Guia de ejercicios

FIS1231 - Física General Termodinámica

Prof. Germán Varas

Nota: *Los ejercicios aquí presentados fueron obtenidos de diferentes fuentes y tienen como propósito resumir algunos de los problemas que se evaluaran durante el semestre.*

1.- Gas ideal - Un recipiente cilíndrico de sección A está dividido en dos partes por un pistón horizontal de grosor y masa despreciable [Fig. 1(a)]. El compartimiento inferior contiene una cantidad de un gas monoatómico ideal a temperatura T_i. Se llena el compartimiento superior con agua hasta que sobrepase su límite. Suponga que el pistón y las paredes son adiabaticas. P_0 es la presión atmosférica, l_0 es la altura total del compartimiento y l_i es la altura del compartimiento inferior. Se calienta el gas de manera que toda el agua salga, encuentre:

- La temperatura final T_f del gas.
- La cantidad de calor ΔQ necesario para llevar a cabo la operación.

2.- Gas de Van der Waals monoatomico - Considere la siguiente ecuación:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

Esta es una ecuación empírica que representa el comportamiento de gases reales de una forma mas cercana a la ley del gas ideal al introducir dos constantes positivas a y b características del medio. Encuentre la energía interna $U = U(T, V)$ y la entropía $S = S(T, V)$.

3.- Entropia de una gas ideal - Demuestre que la entropía $S = S(T, V)$ de un gas ideal monoatómico se puede escribir como:

$$S = C_V \ln T + R \ln V + \text{const.}$$

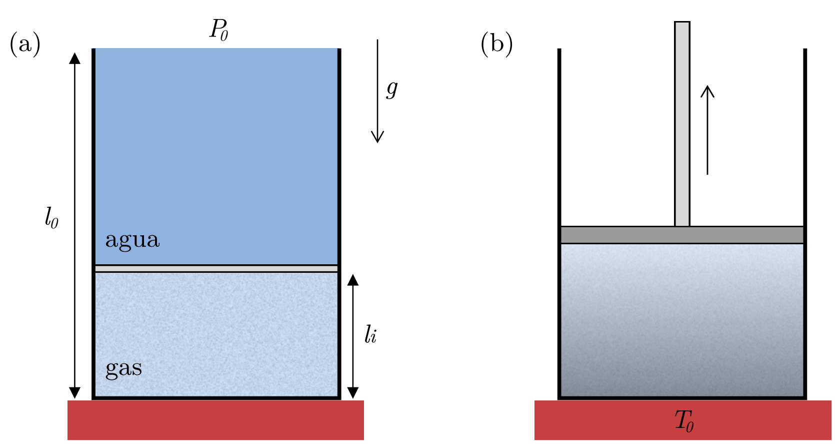

Figura 1

4.- Relación fundamental de un gas ideal

$$S = nr\left(\ln\frac{V}{n} + \frac{3}{2}\ln\frac{U}{n} + C\right)$$

donde C es una constante.

- Calcular en función de las variables (U, V, n) la temperatura T, la presión p y el potencial químico del gas μ.
- Deducir la energía interna U, la presión p y el potencial químico μ en función de las variables (T, V, n)
- Mostrar que p se puede representar en función de T y μ solamente bajo la forma:

  $$p = f(T)\exp\frac{\mu}{RT} \ ,$$

  encontrar la función $f(T)$.
- Calcular la capacidad térmica a volumen constante $C_v = (\partial U/\partial T)_{V,n}$ y la compresibilidad isotermica $\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial p)_{T,n}$.

5.- Relación fundamental - Sea un sistema de acoplamiento débil donde la entropía está dada por la expresión $S = a(n^2VU)^{1/4}$ (U, energía interna; V el volumen; n, número de moles)

- Determinar las dimensiones de la constante a.
- Calcular la temperatura T, la presión p, y el potencial químico μ del sistema en función de las variables (U, V, n)
- Verificar que T, p, μ son cantidades intensivas y establecer la igualdad que las une.
- Establecer la ecuación de estado $p = p(T, V, n)$. Trazar las isotermas que representan la variación de p en función de V, con un número de moles constantes, para dos temperaturas T_1 y $T_2 > T_1$.

