Continuando la ecuación previa clase.

$$P_3[r] = E^2 r^3 - L^2 r + L^2 r_s \quad ; \quad b = L/E$$

$$= E^2\left(r^3 - b^2 r + b^2 r_s\right)$$

parametro de impacto.

b: esta definido en terminos de 2 constantes de movimiento

en el curso se apuntaran a soluciones exactas.

el polinomio: $r^3 - b^2 r + b^2 r_s = 0$

forma canonica $\Rightarrow$ $4r^3 - g_2 r - g_3 = 0$

en este caso $g_2 = 4b^2 > 0 \quad ; \quad g_3 = -4b^2 r_s < 0$

$\rightarrow 4r^3 - g_2 r + |g_3| = 0$

Identidad

$$4\sin^3\theta - 3\sin\theta + \sin 3\theta = 0$$

$r = z\sin\theta$

incluimos el multiplicador de Lagrange λ

$$\lambda 4 z^3 \sin^3\theta - \lambda g_2 z \sin\theta + \lambda |g_3| = 0$$

$\rightarrow$ $\lambda z^3 = 1 \rightarrow 1/z^3 = \lambda$

$\lambda g_2 z = 3 \rightarrow g_2 \frac{1}{z^2} = 3 \Rightarrow z = \sqrt{\frac{g_2}{3}}$

$\lambda |g_3| = \sin 3\theta \rightarrow \frac{1}{z^3}|g_3| = \left(\frac{3}{g_2}\right)^{3/2}|g_3| = \sin 3\theta$

$n \in \mathbb{Z}$

teniendo así

$$\lambda = \frac{1}{z^3} \; ; \; z = \sqrt{\frac{g_2}{3}} \; ; \; |g_3| \left(\frac{3}{g_2}\right)^{3/2} = \sin 3\theta = \sin(3\theta \pm 2n\pi)$$

despejando:
$$3\theta = \operatorname{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{27\,|g_3|^2}{(g_2)^3}}\right] + 2n\pi$$

$$\theta = \frac{1}{3}\operatorname{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{27\,|g_3|^2}{(g_2)^3}}\right] + \frac{2}{3}n\pi$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{2}{3}n\pi$$

ahora a reemplazar:

$$g_2 = 4b^2$$
$$|g_3| = 4b^2 r_s$$

$$z = \sqrt{\frac{g_2}{3}} = \sqrt{\frac{4b^2}{3}} = \frac{2b}{3}\sqrt{3}$$

$$\wedge \quad \theta_0 = \frac{1}{3}\operatorname{Arcsin}\left[\sqrt{\frac{27 \cdot \cancel{16}\, \cancel{b^4}\, r_s^2}{\underset{4}{\cancel{64}} \cdot \cancel{b^6}^{\,2}}}\right] = \frac{1}{3}\operatorname{ArcSin}\sqrt{\frac{27}{4}\,\frac{r_s^2}{b^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{ArcSin}\left[\frac{3\sqrt{3} \cdot r_s}{2 \cdot b}\right]$$

$\{ r = 2\sin\theta \}$

así las soluciones son $\quad r_0 = 2\sin\theta_0$

$$r_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \, \sin[\theta_0]$$

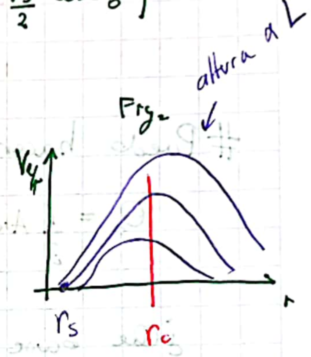
$$r_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \, \sin\left[\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \left(-\frac{1}{2}\sin\theta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_0 \right)$$

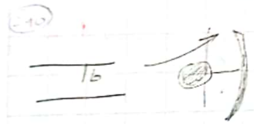
$$r_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \, \sin\left[\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \left(-\frac{1}{2}\sin\theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_0 \right)$$

$$\sin[\theta_0 + \alpha] = \sin\theta \cos\alpha + \cos\theta_0 \sin\alpha$$

$$\sin\left[\frac{2\pi}{3}\right] = \sin[60°] = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \quad \cos\left[\frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left[\frac{4\pi}{3}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \quad \cos\left[\frac{4\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2}$$





Todo queda definido por el parametro de impacto (ver Fig 2)

nota: el b crece al disminuir la energia $\quad b = \frac{L}{E}$

- existe un valor crítico para el parametro de impacto, cuando $\quad r = r_c = \frac{3}{2} r_s$

en el max acercamiento y orbita circular:

$$r_c^3 - b_c^2 r_c + b_c^2 r_s = 0$$

$$\frac{27}{8} r_s^3 - b_c^2 \frac{3}{2} r_s + b_c^2 r_s = 0$$

$$r_c^3 - b_c^2 r_c + b_c^2 r_s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{27}{8}(r_s)^3 - b_c^2\left(\frac{3}{2}r_s - r_s\right) = 0.$$

$$\Rightarrow b_c^2 = \frac{27}{4} r_s^2 \Rightarrow \boxed{b_c = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r_s}$$

esto se conecta directamente a la sombra de un agujero negro.

