Pauta

Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba Recuperativa
Métodos Matemáticos II
Licenciatura en Física - 2018
IPGG

Obs.: La prueba es de carácter individual.

(I) Proyectando en autovectores $|x\rangle$ y $|k\rangle$

Evalúe los siguientes brackets:

a).- (60%) $\left\langle x \left| e^{\alpha \widehat{\mathbf{k}}} \right| \varphi \right\rangle$ (α=escalar)

b).- (40%) $\langle k |\widehat{\mathbf{x}}| \varphi\rangle$

Obs.: $\langle k | \varphi\rangle = \tilde{\varphi}(k)$ y $\langle x | \varphi\rangle = \varphi(x)$

(II) Misceláneos

a).- (40%) Mostrar que si $\widehat{\mathbf{A}}$ es un operador lineal y $\left\langle a \left| \widehat{\mathbf{A}} \right| a \right\rangle$ es real para todo vector $|a\rangle$, entonces $\widehat{\mathbf{A}}$ es *Hermitiano.*

b).- (30%) Muestre que para un operador de la forma:

$$\widehat{\mathbf{A}} = c_a |a\rangle \langle a| + c_b |b\rangle \langle b| + \cdots + c_z |z\rangle \langle z|$$

donde los coeficientes c_n son constantes reales, es *Hermitiano.*

c).- (30%) Si el producto $\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}$ de dos matrices hermitianas es también hermitiana, demuestre que $\widehat{\mathbf{A}}$ y $\widehat{\mathbf{B}}$ conmutan.

(III) Una ecuación diferencial

El siguiente problema de valores propios es expresado como una EDO:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + \alpha x \varphi(x) = E\varphi(x)$$

donde α y E son escalares.

a).- (10%) Determine cual es el operador en este problema de valores propios.

b).- (20%) Determine si dicho operador es hermítico.

c).- (30%) Exprese la ecuación diferencial en términos de la variable k (número de onda) y la función $\tilde{\varphi}(k)$ (transformada de Fourier de $\varphi(x)$).

d).- (25%) Halle la solución para $\tilde{\varphi}(k)$.

e).- (15%) Escriba la integral que determina $\varphi(x)$.

β_1

1) a) $\langle x | e^{\alpha \hat{k}} | \varphi \rangle = \langle x | e^{\alpha \hat{k}} \hat{\mathbb{1}} | \varphi \rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | e^{\alpha \hat{k}} | k \rangle \langle k | \varphi \rangle dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha k} \langle x | k \rangle \langle k | \varphi \rangle dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha k} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \langle k | \varphi \rangle dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-i\alpha)}}{\sqrt{2\pi}} \langle k | \varphi \rangle dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x - i\alpha | k \rangle \langle k | \varphi \rangle dk$$

$\hat{\mathbb{1}}$

$$= \langle x - i\alpha | \varphi \rangle = \varphi(x - i\alpha)$$

b) $\langle k | \hat{x} | \varphi \rangle = \langle k | \hat{x} \hat{\mathbb{1}} | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle k | \hat{x} | x \rangle \langle x | \varphi \rangle dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \langle k|x\rangle\langle x|\varphi\rangle dx$$

Obs: $x\langle k|x\rangle = x \dfrac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{d}{d(-ik)} \dfrac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} = i\dfrac{d}{dk}\langle k|x\rangle$

$$\therefore \langle k|\hat{x}|\varphi\rangle = i\frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{\infty} \langle k|\underbrace{x\rangle\langle x}_{\hat{\mathbb{1}}}|\varphi\rangle dx$$

$$= i\frac{d}{dk}\langle k|\varphi\rangle = i\frac{d}{dk}\tilde{\varphi}(k)$$

2) a) $\langle a|\hat{A}|a\rangle = \langle a|\hat{A}^{+}|a\rangle^{*}$

dado que $\langle a|\hat{A}|a\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle a|\hat{A}^{+}|a\rangle^{*} = \langle a|\hat{A}^{+}|a\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = \langle a|\hat{A}^{+}|a\rangle$$

$$\Downarrow$$

$\hat{A} = \hat{A}^{+} \Rightarrow \hat{A}$ es hermitiano //

$\overline{P_3}$

b) $\hat{A} = c_a|a\rangle\langle a| + c_b|b\rangle\langle b| + \dots + c_z|z\rangle\langle z|$

(los coef. son reales)

$$\hat{A}^{\dagger} = \left(c_a|a\rangle\langle a| + \dots + c_z|z\rangle\langle z|\right)^{\dagger}$$

$$= c_z^{*}|z\rangle\langle z| + \dots + c_a^{*}|a\rangle\langle a|$$

$$= c_z|z\rangle\langle z| + \dots + c_a|a\rangle\langle a| = \hat{A}$$

$\therefore$ $\hat{A}$ es hermitiano

c) se tiene que $\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$ $\wedge$ $\hat{B}^{\dagger} = \hat{B}$

luego $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} \Rightarrow \hat{C}^{\dagger} = (\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger} = \hat{B}\hat{A}$

$\therefore$ $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ y $\hat{C}^{\dagger} = \hat{B}\hat{A}$

Por condición $\hat{C}^{\dagger} = \hat{C} \Rightarrow \hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}$

$$\Downarrow$$

$$\therefore [\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

$$\Downarrow$$

CONMUTAN.

3) a) $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + \alpha x \varphi(x) = E\varphi(x) \qquad (\alpha, E \in \mathbb{R})$

Obs: $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = \langle x|-\hat{k}^2|\varphi\rangle$

$\alpha x \varphi(x) = \alpha \langle x|\hat{X}|\varphi\rangle$

$E\varphi(x) = E\langle x|\varphi\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\langle x|-\hat{k}^2|\varphi\rangle + \alpha\langle x|\hat{X}|\varphi\rangle = E\langle x|\varphi\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$-\hat{k}^2|\varphi\rangle + \alpha\hat{X}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(-\hat{k}^2 + \alpha\mathbb{1})}_{\hat{H} = -\hat{k}^2 + \alpha\hat{\mathbb{1}}}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

b) $(-\hat{k}^2 + \alpha\hat{X})^{+} = (-(\hat{k}^2)^{+} + \alpha\hat{X}^{+}) \qquad$ pero $\hat{k}^{+} = \hat{k}$, $\hat{X}^{+} = \hat{X}$

$\therefore (-\hat{k}^2 + \alpha\hat{X})^{+} = -\hat{k}^2 + \alpha\hat{X} \Rightarrow$ Es hermítico.

$\overline{P_5}$

c) La ec. es ahora (Hilbert space)

$$(-\hat{k}^2 + \alpha\hat{x})|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \quad \Big| \langle k.$$

$$\langle k|-\hat{k}^2+\alpha\hat{x}|\varphi\rangle = E\langle k|\varphi\rangle \quad ; \quad \langle k|\varphi\rangle = \tilde{\varphi}(k)$$

$$\langle k|-\hat{k}^2|\varphi\rangle + \alpha\langle k|\hat{x}|\varphi\rangle = E\tilde{\varphi}(k)$$

$$-k^2\langle k|\varphi\rangle + \alpha\left(i\frac{d}{dk}\right)\langle k|\varphi\rangle = E\tilde{\varphi}(k)$$

del problema 1.

$\therefore$

$$\alpha\frac{d\tilde{\varphi}(k)}{dk} - k^2\tilde{\varphi}(k) = E\tilde{\varphi}(k)$$

d) $$\frac{d\tilde{\varphi}}{dk} = \frac{1}{\alpha}(E+k^2)\tilde{\varphi}(k) \Longrightarrow \frac{d\tilde{\varphi}(k)}{\tilde{\varphi}(k)} = \frac{1}{\alpha}(E+k^2)\,dk \Big/ \int$$

$$\ln\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\alpha}Ek + \frac{1}{3\alpha}k^3 + cte.$$

$$\tilde{\varphi}(k) = C\, e^{\frac{E}{\alpha}k + \frac{k^3}{3\alpha}} \qquad C = cte.$$

e) $$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, e^{\frac{E}{\alpha}k + \frac{k^3}{3\alpha}}\, dk$$