PROBLEMA GUÍA III | # 9

Analicemos en primer lugar el efecto de $e^{-\alpha\frac{d}{dx}}$ sobre una función arbitraria (α es un escalar arbitrario).

Expandimos en primer lugar el operador diferencial $e^{-\alpha\frac{d}{dx}}$

$$e^{-\alpha\frac{d}{dx}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}$$

Entonces $e^{-\alpha\frac{d}{dx}} x^m$ (con $m \in \mathbb{N}$) está dado por:

$$e^{-\alpha\frac{d}{dx}} x^m = \sum_{n\geq 0} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^m$$

Por inducción veamos lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} x^m = m\, x^{m-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^m = m(m-1)\, x^{m-2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} x^m = m(m-1)(m-2)\, x^{m-3}.$$

$$\vdots$$

$$\therefore \quad \frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n}$$

o equivalentemente:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\dots 2\cdot 1}{(m-n)(m-n-1)\dots 2\cdot 1} x^{m-n}$$

luego

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-1} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

conociendo esto vemos entonces que:

$$e^{-\alpha \frac{d}{dx}} x^m = \sum_{n\geq 0} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^m = \sum_{n\geq 0} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

$$= x^m \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(-\frac{\alpha}{x}\right)^n$$

Obs. para $n > m$ la serie se trunca por culpa de la función Gamma del denominador:

$$(m-n)! = \Gamma(m-n+1)$$

$$\therefore\ e^{-\alpha \frac{d}{dx}} x^m = \sum_{n\geq 0}^{m} \binom{m}{n} (-\alpha)^n x^{m-n}$$

Esta es la expansión binomial $(x-\alpha)^m$ para $m \in \mathbb{N}$.

$\therefore$ $$e^{-\alpha\frac{d}{dx}} x^m = (x-\alpha)^m$$ (Esto es una traslación hacia la derecha de la función x^m)

$\Downarrow$

$e^{-\alpha\frac{d}{dx}} \equiv$ OPERADOR DIFERENCIAL DE TRASLACIÓN.

Generalicemos el resultado anterior para una función arbitraria $f(x)$ y supongamos que $f(x)$ admite una serie de potencias de la forma:

$$f(x) = \sum_{\ell \geq 0} F(\ell)\, x^\ell$$

$\therefore$ $$e^{-\alpha\frac{d}{dx}} f(x) = e^{-\alpha\frac{d}{dx}}\left(\sum_{\ell \geq 0} F(\ell)\, x^\ell\right)$$

$$= \sum_{\ell \geq 0} F(\ell)\, e^{-\alpha\frac{d}{dx}} x^\ell$$

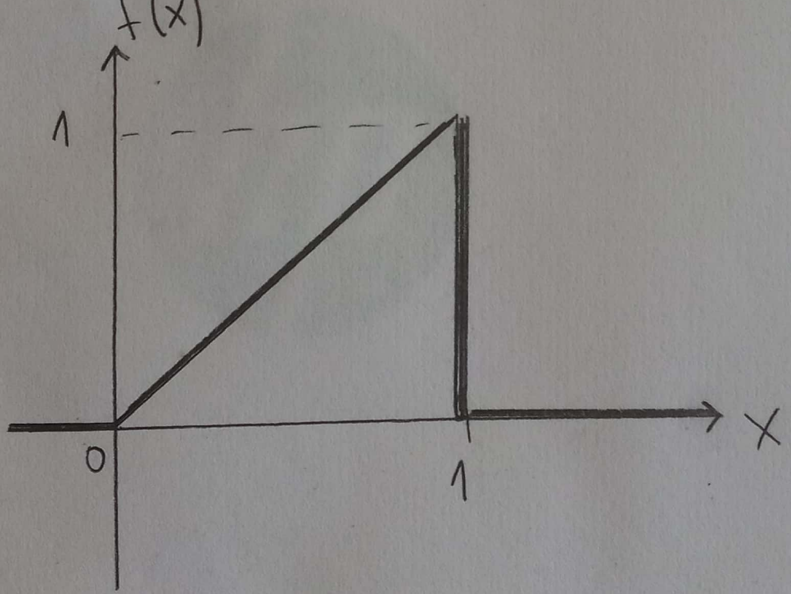
$$= \sum_{l \geq 0} F(l)\,(x-\alpha)^l = f(x-\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$\therefore$

$$e^{-\alpha \frac{d}{dx}} f(x) = f(x-\alpha)$$

Como aplicación particular sea $f(x) = x\left[H(x) - H(x-1)\right]$, gráficamente esto es lo siguiente:



$\therefore$ la gráfica de la función $F(x) = e^{-\frac{d}{dx}} f(x) = f(x-1)$ es: