Universidad de Valparaíso
CHILE

Certámen

Mecánica Intermedia (FIS 311)

Licenciatura en Física mención Astronomía

IPGG

PARTE I : Conceptos

Indica si las siguientes propuestas son (V)erdaderas o (F)alsas
Obs.: Dos erradas=Una correcta.

1).- ...V... Si $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ entonces $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{0}$.

2).- ...V... Si $\vec{a}\cdot\vec{b}_1 = \vec{a}\cdot\vec{b}_2$ entonces $\left(\vec{b}_2 - \vec{b}_1\right) \perp \vec{a}$.

3).- ...V... Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ entonces $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a}$

4).- ...V... Tres vectores linealmente dependientes no pueden formar una base del espacio tridimensional.

5).- ...F... Todo sólido rígido sobre el que actúan una serie de fuerzas externas cuya suma es cero está en equilibrio estático. No traslada pero puede rotar

6).- ...F... Un sólido bajo la acción de tres fuerzas sólo puede estar en equilibrio si las fuerzas son paralelas.

7).- ...F... La fuerza de acción es igual a la reacción sólo si los dos cuerpos que interactúan no están acelerados.

8).- ...V... Una escalera en situación de movimiento inminente se apoya en un suelo con rozamiento y en una pared lisa. La reacción total con el suelo no tiene la dirección de la escalera.

9).- ...F... Si una fuerza horizontal actúa sobre un cuerpo situado sobre una superficie rugosa, horizontal y origina una situación de movimiento inminente, la reacción de la superficie de apoyo es perpendicular a la superficie.

10).- ...V... La fuerza de rozamiento que actúa sobre un cuerpo en situación de equilibrio siempre es proporcional a la componente de la reacción perpendicular a la superficie de apoyo.

11).- ...V... En un movimiento circular uniformemente acelerado la aceleración normal siempre es mayor que la aceleración tangencial.

12).- ..F.... Si $\vec{v} \times \vec{a} = \vec{0}$, entonces la partícula siempre describe una trayectoria circular. (se requiere $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$)

13).- ..F.... La aceleración de una partícula lanzada verticalmente hacia arriba cambia de sentido cuando la partícula llega al punto más alto.

14).- ..F.... El alcance máximo de un movimiento parabólico es proporcional a la velocidad inicial del cuerpo. $\propto v_0^2$

15).- ..F.... Si un sistema de referencia se traslada con aceleración constante respecto a otro sistema de referencia, entonces la velocidad de una partícula observada desde ambos sistemas es siempre la misma.

16).- ..F.... Si el módulo de la velocidad de una partícula es constante, la aceleración debe ser cero. Ej. MCU

17).- ..V.... Si la dirección de la velocidad de un cuerpo es constante el movimiento es rectilíneo.

18).- ..F.... Toda partícula que tiene una aceleración de módulo constante efectúa un movimiento circular.

19).- ..F.... Si lanzamos una pelota de forma idéntica (mismo ángulo y misma velocidad inicial) en la Tierra y en la Luna, el alcance horizontal del movimiento parabólico resultante será el mismo.

20).- ..V.... Si en un movimiento la componente tangencial de la aceleración es nula en todo instante, la partícula efectúa necesariamente un movimiento circular uniforme.

21).- ..F.... Si en un movimiento circular el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{v}$ es constante y diferente de cero, el movimiento es circular con aceleración angular constante.

22).- ..F.... Para que un sólido rígido esté en equilibrio es necesario que exista un punto respecto del cual el torque de cada fuerza que actúa sobre el sólido sea nulo.

23).- ..F.... En un movimiento parabólico la aceleración tangencial es siempre nula.

24).- ..F.... Visto desde un sistema inercial, el movimiento de un objeto va siempre en la dirección de la fuerza resultante.

25).- ..V.... La aceleración de una partícula medida en dos sistemas de referencia con movimiento relativo de traslación uniforme, es la misma.

26).- ..F.... El incremento de la energía cinética siempre es, en módulo, igual al incremento de la energía potencial. solo si $W_{NC} = 0$

27).- ..V.... La aceleración de Coriolis de una partícula que se mueve paralelamente al eje de rotación del sistema móvil es nula.

28).- ..V.... En un movimiento de traslación de un sólido rígido se cumple que el vector de posición relativa entre dos puntos cualesquiera del sólido rígido ($\vec{r}_i - \vec{r}_j$) es constante respecto de un sistema de referencia fijo.

29).- ..F.... El trabajo realizado por una fuerza variable en el tiempo que modifica el movimiento de una partícula, es igual a la variación de la aceleración de esta.

30).- ..V.... Si disparamos un cañón desde una plataforma que puede retroceder libremente, el alcance máximo será menor que si lo disparamos cuando está firmemente anclado al suelo.

31).- ..F... La aceleración tangencial durante un movimiento parabólico siempre es menor que la aceleración normal.

32).- ..F.... Sobre un cuerpo actúa una fuerza variable hasta conseguir una determinada aceleración, si en ese instante deja de actuar la fuerza la aceleración se mantiene con el valor alcanzado.