6.- Presión exterior y peso de un pistón - Un recipiente cilíndrico vertical, asilado térmicamente del exterior, contiene n moles de un gas ideal. Se encuentra cerrado en la parte superior por un piston horizontal adiabático, de area A y masa m. Suponga constante la capacidad calórica a volumen constante del recipiente (cilindro y pistón) C_r y del gas C_v. Inicialmente el pistón está bloqueado; la presión, el volumen y la temperatura del gas valen respectivamente p_i, V_i, T_i. La atmósfera mantiene sobre él piston una presión constante p_0. Se libera el pistón que desliza libremente hasta una nueva posición de equilibrio.

- Determinar el trabajo W y el calor Q recibido por el sistema cuando se desplaza el pistón.
- Determinar la presión final p_f, la temperatura T_f y el volumen V_f del gas en el estado de equilibrio final.
- Repetir el problema, considerando ahora, el sistema constituido por el cilindro, el gas, el piston y *la tierra*.

7.- Caída de arena sobre un pistón - Un recipiente cilíndrico contiene n moles de un gas ideal [Fig. 2(a)]. Se encuentra cerrado por un pistón de masa m y area A que puede deslizar libremente sin roce. Un saco de arena se suspende a una altura h por sobre el fondo del cilindro. El conjunto se encuentra en una cámara de vacío. Llamaremos C a la capacidad calórica a volumen constante del sistema constituido por el recipiente, el pistón, la arena y el gas y supondremos que es constante en el rango de temperatura del problema. Inicialmente, la temperatura del conjunto vale T_0

- ¿Cuanto vale, en el estado inicial, la presión p_0 del gas y la distancia l_0 entre el piston y el fondo del recipiente?

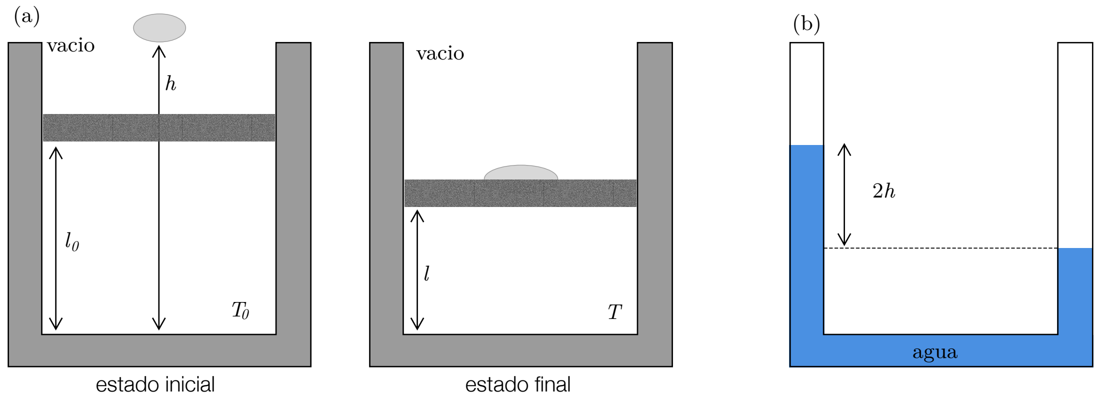

Figura 2

- Dejamos caer el saco de arena sobre el pistón que queda, posteriormente inmóvil, a una altura l. Cuanto vale la presión p, la distancia l y la temperatura T en el estado final. Verifique que, según el valor de h, el volumen del gas puede disminuir o aumentar
- Dejamos ahora caer la arena del saco, grano a grano, siempre desde una misma altura h. Determine el estado final. Compare la variación de entropía del sistema con la producida al dejar caer el saco lleno.

