Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba I
Métodos Matemáticos I
Licenciatura en Física - 2016

IPGG

Misceláneo

Sea w_k la *k-ésima* raíz de $a^{\frac{1}{n}}$, con $a \in \mathbb{R}$, encuentre el producto de las n raíces de a.

Distancia entre los vértices de un polígono

Un polígono de n lados es circunscrito a una circunferencia de radio R (centrada en $z = 0$) tal que uno de sus vértices coincide con el eje real positivo del plano complejo. Determine la distancia que existe entre los vértices *q-ésimo* y *k-ésimo* del polígono ($0 \leq q \leq n-1$, $0 \leq k \leq n-1$).

Triángulo equilátero

Sean Z_0 y Z_1 dos vértices de un triángulo equilátero. Con esta información determine la posición de uno de los dos posibles puntos que corresponden al tercer vértice del triángulo.

Demostraciones

- Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Pruebe que si $|a| = 1$ entonces:

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$$

- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$

PRUEBA 1 MMF I

1) $\omega = a^{1/n}$, con $a \in \mathbb{R} \Rightarrow Arg(a) = 0$

luego la k-ésima raíz de $a^{1/n}$ es:

$$\omega_k = |a|^{1/n} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \quad (k=0,\ldots,n-1)$$

Entonces

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \prod_{k=0}^{n-1} \left[|a|^{1/n} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right]$$

$$= |a|^{1/n} \cdot |a|^{1/n} e^{i\frac{2\pi}{n}} \cdots |a|^{1/n} e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}$$

$$= |a| \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

$$= |a| \, e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = ??$$

pero $\Longrightarrow$

$\overline{2}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\therefore \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = |a| \, e^{i\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{n}} \frac{1}{2}(n-1)\cancel{n}}$$

$$= |a| \, e^{i\pi(n-1)} \quad ; \quad e^{-i\pi} = -1$$

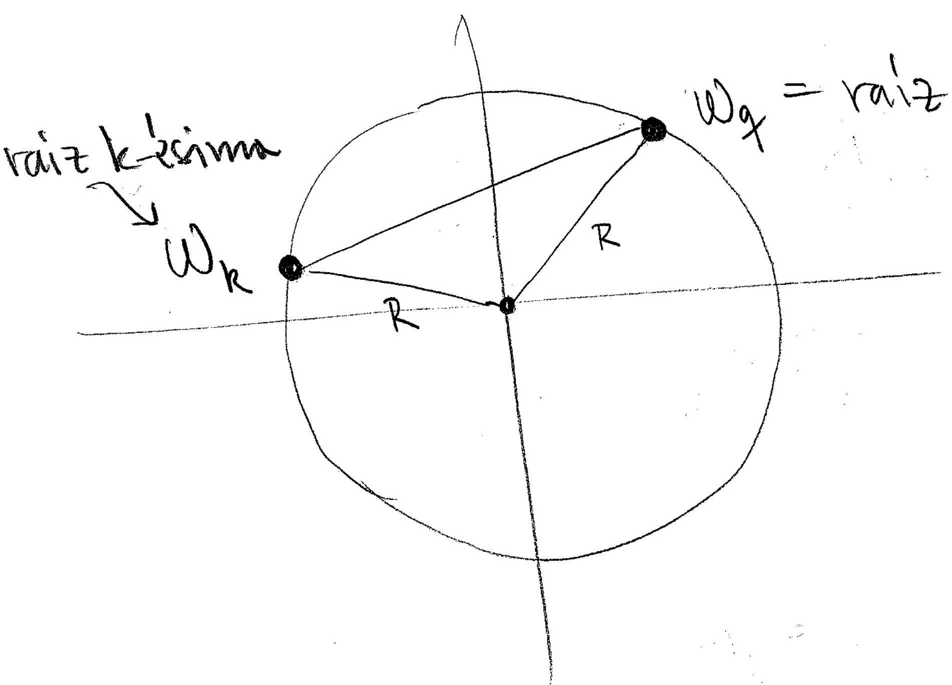
$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = -|a| \, e^{in\pi}$$

