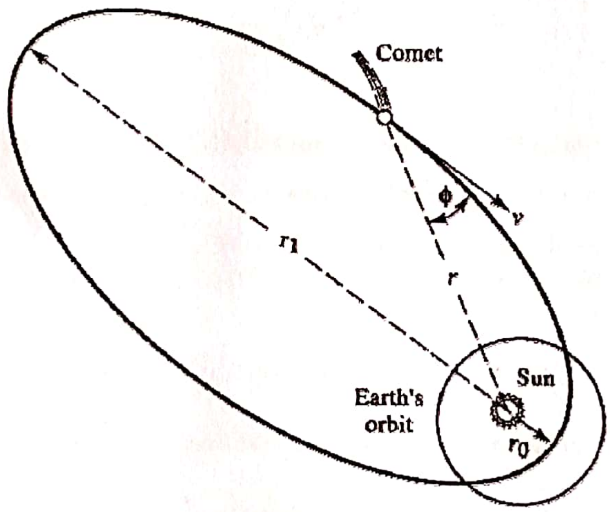
Universidad de Valparaíso CHILE

Prueba Módulo II - Forma A
Mecánica Intermedia
Licenciatura en Física - 2021[1]

Problema I

Se observa experimentalmente que un cometa tiene una rapidez v cuando está a una distancia r del Sol y su dirección de movimiento forma un ángulo ϕ con el vector de radio del Sol (ver figura). La masa del Sol es conocida, M_S.



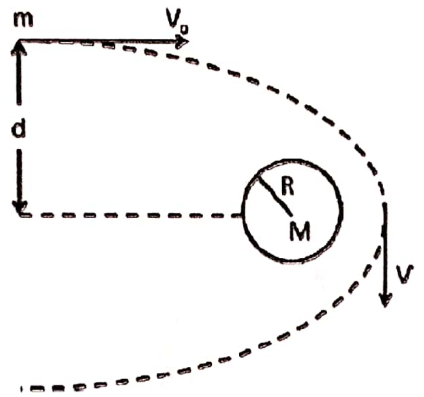
1. (35%) Encontrar la excentricidad de la órbita del cometa en términos de los datos experimentales, r, v y ϕ.
2. (35%) Determine la máxima velocidad tangencial que puede alcanzar el cometa.
3. (30%) Determine el período del cometa.

---

[1]**Hora de inicio:** 18:30 hrs.
Hora de término: 22:00 hrs.
Envíe el documento en formato pdf

Problema II

Un asteroide de masa m viene desde muy lejos (trayectoria parabólica) acercándose a un planeta de masa M y radio R, en cierto punto de la trayectoria tiene una velocidad v_0 perpendicular a la distancia d, distancia conocida como parámetro de impacto (ver figura).



1. (15%) Determine el momentum angular del asteroide en la posición mostrada en la figura.
2. (20%) La velocidad mínima v_0 para que el asteroide no choque con el planeta.
3. Si el asteroide estando en su punto más cercano al planeta se divide en dos partes, con una de ellas moviéndose en dirección hacia el centro del planeta con rapidez $\frac{v_0}{2}$ y con una masa de $\frac{m}{2}$, entonces:

   (a) (25%) Determine la velocidad $\overrightarrow{V}_A$ del otro trozo del asteroide y el ángulo respecto a la horizontal.

   (b) (20%) Obtenga la expresión final para la energía mecánica de este trozo en función de M, m, R y d.

   (c) (20%) Este trozo ¿orbitará o no al planeta?.

Problema III

Una partícula de masa m y momentum angular ℓ describe una trayectoria dada por la expresión:

$$\theta = \sqrt{\frac{r}{c}} \qquad (c = cte.)$$

1. (30%) Determine la fuerza central asociada a esta trayectoria.

2. (35%) Halle el potencial central asociado a la fuerza determinada en el ítem anterior.

3. (35%) Demuestre que para este potencial no existen trayectorias circulares.

