Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba I
Métodos Matemáticos I
Licenciatura en Física - 2019
IPGG

Problema I - La circunferencia

---

1. (50%) Demostrar que para todo número real positivo $k \neq 1$ la ecuación:

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$$

es la ecuación de una circunferencia. Encontrar el centro y el radio de la misma.

2. (50%) Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = 1 + i$.

Problema II - Identidades trigonométricas

Demostrar las siguientes fórmulas:

1. (50%) $[1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]^{2n} = 4^n \exp(in\alpha) \cos^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

2. (50%) $\left(\frac{1 + i\tan(\alpha)}{1 - i\tan(\alpha)}\right)^n = \frac{1 + i\tan(n\alpha)}{1 - i\tan(n\alpha)}$

Problema III - Cuadrilátero

Dados tres vértices consecutivos de un paralelogramo z_1, z_2 y z_3, encontrar el cuarto vértice.

Problema IV - Misceláneos

---

1. (30%) Utilizando la representación polar, demostrar la igualdad que tanto sorprendió a Leibniz:

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

2. Sume las siguientes expresiones:

   (a) (35%) $\cos(x) + \cos(3x) + \ldots + \cos((2n-1)x)$

   (b) (35%) $\sin(x) - \sin(2x) + \ldots + (-1)^{n-1} \sin(nx)$

PAUTA PRUEBA I

PROB. I

CONCEPTO: $|z-z_0|=R$ ó $|z|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{z_0})+|z_0|^2=R^2$

1) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k \xrightarrow{} k\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=k \Rightarrow |z-z_1|=k|z-z_2|$

luego $|z-z_1|=k|z-z_2| \quad / \ (\ )^2$

$$\downarrow$$

$$|z-z_1|^2=k^2|z-z_2|^2.$$

$$\downarrow$$

$$(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z_1})=k^2(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z_2})$$

o equivalentemente:

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{z_1})+|z_1|^2=k^2\left(|z|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{z_2})+|z_2|^2\right)$$

$\downarrow$ Reordenamos

$$|z|^2(1-k^2)-2\mathrm{Re}\left(z\left(\overline{z_1}-k^2\overline{z_2}\right)\right)=k^2|z_2|^2-|z_1|^2$$

$$\downarrow$$

$$|z|^2-2\mathrm{Re}\left(z\,\frac{\left(\overline{z_1}-k^2\overline{z_2}\right)}{1-k^2}\right)=\frac{k^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-k^2}$$

def. sea $z_0=\dfrac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$.

Sumemos $|z_0|^2$ a ambos lado de la ec.

(2)

$$|z^2| - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = \frac{k^2|z_2|^2 - |z_1|^2}{1-k^2} + |z_0|^2$$

Esto es una circunferencia

de la forma

$$|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$$

$\therefore$ $z_0 = \dfrac{z_1 - k^2 z_2}{1-k^2}$ (centro de la circunferencia)

$$R = \left[\frac{k^2|z_2|^2 - |z_1|^2}{1-k^2} + \frac{|z_1 - k^2 z_2|^2}{(1-k^2)^2}\right]^{1/2}$$

= Radio de la circunferencia

2) z_1, z_2, z_3 son puntos sobre la circunferencia de radio R y centro en z_0. (Ambos incógnitas)

PARA $z = z_1$

$|z_1 - z_0| = R$ $\qquad z_1 = 1 - i$

$\qquad\qquad z_0 = x_0 + i y_0$

luego

$$|1 - i - x_0 - i y_0| = R \Rightarrow |(1 - x_0) - i(1 + y_0)| = R$$

$$\Downarrow$$

$$\text{i)} \quad (1 - x_0)^2 + (1 + y_0)^2 = R^2$$

PARA $z = z_2$

$$|z_2 - z_0| = R \Rightarrow |2i - x_0 - i y_0| = R$$

$$\downarrow$$

$$\text{ii)} \quad x_0^2 + (2 - y_0)^2 = R^2$$

PARA $z = z_3$

$$|z_3 - z_0| = R \Rightarrow |1 + i - x_0 - i y_0| = R$$

$$\downarrow$$

$$(1 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2 \quad \text{iii)}$$

Restando (i − iii) se obtiene:

$$(1+y_0)^2 - (1-y_0)^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$4y_0 = 0 \implies y_0 = 0$$

reemplazando en ii $y_0 = 0$:

$$x_0^2 + 4 = R^2 \implies R^2 = x_0^2 + 4$$

en i

$$(1-x_0)^2 + 1 = R^2 = x_0^2 + 4$$

$$(1-x_0)^2 + 1 = x_0^2 + 4$$

$$1 - 2x_0 + \cancel{x_0^2} + 1 = \cancel{x_0^2} + 4$$

$$x_0 = -1$$

y

$$R = \sqrt{5}$$

Finalmente la ecuación buscada es:

$$(x+1)^2 + y^2 = 5$$

PROBL. II

CONCEPTO: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$

1) $(1 + \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^{2n} = (1 + e^{i\alpha})^{2n}$

$$= \left[e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\right]^{2n}$$

$$= \left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^{2n}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}$$

$$= e^{i\alpha n}\, 4^n \cos^{2n}(\alpha/2) \quad /// \quad \text{QED}$$

2) $\left(\dfrac{1 + i\,tg\,\alpha}{1 - i\,tg\,\alpha}\right)^n = \left(\dfrac{1 + i\,\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}{1 - i\,\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n$

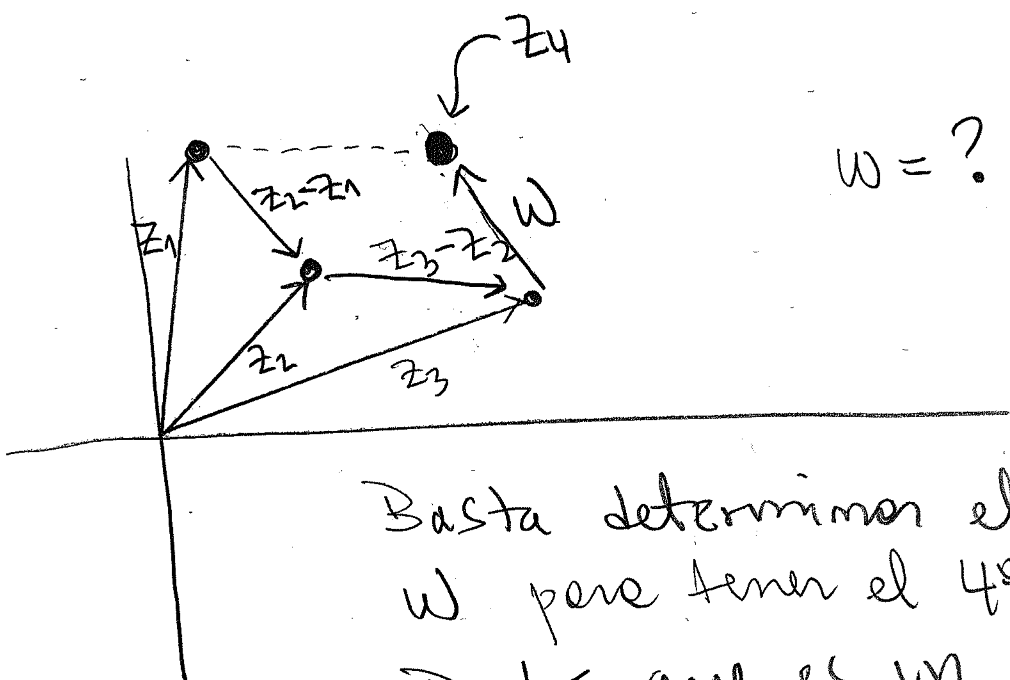
$$= \left(\frac{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha}\right)^n = \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}\right)^n$$

$$= \frac{e^{in\alpha}}{e^{-in\alpha}} = \frac{\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha}{\cos n\alpha - i\,\text{sen}\,n\alpha}$$

$$= \frac{1 + i\,tg(n\alpha)}{1 - i\,tg(n\alpha)} \quad /// \quad \text{QED.}$$

PROBL. III

CONCEPTO: SUMA DE VECTORES – MÉTODO DEL POLÍGONO.