2) El probleme está representado por la ecuación

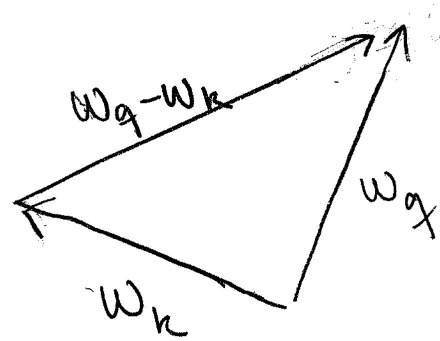
$$\underline{w = R^{1/n}}$$

cada raíz está dado por:

$$w_k = |R|^{1/n} e^{i \frac{2\pi k}{n}}$$; $k=0 \Rightarrow$ raíz es real.



— Como vectores



Se pide evaluar $\sqrt{|w_q - w_k|^2} = d$

$\Downarrow$

$$\therefore \; |w_q - w_k|^2 = (w_q - w_k)^*(w_q - w_k)$$

$$= (w_q^* - w_k^*)(w_q - w_k)$$

$$= w_q^* w_q - w_q^* w_k - w_k^* w_q + w_k^* w_k$$

$$= |w_q|^2 - 2\,\mathrm{Re}(w_q^* w_k) + |w_k|^2$$

$$|w_q|^2 = \left| |R|^{1/n} e^{i\frac{2\pi q}{n}} \right|^2 = |R|^{\frac{2}{n}}$$

$$|w_k|^2 = \left| |R|^{1/n} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \right|^2 = |R|^{\frac{2}{n}}$$

$$\mathrm{Re}(w_q^* w_k) = \mathrm{Re}\left(|R|^{\frac{2}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}(k-q)} \right)$$

$$= |R|^{2/n}\, \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}(k-q)} \right)$$

$$= |R|^{2/n} \cos\left(2\pi \frac{(k-q)}{n} \right)$$

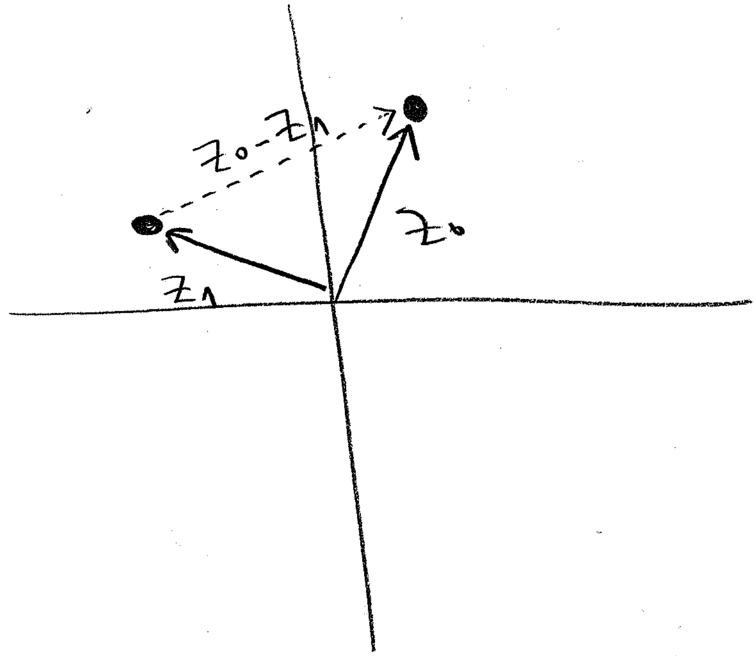
$\therefore$

$$d = \sqrt{|R|^{2/n} - 2|R|^{n/2} \cos\left(2\pi \frac{(k-q)}{n}\right) + |R|^{n/2}}$$

