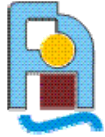




# Capacidad y circuitos equivalentes



Antonio González Fernández  
Dpto. de Física Aplicada III  
Universidad de Sevilla

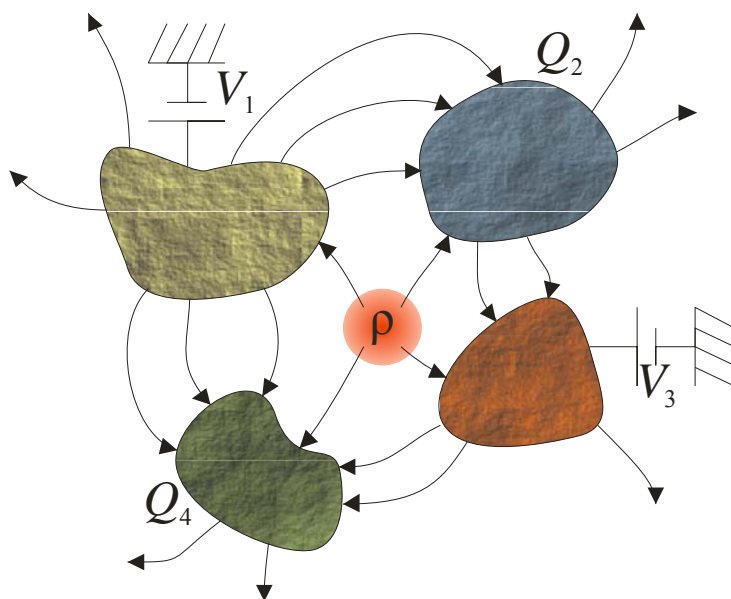
## Sinopsis de la presentación



- Cuando se tiene un conjunto de conductores a distintos voltajes, se produce un campo entre ellos
- Los conductores se cargan, dependiendo de las tensiones de todos ellos
- Las cargas pueden relacionarse matemáticamente con los voltajes
- Estas relaciones se describen mediante los conceptos de capacidad de un conductor y de un condensador
- Combinando condensadores y fuentes, puede modelarse un sistema real mediante un circuito equivalente.
- A partir del análisis del circuito pueden resolverse diversos problemas reales de apariencia muy diferente

- El problema del potencial
- Coeficientes de capacidad
- Condensadores
- Circuitos equivalentes
- Ejemplos de utilización

## Problema del potencial: descripción general



- Cuando se tiene un sistema de  $N$  conductores, y carga entre ellos, interesa determinar el campo eléctrico que se produce.
- Este sistema genérico puede representar situaciones físicas muy diferentes. P.ej.:
  - Un circuito eléctrico
  - Un avión volando entre tierra y una nube de tormenta.

# Problema del potencial: descripción matemática



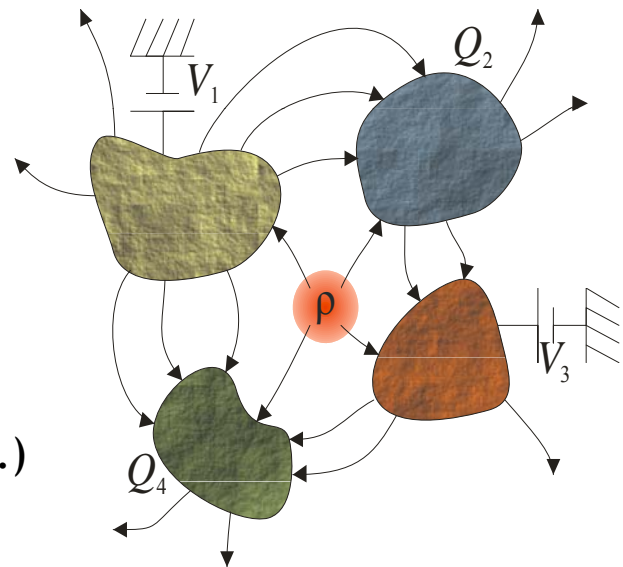
- El problema se define completamente aplicando que:
- Entre ellos se cumple la ec. de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Cada conductor es equipotencial, lo que da las condiciones de contorno (c.c.)

$$\phi = V_k \quad (\mathbf{r} \in S_k)$$

- En el infinito el potencial se anula  $\phi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$

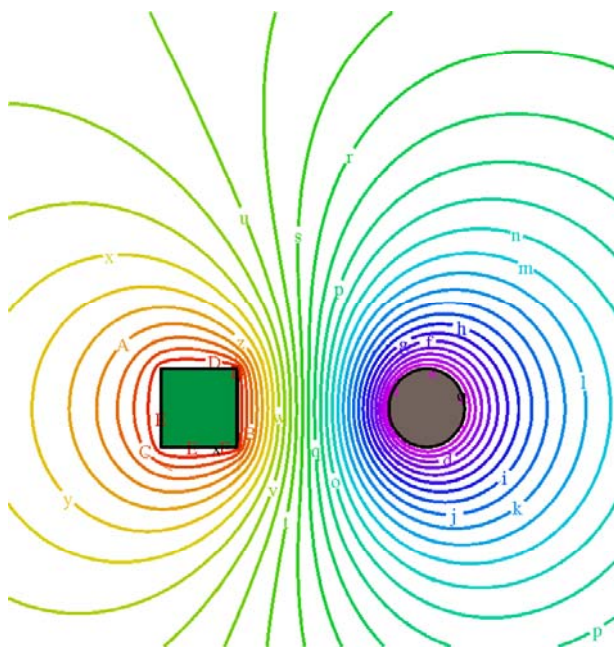


## Características de la solución del problema del potencial

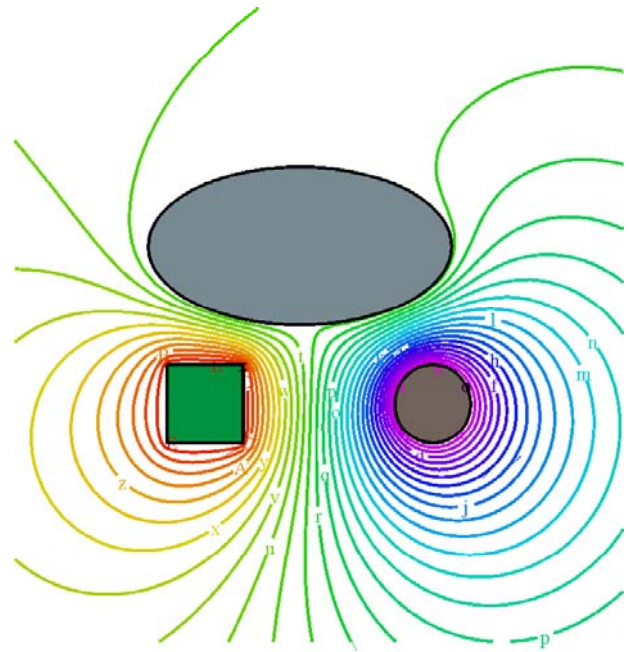


- La solución no puede hallarse por simple superposición del campo de cada conductor como si el resto no estuviera.
- Una vez resuelto un problema, al añadir un nuevo conductor, hay que empezar de nuevo
- Esto no significa que el campo no sea la suma del producido por cada una de las cargas, sino que al introducir nuevos elementos, las cargas se redistribuyen en las superficies conductoras, invalidando las soluciones ya conocidas

