

UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE FÍSICA Y ASTRONOMÍA

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Dr. José Ricardo Villanueva Lobos

Valparaíso–Chile

Índice general

I	Electrostática	5
1.	Análisis Vectorial	7
1.1.	Definiciones	7
1.2.	Algebra Vectorial	7
1.2.1.	Ejemplos	11
1.3.	Cálculo Vectorial	12
1.3.1.	Ejemplos	19
2.	Introducción a la Electrostática	21
2.1.	Aspectos básicos	21
2.2.	Ley de Coulomb	23
2.3.	principio de superposición	24
2.4.	Campo Eléctrico	26
2.4.1.	Campo Eléctrico de una carga puntual	27
2.4.2.	Campo eléctrico para dos cargas puntuales	27
2.4.3.	Campo eléctrico para un hilo recto con densidad lineal de cargas constante de largo finito	30
2.4.4.	Campo eléctrico para una espira circular con densidad lineal de cargas constante en un punto sobre su eje de simetría.	31

2.4.5.	Campo eléctrico para un plano infinitamente grande con densidad superficial de cargas constante.	32
2.4.6.	Campo eléctrico para una distribución esférica con densidad superficial de cargas constante.	34
2.4.7.	Campo eléctrico para una distribución esférica con densidad volumétrica de cargas constante.	35
2.5.	Ley de Gauss para el campo electrostático	35
2.5.1.	Flujo Eléctrico	35
2.5.2.	Ley de Gauss	35
2.6.	Conductores en equilibrio electrostático	38
2.7.	Trabajo y Energía eléctrica	39
2.7.1.	Diferencia de potencial eléctrico	40
2.8.	Ecuaciones diferenciales de la electrostática	41
2.8.1.	Condiciones de contorno	41
2.8.2.	Ejemplos de aplicación de las ecuaciones diferenciales	42
2.9.	Método de imagenes eléctricas	43

Parte I

Electrostática

Capítulo 1

Análisis Vectorial

1.1. Definiciones

El análisis vectorial se hace indispensable para el estudio y la comprensión de la teoría electromagnética debido a que los entes primordiales son *campos vectoriales* en el espacio. Comenzaremos entregando las definiciones básicas que nos permiten entender las nociones de escalares y vectores. Un *escalar* es una cantidad (positiva o negativa) que queda completamente definida dando su magnitud. Ejemplos de escalares son la longitud, la masa, la temperatura y la carga eléctrica. Un *vector* es un objeto definido por una magnitud (un escalar no-negativo), y su línea de acción (una línea en el espacio) junto con su sentido (dirección) a lo largo de la línea. Ejemplos de cantidades vectoriales son la velocidad, la aceleración, el campo eléctrico y el campo magnético.

1.2. Álgebra Vectorial

Necesitamos una representación de los vectores para nuestro posterior desarrollo de la teoría electromagnética. Por su importancia y sencillez, introducimos primeramente el sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, (X, Y, Z) , caracterizado por los vectores base

$$\hat{e}_x \equiv \hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{e}_y \equiv \hat{j} = (0, 1, 0), \quad y \quad \hat{e}_z \equiv \hat{k} = (0, 0, 1),$$

que corresponden a la llamada *base canónica* de \mathbb{R}^3 . Cualquier vector del espacio \mathbb{R}^3 se puede escribir como una combinación lineal de estos tres vectores. Así, por ejemplo,

el vector dado por

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad (1.1)$$

se puede escribir también en la forma alternativa usando los vectores base

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}. \quad (1.2)$$

La cantidad escalar

$$A \equiv |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad (1.3)$$

se denomina la magnitud o norma del vector \vec{A} , y nos permite escribir este vector en la forma

$$\vec{A} = A \hat{e}_A, \quad (1.4)$$

donde \hat{e}_A es un vector unitario (de norma 1) a lo largo de la dirección del vector \vec{A} . En términos de la norma de \vec{A} podemos definir los cosenos directores de los ángulos formados por el vector y los ejes cartesianos, digamos, cada componente del vector queda determinado por un coseno director,

$$A_x = A \cos \alpha_x, \quad A_y = A \cos \alpha_y, \quad A_z = A \cos \alpha_z. \quad (1.5)$$

Notemos que estos cosenos directores satisfacen la relación

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1. \quad (1.6)$$

En estricto rigor, los vectores en \mathbb{R}^3 forman un grupo algebraico con respecto a la operación de suma. Es decir tenemos las siguientes definiciones que satisface cualquier vector en el espacio

i).- Sean $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ vectores $\in \mathbb{R}^3$. La suma de estos vectores se define como el vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ cuyas componentes son la suma de las componentes de los vectores originales:

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z. \quad (1.7)$$

ii).- El vector nulo, $\vec{0}$, es un vector de magnitud nula y por lo tanto sin dirección ni sentido.

iii).- Con respecto a la operación suma, $\vec{0}$ representa el elemento neutro para el conjunto \mathbb{R}^3 , y por lo tanto nos permite definir el elemento inverso al vector \vec{A} , digamos \vec{A}_{inv} tal que

$$\vec{A} + \vec{A}_{inv} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}_{inv} = -\vec{A}. \quad (1.8)$$

iv).- La resta de vectores queda definida como

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \quad (1.9)$$

v).- La suma (y la resta) de vectores es asociativa

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}), \quad (1.10)$$

y conmutativa

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \quad (1.11)$$

vi).-Sea $c \in \mathbb{R}$ un escalar. La multiplicación de este escalar por un vector \vec{A} es un nuevo vector $\vec{B} = c\vec{A}$, cuyas componentes son

$$B_x = cA_x, \quad B_y = cA_y, \quad B_z = cA_z. \quad (1.12)$$

Existen dos operaciones entre vectores definidos como productos. El primero de ellos es el llamado *producto escalar* o *producto interno*. Debemos notar que los vectores en \mathbb{R}^3 no forman un grupo con respecto a esta operación, pues el producto entre ellos no es un elemento del grupo (no es un vector) sino como dice su nombre es un escalar. Tenemos las siguientes definiciones para este producto

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (1.13)$$

y alternativamente

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \angle(\vec{A}, \vec{B}), \quad (1.14)$$

donde $\angle(\vec{A}, \vec{B})$ es el ángulo formado por los vectores \vec{A} y \vec{B} . Notemos que si estos vectores son perpendiculares, entonces $\angle(\vec{A}, \vec{B}) = \pi/2$ y por lo tanto $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. El producto escalar es conmutativo, es decir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \quad (1.15)$$

y además nos permite escribir la magnitud de un vector en la forma general

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}. \quad (1.16)$$

El segundo producto es el llamado *producto vectorial* o *producto externo* y tiene como resultado otro vector que es siempre perpendicular a los dos vectores originales. Escribimos esto como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Formalmente la definición es dada por medio del determinante

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x). \quad (1.17)$$

La magnitud de \vec{C} se puede escribir como

$$C \equiv |\vec{C}| = AB \sin \angle(\vec{A}, \vec{B}), \quad (1.18)$$

así, si los vectores son paralelos (o anti-paralelos), entonces $\angle(\vec{A}, \vec{B}) = 0(\pi)$ y $\vec{C} = \vec{0}$. Debemos notar que el conjunto de los vectores en \mathbb{R}^3 forman un grupo con respecto a esta operación, sin embargo este grupo es de el tipo *no-abeliano* o *no-conmutativo* pues

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (1.19)$$

Ya que los vectores de la base canónica son mutuamente ortogonales, estos satisfacen las relaciones

$$\hat{i} = \hat{j} \times \hat{k}, \quad \hat{j} = \hat{k} \times \hat{i}, \quad \hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}, \quad (1.20)$$

las cuales pueden ser verificadas directamente usando la definición (1.17).

El volumen generado por tres vectores puede obtenerse considerando el llamado *triple producto escalar*, el cual se define como

$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.21)$$

También existe otro producto de importancia entre tres vectores, el llamado *triple producto vectorial* y del cual se obtiene otro vector

$$\vec{D} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (1.22)$$

Hasta aquí hemos considerado las operaciones de suma y algunos productos, es lógico preguntarnos que ocurre con la operación de división. En este sentido podemos decir que la división de un vector por un escalar está bien definido al igual que para dos vectores paralelos. Sin embargo para vectores que no son paralelos no lo está. Es posible expresar soluciones de ecuaciones vectoriales. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$c = \vec{A} \cdot \vec{X}, \quad (1.23)$$

donde c es un escalar conocido y \vec{A} un vector conocido. Una solución general de esta ecuación es

$$\vec{X} = \frac{c\vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} + \vec{B}, \quad (1.24)$$

donde \vec{B} es un vector de magnitud arbitraria y perpendicular a \vec{A} , tal que $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. No existe una solución única y esta depende de \vec{B} .