Puedo hacer aparecer el bc.

$$\theta_0 = \frac{1}{3} \operatorname{ArcSin}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{r_s}{b}\right] = \frac{1}{3}\operatorname{ArcSin}\left[\frac{b_c}{b}\right]$$

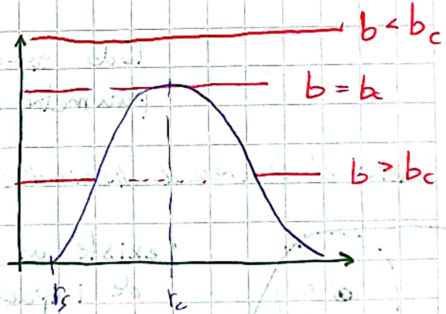
¿Qué ocurre?

$\sin\varphi \in [-1, +1]$

1) $b < b_c \rightarrow \boxed{\frac{b_c}{b} > 1}$

2) $b = b_c \rightarrow \frac{b_c}{b} = 1$

3) $b > b_c \rightarrow \frac{b_c}{b} < 1$



tenemos $\operatorname{ArcSin}\left[\frac{b_c}{b} > 1\right]$ por tanto no tendríamos solución Real para este caso.

$$\Downarrow$$

$r_0, r_1 \in \mathbb{C}$ con $r_0^* = r_1$

Caso de $b = b_c$; orbita critica.

entonces: para $b = b_c$

i) $\theta_{0c} = \frac{1}{3} \text{Arc} \sin[1.] = \frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow r_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} b_c \sin\theta_{\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3} b_c \sin\left[\frac{\pi}{6}\right]$$

$$r_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_s\right) \sin\left[\frac{\pi}{6}\right] = 3 \cdot r_s \frac{1}{2} = \frac{3}{2} r_s = \boxed{r_c}$$

r_{critico}, wow!

ii)

$$r_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} b_c \left(-\frac{\sin\theta_0}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta_0\right)$$

$$= 3 r_s \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3 r_s \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{2} r_s = \boxed{r_c}$$

osea que en $b = b_c \rightarrow$ las dos primeras soluciones son iguales $r_0 = r_1$

iii) $r_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} b_c \left(-\frac{1}{2} \sin\theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta_0\right) = 3 r_s \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -3 r_s$

Trayectoria Crítica;

la orbita se acerca infinitamente al $r_{\text{crítico}}$;

la ecuación de movimiento:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r^2}{L}\sqrt{E^2 - V_{eff}[r]} = \pm \frac{r^2}{L}\sqrt{\frac{P_3[r]}{r^3}}$$

polinomio que resolvimos

check que $E^2 - V_{eff} = \frac{P_3(r)}{r^3}$

1) cambio de variable $u = \frac{1}{r} \rightarrow du = -\frac{dr}{r^2}$

2) polinomio $P_3 = E^2(r-r_0)(r-r_1)(r-r_2)$

con el cambio de variable:

$$P_3[u] = E^2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_1}\right)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_2}\right)$$

$$\therefore \frac{P_3(r)}{r^3} \rightarrow u^3 P_3[u] = u^3 E^2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_1}\right)\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{|u_2|}\right)$$

siempre tendremos una raiz negativa; como calculamos previamente

$$u^3 P_3[u] = u^3 E^2 \left(\frac{u_0 - u}{u u_0}\right)\left(\frac{u_1 - u}{u u_1}\right)\left(\frac{|u_2| + u}{u|u_2|}\right)$$

$$u^3 P_3[u] = E^2 \frac{(u_0 - u)(u_1 - u)(|u_2| + u)}{u_0\, u_1\, |u_2|}$$

reemplazando en la raiz:

$$\frac{dr}{r^2}\frac{1}{d\phi} = \pm\frac{1}{L}\sqrt{\frac{P_3(r)}{r^3}}$$

$$\frac{du}{d\phi} = \mp\frac{1}{L}\sqrt{u^3 P_3(r)} = \mp\frac{1}{L}\sqrt{\frac{E^2(u_0-u)(u_1-u)(|u_2|+u)}{u_0\,u_1\,|u_2|}}$$

$$= \mp\left(\frac{1}{b}\right)\sqrt{\dots}$$

$b = \frac{L}{E}$

luego en esta orbita trayectoria critica

$$u_0 = u_1 = \frac{1}{r_c} = u_c = \frac{2}{3r_s}$$

$$u_2 = -\frac{1}{3r_s} \quad ; b \to b_c$$

$$\frac{du}{d\phi} = \mp\frac{1}{b_c}\frac{1}{\sqrt{u_0 u_1 |u_2|}}\sqrt{(u_0-u)(u_1-u)(|u_2|+u)}$$

