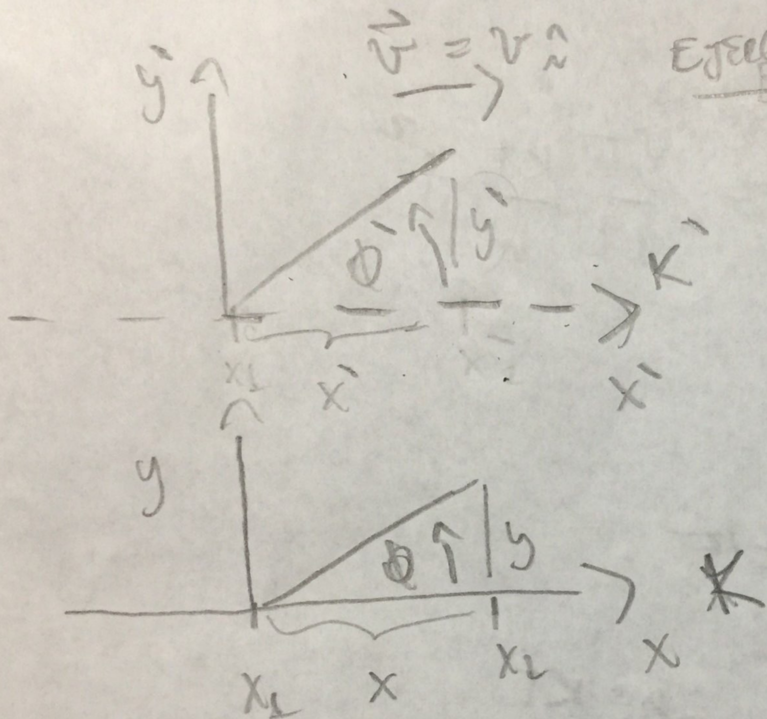
Ejercicios : Guía : Ejercicios_Rel_Especial




$$\Delta x' = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt)$$

$$= \gamma\,\Delta x$$

$$tg(\phi') = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\gamma \Delta x} = \frac{1}{\gamma} tg(\phi)$$

$$\therefore\ tg(\phi) = \gamma\, tg(\phi')$$

$$\phi = \text{Arctg}(\gamma\, tg(\phi'))$$

PROBLEMA DISTRIBUCIÓN DE PLANCK

OBTENGA LAS EXPRESIONES LÍMITES DE LA DISTRIBUCIÓN DE PLANCK PARA PEQUEÑAS Y GRANDES FRECUENCIAS, A TEMPERATURA FIJA

$$\rho(f,T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{hf/KT}-1} = \frac{8\pi h}{c^3} f^3 \frac{1}{e^{hf/KT}-1}$$

a)

$$e^{hf/KT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{h}{KT}\right)^n f^n = 1 + \frac{h}{KT} f + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{KT}\right)^2 f^2 + \cdots$$

Si $f \ll 1 \Rightarrow f^2 \simeq 0$

$$\Rightarrow e^{hf/KT} \simeq 1 + \frac{h}{KT} f \rightarrow e^{hf/KT} - 1 \simeq \frac{h}{KT} f$$

$$\Rightarrow \rho(f,T) \simeq \frac{8\pi \cancel{h}}{c^3} \cancel{f^3}^{\,2} \frac{KT}{\cancel{hf}} = \frac{8\pi}{c^3} KT f^2$$

b) $f \gg 1 \Rightarrow e^{hf/KT} - 1 \simeq e^{hf/KT}$

$$\rho(f,T) \simeq \frac{8\pi h}{c^3} f^3 e^{-hf/KT}$$

10 PROBLEMA LEY DE STEFAN - BOLTZMANN

OBTENGA LA LEY DE STEFAN - BOLTZMANN $u = cte\, T^4$ A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN DE PLANCK

$P \rightarrow$ POTENCIA EMISIVA DE LA RADIACIÓN DE UN CUERPO NEGRO POR UNIDAD DE AREA

$\rho \rightarrow$ DENSIDAD ESPECTRAL DE RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA EMITIDA POR UN CUERPO NEGRO

