Ejercicios Resueltos de Electricidad y Magnetismo

Juan Pablo Garrido L.
Daniel Narrias V.

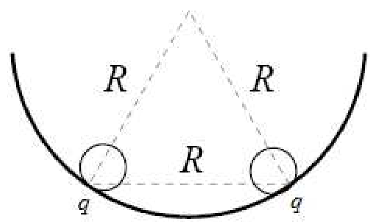
Índice general

NOTA: Los resultados podrian eventuamente tener errores de tipeo. Ante cualquier duda escribir a: jbgarrid@uc.cl o dnarrias@uc.cl

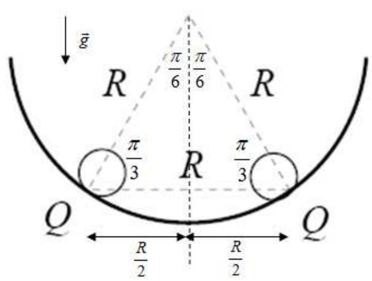
Capítulo 1

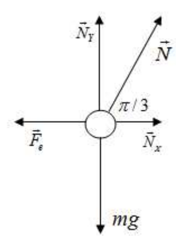
Ley de Coulomb

Problema 1
Dos bolitas idénticas tienen una masa m y carga q. Cuando se ponen en un tazón esférico de radio R con paredes no conductoras y sin fricción, las bolitas se mueven hasta que en la posición de equilibrio están separadas por una distancia R. Determine las cargas de las bolitas.



Solución:
Para aplicar la condición de equilibrio es necesario que escribamos todas las fuerzas sobre una de las bolitas cargadas. Para esto consideramos la siguiente configuración para el problema:





La fuerza normal $\vec{N}$ se puede escribir usando sus componentes rectangulares como:

$$\vec{N} = N\cos(\pi/3)\hat{\imath} + N\sin(\pi/3)\hat{\jmath}$$

La fuerza $\vec{F}_e$ es la ejercida por la bolita de la derecha sobre la bolita de la izquierda y es:

$$\vec{F}_e = \frac{kq^2}{R^2}$$

Ahora sumamos fuerzas por componente sobre la bolita de la derecha y aplicamos la condición de equilibrio:

Fuerza en X:

$$\sum F_X = N\cos(\pi/3) - \frac{kq^2}{R^2} = 0 \tag{1}$$

Fuerza en Y:

$$\sum F_Y = N\sin(\pi/3) - mg = 0 \tag{2}$$

De (2) vemos que

$$N = \frac{mg}{\sin(\pi/3)}$$

Reemplazando esta expresion en (1):

$$\frac{mg}{\sin(\pi/3)}\cos(\pi/3) - \frac{kq^2}{R^2} = 0$$

Despejando q

$$\boxed{q = \pm R\sqrt{\frac{mg\cot(\pi/3)}{k}}}$$

Problema 2
Se tienen dos masas iguales m de misma carga q unidas a través de un segmento vertical fijo. La masa inferior está fija al extremo inferior del segmento y la masa superior se puede mover libremente.

a) Encuentre la posición de equilibrio de la masa superior.

b) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la masa en torno a su punto de equilibrio.

Solución:

a) Las cargas eléctricas son de mismo signo, por lo que la fuerza eléctrica entre ambas es repulsiva. Así, la masa superior experimenta una fuerza eléctrica hacia arriba y su peso hacia abajo, estando en equilibrio cuando ambas fuerzas son iguales. Considerando esto tenemos,

$$mg = k\frac{q^2}{{x_0}^2}$$

con x_0 posición de equilibrio.

$$\Longrightarrow x_0 = q \cdot \sqrt{\frac{k}{mg}} \qquad (1)$$

b) Consideremos una coordenada x en torno la posición de equilibrio x_0. Tenemos por 2da ley de Newtón

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg + \frac{kq^2}{(x_0 + x)^2}$$

Para oscilaciones pequeñas, $|x| << |x_0| \Longrightarrow |\frac{x}{x_0}| << 1$, por lo que

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg + \frac{kq^2}{(x_0 + x)^2} = -mg + \frac{kq^2}{{x_0}^2} \cdot (1 + \frac{x}{x_0})^{-2} \cong -mg + \frac{kq^2}{{x_0}^2} \cdot (1 - 2\frac{x}{x_0})$$

Pero de (1) tenemos que $mg = \frac{kq^2}{{x_0}^2}$

$$\Longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} \cong \frac{-2kq^2x}{{x_0}^3}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2kq^2}{m{x_0}^2} \cdot \frac{x}{x_0} = 0$$

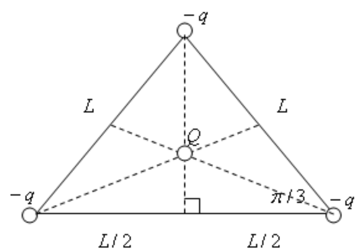
Pero de (1), $m{x_0}^2 = \frac{kq^2}{g}$

$$\Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{x_0} \cdot x = 0$$

Por tanto, tenemos que la frecuencia de oscilaciones pequeñas es

$$w = \sqrt{\frac{2g}{x_0}}$$

Problema 3
En los vértices de un triángulo equilátero de lado L hay tres cargas negativas -q. Si se pone una carga Q en el centro de gravedad del triángulo, encuentre Q tal que el sistema esté en equilibrio (ver figura).



Solución: Queremos encontrar Q tal que la fuerza en los vértices sea cero. Tomemos $\hat{x}$ la dirección de la carga izquierda inferior a la derecha inferior y $\hat{y}$ la del punto medio del lado inferior a la carga del vértice superior. La situación es análoga en los tres vértices; centrémonos en la carga derecha inferior. Tenemos que las fuerzas eléctricas que experimenta son

$$\vec{F_1} = k\frac{q^2}{L^2} \cdot (cos(\frac{\pi}{3})\hat{x} - sen(\frac{\pi}{3})\hat{y}) = k\frac{q^2}{L^2} \cdot (\frac{\hat{x}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y})$$

$$\vec{F_2} = k\frac{q^2}{L^2}\hat{x}$$

La fuerza resultante es

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{3}{2}k\frac{q^2}{L^2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}k\frac{q^2}{L^2}\hat{y} = \sqrt{3} \cdot k\frac{q^2}{L^2} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{\hat{y}}{2}) = \sqrt{3} \cdot k\frac{q^2}{L^2} \cdot (cos(\frac{\pi}{6})\hat{x} - sen(\frac{\pi}{6})\hat{y})$$

Del sentido de la fuerza, vemos que Q debe ser positiva. Ahora, de geometría elemental -esto se deja al lector- podemos ver que la fuerza entre Q y -q tiene dirección $\pi - \frac{\pi}{6}$ respecto $\hat{x}$, por lo que la fuerza sobre -q debido a las otras cargas negativas es antiparalela con la fuerza eléctrica sobre -q debido a su interacción con Q. Así, para que -q esté en equilibrio, nos basta igualar los módulos de las fuerzas.

La distancia entre -q y Q la podemos encontrar usando la ley de los senos sobre el triángulo -q Q -q de base la base del triángulo equilátero. Así,

$$\frac{r}{sen(\frac{\pi}{6})} = \frac{L}{sen(\frac{2\pi}{3})} \Longrightarrow r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, al igualar los módulos de las fuerzas obtenemos

$$\sqrt{3} \cdot k\frac{q^2}{L^2} = k\frac{qQ}{(\frac{L}{\sqrt{3}})^2} \Longrightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot q$$

Problema 4

Dos cargas puntuales positivas Q están separadas por una distancia $2a$. Por el punto medio del segmento que las une se traza un plano perpendicular al mismo. El lugar de los puntos en que la fuerza sobre una carga de prueba q en el plano es máxima es por simetría una circunferencia. Encuentre el radio de dicha circunferencia.

Solución:

De la simetría del problema, de antemano sabemos que la fuerza sobre la carga de prueba está sobre el plano. Sea tal plano el plano xy de coordenadas cartesianas y pongamos ambas cargas sobre el eje z. De esta forma, tenemos que $\vec{r} = R \cdot (cos(\theta)\hat{x} + sen(\theta)\hat{y})$, $\vec{r_1} = a\hat{z}$ y $\vec{r_2} = -a\hat{z}$, donde $\vec{r}$ es la posición de la carga de prueba y $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ son las posiciones de las cargas positivas antes mencionadas. Además, $|\vec{r} - \vec{r_1}| = |\vec{r} - \vec{r_2}| = \sqrt{R^2 + a^2}$. La fuerza eléctrica sobre la carga de prueba es

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{kqQ}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (Rcos(\theta)\hat{x} + Rsen(\theta)\hat{y} - a\hat{z} + Rcos(\theta)\hat{x} + Rsen(\theta)\hat{y} + a\hat{z})$$

$$= \frac{2kqQR}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (cos(\theta)\hat{x} + sen(\theta)\hat{y}) \qquad .$$

De esto vemos que la fuerza sobre la carga de prueba está sobre el plano. Claramente lo que debemos hacer es maximizar el módulo de esta fuerza, y encontrar con ello el lugar geométrico descrito por los puntos donde el módulo de esta fuerza es máxima. Es decir, debemos maximizar la función

$$|\vec{F}| = \frac{2kqQR}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = 2kqQ \cdot f(R)$$

$$\Longrightarrow \frac{df(R)}{dR} = \frac{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - 3R^2(R^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}{(R^2+a^2)^3} = 0$$

$$\Longrightarrow (R^2+a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot ((R^2+a^2) - 3R^2)) = 0 \Longrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$$

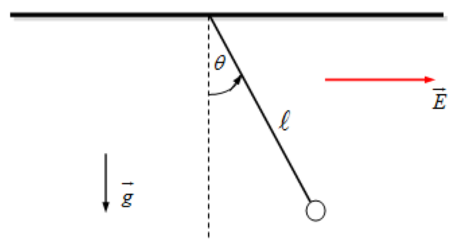
Vemos que el lugar geométrico es una circunferencia y su radio es $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$

Problema 5

Una esfera plástica cargada tiene una masa m y se cuelga de un hilo aislante de largo l, en una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$ (ver figura). Si la bolita permanece en equilibrio en un ángulo θ entre la vertical y el hilo.

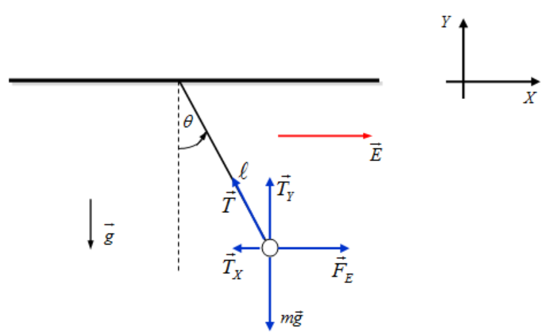
(a) Calcular la carga q de la bolita.

(b) Suponga que la bolita pierde carga a una tasa de $\alpha(C \cdot seg^{-1})$. Calcule la velocidad angular que produce esta descarga para $\theta \ll 1$.



Solución:

a) Lo primero que se debe hacer es determinar todas las fuerzas que están actuando sobre la bolita y luego utilizar la condición de equilibrio. La siguiente figura muestra las fuerzas que están actuando.



Donde $\vec{F_E}$ es la fuerza producida por el campo eléctrico sobre la carga q y se calcula como:

$$\vec{F_E} = q\vec{E}$$

Como $\vec{E}$ es paralelo al eje X, se tendrá que $\vec{E} = E\hat{\imath}$. Por lo tanto $\vec{F_E} = qE\hat{\imath}$

Escribimos la tensión utilizando sus componentes rectangulares:

$$\vec{T} = -T\sin(\theta)\hat{\imath} + T\cos(\theta)\hat{\jmath}$$

Ahora se puede sumar las fuerzas por componente y aplicar la condición de equilibrio:

Fuerza en X:

$$\sum F_X = qE - T\sin(\theta) = 0 \tag{1}$$

Fuerza en Y:

$$\sum F_Y = T\cos(\theta) - mg = 0 \tag{2}$$

De (2):

$$T = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

Reemplazando en (1):

$$qE - \frac{mg}{\cos(\theta)}\sin(\theta) = 0$$

De esto, resulta que:

$$q = \frac{mg\tan(\theta)}{E}$$

b) Del resultado anterior vemos tenemos que $q = \frac{mg\tan(\theta)}{E}$. Como $\theta \ll 1$ tenemos que $\tan(\theta) \approx \theta$. Por lo tanto, podemos escribir la carga en función del tiempo como:

$$q(t) = \frac{mg\theta(t)}{E}$$

Derivamos con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{mg}{E}\frac{d\theta}{dt}$$

Luego, como $\frac{dq}{dt} = \alpha$, despejando $\frac{d\theta}{dt}$ resulta:

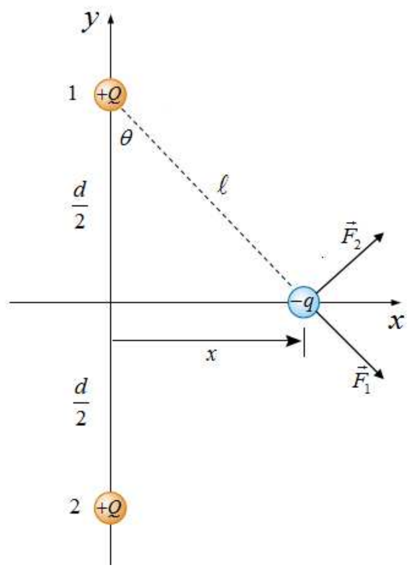
$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha E}{mg}}$$

Problema 6

Dos cargas $+Q$ se mantienen fijas a una distancia d de separación. Una partícula de carga negativa $-q$ y masa m se sitúa en el centro de ellas y luego, tras un pequeño desplazamiento perpendicular a la línea que las une, se deja en liberad. Demuestre que la partícula describe un movimiento armónico simple y encuentre su periodo de oscilación.

Solución:

Para resolver el problema utilizare la siguiente disposición espacial:



Lo primero que hacemos es calcular la fuerza resultante sobre la carga $-q$. Notar que al ser las cargas fijas de signo opuesto a la carga de prueba las fuerzas serán atrayentes y será esto lo que producirá la oscilación.

Calculo de $\vec{F_1}$:

La carga que produce la fuerza $\vec{F_1}$ se encuentra en la posición $\vec{r}_1 = d/2\hat{j}$ y la partícula de prueba en $x\hat{i}$. Por definición, la fuerza entre ambas cargas es:

$$\vec{F_1} = \frac{k(-q)Q(x\hat{i} + d/2\hat{j})}{l^3}$$

Calculo de $\vec{F_2}$:

En este caso, la carga que produce $\vec{F_2}$ se encuentra en la posición $\vec{r}_2 = -d/2\hat{j}$, por lo tanto la fuerza de atracción entre esta carga y la carga de prueba será:

$$\vec{F_2} = \frac{k(-q)Q(x\hat{i} - d/2\hat{j})}{l^3}$$

De esta manera, la fuerza resultante sobre la carga $-q$ será:

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{-2kqQx}{l^3}\hat{i} \tag{1}$$

Vemos que podemos relacionar el largo ℓ con las distancia $d/2$ en función del ángulo θ indicado en la figura anterior por la relación trigonométrica:

$$\frac{d/2}{\ell} = \cos(\theta)$$

$$\Longrightarrow \ell = (d/2)\cos(\theta)$$

Como se produce un pequeño desplazamiento de la carga de prueba, el ángulo θ es también pequeño: $\theta \ll 1$. Con esto vemos que $\cos(\theta) \approx 1$ y por lo tanto $\ell \approx (d/2)$. Evaluando en (1) se tiene que:

$$\vec{F} = \frac{-16kqQx}{d^3} \qquad (2)$$

Por la primera ley de newton se tiene que $\vec{F} = m\vec{a}$. En esta situación la partícula se mueve sobre el eje x y por lo tanto $m\vec{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath}$
De esta manera se tendrá que

$$\frac{-16kqQx}{d^3} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{16kqQx}{md^3} = 0$$

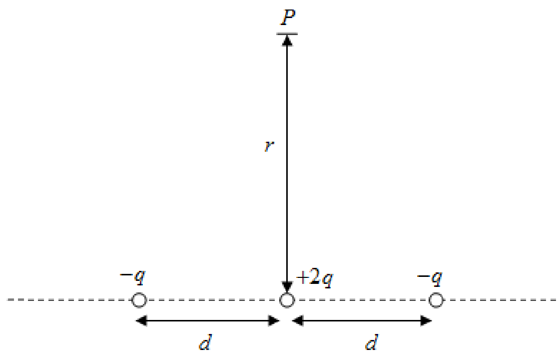
Con esto verificamos que la carga sigue un movimiento armónico simple. La frecuencia angular será entonces:

$$w = 4\sqrt{\frac{kqQ}{md^3}}$$

El periodo de oscilación será entonces

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{w} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{md^3}{kqQ}}}$$

Problema 7
Considere la siguiente distribución de cargas puntuales:

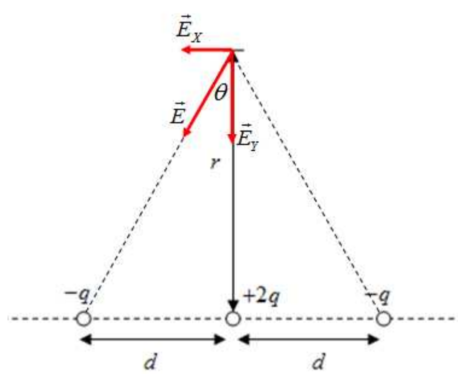


a) ¿Cuanto vale el campo eléctrico en el punto P indicado?
b) Evaluar el campo eléctrico en el límite en que P esta muy alejado del sistema

Solución:
a) Por simetría el campo eléctrico estará en dirección $\hat{\jmath}$. El campo eléctrico producido por la carga central sobre el punto P será simplemente:

$$\vec{E}_1 = \frac{2kq}{r^2}\hat{\jmath}$$

Como es fácil ver, las dos cargas laterales producirán un campo eléctrico en el punto P y las componentes en x se anularan ya que tienen igual carga y están a igual distancia del punto. Por lo tanto, tendremos que calcular la componente en y de cada campo y después sumarlo (por principio de superposición). Esto se puede ver en la siguiente figura:



La componente en y del campo eléctrico será $E_y = E\cos(\theta)$. El modulo del campo eléctrico, E, es por definición:

$$E = \frac{kq}{d^2 + r^2}$$

Además, es fácil ver que $\cos(\theta) = \frac{r}{\sqrt{d^2+r^2}}$. De esta manera tenemos que

$$E_y = (\frac{kq}{d^2+r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{d^2+r^2}})\hat{j} = \frac{kqr}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

Luego, dado que la carga es negativa, podemos escribir vectorialmente este campo electrico como

$$\vec{E}_y = -\frac{kqr}{(d^2+r^2)^{3/2}}\hat{j}$$

Este campo será el producido por cada carga lateral. Por lo tanto el campo eléctrico resultante en el punto P será por principio de superposición

$$\vec{E} = \vec{E}_y + \vec{E}_y + \vec{E}_1$$

Reemplazando los valores ya obtenidos

$$\boxed{\vec{E} = (\frac{2kq}{r^2} - \frac{2kqr}{(d^2+r^2)^{3/2}})\hat{j}}$$

b) Cuando P esta muy alejado del sistema se tiene que $d \ll r$. El campo eléctrico encontrado en a) lo podemos escribir de forma mas reducida como:

$$\vec{E} = 2qk(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}})$$

Esto lo podemos escribir de forma equivalente como:

$$\vec{E} = 2qk(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2(1+\frac{d^2}{r^2})^{\frac{3}{2}}})$$

$$= \frac{2qk}{r^2}(1-(1+\frac{d^2}{r^2})^{-\frac{3}{2}})$$

En general, la función $(1+x)^\alpha$ se puede aproximar por taylor, cuando $x \approx 0$ a:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$$

Como $d \ll r$, se tiene que $\frac{d}{r} \approx 0$ y por lo tanto $(\frac{d}{r})^2 \approx 0$. Por lo tanto, en la expresión del campo podemos hacer la siguiente aproximación:

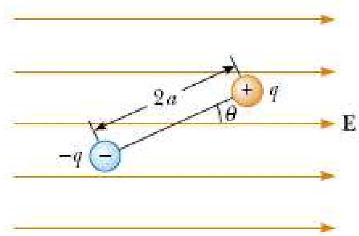
$$(1+\frac{d^2}{r^2})^{-\frac{3}{2}} \approx (1 - \frac{3}{2}\frac{d^2}{r^2})$$

Evaluando este resultado en la expresión obtenida para el campo, se tiene que:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3qkd^2}{r^4}\hat{j}}$$

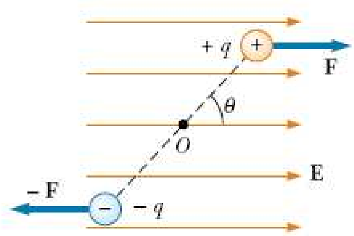
Problema 8

Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como se muestra en la figura, donde θ es pequeño. El momento de inercia del dipolo es I. Si el dipolo se libera desde la posición, demuestre que su orientación angular presenta movimiento armónico simple y encuentre la frecuencia de oscilación.



Solución:

Las fuerzas eléctricas que actúan sobre las cargas son iguales en magnitud y en dirección, pero están en sentidos opuestos. Estas fuerzas son generadas por el campo eléctrico $\vec{E}$ y tienen magnitud $F = qE$. Esto se puede apreciar en la siguiente figura:



El torque sobre el dipolo será entonces la suma de torques producido por cada fuerza, considerando el eje de rotación sobre el punto O. Entonces se tendrá que el torque sobre el dipolo es:

$$\tau = -Fa\sin(\theta) + -Fa\sin(\theta) = -2Fa\sin(\theta) = -2qE\sin(\theta)$$

El signo negativo se obtiene a partir de la regla de la mano derecha y se puede comprobar al hacer la operacion de momentos de forma vectorial.

Sabemos que el torque sobre un sistema será igual al momento de inercia I por la aceleración angular α(ambos respecto al eje sobre O), es decir

$$\tau = I\alpha$$

$$-2qEa\sin(\theta) = I\alpha$$

Como se produjo solo un pequeño desplazamiento del dipolo se cumpla que $\theta \ll 1$ y por lo tanto podemos hacer la aproximación $\sin(\theta) \approx \theta$. Además notamos que $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Reemplazando estos valores en la ecuación anterior se tiene que:

$$-2qEa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Esta ecuación diferencial la podemos escribir como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2qEa\theta}{I} = 0$$

Con lo cual vemos que la orientación angular del dipolo seguirá un movimiento armónico simple con frecuencia angular:

$$w = \sqrt{\frac{2qEa}{I}}$$

Y por lo tanto la frecuancia será:

$$\boxed{f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2qEa}{I}}}$$

Capítulo 2

Integrales de Coulomb

Problema 9
Se tienen dos alambres de largo L cargados con densidades lineales uniformes λ_1, λ_2, separados una distancia d. Calcule la fuerza que se ejercen ambos alambres.

Solución: Por la ley de Coulomb, sabemos que la fuerza eléctrica que experimenta una carga q en la posición $\vec{r}$ debido a una distribución de carga Ω es

$$\vec{F} = q \cdot \int_{\Omega} \frac{dq(\vec{r} - \vec{r'})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Pongamos ambos alambres en el eje x, de tal forma que uno cubra de $x = 0$ a $x = L$ y el otro de $x = L+d$ a $x = 2L+d$. Sean $\vec{r_1} = x_1\hat{x}$, $\vec{r_2} = x_2\hat{x}$, con $0 \leq x_1 \leq L$ y $L+d \leq x_2 \leq 2L+d$, los vectores posición de cada alambre.

Tenemos que la fuerza que ejerce 1 sobre un elemento dx de 2 es

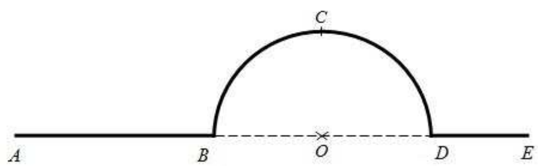
$$\begin{aligned}
d\vec{F}_{21} &= dq_2 \cdot \int_{\Omega_1} \frac{dq_1(\vec{r_2} - \vec{r_1})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3} \\
&= dq_2 \cdot \int_0^L \frac{\lambda_1 dx_1 (x_2 - x_1)\hat{x}}{4\pi\epsilon_0 |x_2 - x_1|^3} \\
&= dq_2 \cdot \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \hat{x} \cdot \int_0^L \frac{dx_1}{(x_2 - x_1)^2} \\
&= dq_2 \cdot \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \hat{x} \cdot \left. \frac{1}{x_2 - x_1} \right|_0^L \\
&= \frac{\lambda_1 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \cdot dq_2 \cdot (\frac{1}{x_2 - L} - \frac{1}{x_2}) \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \cdot dx_2 \cdot (\frac{1}{x_2 - L} - \frac{1}{x_2})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \vec{F_{21}} &= \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\int_{L+d}^{2L+d}\left(\frac{1}{x_2-L}-\frac{1}{x_2}\right)dx_2\\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\cdot(ln(x_2-L)-ln(x_2))|_{L+d}^{2L+d}\\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\cdot ln(\frac{x_2-L}{x_2})\Big|_{L+d}^{2L+d}
\end{aligned}
$$

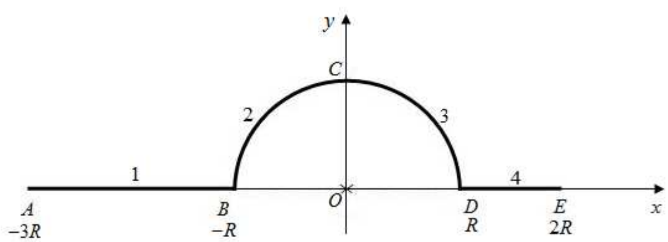
$$
\Longrightarrow \vec{F_{21}} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\epsilon_0}\cdot ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right)\cdot\hat{x}
$$

Y esta es la fuerza eléctrica que se ejercen ambos alambres, pues sabemos que la ley de Coulomb satisface la 3ra ley de Newtón de forma fuerte.

Problema 10
El alambre de la figura esta formado por una parte semicircular BCD, de radio R[m], y por dos rectilíneas de longitudes $AB = 2R$ [m] y $DE = R$ [m]. Los arcos BC y CD están uniformemente cargados con cargas q>0 y $-q$, respectivamente, mientras que sobre AB también se distribuye uniformemente una carga q. Que cantidad de carga debe repartirse con densidad constante sobre el trazo DE, para que el campo eléctrico sea nulo en el centro O.

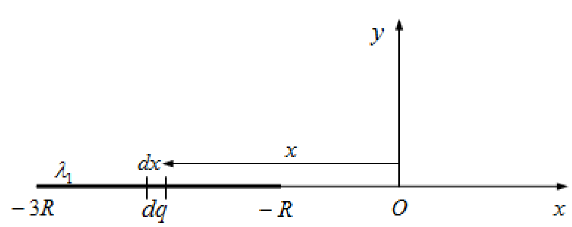


Solucion:
Lo que haremos será dividir el alalmbre completo en 4 partes tal como muestra la figura:



Calcularemos el campo electrico producido por las 4 regiones en O y luego los superpondremos e impondremos la condicion de que el campo electrico en esta region sea nulo.

Trozo AB:
El almabre es rectilineo y de largo $2R$ y tiene en el una carga q uniformemente distribuida. De esta manera podemos definir su densidad de carga como $\lambda 1 = \frac{q}{2R}$. De esta manera, si tomamos una pequeña carga dq del alambre sabemos que se cumple la relacion $dq = \lambda_1 dx$, donde dx es un pequeño trozo del alamabre



El campo electrico que produce cada elemento dq estara en direccion $\hat{\imath}$, por lo tanto el campo electrico que produce será:

$$d\vec{E}_1 = (\frac{kdq}{x^2})\hat{\imath} = (\frac{k\lambda_1 dx}{x^2})\hat{\imath}$$

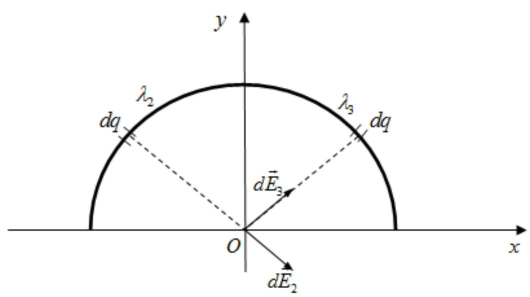
Integrando desde $x = -3R$ hasta $x = -R$

$$\vec{E}_1 = k(\lambda_1 \int \frac{1}{x^2} dx)\hat{\imath} = (k\lambda_1(-\frac{1}{x^2}\Big|_{-3R}^{-R}))\hat{\imath}$$

Lo que resulta:

$$\vec{E}_1 = \frac{2k\lambda_1}{3R}\hat{\imath}$$

Para el caso de los arcos tendremos que al superponernlos el campo electrico resultante estara en direccion *hati*. Esto queda inmediantament claro a ver la siguiente figura:



Como vemos, el arco BC tiene carga positiva en el y por lo tanto cada elemento de carga genera un campo saliente, miesntras que el arco CD tiene carga negativa y cada elemento de carga genera un campo entrante. De esta manera, lo que debemos hacer es simplemente calcular las componentes en x de cada campo y despues sumarlas.
Las densidades de carga para cada arco se obtienen facilmente al saber que tiene depositada una carga q y -q y tienen un largo $\frac{\pi R}{2}$:

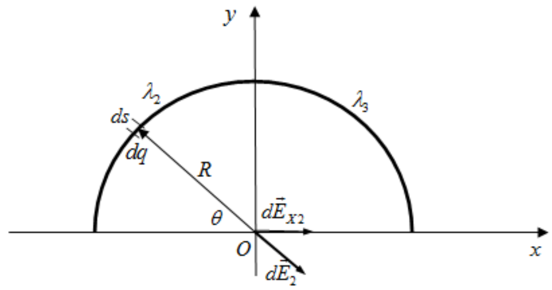
$$\lambda_2 = \frac{2q}{\pi R}$$

$$\lambda_3 = -\frac{2q}{\pi R}$$

Arco BC: Consideramos una pequeña carga dq del arco, el modulo del campo electrio producido por esta carga será simplemente:

$$dE = \frac{kdq}{R^2}$$

Con ayuda de la densidad de carga λ_2 podemos escribir $dq = \lambda_2 ds$, donde ds es un pequeño trozo del arco. Este trozo de arco lo podemos escribir en funcion del angulo que lo recorre: $ds = Rd\theta$



Podemos entonces escribir el campo como

$$dE_2 = \frac{k\lambda_2 R d\theta}{R^2} = \frac{k\lambda_2 d\theta}{R}$$

Luego, la componente en x del campo dE_2 sera

$$dE_{x2} = dE_2\cos(\theta) = \frac{k\lambda_2\cos(\theta)d\theta}{R}$$

Integrando desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$E_{x2} = \frac{k\lambda_2}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)d\theta = \frac{k\lambda_2}{R}$$

Vectorialmente

$$\vec{E}_{x2} = \frac{k\lambda_2}{R}\hat{\imath}$$

Arco CD: No es dificil ver la componente en x del campo producido por este arco será igual al anterior, de esta manera:

$$\vec{E}_{x3} = \frac{k\lambda_2}{R}\hat{\imath}$$

Asi se tendra que $\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{2k\lambda_2}{R}\hat{\imath}$

Trozo DE:

Sea q' la carga que tiene este trozo de alambre tal que anula el campo electrico pdroducido por todo el alambre en O. Como tiene largo R, la densidad de carga será

$$\lambda_4 = \frac{q'}{R}$$

Luego, procediendo de igual forma que para el trozo AB vemos que

$$\vec{E}_4 = (k\lambda_4\int_R^{2R}\frac{1}{x^2}dx)\hat{\imath} = (\frac{-k\lambda_4}{2R})\hat{\imath}$$

Sumando todos los campos calculados e igualando a cero:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \frac{2k\lambda_1}{3R}\hat{\imath} + \frac{2k\lambda_2}{R}\hat{\imath} + (\frac{-k\lambda_4}{2R})\hat{\imath} = 0$$

Despejando λ_4:

$$\lambda_4 = \frac{2}{3}(2\lambda_1 + 6\lambda_2)$$

Reemplazando los valores de λ_1, λ_2 y λ_4 definidos anteriormente, encontramos el valor de la carga buscada:

$$q' = \frac{2}{3}q(1 + \frac{12}{\pi})$$

Si consideramos $\pi \approx 3$:

$$\boxed{q' = \frac{10}{3}q}$$

Problema 11
Calcule el campo eléctrico producido por un plano infinito de densidad de carga uniforme σ.

Solución:
Consideremos el plano en cuestión el plano xy de coordenadas cartesianas. Sabemos que el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int\int_{\Omega} \frac{dq(\vec{r}-\vec{r_1})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r_1}|^3}$$

con $\vec{r_1}$ el vector posición de la distribución de carga Ω que genera el campo eléctrico en $\vec{r}$. Tenemos que $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $\vec{r_1} = x_1\hat{x} + y_1\hat{y}$ y $|\vec{r}-\vec{r_1}|^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2$.

$$\Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma dx_1 dy_1((x-x_1)\hat{x} + (y-y_1)\hat{y} + z\hat{z})}{4\pi\epsilon_0((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hagamos cambio de variables. $w = x - x_1$, $v = y - y_1 \Longrightarrow x_1 = x - w, \quad y_1 = y - v$. El jacobiano de la transformación es

$$J = \begin{vmatrix} (x_1)_w & (x_1)_v \\ (y_1)_w & (y_1)_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma dwdv(w\hat{x} + v\hat{y} + z\hat{z})}{4\pi\epsilon_0(w^2+v^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dwdv\cdot(z\hat{z})}{(w^2+v^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Nuevamente hagamos cambio de variables.

$$w = rcos(\theta)$$

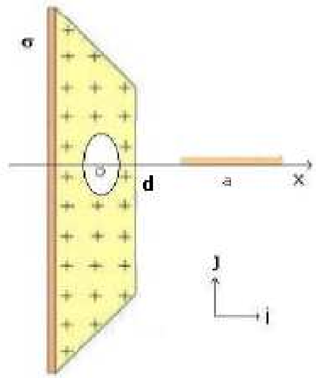
$$v = rsen(\theta)$$

$$J = \begin{vmatrix} w_r & w_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{rdrd\theta\cdot(z\hat{z})}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\cdot 2\pi z\hat{z}\int_0^{+\infty}\frac{rdr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad pero \qquad u = r^2+z^2 \rightarrow du = 2rdr \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\cdot z\hat{z}\int_{z^2}^{+\infty}\frac{du}{(u)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\cdot z\hat{z}\left(2u^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{+\infty}^{z^2} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cdot\frac{z}{|z|}\hat{z} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cdot sign(z)\hat{z} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot sign(z)\hat{z}$$

Note que el salto de discontinuidad del módulo del campo eléctrico (que es normal al plano) es $+\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.



Problema 12 Considere un plano infinito de densidad de carga uniforme σ, con un orificio circular de radio R.

a) Calcule el campo eléctrico en cualquier punto del eje que pasa por el centro del orificio, perpendicularmente al plano.

b) A lo largo del eje se coloca un alambre (no conductor) de largo a, con densidad de carga lineal uniforme λ y cuya distancia más próxima al plano es d. Encontrar la fuerza eléctrica que experimenta el alambre.

