Nombre ……………………………………………………………… Nota ……………

3ª. prueba parcial

24 de Julio de 2018

En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible

---

1. (a) Probar que los conjuntos

$B_1 = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ y $B_2 = \{1, x-3, (x-3)^2\}$.

son bases del conjunto **P²(x)** de todos los polinomios en la variable x de grado menor o igual a 2. **(0,5 puntos)**

(b) Hallar la matriz de pasaje de un sistema de coordenadas en la base B_1 a otro en la base B_2. **(1.0 puntos)**

(c) Trabajando con matrices, exprese al polinomio $p(x) = 2 - x + x^2$ en la base B_2. Compruebe el resultado anterior reemplazando las coordenadas en la combinación lineal directamente. **(0.5 puntos)**

2. (a) Determine una base y la dimensión del subespacio S_1 de $\mathbf{R}^3$ generado por el conjunto de vectores:

$$Gen\, S_1 = \{(-2,1,2)(1,0,-3)(6,-2,-10)\}$$ **(0.5 puntos)**

(b) Dado el espacio vectorial

$$S_2 = \{(x,y,z) \in R^3,\ 2x - y - z = 0\}$$

encuentre una base y la dimensión del subespacio vectorial $S_1 \cap S_2$ **(1.0 puntos)**

(c) Encuentre la dimensión del subespacio $S_1 + S_2$ vinculándola con las dimensiones de los subespacios S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$

¿Es la suma de subespacios $S_1 + S_2$ una suma directa? Explique brevemente. **(0.5 puntos)**

3. (a) Dado los vectores $\vec{a} = (1,-1,0)$ y $\vec{b} = (2,k,0)$, encuentre el valor de k que hace que el espacio vectorial E_1 generado por $\{\vec{a},\vec{b}\}$ sea de dimensión 1. **(0.5 puntos)**

(b) ¿Qué plano del espacio se genera si $k = 3$? **(0.5 puntos)**

(c) En ese último caso, encuentre una base ortonormal de E_1 que contenga un vector colineal con (1, -1, 0). **(1.0 puntos)** jercicio 1

(a) $B_1 = \{(1,0,0)(-1,1,0)(1,-2,1)\}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$ por tanto los vectores son linealmente independientes. ES UNA BASE.

$B_2 = \{(1,0,0)(-3,1,0)(9,-6,1)\}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$ ES BASE

(b) Debemos pasar por la base canónica $B_c = \{1, x, x^2\}$

$$B_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} B_c \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} B_2$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

La matriz buscada es:

$$M_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) $p(x) = (2, -1, 1)_{\text{Base canónica}}$

$$M_{B_c \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{Base } 2}$$

$$p(x) = 8 \cdot 1 + 5 \cdot (x-3) + 1 \cdot (x-3)^2$$

Desarrollando:

$$p(x) = 8 + 5x - 15 + x^2 - 6x + 9$$

$$\boxed{p(x) = 2 - x + x^2}$$

Se comprueba que está bien

Ejercicio 2:

(a) $S_1 = \{(-2,1,2)(1,0,-3)(6,-2,-10)\}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 + F_1]{F_2' = 2F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 + 2F_2]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to \boxed{\dim S_1 = 2}$ $\boxed{\text{Base } S_1 = \{(-2,1,2)(1,0,-3)\}}$

(Otras posibilidades también son válidas)

(b) S_2 es un plano $\Rightarrow \boxed{\dim S_2 = 2}$

S_1 es el conjunto de puntos:

$$(x,y,z) = \alpha(-2,1,2) + \beta(1,0,-3)$$

$$\begin{cases} x = -2\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = 2\alpha - 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = \beta \\ \dfrac{-z + 2y}{3} = \beta \end{array}$$

$$\Rightarrow x + 2y = \frac{-z + 2y}{3} \Rightarrow \boxed{3x + 4y + z = 0}$$

plano S_1

Sistema: $\begin{array}{l} S_1: 3x + 4y + z = 0 \\ S_2: 2x - y - z = 0 \end{array}$

Un grado de libertad

Sumando: $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 5x + 3y \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\frac{5}{3}\alpha \\ z = \frac{11}{3}\alpha \end{array}$

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ (x,y,z) = \left(\alpha, \frac{-5}{3}\alpha, \frac{11}{3}\alpha\right) \right.$$

$$(x,y,z) = \frac{\alpha}{3}\underbrace{(3,-5,11)}_{\text{Base}} \longleftarrow \boxed{\dim(S_1 \cap S_2) = 1}$$

(c) $\boxed{\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)}$

$$\dim(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

No es suma directa porque $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 0$

Ejercicio 3:

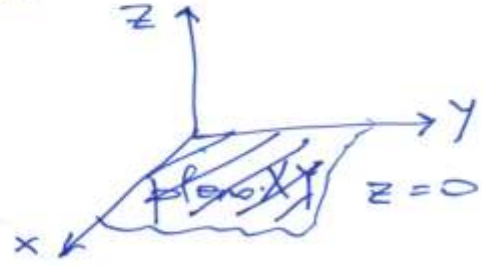
(a) Deberá ser $(2,k,0) = \alpha(1,-1,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ k = -\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

Si $\boxed{k=-2} \Rightarrow \boxed{\dim E_1 = 1}$

(b) $(x,y,z) = \alpha(1,-1,0) + \beta(2,3,0)$

Claramente $z = 0 \Rightarrow \boxed{\text{plano } XY}$



(c) $\vec{v_1} = (1,-1,0)$

$$\vec{v_2} = (2,3,0) - \frac{(1,-1,0)(2,3,0)}{(1,-1,0)(1,-1,0)} \cdot (1,-1,0)$$

$$\vec{v_2} = (2,3,0) - \frac{2-3+0}{1+1+0}(1,-1,0)$$

$$\vec{v_2} = (2,3,0) + \frac{1}{2}(1,-1,0)$$

$$\vec{v_2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) = \frac{5}{2}(1,1,0)$$

$\vec{v_1} = (1,-1,0) \qquad \vec{v_2} = (1,1,0)$

Falta normalizar:

$$\vec{u_1} = \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)}$$

$$\text{ó } \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}$$

$$\vec{u_2} = \frac{\vec{v_2}}{\|\vec{v_2}\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}$$