Universidad de Valparaíso
CHILE

PAUTA / CORRECCIÓN.

Prueba III
Métodos Matemáticos
Licenciatura en Física - 2018
IPGG

Obs.: La prueba es de carácter individual.

(I) Conmutador

Sea $\left[\widehat{\mathbf{A}},\widehat{\mathbf{B}}\right]=\alpha$. Demuestre que:

$$\exp\left(\widehat{\mathbf{A}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\exp\left(-\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{B}}+\alpha$$

Ayuda: Expanda la expresión de la izquierda hasta cierto orden (Ud. decide) y reescriba dicha expansión en términos de conmutadores.

(II) Misceláneos

---

a).- Si $\widehat{\mathbf{B}}\left|b\right\rangle=b\left|b\right\rangle$, demuestre que $\widehat{\mathbf{B}}^{-1}\left|b\right\rangle=\frac{1}{b}\left|b\right\rangle$

b).- Demuestre que $\det\left(\widehat{\mathbf{B}}\right)=e^{Tr\left(\ln\widehat{\mathbf{B}}\right)}$. Recordar que el determinante y la traza de un operador son independientes de la base.

c).- Los operadores $\left\{\widehat{\mathbf{A}}_1,\widehat{\mathbf{A}}_2,\widehat{\mathbf{A}}_3,...,\widehat{\mathbf{A}}_N\right\}$ son todos unitarios. Demuestre que el producto de ellos también es unitario.

d).- ¿Cúales son las condiciones para que la siguiente identidad se cumpla?:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x\right)\psi\left(x\right)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}\left(k\right)\tilde{\psi}\left(k\right)\,dk$$

Obs.:Las funciones $\varphi\left(x\right)$ y $\psi\left(x\right)$ son las transformadas de Fourier de $\tilde{\varphi}\left(k\right)$ y $\tilde{\psi}\left(k\right)$ respectivamente.

(III) Expansión de un operador

Sea el operador:

$$\widehat{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

demuestre que $\exp\left(x\widehat{\mathbf{A}}\right)=\widehat{\mathbf{1}}\cosh\left(x\right)+\widehat{\mathbf{A}}\sinh\left(x\right)$.

Obs.: $\cosh\left(z\right)=\sum_{n\geq0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ y $\sinh\left(z\right)=\sum_{n\geq0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(IV) Proyección en autovectores de posición

Evalúe el siguiente bracket:

$$\left\langle x \left| \left[\exp\left(\alpha \widehat{\mathbf{x}}\right), \widehat{\mathbf{k}} \right] \right| \varphi \right\rangle$$

α_1

1) $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \left(1+\hat{A}+\frac{\hat{A}^2}{2}+\dots\right)\hat{B}\left(1-\hat{A}+\frac{\hat{A}^2}{2}-\dots\right)$

$= \hat{B}-\hat{B}\hat{A}+\frac{\hat{B}\hat{A}^2}{2}+\hat{A}\hat{B}-\hat{A}\hat{B}\hat{A}+\frac{\hat{A}\hat{B}\hat{A}^2}{2}+\frac{\hat{A}^2\hat{B}}{2}-\frac{\hat{A}^2\hat{B}\hat{A}}{2}+\frac{\hat{A}^2\hat{B}\hat{A}^2}{4}$
$+\dots$

Reordenando

$= \hat{B}+\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}+\frac{\hat{B}\hat{A}^2}{2}-\hat{A}\hat{B}\hat{A}+\frac{\hat{A}^2\hat{B}}{2}+\frac{\hat{A}\hat{B}\hat{A}^2}{2}-\frac{\hat{A}^2\hat{B}\hat{A}}{2}+\dots$

Obs. $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=[\hat{A},\hat{B}]=\alpha$

Obs. si $[A,B]\alpha \Rightarrow [\hat{A}^2,\hat{B}]=2\alpha\hat{A}$

$\Downarrow$

$\hat{A}^2\hat{B}-\hat{B}\hat{A}^2=2\alpha\hat{A}$

$\Downarrow$

$\hat{B}\hat{A}^2=\hat{A}^2\hat{B}-2\alpha\hat{A}$

Obs. $\frac{\hat{B}\hat{A}^2}{2}+\frac{\hat{A}^2\hat{B}}{2}-\hat{A}\hat{B}\hat{A} = \frac{\hat{A}^2\hat{B}}{2}-\alpha\hat{A}+\frac{\hat{A}^2\hat{B}}{2}-\hat{A}\hat{B}\hat{A}$

$= \hat{A}^2\hat{B}-\hat{A}\hat{B}\hat{A}-\alpha\hat{A}$

$= \hat{A}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})-\alpha\hat{A}$

$= A[\hat{A},\hat{B}]-\alpha\hat{A}$

$= \alpha\hat{A}-\alpha\hat{A}=0$

etc. Los siguientes términos se anulan...

