Aproximación asintótica y continuación analítica de funciones mediante una técnica heurística

Esteban Olivares & Iván González

Instituto de Física y Astronomía, Universidad de Valparaíso, Chile

Resumen

En este trabajo presentamos un procedimiento alternativo para hallar la continuación analítica o la expansión asintótica de funciones arbitrarias. Nuestro estudio en particular apunta a funciones que son descritas en términos de series hipergeométricas generalizadas como representaciones de expansiones en torno a $x = 0$. Para implementar este procedimiento hemos utilizado algunos elementos asociados a una técnica de integración heurística, la cual se denomina Método de Brackets (MoB, su sigla en inglés) [1, 2]. Los resultados que hemos obtenidos replican lo hallado por otras técnicas convencionales, los cuales están dados como expansiones (hipergeométricas) en torno a $\frac{1}{x} \to 0$. Además, en el contexto de ecuaciones diferenciales, mostramos como es posible generar todas las soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial (hipergeométrica) a partir del conocimiento de solo una de sus soluciones.

I.- La función hipergeométrica generalizada

Muchas de las funciones que aparecen en la Física matemática, ya sean, fundamentales o bien trascendentales, tienen una representación en términos de una serie infinita denominada función hipergeométrica generalizada, inclusive si hablamos de soluciones a integrales, estas pueden ser combinaciones lineales de tales series. Por ende, estudiar el comportamiento y saber como manipular estas funciones se hace una tarea relevante en si misma.

La serie o función hipergeométrica generalizada se define de la siguiente manera:

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\{a\}\\ \{b\}\end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n}\frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

donde los factores $(\alpha)_n$ se denominan símbolos de Pochhammer:

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2}$$

El radio de convergencia R para estas series queda condicionado por la relación entre los índices p y q:

- Si $p \leq q$, entonces $R \to \infty$.
- Si $p = q+1$, entonces $R = 1$
  - Si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente.
  - Si $x = 1$, el requerimiento necesario para la convergencia de la serie es que $Re(\omega) > 0$, donde ω es llamado exceso paramétrico y está dado por la ecuación $\omega = \sum_{j=0}^{q} b_j - \sum_{j=0}^{q+1} a_j$.
  - Si $x = -1$ es suficiente que $Re(\omega) > -1$.
- Si $p > q+1$, $R = 0$ y la serie diverge para todo $x \neq 0$.

Algunos ejemplos de funciones y sus representaciones hipergeométricas:

Función Gamma Incompleta

$$\gamma(a,x) = \frac{x^a}{a}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix}1\\ 1+a\end{matrix}\middle| x\right) \tag{3}$$

Función Error

$$erf(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\middle| -x^2\right) \tag{4}$$

Función de Bessel

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\, {}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\ 1+\alpha\end{matrix}\middle| -\frac{1}{4}x^2\right) \tag{5}$$

Función seno

$$\sin(x) = x\, {}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\middle| -\frac{1}{4}x^2\right), \text{ etc.} \tag{6}$$

II.- El procedimiento

Nuestro objetivo en esta sección es obtener la(s) representación(es) en serie(s) de argumento recíproco, $\frac{1}{x}$, de la función $f(x) = {}_pF_q(\ldots| x)$, esto es, escribir $f(x)$ como una serie expandida en torno a $x \to \infty$. El procedimiento consiste en hallar la expansión en serie de brackets de ${}_pF_q(\ldots| x)$ y a partir de este generar todos los términos que dan origen a la representación en serie de potencias de $\frac{1}{x}$ buscada.

Para hallar la serie de brackets de ${}_pF_q(\ldots| x)$ es necesario escribir la correspondiente serie de brackets de cada símbolo de Pochhammer del numerador. Para uno de estos factores del numerador tenemos que:

$$\left(a_j\right)_n = \frac{\Gamma(a_j+n)}{\Gamma(a_j)}, \qquad (j = 1, \ldots, p), \tag{7}$$

luego, reemplazando la función Gamma del numerador por su representación integral equivalente y aplicando MoB para obtener su serie de brackets equivalente, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\left(a_j\right)_n &= \frac{\Gamma\left(a_j+n\right)}{\Gamma\left(a_j\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(a_j\right)}\int_0^\infty x^{a_j+n-1}\exp(-x)\; dx.\\ &= \sum_{t_j}\phi_{t_j}\frac{\left\langle a_j+n+t_j\right\rangle}{\Gamma\left(a_j\right)} \qquad (j = 1, \ldots, p).\end{aligned} \tag{8}$$

