Leyes de la Óptica a partir del electromagnetismo

Como ya vimos, a partir de las ecuaciones de Maxwell, los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de onda

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\vec{r},t) = 0 \qquad (1)$$

por lo tanto podemos escribir como soluciones

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \wedge \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (2)$$

donde se asumen ondas planas y monocromáticas.

- son ondas planas, porque son soluciones a la ec. (1) asumiendo que $\vec{\nabla}^2$ se escribe en coordenadas cartesianas.
- son monocromáticas, porque tienen UN solo valor de ω.

Las expresiones (2) son solución de (1), PERO aún no podemos decir que sean solución a las ecuaciones de Maxwell. Veamos qué nos dicen las ecs. de Maxwell.

i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$. Reemplazando (2)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right)\cdot \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

pero $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, entonces

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \hat{i}\cdot\vec{E}_0 \left(i k_x e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right) + \hat{j}\cdot\vec{E}_0 \left(i k_y e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right) + \hat{k}\cdot\vec{E}_0 \left(i k_z e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right)$$

$$= i\left(E_{0x} k_x + E_{0y} k_y + E_{0z} k_z \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \text{ es } \perp \text{ a } \vec{k} \;//$$

ii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$. Claramente esto implica que $\vec{B}$ es $\perp$ a $\vec{k}$.

iii) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Reemplazando (2) obtenemos:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\hat{i}(\partial_y E_z - \partial_z E_y) - \hat{j}(\partial_x E_z - \partial_z E_x) + \hat{k}(\partial_x E_y - \partial_y E_x) = i\omega\vec{B}$$

$$\hat{i}(ik_y E_z - ik_z E_y) - \hat{j}(ik_x E_z - ik_z E_x) + \hat{k}(ik_x E_y - ik_y E_x) = i\omega\vec{B}$$

$$i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \ //$$

Entonces, $\vec{B}$ es $\perp$ a $\vec{E}$ y junto con $\vec{k}$ forman una tríada.
La ecuación (iv)

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

no genera una nueva relación (compruébelo).

En resumen:
Los campos electromagnéticos en un medio sin fuentes (recuerde que $\rho=0$ y $\vec{J}=\vec{0}$ en las ecs. de Maxwell que usamos) se pueden escribir:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \ ; \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

donde

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0 \ , \quad \vec{k}\cdot\vec{B}=0 \ , \quad \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \ . \quad // \qquad (3)$$

Cuando una O.E.M. cruza la interfaz entre dos medios (con valores distintos de μ y ε) sabemos que cambia su velocidad de propagación (ya que $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$). Pero ocurren otros efectos, debido a las condiciones de borde que satisfacen estos campos.

Las condiciones de borde son:

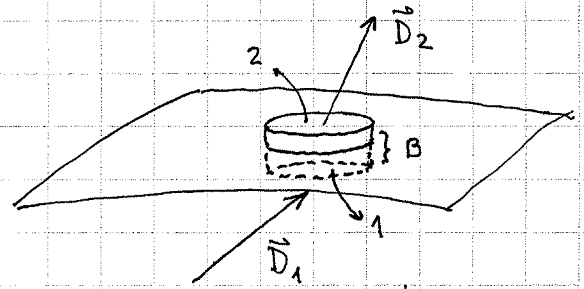
$$(i)\quad \epsilon_1 E_1^{\perp} = \epsilon_2 E_2^{\perp} \qquad\qquad (ii)\quad B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$$

$$(iii)\quad E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \qquad\qquad (iv)\quad \frac{B_1^{\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_2^{\parallel}}{\mu_2} \qquad (4)$$

¿Las recuerdan? Recordemos cómo se deduce (i).
En medios dieléctricos, la ley de Gauss se escribe como

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q\big|_{enc\,S}$$

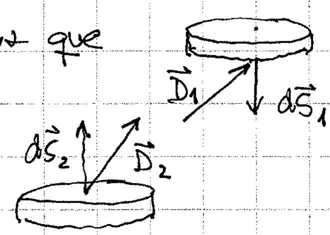
donde $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, y $Q|_{enc\,S}$ es la carga libre encerrada por S.



Como NO existe carga en la interfaz entonces

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int \vec{D}_1\cdot d\vec{S}_1 + \int_2 \vec{D}_2\cdot d\vec{S}_2 + \int \vec{D}\cdot d\vec{S}_B = 0$$

- $\int \vec{D}_1\cdot d\vec{S}_1 = -D_1^{\perp} A$ ya que



$(D_1^{\parallel}\cdot d\vec{S}_1 = 0)$

- $\int \vec{D}_2\cdot d\vec{S}_2 = D_2^{\perp} A$

- $\int \vec{D}\cdot d\vec{S}_B \Rightarrow 0$ ya que podemos hacer tender a cero la altura de la pastilla.