33).- ..V.... Una fuerza ficticia es un efecto percibido por un observador situado en un sistema de referencia no inercial cuando analiza su sistema como si fuese un sistema de referencia inercial.

34).- ..F.... La tercera ley de Newton implica que la aceleración producida en un cuerpo durante su interacción con otro, es igual y opuesta la aceleración producida en el primero.

35).- ..V.... Una partícula con energía mecánica menor que cero sometida a una fuerza gravitatoria, no podrá alejarse infinitamente del centro de la fuerza.

36).- ..V... Si el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo, las variaciones de la energía cinética y potencial son iguales en módulo.

37).- ..V... En un movimiento parabólico existe como máximo un punto en el que la aceleración tangencial es nula.

38).- ..F.... El momento angular de una partícula en movimiento rectilíneo es cero respecto de cualquier punto del espacio.

39).- ..F.... El centro de masa de un sistema de dos partículas en movimiento, nunca puede estar en reposo.

40).- ..V... Para una partícula sometida a una fuerza conservativa, los movimientos periódicos pueden producirse en la vecindad de un mínimo de energía potencial.

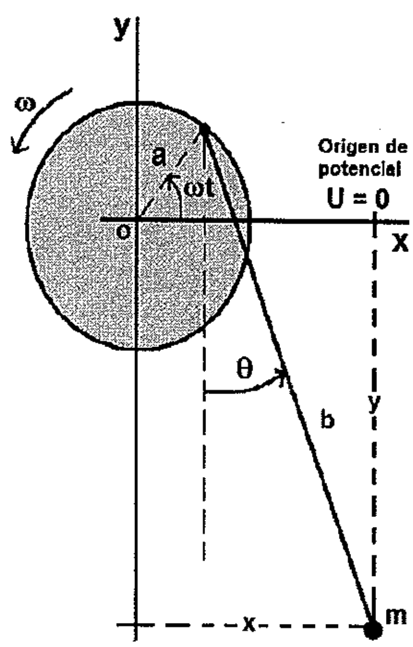
PARTE II : Mecánica no Newtoniana

PROBLEMA I : Un punto de masa M describe, en el plano XY, una trayectoria dada por la ecuación $y = f(x)$ cuando está sometida a un potencial que sólo depende de y. Si v_0 es la proyección de la velocidad sobre el eje X, entonces:

- Hallar una expresión general del potencial en función de f.
- Aplique la expresión obtenida en el item anterior al caso de que la ecuación de la curva sea $ay^2 = x^3$, siendo a una constante arbitraria.

PROBLEMA II : El punto de soporte para un péndulo simple de longitud b y masa pendular m se mueve sobre un anillo (de masa despreciable) de radio a con velocidad angular constante ω (ver figura).

- Obtener la expresión en coordenadas cartesianas de la velocidad y la aceleración para la masa m.
- Usando las ecuaciones de Lagrange, obtener también la aceleración angular para θ.
- Halle el Hamiltoniano para este problema.
- Determine la existencia de cantidades conservadas.



(*) $y = f(x)$

$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ V(\vec{r}) = V(y) \\ \dot{x} = v_0 \end{array}\right\}$ Condiciones

Partiendo del Lagrangiano

$$L = \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(y)$$

Las respectivas ec. de Lagrange son las siguientes (p/cada coord.)

a) $\frac{d}{dt}(M\dot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x} = cte = v_0$ (consistente con la condición, obvio si se mira L, x es una coord. cíclica).

Análogamente

b) $\frac{d}{dt}(M\dot{y}) = -\frac{dV}{dy}$

de la (ec.) (b) podemos hallar el siguiente resultado por integración:

$$V(y) = C - M\int \ddot{y}\, dy$$; siendo C una cte. arbitraria

Por otra parte

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx}\dot{x} = v_0 \frac{df}{dx}$$

y

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \frac{df}{dx}\right) = v_0 \frac{d^2 f}{dt\,dx} = v_0 \frac{d}{dx}\frac{df}{dt}$$

$$\ddot{y} = v_0 \frac{d}{dx}\dot{y} = v_0^2 \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Reemplazando en la integral, se obtiene:

$$V = C - Mv_0^2 \int \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\, dy$$

Para el caso $y^2 = \frac{x^3}{a} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$

$$\frac{df}{dx} = y' = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{ax}} = \frac{3}{4a^{2/3}}\, y^{-1/3}.$$

