→ La métrica de un espacio-tiempo determina las propiedades geométricas y por ende, la forma en que se mide en el él. Para un E-T estático con simetría esférica:

$$ds^2 = -g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2$$

ó bien

$$ds^2 = -f(r)c^2dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Para el espaciotiempo:

- Minkoswki: $f(r) = g(r) = 1$
- Schwarzschild: $f(r) = \frac{1}{g(r)} = 1 - \frac{r_s}{r}$
  $\left(r_s = \frac{2GM}{c^2}\right)$
- Reissner - Nordström:
  $$f(r) = \frac{1}{g(r)} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{G\tilde{Q}^2}{c^4 r^2}$$
- Kottler: Incluye constante cosmológica

$$f(r) = \frac{1}{g(r)} = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \; ; \; \Lambda \begin{cases} >0 & \text{de Sitter} \\ <0 & \text{Anti-de Sitter.} \end{cases}$$

Derivación alternativa para la corrección de la precesión del perihelio

- La idea es comparar dos elipses. Una en un espacio-tiempo sin perturbar (Minkowski), y otra en el espacio-tiempo perturbado.

$$ds_1^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds_2^2 = -f(r)\,c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2$$

En una aproximación binomial:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \dots$$

- Schwarschild:

$$f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} \Rightarrow \sqrt{f(r)} = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{r_s}{2r} + \dots$$

$$1/\sqrt{f(r)} = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{r_s}{2r} + \dots$$

Comparando

$$\boxed{dt' = \left(1-\frac{r_s}{2r}\right)dt} \wedge \boxed{dr' = \left(1+\frac{r_s}{2r}\right)dr} \quad (*)$$

En el E-T-M: $dA = \int_0^R r\,dr\,d\phi = \frac{R^2}{2}d\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}R^2\frac{d\phi}{dt}} \leftarrow \text{segunda ley de Kepler.}$$

E-T-S

$$dA' = \int_0^R r\, dr'\, d\phi \,,$$ con dr' dado (*)

$$dA' = \int_0^R \left(1 + \frac{r_s}{2r}\right) \cdot r\, dr\, d\phi =$$

$$dA' = d\phi \int_0^R \left(r + \frac{r_s}{2}\right) dr$$

$$dA' = d\phi \cdot \left(\frac{R^2}{2} + \frac{r_s}{2} R\right) = \frac{R^2}{2} d\phi \left(1 + \frac{r_s}{R}\right)$$

Luego,

$$\frac{dA'}{dt'} = \frac{1}{2} R^2 \left(1 + \frac{r_s}{R}\right) \frac{d\phi}{dt'} = \frac{1}{2} R^2 \left(1 + \frac{r_s}{R}\right) \cdot \frac{d\phi}{\left(1 - \frac{r_s}{2R}\right) dt}$$

$$\frac{dA'}{dt'} \simeq \frac{1}{2} R^2 \left(1 + \frac{r_s}{R}\right)\left(1 + \frac{r_s}{2R}\right) \frac{d\phi}{dt}$$

$$\simeq \left[\frac{1}{2} R^2 \frac{d\phi}{dt}\right] \times \left(1 + \frac{r_s}{2R} + \frac{r_s}{R}\right) = \left(\frac{1}{2} R^2 \frac{d\phi}{dt}\right) \times \left(1 + \frac{3 r_s}{2R}\right)$$

Veamos que el incremento en el angulo ϕ respecto a ϕ'

$$\frac{dA'}{dt'} = \frac{1}{2} R^2 \frac{d\phi}{dt} \left(1 + \frac{3 r_s}{2R}\right)$$

$$\int_0^{\Delta\phi'} d\phi' = \int_0^{\Delta\phi = 2\pi} \left(1 + \frac{3r_s}{2R}\right) d\phi$$

Para una elipse $R = \dfrac{l}{1 + e\cos\phi}$

e : eccentricidad

l : semi-latus rectum.

$$\Delta\phi' = \int_0^{2\pi} d\phi + \frac{3r_s}{2l} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\phi)\, d\phi$$

$$\Delta\phi' = 2\pi + \frac{3\pi r_s}{l}$$

1ª corrección. Correccion Relativista