Estudio sobre Sistemas Acoplados, Periódicos, No lineales

Adolfo Ibánez[1] & Iván González[2]

Instituto de Física y Astronomía, Universidad de Valparaíso, Chile

[1]adolfo.ibanez@gmail.com, [2]ivan.gonzalez@uv.cl

Resumen

En este trabajo se describe un método genérico para aproximar analíticamente soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. En particular aplicaremos esta técnica al caso de un péndulo simple de masa m sujeta a una cuerda de largo b, la cual en uno de sus extremos está acoplada al extremo de un resorte de constante elástica κ y con posición de equilibrio en el origen de coordenadas, $(x, y) = (0, 0)$. Hemos escogido este caso en particular para mostrar una de las principales ventajas de nuestra metodología la que nos permite abordar sistemas complejos de ecuaciones no lineales reduciendo progresivamente la complejidad de su grado de no linealidad.

I. Introducción

El Lagrangiano de nuestro sistema está dado por la siguiente fórmula:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}b\cos\theta + b^2\dot{\theta}^2\right) + mgb\cos\theta - \frac{1}{2}\kappa x^2, \quad (1)$$

las correspondientes ecuaciones de movimiento para las variables $x(t)$ y $\theta(t)$ son las siguientes:

$$\ddot{x}\cos\theta + b\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0, \quad (2)$$

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}x + b\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0, \quad (3)$$

las que en conjunto describen la dinámica del sistema.

II. Desarrollo

Primero debemos definir variables auxiliares para nuestras componentes no lineales,

$$f_1 = \cos\theta, \quad (4)$$
$$f_2 = \sin\theta, \quad (5)$$
$$f_3 = \dot{\theta}^2. \quad (6)$$

Entonces nuestras ecuaciones de movimiento Ec. (2) y Ec. (3) reescritas son las siguientes:

$$\ddot{x}f_1 + b\ddot{\theta} + gf_2 = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}x + b\ddot{\theta}f_1 - bf_2f_3 = 0. \quad (8)$$

Requerimos además ecuaciones diferenciales auxiliares para las variables f_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\dot{f}_1 = -f_2\dot{\theta}, \quad (9)$$
$$\dot{f}_2 = f_1\dot{\theta}, \quad (10)$$
$$\dot{f}_3 = 2\ddot{\theta}\dot{\theta}. \quad (11)$$

De esta manera podremos utilizar el método de series de potencias para evaluar el sistema de ecuaciones obtenido. Por simplicidad en la notación asumiremos de aquí en adelante que $m = b = \kappa = g = 1$. Supondremos además que las funciones implicadas tienen soluciones en serie de potencias de la forma:

$$x(t) = \sum_{k\geq 0}\phi_k\, X(k)t^k, \quad (12)$$

$$\theta(t) = \sum_{k\geq 0}\phi_k\, \Theta(k)t^k, \quad (13)$$

$$f_j(t) = \sum_{k\geq 0}\phi_k\, F_j(k)t^k. \quad j = 1, 2, 3. \quad (14)$$

En este punto es importante recordar que la representación en serie de potencias para la n-ésima derivada de una función $g(t)$ arbitraria está dada por la siguiente expresión:

$$g_i^{(n)}(t) = (-1)^n\sum_{k\geq 0}\phi_k\, G_i(k+n)t^k, \quad (15)$$

asimismo también se cumple que para el producto de las derivadas de dos funciones arbitrarias que:

$$g_1^{(n_1)}(t)\cdot g_2^{(n_2)}(t) = (-1)^{n_1+n_2}\sum_{k\geq 0}\phi_k \left[\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} G_1(l+n_1)\cdot G_2(k+n_2-l)\right]t^k. \quad (16)$$

Teniendo esto en consideración, entonces las correspondientes representaciones en forma de series de potencias para nuestras ecuaciones de movimiento (7) y (8) son las siguientes:

$$\sum_{k\geq 0}\phi_k\left[\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}X(l+2)F_1(k-l)\right]t^k + \sum_{k\geq 0}\phi_k\,\Theta(k+2)t^k + \sum_{k\geq 0}\phi_k\, F_2(k)t^k = 0, \quad (17)$$

$$\sum_{k\geq 0}\phi_k\, X(k+2)t^k + \sum_{k\geq 0}\phi_k\, X(k)t^k + \sum_{k\geq 0}\phi_k\left[\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\Theta(l+2)F_1(k-l)\right]t^k - \sum_{k\geq 0}\phi_k\left[\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}F_2(l)F_3(k-l)\right]t^k = 0 \quad (18)$$