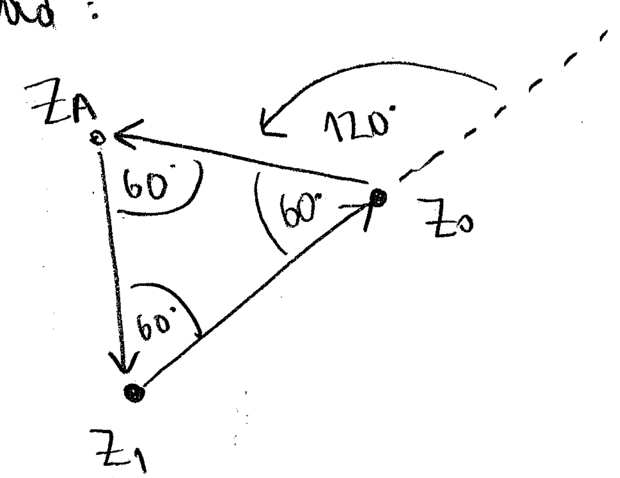
$$d = \sqrt{2}\ |R|^{1/n} \sqrt{1 - \cos\left(2\pi \frac{(k-q)}{n}\right)}$$

---

3)



Una posibilidad:



El vector $(z_0 - z_1)$, $(z_A - z_0)$, $(z_1 - z_A)$ tienen igual módulo (triángulo equilátero).

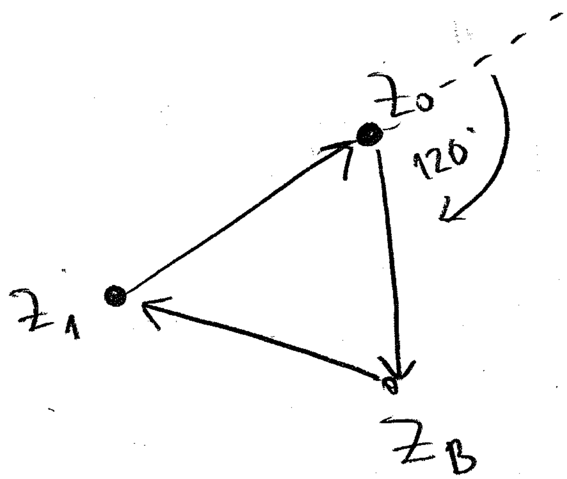
El vector $(z_A - z_0)$ se puede describir como $(z_0 - z_1)$ rotado en $120° \Rightarrow \frac{4\pi}{3}$ en dirección positive $= \circlearrowleft$.

Esto es:

$$z_A - z_0 = (z_0 - z_1)\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

17 $$z_A = (z_0 - z_1)\, e^{i\frac{4\pi}{3}} + z_0$$

OTRA OPCIÓN



análogamente

$$z_B - z_0 = (z_0 - z_1)\, e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Downarrow$$

$$z_B = (z_0 - z_1)\, e^{-i\frac{4\pi}{3}} + z_0$$

Demostrar

8

4) a) $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = \left|\frac{a-b}{|a|^2-\bar{a}b}\right| = \left|\frac{a-b}{a\bar{a}-\bar{a}b}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\bar{a}}\ \frac{\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}}\right| = \left|\frac{1}{\bar{a}}\right| = \frac{1}{|\bar{a}|} = \frac{1}{|a|} = 1$$

b) $$\operatorname{sen}(-\theta) = \frac{e^{i(-\theta)} - e^{-i(-\theta)}}{2i} = \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2i}$$

$$= -\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -\operatorname{sen}\theta$$

c) $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{e^{i(\pi/2-\theta)} + e^{-i(\pi/2-\theta)}}{2}$$

$$= \frac{e^{-i\theta}\,\cancel{e^{i\pi/2}}^{\,i} + e^{i\theta}\,\cancel{e^{-i\pi/2}}^{\,-i}}{2}$$

$$= \frac{i e^{-i\theta} - i e^{i\theta}}{2} = \frac{-i\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{2}$$

$$= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$= \sin\theta$$