$u \rightarrow$ DENSIDAD DE ENERGÍA TOTAL

$$\Rightarrow u = \int_0^{\infty} \rho(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}\, d\nu$$

$$s = \frac{h\nu}{kT} \rightarrow \nu = \frac{kT}{h} s$$

$$\rightarrow d\nu = \frac{kT}{h} ds$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{KT}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{s^3}{e^s - 1}\, ds}_{I}$$

dos:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{s^3}{e^s - 1}\, ds = \Gamma(4)\,\zeta(4) = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

*VER TRANSFORMADA DE MELLIN

$$\Rightarrow u = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{K^4 T^4}{h^4} \frac{\pi^4}{15} = \frac{4}{c} \underbrace{\frac{2\pi^5 K^4}{15 c^2 h^3}}_{\sigma} T^4 = \frac{4}{c} \sigma T^4$$

Escaneado con CamScanner

OTRA FORMA

LA RADIACIÓN DE LA SUPERFICIE DE UN CUERPO NEGRO EN EQ. TERMODINÁMICO OBEDECE LA LEY DEL COSENO DE LAMBERT'S

$$\frac{d\Phi}{d\Omega} = I_\nu(T)\, dA\, d\nu \cos(\theta)$$

$$\frac{d\Phi}{d\Omega dA} = \frac{dP}{d\Omega} = I_\nu(T)\, d\nu \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow P = \int I_\nu(T)\, d\nu \cos\theta\, d\Omega \quad ; d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

↳ ESTE ÁNGULO SÓLIDO ES PARA LA MITAD DE UNA ESFERA

$$\Rightarrow P = \int_0^\infty I_\nu(T) d\nu \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta}_{1/2}$$

$$P = \pi \int_0^\infty I_\nu(T)\, d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}\, d\nu$$

$$P = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{KT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \underbrace{\frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}}_{\sigma} T^4 = \sigma T^4$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \sum_{n_1,n_2} \phi_{1,2} \int_0^\infty e^{n_1 x}(-1)^{n_2} x^3\,dx\, \frac{\langle 1+n_1+n_2\rangle}{\Gamma(1)}$$

$$= \sum_{n_1,n_2,n_3} \phi_{1,2,3}\,(-1)^{n_2}(-1)^{-n_3}\, n_1^{n_3}\, \frac{\langle 1+n_1+n_2\rangle}{\Gamma(1)} \underbrace{\int_0^\infty x^{n_3+3}\,dx}_{\langle n_3+4\rangle}$$

$\underline{dx}:\ \boxed{e^{n_1 x} = \sum_{n_3} \frac{n_1^{n_3}}{n_3!}x^{n_3} = \sum_{n_3} \phi_3 (-1)^{-n_3} n_1^{n_3} x^{n_3}}$

$$= \sum_{n_1,n_2} \phi_{1,2}\,(-1)^{n_2}\, \cancel{(-1)^{4}}^{\,1}\, n_1^{-4} \langle 1+n_1+n_2\rangle\, \Gamma(4)$$

$n_1 \to$ Libre $\Rightarrow n_2 = -1-n_1$

$$= \sum_{n_1} \frac{\cancel{(-1)^{n_1}}}{\cancel{n_1!}}\,(-1)^{-1-\cancel{n_1}}\,\frac{1}{n_1^4}\, \cancel{\Gamma(1+n_1)}^{\,n_1!}\,\Gamma(4) =$$

$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n_1^4}\Gamma(4) \to$ SERIE DIVERGENTE $\Rightarrow$ DESCARTADA

$$= -\Gamma(4) \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1^4}$$

$n_2 \to$ Libre $\Rightarrow n_1 = -1 - n_2$

$$= \sum_{n_2} \cancel{\frac{(-1)^{n_2}}{n_2!}} \cancel{(-1)^{n_2}} \frac{1}{(n_2+1)^4} \cancel{\Gamma(1+n_2)} \, \Gamma(4)$$

$$= \sum_{n_2} \frac{1}{(n_2+1)^4} \Gamma(4) \Rightarrow \text{Si } \tilde{n}_2 = n_2 + 1 \to \sum_{\tilde{n}_2 - 1 = 0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{n}_2^{\,4}} \Gamma(4)$$

$$\to \tilde{n}_2 - 1 = n_2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Gamma(4) = \zeta(4)\, \Gamma(4) \quad //$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \zeta(4)\, \Gamma(4) \quad //$$

# 11 | Efecto Compton

1923 Compton al disparar fotones con un $\lambda_0$ contra una lámina de metal, los fotones dispersados tenían una longitud de onda mayor bien definida $\lambda_1$. Este efecto se le llama: Efecto Compton.

