Universidad de Valparaíso CHILE

Licenciatura en Física
Mención Astronomía
y Ciencias Atmosféricas

ÁLGEBRA LINEAL 124
Prof. Mario Marotti

Nombre ………………………………………………………… **Nota** ……………

1ª. prueba parcial

6 de Septiembre de 2017

En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible

1. (a) Hallar la solución general del sistema siguiente por escalerización:

$$\begin{cases} x-3y+z+t=-4 \\ 2x-y-3z-3t=2 \\ x+y-z+3t=4 \\ 3x-4y-2z-2t=-2 \end{cases}$$ **(1.0 puntos)**

(b) ¿Qué rango tienen la matriz A y la matriz ampliada A^* del sistema? Justifique su respuesta sin calcular determinantes. **(0.5 puntos)**

2. (a) Encuentre k para que el producto de las matrices A y B conmute, es decir para que $AB = BA$. ¿Conmuta para algún otro valor? Explique brevemente.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$$ **(1.0 puntos)**

(b) ¿Es posible que el producto de una matriz A 4 x 2 y otra B 2 x 4 conmute? Explique brevemente. **(0.5 puntos)**

3. (a) Halle las matrices M_{23} y M_{12} (elementales 3 x 3) correspondientes respectivamente a las siguientes operaciones por filas de la matriz I_3 (matriz identidad 3 x 3): **Operación 1)** Intercambiar filas $F_2 y\ F_3$.
Operación 2) Intercambiar filas $F_1 y\ F_2$. **(0.5 puntos)**

(b) Halle la matriz producto: $M = M_{12} \times M_{23}$ **(0.5 puntos)**

(c) Pruebe que, siendo M^3 el cubo de la matriz M, se cumple:

$$M^3 = I_3$$ **(0.5 puntos)**

4. Dada la ecuación matricial $A.X = B$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+2 & k+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar el valor de k para el cual la matriz A es singular. ¿Existe solución en ese caso? **(0.5 puntos)**

(b) Resolver para $k = 2$, hallando previamente la matriz inversa A^{-1}. **(1.0 puntos)**

Ejercicio 1

(a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} (-2)(-1)(-3) \\ (1) \\ \quad (1) \\ \qquad (1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-4)(-1) \\ (5) \\ \quad (1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 30 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

3 entradas principales $\Rightarrow$
Rango $A = 3$
El sistema tiene un grado de libertad.

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = -4 \\ \quad y - z - t = 2 \\ \qquad z + 3t = 0 \end{cases}$$

Tomamos: $\boxed{t = \alpha} \Rightarrow \boxed{z = -3\alpha} \Rightarrow y + 3\alpha - \alpha = 2$ $\boxed{y = -2\alpha + 2}$

$$x - 3(-2\alpha + 2) - 3\alpha + \alpha = -4$$
$$\boxed{x = -4\alpha + 2}$$

Sol. general: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Como Rango $A = 3$ y el sistema es compatible $\Rightarrow$ Rango $A^* = 3$ (por teorema de Rouché-Frobenius)

Ejercicio 2:

(a)
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 12-4k \\ -30 & -20+k \end{pmatrix} = AB \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15-5k & -20+k \end{pmatrix} \end{array}$$

Deberá ser: $\begin{cases} 12 - 4k = -24 \\ 15 - 5k = -30 \end{cases}$ Existe solución simultánea: $k = 9$

(b) No es posible. $A \times B$ sería una matriz 4×4
$B \times A$ sería 2×2.

Ejercicio 3:

$$M_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad M_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=M$$

Multiplicando $M\times M\times M=I$.

Ejercicio 4:

(a) A es singular $\Leftrightarrow$ $\det A=0$

$\det A=0+2(k+2)+0-(0+0+k+7)$

$\boxed{\det A=k-3}$ $\qquad \det A=0 \Leftrightarrow \boxed{k=3}$

Queda: $\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&2\\1&0&0&1\\0&5&10&8\end{array}\right)$ observando filas 1 y 3

ES INCOMPATIBLE.

No hay solución

(b)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\0&4&9\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&4&9&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&4&9&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3'=F_3-4F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2'=F_2-2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&9&0&-2\\0&0&1&-4&0&1\end{array}\right)$$

Solución:

$$\boxed{X=A^{-1}\cdot B}\Rightarrow\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\9&0&-2\\-4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\9&0&-2\\-4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$\boxed{x=1}$ $\boxed{y=2}$ $\boxed{z=0}$