# Efecto de la introducción de un conductor adicional descargado



Sólo dos conductores



Añadiendo un tercer conductor descargado

© 2008, Antonio González Fernández

## Solución del problema del potencial como combinación de funciones



- La solución puede escribirse como una combinación lineal

$$\phi = \phi_0 + \sum_k V_k \phi_k$$

donde:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_0 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\mathbf{r} \in \tau) \\ \phi_0 &= 0 \quad (\mathbf{r} \in S_k)\end{aligned}$$

Es el potencial que habría si estuviera la carga de volumen pero todos los conductores estuvieran a tierra

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_k &= 0 \quad (\mathbf{r} \in \tau) \\ \phi_k &= 1 \quad (\mathbf{r} \in S_k) \quad \phi_k = 0 \quad (\mathbf{r} \in S_j, j \neq k)\end{aligned}$$

Es el potencial que habría si no hubiera carga de volumen, el conductor  $k$  estuviera a potencial unidad y el resto a tierra

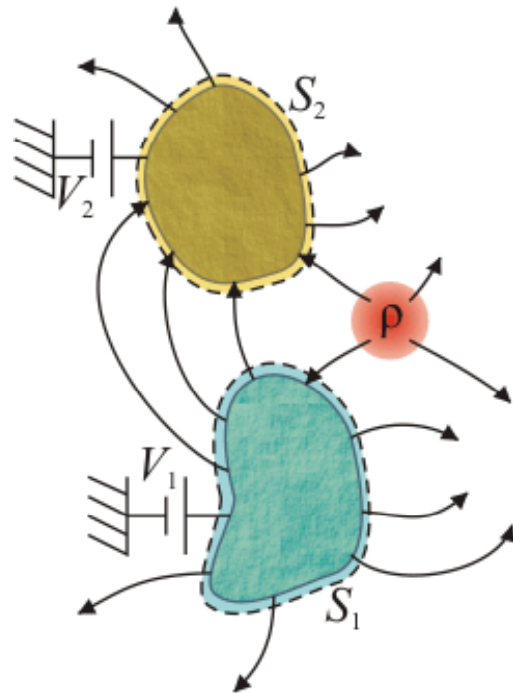
© 2008, Antonio González Fernández

# Cálculo de la carga almacenada en un conductor

- A menudo sólo se desea conocer la carga de cada conductor
- Se halla aplicando la ley de Gauss a una superficie que envuelva a cada uno

$$Q_i = \epsilon_0 \oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i$$

- En esta expresión, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es suma del que produce cada conductor, más el debido a  $\rho$



# Cálculo de la carga a partir de la combinación de funciones

- Sustituyendo la solución del potencial queda

$$Q_i = Q_{i0} + \sum_k C_{ik} V_k$$

donde

- $Q_{i0}$ : es la carga inducida por la carga de volumen

$$Q_{i0} = -\epsilon_0 \oint_{S_i} \nabla \phi_0 \cdot d\mathbf{S}_i$$

- $C_{ik}$  es la carga que habría en el conductor  $i$ , cuando el  $k$  está a potencial unidad y el resto a tierra

$$C_{ik} = -\epsilon_0 \oint_{S_i} \nabla \phi_k \cdot d\mathbf{S}_i$$

# Definición de los coeficientes de capacidad

- Las cantidades  $C_{ik} = -\epsilon_0 \oint_{S_i} \nabla \phi_k \cdot d\mathbf{S}_i$

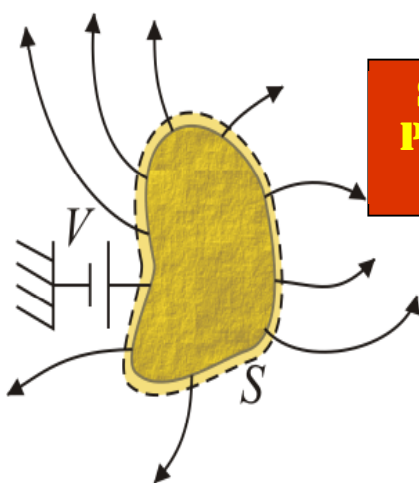
se conocen como *coeficientes de capacidad*

- Permiten expresar las cargas en los conductores como una combinación lineal de los potenciales.
- Se miden en faradios
- En forma matricial queda

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ \vdots \\ Q_{N0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$$

## Aplicación de los coeficientes de capacidad al caso de un solo conductor



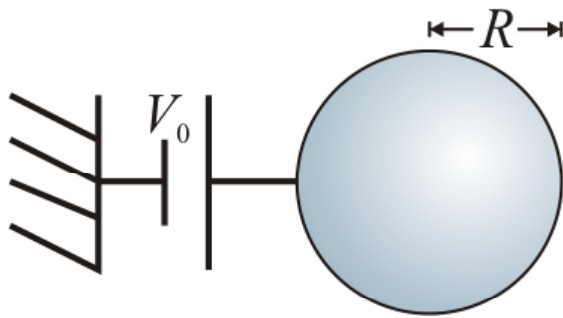
- La carga vale

**SÓLO VÁLIDA  
PARA UN SOLO  
CONDUCTOR**

$$Q = C V$$

- Si  $V > 0$ , el campo va hacia afuera y  $Q > 0$
  - Por tanto,  $C > 0$
  - $C$  se conoce como capacidad del conductor
  - Se mide en faradios, aunque su valor es siempre muy pequeño
  - No debe confundirse con la capacidad de un *condensador*
- Un solo conductor, a tensión  $V$ , sin carga de volumen ( $\rho=0$ )

# Cálculo de la capacidad de una esfera conductora: planteamiento



- Sea una esfera metálica a potencial  $V_0$ . No hay más carga ni más conductores en el sistema

- Debe resolverse la ecuación de Laplace

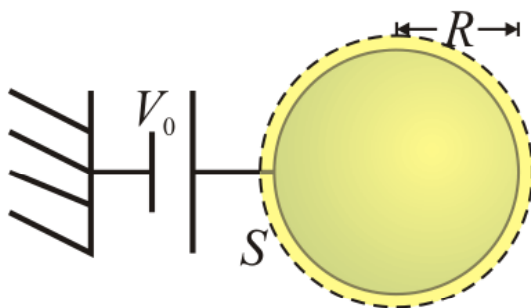
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (r > R) \quad \phi = V_0 \quad (r = R) \quad \phi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

