## Ejemplo

Demuestre que

$$J=\int_0^\infty x^{\alpha-1} K_\nu(x) = 2^{\alpha-2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}\right) \qquad (*)$$

donde $K_\nu(x)$ es la fn. de Bessel Modificada de 2° Tipo, la cual no posee una representación en serie en torno a $x=0$ pero si tiene una representación integral:

$$K_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})(2x)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dt$$

Para demostrar Ec. $(*)$ hay 2 formas:

A) Reemplazo directo por representación integral de $K_\nu(x)$

$$J=\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})(2x)^\nu}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{\cos t}{(t^2+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dx\,dy$$

Esta integral es de índice 0 $(3\Sigma|3<7)$

B) Reemplazo de $K_\nu(x)$ por su respectiva serie de brackets, la cual se obtiene justamente de la representación integral, esto es:

$$K_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2x)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(x^2+t^2)^{\nu+1/2}}\,dt$$

entonces se tiene que:

$$\cos t = {}_0F_1\left( \begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix} \middle| -\frac{t^2}{4} \right) = \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2+n)\, 4^n} t^{2n}$$

y

$$\frac{1}{(t^2+x^2)^{\nu+1/2}} = \sum_l \sum_m \phi_{l,m}\, t^{2l} x^{2m} \frac{\langle \nu + 1/2 + l + m \rangle}{\Gamma(\nu+1/2)}$$

$\therefore$

$$K_\nu(x) = \frac{\cancel{\Gamma(\nu+1/2)}\,(2x)^\nu}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \sum_n \sum_m \sum_l \phi_{n,m,l} \frac{\cancel{\Gamma(1/2)}}{\Gamma(1/2+n)} \frac{x^{2m}}{4^n}$$

$$\times \frac{\langle 1/2 + \nu + m + l \rangle}{\cancel{\Gamma(\nu+1/2)}} \underbrace{\int_0^\infty t^{2n+2l}\, dt}_{\langle 2n+2l+1 \rangle}$$

$\therefore$

$$K_\nu(x) = 2^\nu x^\nu \sum_n \sum_m \sum_l \phi_{n,m,l} \frac{x^{2m}}{4^n} \frac{\langle \frac{1}{2} + \nu + m + l \rangle \langle 2n+2l+1 \rangle}{\Gamma(1/2+n)}$$

podemos hacer

$$\langle 2n+2l+\tfrac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2} \langle n + l + \tfrac{1}{2} \rangle$$

Finalmente la serie de brackets que representa a $K_\nu(x)$ es la siguiente:

$$\boxed{K_\nu(x) = 2^{\nu-1}\sum_n\sum_m\sum_\ell \phi_{n,m,\ell}\,\frac{x^{2m+\nu}}{4^n}\,\frac{\langle \frac{1}{2}+\nu+m+\ell\rangle\langle n+\ell+\frac{1}{2}\rangle}{\Gamma(n+1/2)}}$$

Con este reemplazo para $K_\nu(x)$, la integral resulta ser:

$$J = \int_0^\infty x^{\alpha-1} K_\nu(x)$$

$$= 2^{\nu-1}\sum_n\sum_m\sum_\ell \phi_{n,m,\ell}\,\frac{\langle \frac{1}{2}+\nu+m+\ell\rangle\langle n+\ell+\frac{1}{2}\rangle}{4^n\,\Gamma(n+1/2)}\underbrace{\int_0^\infty x^{2m+\nu+\alpha-1}\,dx}_{\langle 2m+\nu+\alpha\rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$J = 2^{\nu-1}\sum_n\sum_m\sum_\ell \phi_{n,m,\ell}\,\frac{\langle \frac{1}{2}+\nu+m+\ell\rangle\langle n+\ell+\frac{1}{2}\rangle\langle 2m+\nu+\alpha\rangle}{4^n\,\Gamma(n+1/2)}$$

$$\Downarrow$$

Hallando Solución

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} n \\ m \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\nu \\ -\frac{1}{2} \\ -\alpha-\nu \end{pmatrix}$$

← Sistema de ecs. generado por anulación de los brackets.

lo que implica que: $n = -\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}$ y $\det M = 2$

$m = -\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}$

$\ell = \frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}$

Finalmente la solución es:

$$J = 2^{\nu-1} \frac{\Gamma(-n)\Gamma(-m)\Gamma(-l)}{|\det M| \quad 4^n \, \Gamma(n+1/2)}$$

(Falta reemplazar los valores para $l, m$ y $n$)

$$= 2^{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\cancel{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\right)}{|\det M| \cdot 2^{2\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}\right)} \Gamma\left(\cancel{\frac{\nu}{2}-\frac{\alpha}{2}+1/2}\right)}$$

$$= 2^{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{2 \quad 2^{-\alpha+\nu}}$$

$$= 2^{\alpha-2} \, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\nu}{2}\right)$$

QED