8.- Transformación de un gas ideal I - Un piston de sección A puede deslizar sin roce sobre un recipiente cilíndrico horizontal. Este se encuentra unido a un resorte de constante elástica k fijo a un lado de la pared. El pisto confina al lado izquierdo una muestra de gas ideal que tiene una capacidad térmica a volumen constante C_v independiente de la temperatura. El compartimiento de la derecha está vacío. En el estado inicial, el gas ocupa un volumen V_i a presión p_i y temperatura T_i. El sistema se calienta hasta que su volumen se doble.

- ¿Cual es la temperatura final T_f?
- ¿Cuánto calor recibió?

9.- Transformación de un gas ideal II - Un tubo en U cerrado, de sección A, se ubica verticalmente con sus dos brazos hacia arriba [Fig. 2(b]. Un tapón de agua *móvil* divide el tubo en dos compartimentos. Este contiene una gas ideal donde la capacidad térmica molar a volumen constante c_V está fija. En el estado inicial, el volumen V_0, la presión p_0 y la temperatura T_0 son las mismas en los dos compartimentos.

- Se calienta lentamente el gas de la derecha manteniendo constante la temperatura del gas de la izquierda, hasta establecer un desnivel de $2h$ entre las dos columnas. Suponemos que la temperatura del liquido no ha cambiado. ¿Cuál es entonces la temperatura T_f^d del gas de la derecha?
- Ahora aislamos térmicamente el gas de la izquierda. ¿Cuanto valen las temperaturas $T_f^{\prime i}$ y $T_f^{\prime d}$ de las dos muestras de gas?.
- Cuanto es el calor recibido por el conjunto de gas a lo largo de los procesos señalados

10.- Caída de un peso unido a un resorte - Un resorte de masa despreciable, fijo a la pared superior de un recipiente vacío, mantiene en su extremo inferior una masa m [Fig. 3(a)]. Definimos C como la capacidad térmica del objeto y C_l al largo constante del resorte; ademas, las características mecánicas del resorte (constante elástica y largo natural) no dependerá de la temperatura

- Nos interesamos al sistema constituido por el resorte y la masa; muestre que su entropía depende solo de la temperatura y entregue una expresión para la energía interna.

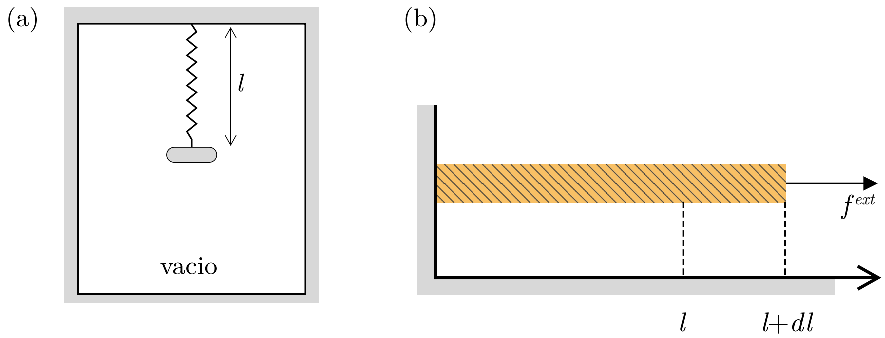

Figura 3: (a) sistema resorte-vacio, (b) tracción de barra metálica

- En el estado inicial, de temperatura T_i, una cadena mantiene el largo del resorte igual a l_0. Cortamos la cadena, determine la temperatura final T_f en el estado de equilibrio final.