- Por la simetría del sistema, podemos suponer que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi(r)$$

siendo  $r$  la distancia al centro de la esfera

# Cálculo de la capacidad de una esfera conductora: solución



- La ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) \right) = 0 \Rightarrow \phi = A + \frac{B}{r}$$

con solución  $\phi = \frac{V_0 R}{r} \quad (r > R)$

- El campo eléctrico vale

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = \frac{V_0 R}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (r > R)$$

y la carga

$$Q = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

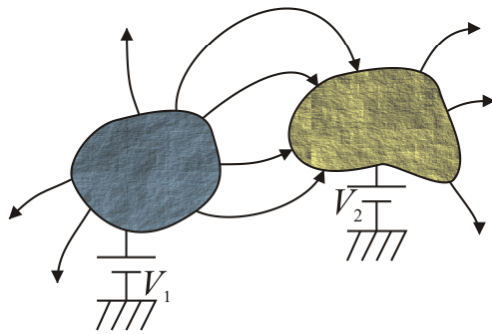
- La capacidad de la esfera es igual a

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

- Para el caso de la Tierra ( $R_T = 6370\text{km}$ ) vale  
 $C = 0.71\text{mF}$



# Coeficientes de capacidad en un sistema de dos conductores



- Si hay más de un conductor  $V=0$  **NO** implica  $Q=0$
- Ej. Supongamos  $V_1=0$   
 $Q_1 = C_{12}V_2 \neq 0$

- En ausencia de carga de volumen queda

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

- Si hay más de un conductor  $Q=0$  **NO** implica  $V=0$
- Ej. Supongamos  $Q_1=0$

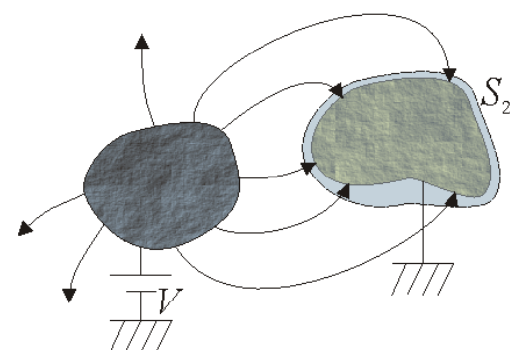
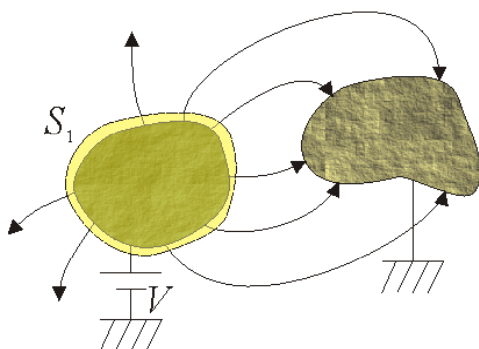
$$V_1 = -\frac{C_{12}V_2}{C_{11}} \neq 0$$

# Coeficientes de capacidad en un sistema de dos conductores: propiedades

- Si  $V_1=V>0$  y  $V_2=0$ , el campo va del 1 al 2
- En ese caso

$$Q_1 = \epsilon_0 \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 > 0$$

- Por tanto, los coeficientes diagonales  $C_{11}$  y  $C_{22}$  son siempre positivos



- En el mismo caso

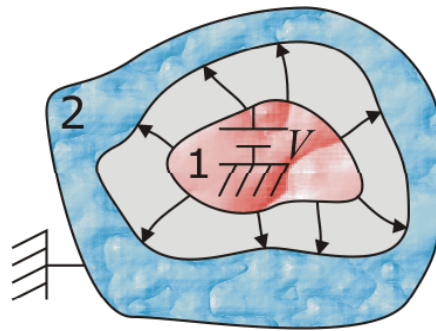
$$Q_2 = \epsilon_0 \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 < 0$$

- Los coeficientes no diagonales,  $C_{12}$  y  $C_{21}$  son negativos
- Además se cumple que  $C_{12}=C_{21}$



# Conductores en *influencia total*: definición y propiedades

- Cuando todas las líneas del conductor 1 van a parar al 2, sea cual sea el voltaje, se dice que el 1 está en *influencia total* con el 2
- Ocurre cuando el 1 está dentro del 2 y no hay nada más en el hueco
- Si  $V_1 = V$ ,  $V_2 = 0$ , se cumple que  $Q_2 = -Q_1$
- Por tanto  $C_{11} = -C_{12}$
- No se cumple que  $C_{22} = -C_{12}$  (el 2 no está en influencia total con el 1)



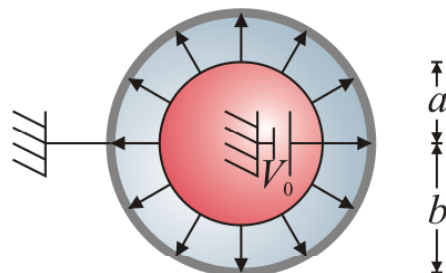
- En este caso, el conductor 2 actúa como una Jaula de Faraday:
  - El interior no percibe el exterior
  - El exterior no percibe el interior

# Coeficientes de capacidad para dos esferas concéntricas: planteamiento

- Dos esferas: una maciza de radio  $a$  y una fina corteza de radio  $b$  ( $b > a$ )
- Entre ellas y fuera se cumple la ecuación de Laplace, con las c.c.

$$\phi(r=a) = V_1 \quad \phi(r=b) = V_2$$

$$\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$



- Si  $V_1 = V_0$ ,  $V_2 = 0$ 
  - En el exterior, el potencial es nulo.
  - En el interior es de la forma

$$\phi_{\text{int}} = A + \frac{B}{r}$$

- Imponiendo las c.c.

$$V_0 = A + \frac{B}{a} \quad 0 = A + \frac{B}{b}$$

$$\Rightarrow B = \frac{abV_0}{b-a} \quad A = -\frac{aV_0}{b-a}$$

# Coeficientes de capacidad para dos esferas concéntricas: 1ª columna

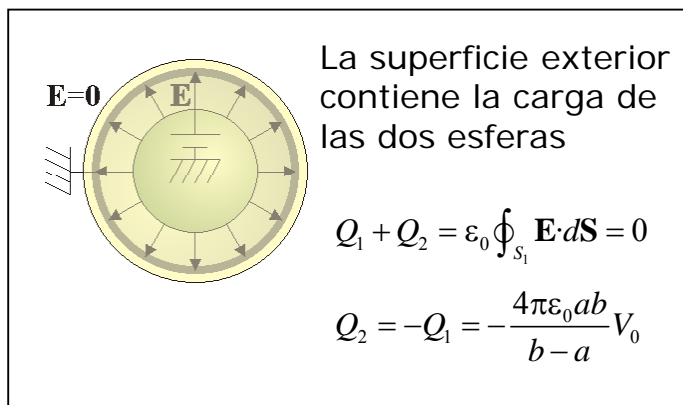
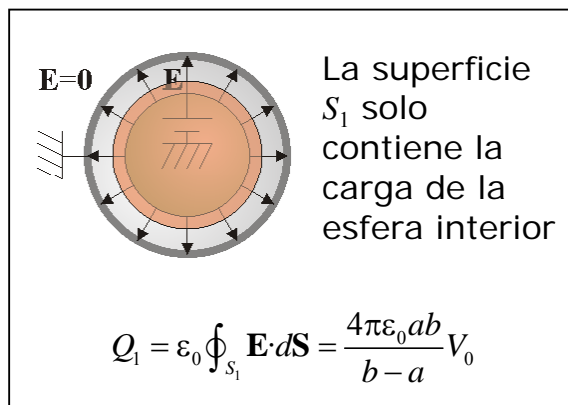