$w = ?$

Basta determinar el complejo (vector) w para tener el 4º vértice:
Dado que es un paralelogramo $|w| = |z_2 - z_1|$ y deben ser colineales!!!

De la figura: $w = -(z_2 - z_1)$

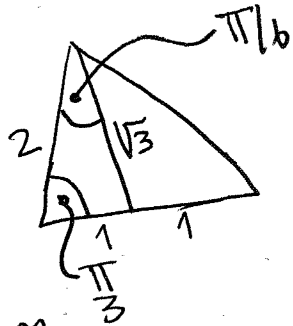
y ∴ $z_4 = z_3 + w = z_3 - z_2 + z_1$ ///

Posición del vértice faltante

PROBL. IV

CONCEPTO:

- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

- 

(triángulo equilátero)

- $$\sum_{k=1}^{n} x^k = x\,\frac{(1-x^n)}{1-x}$$

1) $$\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = 2\,\mathrm{Re}\sqrt{1+i\sqrt{3}}$$

Ahora $1+i\sqrt{3} = |1+i\sqrt{3}|\,e^{i\,tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)}$

$= 2\,e^{i\pi/3}$ (VER FIGURA)

luego

$\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{2}\,e^{i\pi/6} = \sqrt{2}\cos(\pi/6) + i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\pi/6)$

$\therefore \sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = 2\cdot\sqrt{2}\cos(\pi/6)$

pero $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ver figura) Finalmente

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$ /// QED

2 a $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos((2n-1)x)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = Re\left[\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x}\right]$$

entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x} = e^{-ix} \sum_{k=1}^{n} (e^{i2x})^{k}$

$$= e^{-ix} \cdot e^{i2x} \frac{(1 - e^{i2nx})}{1 - e^{i2x}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{ix}} \cdot e^{inx} (e^{-inx} - e^{inx})}{\cancel{e^{ix}} (e^{-ix} - e^{ix})}$$

$$= e^{inx} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(x)}$$

luego

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos((2n-1)x) = Re\left[\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x}\right]$$

$$= Re\left[e^{inx} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(x)}\right] = \frac{\cos(nx) \operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(x)}$$

(b) $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) + \dots + (-1)^{n-1} \operatorname{sen}(nx)$ (9)

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \operatorname{sen}(kx)$$

$$= \operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(e^{ix}\right)^{k} \right]$$

Obs. $(-1)^{k-1} = -\left(e^{i\pi}\right)^{k} = -e^{i\pi k}$

$$\therefore = -\operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(e^{i(\pi+x)}\right)^{k} \right]$$

(*) Solo la suma: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(e^{i(\pi+x)}\right)^{k} = e^{i(\pi+x)} \frac{\left(1 - e^{i(\pi+x)n}\right)}{\left(1 - e^{i(\pi+x)}\right)}$

$$= e^{i(\pi+x)} \frac{e^{i\frac{(\pi+x)n}{2}}}{e^{i\frac{(\pi+x)}{2}}} \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(\pi+x)n}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{(\pi+x)}{2}\right]}$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi+x}{2}\right)(n+1)} \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\pi+x}{2}\right)n\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi+x}{2}\right]}$$

$\therefore$

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) + \dots + (-1)^{n-1} \operatorname{sen}(nx)$$

$$= - \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\pi+x}{2}\right)(n+1)\right] \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{\pi+x}{2}\right)n\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+x}{2}\right)}$$