Solución:

a) Usando el principio de superposición, podemos encontrar lo deseado considerando la suma vectorial del campo eléctrico que genera un plano infinito de densidad de carga σ sobre el eje y un disco de radio R y densidad de carga $-\sigma$. Sea el plano yz coordenado el plano en cuestión y el eje x el eje en cuestión.
De los items anteriores, tenemos que el campo eléctrico generado por el plano es

$$\vec{E_1}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot sign(x)\hat{x}$$

y el campo eléctrico generado por el disco es

$$\vec{E_2}(\vec{r}) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{x} \left(sign(x) - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

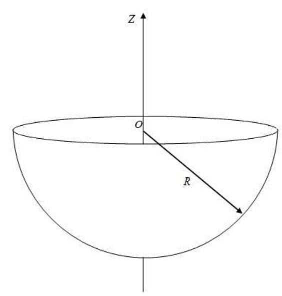
.

$$\Longrightarrow \vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{x}$$

b) Tenemos que la fuerza eléctrica que experimenta un elemento dx del alambre debido al plano con el orificio está dada por $d\vec{F} = dq\vec{E}$.

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \vec{F} &= \int_d^{d+a} dq\vec{E} \quad con \quad dq = \lambda dx \\
&= \int_d^{d+a} \lambda dx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{x} \\
&= \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \int_d^{d+a} \frac{x dx}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot \hat{x} \\
&= \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2 + x^2} \right) \Big|_d^{d+a} \cdot \hat{x} \\
&= \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{R^2 + (d+a)^2} - \sqrt{R^2 + d^2} \right) \cdot \hat{x}
\end{aligned}
$$

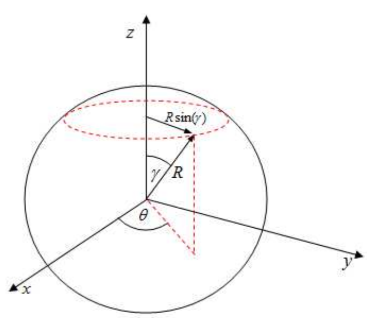
Problema 13
Un recipiente semihemisferico no conductor de radio a tiene una carga total Q uniformemente distribuida en su superficie interior. Encuentre el campo eléctrico en el punto O.



Solución:
Este problema lo debemos resolver utilizando la lay de coulomb para distribuciones superficiales de carga. Esta ley nos dice para este caso que

$$\vec{E}(\vec{0}) = \int \frac{kdq(\vec{r} - \vec{r'})}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|^3}$$

Como ya hemos visto, el elemento de carga lo podemos escribir como $dq = \sigma dA$, donde σ es la densidad de carga superficial en el interior del recipiente (constante). Debemos escribir el elemento de área dA de tal manera que podamos recorrer la superficie y para esto haremos lo siguiente: Considerare una cascara esférica con la siguiente disposición para las variables θ y γ



Al hacer una pequeña variación del ángulo θ, vemos que se recorre un pequeño arco de longitud $ds_1 = R\sin(\gamma)\theta$. Por otro lado al hacer una pequeña variación del ángulo γ se recorre un arco de longitud $ds_2 = Rd\gamma$. De esta manera el elemento de área de la circunferencia lo podemos escribir como

$$dA = ds_1 \cdot ds_2 = R^2 \sin(\gamma)d\gamma d\theta$$

De esta manera podemos escribir el elemento de carga como

$$dq = \sigma R^2 \sin(\gamma)d\gamma d\theta$$

Por otro lado, debemos determinar los vectores $\vec{r'}$ y $\vec{r}$. Claramente $\vec{r'} = \vec{0}$ y por otro lado(mirando la figura) veremos que

$$\vec{r} = R\sin(\gamma)\cos(\theta)\hat{i} + R\sin(\gamma)\sin(\theta)\hat{j} + R\cos(\gamma)\hat{k}$$

No es difícil ver que $\|\vec{r} - \vec{r'}\| = R$
De esta manera especificando los recorridos de las variables para que recorran el recipiente se tiene que

$$\vec{E}(\vec{0}) = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{k\sigma(-R\sin(\gamma)\cos(\theta)\hat{i} - R\sin(\gamma)\sin(\theta)\hat{j} - R\cos(\gamma)\hat{k})}{R^3} R^2\sin(\gamma)d\gamma d\theta$$

Por simetría sabemos que el campo eléctrico resultante estará en dirección $\hat{k}$ y por lo tanto, de la integral anterior, no consideramos las componentes restantes:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} k\sigma(-\cos(\gamma)\hat{k})\sin(\gamma)d\gamma d\theta = k\sigma\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos(\gamma)\hat{k})\sin(\gamma)d\gamma = \pi k\sigma\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin(2\theta)\hat{k}))d\gamma$$

De esta manera

$$\vec{E}(\vec{0}) = \pi k\sigma(\frac{1}{2}\cos(2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})\hat{k} = \pi k\sigma\frac{1}{2}(\cos(2\pi) - \cos(\pi))\hat{k} = (\pi k\sigma)\hat{k}$$

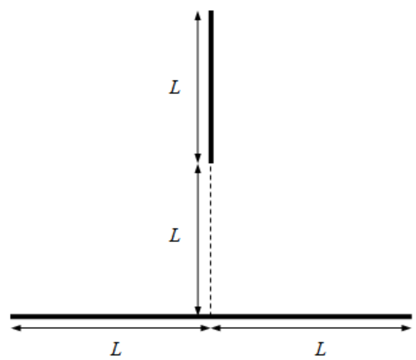
Finalmente, para escribir este resultado en función de Q, debemos determinar el valor de σ. Esto es fácil sabiendo que la carga esta uniformemente distribuida en la superficie interior, tendremos que

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

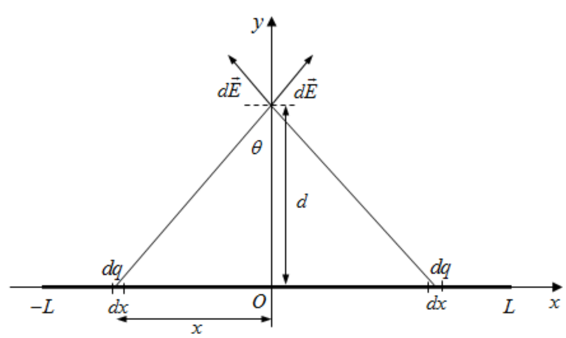
De esta manera

$$\boxed{\vec{E}(\vec{0}) = \frac{kQ}{2R^2}\hat{k}}$$

Problema 14
En la figura, el alambre AB tiene longitud $2L$ y es perpendicular al alambre CD, de longitud L. Cada uno de ellos tiene la misma carga Q, distribuida uniformemente. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza que uno de ellos ejerce sobre el otro.



Solución:
Este problema se resuelve de igual forma que el problema anterior. Lo primero que haremos es calcular el campo eléctrico que produce el alambre vertical sobre un punto de su eje de simetría. Como la carga Q esta uniformemente distribuida, se tendrá que sobre el eje el campo eléctrico estará en dirección $\hat{j}$



El campo eléctrico producido por una carga dq será $dE = \frac{kdq}{r^2}$. Donde r es la distancia desde la carga dq ubicada en $x\hat{i}$ hasta el punto de aplicación $d\hat{j}$: $r = \sqrt{x^2 + d^2}$. Al igual como lo hemos hecho antes, la carga dq la podemos escribir como $dq = \lambda_1 dx$ donde λ_1 es la densidad lineal de carga y la definimos como $\lambda_1 = \frac{Q}{2L}$. Asi, el campo queda expresado como

$$dE = \frac{k\lambda_1 dx}{x^2 + d^2}$$

Ya dijimos que el campo estará en dirección $\hat{j}$ ya que las componentes en x se anularan. Las componentes en y las podemos escribir como $dE_y = dE\cos(\theta)$. Es facil ver que

$$\cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{(x^2 + d^2)}}$$

De esta manera

$$dE_y = \frac{k\lambda_1 d dx}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando desde $x = -L$ hasta $x = L$:

$$E_y = k\lambda_1 d \int_{-L}^{L} \frac{1}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} dx = k\lambda_1 d(\frac{x}{(d^2\sqrt{x^2+d^2}} \Big|_{-L}^{L}) = \frac{2k\lambda_1 L}{d\sqrt{L^2+d^2}}$$

De esta manera la fuerza que ejerce el alambre horizontal sobre una pequeña carga dq del alambre vertical que esta a una altura y será

$$dF = dqE = dq\frac{2k\lambda_1 L}{d\sqrt{L^2+y^2}}$$

Este alambre tiene distinta densidad de carga ya que si bien tiene la misma carga total almacenada, tiene la mitad de largo que el alambre horizontal. De esta manera definimos

$$\lambda_2 = \frac{Q}{L}$$

Asi, $dq = \lambda_2 dy$ y la fuerza queda expresada como

$$dF = \lambda_2 dy \frac{2k\lambda_1 L}{y\sqrt{L^2+y^2}}$$

Integrando desde $y = L$ hasta $y = 2L$

$$F = 2k\lambda_1\lambda_2 L \int_{-L}^{L} \frac{1}{y\sqrt{L^2+y^2}} dy$$

Se tiene que

$$\int \frac{1}{y\sqrt{L^2+y^2}} dy = \frac{1}{L}\ln(\frac{\sqrt{L^2+y^2}-L}{y})$$

Por lo tanto

$$F = 2k\lambda_1\lambda_2 L(\frac{1}{L}\ln(\frac{\sqrt{L^2+y^2}-L}{y})\Big|_{L}^{2L})$$

Desarrollando

$$F = 2k\lambda_1\lambda_2 \ln(\frac{\sqrt{5}-1}{2(\sqrt{2}-1)})$$

Reemplazando los valores de λ_1 y λ_2 en función de Q:

$$\boxed{F = \frac{kQ^2}{L^2}\ln(\frac{\sqrt{5}-1}{2(\sqrt{2}-1)})}$$

Problema 15

Calcule la fuerza *por unidad de largo* que se ejercen una huincha infinitamente larga de ancho b y densidad de carga uniforme σ y un alambre igualmente largo con densidad de carga uniforme λ puesto en el mismo plano que la huincha, a una distancia d.

Solución:

Como la fuerza de Coulomb cumple la 3ra ley de Newtón, elegiremos la forma más simple de calcular la fuerza por unidad de largo que se ejercen ambos objetos (esto es, la fuerza de uno u otro sobre el otro). Pongamos el alambre en el eje x, y sea el plano donde están ambos objetos el plano xy. De la simetría del problema, vemos que la fuerza que ejerce la huincha sobre un elemento dx del alambre está dirigida en $\pm\hat{y}$ y es la misma en cualquier punto del alambre. Por tanto, nos basta ver la fuerza por unidad de largo en x=0 del alambre.

Sean $\vec{r_2} = \vec{0}$, $\vec{r_1} = x\hat{x} + y\hat{y}$, con $-\infty \leq x \leq +\infty$ y $d \leq y \leq b+d$, la posición del elemento dx en x=0 del alambre y la posición de la huincha, respectivamente. Así, tenemos que la fuerza sobre tal elemento es

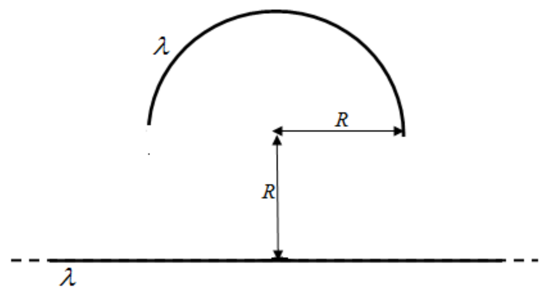
$$
\begin{aligned}
d\vec{F}_{21} &= dq_2 \int\int_{\Omega} \frac{dq_1 \cdot -\vec{r_1}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r_1}|^3}, \qquad con \qquad dq_1 = \sigma dxdy \\
&= -dq_2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{d}^{b+d} \frac{\sigma dxdy \cdot x\hat{x}}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - dq_2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{d}^{b+d} \frac{\sigma dxdy \cdot y\hat{y}}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{dq_2 \sigma \hat{y}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{d}^{b+d} \frac{dxdy \cdot y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{dq_2 \sigma \hat{y}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)\Bigg|_{d}^{b+d} \cdot dx \\
&= \frac{dq_2 \sigma \hat{y}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(b+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}} \right) \cdot dx, \qquad pero \qquad dq_2 = \lambda dx_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{d\vec{F}_{21}}{dx_2} &= \frac{\lambda\sigma\hat{y}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(b+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}} \right) \cdot dx \\
&= \frac{\lambda\sigma\hat{y}}{2\pi\epsilon_0} \cdot ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+(b+d)^2}}{x+\sqrt{x^2+d^2}} \right)\Bigg|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{\lambda\sigma\hat{y}}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{1+\sqrt{1+(\frac{b+d}{x})^2}}{1+\sqrt{1+(\frac{d}{x})^2}} \right) - ln\left(\frac{b+d}{d}\right) \right) \\
&= \frac{\lambda\sigma\hat{y}}{2\pi\epsilon_0} \cdot ln\left(\frac{d}{b+d}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \frac{d\vec{F}_{21}}{dx_2} = \frac{\lambda\sigma\hat{y}}{2\pi\epsilon_0} \cdot ln\left(\frac{d}{b+d}\right)
$$

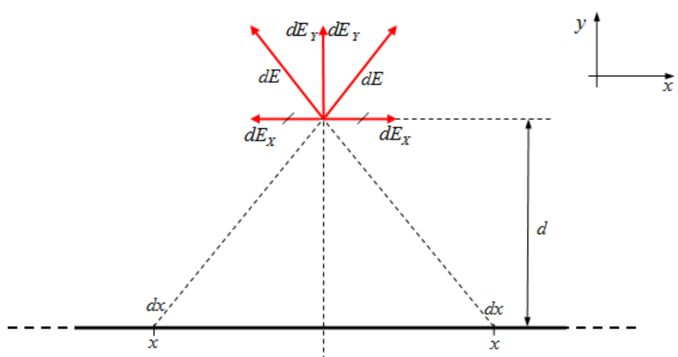
Problema 16

Considere un alambre rectilíneo infinito a una distancia R de un alambre semicircular de radio R como se ve en la figura. Ambos están uniformemente cargados con densidad lineal de carga λ. Encuentre la fuerza de repulsión entre ambas.



Solución:

Lo primero que hacemos es calcular el campo eléctrico producido por un alambre infinito a una distancia d de él. El campo eléctrico tendrá dirección $\hat{j}$ ya que al ser el alambre infinitamente largo se anularan las componentes de campo en x. Esto se puede apreciar en la siguiente figura:



Comprobemos esto calculando el campo. El campo eléctrico que produce una pequeña carga dq ubicada en el punto $\vec{r'} = x\hat{i}$ del alambre sobre el punto de $\vec{r} = d\hat{j}$ será:

$$d\vec{E} = \frac{kdq(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = \frac{kdq(-x\hat{i} + d\hat{j})}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ahora, se tiene que $dq = \lambda dx$ y por lo tanto:

$$d\vec{E} = \frac{k\lambda dx(-x\hat{i} + d\hat{j})}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando desde $-\infty$ a $+\infty$:

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\lambda dx(-x\hat{i} + d\hat{j})}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = k\lambda((-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}})\hat{i} + (\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}})\hat{j})$$

La función $f(x) = \frac{x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$ es impar y por lo tanto la integral de esta función en un intervalo par toma valor 0. Por otro lado, la función $g(x) = \frac{d}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$ es par y la integral de esta función desde $-\infty$ a $+\infty$ será el doble de la integral de g(x) desde 0 a $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} g(x)dx$$

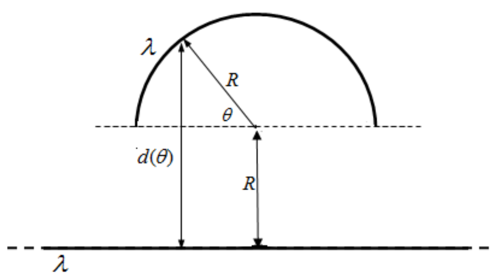
Por lo tanto, la expresión para el campo se reduce a

$$\vec{E} = 2kd\lambda \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}$$

Se tiene que $\int \frac{1}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{d^2(x^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}$
Por lo tanto

$$\vec{E} = 2kd\lambda(\frac{x}{d^2(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_0^{\infty})\hat{j} = \frac{2k\lambda}{d}\hat{j}$$

Ahora que sabemos como es el campo eléctrico generado por un alambre infinito podemos calcular la fuerza sobre el alambre semicircular. Para calcular esta fuerza consideraremos pequeños trozos de cable con carga dq en el cual la fuerza aplicada sobre el será por definición:$dF = dqE$, donde E es el campo eléctrico producido por el alambre infinito a la altura en que se encuentra la carga dq. Recorreré los elementos de carga del alambre en función de un ángulo θ que recorra el alambra semicircular. Considerare la siguiente figura:



El campo eléctrico producido por el alambre infinito depende de la distancia a la cual se esta de el, como la altura de cada elemento dq de carga varia, la fuerza producida sobre cada una de estas cargas también lo hará. La altura de cada elemento dq en función del ángulo θ queda expresada como $d(\theta) = R + R\sin(\theta)$. Además, el elemento de carga dq es por definición igual a λds, donde ds es un pequeño trozo de alambre circular el cual podemos escribir en función del ángulo θ como $ds = Rd\theta$. De esta manera la fuerza sobre una carga dq será:

$$dF = dqE = \lambda Rd\theta \cdot \frac{2k\lambda}{R + R\sin(\theta)} = \frac{2k\lambda^2 d\theta}{1+\sin(\theta)}$$

Integrando desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ obtenemos la fuerza total sobre el alambre semicircular. Para esto utilizamos el hecho de que:

$$\int \frac{1}{1+\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)-1}{\cos(\theta)}$$

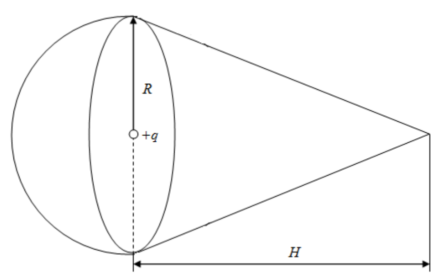
Con esto tenemos que la fuerza resultante es

$$\boxed{F = 4k\lambda^2}$$

Capítulo 3

Ley de Gauss

Problema 17
Una carga puntual $q > 0$ esta rodeada por una superficie cerrada formada por un manto cónico de radio R y altura H, y una superficie semiesférica concéntrica con la carga, según se observa en la figura. Calcule el flujo de campo eléctrico a través del manto cónico.



