Métodos Matemáticos para la Física I (LFIS 222)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish Semestre II 2023

Tarea 1

---

1. (a) Escribir $(x, y) + (u, v) = (x, y)$ y muestre como $0 = (0, 0)$ es la única identidad aditiva.

   (b) Escribir $(x, y)(u, v) = (x, y)$ y muestre que el número $1 = (1, 0)$ es la única identidad multiplicativa.

   Solución:

   (a) La suma de dos números complejas se define por $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$. Por lo tanto, para tener $(x, y) + (u, v) = (x, y)$ debemos tener $x + u = x$ y $y + v = y$. La única solución a estas ecuaciones (que involucran números reales) es $u = 0, v = 0$.

   (b) El producto de dos números complejos se escribe como $(x, y)(u, v) = (xu - yv, yu + xv)$. Por lo tanto, para tener $(x, y)(u, v) = (x, y)$ debemos tener $xu - yv = x$ y $yu + xv = y$. Sumamos estas dos ecuaciones:

   $$(x + y)u + (x - y)v = x + y \tag{1}$$

   Ya que x, y son arbitrarios, podemos escribir

   $$\alpha u + \beta v = \alpha \tag{2}$$

   donde $\alpha = x + y$ y $\beta = x - y$ (números reales independientes). La única manera de satisfacer la ecuación arriba para α, β arbitrarios es con $u = 1, v = 0$.

2. Se puede definir división por un número complejo utilizando la definición de la inversa:

   $$\frac{1}{z_1} = z_1^{-1}$$

   Por lo tanto tenemos las siguientes relaciones:

   $$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) \qquad \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right) = z_1^{-1}z_2^{-1} = (z_1z_2)^{-1} = \frac{1}{z_1z_2}$$

   donde $z_2 \neq 0$ en la primera ecuación y $z_1, z_2 \neq 0$ en la segunda. Utilice estas relaciones para mostrar que

   $$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) = \frac{z_1z_2}{z_3z_4} \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0)$$

   Solución:

   $$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) = z_1\left(\frac{1}{z_3}\right)z_2\left(\frac{1}{z_4}\right) = z_1z_2\left(\frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_4}\right) = z_1z_2\left(\frac{1}{z_3z_4}\right) = \left(\frac{z_1z_2}{z_3z_4}\right) \tag{3}$$

   donde también hemos usado la conmutatividad del producto de números complejos.

3. Usando el hecho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, argumente geométricamente que $|z-1| = |z+i|$ representa una línea que pasa por el origen con pendiente -1.

   Solución: Denominemos el conjunto de puntos z que satisfacen la igualdad de módulos como L. Los módulos nos dicen que la distancia entre cualquier punto en L y el punto $(1,0)$ es igual a la distancia entre cualquier punto en L y el punto $(0,-1)$. Consideremos el punto $z = (1,-1)$. El primer módulo es $|z-1| = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-0)^2} = 1$. El segundo es $|z+i| = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-(-1))^2} = 1$. Así que este punto pertenece a L. Ahora, consideremos el origen: $|z-1| = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 1$, $|z+i| = \sqrt{(0-0)^2 + (0-(-1))^2} = 1$. El origen también pertence a L. La relación es lineal, así que L es una línea que pasa por el origen y el punto $(1,-1)$, por lo tanto tiene pendiente -1.

4. Muestre que

   (a) z es real si y sólo si $\overline{z} = z$.

   (b) z es real o imaginario si y sólo si $\overline{z}^2 = z^2$.

   Solución:

   (a) Supongamos que z es real. $z = x + i0$. Tenemos $\overline{z} = \overline{x + i0} = x - i0 = z$. Ahora supongamos que $\overline{z} = z$. La igualdad de dos números complejos implica igualdad de las partes real e imaginaria, así que $\overline{z} = x - iy = z = x + iy$ y tenemos $-iy = iy$. La única solución es $y = 0$, así que z es real.

   (b) Supongamos que z es real. En este caso $\overline{z} = z$ y por lo tanto $\overline{z}^2 = z^2$. Ahora, supongamos que z es imaginario. $\overline{z} = -z$ y $\overline{z}^2 = z^2$. Para demostrar equivalencia ahora supongamos que $\overline{z}^2 = z^2$. Usando notación rectangluar tenemos

   $$\overline{z}^2 = (x-iy)(x-iy) = x^2 - y^2 - i2xy = z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy. \quad (4)$$

   Las partes reales ya son iguales. Las partes imaginarias tienen que satisfacer $2xy = -2xy$. La única manera de satisfacer esa ecuación es con $x = 0$ o $y = 0$. Por lo tanto, z debe ser real o imaginario.