- El potencial vale

$$\phi = \begin{cases} \frac{abV_0}{b-a} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

- El campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \begin{cases} \frac{abV_0}{(b-a)r^2} \mathbf{u}_r & a < r < b \\ \mathbf{0} & r > b \end{cases}$$



La primera columna de la matriz vale:  $C_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$   $C_{21} = -\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$

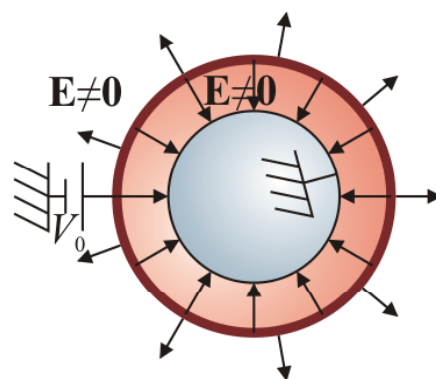
© 2008, Antonio González Fernández

# Coeficientes de capacidad para dos esferas concéntricas: planteamiento



- Si  $V_1=0$  y  $V_2=V_0$ , hay campo en el espacio intermedio y en el exterior.
- En las dos regiones se cumple la ec. de Laplace, con las c.c.

$$\begin{aligned} \phi(r=a) &= 0 & \phi(r=b) &= V_0 \\ \phi(r \rightarrow \infty) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$



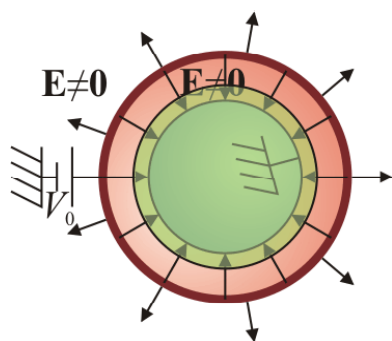
- En el espacio intermedio la solución es análoga a la anterior, cambiando  $a$  por  $b$
- En el exterior es el de una esfera a potencial  $V_0$

$$\phi = -\frac{abV_0}{b-a} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad \mathbf{E} = -\frac{abV_0}{(b-a)r^2} \mathbf{u}_r$$

$$\phi = \frac{V_0 b}{r} \quad \mathbf{E} = \frac{V_0 b}{r^2} \mathbf{u}_r$$

© 2008, Antonio González Fernández

# Coeficientes de capacidad para dos esferas concéntricas: 2ª columna



- La carga de la esfera interior es

$$Q_1 = \epsilon_0 \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} V_0$$

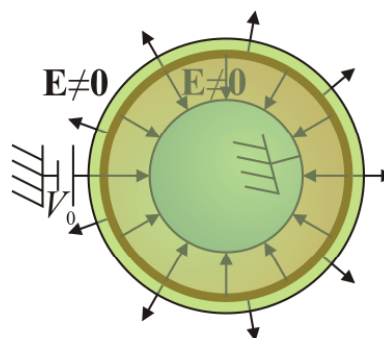
- Por ello

$$C_{12} = -\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} = C_{21}$$

- La superficie exterior contiene las dos esferas

$$Q_1 + Q_2 = \epsilon_0 \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon_0 b V_0$$

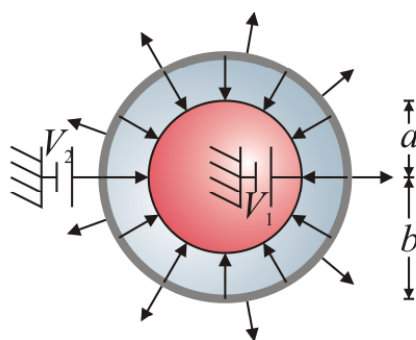
$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 b V_0 - Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 b^2}{b-a} V_0 \quad C_{22} = \frac{4\pi\epsilon_0 b^2}{b-a}$$



# Coeficientes de capacidad para dos esferas concéntricas: resumen

- Resulta la matriz

$$\mathbf{C} = \frac{4\pi\epsilon_0 b}{b-a} \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & b \end{pmatrix}$$



- En un caso general las cargas en cada conductor serán

$$Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 ba}{b-a} (V_1 - V_2)$$

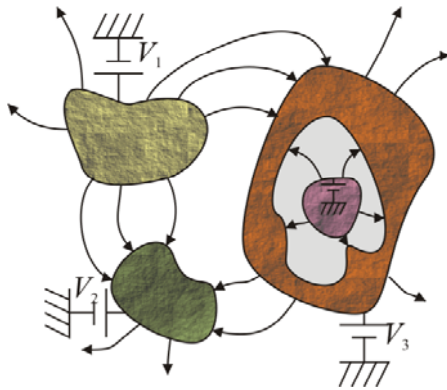
$$Q_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 b}{b-a} (bV_2 - aV_1)$$

- Es simétrica
- Los elementos diagonales son positivos
- Los elementos no diagonales son negativos
- Al haber influencia total  
 $C_{11} = -C_{12}$

- Si lo que se conoce son las cargas pueden calcularse los potenciales despejando

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{b} \right) \quad V_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

# Propiedades de los sistemas de N conductores



- En un problema general, en ausencia de carga de volumen tenemos la relación matricial

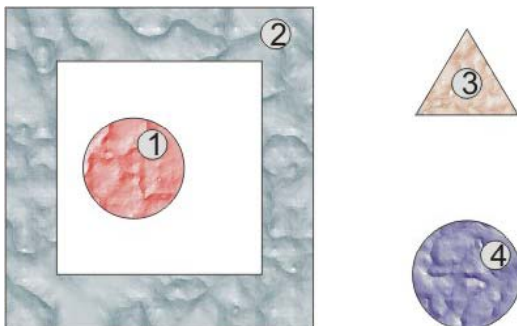
$$\mathbf{Q} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{2N} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$$

- La matriz  $\mathbf{C}$  es

- Simétrica,  $C_{ik} = C_{ki}$
- Los elementos de la diagonal principal son siempre positivos,  $C_{ii} > 0$
- Los elementos no diagonales son negativos o nulos,  $C_{ik} \leq 0, i \neq k$ .

## Ejemplo: sistema de 4 conductores genérico



- Calculando la matriz aproximada por el método de elementos finitos (con un error inferior al 1%)

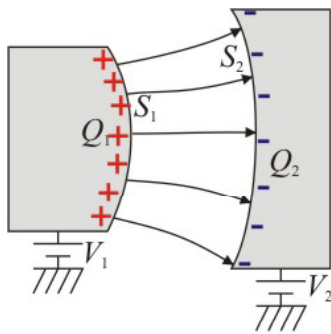
$$\mathbf{C} = C_0 \begin{pmatrix} 9.086 & -9.090 & 0.000 & 0.000 \\ -9.088 & 15.945 & -1.565 & -1.752 \\ 0.000 & -1.549 & 3.669 & -1.316 \\ 0.000 & -1.759 & -1.336 & 4.067 \end{pmatrix}$$

$C_0$  es una cantidad que depende de la escala y de  $\epsilon_0$

- El conductor 1 está en influencia total con el 2.