Solución:
La superficie que rodea a la carga q es cerrada. Por la ley de gauss, el flujo a través de la superficie es:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (1)$$

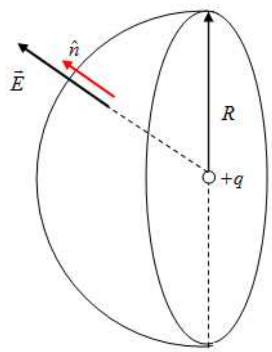
Además, el flujo que atraviesa la superficie cerrada (que llamamos S) será igual a la suma de los flujos que pasen por la semiesfera (que llamamos S_e) y los flujos que pasen por el manto cónico(que llamamos S_c). Esto se puede escribir como: $\phi = \phi_e + \phi_c$

$$\Longrightarrow \phi_c = \phi + \phi_e \qquad (2)$$

De esta manera, encontrando el valor de ϕ_e resolvemos el problema inmediatamente. ϕ_e se calcula como:

$$\phi_e = \int_{S_e} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

El campo eléctrico producido por la carga q es $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{r}$. Donde $\hat{r}$ es el vector unitario en dirección radial. El vector $d\vec{S}$ también esta en dirección radial, ya que $d\vec{S} = \hat{n}dS$ y $\hat{n}$ es paralelo a $\hat{r}$ como muestra la figura:



De esto, se tendrá que

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{r} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2} dS$$

Integrando se obtiene el flujo para la semiesfera:

$$\phi_e = \int_{S_e} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_e} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}\int_{S_e} dS$$

La integral $\int_{S_e} dS$ corresponde al área de la semiesfera. Entonces $\int_{S_e} dS = 2\pi R^2$. De esta manera el flujo será:

$$\phi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2} \cdot 2\pi R^2 = \frac{q}{2\epsilon_0} \tag{3}$$

De (1),(2) y (3) se tiene finalmente que:

$$\boxed{\phi_c = \frac{q}{2\epsilon_0}}$$

Problema 18
Considere una cáscara cilíndrica, sin espesor, de radio R y largo infinito, con densidad de carga superficial σ uniforme (ver figura). Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio (use ley de Gauss).

Solución:
De la Ley de Gauss sabemos que el flujo del campo eléctrico es independiente de la superficie usada para encerrar cierta cantidad de carga (mientras esta cantidad sea la misma) y que es directamente proporcional a la carga encerrada, con constante de proporcionalidad $\frac{1}{\epsilon_0}$. Es decir,

$$\oint_{\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

donde Q_{int} es la carga encerrada por la superficie Ω. Esta forma integral de la Ley de Gauss se puede expresar en forma diferencial usando el teorema de la divergencia (lo cual se deja al lector), obteniendo la expresión equivalente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Es posible usar la Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico bajo altas condiciones de simetría, lo cual se cumple en este caso. Pongamos como eje z el eje de simetría del cilindro. Por la simetría cilindrica, el campo eléctrico no depende de θ y por ser infinito no depende de z. Así a priori, sabemos que $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, donde r se mide desde el eje al punto en cuestión y $\hat{r}$ es el vector unitario que va desde el eje al punto.
Debemos elegir una superficie de integración donde $|\vec{E}|$ no dependa de las variables que describen la superficie (es decir, $|\vec{E}|$ debe ser constante sobre la superficie), para poder sacar $|\vec{E}|$ fuera de la integral. Por ello, consideremos una superficie cilíndrica de radio r con eje de simetría el eje z (y el eje del cilindro cargado). Podemos distinguir dos casos:

a) Si $r < R$.
En este caso tenemos que no hay carga encerrada por el cilindro, por lo cual

$$\oint_{\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

Además,

$$\begin{aligned}
\oint_{\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \int_{manto} E(r)\hat{r} \cdot \hat{n} dS + \int_{tapas} E(r)\hat{r} \cdot \hat{n} dS \\
&= E(r) \int_{manto} dS \\
&= E(r)(2\pi r)h
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow E(r)(2\pi r)h = 0 \Longrightarrow E(r) = 0 \Longrightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

Es interesante el hecho que el campo eléctrico sea nulo dentro del cilindro.

b) Si $R \leq r$.
En este caso tenemos que

$$\oint_{\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E(r)(2\pi r)h = \frac{(2\pi R)h\sigma}{\epsilon_0} \Longrightarrow E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)$$

Por tanto,

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r < R \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right) \cdot \hat{\rho} & R \leq r \end{cases}$$

Note que el salto de discontinuidad del módulo del campo eléctrico (que es normal a la superficie) es $+\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Problema 19
Se tiene una distribución esférica de carga Θ de radio R y densidad variable $\rho = \alpha r$ para $r < R$. Calcule la energía potencial acumulada por la distribución.

Solución:
Sabemos que la energía potencial asociada a una distribución de carga (o al campo eléctrico que ésta produce) está dada por

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R^3} \vec{E}^2 d^3x$$

donde la integral es sobre todo el espacio. Por tanto, conociendo el campo en todo el espacio, podemos calcular la energía potencial que queremos.
Dado que la distribución de carga es simétrica esféricamente y también la densidad de carga tiene simetría esférica, a priori sabemos que el campo eléctrico tiene simetría esférica, es decir, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, donde r es la distancia del centro de la esfera al punto en cuestión y $\hat{r}$ es el vector unitario dirigido del centro de la esfera al punto.
Podemos dividir el problema en dos regiones

a) $r < R$ Consideremos como superficie de integración una cáscara esférica de radio r con mismo centro que la distribución de carga Θ. Por la ley de Gauss tenemos

$$\begin{aligned}
\oint_\Omega \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\
\oint_\Omega E(r)\hat{r} \cdot \hat{n} dS &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Theta \rho d^3x \\
E(r) 4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \alpha r^3 sen(\varphi) dr d\varphi d\theta \\
E(r) 4\pi r^2 &= \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^{r} \alpha r^3 dr \\
E(r) 4\pi r^2 &= \frac{\pi \alpha r^4}{\epsilon_0} \\
\Longrightarrow & \quad E(r) = \frac{\alpha}{4\epsilon_0} r^2
\end{aligned}$$

b) $R \leq r$ Consideremos nuevamente como superficie de integración una cáscara esférica de radio r con mismo centro que la distribución de carga Θ. Por la ley de Gauss tenemos

$$\begin{aligned}
\oint_\Omega \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\
E(r) 4\pi r^2 &= \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^{R} \alpha r^3 dr \\
E(r) 4\pi r^2 &= \frac{\pi \alpha R^4}{\epsilon_0} \\
\Longrightarrow & \quad E(r) = \frac{\alpha}{4\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2 R^2
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{4\epsilon_0} r^2 \hat{r} & r < R \\ \frac{\alpha}{4\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2 R^2 \hat{r} & R \leq r \end{cases}$$

Ahora que conocemos el campo eléctrico en todo el espacio, podemos calcular la energía potencial acumulada en la distribución de carga Θ.

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R^3} \vec{E}^2 d^3x \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} E(r)^2 r^2 sen(\varphi) dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \int_0^{+\infty} E(r)^2 r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \left(\int_0^R \frac{\alpha^2}{16\epsilon_0^2} r^6 dr + \int_R^{+\infty} \frac{\alpha^2}{16\epsilon_0^2} \frac{R^8}{r^2} dr \right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{8\epsilon_0} \cdot \left(\left. \frac{r^7}{7} \right|_0^R - R^8 \left. \frac{1}{r} \right|_R^{+\infty} \right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{8\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R^7}{7} + R^7 \right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{7\epsilon_0} R^7 \end{aligned}$$

Problema 20
Consideremos dos esferas no concéntricas de radio R, con densidades de carga volumétricas ρ y $-\rho$ uniformes. Los centros de ambas esferas están a una distancia menor que $2R$. Sea $\vec{d}$ el vector que va del centro de la esfera positiva al centro de la esfera negativa. Pruebe que el campo eléctrico en la intersección de las esferas es constante y encuentre su valor.

Solución:
Del problema 2), sabemos que el campo eléctrico en el interior de una esfera maciza de densidad de carga uniforme ρ es $\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r}$.
De la simetría de la distribución, a priori sabemos que además para $R \leq r$ el campo cumple $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. Si bien no es necesario para la resolución del problema conocer el campo eléctrico fuera de la esfera, encontrémoslo usando la ley de Gauss.
Consideremos como superficie de integración una cáscara esférica de radio $r > R$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \oint_\Omega \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ E(r) 4\pi r^2 &= \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0} \\ \Longrightarrow & \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que el campo eléctrico generado por la esfera maciza es

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r} & r < R \\ \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & R \leq r \end{cases}$$

Pongamos el origen de coordenadas en el centro de la esfera de densidad de carga ρ. Así, tenemos que los campos eléctricos en los interiores de cada esfera están dados por

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(r) &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r} \quad para \quad |\vec{r}| < R \\ \vec{E}_2(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot (\vec{r} - \vec{d}) \quad para \quad |\vec{r} - \vec{d}| < R \end{aligned}$$

Los vectores en la intersección de ambas esferas satisfacen simultáneamente $|\vec{r} - \vec{d}| < R$ y $|\vec{r}| < R$. Así, por el principio de superposición, el campo eléctrico en la intersección de ambas esferas es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot (\vec{r} - \vec{d}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{d}$$

el cual es constante, tal como se quería probar.

Problema 21
Una distribución de carga volumétrica fija de densidad uniforme $\rho > 0$ ocupa un volumen esférico de radio R.

a) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio (usando ley de Gauss).

b) Se coloca una carga puntual $-Q < 0$ en el centro de la esfera, y se la deja libre. ¿Queda o no en equilibrio la carga en el centro? Si es afirmativa la respuesta, ¿es estable o inestable?
Si la carga tiene una masa m y se desplaza del centro de la esfera, pero siempre quedando dentro de ella, calcule la fuerza que la carga experimenta y pruebe que su movimiento es un movimiento armónico simple. Encuentre su período de oscilación.

c) Supongamos que la carga sólo puede moverse en el eje x. Si además se aplica un campo eléctrico externo $\vec{E_0} = E_0\hat{x}$, $E_0 > 0$, calcule las nuevas posiciones de equilibrio de la carga y determine cuáles de ellas son estables o inestables. Discuta que condiciones debe cumplir E_0 para la existencia de tales posiciones de equilibrio y su número.

Solución:

a) Pongamos el origen coordenado en el centro de la esfera. Del itém anterior, al usar la ley de Gauss, sabemos que el campo eléctrico generado por la esfera es

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r} & r < R \\ \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & R \leq r \end{cases}$$

b) Tenemos que el campo en el centro de la esfera es $\vec{E}(\vec{0}) = \vec{0}$, por lo cual el centro es un punto de equilibrio. Si movemos un poquito la carga, esta experimenta una fuerza $\vec{F} = -Q\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r}$, la cual apunta hacia el centro de la esfera (sin importar en qué dirección se haya movido la carga), por lo cual es un punto de equilibrio estable.
Si movemos la carga quedando siempre dentro de la esfera, tenemos que su ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} m\vec{a} = \vec{F} &= -Q\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r} \\ \vec{a} &+ Q\frac{\rho r}{3m\epsilon_0} \cdot \hat{r} = \vec{0} \\ \Longrightarrow \ddot{r} &+ Q\frac{\rho}{3m\epsilon_0} \cdot r = 0 \\ \ddot{r} &+ w^2 \cdot r = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el movimiento de la carga es un movimiento armónico simple y su período de oscilación es $T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{3m\epsilon_0}{Q\rho}}$

c) Por el principio de superposición, el campo eléctrico resultante es

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r} + E_0\hat{x} & r < R \\ \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} + E_0\hat{x} & R \leq r \end{cases}$$

Reescribiendo el campo eléctrico a lo largo del eje x, resulta

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} (\frac{\rho x}{3\epsilon_0} + E_0) \cdot \hat{x} & -R < x < R \\ (\frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} + E_0) \cdot \hat{x} & R \leq x \\ (E_0 - \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2}) \cdot \hat{x} & x \leq -R \end{cases}$$

Encontremos las nuevas posiciones de equilibrio.

i) $-R < x < R$ Queremos que

$$\frac{\rho x}{3\epsilon_0} + E_0 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{-3\epsilon_0 E_0}{\rho}$$

Para que x_1 existe, se debe cumplir que

$$x_1 = \frac{-3\epsilon_0 E_0}{\rho} > -R \Longrightarrow E_0 < \frac{R\rho}{3\epsilon_0}$$

Esta condición debe cumplir E_0 para que haya un punto de equilibrio dentro de la esfera.
Sabemos que si el laplaciano de la energía potencial eléctrica $\nabla^2 U$ en el punto de equilibrio es mayor que cero, entonces tal punto es estable; si es menor que cero, entonces tal punto es inestable, y que $U = -qV$, donde V es la diferencia de potencial eléctrico. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} V(x) &= -\int \vec{E}(x) \cdot \hat{x} dx + c \\ &= -\int \left(\frac{\rho x}{3\epsilon_0} + E_0\right) dx + c \\ &= -E_0 x - \frac{\rho x^2}{6\epsilon_0} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x) &= -QV(x) \\ &= QE_0 x + Q\frac{\rho x^2}{6\epsilon_0} - Qc \\ \Longrightarrow \nabla^2 U = \frac{d^2U}{dx^2} &= \frac{Q\rho}{3\epsilon_0} > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es punto de equilibrio estable.

ii) $R \leq x$ Queremos que

$$\frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} + E_0 = 0 \Longrightarrow x_2 \qquad \textit{imaginario}$$

por lo que no hay posición de equilibrio para $R \leq x$.

iii) $x \leq -R$ Queremos que

$$E_0 - \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} = 0 \Longrightarrow x_3 = -R\sqrt{\frac{\rho R}{3\epsilon_0 E_0}}$$

Para que x_1 existe, se debe cumplir que

$$x_3 = -R\sqrt{\frac{\rho R}{3\epsilon_0 E_0}} < -R \Longrightarrow \sqrt{\frac{\rho R}{3\epsilon_0 E_0}} > 1 \Longrightarrow E_0 < \frac{R\rho}{3\epsilon_0}$$

que es la misma condición que encontramos anteriormente para que hubiera equilibrio. Este punto de equilibrio es inestable, se deja al lector verificarlo.

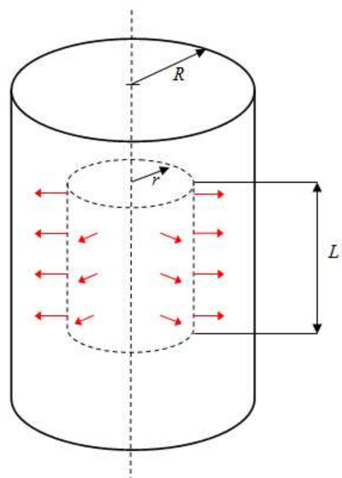
La prueba de lo siguiente se deja al lector. Hemos visto que para $E_0 < \frac{R\rho}{3\epsilon_0}$ existen dos puntos de equilibrio, uno estable y el otro inestable. Para $E_0 = 0$ existe una sola posición de equilibrio, en el centro de la esfera y es estable. Para $E_0 = \frac{R\rho}{3\epsilon_0}$ existe una sola posición de equilibrio, es en $x = -R$ y es inestable. Y para $E_0 > \frac{R\rho}{3\epsilon_0}$ no hay posiciones de equilibrio. Todo esto se puede ver claramente haciendo un gráfico de E(x) versus x (se deja al lector).

Problema 22

Considere un cilindro muy largo de radio R que se carga en su interior con una densidad $\rho = \rho_0(1 - \frac{r}{R})$, donde ρ_0 es una constante positiva, siendo r la distancia medida desde el eje del cilindro. Encuentre a que distancia del eje el campo eléctrico es máximo y calcule esta magnitud máxima.

