Universidad de Valparaíso
CHILE

Tarea Voluntaria IV
MMF II
Licenciatura en Física - 2020

Como ya es sabido, el bracket se ha definido mediante la integral divergente descrita a continuación:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,dx \equiv \langle\alpha\rangle\,.$$

Podemos construir estructuras aún más generales, así de manera parecida al bracket podemos definir a los cuasibrackets, los cuales corresponden a las siguientes formas integrales:

$$\langle\alpha\rangle_A \equiv \int_A^\infty x^{\alpha-1}\,dx \quad \text{(El cuasibracket inferior)}$$

$$\langle\alpha\rangle^B \equiv \int_0^B x^{\alpha-1}\,dx \quad \text{(El cuasibracket superior)}$$

A partir de estas nuevas estructuras:

1. (30%) Halle la serie de brackets que representa a un cuasibrackets inferior.
2. (30%) Halle la fórmula que transforma un cuasibracket inferior en uno superior.
3. (40%) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n\, F(n)\, x^{\alpha n+\beta-1}$, halle la serie de brackets de la integral $J = \int_0^B f(x)\;dx$.

1).- $\langle \alpha \rangle_A = \int_A^\infty x^{\alpha-1}\,dx$; Hacemos el cambio de variable

$$Y = \frac{1}{X-A}$$

$$\Downarrow$$

$\sqcap$ si $X = A \Longrightarrow Y = \infty$

$X = \infty \Longrightarrow Y = 0$

$$\Downarrow$$

$$YX - YA = 1$$

$$\Downarrow$$

$$X = \frac{1+YA}{Y}$$

$$\Downarrow$$

$$dx = -\frac{dy}{Y^2}$$

$$\therefore \langle \alpha \rangle_A = \int_\infty^0 \frac{(1+YA)^{\alpha-1}}{Y^{\alpha-1}}\left(-\frac{1}{Y^2}\right)dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{(1+YA)^{\alpha-1}}{Y^{\alpha+1}}\,dy$$

hacemos luego la expansión del binomio:

$$\frac{1}{(1+YA)^{1-\alpha}} = \sum_{n_1}\sum_{n_2} \phi_{n_1,n_2}\, Y^{n_2} A^{n_2} \frac{\langle 1-\alpha+n_1+n_2 \rangle}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$\therefore \langle \alpha \rangle_A = \sum_{n_1}\sum_{n_2} \phi_{n_1,n_2}\, A^{n_2} \frac{\langle 1-\alpha+n_1+n_2 \rangle}{\Gamma(1-\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty Y^{n_2-\alpha-1}\,dy}_{\langle n_2-\alpha \rangle}$$

Finalmente la serie de brackets de $\langle \alpha \rangle_A$ es:

$$\langle \alpha \rangle_A = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \phi_{n_1, n_2} A^{n_2} \frac{\langle 1-\alpha+n_1+n_2 \rangle \langle n_2-\alpha \rangle}{\Gamma(1-\alpha)}$$

2).- $\displaystyle\int_0^B x^{\alpha-1}\, dx = \langle \alpha \rangle^B$ hacemos el cambio de variables:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{dy}{y^2}$$

$$\Downarrow$$

$\sqcap$ si $x=0 \Rightarrow y=\infty$

$x=B \Rightarrow y=\frac{1}{B}$

$$\therefore \langle \alpha \rangle^B = \int_\infty^{1/B} y^{1-\alpha}\left(-\frac{dy}{y^2}\right)$$

$$= -\int_\infty^{\frac{1}{B}} y^{-\alpha-1}\, dy$$

$$= \int_{1/B}^{\infty} y^{-\alpha-1}\, dy$$

$$\langle \alpha \rangle^B = \langle -\alpha \rangle_{\frac{1}{B}}$$ (transf. de cuasibrackets inferior $\leftrightharpoons$ superior)

3).- $f(x) = \sum_m \phi_m F(m)\, x^{\alpha m+\beta-1}$

Luego $J = \sum_m \phi_m F(m) \underbrace{\int_0^B x^{\alpha m+\beta-1}\, dx}_{\langle \alpha m+\beta \rangle^B}$

$$J = \sum_m \phi_m F(m) \langle \alpha m+\beta \rangle^B$$

$$= \sum_m \phi_m F(m) \langle -\alpha m-\beta \rangle_{\frac{1}{B}}$$

pero $\langle -\alpha m-\beta \rangle_{\frac{1}{B}} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \phi_{n_1,n_2} \left(\frac{1}{B}\right)^{n_2} \langle 1+\alpha m+\beta+n_1+n_2 \rangle \langle n_2+\alpha m+\beta \rangle$

Finalmente la serie de brackets de la integral $\int_0^B f(x)\,dx$ es:

$$J = \sum_m \sum_{n_1} \sum_{n_2} \phi_{n_1,n_2,m} F(m) \left(\frac{1}{B}\right)^{n_2} \langle 1+\alpha m+\beta+n_1+n_2 \rangle \langle n_2+\alpha m+\beta \rangle$$

Obs. $\binom{3}{2}$ formas posibles para evaluar la serie de brackets.