- $C_{11} = -C_{12}$
- No puede haber líneas que vayan del 1 al 3 o al 4. Por tanto  $C_{31} = 0, C_{41} = 0$ .
- Análogamente,  $C_{13} = 0, C_{14} = 0$ , ya que no hay líneas del 3 al 1, o del 4 al 1.

# Definición de condensador



© 2008, Antonio González Fernández

- Dos superficies están en influencia total (la 1 con la 2 y la 2 con la 1) cuando todas las líneas de campo que salen de una van a parar a la otra

- Las cargas de las superficies son de la misma magnitud y signo opuesto

$$Q_1 = -Q_2$$

- La carga en cada una es proporcional a la diferencia de potencial entre ellas

$$Q_1 = C_{11}(V_1 - V_2)$$

- Se dice entonces que las dos superficies forman un condensador

## Capacidad de un condensador: definición y propiedades



- Se define la capacidad de un condensador como

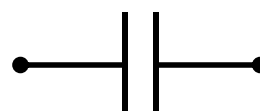
$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$$

- Sólo es aplicable a dos superficies en influencia total
- Es indiferente qué superficie llamamos 1 y cuál 2.

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{-Q_2}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1}$$

- En el denominador aparece la diferencia de potencial,  $V_1 - V_2$  (para un condensador **NO** es cierto que  $Q = CV$ )

- Se mide en faradios
- Es siempre positiva
- No hay que confundirla con la capacidad de un *conductor*
- El elemento de circuito asociado a la capacidad  $C$  se representa por



© 2008, Antonio González Fernández

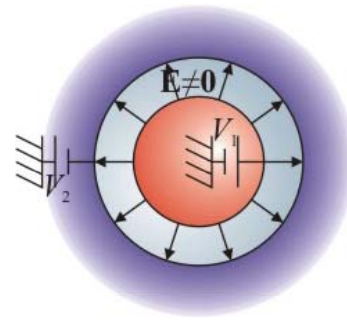
# Capacidad de un condensador esférico



- Para dos superficies esféricas concéntricas

$$C = C_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} = -C_{12}$$

$$Q_1 = C(V_1 - V_2)$$



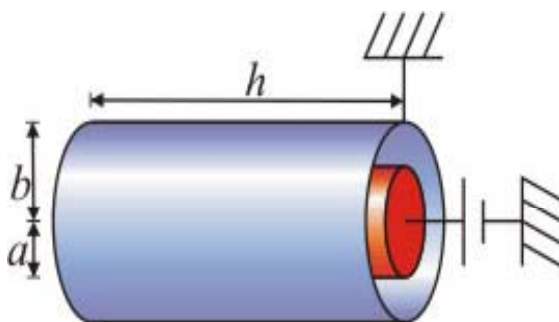
- Esta capacidad no nos dice nada de lo que ocurre en el exterior del conductor 2, sólo informa de las superficies enfrentadas.

- En el caso de la Tierra y la ionosfera

- $a = R_T = 6400\text{km}$
- $b = R_T + h = 6500\text{km}$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_T (R_T + h)}{h} \approx 50\text{mF}$$

# Capacidad de un condensador coaxial: planteamiento



- Un condensador coaxial está formado por dos cilindros circulares concéntricos, de longitud  $h$ , mucho mayor que sus radios,  $a$  y  $b$ .

- Para hallar la capacidad se siguen los pasos:

- Se plantea la ecuación de Laplace suponiendo una placa a potencial  $V_0$  y la otra a tierra
- Se resuelve esta ecuación
- Se calcula el campo eléctrico como  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$
- Se halla la carga en la placa a tensión  $V_0$ , a partir del campo eléctrico
- El cociente entre la carga y la d.d.p. es la capacidad



# Capacidad de un condensador coaxial: solución del problema del potencial



- Hay que resolver la ec. de Laplace

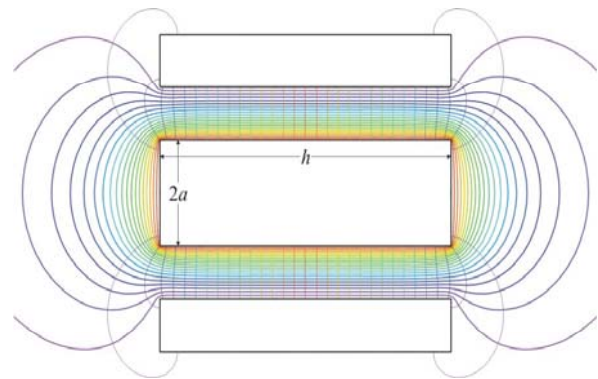
$$\nabla^2 \phi = 0$$

con las condiciones

$$\phi(\rho = a) = V_0 \quad \phi(\rho = b) = 0$$

- Si la longitud es mucho mayor que el radio pueden despreciarse los efectos de borde (curvatura de las líneas de campo en los extremos) y suponer

$$\mathbf{E} = E \mathbf{u}_\rho$$



- En ese caso

$$\phi = \phi(\rho)$$

- La ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\phi}{d\rho} \right) = 0$$

# Capacidad de un condensador coaxial: cálculo de la capacidad



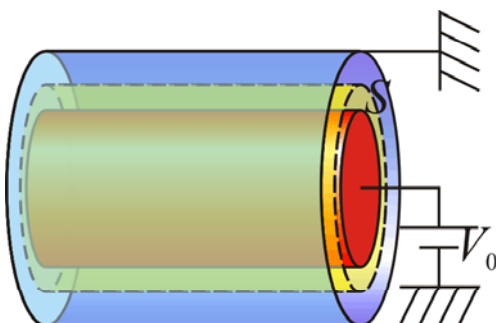
- La solución es de la forma

$$\phi = A + B \ln(\rho)$$

- Imponiendo las c.c.

$$V_0 = A + B \ln(a)$$

$$0 = A + B \ln(b)$$



- El potencial es

$$\phi = -\frac{V_0 \ln(\rho/b)}{\ln(b/a)}$$

- El campo eléctrico entre los cilindros

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = \frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \mathbf{u}_\rho$$

- Hallando el flujo a través de una superficie concéntrica con el cilindro interior

$$Q_1 = \epsilon_0 \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{2\pi\epsilon_0 h V_0}{\ln(b/a)}$$

y la capacidad es  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(b/a)}$

# Capacidad de un condensador plano

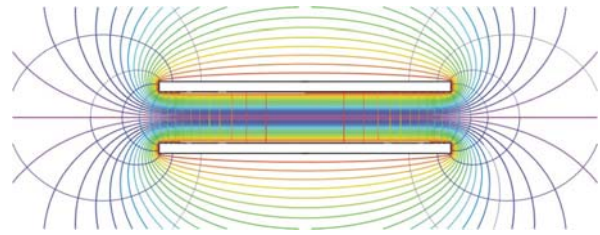


- Lo forman dos placas conductoras de sección  $S$  y separadas una distancia  $a$ .
- Entre ellas se cumple la ec. de Laplace con las c.c.