Solución:

Dado que el cilindro es muy largo, el campo eléctrico estará en dirección radial en coordenadas cilíndricas. Con esto podemos considerar como superficie de gauss un cilindro de radio $r < R$, con igual eje que el cilindro de radio R. Esto se puede apreciar en la siguiente figura:



Podemos entonces escribir el campo eléctrico como $\vec{E} = E\hat{r}$, donde $\hat{r}$ es el vector unitario radial en coordenadas cilíndricas. Por la ley de gauss se tendrá que:

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{tapas} \vec{E} \cdot \hat{n} dS + \int_{manto} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{interior}}{\epsilon_0} \qquad (1)$$

El vector normal $\hat{n}$ de las tapas es perpendicular a $\hat{r}$. Con esto se tendrá que $\hat{r} \cdot \hat{n} = 0$ y por lo tanto

$$\int_{tapas} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{tapas} E\hat{r} \cdot \hat{n} dS = 0 \qquad (2)$$

El vector $\hat{n}$, normal al manto, será paralelo a $\hat{r}$ y por lo tanto $\hat{r} \cdot \hat{n} = 1$ lo que implica que:

$$\int_{manto} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{manto} E\hat{r} \cdot \hat{n} dS = E \cdot \int_{manto} dS$$

La integral $\int_{manto} dS$ corresponde al área del manto:$\int_{manto} dS = 2\pi r L$. Por lo tanto:

$$\int_{manto} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \cdot 2\pi r L \qquad (3)$$

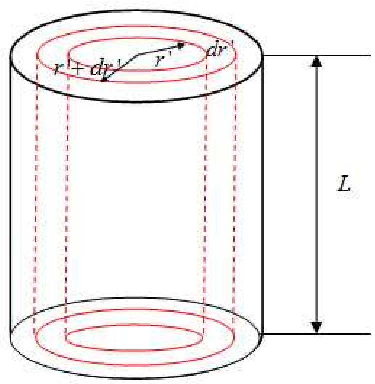
Reemplazando (2) y (3) en (1) resulta que:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{q_{interior}}{\epsilon_0} \qquad (4)$$

Lo que falta para resolver este problema es calcular la carga que hay en el interior de la superficie de gauss. Tenemos una densidad volumétrica de carga eléctrica dentro de esta superficie. Vemos que se cumplirá la siguiente relación:

$$dq = \rho(r') \cdot dV \qquad (5)$$

Para calcular dV consideramos el volumen entre dos cilindros de la largo L y mismo eje que el cilindro del problema, con radios r' y $r' + dr'$ como muestra la figura:



Luego, dV será simplemente el volumen entre los dos cilindros, lo que resulta:

$$dV = 2\pi r' dr' L \qquad (6)$$

Reemplazando (6) en (5):

$$dq = 2\pi r' \cdot dr' \cdot L \cdot p(r')$$

$$dq = 2\pi r' \cdot dr' \cdot L \cdot \rho_0 (1 - \frac{r'}{R})$$

$$\Longrightarrow dq = 2\pi L \cdot \rho_0 (r' - \frac{r'^2}{R}) dr'$$

Integrando:

$$q = 2\pi L \rho_0 \int_0^r (r' - \frac{r'^2}{R}) dr' = 2\pi L \rho_0 \cdot (\int_0^r r' dr' - \int_0^r \frac{r'^2}{R} dr')$$

$$\Longrightarrow q = 2\pi L \rho_0 \cdot (\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}) = 2\pi L \rho_0 \cdot (\frac{3Rr^2 - 2r^3}{6R})$$

$$\Longrightarrow q = \frac{\pi L \rho_0}{3R}(3Rr^2 - 2r^3) \qquad (7)$$

De (4) y (7):

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{\pi L \rho_0}{3R\epsilon_0}(3Rr^2 - 2r^3)$$

Despejando E:

$$E = \frac{\rho_0}{6R\epsilon_0}(3Rr - 2r^2) \qquad (8)$$

Queremos saber para que valor de r el campo eléctrico es maximo. Para esto derivamos E respecto a r:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_0}{6R\epsilon_0}(3R - 4r)$$

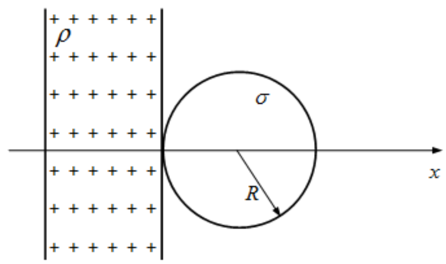
Igualando a 0 se obtiene que el valor de r buscado es:

$$r = \frac{3R}{4}$$

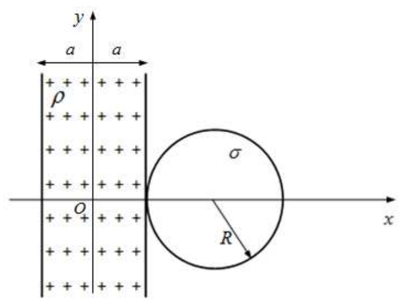
De esta manera

$$\boxed{|E|_{max} = \frac{3\rho_0 R}{16\epsilon_0}}$$

Problema 23
Entre dos planos infinitos paralelos que se encuentran a una distancia $2a$ el uno del otro se tiene una distribución homogénea de carga con densidad ρ. Tangente al plano de la derecha hay un cascarón cargado, de radio R y densidad superficial σ(ver figura). Calcular, con el origen en el punto medio de la recta que une los planos, el campo electrico para todo $x > 0$.

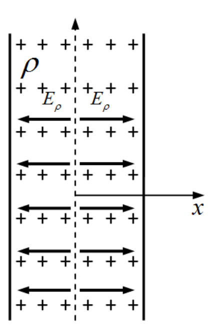


Solución:
La configuración del problema es la siguiente:



Para encontrar el campo eléctrico sobre el eje $x(x > 0)$ calcularemos el campo eléctrico producido por la región entre los planos infinitos de densidad ρ y el cascaron esférico de densidad σ y posteriormente utilizaremos el principio de superposición.

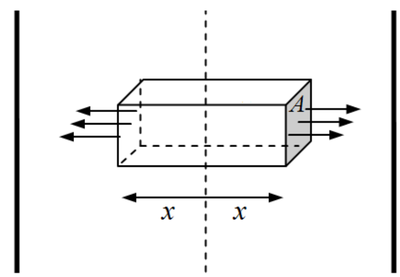
Campo eléctrico producido por la región entre los planos infinitos (E_ρ): Dada la simetría que presenta esta región respecto al eje y, el campo eléctrico E_ρ presentara también esta simetría como muestra la siguiente figura:



Calculare el campo eléctrico en dos regiones. Cuando $0 < x < a$ y $x > a$:

- $0 < x < a$:

Considerare como superficie gaussiana una caja de área lateral A y lado $2x$ como muestra la siguiente figura:



Dada la dirección que tiene el campo eléctrico se tendrá que por las tapas frontal, posterior, inferior y superior el flujo será cero, ya que el vector normal a estas caras es perpendicular al campo y de esto $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ lo que implica que

$$\int \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Sin embargo, si habrá flujo por las caras laterales y se tendrá que el campo eléctrico es paralelo a los vectores normales de estas caras con lo cual se cumplirá $\vec{(E)} \cdot \hat{n} = E$ lo que implica que

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \int_S dS$$

De esta manera, aplicando la ley de gauss, se tendrá que el flujo total sobre la caja será el flujo a través de las caras laterales:

$$\phi = E \int_{S_1} dS + E \int_{S_2} dS = EA + EA = 2EA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \qquad (1)$$

Donde S_1 y S_2 son las superficies laterales indicadas anteriormente.
Podemos calcular la carga interior q_{int} ya que sabemos la dimensiones de la caja y la densidad volumétrica de carga ρ. La carga interior será simplemente

$$q_{int} = \rho V = \rho 2xA$$

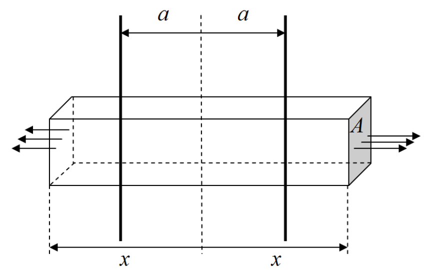
Reemplazando este valor en (1) obtenemos:

$$2EA = \frac{\rho 2xA}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

Y dada la simetría vemos que el campo esta en dirección $\hat{i}$, por lo tanto se tiene que:

$$\vec{E}_\rho = \frac{\rho x}{\epsilon_0}\hat{i}, \ si \ 0 < x < a$$

• $x > a$:
Se procede de igual forma que para la región anterior ya que la simetría presente es la misma en el campo eléctrico tal como se muestra en la siguiente figura:



Al igual que el caso anterior existirá flujo solo en las caras laterales y será:$\phi = 2EA$.
La carga interior será la carga que esta desde $-a < x < a$, por lo tanto: $q_{int} = \rho 2aA$. Aplicando la ley de gauss:

$$\phi = 2EA = \frac{\rho 2aA}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho a}{\epsilon_0}$$

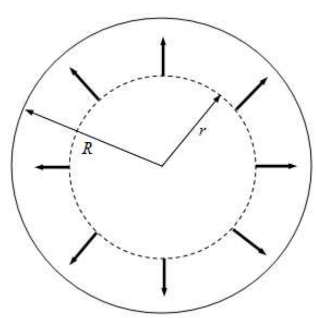
El campo esta en dirección $\hat{i}$ por lo tanto:

$$E_\rho = \frac{\rho a}{\epsilon_0}\hat{i},\ si\ x > a$$

Notar que el campo en esta región es constante.

Campo eléctrico producido por la cascara esférica (E_σ):)
Separaremos el espacio en 2 regiones, el interior de la cascara esférica (r<R) y el exterior (r>R) y calculamos el campo eléctrico en cada uno utilizando la ley de gauss:

• $r < R$:
Dado la simetría esférica y la densidad superficial σ es constante, se tendrá que el campo eléctrico estará en dirección radial. Considerare como superficie gaussiana una cascara esférica de radio $r < R$(superficie S) tal como muestra la figura:



El flujo a través de esta superficie será $\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$, pero el vector $\hat{n}$ es paralelo al campo(ambos radiales) y por lo que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ y por lo tanto $\phi = E \int_S dS = E4\pi r^2$.
Por otro lado, la carga interior es nula ya que solo hay carga en la cascara: $q_{int} = 0$. Por la ley de gauss se tendrá que

$$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

$E = 0, \; si \; r < R$

- $r > R$:

Consideramos, al igual que en el caso anterior, una cascara esférica de radio $r > R$ como superficie gaussiana. Bajo los mismos argumentos de simetría anterior vemos que el campo eléctrico será radial y por lo tanto, paralelo al vector normal y de esta manera:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \int_S dS = E4\pi r^2$$

La carga interna q_{int} será la carga contenida en toda la superficie, la cual se obtiene multiplicando el área total por la densidad superficial de carga: $q_{int} = \sigma 4\pi R^2$.
Por la ley de gauss, se tendrá que

$$\phi = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

Despejando el campo eléctrico se tiene que

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Este campo estará en dirección radial, por lo tanto:

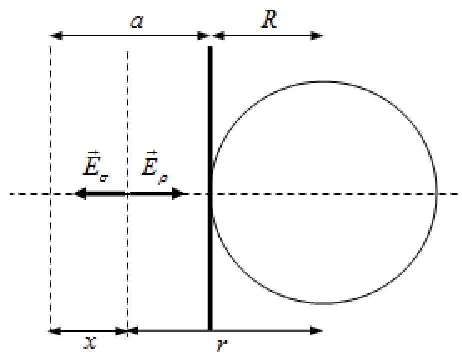
$$\vec{E}_\sigma = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \; si \; r > R$$

Donde $\hat{r}$ es el vector unitario en dirección radial.

Ahora que encontramos los dos campos eléctricos podemos encontrar el campo resultante superponiéndolos. Para esto, considerare 3 regiones:
I) $0 < x < a$
II) $a < x < a + 2R$
III) $x > a + 2R$

I) $0 < x < a$: En esta región los campos eléctricos son: $\vec{E}_\rho = \frac{\rho x}{\epsilon_0}\hat{i}$ y $\vec{E}_\sigma = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r}$. Ahora tenemos que expresar r y $\hat{r}$ de forma conveniente para poder sumar ambos campos. Consideremos la siguiente figura:
Vemos que se cumplirá que $a + R = x + r$ con lo que resulta $r = a + R - x$. Además, vemos que $\hat{r} = -\hat{i}$ y por lo tanto podemos escribir el campo eléctrico como:

$$\vec{E}_\sigma = \frac{-\sigma R^2}{\epsilon_0 (a + R - x)^2}\hat{i}$$



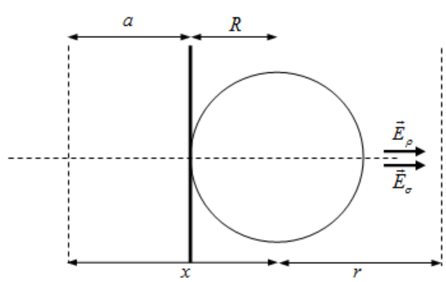
De esta manera, el campo eléctrico resultante en esta región es $\vec{E} = \vec{E}_\rho + \vec{E}_\sigma$, es decir

$$\vec{E} = (\frac{\rho x}{\epsilon_0} - \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 (a + R - x)^2})\hat{i}$$

II) $a < x < a + 2R$: En esta región el campo lo aporta solo E_ρ ya que el campo producido por la cascaa esferica es nulo en el interior ella. Por lo tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_\rho = \frac{\rho a}{\epsilon_0}\hat{i}, \ si \ a < x < a + 2R$$

III) $x > a + 2R$ En esta regio, ambos campos estarán en dirección y sentido $\hat{i}$. Para obtener la expresión de $\vec{E}_\sigma$ en función de x, consideramos la siguiente figura:



Vemos que se cumple la relación $x = a + R + r$, con lo que resulta que $r = x - a - R$. Además, $\hat{r} = \hat{i}$. De esta forma, tendremos que:

$$\vec{E}_\sigma = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 (x - a - R)^2}\hat{i}$$

Luego, por principio de superposición, el campo eléctrico en esta región será:

$$\vec{E} = (\frac{\rho a}{\epsilon_0} + \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 (x - a - R)^2})\hat{i}, \ si \ x > a + 2R$$

Finalmente el campo eléctrico resultante por ambas distribuciones de carga será:

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} (\frac{\rho x}{\epsilon_0} - \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 (a+R-x)^2})\hat{i} & 0 < x < a \\ \frac{\rho a}{\epsilon_0}\hat{i} & a < x < a+2R \\ (\frac{\rho a}{\epsilon_0} + \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 (x-a-R)^2})\hat{i} & x > a+2R \end{cases}}$$

Problema 24
Consideremos dos esferas no concéntricas de radio R, con densidades de carga volumétricas ρ y $-\rho$ uniformes. Los centros de ambas esferas están a una distancia menor que $2R$. Sea $\vec{d}$ el vector que va del centro de la esfera positiva al centro de la esfera negativa. Pruebe que el campo eléctrico en la intersección de las esferas es constante y encuentre su valor.

Solución:
Del problema 2), sabemos que el campo eléctrico en el interior de una esfera maciza de densidad de carga uniforme ρ es $\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r}$.
De la simetría de la distribución, a priori sabemos que además para $R \leq r$ el campo cumple $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. Si bien no es necesario para la resolución del problema conocer el campo eléctrico fuera de la esfera, encontrémoslo usando la ley de Gauss.
Consideremos como superficie de integración una cáscara esférica de radio $r > R$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\oint_\Omega \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ E(r) 4\pi r^2 &= \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0} \\ \Longrightarrow & \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que el campo eléctrico generado por la esfera maciza es

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r} & r < R \\ \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & R \leq r \end{cases}$$

Pongamos el origen de coordenadas en el centro de la esfera de densidad de carga ρ. Así, tenemos que los campos eléctricos en los interiores de cada esfera están dados por

$$\begin{aligned}\vec{E_1}(r) &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r} \quad para \quad |\vec{r}| < R \\ \vec{E_2}(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot (\vec{r} - \vec{d}) \quad para \quad |\vec{r} - \vec{d}| < R\end{aligned}$$

Los vectores en la intersección de ambas esferas satisfacen simultáneamente
$|\vec{r} - \vec{d}| < R$ y $|\vec{r}| < R$. Así, por el principio de superposición, el campo eléctrico en la intersección de ambas esferas es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E_1}(\vec{r}) + \vec{E_2}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot (\vec{r} - \vec{d}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{d}$$

el cual es constante, tal como se quería probar.

Capítulo 4

Potencial Electroestatico

Problema 25
Considere un plano infinito de densidad de carga superficial uniforme $\sigma > 0$ normal al eje x de ecuación $x = 0$. En $a\hat{x}$ se encuentra una carga puntual $-q < 0$.

a) Encuentre el potencial eléctrico sobre el eje x y entre la carga $-q < 0$ y el origen coordenado O.

b) Una partícula de masa m y carga $-e < 0$ se ubica en el punto medio entre $-q$ y O y se deja libre. ¿Con qué energía cinética llega la carga al plano? (ignore efectos gravitacionales).

Solución:

a) Conocemos el campo eléctrico generado por el plano y la carga $-q$ sobre el eje x que los une. Tales campos son

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{x}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{(a-x)^2} \cdot -\hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a-x)^2} \cdot \hat{x}$$

Así, el campo eléctrico entre O y $-q$ (que está, digamos, en el punto A) es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a-x)^2}\right) \cdot \hat{x}$$

Pero ya que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, entonces en Ω (la región pedida)

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a-x)^2}\right)$$

$$\implies \quad V(x) = \quad -\left(\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a-x)}\right) + C$$

b) El campo electrostático es conservativo, así que podemos usar conservación de energía entre energía potencial y cinética. La carga $-e$ parte del reposo desde $a/2\hat{x}$ hacia el plano. Por conservación de energía, tenemos que

$$
\begin{aligned}
-eV(a/2) &= \frac{mv^2}{2} - eV(0) \\
\Longrightarrow K = \frac{mv^2}{2} &= e\left(V(0) - V(a/2)\right) \\
&= e\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a} + C + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{a} + \frac{\sigma a}{4\epsilon_0} - C\right) \\
&= e\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{\sigma a}{4\epsilon_0}\right)
\end{aligned}
$$

Problema 26
Se tienen dos esféras conductoras de radios r_1, r_2 y cargas q_1, q_2 separadas por una gran distancia $d >> r_1, r_2$. Si ambas se conectan a través de un cable conductor (despreciable, que sirve sólo para transportar carga de una a otra), encuentre las densidades de carga superficiales de cada una (en función de las variables conocidas) una vez que el sistema alcanza el equilibrio.