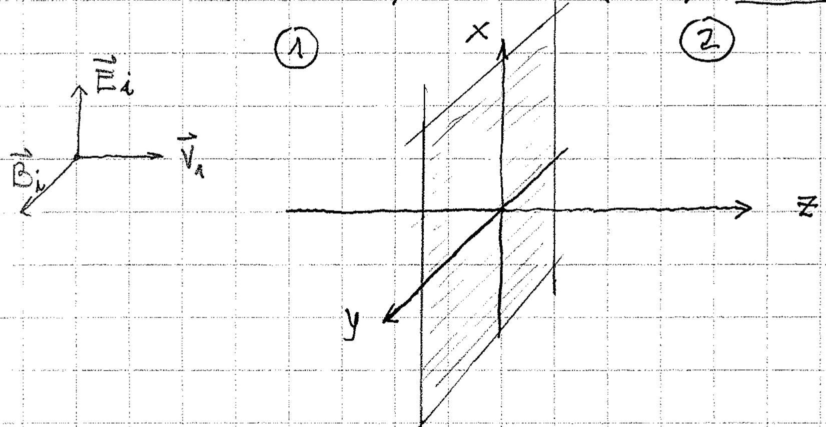
entonces, nos queda

$$D_1^{\perp} = D_2^{\perp} \Rightarrow \epsilon_1 E_1^{\perp} = \epsilon_2 E_2^{\perp} \quad //$$

Usando las otras ~~3~~ ecuaciones de Maxwell (en medios) en forma integral, se obtienen las condiciones (ii) - (iv). (compruébenlo!)

Incidencia Normal

Supongamos que una O.E.M. plana incide desde la izquierda sobre un plano que separa dos medios (del medio 1 al 2). Asignemos las coordenadas xy a ese plano, ubicado en $z = 0$.



Asumiremos también que el campo electromagnético incidente está descrito por:

$$\vec{E}_i = \hat{\imath} E_{0i} e^{i(k_i z - \omega t)} \quad ; \quad \vec{B}_i = \hat{\jmath} B_{0i} e^{i(k_i z - \omega t)} \qquad (5)$$

y que avanza paralelo al eje z. con velocidad $V_1 = \omega / k_i$. Una onda reflejada en el plano también se moverá en el medio 1 y tendrá la misma velocidad, luego es válido escribir

$$\vec{E}_r = \hat{\imath} E_{0r} e^{i(-k_r z - \omega t)} \quad \wedge \quad \vec{B}_r = -\hat{\jmath} B_{0r} e^{i(-k_r z - \omega t)} \qquad (6)$$

y por último existirá una onda transmitida

$$\vec{E}_t = \hat{\imath}\, E_{ot}\, e^{i(k_t z - \omega t)} \quad \wedge \quad \vec{B}_t = \hat{\jmath}\, B_{ot}\, e^{i(k_t z - \omega t)} \qquad (7)$$

donde a partir de (3)

$$B_{oi} = E_{oi}/V_1 \quad , \quad B_{or} = E_{or}/V_1 \quad y \quad B_{ot} = E_{ot}/V_2 \qquad (8)$$

Tomando en cuenta las condiciones de borde (4), en particular (iii) y (iv) obtenemos

$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot} \quad \wedge \quad E_{oi} - E_{or} = \beta E_{ot} \qquad (9)$$

donde

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 V_1}{\mu_2 V_2} \qquad (10)$$

Explicación: como la incidencia es normal ($\vec{V}_1$ ó $\vec{k}$ es $\perp$ al plano) y los campos son paralelos al plano, entonces los campos sólo tienen componente $\parallel$. Esto cambiará cuando veamos la incidencia oblicua.

Combinando (9) y (10) se obtiene (hacer!!)

$$E_{ot} = \frac{2}{1+\beta} E_{oi} \quad \wedge \quad E_{or} = \frac{1-\beta}{1+\beta} E_{oi} \qquad (11)$$

experimentalmente $\mu_1 \simeq \mu_2 \equiv \mu \Rightarrow \beta = V_1/V_2$ entonces

$$E_{ot} = \frac{2V_2}{V_1+V_2} E_{oi} \quad \wedge \quad E_{or} = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} \qquad (12)$$

Y como la intensidad está dada por

$$I = \frac{1}{2} \epsilon V E_o^2 \qquad (13)$$

las fracciones de energía incidente, reflejada y transmitida se pueden escribir como

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad (14)$$

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{v_2}{v_1}\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)^2 = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2} \qquad (15)$$

llamados coeficientes de reflexión (R) y de transmisión (T). Debería comprobar éstas relaciones además de lo siguiente:

$$R + T = 1 \qquad (16)$$