Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba I
Mecánica Cuántica I
Licenciatura en Física - 2022

Problema I : Un problema de valores propios

Considere un sistema cuyo Hamiltoniano está dado por:

$$\widehat{\mathrm{H}} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

donde ε es una constante real con dimensiones de energía.

1. (20%) Halle las energías accesibles accesibles para este sistema (E_1, E_2).
2. Si en $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, encuentre para este instante la probabilidad que al medir la energía esta sea:
   (a) (10%) E_1
   (b) (10%) E_2
   (c) (10%) Los valores anteriormente calculados cambian para $t > 0$.
3. (15%) Halle la energía promedio $\Longrightarrow \langle H \rangle$.
4. (15%) Halle la incerteza en la medición de la energía $\Longrightarrow \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$.
5. (20%) Halle $|\psi(t)\rangle$.

Problema II : Ecuación de Schrodinger

1. (10%) ¿Porqué $\psi(x,t)$ y $\dfrac{d\psi(x,t)}{dx}$ deben ser continuas?. ¿Hay alguna excepción?.
2. (15%) ¿Porqué debe establecerse la condición $|\psi(\pm\infty, t)| \to 0$?.
3. La función de onda para una partícula de masa m en un potencial $V(x)$ unidimensional desconocido está dada por la siguiente expresión:

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \alpha x \exp(-\beta x) \exp\left(\dfrac{i\gamma t}{\hbar}\right) & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

donde α, β y γ son todas constantes positivas conocidas.

1. (a) (15%) ¿La función de onda mostrada corresponde a una función de onda estacionaria o no estacionaria?. Explique.
   (b) (25%) Halle el potencial que da origen a la función de onda $\psi(x,t)$.
   (c) (15%) Para este problema particular, el estado de la partícula ¿es un estado ligado o de partícula libre?. Explique.

(d) (20%) ¿Cómo puede determinar si la partícula está o no en su estado base?. Determine la energía en dicho estado.

Problema III : Pozo infinito

Una partícula contenida en un pozo infinito de ancho L posee la siguiente función de onda no estacionaria:

$$\psi(x,t) = x(L-x)\exp(-x)$$

1. (20%) ¿Porqué esta función de onda no estacionaria es válida para una partícula en este pozo?.
2. Escriba las expresiones integrales (no evalúe) que permiten hallar:
   (a) (20%) La constante de normalización.
   (b) (15%) El valor de expectación del momentum.
   (c) (20%) El valor promedio de la energía.
   (d) (25%) La probabilidad de que la partícula se halle en su estado base.

Prueba I

α_1

Probl. I) 1) $\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Valores propios

$E_1 = \varepsilon \;/\; E_2 = -\varepsilon$

Y vectores propios normalizados

$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon$

$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -\varepsilon$

2) Para $t=0$ $\quad |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ya está normalizado)

$\therefore \; |\psi(0)\rangle = \langle 1|\psi(0)\rangle |1\rangle + \langle 2|\psi(0)\rangle |2\rangle$

con $\langle 1|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}$

$\langle 2|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}}$

$\therefore \; |\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |2\rangle$ //

α_2

$$\left.\begin{aligned} P(E_1) &= \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \\ P(E_2) &= \left|-\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

Prob. de hallar a la partícula con energía E_1 ó E_2.

Para $t>0$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}|2\rangle$$

luego $P(E_1) = \left|\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ //

$P(E_2) = \left|-\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ //

No cambian las probabilidades

3) $\langle H\rangle = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 0$ //

4) $\langle H^2\rangle = \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 = \varepsilon^2$

$\therefore \quad \Delta E = \sqrt{\langle H^2\rangle - \underbrace{\cancel{\langle H\rangle^2}}_{0}} = \varepsilon$ //

5) $|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}|2\rangle$ //

$\frac{\alpha}{3}$

Probl. II)

1) Ψ y Ψ' deben ser continuos dado que Ψ es solución de la ec. de Schrödinger.

$\Psi(x)$ no es continua en aquellos ptos. donde $V(x)$ es singular.

2) $|\Psi(\pm\infty, t)| \to 0$ dado que debe asegurarse que $\underbrace{|\Psi(x,t)|^2}_{\rho(x,t)}$ es normalizable.

3) a) La función de onda es estacionaria

si $\Psi(x,t) = \phi(x)\, e^{\frac{i\gamma t}{\hbar}}$ (Es separable en func. espacial x func. temporal.

b) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

con $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \phi(x)\, i\hbar\left(i\frac{\gamma}{\hbar}\right)e^{i\frac{\gamma}{\hbar}t} = -\gamma\,\phi(x)\, e^{\frac{i\gamma t}{\hbar}}$

siendo $\phi(x) = \alpha x\, e^{-\beta x}$

α_4

∴ se cumple que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' + V(x)\phi = -\gamma\phi \qquad (*)$$

con $\phi' = \alpha(1-\beta x)e^{-\beta x}$

$$\phi'' = \alpha\beta e^{-\beta x}(\beta x - 2) = \beta^2\phi - \frac{2\beta}{x}\phi$$