Reemplazando este resultado para cada símbolo de Pochhammer en Ec. (1) se deduce su expansión en serie de brackets equivalente:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \frac{1}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}\\ &\times \sum_{n}\sum_{t_1}\ldots\sum_{t_q}\phi_n\phi_{t_1}\ldots\phi_{t_p}\frac{\prod_{j=1}^{p}\left\langle a_j+n+t_j\right\rangle}{\prod_{l=1}^{q}(b_l)_n}(-x)^n,\end{aligned} \tag{9}$$

el símbolo $\phi_k = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}$ se introduce por convenio y es requerido en la aplicación de MoB. De acuerdo a este formalismo, con p brackets y $p+1$ sumas, se generan p términos (series) con argumento $\frac{1}{x}$.

Luego, utilizando los brackets eliminamos todas las sumas, excepto una, la suma asociada al índice t_i ($i = 1, \ldots p$), entonces obtenemos el siguiente término (serie de potencias en el inverso del argumento):

$$\begin{aligned} T_i &= (-x)^{-a_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\frac{\Gamma\left(a_j-a_i\right)}{\Gamma\left(a_j\right)}\prod_{l=1}^{q}\frac{\Gamma(b_l)}{\Gamma(b_l-a_i)}\\ &\times \sum_{t_i=0}^{\infty}\frac{(a_i)_{t_i}\prod_{l=1}^{q}(1-b_l+a_i)_{t_i}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\left(1-a_j+a_i\right)_{t_i}}\frac{\left(\frac{(-1)^{p+q-1}}{x}\right)^{t_i}}{t_i!},\end{aligned} \tag{10}$$

o equivalentemente descrito como una serie hipergeométrica:

$$\boxed{\begin{aligned} T_i &= (-x)^{-a_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\frac{\Gamma\left(a_j-a_i\right)}{\Gamma\left(a_j\right)}\prod_{l=1}^{q}\frac{\Gamma(b_l)}{\Gamma(b_l-a_i)}\\ &\times {}_{q+1}F_{p-1}\left(\begin{matrix}a_i,\ \{1-b_l-a_i\}_{1\leq l\leq q}\\ \left\{1-a_j+a_i\right\}_{1\leq j\leq p;\ j\neq i}\end{matrix}\middle| \frac{(-1)^{p+q-1}}{x}\right)\end{aligned}} \tag{11}$$

Finalmente la expansión válida para $x \to \infty$ de $f(x)$ es dada como la suma de los términos T_i :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} T_i. \tag{12}$$

II. 1.-Caso p=q+1 → Continuación analítica

La serie en Ec. (1) para este caso tiene radio de convergencia $R = 1$, por lo tanto de acuerdo a Ec. (11) la inversión del argumento genera la continuación analítica [3] de Ec. (1). Como ejemplo básico aplicamos este resultado a la continuación analítica de la función hipergeométrica ${}_2F_1(\ldots| x)$:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\middle| x\right) &\to (-x)^{-a}\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ 1\text{-}c\text{+}a\\ 1\text{-}b\text{+}a\end{matrix}\middle| \frac{1}{x}\right)\\ &+ (-x)^{-b}\frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}b,\ 1\text{-}c\text{+}b\\ 1\text{-}a\text{+}b\end{matrix}\middle| \frac{1}{x}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

II.2.- Caso p≤q → Expansión asintótica

Para este caso las series con argumento invertido son series divergentes ($R = 0$), por lo tanto solo si consideramos truncar la serie entonces obtenemos el comportamiento asintótico para $x \to \infty$. Para una función hipergeométrica arbitraria ${}_pF_q(\ldots| x)$ con las condiciones para p y q impuestas en este caso, este límite asintótico queda definido de la siguiente forma:

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{p}(-x)^{-a_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\frac{\Gamma\left(a_j-a_i\right)}{\Gamma\left(a_j\right)}\prod_{l=1}^{q}\frac{\Gamma(b_l)}{\Gamma(b_l-a_i)}. \tag{14}$$

Además se observa que a través de este método no es posible obtener expansiones asintóticas para el caso $p = 0$, un caso es la función de Bessel $J_\alpha(x)$.

III.- Ecuaciones diferenciales y soluciones linealmente independientes

En esta sección utilizaremos el procedimiento mostrado previamente pero con una finalidad muy distinta, soluciones de ecuaciones diferenciales asociadas a series hipergeométricas. Sea una cierta ecuación diferencial de orden arbitrario de la cual solo conocemos una sola solución, una serie de la forma dada en Ec. (1), a partir de esta solución obtendremos las otras soluciones a esta ecuación y que son linealmente independientes de la que ya conocemos. Este es un procedimiento genérico y supone que los parámetros $\{a\}$ y $\{b\}$ en Ec. (1) son arbitrarios.