$$\phi(z=0) = V_0 \quad \phi(z=a) = 0$$

- Despreciando los efectos de borde (suponiendo campo perpendicular a las placas)

$$\mathbf{E} = E\mathbf{u}_z \Rightarrow \phi = \phi(z) \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$$



- Resulta el potencial

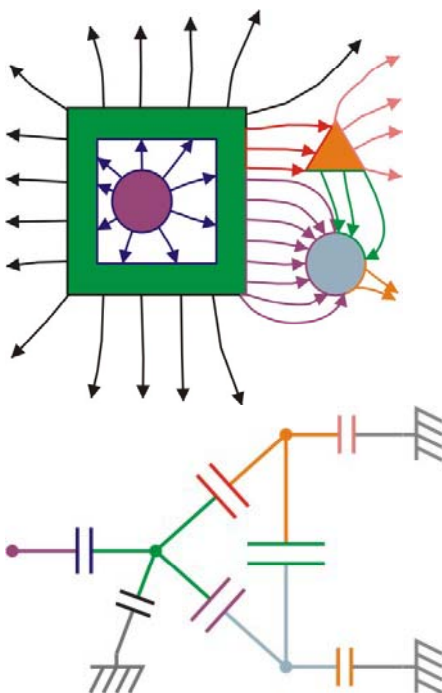
$$\phi = V_0 \left(1 - \frac{z}{a}\right)$$

- Calculando la carga sobre la placa a tensión  $V_0$

$$Q_1 = \epsilon_0 \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 = \frac{\epsilon_0 S V_0}{a}$$

se obtiene la capacidad  $C = \frac{\epsilon_0 S}{a}$

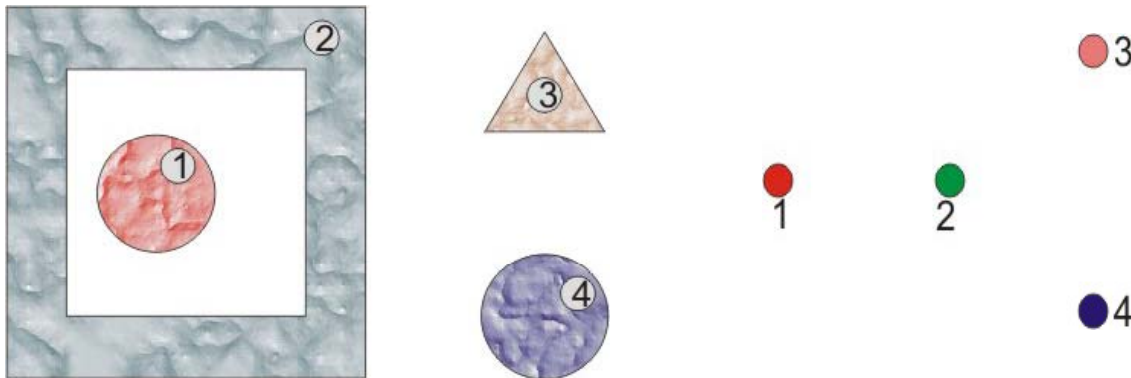
## Circuitos equivalentes: modelan los sistemas reales



- En un sistema de conductores diferentes porciones de la superficie de cada uno se encuentran en influencia total con las de otros conductores
- Podemos modelar el sistema como un conjunto de condensadores correspondientes a estas porciones conectadas por líneas de campo
- Para ello, hay que seguir una serie de pasos.

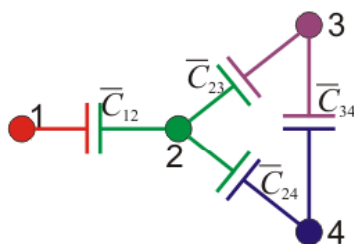
# Construcción de circuitos equivalentes: nodos del circuito

- Analizaremos el sistema de cuatro conductores de la figura



- En primer lugar, cada conductor se representa por un nodo

# Construcción de circuitos equivalentes: condensadores entre nodos del circuito



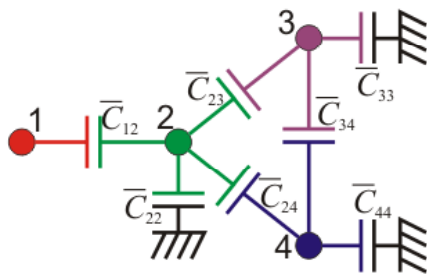
- La *capacidad*  $\bar{C}_{ik}$  viene dada por el coeficiente  $C_{ik}$  cambiado de signo

$$\bar{C}_{ik} = -C_{ik}$$

- La capacidad  $\bar{C}_{ik}$  es siempre positiva o nula

- A continuación se coloca un condensador  $\bar{C}_{ik}$  conectando cada par de nodos,  $i$  y  $k$
- Cuando dos conductores  $i$  y  $k$  están apantallados por un tercero, la capacidad es nula.
- En ese caso, puede suprimirse el condensador correspondiente en el esquema ( $\bar{C}_{13}$  y  $\bar{C}_{14}$  en este caso)

# Construcción de circuitos equivalentes: condensadores entre los nodos y tierra



- El valor de la autocapacidad  $\bar{C}_{ii}$  es la suma de una fila de la matriz de los  $C_{ik}$

$$\bar{C}_{ii} = \sum_k C_{ik}$$

- Esta cantidad es siempre positiva o nula

- Hay que añadir un condensador  $\bar{C}_{ii}$  entre cada nodo y tierra
- Estos condensadores representan las líneas de campo que van de cada conductor al infinito
- Cuando un conductor está apantallado y no puede haber líneas entre él y el infinito,  $\bar{C}_{ii}=0$  y puede suprimirse el condensador correspondiente ( $\bar{C}_{11}$  en este ejemplo)

## Relación entre las capacidades y los coeficientes de capacidad



- Es importante no confundir los coeficientes de capacidad,  $C_{ik}$ , del sistema de conductores, con las capacidades y autocapacidades,  $\bar{C}_{ik}$ , del circuito equivalente
- La carga usando los  $C_{ik}$  es

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 + \dots$$

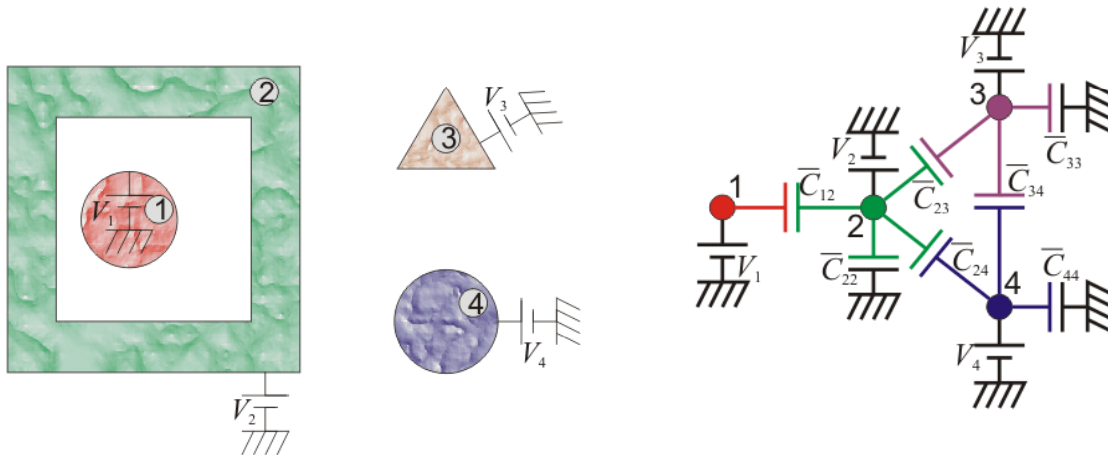
y usando los  $\bar{C}_{ik}$

$$Q_1 = \bar{C}_{11}V_1 + \bar{C}_{12}(V_1 - V_2) + \bar{C}_{13}(V_1 - V_3) + \dots$$

- Se relacionan por  $\bar{C}_{ik} = -C_{ik} \quad \bar{C}_{ii} = \sum_k C_{ik}$
- La relación inversa es ella misma  $C_{ik} = -\bar{C}_{ik} \quad C_{ii} = \sum_k \bar{C}_{ik}$
- Los coeficientes  $C_{ii}$  son siempre positivos
- Los coeficientes  $C_{ik}$  ( $i \neq k$ ) son negativos o nulos
- Las autocapacidades  $\bar{C}_{ii}$  son positivas o nulas
- Las capacidades  $\bar{C}_{ik}$  ( $i \neq k$ ) son positivas o nulas

# Construcción de circuitos equivalentes: fuentes de tensión

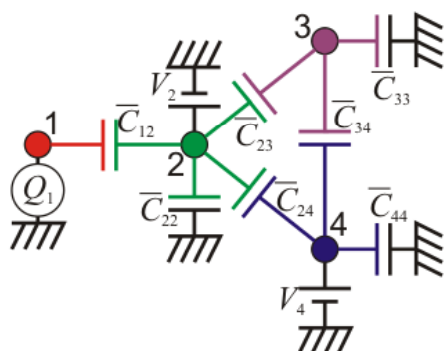
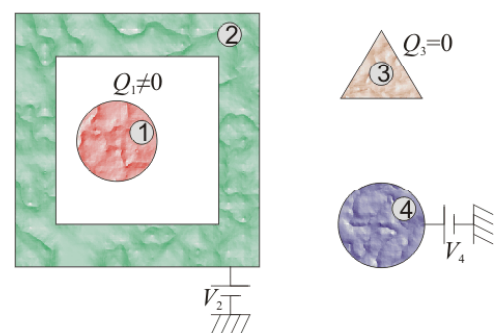
- Además de los condensadores hay que añadir fuentes de tensión para indicar aquellos conductores cuyo voltaje esté fijado



© 2008, Antonio González Fernández

# Construcción de circuitos equivalentes: *fuentes de carga*

- En ocasiones los conductores no se encuentran conectados a un generador, sino que están aislados.
- La carga de un conductor aislado permanece constante (no puede ir a ningún sitio)



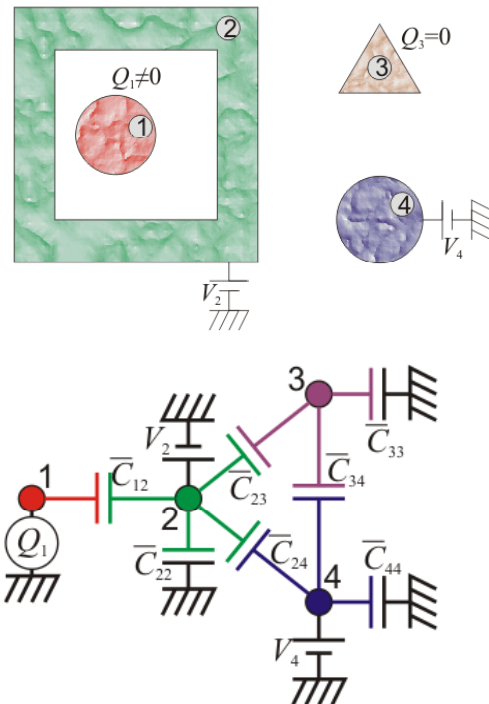
- Para representar la carga de un conductor definimos un "generador de carga" conectado al nodo correspondiente
- En el caso de carga nula, puede omitirse ( $Q_3=0$  en el ejemplo)

© 2008, Antonio González Fernández

# Construcción de circuitos equivalentes: resumen de todos los pasos

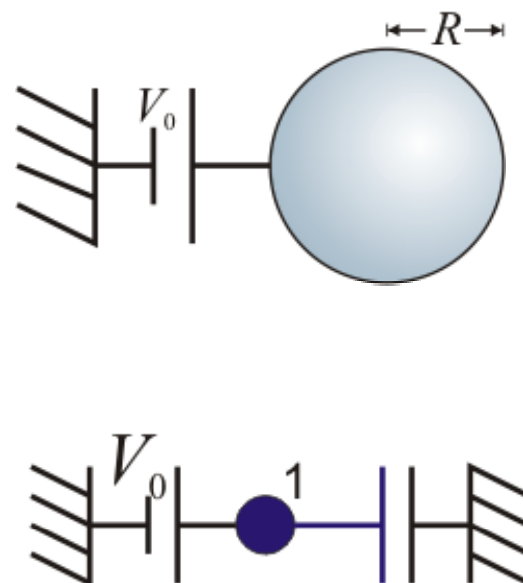
## ■ Resumiendo, los pasos son los siguientes:

- Un nodo por cada conductor
- Un condensador por cada par de conductores, de capacidad  $\bar{C}_{ik}$ . No, si  $\bar{C}_{ik}$  es nula.
- Un condensador  $\bar{C}_{ii}$  entre cada conductor y tierra. No, si  $\bar{C}_{ii}=0$
- Una fuente de tensión conectada a cada nodo a tensión constante
- Una "fuente de carga" conectada a cada nodo a carga constante (no, si está descargado)



# Construcción de circuitos equivalentes: aplicación al caso de una esfera

- En el caso de una sola esfera conductora a potencial  $V_0$ , el circuito equivalente se reduce a:
  - Un nodo, que representa a la esfera
  - Un condensador situado entre la esfera y tierra (el infinito), de capacidad
$$C = \bar{C}_{11} = C_{11} = 4\pi\epsilon_0 R$$
  - Una fuente de tensión  $V_0$ .





