Empleo de notación indicial en igualdades

Cuando se expresan igualdades de cantidades vectoriales o tensoriales se puede emplear notación compacta, indicial o matricial. De esta manera, por ejemplo, la igualdad de dos tensores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se puede indicar de cualquiera de estas tres maneras:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\ , \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{ij} = B_{ij}\ , \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} .$$

Sin embargo **no es correcto** escribir:

$$\boldsymbol{A} = B_{ij}\ , \qquad \text{ni} \qquad A_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} , \qquad \text{ni tampoco} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} .$$

Otro ejemplo: si el vector $\boldsymbol{t}$ viene definido por $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma n}$ donde $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor de segundo orden $\boldsymbol{n}$ un vector, entonces podemos reescribir dicha definición de cualquiera de estas maneras:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j\ ,$$

$$t_i \boldsymbol{e}_i = \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i\ ,$$

$$\{\boldsymbol{t}\} = [\boldsymbol{\sigma}]\{\boldsymbol{n}\}\ ,$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} .$$

Sin embargo, es incorrecto escribir:

$$\boldsymbol{t} = \sigma_{ij} n_j\ , \qquad \text{y también} \qquad \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} .$$

Cuadro resumen

En el siguiente cuadro se resumen las operaciones más comunes en álgebra y cálculo tensorial y sus expresiones en notación indicial. En toda la tabla ϕ es una función escalar, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ son vectores y $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ son tensores de orden dos.

Operación	**Notación tensorial**	**Notación indicial**
Igualdad de vectores	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$	$a_p = b_p$
Igualdad de tensores	$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}$	$T_{pq} = S_{pq}$
Delta de Kronecker	$\begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	δ_{ij}
Tensor de permutación	$\begin{cases} 1 & \text{si } ijk = 123, 231 \text{ ó } 321 \\ -1 & \text{si } ijk = 213, 132 \text{ ó } 312 \\ 0 & \text{si hay algún índice repetido.} \end{cases}$	ϵ_{ijk}
Producto escalar	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	$a_p b_p$
Producto vectorial	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$	$a_i = \epsilon_{ipq} b_p c_q$
Suma de vectores	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$	$a_i = b_i + c_i$
Suma de tensores	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}$	$R_{ij} = S_{ij} + T_{ij}$
Producto tensor, vector	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a}$	$b_i = T_{ip} a_p$
Producto tensor trans., vector	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{a}$	$b_i = T_{pi} a_p$
Producto tensor, tensor	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}$	$R_{ij} = S_{ip} T_{pj}$
Producto externo	$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$	$T_{ij} = a_i b_j$
Doble contracción	$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{T}$	$S_{pq} T_{pq}$
Traza de un tensor	$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$	T_{pp}
Determinante	$\det(\boldsymbol{T})$	$\epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$
Gradiente de f. escalar	$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,[\phi]$	$a_i = \phi_{,i}$
Gradiente de f. vector	$\boldsymbol{T} = \mathrm{grad}\,[\boldsymbol{a}]$	$T_{ij} = a_{i,j}$
Divergencia de un vector	$\phi = \mathrm{div}\,[\boldsymbol{a}]$	$\phi = a_{i,i}$
Divergencia de un tensor	$\boldsymbol{a} = \mathrm{div}\,[\boldsymbol{T}]$	$a_i = T_{ip,p}$
Rotacional de un vector	$\boldsymbol{b} = \mathrm{rot}\,[\boldsymbol{a}]$	$b_i = \epsilon_{ijk} a_{j,k}$

Resumen de reglas prácticas de operación indicial

1) Un índice, por ejemplo p, repetido en una multiplicación, indica un sumatorio $\sum_{p=1}^{3}$ de los términos en la multiplicación:

$$a_p b_p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$

2) El par de índices repetidos y multiplicándose se pueden cambiar de letra, siempre que no se utilice en otra parte de la expresión:

$$a_p b_p + c_k = a_q b_q + c_k = a_r b_r + c_k \ .$$

3) Cuando uno de los índices repetidos en una multiplicación pertenece al una delta de Kronecker basta con reemplazar el índice repetido por el índice libre en la delta:

$$a_{ip} \delta_{pj} = a_{ij} \ .$$

4) Un índice que está repetido, pero no entre los factores que se multiplican, no se sustituye por un sumatorio

$$b_i + c_i \neq b_1 + c_1 + b_2 + c_2 + b_3 + c_3 \ .$$

5) Uno o más índices libres (que no están multiplicados por otros factores que tengan esos mismos índices) indican 3 ecuaciones independientes por cada índice:

$$v_i = a_i + 3 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = a_1 + 3 \\ v_2 = a_2 + 3 \\ v_3 = a_3 + 3 \end{cases}$$

6) Un índice **nunca** puede aparecer repetido más de una vez en una multiplicación. Puede aparecer más de dos veces si es en sumandos distintos, pero no es recomendable pues puede llevar a confusión:

$v_i S_{pi} W_{ji} \Rightarrow$ Incorrecto !!
$v_i S_{pi} W_{jk} + a_i b_i \Rightarrow$ Correcto, pero no recomendable
$v_i S_{pi} W_{jk} + a_m b_m \Rightarrow$ Correcto

7) Un tensor ortogonal es aquel que tiene la propiedad $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \mathbf{1}$. En índices:

$$A_{ip} A_{jp} = A_{pi} A_{pj} = \delta_{ij}$$