Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba II

Mecánica Intermedia (FIS 311)

Licenciatura en Física mención Astronomía

IPGG

Pequeñas oscilaciones

Problema 1 : Consideremos el movimiento longitudinal del siguiente sistema físico de masas y resortes:

Determine las frecuencias de los modos normales.

Hamiltoniano

Problema 2 : El Lagrangiano característico para cualquier sistema físico cuando se consideran pequeñas oscilaciones tiene la siguiente estructura:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}_i M_{ij}\dot{\eta}_j - \frac{1}{2}\eta_i K_{ij}\eta_j$$

Determine el Hamiltoniano para este sistema a partir de este Lagrangiano. **Obs. :** $H = \pi_k \dot{\eta}_k - L$

Ecuación de la trayectoria

Problema 3 : Cierto objeto sometido a cierta fuerza central se mueve describiendo la siguiente trayectoria:

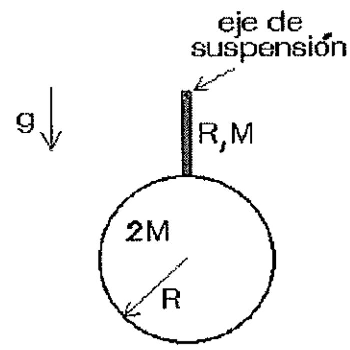
$$r = a\,(1 + \cos\phi)$$

A partir de esta ecuación determine la fuerza que le da origen. El factor a es una constante.

Dinámica rotacional en un plano

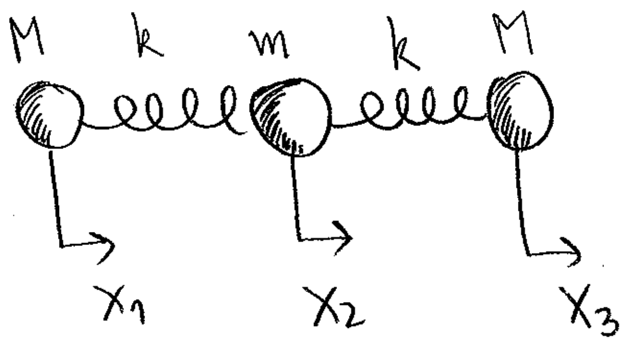
Considere un péndulo (físico) formado por una varilla de largo R y masa M en cuyo extremo está adosada una esfera de radio R y masa $2M$. El péndulo cuelga de uno de los extremos de la varilla.

- Determine el momento de inercia del péndulo para rotaciones "planas" entorno al punto de suspensión.
- Determine la frecuencia natural de este péndulo para pequeñas oscilaciones.



Obs.: $I_{ESF_{CM}} = \frac{2}{5}mR^2 \quad I_{VAR_{CM}} = \frac{1}{12}mL^2$

PROBLEMA 1



supongamos

$x_1 > x_2 > x_3$.

Luego

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - x_3)^2$$

Rápidamente obtenemos

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$$

si $V = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_3)$ entonces:

$$V = \frac{1}{2} (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3) \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$\overline{\alpha .2}$

La ec. para determinar las frecuencias de los modos normales es la siguiente

$$\det(A)=0 \qquad \text{donde } A=\begin{pmatrix} k-M\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k-M\omega^2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

La ec. característica es:

$$(k-M\omega^2)\left[(2k-m\omega^2)(k-M\omega^2)-k^2\right]+k\left[-k(k-M\omega^2)\right]=0$$

$\Downarrow$

Las raíces ω^2 son las siguientes

$\Downarrow$

$\omega_1^2=0$ // (No hay oscilación sólo traslación del sistema)

$\omega_2^2=\dfrac{k}{M}$ //

$\omega_3^2=\dfrac{k}{M}\left(1+2\dfrac{M}{m}\right)$ //

$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}_i M_{ij}\dot{\eta}_j - \frac{1}{2}\eta_i K_{ij}\eta_j$$

