Ejercicios II

1.–

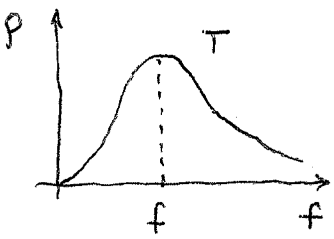
$$\rho(f,T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{hf/kT}-1}$$ (energía por unidad de volumen)

integrando en f

$$\int_0^\infty \rho(f,T)\,df = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{f^3\,df}{e^{hf/kT}-1}.$$ definiendo $u = \frac{hf}{kT}$; $du = \frac{h}{kT}df$

$$= \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{u^3\,du}{e^u-1} = \sigma T^4 \text{ //}$$

2.–



Derivando respecto a f y exigiendo que la derivada sea cero

$$\frac{d\rho}{df} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relación entre } f_{max} \text{ y } T.$$

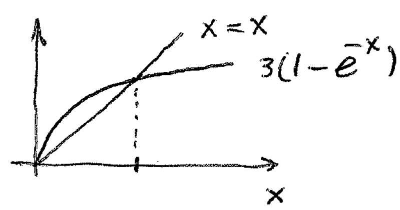
Explícitamente,

$$\frac{d\rho}{df} = \frac{24\pi f^2 h}{c^3}\left(\frac{1}{e^{hf/kT}-1}\right) - \frac{8\pi h f^3}{c^3}\frac{e^{hf/kT}}{(e^{hf/kT}-1)^2}\left(\frac{h}{kT}\right) = 0$$

o bien $$\frac{8\pi h f^2}{c^3}\left(\frac{1}{e^{hf/kT}-1}\right)\left[3 - \frac{hf}{kT}\left(\frac{e^{hf/kT}}{e^{hf/kT}-1}\right)\right] = 0$$

usando $x = hf/kT$

$$3(1-e^{-x}) = x$$



$$\Longrightarrow \quad x \simeq 2{,}821$$

$$\Longrightarrow \quad f_{max} \propto \frac{kT}{h}(2.821) \propto T \text{ //}$$

3.– En un horno $p = \frac{1}{3}u$. A partir de

$$dU = TdS - pdV$$

usando $u = U/V$, $s = S/V$ obtenemos

$$du = \frac{dU}{V} - \frac{U}{V^2}dV \Rightarrow dU = Vdu + udV$$

$$dS = dsV + sdV$$

luego

$$Vdu + udV = T(dsV + sdV) - \frac{1}{3}u\,dV$$

$$du = Tds + \frac{1}{V}\left(Ts - \frac{4}{3}u\right)dV$$

pero u y s sólo dependen de T y no de V, así

$$Ts = \frac{4}{3}u \Rightarrow \frac{du}{ds} = T = \frac{\frac{4}{3}u}{s}$$

entonces

$$3\frac{du}{u} = 4\frac{ds}{s} \Rightarrow d\ln u^3 = d\ln s^4$$

$$\Rightarrow \frac{u^3}{s^4} = cte \Rightarrow u = cte\, s^{4/3} \,//$$

pero ya vimos que $s = \frac{4}{3}\frac{u}{T}$. Reemplazando

$$u = cte \cdot \left(\frac{4}{3}\frac{u}{T}\right)^{4/3} \Rightarrow \frac{u}{u^{4/3}} = cte'\, T^{-4/3} \Rightarrow u^{-1/3} = cte'\, T^{-4/3}$$

$$\Rightarrow u \propto T^4 \,//$$

4.– Las ondas estacionarias en el horno tienen λ's tal que $\lambda^3 \propto V$. Además, como $PV = \frac{1}{3}U \Rightarrow dU = -PdV$ $\Rightarrow p^{3/4}V = cte$. Como la presión de radiación va $\propto T^4$ entonces $T^3 V = cte$. $\Rightarrow \lambda T = cte \Rightarrow f \propto T \,//$

5.– La condición de ondas estacionarias $\Rightarrow$

$$(k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{a}(l, m, n)$$

El # de modos entre f y $f+df$, $N(f)df$, es el volumen en el espacio k (en unidades de $(\pi/a)^3$) de una capa esférica de radio $k\left(=\frac{2\pi f}{c}\right)$ y ancho $\Delta k\left(=\frac{2\pi \Delta f}{c}\right)$ restringido a todos los k positivos y en el octante $\left(\times \frac{1}{8}\right)$.