Solución:
Dado que el sistema está en una región acotada del espacio, podemos tomar como punto de referencia del potencial el infinito e igualar el potencial a cero allí, es decir, $V(+\infty) = 0$. Así, el potencial sobre las superficies de las esferas conductoras es

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1}, V_2 = k\frac{q_2}{r_2}$$

donde hemos supuesto que el potencial de una esfera no es afectado por el de la otra (o más bien es afectado de forma despreciable), dado que están muy muy separada, es decir, $d >> r_1, r_2$, y tampoco el campo de una esfera redistribuye la carga de la otra. Por conservación de carga, si $(q_1)_f, (q_2)_f$ son las cargas en cada esfera una vez alcanzado el equilibrio, tenemos que

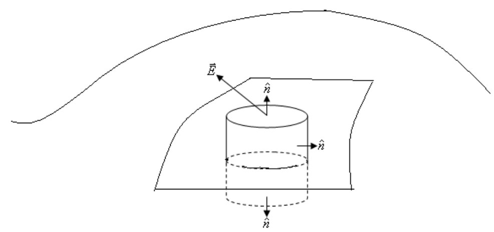
$$q_1 + q_2 = (q_1)_f + (q_2)_f$$

Al alcanzar el equilibrio, es decir, cuando deja de haber transferencia de cargas entre las esferas, tenemos que la diferencia de potencial eléctrico entre ambas es nulo, es decir,

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_2 \\
k\frac{(q_1)_f}{r_1} &= k\frac{(q_2)_f}{r_2} \\
\frac{4\pi(r_1)^2(\sigma_1)_f}{r_1} &= \frac{4\pi(r_2)^2(\sigma_2)_f}{r_2} \\
\Longrightarrow \frac{(\sigma_2)_f}{(\sigma_1)_f} &= \frac{r_1}{r_2}
\end{aligned}$$

De esto vemos que en general, las regiones en la superficie de un conductor con menor radio de curvatura (puntas) concentran una mayor densidad superficial de carga, por lo cual el campo eléctrico cerca de ellas (en su exterior) es más fuerte que en regiones con menor radio de curvatura.
Usando la relación encontrada en la ecuación de conservación de carga, obtenemos

$$\begin{aligned}
(q_1)_f + (q_2)_f &= q_1 + q_2 \\
4\pi(r_1)^2(\sigma_1)_f + 4\pi(r_2)^2(\sigma_2)_f &= q_1 + q_2 \\
4\pi r_1(\sigma_1)_f(r_1 + r_2) &= q_1 + q_2 \\
\Longrightarrow (\sigma_1)_f &= \frac{1}{4\pi r_1}\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} \\
(\sigma_2)_f &= \frac{1}{4\pi r_2}\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2}
\end{aligned}$$



Problema 27
Demuestre que la discontinuidad en $|\vec{E_\perp}(\vec{r})|$ al pasar de una región vacía a otra vacía por una superficie cargada de densidad superficial $\sigma(\vec{r})$, con $\vec{r}$ en la superficie, es

$$\frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Considerando esto, encuentre el campo eléctrico en la superficie de un conductor en equilibrio electrostático.

Solución:
Consideremos un sector muy muy pequeño de la superficie centrado en $\vec{r}$, tan pequeño que sea casi plano, y situemos a través de ella un cilindro Ω de altura $0 < 2h << 1$ y área $0 < A << 1$, tal que la superficie lo cruze por la mitad. Por la ley de gauss, tenemos

$$\oint_\Omega \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Pero

$$Q_{int} \cong \sigma(\vec{r})A \Longrightarrow \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \cong \frac{\sigma(\vec{r})A}{\epsilon_0}$$

Tenemos además

$$\oint_\Omega \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \int_{manto} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS + \int_{cara_{sup}} \vec{E_1}(\vec{r}) \cdot \hat{n_1} dS + \int_{cara_{inf}} \vec{E_2}(\vec{r}) \cdot \hat{n_2} dS$$

Podemos expresar el campo eléctrico como la suma de su componente tangencial y normal a la superficie, es decir, $\vec{E} = \vec{E_\perp} + \vec{E_{//}}$. Además, como el área es muy pequeña, el módulo del campo eléctrico sobre él se mantiene casi constante, por lo que lo podemos aproximar por $|\vec{E}(\vec{r})|$ en toda el área. También, $\hat{n_1} = -\hat{n_2}$ Con esto en mente, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{cara_{sup}} \vec{E_1}(\vec{r}) \cdot \hat{n_1} dS + \int_{cara_{inf}} \vec{E_2}(\vec{r}) \cdot \hat{n_2} dS &= (\vec{E_1})_\perp A - (\vec{E_2})_\perp A \\ &= ((\vec{E_1})_\perp - (\vec{E_2})_\perp) A\end{aligned}$$

expresión que no depende de h (al igual que $\frac{\sigma(\vec{r})A}{\epsilon_0}$). También tenemos que

$$\int_{manto} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS \rightarrow 0 \qquad cuando \qquad h \rightarrow 0$$

Así, tenemos finalmente

$$\begin{aligned} ((\vec{E}_1)_\perp - (\vec{E}_2)_\perp)A &= \frac{\sigma(\vec{r})A}{\epsilon_0} \\ \triangle E_\perp A &= \frac{\sigma(\vec{r})A}{\epsilon_0} \\ \Longrightarrow \quad \triangle E_\perp(\vec{r}) = & + \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Sabemos que un conductor en equilibrio eléctrostático no presenta carga en su interior, el campo eléctrico en su interior es nulo y toda su carga está distribuida en la superficie de tal forma que el campo eléctrico en la superficie es normal a la misma (pues si tuviera componente tangencial a ella, las cargas se moverían y no estarían en equilibrio electrostático). Así, considerando esto en el análisis anterior, tenemos que el campo eléctrico en $\vec{r}$ sobre la superficie es

$$\vec{E}(\vec{r}) = +\frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0}\hat{n}$$

con $\hat{n}$ el vector normal exterior a la superficie en $\vec{r}$.

Problema 28 Se tienen dos armaduras esféricas, metálicas, huecas y concéntricas de radios a y b (b>a), y de espesor despreciable aunque finito. La armadura interna se carga con una carga $q_0 > 0$. Se supone que la tierra (que se toma como origen de potenciales) está infinitamente alejada.

I. La armadura externa se conecta a tierra a través de una batería cuya diferencia de potencial entre sus bornes es V_0.

   a) Calcule la carga que se induce en las superficies interior y exterior de cada una de las armaduras.

   b) Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.

   c) Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio, y la diferencia de potencial entre las armaduras.

II. Se cortocircuita la batería (conexión directa a tierra). Repita los calculos anteriores inteligentemente.

III. Se desconecta la armadura externa de la tierra, y luego se acerca una carga $q > 0$ hasta una distancia $c > b$ del centro del condensador. Decida si la acción de la carga q modifica o no:

   d) la carga total de cada una de las armaduras

   e) la densidad de carga en ellas

   f) la función potencial y la diferencia de potencial entre ellas.

   Explique brevemente sus respuestas.

Solución:

I. El problema tiene simetría esférica con centro de coordenadas el centro de las cáscaras esféricas, debido a que la tierra está infinitamente lejana (recordar que la tierra se piensa como un sumidero y fuente infinita de carga). Todas las densidades de carga serán uniformes. Dada la simetría esférica, el campo y potencial eléctricos dependerán sólo de la distancia al centro de las cáscaras y el campo apuntará en el sentido de $\hat{r}$, es decir, $V = V(r)$ y $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$.

   a) Sean q_1, q_2, q_3, q_4 las cargas de las superficies interior y exterior de las armaduras interna y externa, respectivamente. Tenemos que $q_0 = q_1 + q_2$.
   Aplicando el teorema de Gauss con una superficie esférica concéntrica y entre las superficies de la primera armadura, tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0 = \frac{q_1}{\epsilon_0} \Longrightarrow q_1 = 0 \Longrightarrow q_2 = q_0$$

   donde $\vec{E} = \vec{0}$ pues el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es nulo.

Aplicando ahora el teorema de Gauss con una superficie esférica concéntrica y entre las superficies de la segunda armadura, tenemos

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}dS = 0 = \frac{q_1+q_2+q_3}{\epsilon_0} \Longrightarrow q_1+q_2+q_3 = 0 \Longrightarrow q_3 = -q_2 = -q_0$$

Aplicando de nuevo el teorema de Gauss con una superficie esférica concéntrica de radio $r > b$ y que contenga la segunda armadura, tenemos

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

Por otra parte, sabemos que la diferencia entre la armadura externa y la tierra (en el infinito) es V_0, esto es

$$\begin{aligned} V(b)-V(+\infty) = V(b) = V_0 &= -\int_{+\infty}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{r} \\ V_0 &= -\int_{+\infty}^{b} \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} \\ V_0 &= \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{b} \\ \Longrightarrow q_4 &= 4\pi\epsilon_0 b V_0 \end{aligned}$$

donde tomamos un camino radial sobre la integral de línea.

b) Dividamos el espacio en varias regiones. Todas las superficies de integración que tomaremos serán esféricas y concéntricas a las armaduras.

   i) $r \leq a$ (región interior y metal de la armadura interna)
   Si el radio de la superficie de integración es $r \leq a$

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} = 0 \Longrightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

   ii) $a < r < b$ (región entre armaduras)
   Es evidente que existe campo eléctrico en esta región, pues hay una diferencia de potencial entre armaduras. Tenemos en este caso que

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_0}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

   iii) $r = b$ (metal de la armadura externa)
   En este punto, $\vec{E}(b) = \vec{0}$, pues el campo eléctrico en el interior de un metal es siempre nulo.

   iv) $r > b$ (región exterior a las armaduras)
   También aquí es evidente que existe un campo eléctrico, pues hay una diferencia de potencial entre la armadura externa y el infinito (punto de referencia del potencial). Así, tenemos que

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_4}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 b V_0}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{bV_0}{r^2}\cdot\hat{r}$$

Resumiendo, el campo eléctrico es

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r \leq a \\ \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} & a < r < b \\ \vec{0} & r = b \\ \frac{bV_0}{r^2} \cdot \hat{r} & b \leq r \end{cases}$$

c) También dividamos el espacio en varias regiones.

i) $a \leq r \leq b$
Tenemos

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int \vec{E} \cdot d\hat{r} + C \\ &= -\int \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} + C \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + C \end{aligned}$$

donde el camino de integración usado fue radial.
Para determinar C imponemos la condición de borde. Sabemos que $V(b) = V_0$, por tanto $C = V_0 - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{b}$, entonces

$$V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

Por tanto, tenemos que la diferencia de potencial entre las armaduras es

$$V(a) - V(b) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

ii) $r \leq a$
El potencial en $r = a$ (armadura interna) es

$$V(a) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

Como el campo eléctrico en esta región es nulo, entonces toda la región debe tener el mismo potencial (debe ser equipotencial), por lo que

$$V(r \leq a) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

iii) $b \leq r$

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int \vec{E} \cdot d\hat{r} + C` \\ &= -\int \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} + C` \\ &= \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + C` \\ &= \frac{bV_0}{r} + C` \end{aligned}$$

Pero $V(b) = V_0 \Longrightarrow C` = 0$

$$\Longrightarrow V(r) = \frac{bV_0}{r}$$

Resumiendo, el potencial eléctrico es

$$V(r) = \begin{cases} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + V_0 & r \leq a \\ \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) + V_0 & a < r < b \\ \frac{bV_0}{r} & b \leq r \end{cases}$$

II. Al cortocircuitar la batería, es decir, hacer $V_0 = 0$, la armadura externa estará al mismo potencial que la tierra. En consecuencia, no habrá campo fuera de la segunda armadura, pues sólo existe campo cuando hay una diferencia de potencial. Recuerde que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Los cálculos son idénticos a los anteriores, así basta introducir $V_0 = 0$ y considerar lo dicho anteriormente. De esta forma, tenemos

carga:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \\ q_2 &= q_0 \\ q_3 &= -q_0 \\ q_4 &= 0 \end{aligned}$$

campo:

$$\begin{aligned} r \leq a \quad &: \quad \vec{E} = \vec{0} \\ a < r < b \quad &: \quad \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \\ b \leq r \quad &: \quad \vec{E} = \vec{0} \end{aligned}$$

potencial:

$$\begin{aligned} r \leq a \quad &: \quad V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ a < r < b \quad &: \quad V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \\ b \leq r \quad &: \quad V(r) = 0 \end{aligned}$$

Y la diferencia de potencial entre armaduras es $V(a) - V(b) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$, la misma que en el caso anterior.

III. Al desconectar la armadura de la tierra, sin acercar aún la carga $q > 0$, las cargas en las armaduras no sufren modificación.

d) Al acercar la carga q, la carga total de cada armadura sigue siendo la misma, por conservación de carga eléctrica. Veamos qué pasa con q_1, q_2, q_3, q_4. Por ley de Gauss, tenemos que

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0 = \frac{q_1}{\epsilon_0} \Longrightarrow q_1 = 0 \Longrightarrow q_2 = q_0$$

donde el flujo es cero pues el campo dentro de un conductor en equilibrio siempre es nulo (la superficie de integración fue esférica, concéntrica a las armaduras y dentro de la primera armadura).

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0 = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} = \frac{q_0 + q_3}{\epsilon_0} \Longrightarrow q_3 = -q_0 \Longrightarrow q_4 = 0$$

Por tanto, las cargas en las superficies de las cascarones no cambian (lo que era de esperarse).

e) La densidad de carga de la superficie de la armadura externa se modifica, pues la carga q introduce una asimetría en el espacio, y las cargas en los metales (conductores) están libres de moverse (la densidad de carga de la superficie externa se redistribuye de tal forma de anular el campo producido por q en el interior de la armadura exterior). Pero las densidades de las superficies internas no sufren cambio. Si sólo consideramos armaduras, la carga de la armadura externa será atraída por la carga $q > 0$, y la densidad superficial tendrá un máximo (de carga negativa) en la parte de la esfera más cercana a q.

f) La armadura externa se pondrá a un potencial distinto de cero (si sigue considerándose $V(+\infty) = 0$). En efecto, $V(b) = -\int_{+\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\hat{r} \neq 0$, pues $\vec{E} \neq 0$ y no hay simetría que pudiera anular la integral. La diferencia de potencial entre armaduras seguirá siendo la misma (esto se desprende del hecho que la geometría de las armaduras no ha cambiado, por lo que su capacitancia no ha cambiado, y tampoco ha cambiado la carga en ellas).

Problema 29
Considere una varilla delgada de densidad lineal uniforme λ y largo L. Encuentre su potencial eléctrico en todo el espacio que la rodea.

Solución:
Sabemos que el potencial está dado por

$$V(\vec{r}) = \int_{\Omega} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r_1}|}$$

En este caso, si $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ y $\vec{r_1} = x_1\hat{x}$, con $0 \leq x_1 \leq L$, son las posiciones del punto y de la varilla respectivamente, tenemos que

$$V(\vec{r}) = \int_0^L \frac{\lambda dx_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2 + z^2}}$$

Encontremos $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Si $x = tan(\theta)$, entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{sec^2(\theta) d\theta}{\sqrt{tan^2(\theta)+1}} = \int sec(\theta) d\theta = ln(sec(\theta) + tan(\theta)) = ln(x + \sqrt{x^2+1}) = arccosh(x)$$

Extendiendo esto a $\int \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+y^2+z^2}}$ resulta (verífiquelo)

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+y^2+z^2}} = ln(x_1 - x + \sqrt{((x_1-x)^2+y^2+z^2})$$

Así, el potencial es

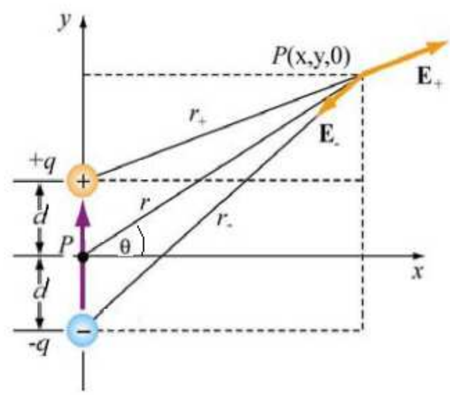
$$\begin{aligned}
V(x, y, z) &= \int_0^L \frac{\lambda dx_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x_1-x)^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot ln(x_1 - x + \sqrt{(x_1-x)^2+y^2+z^2}) \Big|_0^L \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot ln\left(\frac{L - x + \sqrt{(L-x)^2+y^2+z^2}}{-x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)
\end{aligned}$$

Problema 30
Considere el dipolo eléctrico de la figura.

Encuentre para el dipolo eléctrico microscópico (es decir, para distancia mucho más grandes que $2d$, la separación entre cargas):

a) El potencial eléctrico en todo el espacio (*Hint*: Use coordenadas polares, y use la ley de los cosenos para expresar las distancias relevantes en tales coordenadas).

b) El campo eléctrico en todo el espacio.



c) La energía potencial del dipolo (esto, para un dipolo en general).

Solución:

a) Por el principio de superposición, el potencial eléctrico en el punto P está dado por

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

Por la ley del coseno, tenemos que

$$\begin{aligned} r_+^2 &= r^2 + d^2 - 2rd \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= r^2 + d^2 - 2rd \cdot sen(\theta) \\ \Longrightarrow \frac{1}{r_+} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cdot sen\,(\theta)}} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{d}{r})^2 - 2\frac{d}{r} \cdot sen\,(\theta)}} \end{aligned}$$

Pero estamos calculando el potencial para $r >> d$, por lo que $\frac{d}{r} << 1$ y

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_+} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{d}{r})^2 - 2\frac{d}{r} \cdot sen\,(\theta)}} \\ &\cong \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 2\frac{d}{r} \cdot sen(\theta)\right)\right) \\ &= \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{d}{r} \cdot sen(\theta)\right) \end{aligned}$$

A su vez, tenemos para r_-

$$r_-^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = r^2 + d^2 + 2rd \cdot sen\,(\theta)$$

y de forma análoga a lo anterior

$$\frac{1}{r_-} \cong \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 - \frac{d}{r} \cdot sen(\theta)\right)$$

Por lo que el potencial para $r >> d$ resulta

$$\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \\
&\cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{d}{r} \cdot sen(\theta)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 - \frac{d}{r} \cdot sen(\theta)\right)\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \left(\frac{2d}{r} \cdot sen(\theta)\right) \\
&= \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{sen(\theta)}{r^2} \\
&= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{sen(\theta)}{r^2} \\
V(r,\theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}
\end{aligned}$$

donde $\vec{p}$ es el momento dipolar eléctrico del dipolo.

b) Sabemos que

$$\vec{E} = -\hat{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

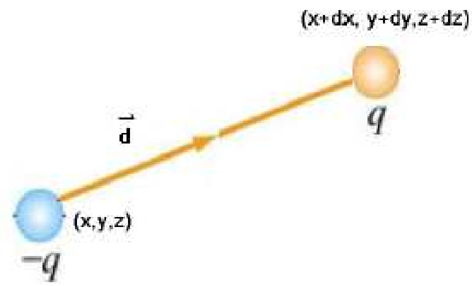
Así, tenemos que

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{psen(\theta)}{r^3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{pcos(\theta)}{r^3}$$

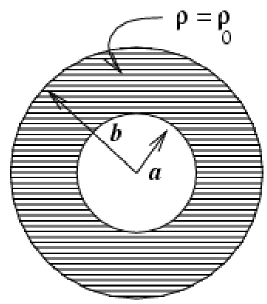
$$\Longrightarrow \vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2sen(\theta)\hat{r} - cos(\theta)\hat{\theta}\right)$$

c) Consideremos la siguiente figura. Dado que la región ocupada por el dipolo es acotada, podemos tomar $V(+\infty) = 0$ como potencial de referencia.
Al traer las cargas desde el infinito y formar el dipolo, la energía asociada al dipolo es



$$
\begin{aligned}
U &= qV(x+dx,y+dy,z+dz) - qV(x,y,z) \\
&= q\left(V(x+dx,y+dy,z+dz) - V(x,y,z)\right) \\
&= qdV \\
&= q\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial x}p_x + \frac{\partial V}{\partial y}p_y + \frac{\partial V}{\partial z}p_z \\
&= \vec{p}\cdot\vec{\nabla}V \\
U &= -\vec{p}\cdot\vec{E}
\end{aligned}
$$

Problema 31
Considere una región esférica, de radio b, que tiene una distribución de carga uniforme $\rho(r) = \rho_0$ para la región determinada por $a < r < b$ y densidad nula para $r < a$. Determine el potencial electrostático en todo el espacio.



