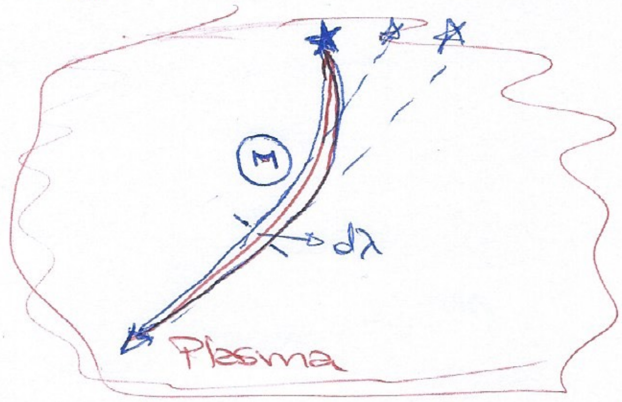
Clase 26 13 12 21 (1)

Deflexión de la luz en un medio plasmático



Consideramos la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A(r)\, dt^2 + \frac{dr^2}{A(r)} + r^2 d\Omega^2$$

$$A = 1 - \frac{r_s}{r} = 1 - \frac{2M}{r} \quad ; \quad G = c = 1$$

Supongamos que el espacio-tiempo está lleno con plasma frío estático no-magnetizado, cuya frecuencia electrónica sólo depende de la coordenada radial

$$\omega_e^2 = \frac{4\pi e^2}{m_e} N(r)$$

e : carga electrón ; m_e : masa del electrón

$N(r)$: concentración de electrones en el plasma

El índice de refracción

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_e^2}{|\omega(r)|^2}$$

$\omega(r)$: frecuencia medida por un observador estático.

$$\omega(r) = \frac{\omega_0}{\sqrt{A(r)}} \leftarrow \text{redshift gravitacional.}$$

Para que exista refracción

$$\omega_e^2 < \omega^2(r)$$

$$\omega_e^2 < \frac{\omega_0^2}{A(r)}$$

→ La frecuencia del foton es siempre mayor que la frecuencia del plasma.

El Hamiltoniano incluyendo el plasma.

$$\boxed{H(q^i, p_i) = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + \hbar^2 \omega_e^2\right] = 0}$$

Las ecs. de movimiento se obtiene a partir de las ecs. de Hamilton

$$\frac{dq^i}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

$$\rightarrow \frac{dq^\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu} \underbrace{\frac{\partial p_\mu}{\partial p_\alpha}}_{\delta^\alpha_\mu} p_\nu + g^{\mu\nu} p_\mu \underbrace{\frac{\partial p_\nu}{\partial p_\alpha}}_{\delta^\alpha_\nu}\right]$$

$$\frac{dq^\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\delta^\alpha_\mu p_\nu + g^{\mu\nu} p_\mu \delta^\alpha_\nu\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{\alpha\nu} p_\nu + g^{\mu\alpha} p_\mu\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{\alpha\beta} p_\beta + g^{\alpha\beta} p_\beta\right]$$

$$\boxed{\frac{dq^\alpha}{d\lambda} = g^{\alpha\beta} p_\beta}$$

$$\frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} p_\mu p_\nu + \hbar^2 \frac{\partial(\omega_e^2)}{\partial q^\alpha}\right]$$

$$\boxed{\frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} p_\mu p_\nu + \hbar^2 (\omega_e^2)_{,\alpha}\right]}$$

Notemos que esta última ec. indica que

$\frac{dp_t}{d\lambda} = 0 \rightarrow p_t =$ cte en la trayectoria.

$$p_t \equiv -\hbar\omega_0 = -p^t$$

Estudiamos el mov. en el plano invariante $\theta = \pi/2$.

$$\rightarrow p_\theta = p^\theta = 0$$

cl 26 ④

y también $p_\phi = \text{cte} > 0 \leftarrow$ sin pérdida de generalidad.