11.- Tracción de una barra metálica - Una barra metálica se mantiene en tensión bajo una fuerza exterior f^{ext} [Fig. 3(b)]. Durante el equilibrio, su largo l y la fuerza f que ella misma ejerce en su extremo están relacionadas por la ecuación de estado $l = l(T, F)$. Para simplificar, supondremos que la sección A de la barra es constante. Ademas, supondremos conocido también su coeficiente de dilatación lineal $\lambda = (1/l)(\partial l/\partial T)_f$, su capacidad térmica a tracción constante $\bar{c}_f$ y su densidad ρ. Para las aplicaciones numéricas, tomaremos $A = 1\,\mathrm{mm}^2$ y las características del cobre a 300 K:

$$\lambda = 1{,}7\,10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1} \quad , \quad \bar{c}_f = 385\ \mathrm{JK}^{-1}\mathrm{kg}^{-1} \quad , \quad \rho = 8{,}96\,10^3\ \mathrm{kg.m}^{-3}$$

- Muestre que $(\partial S/\partial l)_f = \rho A \bar{c}_f/(T\lambda)$
- Escriba las diferenciales de $U(T, f)$ y $S(T, f)$; muestre que $(\partial S/\partial f)_T = -\lambda l$
- Introducimos los modulos de elasticidad isotermica y adibatica

$$\frac{1}{E_T} = -\frac{a}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_T \quad \text{y} \quad \frac{1}{E_S} = -\frac{a}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_S$$

  muestre que estos dos coeficientes satisfacen la relación $1/E_T - 1/E_S = \lambda^2 T/\bar{c}_f \rho$. Evalúe numéricamente la diferencia $(E_S - E_T)/E_T$ sabiendo que, para el cobre a 300 K, $E_T = 1{,}3\,10^{11}$ Pa.
- Si aumentamos la fuerza aplicada por un δf^{ext} de forma adiabatica y reversible. ¿Cuánto es la variación de temperatura provocada?
- ¿Cuanto debe valer la fuerza aplicada a la barra para que su largo no cambie cuando elevamos la temperatura un δt?

12.- Enfriamiento de un sólido - Para enfriar un trozo de metal A que se encuentra inicialmente a temperatura T_i lo sumergimos en un lago a temperatura T_0[1] y suponemos su capacidad térmica a presión constante C_p independiente de la temperatura.

- Calcule la cantidad de calor recibida por A. Determine la variación de entropía del metal y del lago. Verifique la que la variación de entropía del sistema total (metal + lago) es positiva.
- Enfriamos ahora el metal A sumergiéndolo sucesivamente en una serie de n termostatos en donde la temperatura se encuentra regularmente repartida entre T_i y T_0. Determine la variación de entropía de A, y del enésimo termostato (T_n). Deducir la variación de entropía del conjunto de los n termostatos. Bajo que condición esta transformación se vuelve reversible.

[1]No consideramos el intercambio de calor con la atmósfera, así como la variación de presión al sumergirlo.

13. Ecuación de Dieterici - Al igual que van der Waals, Dieterici propuso una ecuación de estado para gases no ideales incluyendo un termino repulsivo para la presión:

$$p(V_m - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV_m}\right)$$

donde a y b son constante que dan cuenta de la interacción atractiva y el volumen finito respectivamente. Encuentre la temperatura T_c, presión p_c y volumen V_c critico. Calcule ademas el valor de:

$$\frac{p_c V_c}{RT_c}$$

14. Ecuación del virial - Exprese la ecuación de estado de van der Waals en términos de la expansión del virial y calcule la temperatura de Boyle (primera constante $B(T)$) en términos de la temperatura critica.

15. Potencial químico - Encuentre el potencial químico de un gas ideal.

16. Barra elastica - Demuestre que para una barra elástica:

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial L}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_L$$

donde C_L es la capacidad térmica a una longitud constante y f es la tensión aplicada a la barra.

17. Potenciales termodinámicos - Derive las siguientes relaciones generales:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\frac{1}{C_V}\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{1}{C_V}T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]$$

18. Potenciales termodinámicos - Demuestre que la razón entre las compresibilidades isotérmicas y adiabáticas es:

$$\frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S} = \gamma$$

utilice el gas ideal para comprobar que se cumple.