Procedimiento general para hallar coord. normales

$\Downarrow$

Desacoplan EDO's (Ec. de movimiento)

Sea un sistema de N grados de libertad

$\Downarrow$

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \hat{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \hat{K} \mathbf{q}$$ (L es una forma cuadrática)

$\Downarrow$

(i) $$\hat{M}\ddot{\mathbf{q}} + \hat{K}\mathbf{q} = 0$$ (Ec. de movimiento)

$\Downarrow$

Utilizando el ansatz $\mathbf{q} = \mathbf{A}\cos(\omega t)$

$\Downarrow$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q}.$$

$\therefore$ se tiene que $\hat{K}\, q\!\!\!/ = \omega^2 \hat{M}\, q\!\!\!/$ (A2)

$$\Downarrow$$

$$\hat{M}^{-1}\hat{K}\, q\!\!\!/ = \omega^2\, q\!\!\!/ \qquad (ii)$$

Un propleme de valores propios $\longrightarrow$ Se debe hallar $\longrightarrow$ Autovectores

$\longrightarrow$ Autovalores

$\downarrow$

$\omega_i^2 \ (i = 1, \ldots, N)$

(frec. de los modos normales)

<u>Objetivo</u> : Diagonalizar $\hat{M}^{-1}\hat{K}$

$\Downarrow$

Hallar la transformación que lo hace $\Longrightarrow$ $\hat{U}$ (cambio de coord.)

$\Downarrow$

$\hat{U}\hat{M}^{-1}\hat{K}\hat{U}^{T} = \hat{D}^2$

M

donde $\hat{D}^2 = \begin{pmatrix} w_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_N^2 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal

A3

¿Cómo se construye $\hat{U}$?

$\Downarrow$

1) Se calculan los autovectores de $\hat{M}^{-1}\hat{K}$
2) Se normalizan (producto interno debe ser 1)
3) $\hat{U}$ se construye tal que las filas de $\hat{U}$ sean los autovectores normalizados de $\hat{M}^{-1}\hat{K}$

$\Downarrow$

Si $\hat{U}$ se ha hallado, lo siguiente debe cumplirse:

$$\hat{U}\hat{U}^T = \hat{U}^T\hat{U} = \hat{\mathbb{1}}$$

$\Downarrow$

Esto es $\hat{U}^T = \hat{U}^{-1}$

Volviendo a la ecuación de movimiento (i)

$$\hat{M}^{-1} / \quad \hat{M}\ddot{q\!\!\!/\!\!/} + \hat{K}q\!\!\!/\!\!/ = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U} / \quad \ddot{q\!\!\!/\!\!/} + \hat{M}^{-1}\hat{K}q\!\!\!/\!\!/ = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}\ddot{q\!\!\!/\!\!/} + \hat{U}\hat{M}^{-1}\hat{K}q\!\!\!/\!\!/ = 0$$

$$\hat{\mathbb{I}} = \hat{U}^{-1}\hat{U}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}\ddot{q\!\!\!/\!\!/} + \hat{U}\hat{M}^{-1}\hat{K}\hat{U}^{-1}\hat{U}q\!\!\!/\!\!/ = 0$$

pero $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{T}$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}\ddot{q\!\!\!/\!\!/} + \underbrace{\hat{U}\hat{M}^{-1}\hat{K}\hat{U}^{T}}_{\hat{D}^2}\hat{U}q\!\!\!/\!\!/ = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}\ddot{q\!\!\!/\!\!/} + \hat{D}^2\hat{U}q\!\!\!/\!\!/ = 0$$

<u>Def.</u> $\eta = \hat{U} q \Rightarrow \ddot{\eta} = \hat{U} \ddot{q}$

$\eta \downarrow$ Coord. normales

$\therefore$ la ec. de movimiento es:

$$\ddot{\eta} + \hat{D}^2 \eta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix} = 0$$

Ecs. desacopladas

La ec. de movimiento para la i-ésima componente es:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0$$

<u>con C.I.</u>: $\eta_i(0)$ y $\dot{\eta}_i(0)$

$\textcircled{A_6}$

y cuya solución es:

$$\eta_i(t) = \eta_i(0)\cos(w_i t) + \frac{\dot{\eta}_i(0)}{w_i}\operatorname{sen}(w_i t)$$

o matricialmente:

$$\underline{\eta}(t) = \cos(\hat{D}t)\,\underline{\eta}(0) + \hat{D}^{-1}\operatorname{sen}(\hat{D}t)\,\underline{\dot{\eta}}(0)$$

$$\Downarrow$$

pero

$$\underline{\eta}(t) = \hat{U}\,\underline{q}(t)$$

$$\underline{\eta}(0) = \hat{U}\,\underline{q}(0)$$

$$\underline{\dot{\eta}}(0) = \hat{U}\,\underline{\dot{q}}(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}\,\underline{q}(t) = \cos(\hat{D}t)\,\hat{U}\,\underline{q}(0) + \hat{D}^{-1}\operatorname{sen}(\hat{D}t)\,\hat{U}\,\underline{\dot{q}}(0)$$

$$\Downarrow \quad \hat{U}^{-1} = \hat{U}^{T}\,!!!$$

$$\boxed{\underline{q}(t) = \hat{U}^{T}\cos(\hat{D}t)\,\hat{U}\,\underline{q}(0) + \hat{U}^{T}\hat{D}^{-1}\operatorname{sen}(\hat{D}t)\,\hat{U}\,\underline{\dot{q}}(0)}$$

SOLUCIÓN FINAL