Esto nos dice que el fotón al colisionar con un electrón, cede una energía bien definida; osease, el fotón tiene energía cuantizada.

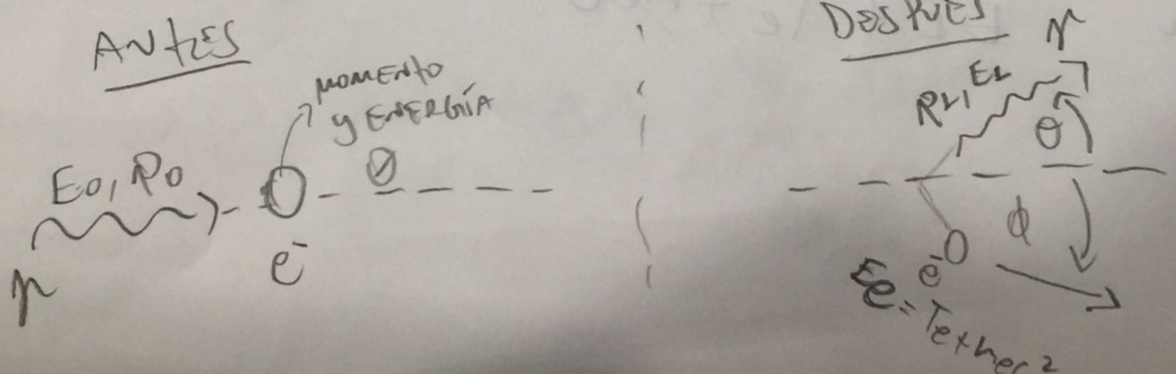
¿Cómo calculamos la longitud de onda de Compton?

- La energía para un fotón es: $E = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$
- Ahora de la relación energía, masa, momento: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Para un fotón: $m = 0 \Rightarrow E = pc$

$\therefore\ E = h\dfrac{c}{\lambda} = pc \rightarrow p = \dfrac{h}{\lambda}$ → momento para un fotón

¿Qué sucede cuando colisiona un fotón y un electrón?



El momentum lineal se conserva

$\Rightarrow \quad p_0 = p_1 \cos(\theta) + p_e \cos(-\phi) \rightarrow$ EJE X (1)

$0 = p_1 \operatorname{sen}\theta + p_e \operatorname{sen}(-\phi) \rightarrow$ EJE Y

$p_1 \operatorname{sen}(\theta) = p_e \operatorname{sen}(\phi)$ (2)

DE (1)

$\Rightarrow \quad p_0 - p_1 \cos(\theta) = p_e \cos(\phi) \quad /(\ )^2$

$p_0^2 - 2 p_0 p_1 \cos(\theta) + p_1^2 \cos^2(\theta) = p_e^2 \cos^2(\phi)$ (1)'

DE (2)

$p_1^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = p_e^2 \operatorname{sen}^2(\phi)$ (2)'

(1)' + (2)'

$$p_0^2 - 2 p_0 p_1 \cos(\theta) + \underbrace{p_1^2 \cos^2(\theta) + p_1 \operatorname{sen}^2(\theta)}_{p_1^2} = \underbrace{p_e^2 \cos^2(\phi) + p_e \operatorname{sen}^2(\phi)}_{p_e^2} \quad (3)$$

DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$E_i = E_f$

$E_0 + m_e c^2 = E_1 + E_e$

$E_0 + \cancel{m_e c^2} = E_1 + T_e + \cancel{m_e c^2}$

12

<u>obs</u>: Como el electrón después de la colisión alcanza velocidades cercanas a la luz $\Rightarrow T_e \neq \frac{1}{2} m_e v_e^2 = p_e^2/(2m_e)$

$$\Rightarrow E_e = T_e + m_e c^2 \Rightarrow T_e = E_e - m_e c^2 = c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2} - m_e c^2$$