# Construcción de circuitos equivalentes: aplicación a un caso de dos esferas

- Dos esferas concéntricas de radios  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ), la interior a tensión  $V_1$  y la exterior cargada con  $Q_2$ , son equivalentes a:

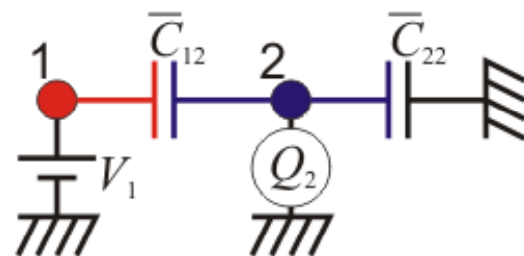
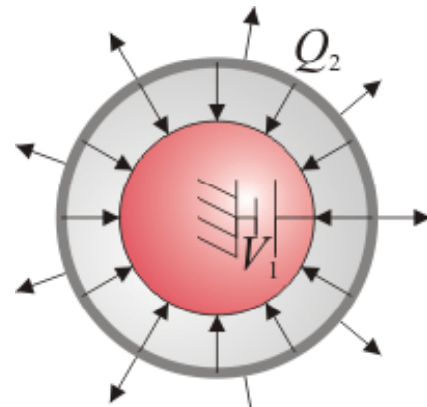
- Dos nodos
- Un condensador entre las dos esferas

$$\bar{C}_{12} = -C_{12} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

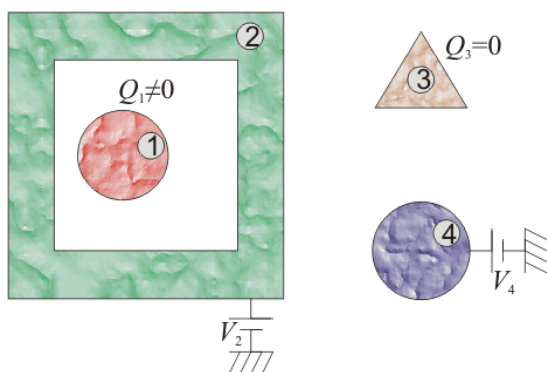
- Un condensador entre el nodo 2 y tierra

$$\bar{C}_{22} = C_{22} + C_{12} = \frac{4\pi\epsilon_0 b^2}{b-a} - \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 b$$

- Una fuente de tensión  $V_1$
- Una fuente de carga  $Q_2$ . Si  $Q_2=0$ , quedan dos condensadores en serie



# Construcción de circuitos equivalentes: aplicación a un sistema de 4 conductores

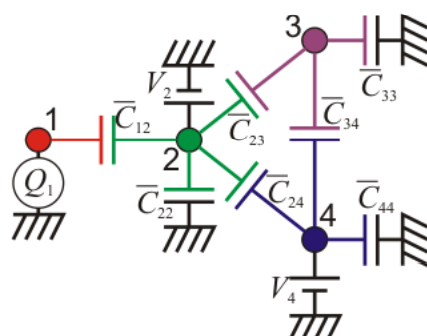


- A partir de la matriz de coeficientes de capacidad

$$\mathbf{C} = C_0 \begin{pmatrix} 9.092 & -9.093 & 0.000 & 0.000 \\ -9.093 & 15.960 & -1.568 & -1.758 \\ 0.000 & -1.563 & 3.702 & -1.330 \\ 0.000 & -1.759 & -1.337 & 4.069 \end{pmatrix}$$

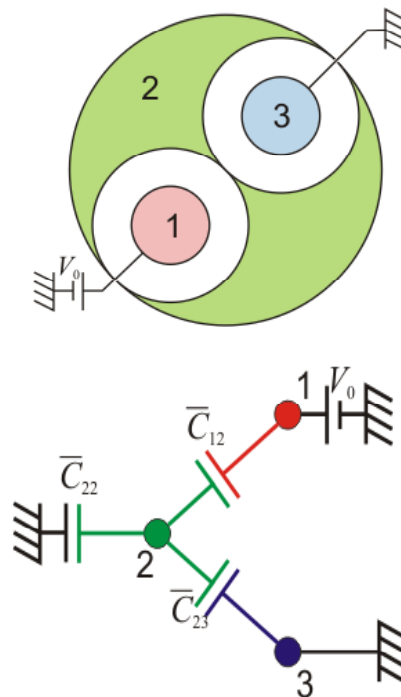
obtenemos las capacidades  
y autocapacidades

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &\approx 0 & \bar{C}_{12} &= 9.09C_0 & \bar{C}_{13} &\approx 0 & \bar{C}_{14} &\approx 0 \\ \bar{C}_{22} &= 3.54C_0 & \bar{C}_{23} &= 1.55C_0 & \bar{C}_{24} &= 1.75C_0 \\ & & \bar{C}_{33} &= 0.80C_0 & \bar{C}_{34} &= 1.33C_0 \\ & & & & \bar{C}_{44} &= 0.98C_0 \end{aligned}$$

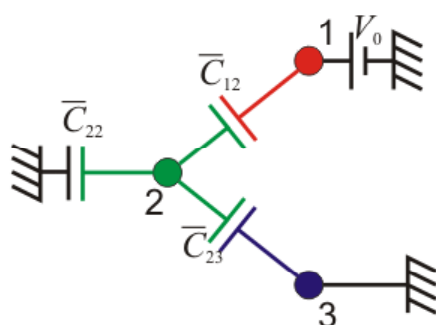


# Circuitos equivalentes en un problema concreto (3.7): planteamiento

- Tenemos un conductor esférico, de radio  $R$ , con dos huecos de radio  $R/2$ . En cada hueco hay una esfera de radio  $R/4$ . Una está a  $V_0$ , la otra a tierra. La esfera exterior está aislada y descargada, ¿cuánto valen las cargas y potenciales de cada conductor?
- El circuito equivalente contiene tres condensadores y una fuente de tensión  $V_0$



# Circuitos equivalentes en un problema concreto (3.7): solución



- La relación entre cargas y potenciales queda

$$Q_1 = 2\pi\epsilon_0 (V_1 - V_2)$$

$$Q_2 = 2\pi\epsilon_0 R (4V_2 - V_1 - V_3)$$

$$Q_3 = 2\pi\epsilon_0 (V_3 - V_2)$$

- Sustituyendo los datos

$$Q_1 = 2\pi\epsilon_0 (V_0 - V_2)$$

$$0 = 2\pi\epsilon_0 R (4V_2 - V_0 - V_3)$$

$$Q_3 = 2\pi\epsilon_0 (-V_2)$$

- Las capacidades valen

$$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{23} = \frac{4\pi\epsilon_0 (R/2)(R/4)}{(R/2) - (R/4)} = 2\pi\epsilon_0 R$$

- La autocapacidad es la de una esfera

$$\bar{C}_{22} = 4\pi\epsilon_0 R$$

- Despejando

$$V_2 = \frac{V_0}{4} \quad Q_1 = \frac{3\pi\epsilon_0 R V_0}{2} \quad Q_3 = -\frac{\pi\epsilon_0 R V_0}{2}$$

- Cuando se tiene un conjunto de conductores a distintos voltajes, se produce un campo entre ellos
- Los conductores se cargan, dependiendo de las tensiones de todos ellos
- Las cargas pueden relacionarse matemáticamente con los voltajes
- Estas relaciones se describen mediante los conceptos de capacidad de un conductor y de un condensador
- Combinando condensadores y fuentes, puede modelarse un sistema real mediante un circuito equivalente.
- A partir del análisis del circuito pueden resolverse diversos problemas reales de apariencia muy diferente