α_2

OTRA FORMA

Se tiene que:

$[\hat{A},\hat{B}]=\alpha$

$$[\hat{A}^2,\hat{B}] = \hat{A}\underbrace{\cancel{[\hat{A},\hat{B}]}}_{\alpha} + \underbrace{\cancel{[\hat{A},\hat{B}]}}_{\alpha}\hat{A} = 2\alpha\hat{A}$$

$$[\hat{A}^3,\hat{B}] = [\hat{A}^2\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}^2\underbrace{\cancel{[\hat{A},\hat{B}]}}_{\alpha} + \underbrace{\cancel{[\hat{A}^2,\hat{B}]}}_{2\alpha\hat{A}}\hat{A}$$

$$= 3\alpha\hat{A}^2$$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{A}^n,\hat{B}] = n\alpha\hat{A}^{n-1} \Longrightarrow \hat{A}^n\hat{B}-\hat{B}\hat{A}^n = n\alpha\hat{A}^{n-1}$$

Ahora bien

$$\Downarrow$$

$$\hat{A}^n\hat{B} = \hat{B}\hat{A}^n + n\alpha\hat{A}^{n-1}$$

$$e^{\hat{A}}\hat{B} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{\hat{A}^n\hat{B}}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\left[\frac{\hat{B}\hat{A}^n}{n!} + \frac{n\alpha\hat{A}^{n-1}}{n!}\right]$$

$$= \hat{B}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\hat{A}^n}{n!} + \alpha\sum_{n\geqslant 0}\frac{n\hat{A}^{n-1}}{n!}$$

Obs. $n\hat{A}^{n-1} = \frac{d}{d\hat{A}}\hat{A}^n \wedge \sum_{n\geqslant 0}\frac{\hat{A}^n}{n!} = e^{\hat{A}}$

$\therefore$

$$e^{\hat{A}}\hat{B} = \hat{B}e^{\hat{A}} + \alpha\frac{d}{d\hat{A}}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\hat{A}^n}{n!} = \hat{B}e^{A} + \alpha\frac{d}{d\hat{A}}e^{\hat{A}}$$

$$= \hat{B}e^{\hat{A}} + \alpha e^{\hat{A}}$$

$$\therefore\ e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = (\hat{B}e^{\hat{A}} + \alpha e^{\hat{A}})e^{-\hat{A}} = \hat{B}\underbrace{\cancel{e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}}}}_{\hat{\mathbb{I}}} + \alpha\underbrace{\cancel{e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}}}}_{\hat{\mathbb{I}}} = \hat{B}+\alpha$$

$\frac{\alpha}{3}$

2) a) se tiene que $\hat{B}|b\rangle = b|b\rangle$

entonces:

$$\hat{B}|b\rangle = b|b\rangle \quad / \hat{B}^{-1}$$

$$\underbrace{\hat{B}^{-1}\hat{B}}_{\hat{\mathbb{1}}}|b\rangle = b\hat{B}^{-1}|b\rangle$$

$$|b\rangle = b\hat{B}^{-1}|b\rangle \Longrightarrow \frac{1}{b}|b\rangle = \hat{B}^{-1}|b\rangle$$

b) El determinante y la traza son independientes de la base. Es fácil demostrar que

$\det(\hat{B}) = b_1 \cdots b_N$ (producto de los valores propios de $\hat{B}$ en un espacio vectorial N-dim)

Por otro lado

$$b_i = e^{\ln b_i} \quad (i = 1, \ldots, N)$$

$$\therefore b_1 \cdots b_N = e^{\ln b_1} \cdots e^{\ln b_N} = e^{\ln b_1 + \cdots + \ln b_N}$$

Se conoce también que $f(\hat{B})|b\rangle = f(b)|b\rangle$

$$\mathrm{Tr}\, f(\hat{B}) = f(b_1) + \cdots + f(b_N)$$

$$\therefore e^{\ln b_1 + \cdots + \ln b_N} = e^{\mathrm{Tr} \ln \hat{B}}$$

Finalmente $\det(\hat{B}) = e^{\mathrm{Tr} \ln \hat{B}}$

c) $\hat{A}_i\hat{A}_i^\dagger = \hat{\mathbb{1}}$ $(i=1,\dots,N)$, entonces

$$(\hat{A}_1\hat{A}_2\dots\hat{A}_{N-1}\hat{A}_N)(\hat{A}_1\hat{A}_2\dots\hat{A}_{N-1}\hat{A}_N)^\dagger$$

$$=(\hat{A}_1\hat{A}_2\dots\hat{A}_{N-1}\hat{A}_N)(\hat{A}_N^\dagger\hat{A}_{N-1}^\dagger\dots\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_1^\dagger)$$

$$=(\hat{A}_1\hat{A}_2\dots\hat{A}_{N-1})\underbrace{\hat{A}_N\hat{A}_N^\dagger}_{\hat{\mathbb{1}}}(\hat{A}_{N-1}\dots\hat{A}_2\hat{A}_1)$$

$$=(\hat{A}_1\hat{A}_2\dots)\underbrace{\hat{A}_{N-1}\hat{A}_{N-1}^\dagger}_{\hat{\mathbb{1}}}(\dots\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_1^\dagger)$$