Reemplazando en la ec. anterior

$$E_0 = E_1 + c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2} - m_e c^2$$

$$\Rightarrow E_0 - E_1 + m_e c^2 = c\sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2} \quad /(\ )^2$$

$$E_0^2 - 2E_0E_1 + E_1^2 + 2E_0 m_e c^2 - 2m_e c^2 E_1 + m_e^2 c^4 = c^2(m_e^2c^2 + p_e^2)$$

<u>obs</u>: Reemplazamos la energía por momento $E = cp$ y utilizamos la ec (3)

$$\cancel{c^2 p_0^2} - 2c^2 p_0 p_1 + \cancel{c^2 p_1^2} + 2m_e c^3 p_0 - 2m_e c^3 p_1 + \cancel{m_e^2 c^4} = \cancel{m_e^2 c^4} + c^2(p_0^2 - 2p_1p_0\cos(\theta) + p_1^2)$$

$$\Rightarrow 2m_e c(p_0 - p_1) = 2p_0p_1(1 - \cos(\theta))$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{h} - \frac{\lambda_0}{h}\right) = \frac{1}{m_e c}(1 - \cos\theta) \ ; \text{ con } p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_0) = \Delta\lambda = \underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\lambda_c}(1 - \cos\theta)$$

EJ: UN FOTÓN CHOCA CON UN PROTÓN EN REPOSO. CALCULE LA PÉRDIDA MÁXIMA DE ENERGÍA DEL FOTÓN

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_p c}(1-\cos\theta) \quad ; \underline{obs}: \lambda = \frac{hc}{E}$$

$$\Rightarrow \frac{hc}{E} - \frac{hc}{E_0} = \frac{(E_0 - E)\cancel{h}c}{E E_0} = \frac{\cancel{h}}{m_p c}(1-\cos\theta)$$

$$E_0 - E = E\,\frac{E_0}{m_p c^2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{E_0}{E} - 1 = \frac{E_0}{m_p c^2}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow E = E_0\left[\frac{E_0}{m_p c^2}(1-\cos\theta)+1\right]^{-1}$$

$$E = \frac{E_0 m_p c^2}{E_0(1-\cos\theta)+m_p c^2} \quad /(\;)-E_0$$

$$E - E_0 = \frac{\cancel{E_0 m_p c^2} - E_0^2(1-\cos\theta) - \cancel{E_0 m_p c^2}}{E_0(1-\cos\theta)+m_p c^2}$$

$$\Delta E = E_0 - E = \frac{E_0^2(1-\cos\theta)}{m_p c^2 + E_0(1-\cos\theta)}$$

* COMO E DEPENDE DE ÁNGULO, MAXIMIZAMOS CON RESPECTO A ESTE

$$\Rightarrow \frac{d\Delta E}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta_0} = E_0^2\left[\frac{sen\theta}{m_pc^2+E(1-\cos\theta)} - \frac{(1-\cos\theta)}{[m_pc^2+E(1-\cos\theta)]^2}\cdot E_0\, sen\theta\right]$$

$$= E_0^2\left[\frac{sen\theta\, m_pc^2 + sen\theta\, E_0(1-\cos\theta) - E_0\, sen\theta(1-\cos\theta)}{[m_pc^2+E(1-\cos\theta)]^2}\right]$$

$$= E_0^2 m_pc^2 \frac{sen\theta}{[m_pc^2+(1-\cos\theta)E_0]^2}\bigg|_{\theta=\theta_0} = 0$$

$\Rightarrow$ El VALOR MÁXIMO Y MÍNIMO PUEDE SER $\theta_0 = 0$ O $\theta_0 = \pi$

* COMPARANDO CON LA FUNCIÓN $\Delta E$, VEMOS QUE EL VALOR MÁXIMO ES CUANDO $\theta_0 = \pi$

$$\Delta E_{MAX} = \frac{2E_0^2}{m_pc^2+2E_0} = E_0\left(\frac{1}{1+\frac{m_pc^2}{2E_0}}\right)$$

* ESTE RESULTADO MUESTRA QUE LA MÁXIMA PÉRDIDA DE ENERGÍA DEL FOTÓN ES PARA $\theta_0 = \pi$ $\wedge$ CUANDO $E_0 \gg m_0c^2 \Rightarrow \frac{m_0c^2}{2E_0} \sim 0$, OSEASE QUE LA ENERGÍA INICIAL DEL FOTÓN ES MUCHO MAYOR A LA DEL PROTÓN EN REPOSO