Del mismo modo, consideremos la ecuación vectorial

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{X}, \quad (1.25)$$

con \vec{A} y \vec{C} vectores conocidos. La solución general es

$$\vec{X} = \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} + k\vec{A}, \quad (1.26)$$

cuando $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$, siendo k un escalar arbitrario. Si $\vec{C} \cdot \vec{A} \neq 0$ no existe solución. Por otro lado, si pedimos que \vec{X} satisfaga (1.23) junto con (1.25) tenemos que la solución general es

$$\vec{X} = \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} + \frac{c\vec{A}}{\vec{A} \cdot \vec{A}}. \quad (1.27)$$

1.2.1. Ejemplos

1. Demuestre que los vectores dados por

$$\vec{A} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}, \quad \vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},$$

son perpendiculares.

Solución: Haciendo el producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1 \cdot 4) + (4 \cdot 2) + (3 \cdot (-4)) = 4 + 8 - 12 = 0,$$

es decir, los vectores son perpendiculares.

2. *Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación*

$$\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$$

e interpretando el resultado geométricamente, demuestre la ley de los cosenos.

Solución: Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\vec{B} \cdot \vec{C},$$

pero por definición (1.14), $\vec{B} \cdot \vec{C} = BC \cos \alpha$, por lo tanto

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha.$$

La interpretación geométrica de esto es que estos tres vectores forman un triángulo, en donde el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el producto de estos lados multiplicado por el coseno del ángulo opuesto al lado en cuestión. Notemos que esto es una generalización del teorema de Pitágoras, en donde el ángulo resulta ser un ángulo recto, es decir, $\alpha = \pi/2$.

1.3. Cálculo Vectorial

En esta sección estamos interesados en estudiar las operaciones de diferenciación e integración de funciones (campos) escalares y vectoriales. Nos preguntamos por la relación entre un campo vectorial y las derivadas de un campo escalar. Por este motivo debemos definir el concepto de derivada direccional para la subsecuente introducción de los operadores diferenciales.

Definición: la *derivada direccional* es el valor de cambio de una función, φ , en una dirección determinada,

$$d_s \varphi = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (1.28)$$

donde $d\vec{s}$ es un desplazamiento infinitesimal en la dirección considerada, de magnitud ds . Si $d\vec{s}$ tiene componentes dx, dy, dz , entonces la definición queda escrita como

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}. \quad (1.29)$$

Para que veamos como trabaja la derivada direccional, consideremos el siguiente ejemplo. Sea la función bidimensional $\varphi(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, y escogamos la dirección arbitraria correspondiente a $dy/dx = \alpha$ en un punto (x_0, y_0) ; entonces, considerando que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, obtenemos

$$\left[\frac{d\varphi}{ds} \right]_{x_0, y_0} = -\frac{2(x_0 + \alpha y_0)}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \quad (1.30)$$

Si derivamos con respecto a α y este resultado lo igualamos a cero encontramos el valor de α para el cual la derivada es un máximo o un mínimo. Realizando estas operaciones encontramos que $\alpha = y_0/x_0$, lo cual significa que ésta dirección es radial (dada por las líneas $y = \alpha x$)

Si ahora buscamos un α tal que el valor de cambio sea cero, encontramos que $\alpha = -x_0/y_0$. Esta dirección es tangente al círculo $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Claramente, sobre esta curva, $\varphi(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, no cambia, es decir, sobre estas curvas, llamadas *curvas de nivel*, tenemos que $\varphi = \text{constante}$. La idea de curvas de nivel puede generalizarse a una función de tres variables, en cuyo caso las superficies, $\varphi(x, y, z) = \text{constante}$, se denominan *superficies de nivel* o *superficies equipotenciales*.

Gradiente: El *gradiente* de una función escalar φ es un vector cuya magnitud es la máxima derivada direccional en el punto en consideración y cuya dirección es la dirección de la máxima derivada direccional en ese punto. Denotaremos el gradiente por medio del símbolo nabla, $\vec{\nabla}$.

Debemos hacer notar que el gradiente tiene siempre la dirección normal a las superficies de nivel de φ en el punto considerado. En términos del gradiente, la derivada direccional viene dada por

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\vec{\nabla}\varphi| \cos \theta, \quad (1.31)$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de $d\vec{s}$ y la dirección del gradiente. De esta forma podemos escribir en forma general

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \frac{d\vec{s}}{ds}, \quad (1.32)$$

lo que nos permite determinar el gradiente en cualquier sistema de coordenadas donde conozcamos la forma del elemento de línea $d\vec{s}$. Por ejemplo, si el campo escalar se

expresa en coordenadas cartesianas, $\varphi(x, y, z)$, su diferencial viene dado por

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (1.33)$$

Por otro lado, el elemento de línea en estas coordenadas es $d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$, por lo que reemplazando en el lado derecho de (1.32), obtenemos

$$\vec{\nabla} \varphi \cdot \frac{d\vec{s}}{ds} = (\vec{\nabla} \varphi)_x \frac{dx}{ds} + (\vec{\nabla} \varphi)_y \frac{dy}{ds} + (\vec{\nabla} \varphi)_z \frac{dz}{ds}. \quad (1.34)$$

Así, comparando (1.33) con (1.34), es evidente que

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k}. \quad (1.35)$$

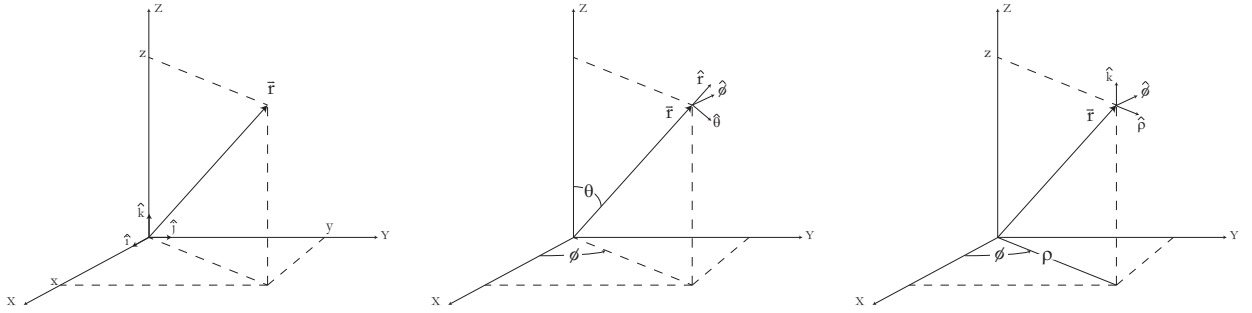


Figura 1.1: Representación gráfica del vector posición en: a.- coordenadas Cartesianas, (X, Y, Z) ; b.- coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) ; c.- coordenadas cilíndricas, (ρ, ϕ, Z) .

Para el caso de coordenadas esféricas, tenemos $d\vec{s} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$ y

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi,$$

con lo que reemplazando en (1.32) obtenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi = (\vec{\nabla} \varphi)_r dr + (\vec{\nabla} \varphi)_\theta r d\theta + (\vec{\nabla} \varphi)_\phi r \sin \theta d\phi,$$

lo que nos conduce a

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\phi}. \quad (1.36)$$

En el caso de coordenadas cilíndricas, tenemos $d\vec{s} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{k}$, y

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

de tal forma que reemplazando en (1.32), obtenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = (\vec{\nabla}\varphi)_\rho d\rho + (\vec{\nabla}\varphi)_\phi \rho d\phi + (\vec{\nabla}\varphi)_z dz,$$

por lo que comparando ambos lados de esta igualdad llegamos a

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}. \quad (1.37)$$

Divergencia: La *divergencia* de un campo vectorial \vec{F} mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente del campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene *fuentes* o *sumideros* la divergencia de dicho campo será diferente de cero.

Para un campo expresado en coordenadas cartesianas, $\vec{F}(x, y, z) = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$, la divergencia de este puede ser escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (1.38)$$

Si el campo es expresado en coordenadas esféricas, $\vec{F}(r, \theta, \phi) = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\phi \hat{\phi}$, la divergencia se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}. \quad (1.39)$$

Por último, si el campo es expresado en coordenadas cilíndricas, $\vec{F}(\rho, \phi, z) = F_\rho \hat{\rho} + F_\phi \hat{\phi} + F_z \hat{k}$, la divergencia se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (1.40)$$

Rotacional: El *rotacional* es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

Para un campo en coordenadas cartesianas, el rotacional lo podemos encontrar a partir de la relación

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \quad (1.41)$$

Operador Laplaciano: Este operador será de suma importancia para el desarrollo de la teoría electromagnética. La definición formal es

$$\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}.$$

En coordenadas cartesianas, tenemos

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (1.42)$$

Veamos ahora lo que respecta a la integración vectorial. Dependiendo de la naturaleza que aparezca en la integral tendremos tres tipos de integrales. A saber, integral de línea, integral de superficie o integral de volumen.

