TERCERA PRUEBA

6 de Diciembre de 2022

Electromagnetismo Intermedio

LFIS322

Instrucciones: Dispone de 90 minutos para responder el examen. El puntaje total de la prueba es 60 y el de cada pregunta esta indicado. La prueba es personal. No puede consultar formularios, cuadernos, libros ni compañeros. No sólo importa contestar sino hacerlo fundadamente.

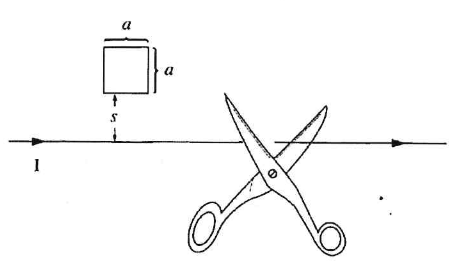
Problema 1 (15 pts.)

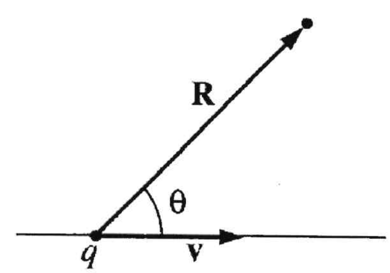
(a) Considere dos cargas puntuales iguales q, separadas por una distancia $2a$. Construya el plano equidistante de las dos cargas. Al integrar el tensor de tensión de Maxwell sobre este plano, determine la fuerza de una carga sobre la otra.

(b) Haga lo mismo con las cargas de signo opuesto.

Problema 2 (20 pts.)Una espira cuadrada, lado a, resistencia R, se encuentra a una distancia s de un alambre recto infinito que transporta corriente I (ver figura). Ahora alguien corta el cable, de modo que I cae a cero. ¿En qué dirección fluye la corriente inducida en la espira cuadrada y qué carga total pasa por un punto dado de la espira durante el tiempo que fluye esta corriente? Si no le gusta el modelo de tijera, baje la corriente gradualmente con el modelo:

$$I(t) = \begin{cases} (1-\alpha t)I, & \text{para } 0 < t < 1/\alpha, \\ 0, & \text{para } t > 1/\alpha. \end{cases}$$





Problema 3 (25 pts.)

(a) (5 pts.) Encuentre los potenciales retardados de una carga que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}_0$. Asuma que inicialmente (en $t = 0$) la posición de la carga es $\mathbf{w} = \mathbf{v}t$.

(b) (10 pts.) Asumiendo que la aceleración de la carga y el vector $\mathbf{R}$ forman un ángulo θ (ver figura), muestre que

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - v2\sin^2\theta/c^2}}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi(\mathbf{r}, t).$$

(c) (10 pts.) Calcule el campo eléctrico generado por una carga que se mueve con velocidad constante.

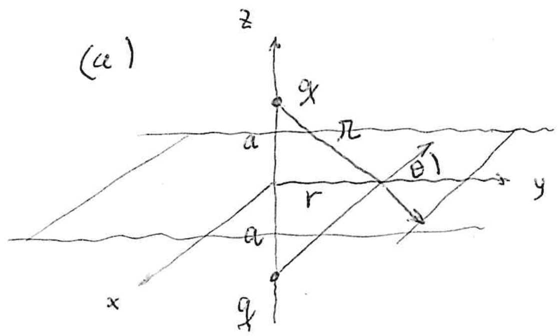
Solución Tercera Prueba

LFIS322

(1) Para dos cargas iguales, de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}.$$

(a)



Como el problema tiene simetría azimutal podemos calcular la fza. en cualquier punto a una distancia fija r del eje z (ver dibujo).

Calcularemos la fza. sobre la carga superior, para ésto necesitamos establecer:

- encerramos la carga por un el volumen $z>0$ (o por el plano $z=0$ y un casquete esférico de radio infinito).
- La fza. estará sobre el eje z (obviamente)
- El campo eléctrico en cualquier punto <u>del plano</u> es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\mathfrak{r}^2}\cos\theta\,\hat{r}$$

del dibujo, $\cos\theta = \frac{r}{\mathfrak{r}} \Rightarrow E_z = 0$ y $E_x \neq 0 \wedge E_y \neq 0$.

Usando

$$\vec{F} = \oint \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{s}$$

con

$$(\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{s})_z = T_{zx}\,dS_x + T_{zy}\,dS_y + T_{zz}\,dS_z = T_{zz}(-r\,dr\,d\phi)$$

$$= \epsilon_0\left(E_zE_z - \tfrac{1}{2}E^2\right)(-r\,dr\,d\phi) = \frac{\epsilon_0}{2}E^2\,r\,dr\,d\phi$$

entonces

$$E^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{4q^2}{\mathfrak{r}^4}\cos^2\theta, \qquad \mathfrak{r}^2 = a^2 + r^2$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{q^2r^2}{(a^2+r^2)^3}$$

finalmente

$$F_z = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 2\pi \int_0^\infty \frac{r^3 dr}{(a^2+r^2)^3}$$

