Tarea Obligatoria II
MMF II
Licenciatura en Física - 2020[1]

Problema I : Campo eléctrico y plano infinito cargado

Se tiene un plano infinito cargado uniformemente en su extensión, esto es, su densidad de carga superficial σ_0 es una constante. Dicha distribución de carga coincide con el plano cartesiano xy.

Se conoce que el campo eléctrico vectorialmente es perpendicular (saliente o entrante dependiendo del signo de la carga) al plano cargado y su magnitud es $\left|\overrightarrow{\mathbf{E}}\right| = \dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$. Para el punto $\overrightarrow{\mathbf{R}} = (0, 0, z_0)$ demuestre que:

A).- (20%) La componente z del campo eléctrico se puede escribir como:

$$E_z = \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \widehat{k} = \left|\overrightarrow{\mathbf{E}}\right| = ALGO \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Determine el factor $ALGO$.

B).- (20%) Demuestre que el valor de esta integral es:

$$E_z = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

C).- (30%) Suponga ahora que la densidad superficial de carga no es constante y varía según la siguiente fórmula:

$$\sigma\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \frac{A}{r^2}$$

donde A es una constante y r es la distancia de un punto del plano cargado al origen del sistema coordenado. Determine la componente z del campo eléctrico para el punto $\overrightarrow{\mathbf{R}} = (0, 0, z_0)$ utilizando adecuadamente la integral dada en el item (**A**).

D).- (30%) A partir de la densidad de carga dada en el item (**C**) halle una expresión integral (en coordenadas cartesianas) para $E_z = \overrightarrow{\mathbf{E}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) \cdot \widehat{k}$ en el punto $\overrightarrow{\mathbf{R}} = (x_0, y_0, z_0)$, para ello utilice la siguiente expresión general:

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right)\left(\overrightarrow{\mathbf{R}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{R}} - \overrightarrow{\mathbf{r}}\right|^3} dS$$

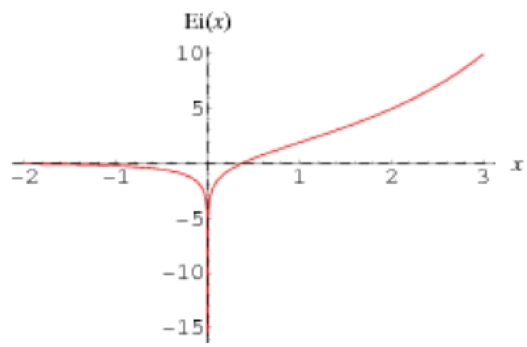
[1] $\boxed{\text{INICIO: Jueves 04 de Junio/20:30 hrs. \quad ENTREGA: Jueves 11 de Junio/20:30 hrs.}}$

donde $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ es la posición donde se encuentra el elemento de carga $dq = \sigma\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) dS$ en el plano cargado. Si utilizamos MoB, ¿qué índice I tendría esta integral?.

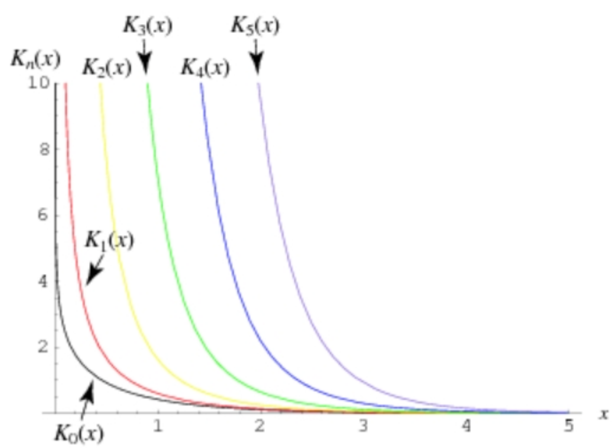
Problema II : MoB y funciones singulares en el origen

La técnica de integración MoB como parte de su algoritmo supone que el integrando es posible representarlo en términos de series en potencias en la variable de integración o equivalentemente expansiones en torno a cero en dicha variable, sin embargo, aquello es posible solo si la función no es singular (divergente) en el origen. Un ejemplo de tales funciones singulares en el origen son las siguientes:

- La función Exponencial-Integral $\mathrm{Ei}\,(x)$, en cuya gráfica se observa que es divergente en $x = 0$:



- La función de Bessel Modificada de Segundo Tipo $K_\nu\,(x)$. A continuación mostramos la gráfica de $K_\nu\,(x)$ para distintos valores del orden ν:



Las funciones mostradas previamente no poseen una representación en serie de potencias en torno a $x = 0$ y para aplicar MoB en integrales que las contienen, una primera forma es reemplazarlas por sus respectivas representaciones integrales, las cuales están dadas por las siguientes fórmulas:

$$\mathrm{Ei}\,(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t}\, dt$$

$$K_\nu\,(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2x)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{\left(t^2+x^2\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}\, dt$$

Una segunda forma de integrar estas funciones con MoB es reemplazarlas por sus respectivas series de brackets. Teniendo esto en cuenta:

A).- (20%) Halle la serie de brackets asociada a la representación integral de la función $\mathrm{Ei}\,(-x)$. Se observa que es necesario de hacer un cambio de variables para que la integración se realice en el intervalo $[0,\infty[$, es recomendable hacer dicho cambio después de expandir la función exponencial del integrando.

B).- (10%) Halle la serie de brackets asociada a la representación integral de la función $K_0\,(x)$.

C).- (40%) Utilice las representaciones en serie de brackets obtenidas anteriormente para evaluar la siguiente integral doble:

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1}\, \mathrm{Ei}\left(-x^2 y\right) K_0\left(\frac{x}{y}\right)\, dxdy$$

D).- (10%) Halle el valor de la integral si $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\beta = 2$. Como dato útil para que comparen, el resultado numérico de la integral para este caso particular es $\mathbf{J} = -0.76295955$.

E).- (20%) En la publicación matemática cuyo título es "An extension of the method of brackets. Part 1"[2], se muestra que a través de MoB es posible asociarle unas "extrañas" series de potencias a las funciones $K_0\,(x)$ y $\mathrm{Ei}\,(-x)$, las cuales son divergentes tal como se muestra a continuación:

$$K_0\,(x) = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \phi_n\, \frac{\Gamma(-n)}{4^n} x^{2n} \qquad (\text{divergente } \forall n\ )$$

$$\mathrm{Ei}\,(-x) = \sum_{m\geq 0} \phi_m\, \frac{x^m}{m} \qquad (\text{divergente para } m=0)$$

Sin embargo del punto de vista operacional, para el método de integración MoB dichas series son útiles para evaluar integrales donde estas funciones aparecen. Demuestre que utilizando estas representaciones en serie obtenemos el mismo resultado de la integral del item (**C**).

[2] I. Gonzalez , K. Kohl , L. Jiu , V. H. Moll, **An extension of the Method of Brackets**. **Part 1**. Open Mathematics, Volume 15 (2017), Issue 1, 1181–1211. (arXiv:1707.08942).

Problema III : Integraciones varias

A).- (30%) Evalúe la siguiente integral de índice 0:

$$\mathbf{J}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\epsilon-1}u^{\sigma-1}\frac{K_0\left((x+yz)\,u\right)\exp\left(-\dfrac{zu}{x}\right)}{\left(x^2+xyz+yu^2\right)^{\frac{1}{2}}}\;dxdydzdu$$

Puede utilizar para $K_0\left(\cdot\right)$ la representación en serie divergente dada en el item (**E**) del problema **II**.

B).- (30%) Demuestre que la integral:

$$\mathbf{J}=\int_0^\infty\frac{xJ_\mu\left(x\right)}{x^2+A^2}\;dx$$

tiene como solución la siguiente estructura:

$$\mathbf{J}=\mathbf{X}\;{}_1F_2\left(\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\quad,\alpha_3\end{array}\middle|\,\frac{A^2}{4}\right)+\mathbf{Y}\;{}_0F_1\left(\begin{array}{c}-\\ \alpha_4\end{array}\middle|\,\frac{A^2}{4}\right)$$

Determine explícitamente los factores $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ y los parámetros α_i $(i=1,...,4)$.

C).- (40%) Evalúe la siguiente integral de índice 1:

$$\mathbf{J}=\int_0^\infty\exp\left(-\alpha x\right)\cos\left(\beta x\right)\;dx$$

del cual se obtienen dos series, cada una por separado es solución dado que tienen distinto argumento. Demuestre que ambas series dan como resultado:

$$\mathbf{J}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$