1 Expansión en serie de brackets de un binomio y su relación con su serie de Taylor

Consideremos la expresión binomial:

$$(a+b)^{\nu}\,, \tag{1}$$

donde las cantidades a,b y ν, pueden asumir valores arbitrarios. En este caso existen dos formas de expandir este binomio de acuerdo al argumento de la serie que querramos obtener. Estas expansiones son respectivamente:

1. En potencias de $\left(\frac{a}{b}\right)$:

$$(a+b)^{\nu} = b^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\ (-\nu)_n\left(\frac{a}{b}\right)^n. \tag{2}$$

2. En potencias de $\left(\dfrac{b}{a}\right)$:

$$(a+b)^{\nu} = a^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\ (-\nu)_n\left(\frac{b}{a}\right)^n. \tag{3}$$

Cuando se tiene una integral que contiene un binomio, utilizando procedimientos convencionales, a veces es conveniente reemplazar por una serie de potencias, dicha serie puede ser cualquiera de las dos formas mostradas previamente. En el contexto del método de brackets, el reemplazo de una integral por una serie de brackets equivalente permite obtener todas las soluciones posibles asociadas a esta integral, los términos generados a partir de esta serie de brackets se obtienen a partir de las distintas combinaciones con que es posible usar los brackets para "eliminar" sumas. El procedimiento de integración MoB implica reemplazar el binomio por su respectiva serie de brackets, esto es:

$$\boxed{(a+b)^{\nu} = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\phi_{n,m}\ a^n b^m\frac{\langle -\nu+n+m\rangle}{\Gamma(-\nu)}} \tag{4}$$

A continuación mostraremos que la serie de brackets de un binomio (o un multinomio) es una representación más general que la simple expansión en serie de Taylor. En la expresión anterior, cuando intentamos sumar con uso del bracket hay dos formas o maneras de hacerlo, estas corresponden a las siguientes:

1. Eliminando la suma $\sum\limits_{n\geq 0}$ (m como índice libre)

$$\begin{aligned}(a+b)^{\nu} &= \sum_{m\geq 0}\phi_m\ a^n b^m\left.\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-\nu)}\right|_{n=\nu-m} \\ &= \sum_{m\geq 0}\phi_m\ a^{\nu-m} b^m\frac{\Gamma(-\nu+m)}{\Gamma(-\nu)} \\ &= a^{\nu}\sum_{m\geq 0}\phi_m\ (-\nu)_m\left(\frac{b}{a}\right)^m,\end{aligned} \tag{5}$$

con lo que se obtiene la representación en serie dada en Ec. (3).

2. Eliminando la suma $\sum\limits_{m\geq 0}$ (n como índice libre)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{\nu} &= \sum_{n\geq 0} \phi_n \; a^n b^m \left.\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-\nu)}\right|_{m=\nu-n} \\
&= \sum_{n\geq 0} \phi_m \; a^n b^{\nu-n} \frac{\Gamma(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu)} \\
&= b^{\nu} \sum_{n\geq 0} \phi_n \; (-\nu)_n \left(\frac{a}{b}\right)^n ,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

que corresponde a la representación en serie dada en Ec. (2).

Conclusión: De lo anterior se concluye que que la serie de brackets dada en Ec. (4) contiene en una única expansión las dos representaciones en serie dadas en Ecs. (2) y (3), es entonces posible considerar la serie de brackets como una expansión multiregión del binomio.