Guía de ejercicios N° 3
Matrices

1. Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

   (a) Calcula $A.B$; $A.C$ y $A.(B+C)$. ¿Qué propiedad aparenta cumplirse?

   (b) Prueba que se cumple en general (trabaja con matrices 2 x 2 genéricas).

2. (a) En el conjunto de matrices 4 x 4, encuentre la matriz elemental M que describe la operación *“intercambie las filas 1 y 3 y las filas 2 y 4 de la matriz identidad I”.*

   (b) Pruebe que la matriz obtenida M cumple: $M^2 = I$

3. Encuentre los valores de a y b para que el producto de las siguientes matrices **conmute**, es decir para que $M.N = N.M$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. (a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices B (distintas de la matriz nula y de la identidad) que conmutan con la matriz A.

   (b) Ocupando la misma matriz A, encontrar todas las matrices B tal que $A.B = O$ siendo $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (**la matriz nula 2 x 2**).

5. Sea el polinomio

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$$

   y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Calcula $p(A)$.

6. Encuentra una matriz 2 x 2, distinta de la nula y de la identidad tal que:

   (a) Se cumpla $A^2 = A$. Calcula en ese caso: A^3, A^4.
   ¿qué confirmas? (en ese caso A se llama **matriz idempotente**)

   (b) Se cumpla $A^2 = I$.

7. En el conjunto de números reales R se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad de absorción: $a.0 = 0 \quad \forall \, a \in R$
Propiedad Hankeliana: Si $a.b = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$ o $b = 0$

¿Se cumple la propiedad hankeliana para matrices 2 x 2? Compruébalo multiplicando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Dada una matriz 2 x 2 genérica, esto es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Encuentra su **matriz inversa a la derecha**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

planteando simplemente

$$A.A^{-1} = I$$

y resolviendo el sistema en x, y, z, t así obtenido (observa que no es un sistema 4 x 4).

(b) Prueba que esa misma matriz sirve como **inversa a la izquierda,**

$$A^{-1}.A = I$$

(c) ¿Es en todos los casos la **matriz inversa a la derecha** de una matriz cuadrada idéntica a la **inversa a la izquierda**? Prúebalo.

(d) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que el sistema planteado tenga solución? Esa condición define lo que llamaremos **matrices invertibles (o matrices regulares).**

9. (a) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

encuentra su matriz inversa A^{-1} llevando la matriz ampliada $(A \mid I)$ a la forma $(\, I \mid A^{-1})$ mediante las habituales operaciones elementales con filas ya utilizadas al resolver sistemas.

(b) Para cada una de esas operaciones, encuentra la **matriz elemental** E_i, siendo i la i-ésima operación elemental aplicada.

(c) Comprueba que $A^{-1} = E_n. \ldots . E_2. E_1$. ¿Por qué?

10. **Definición:** *Una matriz se llama **ortogonal**, cuando se cumple que su matriz inversa es igual a su matriz traspuesta. Esto es,* $A^t = A^{-1}$

(a) Prueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

son ortogonales.

(b) Trabajando de forma genérica con una matriz $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$
encuentra la condición general para que la matriz A sea ortogonal.

(c) Interpretando a las filas (x_i, y_i) como coordenadas de puntos, identifica la posición de esos puntos en el plano. ¿Te das cuenta ahora porque se llaman matrices ortogonales?

11. Encuentra la matriz inversa U^{-1} de la **matriz triangular superior**

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mediante "operaciones elementales de filas" aplicadas a la matriz ampliada $(U \mid I)$ ¿Qué tipo de matriz es U^{-1} ?

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
encuentra la matriz E que transforma a la matriz A en una matriz triangular superior U, esto es $EA = U$. Finalmente encuentra la matriz L que permite expresar A como producto de una **matriz triangular superior *U* ("Upper")** y una **triangular inferior *L* ("Lower").** Esto es:

$$A = L.U$$