Clase 8 220921 1

I.a: Movimiento radial ($L = 0$)

En este caso, $V_{ef}(r) = 0$, por lo tanto la ecuación del movimiento radial queda

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = \pm E$$

Integrando

$$r(\tau) = \pm E\tau + r_0$$

¿Qué pasa con el tiempo coordenado?

Veamos $\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{E}{f(r)}$

Entonces

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{f(r_0 \pm E\tau)},$$

y así

$$\int dt = \int \frac{E\,d\tau}{f(r_0 \pm E\tau)}$$

$$f(r_0 \pm E\tau) = 1 - \frac{r_s}{r_0 \pm E\tau} =$$

$$= \frac{r_0 \pm E\tau - r_s}{r_0 \pm E\tau} = \frac{(r_0 - r_s) \pm E\tau}{r_0 \pm E\tau}$$

Luego la cuadratura es

$$\int dt = \int \frac{r_0 \pm E\tau}{(r_0 - r_s) \pm E\tau} \cdot (E\, d\tau)$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\frac{(r_0 - r_s) \pm E\tau + r_s}{(r_0 - r_s) \pm E\tau} \right] E\, d\tau$$

$$\Delta t = \int E\, d\tau + r_s \int \frac{E\, d\tau}{(r_0 - r_s) \pm E\tau}$$

$$\Delta t = E\,\Delta\tau + r_s \left\{ \pm \ln \left[\frac{(r_0 - r_s) \pm E\tau}{(r_0 - r_s) \pm E\tau_0} \right] \right\}$$

Hagamos $t_0 = \tau_0 = 0$

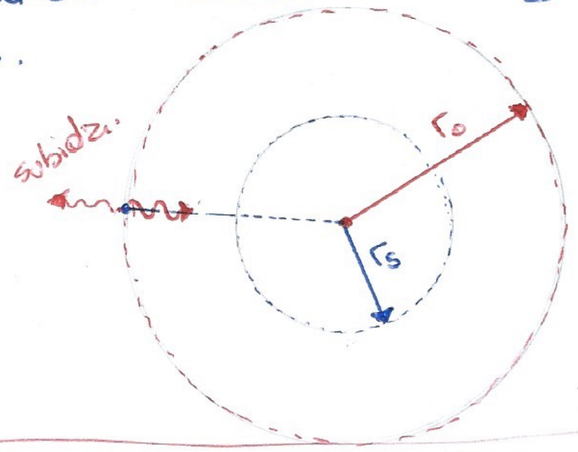
$$\boxed{t(\tau) = E\tau \pm r_s \ln \left[\frac{(r_0 - r_s) \pm E\tau}{r_0 - r_s} \right]}$$

Pero, $r(\tau) = \pm E\tau + r_0 \Rightarrow E\tau = \pm(r - r_0)$

$$\Rightarrow \boxed{t(r) = \pm(r - r_0) \pm r_s \ln \left[\frac{r - r_s}{r_0 - r_s} \right]}$$

i) caída hacia el horizonte de eventos, r_s.

(ocupamos el signo (-))



$$\therefore \boxed{t = (r_0 - r) + r_s \ln\left[\frac{r_0 - r_s}{r - r_s}\right]}$$ caída

$$\boxed{t = (r - r_0) + r_s \ln\left[\frac{r - r_s}{r_0 - r_s}\right]}$$ subida.

Veamos que ocurre en el horizonte de eventos:

i) $$\tau(r) = \frac{r_0 - r}{E}$$

ii) $$t(r) = r_0 - r + r_s \ln\left[\frac{r_0 - r_s}{r - r_s}\right]$$

En el sistema propio, el fotón cruza el horizonte de eventos, r_s,

$$\tilde{\tau}_s \equiv \frac{r_0 - r_s}{E} \quad (\text{finito})$$

sin embargo, el observador externo ve al fotón acercarce indefinidamente a r_s sin lograr cruzar, es decir

$$t_s = t(r_s) \rightarrow \infty.$$

TAREA: Buscar lectura complementaria.