Integral de línea: Si \vec{F} es un campo vectorial, la integral de línea de este campo se denota por

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad (1.43)$$

donde ς es la curva sobre la cual se efectúa la integración, a y b son los puntos inicial y final en esta curva. $d\vec{\ell}$ es un desplazamiento vectorial infinitesimal a lo largo de la curva ς . Notemos que la integral de línea es un escalar, pues $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ lo es. Además, en general, (1.43) no sólo depende de a y b , sino también del camino de integración ς . En el caso que no sea así, estaremos hablando de campos conservativos (los que nos interesan).

La integral de línea sobre una curva cerrada, denotada como

$$\oint_{\varsigma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad (1.44)$$

puede ser, o no, igual a cero. Este último caso se encuentra para aquellos campos que son conservativos.

Integral de superficie: Si \vec{F} es un campo vectorial, la integral de superficie se denota como

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} da, \quad (1.45)$$

donde S es la superficie sobre la cual se realiza la integración, y da es un área infinitesimal de S . La integral de superficie sobre una superficie cerrada la denotamos como

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} da. \quad (1.46)$$

Integral de volumen: Si \vec{F} es un campo vectorial y φ un campo escalar, tenemos las siguientes integrales de volumen

$$\vec{I}_v \equiv \int_V \vec{F} dv, \quad (1.47)$$

y

$$I_e \equiv \int_V \varphi dv, \quad (1.48)$$

donde V es el volumen en el cual se realiza la integración y dv es un elemento infinitesimal de volumen.

Teoremas Integrales: Si \vec{F} es un campo vectorial y φ un campo escalar, tenemos los siguientes teoremas integrales

$$\int_{a \ \varsigma}^b \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{\ell} = \int_{a \ \varsigma}^b d\varphi = \varphi|_a^b = \varphi_b - \varphi_a, \quad (\text{Teorema fundamental del cálculo}). \quad (1.49)$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} da = \oint_{\varsigma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad (\text{Teorema de Stockes}). \quad (1.50)$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dv = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} da, \quad (\text{Teorema de la divergencia}). \quad (1.51)$$

La función δ de Dirac En una dimensión, la función δ de Dirac se representa como

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x = 0, \end{cases} \quad (1.52)$$

para la cual se satisface que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1.53)$$

De acá, es directo ver que si $f(x)$ es una función continua, entonces

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx. \quad (1.54)$$

Es importante notar que en estricto rigor la δ de Dirac más que una función representa una distribución, además, posee la dimensión inversa a la diferencial dx .

Algunas propiedades importantes de la función δ de Dirac son:

1. Es una función par, es decir, $\delta(-x) = \delta(x)$.

2. Si $a > 0$,

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x), \quad a > 0. \quad (1.55)$$

3. Corrimiento del origen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (1.56)$$

4. Si el argumento de $\delta(x)$ es una función $g(x)$ con ceros simples en los puntos a_i sobre el eje real (y de esta forma $g'(a_i) \neq 0$),

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|g'(a_i)|}. \quad (1.57)$$

5. Derivada de la función delta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x - x_0) dx = -f'(x_0). \quad (1.58)$$

6. En tres dimensiones, la función delta $\delta(\vec{r})$ es interpretada como $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, tal que describe una función localizada en el origen y con un peso integrado unitario, irrespectivo del sistema de coordenadas usado. Así, en coordenadas polares esféricas,

$$\int \int \int f(\vec{r}_2) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) r_2^2 dr_2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_2 = f(\vec{r}_1). \quad (1.59)$$

1.3.1. Ejemplos

1. Si \vec{A} es un vector constante, demuestre que

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}.$$

Solución: Sea $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$, un vector cuyas componentes son constante, y $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$, el vector posición en el espacio. Entonces el producto escalar de estos vectores es $\vec{A} \cdot \vec{r} = xA_x + yA_y + zA_z$, de tal forma que tomando la divergencia de este producto obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r}) &= \frac{\partial(xA_x + yA_y + zA_z)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(xA_x + yA_y + zA_z)}{\partial y} \hat{j} + \\ &\quad + \frac{\partial(xA_x + yA_y + zA_z)}{\partial z} \hat{k} \\ &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = \vec{A}. \end{aligned}$$

2. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}.$$

Encuentre $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ y $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Determine si este campo es solenoidal y, o, rotacional.

Solución: En este caso tenemos que las componentes cartesianas del campo vectorial son $F_x = x^2 + yz$, $F_y = y^2 + zx$, $F_z = z^2 + xy$.

- i).- La divergencia de $\vec{F}(x, y, z)$ resulta ser

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2(x + y + z),$$

es decir, el campo $\vec{F}(x, y, z)$ no es solenoidal.

- ii).- Para el rotacional de $\vec{F}(x, y, z)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \hat{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= \hat{i}(x - x) + \hat{j}(y - y) + \hat{k}(z - z) = \vec{0}, \end{aligned}$$

es decir, el campo $\vec{F}(x, y, z)$ es irrotacional.

3. Determinar si el campo vectorial bidimensional

$$\vec{F}(x, y) = (6xy^2 - y^3)\hat{i} + (6x^2y - 3xy^2)\hat{j},$$

es conservativo. Si es así, determine la función potencial que se anula en el origen.

Solución: Si el campo vectorial es conservativo, debemos mostrar que

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Haciendo las operaciones respectivas, encontramos que

$$12xy - 3y^2 = 12xy - 3y^2,$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x, y)$ es conservativo. Calculemos, entonces, la función potencial $U(x, y)$ que se desprende de la relación general $\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}U(x, y)$. Tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 6xy^2 - y^3, \quad (\text{i})$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2, \quad (\text{ii})$$

integrando (i), tenemos que

$$U(x, y) = \int (6xy^2 - y^3)dx + h(y) = 3x^2y^2 + xy^3 + h(y).$$

Derivando esto último con respecto a y , obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2 + h'(y) \quad (\text{iii})$$

Comparando (ii) con (iii), encontramos que $h'(y) = 0$, es decir, $h(y) = c$ (const.), de modo que podemos escribir

$$U(x, y) = 3x^2y^2 + xy^3 + c.$$

Si queremos que el potencial se anule en el origen, tenemos que $c = 0$, y la función potencial deseada es

$$U(x, y) = 3x^2y^2 + xy^3.$$

Capítulo 2

Introducción a la Electrostática

2.1. Aspectos básicos

Observaciones de la electrización de los cuerpos se han hecho desde tiempos muy antiguos¹. Por ejemplo, el frotamiento entre dos cuerpos provoca un cambio en las propiedades de estos: *se cargan*. Este experimento sirve para introducir un concepto muy importante: *la carga eléctrica*. Pero la carga en sí no se crea en el proceso. La carga total, es decir la suma de las cargas de los dos cuerpos es la misma que antes de la electrización. Lo que realmente ocurre es que hay un traspaso de electrones de un cuerpo a otro. En adelante denotaremos la carga eléctrica con el símbolo q .

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de las partículas elementales. De hecho, la materia está compuesta básicamente de electrones (carga negativa), protones (carga positiva), y neutrones (sin carga), y por lo tanto, a cada cuerpo le podemos asociar una *carga eléctrica neta* que es igual a la suma algebraica de las cargas negativas y positivas que el cuerpo contiene. Así, si el cuerpo tiene exceso de electrones se dice que el cuerpo está cargado negativamente, y si tiene exceso de protones decimos que el cuerpo está cargado positivamente. Si la suma de las cargas es cero, se dice que el cuerpo está electricamente neutro.

Es un hecho comprobado que la carga eléctrica se conserva en un sistema aislado, lo cual nos permite enunciar el principio de conservación de la carga:

No se puede crear ni destruir la carga, sólo se puede separar las cargas positivas y negativas.

¹Los griegos conocían los efectos de frotar *ámbar* con otros cuerpos

Desde el punto del análisis se hace necesario introducir el concepto de carga puntual:

Definición: La *carga puntual* es la carga contenida en un cuerpo de dimensión muy pequeña en comparación con las dimensiones de los otros cuerpos y distancias consideradas.

De acuerdo a esta definición, podemos decir que el concepto de carga puntual es un concepto relativo.

Existen tres formas básicas para electrizar los cuerpos: *frotación*, *inducción* y *contacto*. Veamos un poco en detalle estos fenómenos eléctricos.

Electrización por frotación. La electrización por frotación se explica del siguiente modo. Consideremos que frotamos una barra de ámbar en un paño de lana. Por efecto de la fricción, los electrones externos de los átomos del paño de lana son liberados y cedidos a la barra de ámbar, con lo cual ésta queda cargada negativamente y aquél positivamente. En términos análogos puede explicarse la electrización del vidrio por la seda. En cualquiera de estos fenómenos se pierden o se ganan electrones, pero el número de electrones cedidos por uno de los cuerpos en contacto es igual al número de electrones aceptado por el otro, de ahí que en conjunto no hay producción ni destrucción de carga eléctrica. Esta es la explicación, desde la teoría atómica, del principio de conservación de la carga eléctrica formulado por Franklin con anterioridad a dicha teoría sobre la base de observaciones sencillas.

Electrización por inducción. La electrización por inducción es un efecto de las fuerzas eléctricas. Debido a que éstas se ejercen a distancia, un cuerpo cargado positivamente en las proximidades de otro neutro atraerá hacia sí a las cargas negativas, con lo que la región próxima queda cargada negativamente. Si el cuerpo cargado es negativo entonces el efecto de repulsión sobre los electrones atómicos convertirá esa zona en positiva. En ambos casos, la separación de cargas inducida por las fuerzas eléctricas es transitoria y desaparece cuando el agente responsable se aleja suficientemente del cuerpo neutro.

Electrización por contacto. La electrización por contacto es considerada como la consecuencia de un flujo de cargas negativas de un cuerpo a otro. Si el cuerpo cargado es positivo es porque sus correspondientes átomos poseen un déficit de electrones, que se verá en parte compensado por la aportación del cuerpo neutro cuando ambos entran en contacto. El resultado final es que el cuerpo cargado se hace menos positivo y el neutro adquiere carga eléctrica positiva. Aun cuando en realidad se hayan transferido

electrones del cuerpo neutro al cargado positivamente, todo sucede como si el segundo hubiese cedido parte de su carga positiva al primero. En el caso de que el cuerpo cargado inicialmente sea negativo, la transferencia de carga negativa de uno a otro corresponde, en este caso, a una cesión de electrones.

2.2. Ley de Coulomb

Charles A. de Coulomb (1736 - 1806) estableció, a partir de observaciones experimentales de las fuerzas de interacción entre cargas puntuales, los siguientes resultados:

- a).- Hay dos, y sólo dos clases de carga eléctrica, conocidas ahora como positiva y negativa.
- b).- La fuerza de interacción entre dos cargas actúa sobre la línea que las une y su magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre ellas.
- c).- Estas fuerzas son proporcionales al producto de las cargas; son repulsivas para cargas de igual signo y atractiva para cargas de signo contrario.

Estos resultados los podemos resumir como

$$|\vec{F}| \propto \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2},$$

donde r_{12} es la distancia de separación entre q_1 y q_2 . Esta última relación la podemos escribir como una igualdad incluyendo una constante de proporcionalidad, C ,

$$|\vec{F}| = C \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2},$$

la cual depende del sistema de unidades usado. En el sistema *Gaussiano*, $C = 1$, pero se debe ajustar el valor de la carga con el fin de que el valor de $|\vec{F}|$ concuerde con los experimentos. En 1901, Giorgi demostró que todas las unidades eléctricas comunes, tales como *Ampere* ($[A]$), *Coulomb* ($[c]$), *Ohm* ($[\Omega]$), etcétera, se pueden combinar con uno de los sistemas mecánicos (MKS). Este sistema de unidades se llama sistema MKSA o MKS *racionalizado*. En este sistema la constante de proporcionalidad vale

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

donde $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} [\frac{c^2}{Nm^2}]$, es la permitividad eléctrica del vacío. Finalmente, planteamos la ley de Coulomb en su forma vectorial (ver Fig.2.1)

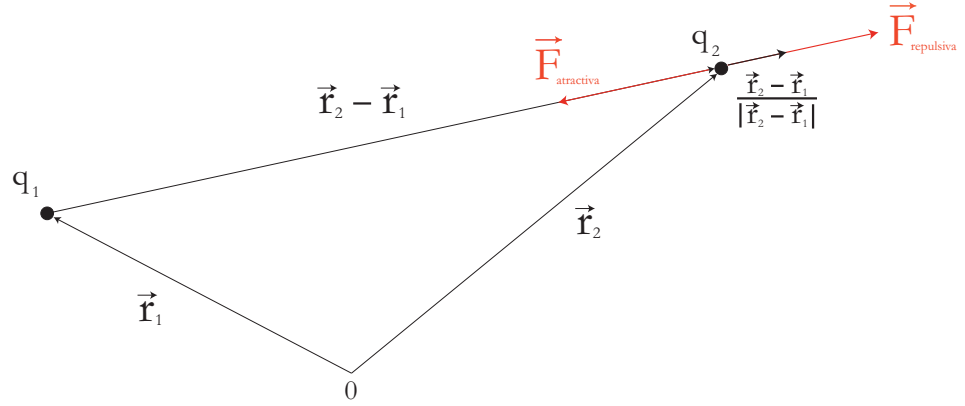


Figura 2.1:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.1)$$

Notemos que en esta ecuación las cargas puntuales q_1 y q_2 intervienen con sus respectivos signos. Si q_1 y q_2 son del mismo signo, la fuerza \vec{F} tiene el sentido de $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, es decir, es del tipo *repulsiva*; y si q_1 y q_2 son de signo contrario, la fuerza \vec{F} tiene el sentido de $-(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, es decir, es del tipo *atractiva*.

2.3. principio de superposición

El principio de superposición establece que: *la fuerza que actúa sobre una partícula puntual q , debido a un sistema discreto de n cargas puntuales, $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, es igual a la suma vectorial de las fuerzas \vec{F}_i que, independientemente cada carga q_i ejerce sobre q , es decir,*

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \text{donde} \quad \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i),$$

y por lo tanto,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.2)$$

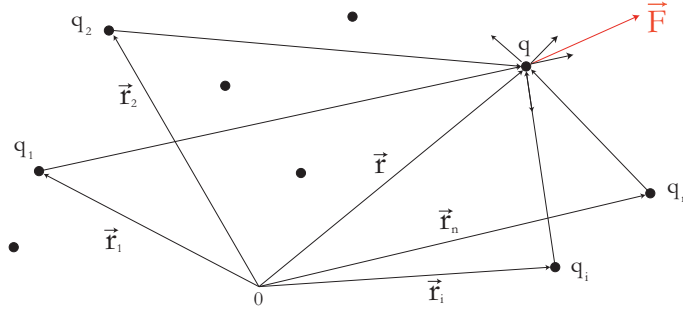


Figura 2.2: Principio de superposición

Una generalización del principio de superposición nos permite considerar la interacción entre una distribución continua de cargas y una carga puntual. Toda distribución macroscópica de cargas eléctricas contiene un número muy grande de cargas elementales. Podemos proceder como si el elemento de carga es subdividido infinitamente y de esta forma describir las distribuciones macroscópicas de cargas en términos de funciones continuas de punto, llamadas *densidades de carga*. Podemos definir las siguientes funciones:

1. *Densidad lineal de cargas* λ : Si tenemos la carga distribuida en alguna curva ζ , cuyo elemento de línea es $d\ell$, entonces

$$\lambda = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\ell} = \frac{dq}{d\ell}. \quad (2.3)$$

2. *Densidad superficial de cargas* σ : Si la carga está distribuida en alguna superficie S , cuyo elemento de superficie es da , entonces

$$\sigma = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta a} = \frac{dq}{da}. \quad (2.4)$$

3. *Densidad volumétrica de cargas* ρ : Para la carga distribuida en una volumen V , cuyo elemento de volumen es dv , tenemos que

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}. \quad (2.5)$$

De esta forma, la fuerza entre una distribución continua de cargas y una carga puntual q , es

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.6)$$

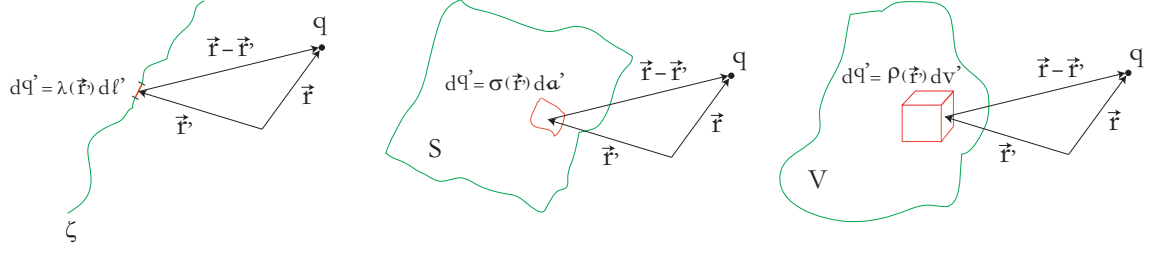


Figura 2.3: Distribuciones continuas de carga.

donde Σ es la variedad diferencial en la cual esta distribuida la carga. Así, si la variedad es una curva ζ en el espacio, se tiene que $dq' = \lambda(\vec{r})d\ell'$; por otro lado, si la variedad es una superficie S , tenemos que $dq' = \sigma(\vec{r})da'$; finalmente, si la variedad es un volumen V , tenemos que $dq' = \rho(\vec{r})dv'$, ver FIG.2.3.

2.4. Campo Eléctrico

El campo eléctrico en un punto del espacio es la razón entre la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga puntual q en reposo en el punto, y el valor de la carga, es decir,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}. \quad (2.7)$$

La necesidad de introducir el límite en esta definición es debido a que una carga lo suficientemente grande puede afectar la configuración inicial, y de esta forma el campo eléctrico ya no es el mismo que se tenía inicialmente. La unidad de campo eléctrico en el sistema MKSA es

$$[\vec{E}] = \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{V}{m} \right],$$

donde $[N]$: Newton, $[C]$: Coulomb, $[V]$: Volt, y $[m]$: metro. Para distribuciones discretas de cargas tenemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (2.8)$$

mientras que para distribuciones continuas se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.9)$$

Con el objetivo de visualizar la estructura del campo eléctrico asociado a una distribución de cargas, se introducen la *líneas de fuerza* (que son normales a las *curvas de nivel*), las cuales son líneas imaginarias tangentes a la dirección del campo eléctrico.

2.4.1. Campo Eléctrico de una carga puntual

Este es un caso particular de una distribución discreta con $n = 1$, de tal forma que su campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1). \quad (2.10)$$

Si por simplicidad escogemos el origen de coordenadas en la posición de la carga ($\vec{r}_1 \rightarrow \vec{0}$), y hacemos $q_1 \rightarrow q$, esta última expresión queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.11)$$

Notemos que el sentido del campo eléctrico depende exclusivamente del signo de la carga puntual q , como es mostrado en la FIG.2.4.

2.4.2. Campo eléctrico para dos cargas puntuales

El campo eléctrico en un punto \vec{r} generado por dos cargas puntuales q_1 y q_2 ($n = 2$), las cuales están ubicadas en los puntos \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente, es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2) \right]. \quad (2.12)$$

Este caso tiene un importante aplicación que veremos a continuación.

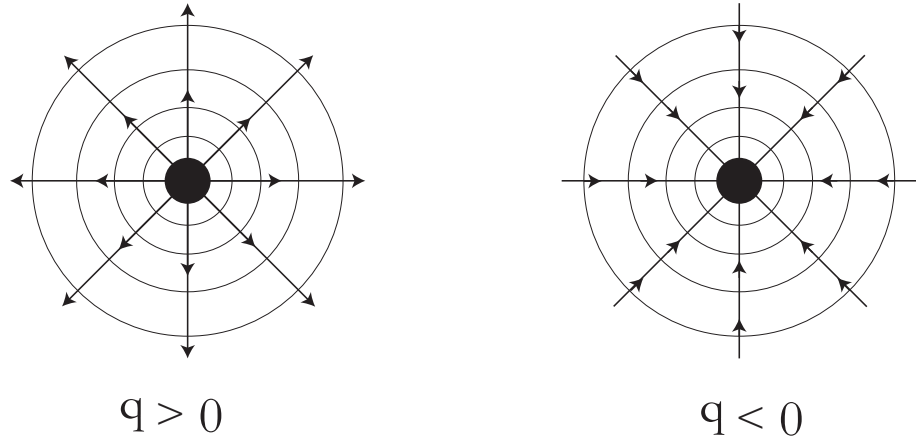


Figura 2.4: Líneas de campo eléctrico para una carga puntual q ; si $q > 0$, las líneas de campo *salen* de q ; y si $q < 0$ las líneas de campo *entran* a q .

Campo eléctrico para un dipolo eléctrico puntual

El sistema compuesto por dos cargas puntuales de igual magnitud, pero de signo contrario, $q_1 = -q_2 = q$, separados por una pequeña distancia, d , forman lo que se conoce por *dipolo eléctrico puntual*. De esta forma, y partir de la ecuación (2.12), se tiene que el campo eléctrico en un punto determinado por el vector posición \vec{r}

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{d})}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{d}|^3} - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]. \quad (2.13)$$

Esta situación es mostrada en la FIG.2.5, en donde el campo eléctrico generado por el dipolo es determinado en un punto p que se encuentra muy alejado en comparación con la separación entre las cargas ($d \ll r$). Así, haciendo uso del teorema del binomio, y despreciando términos de segundo orden, tenemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]. \quad (2.14)$$

Obviamente, existen más contribuciones al campo eléctrico debido a los términos de orden superior en \vec{d} , sin embargo, cuando $|\vec{d}| \ll |\vec{r} - \vec{r}'|$, estas contribuciones se hacen más pequeñas. Ahora, definiendo el *dipolo puntual* por medio de la ecuación

$$\vec{p} = \lim_{d \rightarrow 0} q \vec{d}, \quad (2.15)$$

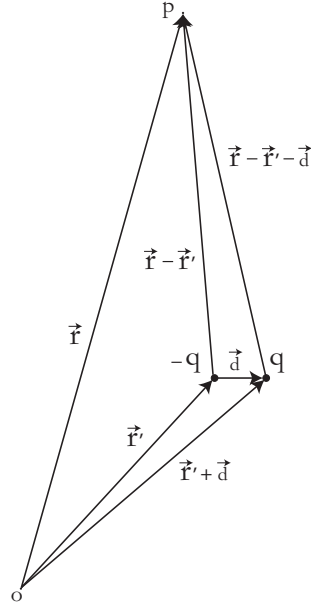


Figura 2.5: Esquema de un dipolo eléctrico puntual.

el campo eléctrico del dipolo eléctrico queda finalmente escrito como

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') \right]. \quad (2.16)$$

Fuerza y torque sobre un dipolo eléctrico.

Queremos estudiar el efecto de un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico externo uniforme \vec{E} , como el mostrado en la figura 2.6. Para este sistema, la fuerza total que actúa es

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}. \quad (2.17)$$

Para calcular el torque, lo hacemos respecto al punto medio, de forma que podemos escribir

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^2 \vec{\tau}_i. \quad (2.18)$$

Respecto a este, el brazo de palanca de cada carga puntual es $l_j \equiv |\vec{l}_j| = (d/2) \sin \alpha$, con $j = 1, 2$ (ver figura 2.6). Así, para la partícula 1 tenemos que $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$ y

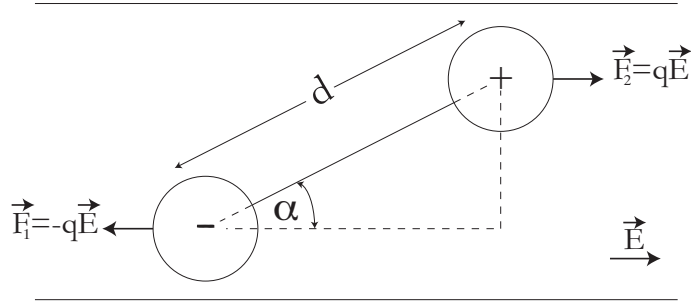


Figura 2.6: Esquema para el cálculo de la fuerza y el torque sobre un dipolo eléctrico.

$\vec{l}_1 = -l\hat{j}$, y el torque es $\vec{\tau}_1 = \vec{l}_1 \times \vec{F}_1 = -qlE\hat{k}$. De manera análoga, se demuestra que el torque de la partícula 2 es $\vec{\tau}_2 = -qlE\hat{k}$. Sumando ambas contribuciones y reemplazando los respectivos valores, es fácil ver que

$$\vec{\tau} = -2qlE\hat{k} = -qdE \sin \alpha \hat{k}. \quad (2.19)$$

Ya que, por definición, el momento dipolar es $p = qd$, la última expresión se convierte en $\vec{\tau} = -pE \sin \alpha \hat{k}$. Finalmente, considerando que \vec{p} y \vec{E} pertenecen al mismo plano XY , podemos expresar de forma general

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (2.20)$$

2.4.3. Campo eléctrico para un hilo recto con densidad lineal de cargas constante de largo finito

Vamos a utilizar la técnica del cálculo directo para determinar el campo eléctrico debido a un hilo recto de largo finito cuya densidad lineal de cargas es constante, es decir, $\lambda(\vec{r}) = \lambda_0 = \text{constante}$. Para realizar esto, consideremos la figura 2.7, en la cual el punto donde calculamos el campo se encuentra a una distancia perpendicular a del hilo y cuyos extremos, en relación al dicho punto, está especificado por los ángulos θ_1 y θ_2 . En este caso, el elemento de línea es $d\vec{\ell} = dx'\hat{i}$, de manera que $dq' = \lambda dx'$. También $\vec{r}' = x'\hat{i}$, $\vec{r} = a\hat{j}$, y así $\vec{r} - \vec{r}' = a\hat{j} - x'\hat{i}$. Reemplazando esto en la ecuación (2.9), tenemos que

$$\vec{E}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx'}{(a^2 + x'^2)^{3/2}} (a\hat{j} - x'\hat{i}). \quad (2.21)$$