$$= \mp\frac{1}{b_c}\frac{1}{\sqrt{(u_c)^2|u_2|}}\sqrt{(u_c-u)^2(|u_2|+u)}$$

$$= \mp\boxed{\frac{1}{b_c|u_c|\sqrt{|u_2|}}}\,|u_c-u|\sqrt{(|u_2|+u)}$$

$$\frac{du}{d\phi} = \mp\boxed{\alpha}\,|u_c-u|\sqrt{(|u_2|+u)}$$

$$\frac{du}{d\phi} = \pm \alpha \, |u_c - u| \sqrt{(|u_2| + u)} = \pm \alpha \left| u - \frac{2}{3r_s} \right| \sqrt{u + \frac{1}{3r_s}}$$

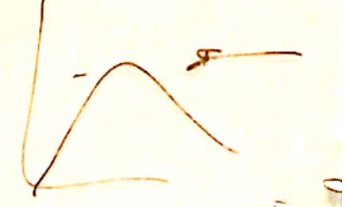
a Chandrasekhar en su viaje en barco a Cambridge, tras semanas de cálculo se le ocurrió el cambio de variable.

$$u = -\frac{1}{3r_s} + \frac{1}{r_s} \operatorname{Tanh}^2\left(\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)\right)$$

Seguir con foto de pizarra

chequear que $\frac{\alpha}{\sqrt{r_s}} = 1$.

$$\frac{d\mu}{d\phi} = \mp\alpha\left(\mu - \frac{2}{3r_s}\right)\sqrt{\mu + \frac{1}{3r_s}}$$



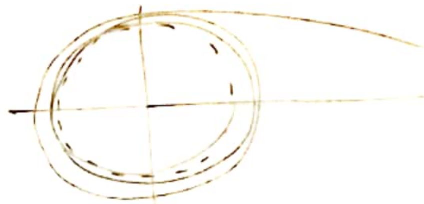
Cambio de variable $\quad \mu = -\frac{1}{3r_s} + \frac{1}{r_s}\operatorname{Tanh}^2 \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)$

i) $\mu + \frac{1}{3r_s} = \frac{1}{r_s}\operatorname{Tanh}^2 \frac{1}{2}(\phi-\phi_0)$

ii) $\mu - \frac{2}{3r_s} = \mu + \frac{1}{3r_s} - \frac{1}{r_s} = \frac{1}{r_s}\left(\operatorname{Tanh}^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0) - 1\right) = -\frac{1}{r_s}\operatorname{Sech}^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)$

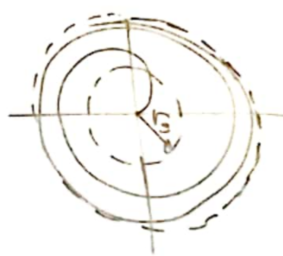
iii) $\mp\alpha\left(\mu - \frac{2}{3r_s}\right)\sqrt{\mu + \frac{1}{3r_s}} = \pm\frac{\alpha}{r_s^{3/2}}\operatorname{Sech}^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\cdot\operatorname{Tanh}\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)$

1ª especie:



iv) $\frac{d\mu}{d\phi} = \frac{\cancel{2}}{r_s}\operatorname{Tanh}\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{Sech}^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)$

2º especie



$\therefore \frac{1}{\cancel{r_s}}\operatorname{Tanh}\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\operatorname{Sech}^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0) = \frac{\alpha}{\cancel{r_s}\cdot\sqrt{r_s}}\operatorname{Sech}^2\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)\operatorname{Tanh}\frac{1}{2}(\phi-\phi_0)$

Chequear que $\frac{\alpha}{\sqrt{r_s}} = 1$

Si escogemos $\operatorname{Tanh}^2\frac{1}{2}\phi_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \mu \to 0 \ (r \to \infty) \Rightarrow \phi = 0$

* Tarea: Graficar la órbita crítica (0.5 pto para prueba 1) de primera y segunda especie

Viernes 28 Abril

Escaneado con CamScanner

luego si escogemos $\tanh^2 \frac{1}{2}\phi_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow u \to 0 \therefore r \to \infty$

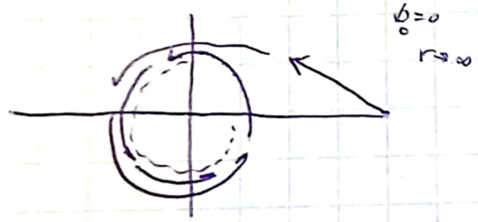
o sea $\phi = 0$.

\# Tarea Graficar la orbita critica (0.5 pts prueba 1 de aqui al viernes 28.)

por correo grafica.

- grafico polar.
- La que viene por derecha y izquierda (primera y 2da especie)
- ver chandrasekar: orbitas criticas nulas

1era especie



spirling in

2da especie.

darle una condición inicial arbitraria.

(el hace una extension analitica del origen)