Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba III
Métodos Matemáticos
Licenciatura en Física - 2015
IPGG

Obs. La prueba es de carácter individual.

(I) Espacio Bidimensional

El Hamiltoniano de un sistema de dos estados está dado por:

$$\widehat{H} = E\left(\ |1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2| - i\,|1\rangle \langle 2| + i\,|2\rangle \langle 1| \ \right)$$

donde $|1\rangle$ y $|2\rangle$ forman una base ortonormal completa y E es una constante real con dimensiones de energía.

a).- (10%) ¿Es $\widehat{H}$ hermítiano?.
b).- (15%) Halle la forma matricial de $\widehat{H}$ en la base antes mencionada.
c).- (20%) Evalúe $\left[\widehat{H}, |1\rangle \langle 1|\right]$ y $\left[\widehat{H}^2, |1\rangle \langle 2|\right]$
d).- (25%) Halle valores y vectores propios normalizados de $\widehat{H}$
e).- (30%) Escriba los vectores $|1\rangle$ y $|2\rangle$ como combinaciones lineales de los vectores propios de $\widehat{H}$.

(II) Operador Traslación

Considere la transformación unitaria:

$$\exp\left(i\alpha\widehat{k}\right) |\phi\rangle = |\psi\rangle$$

siendo α un escalar real. Demuestre formalmente a partir de la operación anterior que:

$$\psi\left(x\right) = \phi\left(x + \alpha\right)$$

(III) Operador Matricial - diagonalización

Considere el operador:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

a).- (25%) Halle valores y vectores propios normalizados de $\widehat{A}$.
b).- (25%) Construya la matriz $\widehat{U}$ con los autovectores (columna) de $\widehat{A}$ y verifique que:

$$\widehat{U}^{\dagger}\widehat{A}\widehat{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

siendo λ_1, λ_2 los valores propios de $\widehat{A}$.

c).- (30%) Halle la representación en ket-bras de $\widehat{A}$.

d).- (20%) Muestre que $\exp\left(a\widehat{A}\right) = \widehat{\mathbf{1}}\cosh(a) + \widehat{A}\sinh(a)$. ($a$ es un escalar arbitrario).

(IV) Operadores y Conmutación

Si $\widehat{\mathbf{A}}$ y $\widehat{\mathbf{B}}$ conmutan y si $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ son dos autovectores de $\widehat{\mathbf{A}}$ con diferentes autovalores, muestre que:

a).- (50%) $\widehat{\mathbf{B}}\left|\varphi_1\right\rangle$ es también un autovector de $\widehat{\mathbf{A}}$ con el mismo autovalor.

b)-. (50%) $\left\langle\varphi_1\left|\widehat{\mathbf{B}}\right|\varphi_2\right\rangle = 0$.

(V) Álgebra de Operadores

Demuestre:

a).- (25%) $Tr\left(\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\right) = Tr\left(\widehat{B}\widehat{C}\widehat{A}\right)$

b)-. (30%) $Tr\left(|\Psi\rangle\langle\Phi|\right) = \langle\Phi|\Psi\rangle$

c).- (45%) $\left[\exp(a\widehat{x}), \widehat{k}\right] = ia\exp(a\widehat{x})$

— Certámen 3 —

Probl. 1

$$\hat{H} = E\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| - i\,|1\rangle\langle 2| + i\,|2\rangle\langle 1| \right)$$

con $\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2)$

a) $$\hat{H}^{+} = E\left((|1\rangle\langle 1|)^{+} - (|2\rangle\langle 2|)^{+} + i\,(|1\rangle\langle 2|)^{+} - i\,(|2\rangle\langle 1|)^{+} \right)$$

$$\hat{H}^{+} = E\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + i\,|2\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 2| \right) = \hat{H}$$

$\hat{H}$ es hermitiano //

b) $H_{ij} = \langle i|\hat{H}|j\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & -iE \\ iE & -E \end{pmatrix}$$

c) ⊛ $[\hat{H}, |1\rangle\langle 1|] = \hat{H}|1\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|\hat{H}$