Resulta instructivo, basado en la misma figura, realizar el siguiente cambio de variable:

$$x' = a \cot \theta, \quad dx' = -a \csc^2 \theta d\theta, \quad (2.22)$$

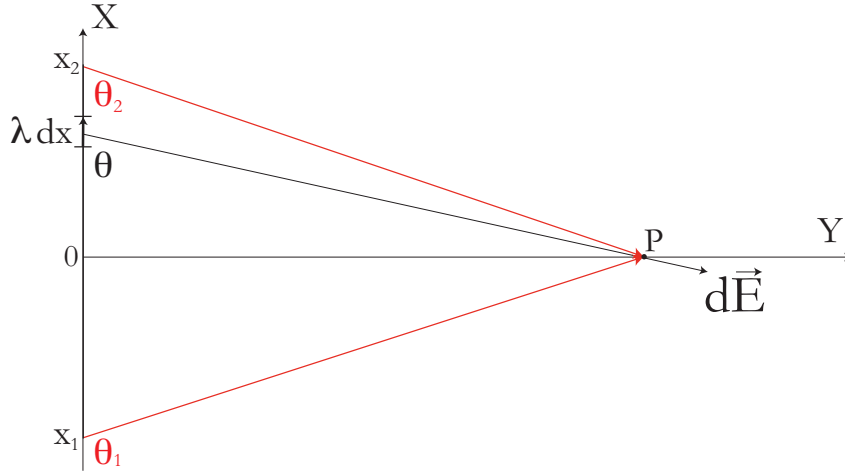


Figura 2.7: Esquema para el cálculo del campo eléctrico debido a una distribución lineal de cargas.

lo cual conduce a la siguiente expresión

$$\vec{E}(a) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta \, d\theta \, \hat{i} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \, d\theta \, \hat{j} \right]. \quad (2.23)$$

De esta forma, el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(a) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left[(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{i} + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{j} \right]. \quad (2.24)$$

Notar de la expresión anterior que $\theta_2 < \theta_1$, y además, para un hilo infinito tenemos que $\theta_1 \rightarrow \pi$ y $\theta_2 \rightarrow 0$, de manera tal que el campo eléctrico debido a dicha configuración viene dada por

$$\vec{E}(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \hat{j}. \quad (2.25)$$

2.4.4. Campo eléctrico para una espira circular con densidad lineal de cargas constante en un punto sobre su eje de simetría.

Con el fin de calcular el campo eléctrico de una espira circular de radio R , y basados en la figura 2.8. Así, tenemos que $\vec{r} = z \hat{k}$, $\vec{r}' = R \hat{\rho}'$, y además $d\vec{l}' = R d\phi' \hat{\phi}'$. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (2.9), tenemos que

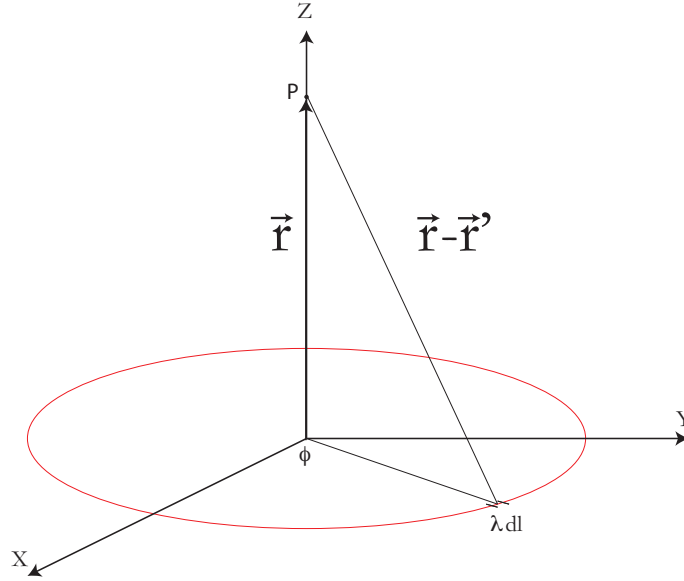


Figura 2.8: Esquema para el cálculo del campo eléctrico debido a una espira cargada de radio R .

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl'}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (z \hat{k} - R \cos \phi' \hat{i} - R \sin \phi' \hat{j}), \quad (2.26)$$

o bien,

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[z \hat{k} \int_0^{2\pi} d\phi' - R \hat{i} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' - R \hat{j} \int_0^{2\pi} d\phi' \sin \phi' \right]. \quad (2.27)$$

De esta forma tenemos que el campo eléctrico de una espira circular de radio R es dado por

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R z}{2 \epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}. \quad (2.28)$$

Notemos que esta última expresión puede ser escrita de forma conveniente como

$$\vec{E}(z) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{z \hat{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2.29)$$

2.4.5. Campo eléctrico para un plano infinitamente grande con densidad superficial de cargas constante.

Este cálculo lo podemos realizar usando el resultado anterior. En efecto, considerando la figura 2.9, podemos sumar las contribuciones de todas las espiras en el rango

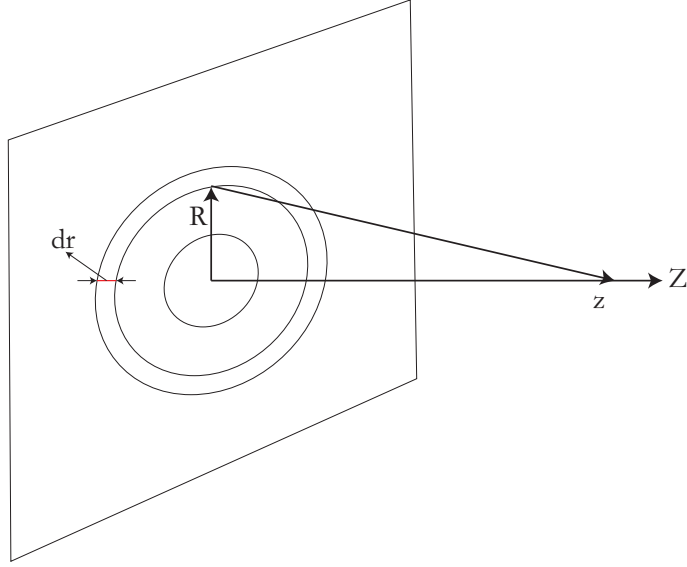


Figura 2.9: Esquema para el cálculo del campo eléctrico debido a un plano infinito con densidad superficial de cargas constante, a partir del resultado de una espira cargada de radio $R = r$.

$0 < R < \infty$. El cambio diferencial del campo eléctrico se debe al aumento en el radio de la espira r , donde hemos cambiado la variable $R \rightarrow r$. Así, cada espira elemental contribuye con

$$d\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}, \quad (2.30)$$

donde $dq = 2\pi \sigma r dr$. De esta forma, podemos integrar directamente,

$$\vec{E}(z) = \hat{k} \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r' dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}}. \quad (2.31)$$

Realizando el cambio de variable $u = z^2 + r'^2$, y luego de realizar la integración elemental, obtenemos

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}. \quad (2.32)$$

Observamos que el campo eléctrico de una distribución plana infinita de densidad σ constante, es constante en todos los puntos del espacio y es normal a la superficie cargada.

2.4.6. Campo eléctrico para una distribución esférica con densidad superficial de cargas constante.

Siguiendo el procedimiento de usar la espira circular descrita en 2.4.4, realizaremos el cálculo directo del campo eléctrico debido a una distribución superficial de cargas con simetría esférica. Así, basados en la figura 2.10, y usando la expresión (2.29), tenemos que cada elemento de superficie aporta de forma elemental al campo total un campo dado por

$$d\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{s dq}{(s^2 + l^2)^{3/2}} \hat{r}, \quad (2.33)$$

donde $dq = 2\pi\sigma R du$, junto con las siguientes ligaduras: $s = r - u$ y $R^2 = u^2 + l^2$. De esta forma, podemos sumar todas las contribuciones usando como variable de integración al parámetro s , tal que podemos escribir

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\hat{r} \frac{R\sigma}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^{r-R} \frac{s ds}{(R^2 - r^2 + 2rs)^{3/2}}. \quad (2.34)$$

Esta última expresión puede ser integrada por partes, producto del cual obtenemos

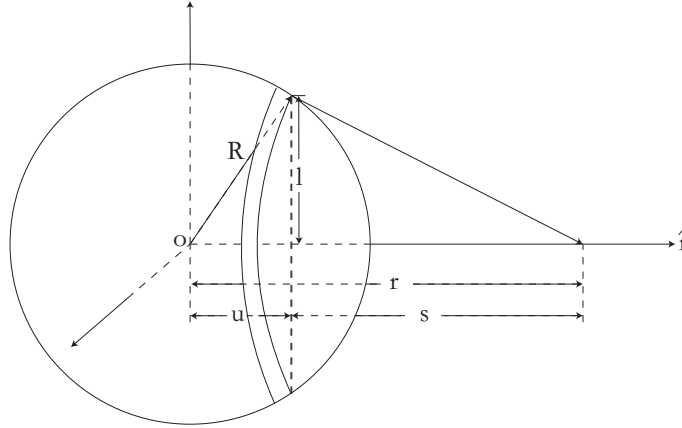


Figura 2.10: Esquema para el cálculo del campo eléctrico debido a una superficie esférica con densidad de cargas σ constante, a partir del resultado de una espira cargada de radio $R = r$.