Veamos las otras ecs.

$$\frac{dr}{d\lambda} = g^{rr} p_r \quad \wedge \quad \frac{d\phi}{d\lambda} = g^{\phi\phi} p_\phi$$

$$\rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{g^{\phi\phi} p_\phi}{g^{rr} p_r} \qquad g_{\phi\phi} = r^2 \rightarrow g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2}$$

$$g_{rr} = \frac{1}{A(r)} \rightarrow g^{rr} = A(r)$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dr} = \frac{p_\phi / r^2}{A(r)\, p_r}}$$

Del Hamiltoniano:

$$2H = g^{rr} p_r^2 + g^{\phi\phi} p_\phi^2 + \underline{g^{tt} p_t^2} + \hbar^2 \omega_e^2 = 0$$

$$-\frac{1}{A(r)} p_t^2 + A(r) p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \hbar^2 \omega_e^2(r) = 0 \quad / A(r)$$

$$p_t^2 = A^2(r)\, p_r^2 + A(r)\left[\frac{p_\phi^2}{r^2} + \hbar^2 \omega_e^2\right]$$

$$\boxed{A(r)\, p_r = \pm \sqrt{p_t^2 - A(r)\left[\frac{p_\phi^2}{r^2} + \hbar^2 \omega_e^2\right]}}$$

CL 26 ⑤

reemplazando:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{p_\phi / r^2}{\sqrt{p_t^2 - A(r)\left[\frac{p_\phi^2}{r^2} + h^2 \omega_e^2\right]}}$$

(+) → ϕ crece y r crece

(−) → ϕ crece y r decrece.

Para un fotón que se mueve desde infinito hasta la distancia de máximo acercamiento R, y luego va hacia infinito, el cambio de la coordenada angular

$$\Delta\phi_c = -\int_{\infty}^{R} (\text{Int})\, dr + \int_{R}^{\infty} (\text{Int})\, dr$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\phi_c = 2\int_{R}^{\infty} \frac{p_\phi}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{p_t^2 - A(r)\left[\frac{p_\phi^2}{r^2} + h^2 \omega_e^2\right]}}}$$

En un espacio-tiempo plano, el mov. es una línea recta, de manera que

$$\Delta\phi_R = \pi$$

El ángulo de deflexión $\hat{\alpha} = \Delta\phi_c - \Delta\phi_R$

cl 26 (6)

$$\hat{\alpha} = 2\int_R^{\infty} \frac{p_\phi}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{p_t^2 - A(r)\left[\frac{p_\phi^2}{r^2} + \hbar^2\omega_e^2\right]}} - \pi$$

$\hat{\alpha}$: depende de

- La masa del cuerpo central ($r_S = 2M$)
- La distribución del plasma, $N(r)$ ($\omega_e(r)$)
- Los parámetros R, p_t, p_ϕ

R : punto de retorno $\Rightarrow \left.\frac{dr}{d\lambda}\right|_{r=R} = 0 \Rightarrow \left.p_r\right|_{r=R} = 0$

$$\therefore\; p_t^2 - A(R)\left[\frac{p_\phi^2}{R^2} + \hbar^2\omega_e^2(R)\right] = 0$$

$$\rightarrow \boxed{p_t^2 = A(r)\left[\frac{p_\phi^2}{R^2} + \hbar^2\omega_e^2(R)\right]}$$

ó bien

$$\boxed{p_\phi^2 = p_t^2 R^2\left[\frac{1}{A(R)} - \frac{\omega_e^2(R)}{\omega_0^2}\right]}$$

Definiendo:

$$\boxed{h(r) = r\sqrt{\frac{1}{A(r)} - \frac{\omega_e^2(r)}{\omega_0^2}}}$$

$$\boxed{p_\phi^2 = p_t^2\, h^2(R)}$$

CL 26 7

$$(\text{Int}) = \frac{p_t h(R)}{r^2}\left[p_t^2 - A(r)\left(\frac{p_t^2 h^2(R)}{r^2} + \hbar^2 \omega_e^2\right)\right]^{-1/2}$$

$$(\text{Int}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 A(r)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{h^2(r)}{h^2(R)} - 1}}$$

$$\therefore \boxed{\hat{\alpha} = 2\int_R^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r(r-r_s)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{h^2(r)}{h^2(R)} - 1}}}$$