Métodos Matemáticos I

Guía III

Licenciatura en Física

*IPGG*

---

1).- Sean $w_1$ y $w_2$ las raíces cúbicas de la unidad distintas de 1. Demuestre que satisfacen:

a).- La ecuación $z^2 + z + 1 = 0$.
b).- $w_1 w_2 = 1$.
c).- $w_1 = w_2^2$.
d).- La igualdad $\left(a + bz + cz^2\right)\left(a + cz + bz^2\right) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ para $a, b, c$ reales.

---

2).- Encuentre, si existe, un complejo $z$ tal que $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |1 - z|$

---

3).- Demuestre que si $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ entonces $\operatorname{Im}(z) = 0$ ó $|z| = 1$.

---

4).- Dado los complejos 0, $1 + 2i$ y $1 - i$, determine un complejo $z$ tal que junto a los complejos mencionados, formen un paralelógramo. ¿Es un rectángulo?.

---

5).- Describa el lugar geométrico de los puntos $z$ que cumplen $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z - z_1}{z_2}\right) = 0$, si $z_1$ y $z_2$ son complejos no nulos.

---

6).- Demuestre que todo complejo $z$ que cumpla $|z| = |1 + z| = 1$ es raíz cúbica no real de 1.

---

7).- ¿En qué vector se transforma $\left(-\sqrt{3} + 3i\right)$ al girarlo $\frac{\pi}{2}$?. ¿Qué ángulo es necesario girarlo para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?.

---

8).- Demostrar la identidad de Lagrange, para $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

**Indicación:** Considerar el número complejo $z=(a+ib)(c+id)$ y hallar su módulo de dos modos diferentes.

---

9).- Determinar los valores $x$, $y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la igualdad $x+iy=(x-iy)^2$.

---

10).- Probar que las raíces n-ésimas de la unidad distintas de 1 satisfacen la ecuación:

$$1+z+z^2+...+z^{n-1}=0$$

---

11).- ¿Es cierto que $z^2=|z|^2$?. Si lo es, demuestre esta identidad. si no lo es, ¿para qué valores de $z$ es cierto?

---