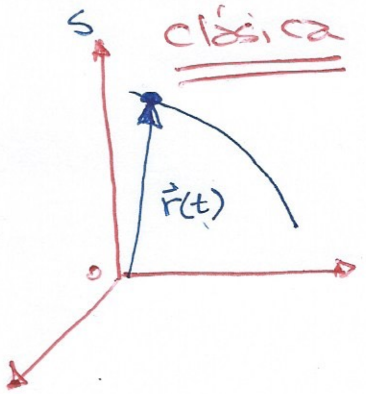
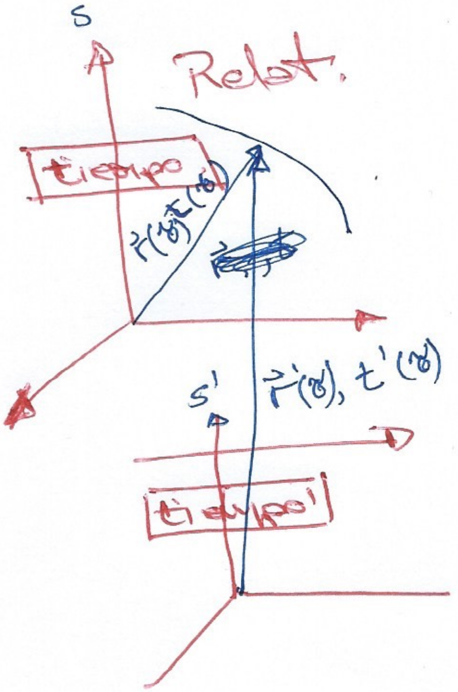
En Relatividad, el tiempo pasa a ser una coordenada más. Es decir, es característico de cada observador.

clásica



3 coordenadas espaciales (x,y,z) ó (r,θ,ϕ) ó etc. con un parámetro que es afín con la trayectoria, el cual es el tiempo (de reloj)

Relat.



3 coordenadas + el tiempo describen a cada sistema de coordenadas u observador, con un parámetro afín con la trayectoria.

cl 5

El espacio plano de 3 coord. espaciales más 1 temporal es denominado espacio-tiempo de Minkowski. cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = -d(ct) + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿de donde viene?

$$\left.\begin{aligned} dx_\mu &= (cdt, dx, dy, dz) \\ dx^\mu &= (-cdt, dx, dy, dz) \end{aligned}\right\} ds^2 = dx_\mu dx^\mu$$

Las trayectoria geodésicas se pueden obtener a partir del principio de mínima acción:

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}\, d\tau \longrightarrow \text{parámetro afín.}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{ds}{d\tau} \quad \Big\} \quad \boxed{\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = 0}$$

$$\dot{x}_\mu \equiv \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

Entonces,

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2} c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2}$$

*** Nota** : Por normalización, para 4-vectores tipo luz (nulos) $\mathcal{L} \equiv 0$ y para 4-vectores tipo tiempo $\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}$.

Veamos trayectoria nulos : $\mathcal{L} = 0$.

i) $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t, x, y, z) \Rightarrow p_t, p_x, p_y, p_z$ son conservados.

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(c\dot{t})} = -c\dot{t} = -\frac{E}{c} \leftarrow \text{constante}$$

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \leftarrow \text{de análog.}$$

$p_y = \dot{y}$

$p_z = \dot{z}$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}p_z^2$$

$$\Rightarrow E = \pm\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\, c^2}$$

$$\boxed{E = pc} \quad ; \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

El Lagrangiano nos va a permitir describir el movimiento de partículas en cualquier espacio-tiempo del cual sepamos como es su métrica.

Ejemplos: espacio-tiempos estáticos:
Esta clase de E-T posee una métrica diagonal y sus coordenadas no dependen explícitamente del tiempo coordenado t.

$$ds^2 = -f(r)\,c^2dt^2 + g(r)\,dr^2 + h(r)\,d\Omega^2$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$d\Omega^2 = \sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2$$

Más general aún, ~~espa~~ E-T con simetría esférica: $h(r) = r^2$.

$$ds^2 = -f(r)\,c^2dt^2 + g(r)\,dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Minkoswki: $f(r) = 1$, $g(r) = 1$

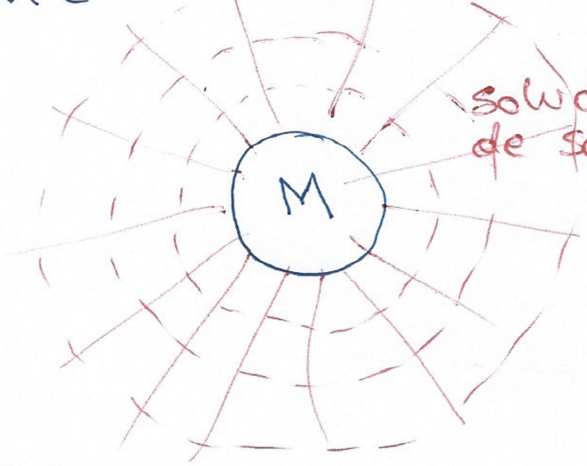
$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

según la relatividad general, el E-T se ve afectado por la presencia de fuentes masivas, i.e., los cuerpos curvan el espacio-tiempo.

$$\underbrace{G_{\mu\nu}}_{\text{geometría}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{masa-energía}}$$

Ecs. del campo Gravit. de Einstein.

- La primera solución que se encuentra es la llamada solución estática con simetría esférica de vacío, i.e., se refiere al espacio-tiempo exterior a una fuente masiva esférica



solución de Schwarzschild

$$f(r) = \frac{1}{g(r)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Nota: Es muy común encontrar textos y paper's que utilizan las unidades geometrizadas.

ej: $C = G = 1 \Rightarrow$ llevar las magnitudes a una sola dimensión,

i) $C = 1 \Rightarrow$ $3.000.000\left(\frac{Km}{s}\right) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{1\,[s] = 3\times 10^{8}\,[m]}$$

ii) $G = 1 \Rightarrow$ $6.67\times 10^{-11}\left[\frac{m^3}{kg\, s^2}\right] = 1$

$$6.67\times 10^{-11}\left[\frac{m}{kg}\cdot\frac{m^2}{s^2}\right] = 1$$

$$6.67\times 10^{-11}\left[\frac{m}{kg}\cdot\frac{\cancel{m^2}}{9\times 10^{16}\,\cancel{m^2}}\right] = 1$$

$$\frac{6.67\times 10^{-11}}{9\times 10^{16}}\left[\frac{m}{kg}\right] = 1$$

$$\boxed{1\,[kg] = 0{,}741\times 10^{-27}\,[m]}$$

Ejemplo: $M_\odot = 2\times 10^{30}\,[kg] = 2\times 10^{30}\cdot 0{,}741\times 10^{-27}\,[m]$

$$\boxed{M_\odot = 1.482\times 10^{3}\,[m] \approx 1{,}5\ Km}$$