Solución:
a) Lo que haremos primero será calcular el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en todo el espacio y con este resultado obtendremos el potencial utilizando:

$$V_p = -\int_{\infty}^{p} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Considerando el potencial igual a cero en el infinito.
El problema tiene simetría esférica y por lo tanto se tendrá que $\vec{E} = E\hat{r}$, donde $\hat{r}$ es el vector unitario en dirección radial.
Consideraremos 3 regiones:
I) $r < a$
II) $a < r < b$
III) $r > b$

- **I)** $r < a$**:**

Considero como superficie gaussiana un cascaron esférico de radio $r < a$(superficie S). Se tiene que el vector normal a esta superficie es paralelo a $\hat{r}$. De esta manera se tendrá que el campo $\vec{E}$ es paralelo al vector normal $\hat{n}$ de la superficie S por lo que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ y por lo tanto:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \int_S dS = E 4\pi r^2$$

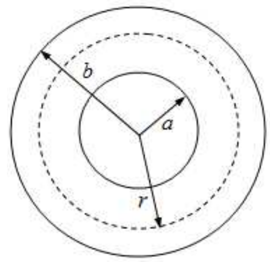
Por otro lado la carga en el interior de la superficie es nula ya que esta contenida en el conductor: $q_{int} = 0$. Aplicando la Ley de Gauss se tendrá que:

$$E 4\pi r^2 = 0$$

Y por lo tanto $E = 0$, si r<a.

- **II)** $a < r < b$**:**

Considero como superficie gaussiana una cascara esférica de radio r(superficie S) como muestra la figura:
Al igual que en el caso anterior se tendrá que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ y por lo tanto:



$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E 4\pi r^2$$

La carga interior q_{int} se puede calcular fácilmente ya que la densidad de carga es constante. Se tendrá que $q_{int} = \rho_0 V$. V es el volumen entre la esfera de radio r y la esfera de radio a con lo que resulta:

$$q_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)$$

Aplicando la ley de gauss:

$$E 4\pi r^2 = \rho_0 \frac{4}{3\epsilon_0}\pi(r^3 - a^3)$$

Con lo que se obtiene:

$$E = \frac{\rho_0(r^3 - a^3)}{3r^2\epsilon_0}$$

Como comentamos anteriormente este campo esta en dirección radial $\hat{r}$, por lo tanto:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

- **III)** $r > b$**:**

Procediendo de igual manera que en la región II) veremos que la carga almacenada en la distribución que rodea al conductor será:

$$q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho_0(b^3 - a^3)$$

De esta manera aplicando la ley de gauss tendremos que:

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3r\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

Vectorialmente queda expresado como:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Resumiendo, el campo eléctrico en todo el espacio resulta

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\rho_0(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & a < r < b \\ \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > b \end{cases}$$

Ahora que tenemos el campo eléctrico en todo el espacio podemos calcular el potencial eléctrico. Debemos elegir una trayectoria para tener una expresión para el vector $d\vec{\ell}$. Elegimos una línea recta que vaya desde el infinito hasta una distancia $r > b$
Como podemos ver $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = Edr$. De esta manera el potencial eléctrico será:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{r} Edr = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2})dr$$

Integrando se obtiene que:

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r}, \quad si \quad r > b}$$

Ahora queremos calcular el potencial a una distancia r, donde $a < r < b$. Por definición tenemos que

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Descomponemos esta integral de línea separando la trayectoria desde el infinito hasta r, en las trayectorias desde infinito hasta b mas la trayectoria desde b hasta r.

$$V(r) = -\int_{\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + -\int_{b}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La primera integral resulta de evaluar el potencial anterior en $r = b$:

$$V(b) = -\int_{\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 b}$$

Por otro lado, para la otra integral tendremos

$$\begin{aligned} -\int_{b}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\int_{b}^{r} \frac{\rho_0(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2} dr \\ &= -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot (\int_{\infty}^{b} rdr - a^3 \int_{b}^{r} \frac{1}{r^2} dr) \\ &= -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot ((\frac{r^2}{2}\bigg|_b^r) - a^3(-\frac{1}{r}\bigg|_b^r)) \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot (\frac{b^2 - r^2}{2} + a^3 \frac{(r - b)}{rb}) \end{aligned}$$

De esta manera, el potencial en r resulta ser

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\frac{b^3-a^3}{b} + \frac{b^2-r^2}{2} + a^3\frac{(r-b)}{rb}), \quad si \quad a < x < b}$$

Para la región $r < a$ descomponemos la trayectoria desde el infinito hasta r en 3 trayectorias. Tendremos que el potencial es

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + -\int_{b}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{r} + -\int_{a}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

Al ser nulo el campo eléctrico para $r < a$ tendremos que

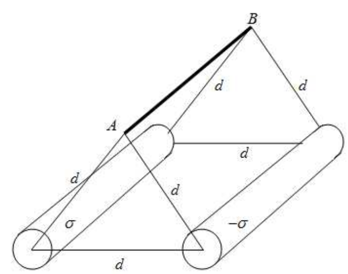
$$-\int_{a}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

Y de esta manera el potencial resulta ser:

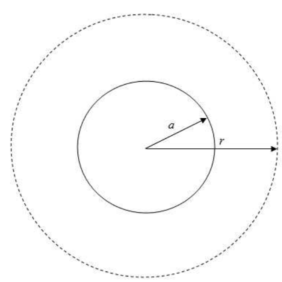
$$\boxed{V(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\frac{b^3-a^3}{b} + \frac{b^2-a^2}{2} + a^3\frac{(a-b)}{ab}), \quad si \quad r < a}$$

Problema 32
Considere el sistema dado en la figura: Se tienen 2 cilindros muy largos, huecos, cada uno de radio r y densidades de cargas superficiales constantes σ y $-\sigma$.

a) Encuentre el campo eléctrico sobre la línea AB, que equidista de los cilindros en una distancia igual a su separación d.
b) Determine la diferencia de potencial entre los centros de los cilindros.



Solución:
a) Para obtener este resultado debemos calcular el campo eléctrico de cada cilindro hueco a una distancia r de él(utilizaremos este resultado posteriormente) y evaluar en $r = b$. Dado que los cilindros son muy largos y están cargados con densidad superficial uniforme podemos despreciar las condiciones de borde y utilizar los argumentos de simetría. El campo eléctrico que produce cada cilindro estará en dirección radial y de esta manera utilizando como superficie gaussiana un cilindro de largo L y radio r



$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Desarrollamos la integral como

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \int_S dS = E 2\pi r L \tag{2}$$

Como la densidad de carga superficial es σ constante(se hace de igual manera para para el cilindro), la carga del cilindro será simplemente

$$q_{int} = \sigma V = \sigma 2\pi a L \tag{3}$$

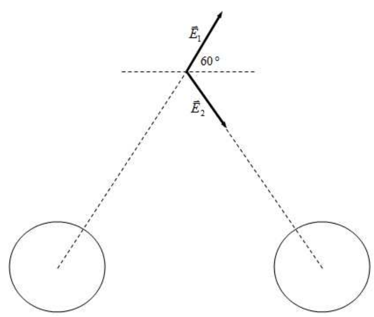
Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos que

$$E = \frac{\sigma a}{r\epsilon_0} \qquad (4)$$

Evaluando en $r = d$ tenemos que

$$E = \frac{\sigma a}{d\epsilon_0}$$

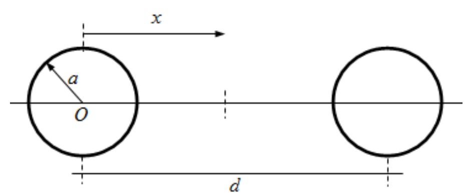
Ahora superponiendo el campo eléctrico producido por cada cilindro sobre el punto pedido se debe considerar la siguiente configuración:



Como ya mencionamos el campo eléctrico es radial, y por lo tanto estarán en la dirección indicada en la figura. Como los módulos de los campos producidos por ambos cilindros son iguales en el punto pedido, las componentes en y se anularan y por lo tanto el campo eléctrico estará en dirección $\hat{i}$ y tendrá modulo $2E_y = 2Ecos(\frac{\pi}{3})$, es decir

$$\boxed{E = \frac{\sigma a}{d\epsilon_0}}$$

b) Para calcular la diferencia de potencial entre los dos cilindros debemos calcular el campo eléctrico sobre la línea que une a ambos cilindros. Considerare el origen en el centro del cilindro de la izquierda, como muestra la figura:



Para $0 < x < D$ el campo eléctrico siempre estará en dirección $\hat{i}$. Como hemos visto anteriormente, el hecho de que cada cilindro tenga carga nula en su interior implicará que el campo eléctrico que produzcan en su interior sea nulo. Ahora, calcularemos el campo eléctrico resultante sobre el eje x superponiendo los campos producidos por cada cilindro:

Campo eléctrico producido por el cilindro izquierdo

Como ya se dijo, el campo eléctrico en el interior del cilindro será nulo, por lo tanto

$$\vec{E}_1 = 0, \quad si \quad 0 < x < a$$

Fuera del cilindro el campo eléctrico se calculara de igual manera como lo hicimos en la parte a), de esta manera tenemos que:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma a}{x\epsilon_0}\hat{i}, \quad si \quad x > a$$

Campo eléctrico producido por el cilindro derecho

En el interior del cilindro el campo producido por él será nulo:

$$\vec{E}_2 = 0, \quad si \quad d - a < x < d$$

Por otro lado, considerando la figura mostrada anteriormente, veremos que a para un cierto x que cumpla $0 < x < d - a$, la distancia del centro del cilindro derecho a x será $d - x$, de esta manera el campo eléctrico resulta ser:

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma a}{(d-x)\epsilon_0}\hat{i}$$

De esta manera, al superponer los campos eléctricos obtenidos, vemos que el campos resúltate es:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma a}{(d-x)\epsilon_0}\hat{i} & 0 < x < a \\ (\frac{\sigma a}{x\epsilon_0} + \frac{\sigma a}{(d-x)\epsilon_0})\hat{i} & a < x < d-a \\ \frac{\sigma a}{x\epsilon_0}\hat{i} & d - a < x < d \end{cases}$$

Ahora para calcular la diferencia de potencial δV entre los cilindros debemos calcular la integral y para esto utilizamos la trayectoria mas obvia: el camino sobre el eje x:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\
&= -\int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + -\int_a^{d-a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + -\int_{d-a}^d \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_0^a \frac{\sigma a}{(d-x)\epsilon_0} dx + \int_a^{d-a} (\frac{\sigma a}{x\epsilon_0} + \frac{\sigma a}{(d-x)\epsilon_0}) dx + \int_{d-a}^d \frac{\sigma a}{x\epsilon_0}\hat{i} \\
&= (-\frac{\sigma a}{\epsilon_0}(\ln(d-x)|_0^a)) + (\frac{\sigma a}{\epsilon_0}(\ln(x) - \ln(d-x)|_a^{d-a})) + (\frac{\sigma a}{\epsilon_0}((\ln(x)|_{d-a}^d))) \\
&= (\frac{-\sigma a}{\epsilon_0}\ln(\frac{d-a}{d})) + (\frac{2\sigma a}{\epsilon_0}\ln(\frac{d-a}{a})) + (\frac{-\sigma a}{\epsilon_0}\ln(\frac{d-a}{d})) \\
&= \frac{2\sigma a}{\epsilon_0}(\ln(\frac{d-a}{a}) - \ln(\frac{d-a}{d}))
\end{aligned}$$

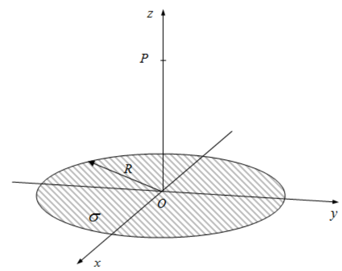
De donde se obtiene

$$\boxed{\Delta V = \frac{2\sigma a}{\epsilon_0}\ln(\frac{d}{a})}$$

Problema 33

El disco circular de radio R de la figura está cargado con una densidad $\sigma = \sigma_0(1 - \frac{R}{r})$, con $\sigma_0 > 0$, siendo r la distancia de un punto cualquiera del disco a su centro O.
a) Encuentre el potencial en el punto P sobre su eje($OP = R$).

b) ¿Hacia donde se moverá una carga puntual q, dejada en reposo en P?

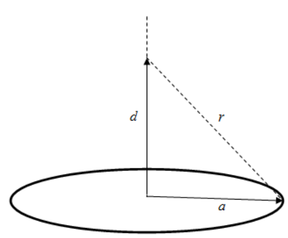


Solución:
a) Lo que haremos será considerar el potencial producido por un anillo de radio a y carga total q sobre su eje a una distancia d y luego, utilizando este resultado, dividiremos el disco en pequeños anillos y sumaremos los potenciales producidos por cada uno.
El potencial de un anillo lo podemos calcular utilizando

$$V = \int \frac{kdq}{r}$$

El valor de r lo obtenemos por pitagoras:

$$r = \sqrt{a^2 + d^2}$$



Esta distancia se mantiene constante y por lo tanto puede salir de la integral

$$V = \frac{k}{\sqrt{a^2 + d^2}} \int dq = \frac{kq}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

Ahora, considerare anillos del disco con carga dq. Del resultado anterior y considerando $d = R$ y $a = r$ se tendrá que

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

La carga dq se la podemos escribir como

$$dq = \sigma(r) \cdot dA$$

Como la densidad de carga depende de la distancia r tendremos que cada anillo del disco que consideremos tendrá igual densidad ya que cada elemento de él esta a igual distancia r del centro del disco. De esta manera considerare como dA el área de un alambre de ancho dr:

$$dA = 2\pi r dr$$

De esta manera obtenemos

$$dq = 2\pi\sigma_0(r - R)dr$$

El potencial de producido por este anillo será entonces:

$$dV = \frac{2k\pi\sigma_0(r - R)dr}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

Integrando desde $r = 0$ hasta $r = R$:

$$\begin{aligned}
V &= 2k\pi\sigma_0 \int_0^R \frac{(r - R)dr}{\sqrt{r^2 + R^2}} \\
&= 2k\pi\sigma_0 (\int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} dr - R \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2}} dr) \\
&= 2k\pi\sigma_0 ((\sqrt{r^2 + R^2}\Big|_0^R) - (\ln(\sqrt{r^2 + R^2} + r)\Big|_0^R)) \\
&= 2k\pi\sigma_0 (R\sqrt{2} - R - R\ln(R\sqrt{2} + R) + R\ln(R)) \\
&= 2k\pi\sigma_0 (R\sqrt{2} - R - R\ln(R(\sqrt{2} + 1)) + R\ln(R)) \\
&= 2k\pi\sigma_0 (R\sqrt{2} - R - R\ln(R) - R\ln(\sqrt{2} + 1)) + R\ln(R)) \\
&= 2k\pi\sigma_0 (R\sqrt{2} - R - R\ln(\sqrt{2} + 1)) \\
&= 2k\pi\sigma_0 R(\sqrt{2} - 1 - \ln(\sqrt{2} + 1))
\end{aligned}$$

Si consideramos $\sqrt{2} - 1 - \ln(\sqrt{2} + 1) \approx \frac{1}{2}$ resulta:

$$\boxed{V \approx -k\pi\sigma_0 R}$$

Podemos escribir este resultado en función de la carga total Q del disco. Esta carga la podemos calcular integrando sobre el disco de la expresión $dq = 2\pi\sigma_0(r - R)dr$

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^R 2\pi\sigma_0(r - R)dr \\
&= 2\pi\sigma_0((\frac{r^2}{2} - Rr)\Big|_0^R) \\
&= -\pi\sigma_0 R^2
\end{aligned}$$

De esta manera

$$V \approx \frac{Q}{-\pi\sigma_0 R^2} - k\pi\sigma_0 R$$

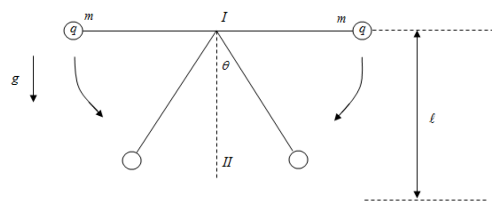
$$\boxed{V \approx \frac{kQ}{R}}$$

Como vemos, el potencial encontrado es igual al potencial que produce una carga puntual a una distancia R de ella.

b) Cada elemento de carga dq es negativa, luego el campo eléctrico será atrayente. Por simetría, el campo eléctrico apuntara en dirección del eje del disco y sentido hacia el centro y como la carga de prueba es positiva, esta se moverá también hacia el centro del disco.

