$ ⟩ $\alpha.1$

Prob. 1)

$$\vec{F}(r) = -\left(\frac{k}{r^2} + br\right)\hat{r}$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{k}{r^2} + br \Longrightarrow V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2}br^2 + \text{ctes}$$

Hallamos el potencial efectivo

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + V(r)$$

pero $\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2}$; $\ell = \text{cte.} =$ Momentum angular

$$\therefore \quad E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{eff.}(r)}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{1}{2}br^2 + \text{ctes.}$$

Para una órbita circular se debe cumplir que $\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = 0$. (Así hallamos $r \to r_0 =$ Radio órbita)

$$\Downarrow$$

$$0 = -\frac{\ell^2}{m r_0^3} + \frac{k}{r_0^2} + b r_0$$

$$\Downarrow$$

Aquí hallamos r_0 ✓

Podemos expandir $V_{eff}(r)$ en torno a $r = r_0$:

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(r_0) + \cancel{\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_0}}^{0}(r-r_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}(r-r_0)^2 + \ldots$$

para $(r-r_0) \ll 1$:

$$V_{eff}(r) = \tilde{cte} + \frac{1}{2}V''_{eff}(r_0)\,(r-r_0)^2$$

Potencial oscilatorio

Por comparación

$$V''_{eff}(r_0) = K = \text{const. del resorte}.$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{V''_{eff}(r_0)}{m}} \Rightarrow$$ frecuencia con que oscila la órbita frente a una perturbación pequeña.

esto es:

$$V''_{eff}(r_0) = 3\frac{l^2}{mr_0^4} - \frac{2k}{r_0^3} + b$$

; pero de la 1º derivada

$$\frac{l^2}{mr_0^4} = \frac{k}{r_0^3} + b.$$

$$= \frac{3k}{r_0^3} + 3b - \frac{2k}{r_0^3} + b$$

$$= \frac{k}{r_0^3} + 4b \quad \text{(falta reemplazar } r_0\text{)}$$

entonces

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{mr_0^3} + \frac{4b}{m}\right)^{1/2} \quad ////.$$

PROBL. 2) Dado que es un problema de fuerzas centrales:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r} e^{-r/a}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r} e^{-r/a}$$

Por otro lado

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{\lambda}{r} e^{-r/a}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \text{(Ec. de mov.)}$$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{r} + \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{\lambda}{r} e^{-r/a}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) = 0 \; //$$

Analicemos el caso de órbita circular (en $r = r_0$) $\Rightarrow \dfrac{dV_{eff}}{dr} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\ell^2}{mr_0^3} = \frac{\lambda}{r_0} e^{-r_0/a}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{a}\right) \quad (*)$$

Ec. para hallar r_0.

La energía para órbita circular está dada por:

$$E_0 = \frac{1}{2} m \cancel{\dot{r}^2}^{0} + \frac{\ell^2}{2mr_0^2} - \frac{\lambda}{r_0} e^{-r_0/a} \quad (**)$$

$\underline{\alpha.5}$

de la ec. (*)

$$\frac{\ell^2}{mr_0^2} = \frac{\lambda e^{-r_0/a}}{r_0} + \frac{\lambda}{a} e^{-r_0/a} \quad / \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{\ell^2}{2mr_0^2} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{r_0} e^{-r_0/a} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a} e^{-r_0/a}$$

$\therefore$

$$E_0 = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{r_0} e^{-r_0/a} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a} e^{-r_0/a}$$

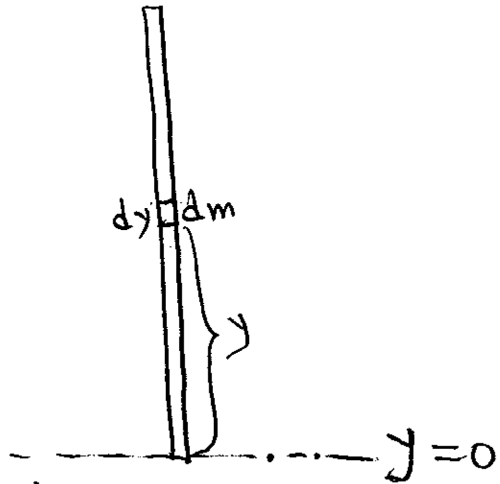
$$E_0 = \frac{1}{2}\lambda e^{-r_0/a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_0}\right) ///$$

Haciendo $\dot{r}=0$ y dado que $E=cte$ y $\ell=cte$. es posible hallar todos los radios críticos (donde $\dot{r}=0$) desde la expresión $(**)$. máx. y mín.

(Recordar análisis ejemplificado en clases para el potencial de la forma $-\frac{k}{r}$)

⟨PROBLEMA 3⟩

C.M



$$y_{CM} = \frac{\int_0^H dm\, y}{\int_0^H dm} \quad ; \quad M = \int_0^H dm = \int_0^H \lambda\, dy = A\int_0^H y^2\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$M = \frac{A}{3}H^3$$

luego

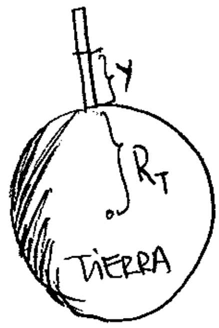
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^H \lambda\, y\, dy = \frac{A}{M}\int_0^H y^3\, dy = \frac{A}{4M}H^4$$

$$= \left(\frac{\cancel{A H^3}}{\cancel{3}}\right)\frac{3H}{4\cancel{M}} = \frac{3}{4}H$$

C.G

217

$$Y_{CG} = \frac{\int_0^H dm\, g(y)\, y}{\int_0^H dm\, g(y)} \quad ;$$



$$g = \frac{G M_T}{(R_T + y)^2}$$

Aceleración de gravedad
(Intensidad de gravedad)

$$W = \int_0^H dm\, g(y) \quad \text{(Peso total de la barra)}$$

$$= \int_0^H A y^2 dy \frac{G M_T}{(R_T + y)^2} = A G M_T \int_0^H dy \frac{y^2}{(R_T + y)^2}$$

$$\Rightarrow Y_{CG} = \frac{\int_0^H dm\, g(y)\, y}{W} = \frac{A G M_T}{W} \int_0^H dy \frac{y^3}{(R_T + y)^2}$$

$$y_{CG} = \frac{\int_0^H dy \frac{y^3}{(R_T + y)^2}}{\int_0^H dy \frac{y^2}{(R_T + y)^2}}$$

Soluciones genéricas:

$$\int_0^H dy \frac{y^2}{(R_T+y)^2} = y - \frac{R_T^2}{R_T+y} - 2R_T \ln(R_T+y) \Big|_0^H$$

$$\int_0^H dy \frac{y^3}{(R_T+y)^2} = \frac{y^2}{2} - 2R_T y + \frac{R_T^3}{R_T+y} + 3R_T^2 \ln(R_T+y) \Big|_0^H$$

Algo de álgebra y llegan a la solución.