que si $r > R$, el campo eléctrico es dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (2.35)$$

donde $Q = 4\pi R^2\sigma$, mientras que para $r < R$, tenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.36)$$

2.4.7. Campo eléctrico para una distribución esférica con densidad volumétrica de cargas constante.

El principio de superposición nos asegura que el campo eléctrico en un punto puede ser encontrado sumando cada contribución individual de una determinada configuración. En base a esto mismo, podemos usar el resultado precedente para calcular el campo eléctrico de una esfera cargada uniformemente, sumando cada superficie esférica cuyo radio es variable. De esta forma, el campo eléctrico elemental es dado por

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (2.37)$$

donde $Q = 4\pi s^3 \rho/3$, de tal forma que $dQ = 4\pi s^2 \rho ds$. Para el exterior de la distribución $r > R$, tenemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho \hat{r}}{\epsilon_0 r^2} \int_0^R s^2 ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (2.38)$$

mientras que en el interior $r < R$ podemos escribir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho \hat{r}}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r s^2 ds = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}. \quad (2.39)$$

2.5. Ley de Gauss para el campo electrostático

2.5.1. Flujo Eléctrico

Se define como *flujo eléctrico* a la medida del número de líneas de campo eléctrico que pasan a través de una superficie S :

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da, \quad (2.40)$$

donde \hat{n} es el vector normal a la superficie infinitesimal da . Obviamente, en superficies perpendiculares al campo eléctrico \vec{E} el flujo es igual a cero.

2.5.2. Ley de Gauss

Esta ley relaciona la componente normal del campo eléctrico sobre una superficie S y la carga total encerrada por dicha superficie.

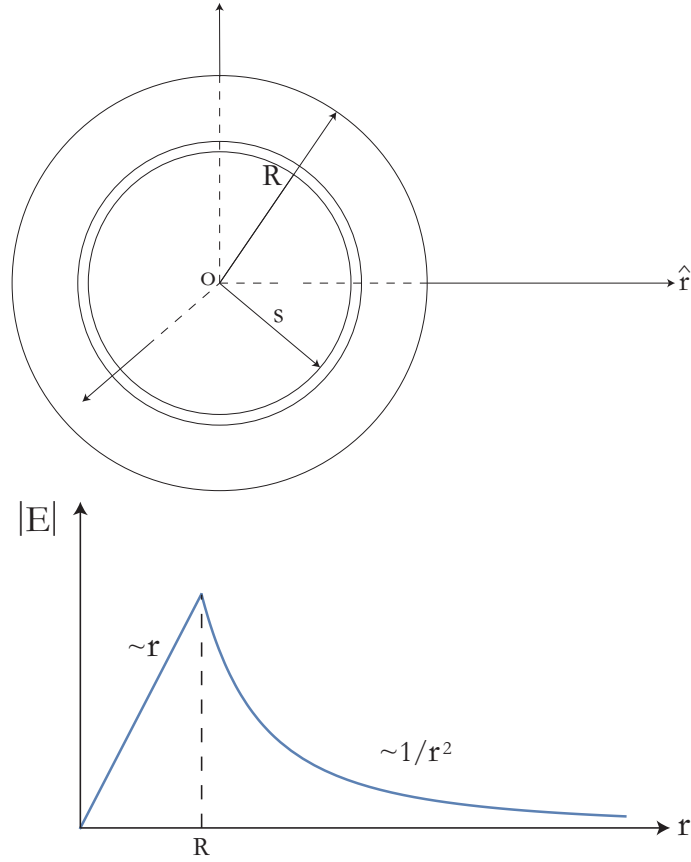


Figura 2.11: ARRIBA: Esquema para el cálculo del campo eléctrico debido a una distribución esférica con densidad de cargas ρ constante; ABAJO: Comportamiento del módulo del campo eléctrico en función de la coordenada radial.

Para una partícula de carga q situada en el origen, el campo eléctrico en el punto \vec{r} viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2.41)$$

de forma que la integral sobre una superficie cerrada será

$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \hat{n} da}{r^3}. \quad (2.42)$$

Definiendo el *ángulo sólido elemental* por medio de la relación

$$d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot \hat{n} da}{r^3} = \frac{\hat{r} \cdot \hat{n} da}{r^2}, \quad (2.43)$$

podemos escribir sin pérdida de generalidad

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega. \quad (2.44)$$

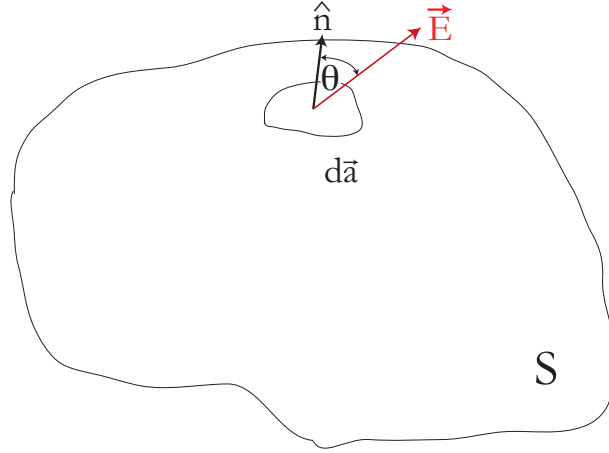


Figura 2.12: .

Aca debemos que analizar dos situaciones diferentes:

1. Carga exterior a S : En este caso, debido que la normal \hat{n} apunta siempre hacia afuera de la región encerrada por la superficie S , cada contribución se cancela, de manera que tenemos como resultado general que

$$\oint_S d\Omega = 0. \quad (2.45)$$

2. Carga interior a S : En este caso, la integración del ángulo sólido nos lleva a

$$\oint_S d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi, \quad (2.46)$$

y así, tenemos que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.47)$$

Para una distribución discreta de n cargas eléctricas puntuales interiores a S se tiene que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint_S \left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^n (\Phi_e)_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}. \quad (2.48)$$

2.6. Conductores en equilibrio electrostático

Según el comportamiento eléctrico de los materiales, éstos se pueden separar en dos grandes grupos: *conductores* y *aisladores*.

1. Conductores: (metales) son sustancias que tienen un gran número de portadores de carga libre. Estos portadores son libres en el sentido que pueden moverse con libertad en el interior del material. Responden a campos eléctricos infinitesimales y continúan su movimiento mientras persista el campo. Después de un tiempo extremadamente pequeño (tiempo de relajación) el conductor alcanza su equilibrio, es decir, los portadores alcanzan posiciones tales que la fuerza neta sobre todos ellos es cero. En ausencia de campo eléctrico, y debido al movimiento caótico de los portadores, no se detecta movimiento en una dirección particular, es decir, no hay desplazamiento neto.



Figura 2.13: IZQUIERDA: Esquema del movimiento de electrones en presencia de un campo eléctrico uniforme. Las cargas eléctricas se ordenan según el campo eléctrico; CENTRO: Comportamiento de las cargas eléctricas en ausencia del campo eléctrico. Hay movimiento caótico de las cargas por lo que no se detecta movimiento en alguna dirección particular, es decir, no hay desplazamiento neto; DERECHA: Simbología para describir un conductor en equilibrio electrostático.

2. Aisladores: se caracterizan porque no contienen cargas libres. En ausencia de campo no se observa movimiento de cargas. En presencia de un campo eléctrico las cargas se mueven con dificultad y permanecen dentro del material indefinidamente.

Ciertos materiales (semi-conductores, electrolitos) tienen propiedades eléctricas intermedias entre las de los conductores y aisladores. En presencia de un campo eléctrico, estos materiales se comportan casi como los conductores, aunque su respuesta

transitoria es algo más lenta. Necesitan más tiempo para alcanzar el equilibrio electrostático.