El procedimiento anterior se aplica de forma similar a nuestras ecuaciones auxiliares, esto es:

$$\sum_{k\geq 0}\phi_k\, F_1(k+1)t^k = -\sum_{k\geq 0}\phi_k\left[\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\Theta(l+1)F_2(k-l)\right]t^k, \quad (19)$$

$$\sum_{k\geq 0}\phi_k\, F_2(k+1)t^k = \sum_{k\geq 0}\phi_k\left[\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\Theta(l+1)F_1(k-l)\right]t^k, \quad (20)$$

$$\sum_{k\geq 0}\phi_k\, F_3(k+1)t^k = 2\sum_{k\geq 0}\phi_k\left[\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\Theta(l+2)\Theta(k+1-l)\right]t^k. \quad (21)$$

El siguiente paso es aplicar sobre cada ecuación la transformada de Mellin, la cual esta definida de la siguiente forma:

$$M\left[g(t)\right](s) = \int_0^\infty t^{s-1}g(t)dt. \quad (22)$$

Los siguentes teoremas combinan la Transformada de Mellin con el Método de Brackets (MoB) y suponen nuestra herramienta principal para obtener nuestro sistema de ecuaciones de recurrencia equivalente al problema original.

Teorema I

$$M\left[g^{(n)}(t)\right](s) = (-1)^n\Gamma(s)G(-s+n). \quad (23)$$

Demostración

$$\begin{aligned} M\left[g^{(n)}(t)\right](s) &= (-1)^n\int_0^\infty t^{s-1}\left[\sum_{k\geq 0}\phi_k\, G(k+n)t^k\right]dt \\ &= (-1)^n\sum_k\phi_k\, G(k+n)\int_0^\infty t^{k+s-1}dt \\ &= (-1)^n\sum_k\phi_k\, G(k+n)\langle k+s\rangle \\ &= (-1)^n\Gamma(s)G(-s+n). \end{aligned} \quad (24)$$

Teorema II

$$M\left[g_1^{(n_1)}(t)\cdot g_2^{(n_2)}(t)\right](s) = (-1)^{n_1+n_2}\Gamma(s)\cdot\sum_{l\geq 0}^{-s}\binom{-s}{l}G_1(l+n_1)G_2(-s+n_2-l). \quad (25)$$

Cuya demostración se deriva de combinar (**??**) con el **Teorema I**.

Luego de aplicar las transformadas de Mellin al sistema de ecuaciones diferenciales, finalmente se obtiene el conjunto de ecuaciones de recurrencia a través del cual generamos los coeficientes de las series de potencias para cada variable dependiente del sistema:

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}X(l+2)F_1(n-l) + \Theta(n+2) + F_2(n) = 0, \quad (26)$$

$$X(n+2) + X(n) + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[\Theta(l+2)F_1(n-l) - F_2(l)F_3(n-l)\right] = 0, \quad (27)$$

$$F_1(n+1) = -\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\Theta(l+1)F_2(n-l), \quad (28)$$

$$F_2(n+1) = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\Theta(l+1)F_1(n-l), \quad (29)$$

$$F_3(n+1) = 2\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\Theta(l+2)\Theta(n+1-l). \quad (30)$$

A continuación buscaremos nuestros coeficientes haciendo correr el índice n en nuestras ecuaciones de recurrencia (26), (27) y auxiliares. Para conseguir generalidad fijaremos las condiciones iniciales de forma arbitraria. Inmediatamente se fijan los primeros coeficientes de las series solución:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) = x_0, \\ \Theta(0) &= \theta(0) = \theta_0 \\ X(1) &= -\dot{x}(0) = -v_0, \\ \Theta(1) &= -\dot{\theta}(0) = -\omega_0, \\ F_1(0) &= f_1(0) = \cos(\theta_0), \\ F_2(0) &= f_2(0) = \sin(\theta_0), \\ F_3(0) &= f_3(0) = \dot{\theta}(0)^2 = \omega_0^2. \end{aligned}$$

