Sobre la relación entre velocidad, tensión y densidad de una cuerda delgada

Felipe Ortiz, Fabián Trigo

Universidad de Valparaíso, Valparaíso

(Dated: Julio 10, 2020)

Para el presente experimento se plantearon dos objetivos: El primero de ellos siendo hallar la relación funcional entre la velocidad de propagación de una onda estacionaria en una cuerda y la distancia entre sus nodos de vibración; y el segundo hallar el valor experimentar de la densidad lineal de masa de dicha cuerda. Para ello, se hizo uso de un instrumento que producía vibraciones a frecuencias deseadas, haciendo oscilar a la cuerda en cuestión y produciendo ondas estacionarias, de modo que se pudiera medir su longitud de onda.

I. TEORÍA

Represéntese la situación con una cuerda ideal

1) La cuerda es perfectamente uniforme con una densidad constante y posee elasticidad perfecta sin resistencia a doblarse

2) La tension en la cuerda se asume ser mucho mayor que la fuerza que provoca la gravedad sobre esta (osea la masa provocando la tension ha de ser mayor que el total de la cuerda)

3) Se asume que la cuerda se mueve en una sola dirección, osea hacia arriba y hacia abajo

Mediante estas idealizaciones podemos desarrollar la ecuación de una onda delgada en una cuerda delgada real.

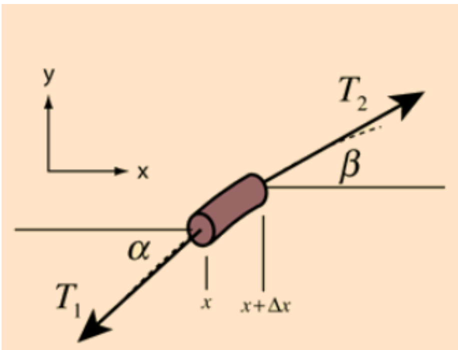

FIG. 1: Segmento infinitesimal de cuerda

Asumimos que la Tensión horizontal se mantiene constante en todo segmento de la cuerda, por ello podemos dividir $T1$ y $T2$ en forma de componentes horizontales y verticales y serán iguales a la Tensión horizontal que afecta toda la cuerda.

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T \tag{1}$$

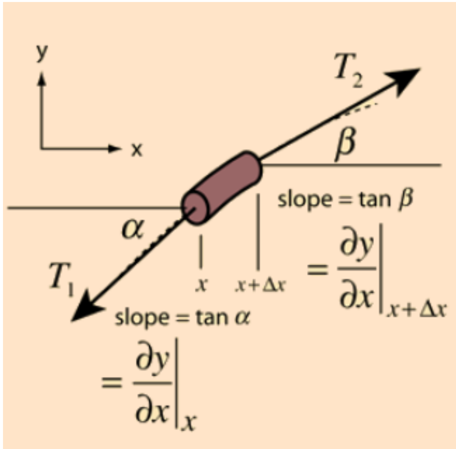

FIG. 2: Relación Ángulo y Pendiente

Mientras que usando la segunda ley de Newton para la parte vertical de la situacion:

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = dm(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}) \tag{2}$$

Recordemos estamos omitiendo la aceleración producto de la gravedad y conciderando unicamente la que posee la cuerda. El diferencial de masa $dm = \rho \triangle x$. Dividiendo (2) por la tensión (1)

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho \triangle x}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3}$$

Via fig (2) Reemplazando las tangentes por derivadas parciales

$$\frac{1}{\triangle x}\left[\frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\triangle x} + \frac{\partial y}{\partial x}|_{x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4}$$

Lo cual para valores de $\triangle x \to 0$ es tomar la derivada de $\frac{\partial y}{\partial x}$, por tanto:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{5}$$

La cual es la ecuación de una onda con velocidad (6)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{6}$$

la velocidad de una onda posee relacion con la frecuencia y la longitud de onda sobre esta (7)

$$f\lambda = v \tag{7}$$

II. METODOLOGÍA

A. Instrumentos y montaje

Para la realización del experimento fueron utilizados los siguientes instrumentos:

•Generador de frecuencia.

•Una cuerda.

•Dos soportes.

•Masas.

•Una balanza.

•Una huincha de medir (graduada en centímetros).

Uno de los extremos de la cuerda se sujeta al generador de frecuencias, el cual se encuentra en un soporte para separarlo del piso o la mesa y dejarle espacio a la cuerda para oscilar. La cuerda se hace pasar a través de otro soporte; este tiene una rueda con hendidura, que es por donde pasa la cuerda. Al otro extremo de la cuerda se ata una pequeña barra de metal en forma de gancho, a la cual luego se le acoplará cierto número de masas.

B. Procedimiento

Se acopla cierta cantidad de masas en el gancho metálico, se masa en una balanza y se deja colgando de la cuerda. Se hace que el generador de frecuencia haga vibrar a la cuerda con alguna frecuencia adecuada para poder diferenciar los nodos y medir la distancia entre ellos, lo que se realiza con una huincha de medir. Las lecturas de masa, distancia entre nodos y frecuencia son guardadas.