Ahora $\hat{H}|1\rangle = E|1\rangle\langle 1|1\rangle + iE|2\rangle\langle 1|1\rangle$
$= E|1\rangle + iE|2\rangle$ ///

y

$$\langle 1|\hat{H} = E\langle 1| - iE\langle 2|$$

$$\Downarrow$$

$$\langle 1|\hat{H} = \left(\hat{H}|1\rangle\right)^{\dagger}$$

$\therefore$

$$[\hat{H}, |1\rangle\langle 1|] = E|1\rangle\langle 1| + iE|2\rangle\langle 1| - \left(E|1\rangle\langle 1| - iE|1\rangle\langle 2|\right)$$

$$= E\left(\cancel{|1\rangle\langle 1|} + i|2\rangle\langle 1| - \cancel{|1\rangle\langle 1|} + i|1\rangle\langle 2|\right)$$

$$= iE\left(|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|\right)$$

(**) $[\hat{H}^2, |1\rangle\langle 2|] = \hat{H}^2|1\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 2|\hat{H}^2$

Matricialmente

$$\hat{H}^2 = E^2\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} = E^2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}^2 = 2E^2\hat{\mathbb{1}}$$

luego

$$\left[\hat{H}^2, |1\rangle\langle 2|\right] = 2E^2 \left[\hat{\mathbb{1}}, |1\rangle\langle 2|\right] = 0$$

d) Valores propios

$$\det\left(\hat{H} - \lambda\hat{\mathbb{1}}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} E-\lambda & -iE \\ iE & -E-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 - 2E^2 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = +E\sqrt{2} \\ \lambda = -E\sqrt{2} \end{cases}$$

Vectores propios

No normalizados!

$$v(E\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -i(1+\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v(-E\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -i(1-\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Obs.</u>. $v(E\sqrt{2}) \perp v(-E\sqrt{2})$

e) No considerado

Probl. 2

$$e^{i\alpha\hat{k}}|\phi\rangle = |\psi\rangle \quad / \langle x|$$

$$\langle x|e^{i\alpha\hat{k}}|\phi\rangle = \langle x|\psi\rangle = \psi(x)$$

$$\hat{\mathbb{1}} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, |k\rangle\langle k|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x|e^{i\alpha\hat{k}}|k\rangle\langle k|\phi\rangle\, dk = \psi(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\, e^{i\alpha k}|k\rangle\langle k|\phi\rangle\, dk = \psi(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha k} \langle x|k\rangle\langle k|\phi\rangle dk = \psi(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha k}\, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \langle k|\phi\rangle\, dk = \psi(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha+x)k}}{\sqrt{2\pi}} \langle k|\phi\rangle\, dk = \psi(x)$$

pero $\frac{e^{i(x+\alpha)k}}{\sqrt{2\pi}} = \langle x+\alpha | k \rangle$

$\therefore$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x+\alpha | k \rangle \langle k | \phi \rangle dk = \psi(x)$$

$$\langle x+\alpha | \phi \rangle = \psi(x)$$

$$\phi(x+\alpha) = \psi(x) \quad // \quad \text{QED.}$$

Probl. 3

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$$

a) Valores propios $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1.$

Vectores propios

para $\lambda = 1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$

para $\lambda = -1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$

vectores normalizados $\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$; $\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ //

b) $\hat{U} = \left(\tilde{v}_1 \,\vdots\, \tilde{v}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

luego

$$\hat{U}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$\hat{U}^{+} \hat{A} \hat{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

c) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|$

d) se observe que $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 = \hat{A}^2 = \hat{\mathbb{1}}$!!!

luego $e^{a\hat{A}} = \sum_{n \geq 0} a^n \frac{\hat{A}^n}{n!}$

esto es:

$$e^{a\hat{A}} = \hat{\mathbb{1}} + a\hat{A} + a^2\frac{\hat{A}^2}{2!} + a^3\frac{\hat{A}^3}{3!} + a^4\frac{\hat{A}^4}{4!} + a^5\frac{\hat{A}^5}{5!} + \ldots$$

$$= \hat{\mathbb{1}} + a\hat{A} + \frac{a^2}{2!} + \hat{A}\frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \hat{A}\frac{a^5}{5!} + \ldots$$

$$= \hat{\mathbb{1}}\left(1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \ldots\right) + \hat{A}\left(a + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \ldots\right)$$

$$= \hat{\mathbb{1}}\cosh(a) + \hat{A}\,\mathrm{senh}(a) \quad //$$

Problema 4

Se tiene que $\hat{A}|\varphi_1\rangle = a_1|\varphi_1\rangle$

$$\hat{A}|\varphi_2\rangle = a_2|\varphi_2\rangle$$

y $[\hat{A},\hat{B}]=0$

Evaluemos y analicemos lo sigte.

$$\langle\varphi_1|[\hat{A},\hat{B}]|\varphi_2\rangle = 0$$ (dado que conmutador es nulo)

$$\langle\varphi_1|\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}|\varphi_2\rangle = 0$$

$$\langle\varphi_1|\hat{A}\hat{B}|\varphi_2\rangle - \langle\varphi_1|\hat{B}\hat{A}|\varphi_2\rangle = 0.$$

$$a_1^*\langle\varphi_1|\hat{B}|\varphi_2\rangle - a_2\langle\varphi_1|\hat{B}|\varphi_2\rangle = 0.$$

$$(a_1^*-a_2)\langle\varphi_1|\hat{B}|\varphi_2\rangle = 0.$$

como $a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1^* \neq a_2$

$$\Downarrow$$

$$\langle\varphi_1|\hat{B}|\varphi_2\rangle = 0$$

Ahora veamos lo sigte.

$$\hat{A}|\varphi_1\rangle = a_1|\varphi_1\rangle \quad / \hat{B}$$

$$\hat{B}\hat{A}|\varphi_1\rangle = a_1 \, B|\varphi_1\rangle \qquad \text{pero} \quad \hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{A}\hat{B}|\varphi_1\rangle = a_1 \hat{B}|\varphi_1\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{A}\left(\hat{B}|\varphi_1\rangle\right) = a_1 \left(\hat{B}|\varphi_1\rangle\right)$$

$\therefore$ $\hat{B}|\varphi_1\rangle$ es un autovector de $\hat{A}$ con autovalor a_1 //.

Probl. 5

a) $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \sum_i (\hat{A}\hat{B}\hat{C})_{ii} = \sum_i \langle i|\hat{A}\hat{B}\hat{C}|i\rangle$

Introducimos una base arbitraria $\{|i\rangle\}$ ortonormal. !!!

$$= \sum_i \sum_j \sum_k A_{ij} B_{jk} C_{ki}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k B_{jk} C_{ki} A_{ij}$$

$$= \sum_j \sum_i \sum_k B_{jk} C_{ki} A_{ij}$$

$$= \sum_j (\hat{B}\hat{C}\hat{A})_{jj} = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A}) \quad //.$$

b) $\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\phi|) = \sum_i \langle i|\psi\rangle\langle\phi|i\rangle$

Usamos una base arbitraria $\{|i\rangle\} \Rightarrow$ ortonormal.

$$\mathrm{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\phi|\right) = \sum_i \langle\phi|i\rangle\langle i|\psi\rangle$$

$$= \langle\phi|\psi\rangle$$

c) $$[e^{\alpha\hat{x}}, \hat{k}] = \left[\sum_{n\geq 0} \alpha^n \frac{\hat{x}^n}{n!}, \hat{k}\right]$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!}[\hat{x}^n, \hat{k}]$$

Veamos:

$[\hat{x},\hat{k}] = i$

$[\hat{x}^2,\hat{k}] = \hat{x}[\hat{x},\hat{k}] + [\hat{x},\hat{k}]\hat{x}$

$= 2i\hat{x}$

$[\hat{x}^3,\hat{k}] = [\hat{x}\hat{x}^2,\hat{k}] = \hat{x}[\hat{x}^2,\hat{k}] + [\hat{x},\hat{k}]\hat{x}^2$

$= 2i\hat{x}^2 + i\hat{x}^2 = 3i\hat{x}^2$

$\Downarrow$

$[\hat{x}^n,\hat{k}] = in\hat{x}^{n-1}$

luego

$$[e^{\alpha\hat{x}}, \hat{k}] = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} [\hat{x}^n, \hat{k}]$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \, i n \hat{x}^{n-1} \qquad ; \quad n\hat{x}^{n-1} = \frac{d}{d\hat{x}} \hat{x}^n$$

$$= i \frac{d}{d\hat{x}} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{x}^n$$

$$= i \frac{d}{d\hat{x}} e^{\alpha\hat{x}} = i \alpha e^{\alpha\hat{x}} \;//$$