El procedimiento requiere esta vez expandir en serie de brackets los símbolos de Pochhammer del denominador y luego con ayuda de los brackets obtener las soluciones faltantes de la ecuación diferencial en cuestión. Para ello utilizaremos la siguiente identidad para los símbolos de Pochhammer del denominador:

$$\frac{1}{(b_l)_n} = (-1)^n\sum_{t_i}\phi_{t_i}\frac{\langle 1-b_l-n+t_i\rangle}{\Gamma(1-b_l)}, \tag{15}$$

lo que nos permite obtener la expansión en serie de brackets requerida para $f(x) = {}_pF_q(\ldots| x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \sum_{n}\sum_{t_1}\ldots\sum_{t_q}\phi_n\phi_{t_1}\ldots\phi_{t_q}\left[(-1)^{q+1}x\right]^n\\ &\times\frac{\prod_{j=1}^{p}\left(a_j\right)_n\prod_{l=1}^{q}\left\langle 1-b_l-n+t_j\right\rangle}{\frac{1}{\prod_{l=1}^{q}\Gamma(1-b_l)}}.\end{aligned} \tag{16}$$

A continuación con el uso de los brackets eliminamos todas las sumas, excepto la asociada al índice t_i ($i = 1, \ldots q$), entonces se obtiene el siguiente término:

$$\begin{aligned} T_i &= \left[(-1)^{q-1}x\right]^{1-b_i}\Gamma(b_i-1)\prod_{j=1}^{p}\frac{\Gamma\left(a_j+1-b_i\right)}{\Gamma\left(a_j\right)}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{q}\frac{\Gamma(b_i-b_l)}{\Gamma(1-b_l)}\\ &\times {}_pF_q\left(\begin{matrix}\left\{a_j+1-b_i\right\}_{1\leq j\leq p}\\ 2-b_i,\ \{1+b_l-b_i\}_{1\leq l\leq q;\ l\neq i}\end{matrix}\middle| x\right)\end{aligned} \tag{17}$$

Cuando los parámetros b_i son distintos entre si, los términos T_i ($i = 1, \ldots, q$) forman una base de soluciones en $x = 0$, en conjunto con la Ec. (1), salvo las constantes, estos son las otras soluciones buscadas:

$$\boxed{\begin{aligned} T_i &\sim \left[(-1)^{q-1}x\right]^{1-b_i}\\ &\times {}_pF_q\left(\begin{matrix}\left\{a_j+1-b_i\right\}_{1\leq j\leq p}\\ 2-b_i,\ \{1+b_l-b_i\}_{1\leq l\leq q;\ l\neq i}\end{matrix}\middle| x\right).\end{aligned}} \tag{18}$$

Un ejemplo ya conocido, la ecuación diferencial:

$$\left(x\frac{d}{dx}+a\right)\left(x\frac{d}{dx}+b\right)y = \left(x\frac{d}{dx}+c\right)y, \tag{19}$$

tiene como solución:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\middle| x\right), \tag{20}$$

y aplicando (18) obtenemos también la otra solución:

$$x^{1-c}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1-c,\ b+1-c\\ 2-c\end{matrix}\middle| x\right). \tag{21}$$

IV.- Conclusiones

Si bien MoB es una herramienta de integración, aquí la hemos aplicado en otro contexto, hallar el comportamiento de una función para argumentos grandes, es decir, en términos de series de potencias en $\frac{1}{x}$. Paralelamente se demuestra su utilidad en el estudio de ecuaciones diferenciales y sus soluciones. La flexibilidad de MoB como procedimiento que abarca diversas tareas en el cálculo, hacen que esta metodología sea una poderosa herramienta. Todos los procedimientos utilizados aquí son extendibles para tratar series de mayor complejidad a las presentadas aquí, por ejemplo series hipergeométricas de más de una variable, etc.

Referencias

[1] I. González and V. Moll, Definite integrals by method of brackets. Part 1, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73 (2010).

[2] I. González, V. Moll and A. Straub, The method of brackets. Part 2: examples and applications, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 157-171 (2010).

[3] S. L. Skorokhodov. Method of analytic continuation of the generalized hypergeometric functions ${}_pF_{p-1}(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots, b_{p-1}; z)$. Comp. Math.