∴ la ec. (*) resulta ser:

$$-\frac{\hbar^2\beta^2}{2m}\cancel{\phi} + \frac{\hbar^2\beta}{xm}\cancel{\phi} + V(x)\cancel{\phi} = -\gamma\cancel{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$V(x) = -\gamma - \frac{\hbar^2\beta^2}{2m} + \frac{\hbar^2\beta}{xm}$$

$$= -\gamma + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\beta^2 - \frac{2\beta}{x}\right)$$

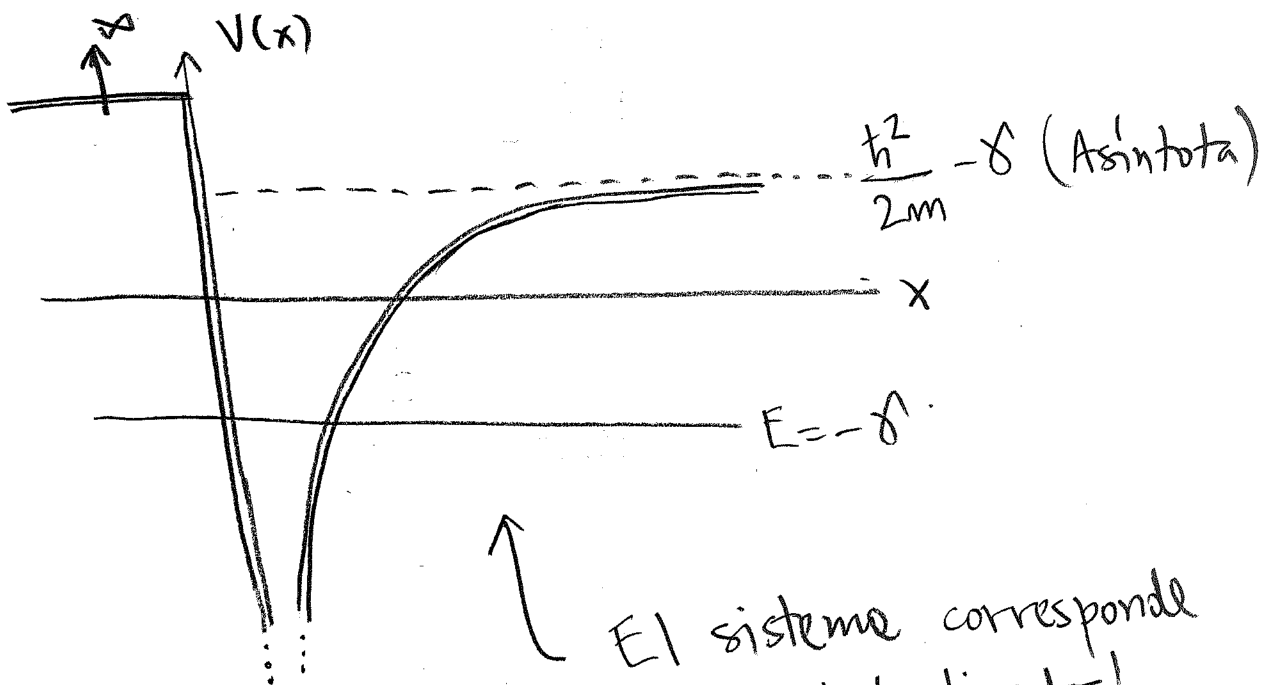
c) $\Psi(x,t)$ corresponde a un estado estacionario de energía $E = -\gamma$ $(\gamma > 0)$

si para $x < 0 \rightarrow \Psi(x,t) = 0$

$$\Downarrow$$

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{\hbar^2\beta^2}{2m} - \gamma - \dfrac{\hbar^2\beta}{mx} & ; \text{si } x > 0 \\ \infty & , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

como $\dfrac{\hbar^2}{2m} - \gamma > -\gamma \implies$



El sistema corresponde a un estado ligado!

$\frac{\alpha}{6}$

Probl. III) $\psi(x,0) = x(L-x)e^{-x}$

1) $\psi(x,0)$ es válida porque cumple las condiciones de contorno de las funciones de onda estacionaria : $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$

2) $$A = \sqrt{\frac{1}{\int_0^L x^2(L-x)^2 e^{-2x}\, dx}}$$ suponiendo $A \in \mathbb{R}$ (lo que no pierde generalidad)

3) $\langle p \rangle = 0$ (condición física)

$$= -i\hbar A^2 \int_0^L x(L-x)e^{-x} \frac{d}{dx}\left[x(L-x)e^{-x}\right] dx$$

4) $$\langle E \rangle = -\frac{A^2 \hbar^2}{2m} \int_0^L x(L-x)e^{-x} \frac{d^2}{dx^2}\left[x(L-x)e^{-x}\right] dx$$

5) $$|\langle 1|\psi\rangle|^2 = \left|\sqrt{\frac{2}{L}}\, A \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) x(L-x)e^{-x}\, dx\right|^2$$

$$= \frac{2A^2}{L}\left[\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) x(L-x)e^{-x}\, dx\right]^2$$