Finalmente, cuando un conductor alcanza el equilibrio electrostático (las cargas libres en sus posiciones de equilibrio), su interior debe ser una región donde no existe campo eléctrico: *en condiciones estáticas, el campo eléctrico en un conductor se anula*. Es decir,

$$\vec{E} = \vec{0}, \quad (\text{en el interior del conductor}) \quad (2.49)$$

lo cual nos permite argumentar que *la carga neta en el interior de un conductor es cero*. Además, ya que $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, el campo eléctrico en un punto próximo a la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \quad (\text{sobre la superficie}). \quad (2.50)$$

2.7. Trabajo y Energía eléctrica

Consideremos una carga en presencia de un campo eléctrico. Ésta experimenta una fuerza neta dada por

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (2.51)$$

Para mantener esta carga en equilibrio ó para moverla con velocidad constante es

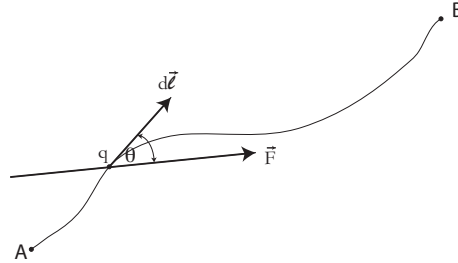


Figura 2.14: Trabajo necesario para llevar una carga eléctrica q desde el punto A hasta el punto B .

necesario aplicar una fuerza \vec{F}_R de igual magnitud pero en sentido contrario, es decir,

$$\vec{F}_R = -q \vec{E}. \quad (2.52)$$

Clásicamente, el trabajo representa la fuerza necesaria para mover una carga de un punto a otro. Así, podemos escribir de forma general

$$dW = \vec{F}_R \cdot d\vec{\ell} = F_R d\ell \cos \theta. \quad (2.53)$$

Esta cantidad (escalar) puede ser positiva o negativa dependiendo si el trabajo es realizado a favor o en contra del campo.

$$\int_A^B dW = \Delta W = \int_A^B \vec{F}_R \cdot d\vec{\ell} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}. \quad (2.54)$$

Si el trabajo realizado sobre una trayectoria cerrada ζ es igual a cero, entonces decimos que la fuerza es *conservativa*:

$$\oint_{\zeta} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \Rightarrow \vec{F} \text{ es conservativa.} \quad (2.55)$$

Como ejemplo, consideremos el trabajo necesario para mover una carga $-q_2$ desde el punto A a B en presencia del campo eléctrico generado por una carga q ubicada en el origen. Por la definición, tenemos que

$$\Delta W = \int_A^B \frac{q q_2}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{q q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (2.56)$$

Este resultado nos demuestra que el trabajo es independiente de la trayectoria usada para ir desde A hasta B . En virtud de esto último, notemos que

$$\Delta W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B (-\vec{\nabla} U) \cdot d\vec{\ell} = U(B) - U(A), \quad (2.57)$$

donde hemos definido la *energía potencial electrostática* $U(r)$ por medio de la relación:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_2}{r}. \quad (2.58)$$

Finalmente, notemos que esta definición nos indica que $U \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

2.7.1. Diferencia de potencial eléctrico

Definimos como *diferencia de potencial eléctrico* a la variación de energía potencial por unidad de carga (q_2 carga de prueba):

$$\Delta V(\vec{r}) \equiv V(r) - V(\infty) = V(r) = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{U(r)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (2.59)$$

Esta magnitud se mide en (unidades MKSA) en [V]: Volts. Con esta definición, tenemos que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(r), \quad (2.60)$$

y también, de forma absolutamente general,

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (2.61)$$

2.8. Ecuaciones diferenciales de la electrostática

El teorema de Gauss nos entrega la primera ecuación diferencial de la electrostática

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.62)$$

Ahora, ya que la fuerza electrostática es conservativa, tenemos que el campo eléctrico puede ser expresado como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (2.63)$$

Así, reemplazando esto último en la ley de Gauss, se encuentra que

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.64)$$

la cual es llamada la *ecuación de Poisson*, que se reduce a la ecuación de laplace en el caso de $\rho = 0$.

Aplicando el operador rotacional a la ecuación (2.63), y recordando que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = \vec{0}$, encontramos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad (2.65)$$

es decir, el campo electrostático es *irrotacional*.

2.8.1. Condiciones de contorno

Tenemos dos ecuaciones diferenciales para el campo eléctrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.66)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}. \quad (2.67)$$

Estas son 4 ecuaciones de primer orden que se deben resolver de forma simultánea. Por lo tanto, debemos tener, en general, 4 constantes a determinar. Aunque estas condiciones dependen de cada problema, podemos enunciar 7 condiciones generales:

1. El campo y el potencial son cero en el infinito si la distribución de carga está limitada dentro de una región finita del espacio.
2. El campo y el potencial son finitos en los puntos donde no existen cargas eléctricas puntuales.
3. El campo y el potencial son finitos a lo largo de líneas sobre las cuales $\lambda = 0$.

4. El potencial es siempre continuo a través de superficies cargadas o no.
5. La componente tangencial del campo eléctrico es siempre continua a través de superficies cargadas o no.
6. La componente normal del campo eléctrico es continua a través de superficies sobre las cuales $\sigma = 0$, y cuando $\sigma \neq 0$ presenta una discontinuidad igual a σ/ϵ_0 .
7. El campo eléctrico es continuo a través de superficies en las cuales $\sigma = 0$.

2.8.2. Ejemplos de aplicación de las ecuaciones diferenciales

Campo de una distribución de cargas limitada por planos paralelos infinitos.

Una distribución volumétrica de cargas de densidad $\rho_q = \rho_0 \cos x$ se encuentra entre dos planos infinitos. Se desea calcular el campo eléctrico en todo el espacio, como es mostrado en la figura 2.15. Debido a la simetría del campo, podemos expresar

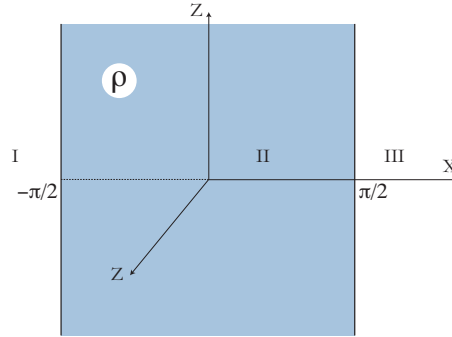


Figura 2.15: Campo en todo el espacio debido a una distribución volumétrica ρ_q puesta entre dos planos infinitos.

sin pérdida de generalidad que $\vec{E} = E(x)\hat{i}$, y por lo tanto, la divergencia del campo se puede expresar de forma absolutamente general como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.68)$$

En base a ésta relación, buscamos las ecuaciones diferenciales que se satisfacen en cada región, las cuales están definidas como sigue: región I: $-\infty < x < -\pi/2$; región II: $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; región III: $\pi/2 < x < \infty$.

2.9. Método de imágenes eléctricas

El método de imágenes eléctricas permite el cálculo del campo y del potencial electrostático de ciertos problemas que no pueden ser resueltos por los métodos hasta ahora estudiados. Se trata, en general, de conductores cargados cuya densidad superficial de cargas no se conoce, sino que debe ser calculada simultáneamente con la determinación del campo y del potencial. Por lo mismo este método es de aplicación restringida.

El método de imágenes eléctricas se fundamenta esencialmente en el *TEOREMA DE UNICIDAD DEL POTENCIAL*, el cual permite que sea posible encontrar la solución de problemas complicados usando soluciones conocidas de problemas más simples. El teorema de unicidad del potencial establece que la solución de la ecuación de Poisson y Laplace, satisfaciendo además ciertas condiciones de contorno, es *ÚNICA* si y sólo si *el contorno es una superficie cerrada y se especifica ya sea el potencial o la derivada normal del potencial en cada punto de dicha superficie*. El primer caso se conoce como el *problema de Dirichlet* y el segundo como *problema de Neuman*.

Cuando un conductor, eléctricamente neutro, se coloca en presencia de cargas se produce un fenómeno de inducción en el conductor, las cargas negativas son atraídas o repelidas por las cargas presentes de acuerdo al signo de ellas y se distribuyen en la superficie del conductor de tal manera que el campo eléctrico en el interior del conductor sea nulo. En estas condiciones el campo y el potencial en todo el espacio serán producidos por las cargas presentes y la distribución superficial de cargas inducidas que ahora existe en el conductor. Naturalmente el conductor continua siendo eléctricamente neutro. En algunos problemas de este tipo, es posible sustituir la distribución superficial de cargas inducidas en el conductor por ciertas cargas *ficticias* que produzcan el mismo efecto fuera del conductor. Así, el problema inicialmente propuesto (problema *real*) se transforma en un problema equivalente (problema *ficticio*) formado por las cargas presentes y las cargas ficticias. Una vez resuelto el problema ficticio, es decir, obtenida una expresión del potencial en todo el espacio, se puede establecer explícitamente la equivalencia entre ambos problemas y demostrar que el potencial encontrado, con ciertas restricciones, es la solución del problema inicialmente propuesto. Se debe demostrar que dicho potencial satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno establecidas, por el teorema de unicidad del potencial, queda así demostrado que es la solución al problema propuesto. Conocido el potencial, se puede determinar el valor del campo eléctrico y por tanto, se puede calcular la densidad superficial de cargas inducidas en el conductor. Este método de resolución se llama *método de las imágenes eléctricas* y a las cargas ficticias se les designa como las *imágenes eléctricas* de las cargas presentes con relación al conductor en consideración.