$u = r^2 \rightarrow du = 2r\,dr$

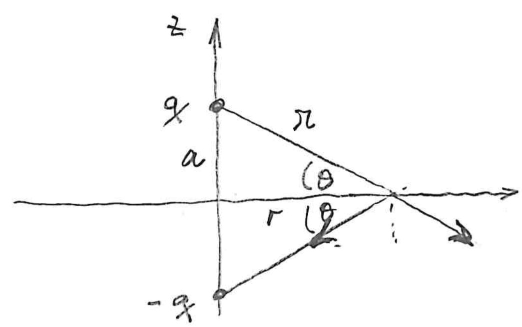
$$\int_0^\infty \frac{r^3 dr}{(a^2+r^2)^3} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{u\,du}{(u+a^2)^3} = \frac{1}{2}\left[-\frac{u}{2(u+a^2)} - \frac{1}{2(u+a^2)}\right]_0^\infty \quad (*)$$

$$= \frac{1}{(2a)^2}$$

$$F_z = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(2a)^2} \quad //$$

(b) En el caso de cargas de distinto signo

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\mathfrak{r}^2}\sin\theta\,\hat{k} \quad , \quad \sin\theta = \frac{a}{\mathfrak{r}}$$



aquí

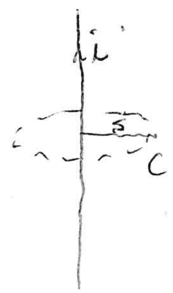
$$E^2 = E_z^2 = \left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{(a^2+r^2)^3}$$

$$\Rightarrow \left(\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{s}\right)_z = -\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{r\,dr\,d\phi}{(a^2+r^2)^3}$$

$$\Rightarrow F_z = -\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 2\pi \int_0^\infty \frac{r\,dr}{(a^2+r^2)^3} \Rightarrow \begin{matrix} u = r^2 \\ du = 2r\,dr \end{matrix} \quad \int_0^\infty \frac{r\,dr}{(a^2+r^2)^3} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^3} \overset{(*)}{=} \frac{1}{(2a)}$$

$$F_z = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(2a)^2} \quad //$$

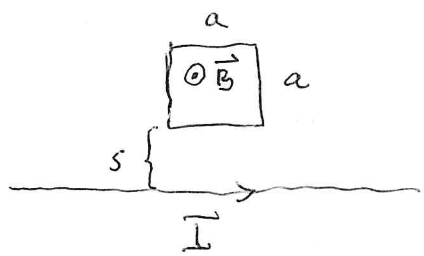
(2) Usando la ley de Ampere, el campo de un alambre infinito está dado por:



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I\big|_C \rightarrow B\,2\pi s = \mu_0 i$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi s}\hat{\phi} \quad //$$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{ds}{s} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln(2). \quad //$$



Ahora, cortamos el cable.
Con ésto, la corriente cae a cero y se induce una corriente i_c en el circuito o sea

$$\mathcal{E} = i_c R = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 a \ln(2)}{2\pi}\frac{dI}{dt} \quad (*)$$

El campo que produce I apunta hacia afuera de la espira. Al caer la corriente, $|\vec{B}|$ decrece $\Rightarrow$ el campo de la corriente en el circuito i_c debe salir de la página $\Rightarrow$ la corriente debe circular contrarreloj.

La corriente en el circuito $i_c = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, entonces de $(*)$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}R = -\frac{\mu_0 a \ln(2)}{2\pi}\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$\therefore Q = \frac{\mu_0 a \ln(2)}{2\pi R} \quad //$$

(3) Los potenciales retardados para una carga con veloc. arbitraria son:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{[R - \vec{\beta}\cdot\vec{R}]_{ret}} \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}}{c^2}\phi(\vec{r},t)$$

$$R = c(t-t_r) = |\vec{r} - \vec{w}(t_r)|$$

(a) Como

$$\vec{w} = \vec{v}t \Rightarrow c(t-t_r) = |\vec{r} - \vec{v}t_r| \quad \text{elevando } ()^2$$

$$c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2) = r^2 + v^2 t_r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r$$

$$(c^2-v^2)t_r^2 - 2(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})t_r + c^2t^2 - r^2 = 0$$

$$\therefore t_r = \frac{(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

sabemos que sólo el signo − tiene sentido físico (recuerdo ?)

Reemplazando

$$R - \vec{\beta}\cdot\vec{R} = c(t-t_r) - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c} - \frac{v^2}{c}t_r$$

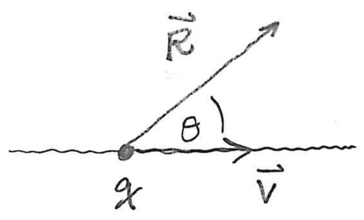
$$= \frac{1}{c}\left[(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v}) - (c^2-v^2)t_r\right]$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

finalmente

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}} \quad ; \quad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2}\phi \quad // \quad (1)$$

(b)



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t \Rightarrow \vec{r} = \vec{R} + \vec{v}t$$

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = (\vec{R}+\vec{v}t)\cdot\vec{v} = Rv\cos\theta + v^2t$$

$$r^2 = R^2 + v^2t^2 + 2Rvt\cos\theta$$

reemplazando

$$[(c^2-v^2)t - Rv\cos\theta]^2 + (c^2-v^2)(R^2 + (v^2-c^2)t^2 + 2Rvt\cos\theta) =$$

$$\cancel{(c^2-v^2)^2 t^2} + R^2v^2\cos^2\theta \cancel{- 2(c^2-v^2)tRv\cos\theta} + R^2(c^2-v^2)$$

$$\cancel{-(c^2-v^2)^2t^2} \cancel{+ 2(c^2-v^2)Rvt\cos\theta} =$$

$$= R^2c^2 - R^2v^2(1-\cos^2\theta) = R^2c^2 - R^2v^2\sin^2\theta$$

entonces

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\frac{q}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}} \quad // \qquad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2}\phi \quad //$$

(c) Usamos que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ con la solución 1.

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(\sqrt{\cdot})^2}\vec{\nabla}\left((c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)\right)$$