Este procedimiento es repetido seis veces para diferentes valores de la masa y algún valor arbitrario de la frecuencia que cumpla la condición antes estipulada.

III. DATOS Y ANALISIS

Los datos tomados de la frecuencia impuesta por el generador, la distancia entre nodos (que es la mitad de la longitud de onda) que producía, y la masa que colgaba, se muestran en la tabla 1.

$f \pm 0.1[Hz]$	$\lambda/2 \pm 1[cm]$	$m \pm 0.01[g]$
35.7	42.	49.87
35.1	59.	95.67
42.3	61.	140.06
69.2	41.	184.41
74.2	41.	206.85
54.1	62.	251.72

TABLE I: Datos de frecuencia, distancia entre nodos y masa.

Por simplicidad, al realizar operaciones con los datos se usarán en unidades del sistema internacional, es decir, la distancia entre nodos se usará en metros y la masa en kilogramos; la frecuencia ya está en las unidades requeridas. De la ecuación (7) se sabe que el producto entre la frecuencia y la longitud de onda es la velocidad de propagación de la onda, y además, por la disposición del sistema se puede saber que la tensión sobre la cuerda es igual al peso de la masa que cuelga. Entonces, se pueden conseguir los datos de la siguiente tabla.

T [N]	v [m/s]
0.49	30.0
0.94	41.4
1.37	51.7
1.81	56.7
2.03	60.8
2.47	67.1

TABLE II: Tensión sobre la cuerda y velocidad de propagación de la onda estacionaria.

Es conocido que la relación entre la tensión y la velocidad de propagación de una onda en una cuerda está dada por la ecuación (6), por lo que para poder comparar los datos con la teoría se aplicará logaritmo natural a ambos lados de dicha ecuación, obteniendo así:

$$\log(v) = \frac{1}{2}\log(T) + \frac{1}{2}\log(\mu) \tag{8}$$

Esta ecuación es una recta de pendiente $\frac{1}{2}$, intersecto $\frac{1}{2}\log(\mu)$ y variable independiente y dependiente $\log(T)$ y $\log(v)$, respectivamente. Tomando esto como base, se aplica logaritmo a los datos de la tabla anterior, los que se muestran a continuación.

$\log(T)$	$\log(v)$
-0.716	3.40
-0.064	3.72
0.317	3.94
0.592	4.04
0.707	4.11
0.903	4.21

TABLE III: Logaritmo natural de los datos de velocidad y tensión.

Los datos de la tabla (III) cuentan con una correlación lineal de 0.998889, lo que es un buen indicativo de que se sitúan aproximadamente a lo largo de una recta, y además, como se puede ver en el gráfico de los datos, ningún punto se escapa demasiado de esa tendencia.

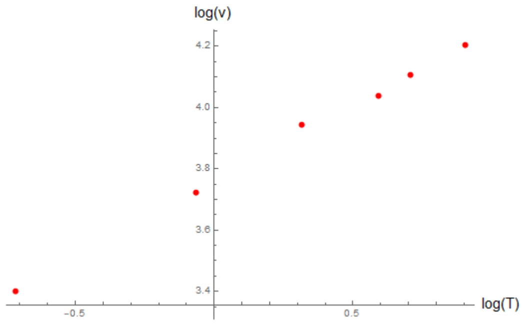

FIG. 3:
Gráfico de los datos de ta tabla (III).

Entonces, se utilizan métodos de regresión lineal para encontrar la mejor recta que se ajusta a estos puntos, de forma que se obtiene lo siguiente:

$$\log(v) = 0.496 \log(T) + 3.760 \tag{9}$$

Como se puede ver directamente, el valor experimental de la pendiente es 0.496, lo que comparado con la teoría implica un error relativo porcentual del 0.83%. También se puede extraer el valor de la densidad lineal de masa de la cuerda, para lo cual hay que multiplicar por un factor 2 al intersecto y aplicarle exponencial; esto da:

$$\mu = 1844[kg/m^3] = 1.844[g/cm^3] \tag{10}$$

Este valor no se puede comparar con nada porque no se tienen datos medidos sobre la masa de la cuerda, pero sí se puede decir que es un valor razonable: no es demasiado grande ni demasiado pequeño.

IV. CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

Se demuestran utiles las aproximaciones tomadas en la Teoria del experimento, la expresion de velocidad obtenida en funcion de la tension y la densidad de la cuerda (6) fue utilizada para calcular la densidad de esta cuerda asumiendola uniforme. La cual desgraciadamente no se conoce su valor exacto sin embargo se encuentra en el margen de lo sensato por lo que consideramos una expresion correcta la derivada (6). Se cumplió el objetivo de derivar una expresión para la velocidad de una cuerda con vibraciones de onda estacionarias y su densidad teorica.

[1] Serway, R. A., Jewett, J. W., & Serway, R. A. (2004). Physics for scientists and engineers. Belmont, CA: Thomson-Brooks/Cole.

[2] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Waves/wavsol.html#c1