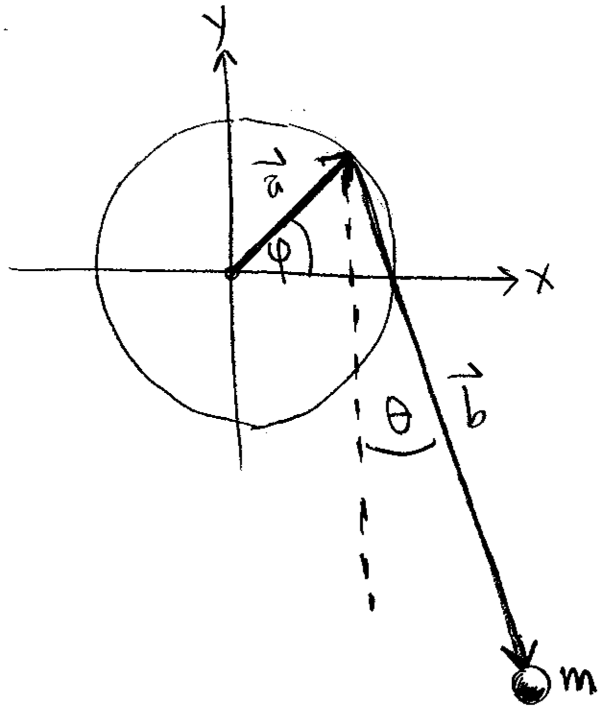
luego

$$V(y) = C - \frac{3Mv_0^2}{4\,a^{2/3}} \underbrace{\int y^{-1/3}\,dy}_{\frac{3}{2}y^{2/3}}$$

$$\Downarrow$$

$$V(y) = \tilde{C} - \frac{9}{8} M v_0^2 \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}$$

cte. que agrega
la ultima integración



Posición en coord. cartesianas:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = \vec{a} + \vec{b}$$

donde $\vec{a} = a\cos\varphi\,\hat{\imath} + a\,\text{sen}\varphi\,\hat{\jmath}$

$\vec{b} = b\,\text{sen}\theta\,\hat{\imath} - b\cos\theta\,\hat{\jmath}$

luego $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = (a\cos\varphi + b\,\text{sen}\theta)\hat{\imath} + (a\,\text{sen}\varphi - b\cos\theta)\hat{\jmath}$

$\therefore$ por comparación

$x = a\cos\varphi + b\,\text{sen}\theta$

$y = a\,\text{sen}\varphi - b\cos\theta$.

La velocidad de la masa está dada por

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(-a\dot{\varphi}\,\text{sen}\varphi+b\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\imath}+(a\dot{\varphi}\cos\varphi+b\dot{\theta}\,\text{sen}\theta)\hat{\jmath}$$

Obs. $\varphi=\omega t$

$\dot{\varphi}=\omega$

$$\vec{v}=(-a\omega\,\text{sen}\,\omega t+b\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\imath}+(a\omega\cos\omega t+b\dot{\theta}\,\text{sen}\theta)\hat{\jmath}$$

Entonces

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(-a\omega^2\cos\omega t+b\ddot{\theta}\cos\theta-b\dot{\theta}^2\text{sen}\,\theta)\hat{\imath}$$

$$+(-a\omega^2\text{sen}\,\omega t+b\ddot{\theta}\,\text{sen}\theta+b\dot{\theta}^2\cos\theta)\hat{\jmath}$$

Hallando el Lagrangiano. En coord. cartesianas este está dado por:

$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(y)$, donde de la figura se tiene que:

$V(y) = -mgy = mg (a \operatorname{sen}\varphi - b\cos\theta)$

Por otro lado

$\dot{x} = -a\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + b\dot{\theta}\cos\theta$

$\dot{y} = a\dot{\varphi}\cos\varphi + b\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$

luego

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 w^2 \operatorname{sen}^2\varphi - 2abw\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + b^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$$
$$+ a^2 w^2 \cos^2\varphi + 2abw\dot{\theta}\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + b^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= a^2 w^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2abw\dot{\theta}\underbrace{\left[\cos\varphi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\right]}_{\operatorname{sen}(\theta-\varphi)}$$

$$= a^2 w^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2abw\dot{\theta}\operatorname{sen}(\theta - wt)$$

$\therefore$

$$L = \frac{1}{2} m \left[a^2 w^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2abw\dot{\theta}\operatorname{sen}(\theta - wt)\right] - mg\left[a\operatorname{sen} wt - b\cos\theta\right]$$

Sólo hay una variable generalizada libre

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \theta} = mabw\dot{\theta}\cos(\theta - wt) - mgb\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mb^2\ddot{\theta} + mabw(\dot{\theta} - w)\cos(\theta - wt)$$

$$\Downarrow$$

con lo que se obtiene la ec. de Lagrange respectiva:

$$\ddot{\theta} - \frac{w^2 a}{b}\cos(\theta - wt) + \frac{g}{b}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

aceleración angular para θ

Para este problema el Hamiltoniano está dado por la siguiente expresión:

$$H = \Pi_\theta \dot{\theta} - L$$

siendo $\Pi_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta} + mabw\,\mathrm{sen}(\theta - wt)$

$$\Pi_\theta \dot{\theta} = mb^2\dot{\theta}^2 + mabw\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta - wt)$$

luego

$$H = \pi_\theta \dot{\theta} - L$$

$$H = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 + mg\left[a \operatorname{sen} \omega t - b \cos\theta\right]$$

$$H \neq E$$

En ste probleme no existen cantidads conservadas