$$N(f)df = \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{4\pi k^2 \Delta k}{(\pi/a)^3} = \frac{8V\pi f^2 \Delta f}{c^3} \quad //$$

6.– Un átomo se modela como un oscilador forzado ($f = 2\pi\omega$) y amortiguado (por la emisión). La carga acelera $\Rightarrow$ pierde energía así

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} = eE\cos(\omega t)$$

- Amortiguación pequeña

$$\rightarrow \quad \dddot{x} = \omega^2 \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + m\omega_0^2 x - \gamma\dot{x} = eE\cos(\omega t)}$$

Solución:

$$A = \frac{eE}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \qquad U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

(energía oscilador)

- Para un oscilador

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \cdot \frac{e^2E^2}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

para $\omega \simeq \omega_0$ podemos escribir

$$U \simeq \frac{1}{8m} \frac{e^2}{(\omega_0-\omega)^2 + (\gamma/2m)^2} E^2$$

integrando $\forall\ \omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\gamma/2m)^2} = +\frac{2\pi m e^2}{\gamma}$$

$$4\cancel{8}mU = \frac{\cancel{2}\pi \cancel{m} e^2}{\gamma} E^2$$

$$E^2 = \frac{4\gamma}{\pi e^2} U = \frac{4}{\pi e^2}\left(\frac{2e^2\omega^2}{3c^3}\right) U$$

$$= \frac{8U\omega_0^2}{3\pi c^3} \quad //$$

Luego
$$E^2 = \frac{8\omega_0^2}{3\pi c^3} U \,//$$

que sólo es la componente x del campo de radiación.
La ~~densidad de~~ energía de radiación es $\propto E^2/2$ que corresponde a la integral en ~~todas~~ un $\measuredangle$ sólido de la densidad de radiación $\rho(\omega,T)$

$$\frac{E^2}{2} \to 4\pi \rho(\omega,T)$$

Agregando el factor $\times 3$ (3 dimensiones) y pasando a f a través de $2\pi\omega_0 = f$

$$\rho(f,T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} U(f,T) \,//$$

7.- Usando
$$\rho(f,T) = \alpha f^3 e^{-\beta f/T} \Rightarrow U(f,T) = \frac{\alpha c^3 f}{8\pi} e^{-\beta f/T} = U_0 e^{-\beta f/T}$$

entonces
$$dU = U \frac{\beta f}{T^2} dT = T dS \Rightarrow dS = \frac{\beta f}{T^3} U dT$$

integrando
$$S = \beta f U_0 \int \frac{e^{-\beta f/T}}{T^3} dT \qquad x \equiv \frac{\beta f}{T}; \; dx = -\frac{\beta f}{T^2} dT = -\beta f \left(\frac{x}{\beta f}\right)^2 dT$$

$$S = -\beta f U_0 \int e^{-x} \left(\frac{x}{\beta f}\right)^3 \frac{\beta f}{x^2} dx$$

$$S = -\frac{U_0}{\beta f} \int e^{-x} x \, dx = +\frac{U_0}{\beta f}\left(e^{-x}(1+x)\right)$$

$$S = \frac{U_0}{\beta f}\left[e^{-\beta f/T}\left(1 - \ln \frac{U}{U_0}\right)\right] = -\frac{U}{\beta f}\left[\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) - 1 \right] = -\frac{U}{\beta f}\left[\ln \frac{8\pi U}{\alpha c^3 f} - 1\right] //$$

8.-

$$W_N(m) = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}\, p^m q^{N-m}$$

donde $\sum_m W_N(m) = (p+q)^N = 1$.

(a)

$$\overline{m} = \sum_{m=0}^{N} W_N(m)\, m = \sum_{m=0}^{N} \frac{N!}{m!\,(N-m)!}\, m p^m q^{N-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \frac{N!}{m!\,(N-m)!}\, p \frac{\partial}{\partial p}(p^m)\, q^{N-m} = p\frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_m W_N(m)\right)$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\left[(p+q)^N\right] = p\,N(p+q)^{N-1} = Np \;//$$

