Facultad de Ciencias
ÁLGEBRA LINEAL
Año 2018
Prof. Mario Marotti

Nombre ………………………………………………………. **Nota** ……………

1ª. prueba parcial

24 de Abril de 2018

En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible

---

1. (a) ¿Es posible que un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas como el siguiente sea determinado? Justifique brevemente su respuesta antes de resolverlo. **(0.5 puntos)**

$$\begin{cases} x + \ \ y - 3z + \ \ t = 4 \\ 2x - y - 3z - 3t = 5 \\ x - 2y \qquad\quad - 4t = 1 \end{cases}$$

(b) Halle la solución general del sistema por escalerización (indicando el número de grados de libertad). **(1.0 puntos)**

2. (a) Encuentre todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ que cumplan $A^2 = I$ **(0.5 puntos)**

(b) Encuentre la matriz inversa A^{-1} de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ **(1.0 puntos)**

3. Dada la ecuación matricial $A.X = B$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ b \end{pmatrix}$$

(a) Halle los valores de "a" y/o "b" que hacen que el sistema sea indeterminado. ¿Puede el sistema ser incompatible? Justifique su respuesta. **(1.0 puntos)**

(b) Resolver el sistema en el caso $a = 1$, b = 1 por el método de Gauss-Jordan. **(0.5 puntos)**

4. (a) Defina **matriz ortogonal** y decida si la siguiente matriz lo es.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ **(0.5 puntos)**

(b) Demuestre que si una matriz cuadrada A satisface la ecuación:

$$A^2 - 3A + I = 0$$

entonces su inversa puede hallarse como:

$$A^{-1} = 3I - A$$ **(1.0 puntos)**

Ejercicio 1:

(a) No. No es posible. Al intentar escalerizarlo, y teniendo tres filas, tendremos a lo sumo tres pivotes. Queda por lo menos una variable libre (UN GRADO DE LIBERTAD)

$\Rightarrow$ O es indeterminado o es incompatible.

Otra forma de verlo: Rango $A \leq 3$ y las incógnitas son cuatro.

Hay por lo menos un grado de libertad.

(b)
$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 4 \\ 2x - y - 3z - 3t = 5 \\ x - 2y \quad - 4t = 1 \end{cases} \xrightarrow[\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = -2F_1 + F_2 \\ F'_3 = -F_1 + F_3}]{} \begin{cases} x + y - 3z + t = 4 \\ -3y + 3z - 5t = -3 \\ -3y + 3z - 5t = -3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 1x + y - 3z + t = 4 \\ -3y + 3z - 5t = -3 \end{cases}$$

Dos pivotes, cuatro incógnitas.

Grados de libertad: $4 - 2 = 2$

Grados de libertad

$\boxed{z = \alpha}$ $\boxed{t = \beta}$ $\Rightarrow y = \dfrac{-3 - 3\alpha + 5\beta}{-3}$

$\Rightarrow \boxed{y = 1 + \alpha - \frac{5}{3}\beta}$

$x + 1 + \alpha - \frac{5}{3}\beta - 3\alpha + \beta = 4 \Rightarrow \boxed{x = 3 + 2\alpha + \frac{2}{3}\beta}$

Solución general:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta . \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2:

$$\begin{pmatrix} a & 4 \\ -2 & b \end{pmatrix}$$

(a)
$$\begin{pmatrix} a & 4 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2-8 & 4a+4b \\ -2a-2b & b^2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a^2-8=1 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=+3} \text{ o } \boxed{a=-3}$$

$$b^2-8=1 \Rightarrow b^2=9 \Rightarrow \boxed{b=+3} \text{ o } \boxed{b=-3}$$

$$4a+4b=0 \Rightarrow \boxed{a=-b}$$

$$-2a-2b=0 \Rightarrow \boxed{a=-b}$$

Las matrices buscadas son: $\boxed{A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}$ o $\boxed{A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$

(b)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1=F_1 \\ F'_2=2F_1+F_2 \\ F'_3=F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1=F_1 \\ F'_2=F_2 \\ F'_3=-F_2+F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1=F_1 \\ F'_2=F_2-2F_3 \\ F'_3=F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F'_1=F_1-F_3 \\ F'_2=F_2 \\ F'_3=F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Se comprueba que $\boxed{A \cdot A^{-1}=I}$.

Ejercicio 3.

(a) Matriz del sistema:

¿Cuándo $\det A = 0$?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2a^2 + a^2 b - 4a^2$$

$$\boxed{\det A = a^2(b-2)}$$

$$\det A = 0 \iff \boxed{a=0} \text{ ó } \boxed{b=2}$$

Estudiamos cada caso

Si $\boxed{a=0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} bz = 2 \\ 4z = 4 \\ 2z = b \end{cases}$

Si $\boxed{a=0}$ y $\boxed{b=2} \Rightarrow \begin{cases} 2z = 2 \\ 4z = 4 \\ 2z = 2 \end{cases}$ $\boxed{z=1}$ x e y reales cualesquiera

SIST. INDETERMINADO

Si $\boxed{a=0}$ y $\boxed{b \neq 2} \Rightarrow$ Ecuaciones incompatibles

Sistema incompatible

Si $\boxed{a \neq 0}$ y $\boxed{b=2} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Una ecuación, comb. lineal de otras

Rango A = Rango A^* = 2 SIST. INDETERMINADO

Si $a \neq 0$, $b \neq 2$, $\Rightarrow$ A NO singular.

SIST. DETERMINADO

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'_3 = F_3]{\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = -F_1 + F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'_3 = -F_1 + F_3]{\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'_3 = -F_3]{\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F'_3 = F_3]{\substack{F'_1 = F_1 \\ F'_2 = F_2 - 3F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'_3 = F_3]{\substack{F'_1 = F_1 - F_3 \\ F'_2 = F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{x = 1}$ $\boxed{y = -1}$ $\boxed{z = +1}$

Ejercicio 4:

(a) Def: Una matriz es ORTOGONAL $\iff \boxed{A^{-1} = A^t}$

Deberá ser $\boxed{A.A^t = I}$

$$A^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A.A^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A.A^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Sí!

(b) Si $A^2 - 3A + I = 0$

$$A^{-1}.(A^2 - 3A + I) = A^{-1}.0$$

$$\underbrace{\underbrace{(A^{-1}.A)}_{I} A}_{A} - 3.A^{-1}.A + A^{-1}.I = 0$$

$$A - 3I + A^{-1} = 0$$

$$\boxed{A^{-1} = 3I - A}$$