$$\vdots$$

$$=\hat{A}_1\underbrace{\hat{A}_2\hat{A}_2^\dagger}_{\hat{\mathbb{1}}}\hat{A}_1$$

$$=\hat{A}_1\hat{A}_1^\dagger=\mathbb{1}$$ $\therefore$ $(\hat{A}_1\dots\hat{A}_N)$ es unitario

d) Sea $\langle\varphi|\psi\rangle=\langle\varphi|\hat{\mathbb{1}}|\psi\rangle$ si $\hat{\mathbb{1}}=\int_{-\infty}^{\infty}|x\rangle\langle x|dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\langle\varphi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx=\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|\varphi\rangle^*\langle x|\psi\rangle dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(x)\,\psi(x)\,dx$$

Ahora si $\hat{\mathbb{1}}=\int_{-\infty}^{\infty}|k\rangle\langle k|dk$

$$\langle \varphi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle\varphi|k\rangle\langle k|\psi\rangle\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \langle k|\varphi\rangle^{*}\langle k|\psi\rangle\, dk$$

α_s

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}^{*}(k)\,\tilde{\psi}(k)\, dk$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{*}(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}^{*}(k)\,\tilde{\psi}(k)\,dk$$

si $\varphi(x)$ y $\tilde{\varphi}(k)$ son reales se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(k)\,\tilde{\psi}(k)\,dk \quad //$$

3) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ luego

$$e^{x\hat{A}} = \mathbb{1} + x\hat{A} + \frac{x^2\hat{A}^2}{2!} + \frac{x^3\hat{A}^3}{3!} + \frac{x^4\hat{A}^4}{4!} + \frac{x^5\hat{A}^5}{5!} + \dots$$

se observa que

$$\hat{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow \hat{A}^{2n} = \hat{\mathbb{1}} \ //$$

se cumple también que $\hat{A}^3 = \hat{A}^2\hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A}^{2n+1} = \hat{A}$ //

α_6

$$\therefore\ e^{x\hat{A}} = \mathbb{1} + x\hat{A} + \frac{x^2\hat{A}^2}{2!} + \frac{x^3\hat{A}^3}{3!} + \frac{x^4\hat{A}^4}{4!} + \frac{x^5\hat{A}^5}{5!} + \dots$$

$$= \left(\hat{\mathbb{1}} + \frac{x^2}{2!}\hat{A}^2 + \frac{x^4\hat{A}^4}{4!} + \dots\right) + \left(x\hat{A} + \frac{x^3\hat{A}^3}{3!} + \frac{x^5\hat{A}^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\hat{\mathbb{1}} + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\hat{A}$$

$$= \hat{\mathbb{1}}\cosh(x) + \hat{A}\,\mathrm{senh}(x) \,//$$

4) $$\langle x|[e^{\alpha\hat{x}}, \hat{k}]|\varphi\rangle = \langle x|e^{\alpha\hat{x}}\hat{k}|\varphi\rangle - \langle x|\hat{k}e^{\alpha\hat{x}}|\varphi\rangle$$

$$= e^{\alpha x}\langle x|\hat{k}\underset{\hat{\mathbb{1}}}{\uparrow}|\varphi\rangle - \langle x|\hat{k}\underset{\hat{\mathbb{1}}}{\uparrow}e^{\alpha\hat{x}}|\varphi\rangle$$

$$= e^{\alpha x}\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|\hat{k}|k\rangle\langle k|\varphi\rangle dk - \int_{-\infty}^{\infty}\langle x|\hat{k}|k\rangle\langle k|e^{\alpha\hat{x}}|\varphi\rangle dk.$$

$$= e^{\alpha x}\int_{-\infty} k\langle x|k\rangle\langle k|\varphi\rangle dk - \int_{-\infty}^{\infty} k\langle x|k\rangle\langle k|e^{\alpha\hat{x}}|\varphi\rangle dk$$

<u>Obs.</u> $k\langle x|k\rangle = k\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = -i\frac{d}{dx}\langle x|k\rangle$

$\frac{\alpha}{7}$

$$\langle x|[e^{\alpha\hat{x}},\hat{k}]|\varphi\rangle = e^{\alpha x}\left(-i\frac{d}{dx}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|k\rangle\langle k|\varphi\rangle dx$$

$$+\left(i\frac{d}{dx}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\langle x|k\rangle\langle k|e^{\alpha\hat{x}}|\varphi\rangle dk$$

$$= -ie^{\alpha x}\frac{d}{dx}\langle x|\varphi\rangle + i\frac{d}{dx}\langle x|e^{\alpha\hat{x}}|\varphi\rangle$$

$$= -ie^{\alpha x}\frac{d\varphi(x)}{dx} + i\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\varphi(x)\right)$$

$$= \cancel{-ie^{\alpha x}\varphi'(x)} + i\alpha e^{\alpha x}\varphi(x) + \cancel{ie^{\alpha x}\varphi'(x)}$$

$$= i\alpha e^{\alpha x}\varphi(x)$$