(b)

$$\overline{m^2} = \sum_{m=0}^{N} W_N(m)\, m^2 = p\frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{m=0}^{N} W_N(m)\, m\right)$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{m=0}^{N} W_N(m)\right)\right) = p\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial}{\partial p}\left((p+q)^N\right)\right)$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\left(pN(p+q)^{N-1}\right) = p\left(N(p+q)^{N-1} + pN(N-1)(p+q)^{N-2}\right)$$

$$= p\left(N + pN(N-1)\right) = pN\left(1 + p(N-1)\right)$$

así

$$\overline{\Delta m^2} = \overline{(m-\overline{m})^2} = \overline{m^2} - \overline{m}^2 = Np$$

$$= Npq \;//$$

(c)
$$\ln W_N(m) \simeq \ln N! - \ln m! - \ln(N-m)! + m\ln p + (N-m)\ln q$$

Si para N (y m) grande $W_N(m)$ se aproxima a una gaussiana, entonces en el máximo de $W_N(m)$ (o de $\ln W_N(m)$) la derivada debe ser cero. Usando stirling

$$\frac{d\ln W_N(m)}{dm} \simeq -\ln m + \ln(N-m) + \ln p - \ln q$$

igualando a cero para un valor $\langle m\rangle$ encontramos

$$\ln\left[\frac{(N-\langle m\rangle)p}{mq}\right] = 0$$

o

$$\langle m\rangle = Np \qquad \text{(ver resultado parte (a))}.$$

Al derivar por segunda vez

$$\frac{d^2\ln W_N(m)}{dm^2} \simeq -\frac{1}{m} - \frac{1}{N-m}$$

que evaluado en $m = \langle m\rangle$ nos da el coeficiente:

$$-\frac{1}{Np} - \frac{1}{N-Np} = -\frac{1}{Npq} \qquad \text{(ver resultado (b))}$$

considerando la expansión de $\ln W_N(m)$ a segundo orden

$$\ln W_N(m) \simeq \ln W_N(\langle m\rangle) + \left.\frac{d\ln W_N(m)}{dm}\right|_{\langle m\rangle}(m-\langle m\rangle) + \left.\frac{1}{2}\frac{d^2\ln W_N(m)}{dm^2}\right|_{\langle m\rangle}(m-\langle m\rangle)^2$$

obtenemos app.

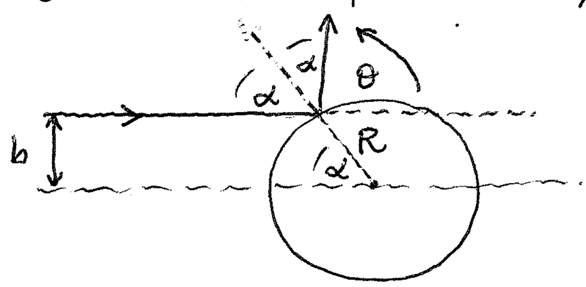
$$W_N(m) \simeq \overline{W}\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{(m-Np)^2}{2Npq}\right] \quad //$$

9.- $U = \frac{3}{2} k_B T$ y $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}$ entonces

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{3k_B}{2U}\right)$$

$$= -\frac{3k_B}{2}\frac{1}{U^2} \;//$$

10.- En el caso de la esfera dura, el haz incidente se desvía un $\measuredangle\ \theta$ donde



$$\theta = \pi - 2\alpha$$

El parámetro de impacto b está relacionado con θ de acuerdo a la figura a través de

$$b = R\sin\alpha = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\frac{\theta}{2}$$

luego la sección diferencial transversal $D(\theta)$ se calcula a partir de

$$D(\theta) \equiv \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

entonces

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2}R\sin\frac{\theta}{2}$$

finalmente

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left(\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R\cos\theta/2}{\sin\theta}\,\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{R^2}{4} \;//$$

11.- Asumiendo un momento angular cuantizado

$$L = knh = mvr$$

para un electrón en una órbita circular

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

los radios permitidos son

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} n^2 k^2 h^2 \qquad (*)$$

luego las energías permitidas son

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2r_n} = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2k^2h^2}\frac{1}{n^2}$$

Así para n muy grande

$$E_{n+1} - E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2k^2h^2}\left[\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] \simeq \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2k^2h^2}\cdot\frac{2}{n^3} \qquad (\star)$$

Esta energía DEBERÍA ser igual a $hf = h\left(\frac{v}{2\pi r}\right)$.
Como $mv_n r_n = nkh \Rightarrow hf = nkh^2/2\pi m r_n^2$ entonces de $(*)$

$$E_{n+1} - E_n = hf = \frac{nkh^2}{2\pi m r_n^2} = \frac{nkh^2}{2\pi}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{n^4k^4h^4} \qquad (\cdot)$$

igualando $(\star)$ con $(\cdot)$ obtenemos

$$k = \frac{1}{2\pi} \quad //$$