<Ejercicio (2)>

$\overline{\alpha_3}$

$$\Pi_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} M_{ij}\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_k}(\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j)$$

$$= \frac{1}{2} M_{ij}\left[\dot{\eta}_i\,\delta_{jk} + \dot{\eta}_j\,\delta_{ik}\right]$$

$$= \frac{1}{2} M_{ik}\dot{\eta}_i + \frac{1}{2} M_{kj}\dot{\eta}_j$$

$$= \frac{1}{2} M_{ik}\dot{\eta}_i + \frac{1}{2} M_{ik}\dot{\eta}_i$$

$$= M_{ik}\dot{\eta}_i$$

$$\therefore\quad H = \Pi_k\dot{\eta}_k - L = \dot{\eta}_i M_{ik}\dot{\eta}_k - \frac{1}{2}\dot{\eta}_i M_{ik}\dot{\eta}_k + \frac{1}{2}\eta_i K_{ik}\eta_k$$

$$H = \frac{1}{2}\dot{\eta}_i M_{ik}\dot{\eta}_k + \frac{1}{2}\eta_i K_{ik}\eta_k \quad ///$$

<PROBLEMA 3> 1

El Lagrangiano general para ste caso es:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + V(r)$$

Ec. de mov. radial

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$m\ddot{r} - m r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}(r) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{r} = m r \dot{\phi}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad ; \text{ pero } \frac{\partial V(r)}{\partial r} = -F(r)$$

Fuerza central

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(r) = -m\ddot{r} + m r \dot{\phi}^2} \quad (*)$$

de la ec. de la órbita $r = a(1+\cos\phi)$

a) $\dot{r} = -a \operatorname{sen}\phi \, \dot{\phi}$

b) $\ddot{r} = -a \operatorname{sen}\phi \, \ddot{\phi} - a\cos\phi \, \dot{\phi}^2$

de (a) $-a \operatorname{sen}\phi = \dfrac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$

$\therefore$ (b) queda

c) $\ddot{r} = \frac{\dot{r}\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} - a\cos\phi\,\dot{\phi}^2$

Por otro lado $\mathbb{L} = m r^2 \dot{\phi}$ = Momentum angular $= cte$, si derivamos esta expresión en t

$$\Downarrow$$

$$0 = 2 r \dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$-2\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}$$

Reemplazando en (c)

$\ddot{r} = -2\frac{\dot{r}^2}{r} - a\cos\phi\,\dot{\phi}^2$; de (a) $\dot{r}^2 = a^2\operatorname{sen}^2\phi\,\dot{\phi}^2$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{r} = -2\frac{a^2}{r}\operatorname{sen}^2\phi\,\dot{\phi}^2 - a\cos\phi\,\dot{\phi}^2$$

$$\ddot{r} = -\frac{2}{r}a^2(1-\cos^2\phi)\dot{\phi}^2 - a\cos\phi\,\dot{\phi}^2$$

$$\ddot{r} = -2\frac{a^2}{r}(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)\,\dot{\phi}^2 - a\cos\phi\,\dot{\phi}^2$$

pero $(1+\cos\phi)=\frac{r}{a}$.

$\Downarrow$

$$\ddot{r}=-2a(1-\cos\phi)\dot{\phi}^2-a\cos\phi\,\dot{\phi}^2$$

De la ec. de órbita.

