Métodos Matemáticos Il

Guía IV

Licenciatura en Física

IPGG

Integración múltiple de deltas Dirac

---

a).- Demuestre la propiedad:

$$\delta\left(ax+b\right)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x+\frac{b}{a}\right) \tag{1}$$

b).- Consideremos la integral múltiple:

$$I=\int dx_1 ... \int dx_n\ f\left(x_1, ..., x_n\right)\ \delta\left(a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n+c_1\right)...\delta\left(a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n+c_n\right). \tag{2}$$

Resolviendo iteradamente las integrales y con uso de la propiedad de Ec. (1), demuestre por inducción que la solución a esta integral viene dada por la siguiente fórmula general:

$$I=\frac{1}{|\det\left(\mathbf{A}\right)|}\ f\left(x_1^*, ..., x_n^*\right), \tag{3}$$

donde $\det\left(\mathbf{A}\right)$ es evaluado a partir de la siguiente expresión:

$$\det\left(\mathbf{A}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

y los valores para las variables $\{x_i^*\}$ $(i=1,...,n)$ corresponden a la solución del sistema lineal obtenido por anulación de los los argumentos de las deltas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n = & -c_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n = & -c_n. \end{cases} \tag{5}$$

Densidades de carga

---

a).- Dos placas cuadradas cargadas eléctricamente están situadas una frente a la otra, cada una de ellas tiene arista $2a$ y se encuentran separadas una distancia $2d$. Para un sistema de referencia donde el origen se ubica en el centro geométrico de esta distribución, la placa ubicada en $z=d$ le asociamos una densidad σ_1, mientras la otra placa está caracterizada por una densidad σ_2. Determine la densidad volumétrica de carga de esta distribución.

b).-Considere un anillo de carga Q y radio R el cual yace en el plano $z=0$ y con centro coincidente con el origen. Determine:

- $\rho\left(\mathbf{r}\right)$ en coordenadas cilíndricas.

- $\rho\left(\mathbf{r}\right)$ en coordenadas esféricas.

- Halle el potencial en algún punto z del eje del anillo utilizando la expresión:

$$\phi\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'$$

Resuelva utilizando coordenadas esféricas.

Integración con IBD - Transformada de Fourier

Resuelva las siguientes integrales.

a).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)\cos(\gamma x)}{x^2}\,dx$ (30%)

b).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\alpha x)\exp\left(-\beta x^2\right)\,dx$ (30%)

Desarrollo de una técnica operacional sin deltas

Podemos construir una técnica similar a **IBD** utilizando como base la transformada de Laplace, esto es:

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x)\exp(-kx)\,dx \tag{6}$$

donde $F(k)$ es la transformada de Laplace de $f(x)$. Obtenga las siguientes identidades:

a).-

$$I = \int_0^{\infty} f(x)\exp(-kx)dx = f\left(-\frac{d}{dk}\right)\frac{1}{k}$$

b).-

$$I = \int_0^{\infty} f_1(x)\,f_2(x)\exp(-kx)dx = f_1\left(-\frac{d}{dk}\right)F_2(k) = f_2\left(-\frac{d}{dk}\right)F_1(k)$$

siendo $F_2(k)$ y $F_2(k)$ las transformadas de Laplace de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ respectivamente.

c).-

$$H\left(-\frac{d}{dk}-\beta\right)\frac{1}{k} = \frac{\exp(-k\beta)}{k}$$

Integración con técnica sin delta Dirac

Evalúe con la técnica previamente deducida las siguientes integrales:

a).-

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\exp(-kx)\,dx$$

b).-

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{\exp(x)-1}\,dx$$

donde $m \in \mathbb{N}$. **Hint:** La función Zeta de Riemann está definida a través de la siguiente suma infinita $\zeta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$