Problema 34

Considere dos cargas puntuales de masa m y carga q atadas por una cuerda ideal de largo ℓ, inicialmente en reposo en la posición I(ver figura). Se sueltan y caen por la acción de la gravedad a la posición II, alcanzando un ángulo θ conocido. ¿Para que valor de la carga el sistema alcanza este ángulo θ?. Exprese su resultado en términos de ℓ, m y θ.



Solución:

Elegimos el cero de la energía gravitacional en la posición ℓ mas abajo de la posición inicial (ver figura). La energía potencial en la posición I será.

$$U_I = 2mg\ell + \frac{kq^2}{2\ell}$$

La energía potencial en la posición II

$$U_{II} = 2mg\ell(1-\cos(\theta)) + \frac{kq^2}{2\ell\sin(\theta)}$$

Como la energía se conserva, podemos hacer $U_I = U_{II}$ y por lo tanto

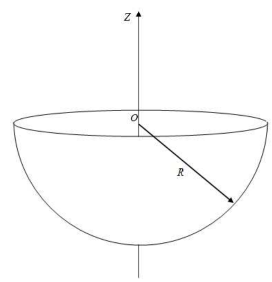
$$2mg\ell + \frac{kq^2}{2\ell} = 2mg\ell(1-\cos(\theta)) + \frac{kq^2}{2\ell\sin(\theta)}$$

Despejando q:

$$\boxed{q = \pm 2\ell\sqrt{\frac{mg\sin(\theta)}{k(\sec\theta - \tan(\theta))}}}$$

Problema 35

Sobre una capa semiesférica de radio R se tiene una distribución de carga uniforme σ. Calcule:
a) El potencial electrostático a lo largo del eje Z, para $z > 0$.
b) El campo eléctrico a lo largo del eje Z, para $z > 0$.
c) El campo eléctrico en el punto O.



Solución:

a) Consideramos el origen en O. Para calcular el potencial que produce toda la superficie sobre un punto $z\hat{k}$ tomaremos un elemento de carga dq de ella y calcularemos el potencial producido como:

$$dV = \frac{kdq}{r}$$

Donde r es la distancia desde dq hasta $z\hat{k}$.
Posteriormente, para calcular el potencial total, integramos dV sobre toda la superficie.
Como vimos en la ayudantia 2, la carga dq la podemos expresar como el producto entre la densidad superficial de carga σ por el area que ocupa esa carga que llamamos dA y vimos que

$$dA = R^2 sin(\gamma)d\gamma d\theta$$

La distancia r en este caso la obtenemos utilizando el teorema del coseno:

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2zR\cos(\gamma)$$

Así, el potencial producido por dq es

$$dV = \frac{k\sigma R^2 \sin(\gamma)d\gamma d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR\cos(\gamma)}}$$

Luego, integramos esta expresion eligiendo los limites de integracion de tal forma de recorrer la superficie:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{k\sigma R^2 \sin(\gamma)d\gamma d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR\cos(\gamma)}}$$

Esta integral se puede reducir a

$$V = 2k\pi\sigma R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2zR\cos(\gamma)}}$$

Para resolver esto, debemos saber calcular la integral de la forma:

$$\int \frac{\sin\gamma}{\sqrt{A+B\cos(\gamma)}}d\gamma$$

Hacemos el cambio de variable $u^2 = A + B\cos(\gamma)$. De esta manera $d\gamma = \frac{2udu}{-B\sin(\gamma)}$. Y asi

$$\int \frac{\sin\gamma}{\sqrt{A+B\cos(\gamma)}}d\gamma = -\frac{2}{B}\int 1du = -\frac{2}{B}u$$

Como $u = \sqrt{A+B\cos(\gamma)}$:

$$\int \frac{\sin\gamma}{\sqrt{A+B\cos(\gamma)}}d\gamma = -\frac{2}{B}\sqrt{A+B\cos(\gamma)}$$

Para el calculo de potencial tenemos que $A = R^2 + z^2$ y $B = -2zR$. Reemplzando en la integral:

$$\int \frac{\sin\gamma}{\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos(\gamma)}}d\gamma = \frac{1}{zR}\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos(\gamma)}$$

Ahora, podemos calcular el integral sin dificultades:

$$\boxed{V(z) = \frac{2k\pi\sigma R^2}{zR}(\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos(\gamma)}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}) = \frac{2k\pi\sigma R}{z}(z+R-\sqrt{R^2+z^2})}$$

b) Ahora que tenemos el potencial eléctrico en $z\hat{k}$, el campo eléctrico se puede calcular como:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Vemos que el potencial esta solo en funcion de la variable z y por lo tanto tendremos que el campo electrico es:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\hat{k}$$

Derivamos $V(z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dz} &= 2k\pi\sigma R\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}(z+R-\sqrt{R^2+z^2})) \\
&= 2k\pi\sigma(\frac{-1}{z^2}(z+R-\sqrt{R^2+z^2}) + \frac{1}{z}(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}2z)) \\
&= 2k\pi\sigma(\frac{-1}{z} - \frac{R}{z} - \frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}) \\
&= -2k\pi\sigma R^2(\frac{\sqrt{R^2+z^2}-R}{z^2\sqrt{R^2+z^2}})
\end{aligned}$$

De esta manera el campo electrico en el punto $z\hat{k}$ será:

$$\boxed{\vec{E}(z) = 2k\pi\sigma R^2 (\frac{\sqrt{R^2+z^2}-R}{z^2\sqrt{R^2+z^2}})\hat{k}}$$

c) Vemos que la expresion anterior esta indefinida en $z = 0$. Sin embargo, podemos acercarnos a O tanto como queramos y calcular el valor del campo eléctrico.Primero vemos que la expresion del campo electrico se puede reescribir como:

$$2k\pi\sigma R^2 (\frac{1-\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}}{z^2})$$

Luego, tomaremos el limite cuando $z \to 0$ de la funcion $E(z)\hat{k}$):

$$\lim_{z\to 0} E(z) = 2k\pi\sigma R^2 \lim_{z\to 0} (\frac{1-\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}}{z^2})$$

Como vemos, este limite es de la forma $\frac{0}{0}$ por lo que utilizaremos L'Hôpital para calcularlo:

$$\begin{aligned} 2k\pi\sigma R^2 \lim_{z\to 0} (\frac{1-\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}}{z^2}) &= 2k\pi\sigma R^2 \lim_{z\to 0} (\frac{(1-\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}})'}{(z^2)'}) \\ &= 2k\pi\sigma R^2 \lim_{z\to 0} (\frac{R(z^2+R^2)^{-\frac{3}{2}}}{2z}) \\ &= 2k\pi\sigma R^2 \cdot \frac{1}{2R^2} \\ &= k\pi\sigma \end{aligned}$$

De esta manera $\vec{E}(0) = k\pi\sigma\hat{k}$

Capítulo 5

Conductores

Problema 36
Se tienen dos esféras conductoras de radios r_1, r_2 y cargas q_1, q_2 separadas por una gran distancia $d >> r_1, r_2$. Si ambas se conectan a través de un cable conductor (despreciable, que sirve sólo para transportar carga de una a otra), encuentre las densidades de carga superficiales de cada una (en función de las variables conocidas) una vez que el sistema alcanza el equilibrio.

Solución:
Dado que el sistema está en una región acotada del espacio, podemos tomar como punto de referencia del potencial el infinito e igualar el potencial a cero allí, es decir, $V(+\infty) = 0$. Así, el potencial sobre las superficies de las esferas conductoras es

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1}, V_2 = k\frac{q_2}{r_2}$$

donde hemos supuesto que el potencial de una esfera no es afectado por el de la otra (o más bien es afectado de forma despreciable), dado que están muy muy separada, es decir, $d >> r_1, r_2$, y tampoco el campo de una esfera redistribuye la carga de la otra. Por conservación de carga, si $(q_1)_f, (q_2)_f$ son las cargas en cada esfera una vez alcanzado el equilibrio, tenemos que

$$q_1 + q_2 = (q_1)_f + (q_2)_f$$

Al alcanzar el equilibrio, es decir, cuando deja de haber transferencia de cargas entre las esferas, tenemos que la diferencia de potencial eléctrico entre ambas es nulo, es decir,

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ k\frac{(q_1)_f}{r_1} &= k\frac{(q_2)_f}{r_2} \\ \frac{4\pi(r_1)^2(\sigma_1)_f}{r_1} &= \frac{4\pi(r_2)^2(\sigma_2)_f}{r_2} \\ \Longrightarrow \frac{(\sigma_2)_f}{(\sigma_1)_f} &= \frac{r_1}{r_2} \end{aligned}$$

De esto vemos que en general, las regiones en la superficie de un conductor con menor radio de curvatura (puntas) concentran una mayor densidad superficial de carga, por lo cual el

campo eléctrico cerca de ellas (en su exterior) es más fuerte que en regiones con menor radio de curvatura.
Usando la relación encontrada en la ecuación de conservación de carga, obtenemos

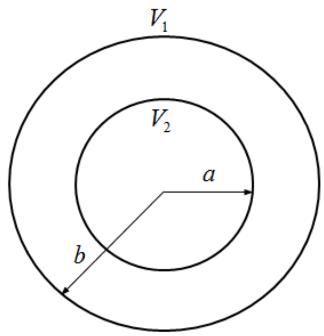
$$
\begin{aligned}
(q_1)_f + (q_2)_f &= q_1 + q_2 \\
4\pi(r_1)^2(\sigma_1)_f + 4\pi(r_2)^2(\sigma_2)_f &= q_1 + q_2 \\
4\pi r_1(\sigma_1)_f(r_1 + r_2) &= q_1 + q_2 \\
\Longrightarrow (\sigma_1)_f &= \frac{1}{4\pi r_1}\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} \\
(\sigma_2)_f &= \frac{1}{4\pi r_2}\frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2}
\end{aligned}
$$

Problema 37

Dos cascaras esféricas conductoras concéntricas de radios $a < b$ tienen potenciales V_1 y V_2, respectivamente.

a) Calcule la carga de cada esfera.

b) Ahora traemos desde el infinito una carga Q distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera de radio $c > b$, concéntrica con las anteriores. ¿Cuánto trabajo es necesario realizar para colocar dicha carga?



Solución:

Definimos como Q_1 y Q_2 las cargas de la esfera con potencial V_2 y V_2, respectivamente.

Como ya hemos visto en ayudantias anteriores, el campo electrico producido por cada cascara se puede calcular utilizando ley de gauss utilizando como superfiecie gaussiana una cascara esferica con radio $a < r < b$. La carga encerrada por esta superficie es la aportada por la cascara de radio a, es decir, Q_1 por lo tanto:

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Pero $\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E4\pi r^2$. De esta manera el campo electrico(que ya hemos visto que tiene direccion radial) es:

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Ahora, la diferencia de potencial entre ambas supercies es:

$$V_2 - V_1 = -\int_b^a \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$$

Con esto, podemos obtener la carga Q_1:

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 (V_2 - V_1)\frac{ab}{b-a}$$

Ahora, calcularemos el campo electrico a una distancia $r > b$ utilizando ley de Gauss. Elegimos una como superficie gaussiana una cascara de radio $r > b$ y procedemos de igual forma. Lo que debemos considerar en este caso, es que la caga encerrada por esta superficie es $Q_1 + Q_2$. De esta manera vemos que:

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Con esto, podemos cacular el potencial en b:

$$V_2 = -\int_{\infty}^{b} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

De esta manera, la carga de cascara exterior será:

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 b(V_1 + (V_2 - V_1)\frac{ab}{a-b})$$

b) Para calcular el trabajo total, consideraremos que las cargas que componen la cascara de radio $c > b$ las estamos trayendo desde el infinito hasta una distanica c. Claramente, el trabajo necesario para la cada carga dq contenida en la cascara sera el mismo. Este trabajo se calcula como

$$dW = dqV(c)$$

De esta manera, el trabajo total será simplemente

$$W = QV(c)$$

. Lo que tenemos que hacer es calcular el potencial en $r = c$ que es directamente

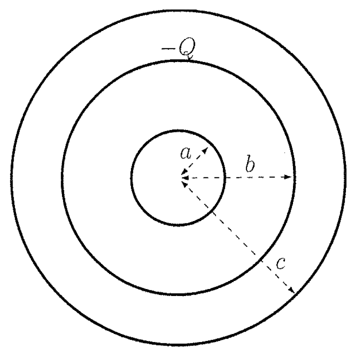
$$V(c) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c}$$

Asi,

$$W = \frac{Q(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0}$$

Problema 38
Tres cascaras esfericas conductoras concetricas muy delgadas poseen radios a, b y c, respectivamente, siendo $a < b < c$. Inicialmente la cascara interior esta descargada, la del medio posee una carga total negativa $-Q$ y la externa de carga total positiva $+Q$.

(a) Encuentre el potencial electrico en cada una de las cascaras conductoras.
(b) Si las cascaras interior y exterior son conectadas mediante un alambre que esta aislado al pasar por la cascara central. ¿Cual es ahora el potencial electrico de cada una de las cascaras?¿Cual es la cascara en cada una de las cascaras?



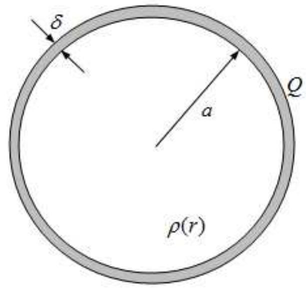
Solucion

Problema 39

Una cascara esférica conductora de radio a y espesor $\delta \gg a$ contiene carga neta Q. Se distribuye una carga q en el volumen interior del cascaron de radio a(un aislante en la parte interior del cascaron impide que esta densidad de carga se pase al conductor). Nos dicen que el campo eléctrico en el interior del cascaron esta dado por

$$\vec{E} = K(\frac{r}{a})^4 \hat{r}$$

Donde K es un constante por determinar y $\hat{r}$ es el vector unitario radial. Se pide encontrar:
a) La densidad de carga $\rho(r)$ en el volumen interior del cascaron.
b) Las densidades de cargas superficiales al interior y al exterior del cascaron.
c) El potencial electrostático en todo el espacio.



Solución:
a) La ley de gauss se puede escribir en su forma mas comun como:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Sin embargo, se puede utlizar tambien la forma diferencial de la ley de Gauss que establece:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{p(r)}{\epsilon_0}$$

Como vemos, el campo electrico esta solo en funcion de r, de esta manera tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E(r)) \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 K(\frac{r}{a})^4) \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\frac{K r^6}{a^4}) \\
&= \frac{6 K r^3}{a^4}
\end{aligned}$$

De esta manera, la densidad de carga en el interior del cascaron será:

$$\rho(r) = \frac{6 \epsilon_0 K r^3}{a^4}$$

Ahora, debemos determinar la constante K. Sabemos que la carga total almacenada en el interior del cascaron es q, por lo tanto se va a cumplir la relacion:

$$
\begin{aligned}
q &= \int \rho(r)dV \\
&= 4\pi \int_0^a \frac{6\epsilon_0 K r^3}{a^4} 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{24\epsilon_0 K}{a^4} \left.\frac{r^6}{6}\right|_0^a) \\
&= 4\pi a^2 \epsilon_0 K
\end{aligned}
$$

De esta manera

$$K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Así, podemos escribir la densidad de carga en funcion de la carga total almacenada:

$$\rho(r) = \frac{3}{2}\frac{qr^3}{\pi a^6}$$

b) Sabemos que en el interior de un cascaron la carga neta es nula. Asi si consideramos una superficie esferica con radio $r = a + \alpha\delta$, con $0 < \alpha < 1$, veremos que para que se mantenga nula la carga, el conductor induce una carga $-q$ en el interior del conductor. De esta manera, la densidad de carga en la superficie interior del conductor es:

$$\sigma_{int} = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Con esto y utilizando la conservacion de la carga vemos que en la superficie exterior se tendra una carga $Q+q$. Con este resultado podemos calcular la densidad de carga superficial exterior:

$$\sigma_{ext} = \frac{Q+q}{4\pi a^2}$$

Donde hemos despreciado δ.
c) Para saber potencial en todo el espacio debemos saber el campo eléctrico. Para la region interior ya tenemos el campo electrico:

$$\vec{E}_{int} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\frac{r}{a})^4\hat{r}, \quad para \quad r < a$$

En el exterior del conductor tenemos tenemos que el campo electrico es simplemente:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad si \quad r > a$$

Asi el potencial para una region en que $r > a$ es:

$$V(r) = -\int \vec{E}_{ext} d\vec{r} = -\frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ahora, para la regio interior $(r < a)$ el potencial lo calculamos como:

$$\boxed{V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{r} + -\int_{b}^{r} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r}, \quad si \quad r > a}$$

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_{\infty}^{b} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{r} + -\int_{b}^{r} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{20\pi a^6 \epsilon_0}(r^5 - a^5) \end{aligned}$$

Asi, se tiene que

$$\boxed{V(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{20\pi a^6 \epsilon_0}(r^5 - a^5), \quad si \quad r < a}$$

Problema 40
Calcule el campo eléctrico producido por una distribución de carga $\rho(r)$ tal que el potencial que esta distribución produce esta dado por

$$V(r) = q\frac{e^{-\lambda r}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Luego, encuentre la distribución de carga $\rho(r)$.

Solución:
Tenemos el potencial producido por la distribución de carga $\rho(r)$ y vemos a la vez que este potencial esta en función de r, por lo que el potencial tiene simetría esférica. Ahora, utilizando el hecho de que

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Podemos encontrar fácilmente el campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}e^{-\lambda r}(1+\lambda r)\hat{r}$$

Este resultado nos permite encontrar sin dificultad la densidad de carga. Esto se hace utilizando la forma diferencial de la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Tenemos que el campo es radial y por lo tanto $\vec{E} = E\hat{r}$, de esta manera

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E(r)) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}(-\lambda e^{-\lambda r}(1+\lambda r) + \lambda e^{-\lambda r}) \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\lambda^2 e^{-\lambda r}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\rho(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{r}\lambda^2 e^{-\lambda r}$$