$$=-2a\dot{\phi}^2+a\cos\phi\,\dot{\phi}^2 \quad ; \text{ pero } a\cos\phi=r-a$$

$$\ddot{r}=-2a\dot{\phi}^2+(r-a)\dot{\phi}^2$$

$$\ddot{r}=-3a\dot{\phi}^2+r\dot{\phi}^2$$

Recordar que

$$\mathbb{L}=mr^2\dot{\phi}=\text{cte}$$

$\Downarrow$

$$\dot{\phi}^2=\frac{\mathbb{L}^2}{m^2r^4}$$

Finalmente:

$$F(r)=-m\ddot{r}+mr\dot{\phi}^2$$

$$=-m\left(-3a\dot{\phi}^2+r\dot{\phi}^2\right)+mr\dot{\phi}^2$$

$$=3ma\dot{\phi}^2-\cancel{mr\dot{\phi}^2}+\cancel{mr\dot{\phi}^2}$$

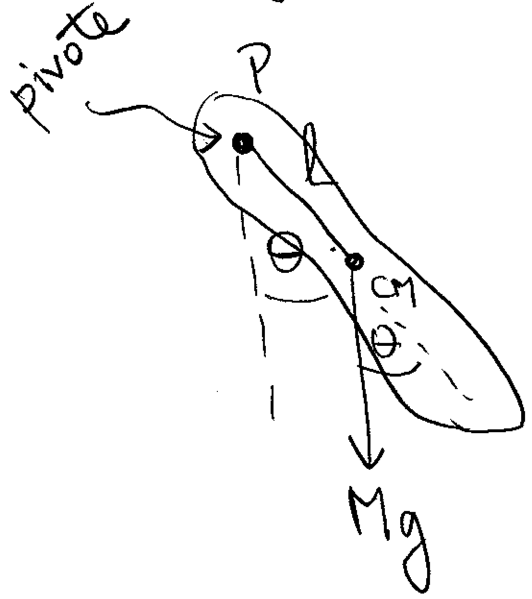
$$=3ma\dot{\phi}^2$$

$$F(r)=\frac{3a\mathbb{L}^2}{mr^4}$$

⟨PROBLEMA 4⟩

B.1

Pendulo físico



Torque restaurador

$$-Mgl\,\mathrm{sen}\theta = I_p\,\ddot{\theta}$$

$\mathrm{sen}\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{Mgl}{I_p}\right)}_{\Omega_0^2}\theta = 0$$

frecuencia natural a oscilación pequeña.

a) Momento de inercia respecto a P.

$$I_{esf_P} = I_{esf_{CM}} + (2M)(2R)^2 = I_{esf_{CM}} + 8MR^2$$

$$I_{VAR_P} = I_{var_{CM}} + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = I_{VAR_{CM}} + \frac{1}{4}MR^2$$

$$\therefore\ I_{TOTAL_P} = I_{esf_P} + I_{var_P} = I_{esf_{CM}} + I_{var_{CM}} + \frac{33}{4}MR^2$$

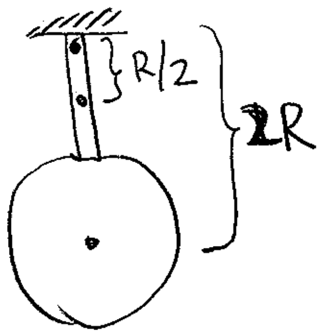
siendo $I_{esf_{CM}} = \frac{2}{5}(2M)(2R)^2 = \frac{16}{5}MR^2$

$I_{var_{CM}} = \frac{1}{12}MR^2$

Luego

$$I_{TOTAL_p} = \frac{16}{5}MR^2 + \frac{1}{12}MR^2 + \frac{33}{4}MR^2 = \frac{173}{15}MR^2$$

b) Determ. de $\underline{\underline{l}}$



calculo de CM.

$$l = y_{CM} = \frac{M\frac{R}{2} + 2M \cdot 2R}{3M} = \frac{9}{6}R$$

$$= \frac{3}{2}R$$

$$\therefore \Omega_0^2 = \frac{3}{2}\frac{MgR}{I_{TOTAL_p}} = \frac{3}{2}\frac{\cancel{M}g\cancel{R}}{173\,\cancel{M}R^{\cancel{2}}} \times 15$$

$$\Omega_0^2 = \frac{45}{346}\frac{g}{R}$$