5. Utilice la formula de de Moivre para derivar las siguientes identidades trigonométricas:

   (a) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

   (b) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

   Solución:

   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta = \cos^3\theta + 3i\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta - i\sin^3\theta \quad (5)$$

   (a) Igualando las partes reales:

   $$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta \quad (6)$$

   (b) Igualando las partes imaginarias:

   $$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \quad (7)$$

6. En cada caso, encuentre todas las raices en coordenadas rectangulares, grafique las raices como vertices de polígonos regulares e identifique la raiz principal:

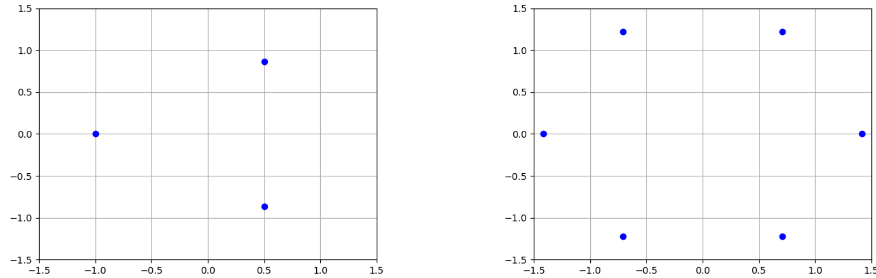

Figure 1: Raices de P.6.

(a) $(-1)^{1/3}$

(b) $8^{1/6}$

Solución:

(a) El módulo $|z| = 1$, así que $r = \sqrt[3]{1} = 1$. El argumento principal del punto -1 es $\Theta = \pi$. Las raices son

$$c_0 = 1 \cdot \exp\left[i\left(\frac{\pi}{3}\right)\right], \quad c_1 = 1 \cdot \exp\left[i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right], \quad c_2 = 1 \cdot \exp\left[i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] \tag{8}$$

donde c_0 es la raiz principal. El polígono formado por las raices es un triángulo (ver Fig. 1).

(b) El módulo $|z| = 8$, así que $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$. El argumento principal del punto 8 es $\Theta = 0$. Las raices son

$$\begin{aligned} &c_0 = \sqrt{2}, \quad c_1 = \sqrt{2} \cdot \exp\left[i\left(\frac{\pi}{3}\right)\right], \quad c_2 = \sqrt{2} \cdot \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right], \\ &c_3 = \sqrt{2} \cdot \exp\left[i\left(\pi\right)\right], \quad c_4 = \sqrt{2} \cdot \exp\left[i\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right], \quad c_5 = \sqrt{2} \cdot \exp\left[i\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

donde c_0 es la raiz principal. El polígono formado por las raices es un hexágono (ver Fig. 1).

7. Muestre que un conjunto S es abierto si y sólo si cada punto en S es un punto interior.

Solución 1: Supongamos que S es abierto. Por definición no contiene sus puntos frontera. Procedemos con demostración por contradicción. Elegimos un punto arbitrario $z \in S$. Si este punto no es interior, un ϵ-entorno del punto contendrá puntos que no están en S. Pero el punto es por suposición en S. Entonces, S contendrá puntos frontera. Este contradice la suposición que S es abierto, así que todos puntos $z \in S$ tienen que ser puntos interiores.

Ahora supongamos que todos los puntos S son interiores. Si S no es abierto entonces existe al menos un punto en S cuyo ϵ-entorno incluye puntos fuera de S. Pero tal punto no sería un punto interior, contradiciendo la suposición. Por lo tanto, S debe ser abierto.

8. Determine los puntos de acumulación en cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $z_n = i^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

(b) $z_n = i^n/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

(c) $0 \leq \arg z < \pi/2$ $(z \neq 0)$

(d) $z_n = (-1)^n(1+i)\frac{n-1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

Solución:

(a) Este conjunto solamente contiene 4 puntos: $i, -1, -i, 1$. Un ϵ-entorno perforado centrado en cualquier de los 4 puntos, para $\epsilon < \sqrt{2}$ no contiene ningún otro punto del conjunto. Así que, no hay puntos de acumulación en este conjunto.

(b) Para cualquier $\epsilon > 0$, existe un N tal que, para $n > N$, $|z - 0| < \epsilon$. Así que el origen es el único punto de acumulación.

(c) El conjunto de puntos de acumulación es $\{z = x + iy | x \geq 0, y \geq 0\}$.

(d) El factor de $(n-1)/n$ indica que podemos tener puntos de acumulación solamente cuando $n \to \infty$. Por el factor $(-1)^n$, en el límite de $n \to \infty$ la secuencia de puntos oscila entre $(1+i)$ y $-(1+i)$. Por lo tanto hay dos puntos de acumulación.