Luego para $n = 0$ obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$X(2)F_1(0) + \Theta(2) + F_2(0) = 0, \quad (31)$$

$$X(2) + X(0) + \Theta(2)F_1(0) - F_2(0)F_3(0) = 0, \quad (32)$$

$$F_1(1) = -\Theta(1)F_2(0), \quad (33)$$

$$F_2(1) = \Theta(1)F_1(0), \quad (34)$$

$$F_3(1) = 2\Theta(2)\Theta(1). \quad (35)$$

Posteriormente de (31) obtenemos:

$$X(2) = -F_1(0)^{-1}\Theta(2) - F_1(0)^{-1}F_2(0), \quad (36)$$

y reemplazando en (32) obtenemos:

$$\Theta(2) = \frac{\left[F_1(0)^{-1}F_2(0) - X(0) + F_2(0)F_3(0)\right]}{\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]}, \quad (37)$$

y por lo tanto:

$$X(2) = -\frac{\left[F_1(0)^{-1}F_2(0) - X(0) + F_2(0)F_3(0)\right]}{F_1(0)\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} - F_1(0)^{-1}F_2(0). \quad (38)$$

Análogamente para $n = 1$ obtenemos:

$$\Theta(3) = -\frac{\left[-F_1(0)^{-1}X(2)F_1(1) - F_1(0)^{-1}F_2(1) + X(1)\right]}{\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} - \frac{\left[\Theta(2)F_1(1) - F_2(0)F_3(1) - F_2(1)F_3(0)\right]}{\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]}, \quad (39)$$

$$X(3) = \frac{\left[-F_1(0)^{-1}X(2)F_1(1) - F_1(0)^{-1}F_2(1) + X(1)\right]}{F_1(0)\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} + \frac{\left[\Theta(2)F_1(1) - F_2(0)F_3(1) - F_2(1)F_3(0)\right]}{F_1(0)\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} - F_1(0)^{-1}X(2)F_1(1) - F_1(0)^{-1}F_2(1).$$

Después de una pequeña álgebra obtenemos la estructura genérica para $X(n+2)$ y $\Theta(n+2)$:

$$\Theta(n+2) = \frac{\left[\sum_{l\geq 0}^{n-1}\binom{n}{l}X(l+2)F_1(n-l) + F_2(n)\right]}{F_1(0)\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} - \frac{X(n) + \sum_{l\geq 0}^{n-1}\binom{n}{l}\Theta(l+2)F_1(n-l)}{\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} + \frac{\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}F_2(l)F_3(n-l)]}{\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]},$$

$$X(n+2) = -\frac{\left[\sum_{l\geq 0}^{n-1}\binom{n}{l}X(l+2)F_1(n-l) + F_2(n)\right]}{F_1(0)^2\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} + \frac{X(n) + \sum_{l\geq 0}^{n-1}\binom{n}{l}\Theta(l+2)F_1(n-l)}{F_1(0)\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} - \frac{\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}F_2(l)F_3(n-l)]}{F_1(0)\left[F_1(0) - F_1(0)^{-1}\right]} - \frac{\left[\sum_{l\geq 0}^{n-1}\binom{n}{l}X(l+2)F_1(n-l) + F_2(n)\right]}{F_1(0)}.$$

Finalmente la aproximación analítica para nuestro sistema está dado por las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n+2}X(n+2)t^{n+2}, \quad (40)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0t + \sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n+2}\Theta(n+2)t^{n+2}. \quad (41)$$

III. Conclusiones

El método descrito nos ha permitido trabajar sobre un sistema de ecuaciones altamente no lineal, reduciéndolas a no linealidades de a lo sumo un orden cuadrático. La definición de un proceso para despejar incógnitas en nuestro sistema general de ecuaciones de recurrencia, nos permite realizar una aproximación analítica como una representación en series de potencias de t de nuestras variables $x(t)$ y $\theta(t)$ y válida para los primeros instantes del sistema. Se visualiza la posibilidad de plantear un procedimiento algorítmico aún más general que pudiera aplicarse a cualquier tipo de sistema, acoplado, no lineal que describa su dinámica a través de ecuaciones diferenciales genéricas con condiciones iniciales arbitrarias conocidas.

- I. Gonzalez and V. Moll, *Definite integrals by method of brackets. Part 1*, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73 (2010). (arXiv:0812.3356).
- I. Gonzalez, V. Moll and A. Straub, *The method of brackets. Part 2: examples and applications*, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 2010, Pages 157-171. (arXiv:1004.2062).