FORMA B

$\not\alpha_1$

PROBL. I

1) Se cumple que $l = |\vec{r} \times \vec{p}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = m r v \operatorname{sen}\phi$

dado que $E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M_s}{r}$ (con los datos de r y v dados como conocidos)

luego $\epsilon = \left[1 + \frac{2 E l^2}{m k^2}\right]^{1/2}$, con $k = G m M_s$

$\Downarrow$

∴ con l y E conocidos se cumple que

$$\epsilon = \left[1 + \frac{2\cancel{m}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{G M_s}{r}\right) \cancel{m^2} r^2 v^2 \operatorname{sen}^2\phi}{\cancel{m^3} G^2 M_s^2}\right]^{1/2}$$

$\Downarrow$

$$\epsilon = \left[1 + 2\left(\frac{v^2}{2} - \frac{G M_s}{r}\right) \frac{r^2 v^2 \operatorname{sen}^2\phi}{G^2 M_s^2}\right]^{1/2}$$

2) El perihelio del cometa ocurre cuando que $r = r_0$ $\frac{\alpha}{2}$

$\Downarrow$

m alcanza su máxima velocidad

se conoce que $r_{min} = r_0 = \dfrac{\alpha}{1+\epsilon}$

donde $\alpha = \dfrac{l^2}{mk} = \dfrac{l^2}{Gm^2 M_s} = \dfrac{m^2 r^2 v^2 \operatorname{sen}^2\phi}{Gm^2 M_s}$

$\Downarrow$

$$\alpha = \frac{r^2 v^2 \operatorname{sen}^2\phi}{G M_s} \quad ✓$$

$\therefore$ $$r_0 = \frac{r^2 v^2 \operatorname{sen}^2\phi}{G M_s (1+\epsilon)} \quad ✓$$ con ϵ calculado en (1).

Sea v_0 la velocidad de m en el perihelio, en este punto

$$l = m v_0 r_0$$ y dado que $l = cte$

entonces:

$$\cancel{m} v_0 r_0 = \cancel{m} r v \operatorname{sen}\phi$$

$\Downarrow$

$$v_0 = v \operatorname{sen}\phi \frac{r}{r_0}$$

Máxima velocidad

α_3

3) El periodo del cometa se determina de la 3ª ley de Kepler:

$$T = \left[\frac{4\pi^2}{GM_s} a^3\right]^{1/2}$$

donde $2a = r_1 + r_0 = \frac{\alpha}{1-\epsilon} + \frac{\alpha}{1+\epsilon} = \frac{2\alpha}{1-\epsilon^2}$

$\therefore \quad a = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2}$ (α, ϵ ya se conocen de (1) y (2))

$$\therefore \quad T = \left[\frac{4\pi^2}{GM_s} \frac{\alpha^3}{(1-\epsilon^2)^3}\right]^{1/2}$$

PROBL. III

α_4

1) $\theta = \sqrt{\frac{r}{c}} \Rightarrow r = c\theta^2 \Rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{1}{c\theta^2}$

en la ec. de la trayectoria reemplazamos para hallar $F(r)$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{1}{u^2}F(1/u)$$

$$\Downarrow$$

donde $\frac{du}{d\theta} = -\frac{2}{c\theta^3} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{6}{c\theta^4} = \frac{6}{c}\frac{c^2}{r^4} = 6cu^2$

$$\Downarrow$$

$\therefore$ $$6cu^2 + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{1}{u^2}F(1/u)$$

$$\Downarrow$$

$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\ell^2}{m}\left(6cu^4 + u^3\right)$ y dado que $u = \frac{1}{r}$

$$\Downarrow$$

$$F(r) = -\frac{\ell^2}{m}\left(\frac{6c}{r^4} + \frac{1}{r^3}\right)$$

α_5

2) El potencial se obtiene de forma directa

$$V(r) = -\frac{\ell^2}{m}\left(\frac{6c}{r^3} \cdot A + \frac{B}{r^2}\right) + D$$

con A, B y D constantes por determinar. Se debe cumplir luego que

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{\ell^2}{m}\left(-\frac{6c}{r^4} 3A - \frac{2B}{r^3}\right)$$

por comparación $A = \frac{1}{3}$ y $B = \frac{1}{2}$. Por otro lado $\Delta V(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr$

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr$$

$$\downarrow$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr' + \cancel{V(\infty)}^{\,0}$$

Por comparación $V(\infty) = D = 0$.

Finalmente:

$$V(r) = -\frac{\ell^2}{m}\left(\frac{2c}{r^3} + \frac{1}{2r^2}\right)$$

$\frac{4}{6}$

3) El potencial efectivo está dado por:

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{l^2}{m}\left(\frac{2c}{r^3} + \frac{1}{2r^2}\right)$$

si existe una trayectoria circular, esta ocurre en r_0 tq $\frac{dV(r_0)}{dr} = 0$ (mínimo de $V_{eff}(r)$)

Ahora bien:

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{l^2}{m}\left(\frac{6c}{r^4} + \frac{1}{r^3}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{6l^2c}{mr_0^4} = 0 \Rightarrow r_0 = \infty$$

$$\Downarrow$$

$\therefore$ no existe ninguna órbita circular para un r_0 finito.

B1

PROBLEMA (II en forma A - III en forma B)

1) $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = m v_0 d$

15%

2) En el pto. más cercano (para que no choque)

20% $r = R$

$$\Downarrow$$

$$L = cte = m v_0 d = m v R \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

Por otro lado dado que $E=0$, en el pto. más cercano se cumple que:

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{R}$$

$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

reemplazando en (*)

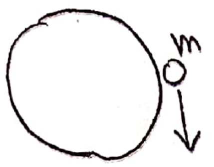
$$v_0 = \frac{R}{d}\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

3)

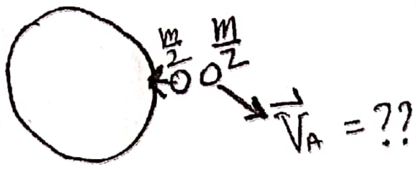
B2

a) 25%

justo Antes



justo Despues



El momentum del asteroide se conserva

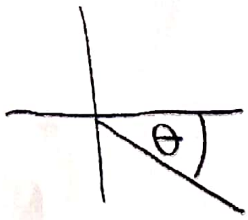
$$-mv\hat{j} = -\frac{m}{2}\frac{v_0}{2}\hat{\imath} + \vec{V}_A\frac{m}{2}$$

con $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$\therefore \vec{V}_A = \frac{v_0}{4}\hat{\imath} - v\hat{j} = \frac{v_0}{4}\hat{\imath} - \sqrt{\frac{2GM}{R}}\hat{j}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{R}{d}\sqrt{\frac{2GM}{R}}\hat{\imath} - \sqrt{\frac{2GM}{R}}\hat{j}$$

$$= \sqrt{\frac{2GM}{R}}\left(\frac{1}{4}\frac{R}{d}\hat{\imath} - \hat{j}\right)$$



$$\theta = tg^{-1}\left(-\frac{4d}{R}\right)$$ //

B3

3.b) 20%
$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)V_A^2 - \frac{GmM}{2R}$$

donde $V_A = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\left[\frac{R^2}{16d^2} + 1\right]^{1/2}$

$$\Downarrow$$

$$V_A^2 = \frac{2GM}{16Rd^2}\left(R^2 + 16d^2\right) //$$

$$E = \frac{1}{32}\frac{GMm}{Rd^2}\left(R^2 + 16d^2\right) - \frac{GmM}{2R}$$

$$= \frac{1}{32}\frac{GMmR}{d^2} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}} - \cancel{\frac{GmM}{2R}}$$

$$E = \frac{1}{32}\frac{GmMR}{d^2} //$$

3.c) E del trozo es mayor que cero
20% su órbita será abierta y nunca volverá al planeta.