Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba II
Parte 2
Métodos Matemáticos
Licenciatura en Física - 2015
IPGG

Obs. La tarea-prueba es de carácter individual.

Desarrollo de una técnica operacional sin deltas

Podemos construir una técnica similar a **DDFBM** utilizando como base la transformada de Laplace, esto es:

$$F(k) = \int_0^\infty f(x)\exp(-kx)\ dx \tag{1}$$

donde $F(k)$ es la transformada de Laplace de $f(x)$. Obtenga las siguientes identidades:
a).- (30%)

$$I = \int_0^\infty f(x)\exp(-kx)dx = f\left(-\frac{d}{dk}\right)\frac{1}{k}$$

b).- (30%)

$$I = \int_0^\infty f_1(x)\, f_2(x)\exp(-kx)dx = f_1\left(-\frac{d}{dk}\right)F_2(k) = f_2\left(-\frac{d}{dk}\right)F_1(k)$$

siendo $F_2(k)$ y $F_2(k)$ las transformadas de Laplace de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ respectivamente.
c).- (40%)

$$H\left(-\frac{d}{dk}-\beta\right)\frac{1}{k} = \frac{\exp(-k\beta)}{k}$$

Integración con técnica sin delta Dirac

Evalúe con la técnica previamente deducida las siguientes integrales:
a).- (50%)

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\exp(-kx)\ dx$$

b).- (50%)

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{\exp(x)-1}\ dx$$

donde $m \in \mathbb{N}$. **Hint:** La función Zeta de Riemann está definida a través de la siguiente suma infinita $\zeta_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$

---

a) La transformada de Laplace de $F(x)$ está dada por la integral:

$$F(k) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-kx}\, dx$$

si suponemos que

$$f(x) = \sum_n{}' a_n x^n$$

Luego

$$F(k) = \sum_n{}' a_n \int_0^\infty x^n e^{-kx}\, dx$$

Antes observemos que:

$$\frac{d}{dk} e^{-kx} = (-x)\, e^{-kx}$$

$$\frac{d^2}{dk^2} e^{-kx} = (-x)^2\, e^{-kx}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dk^n} e^{-kx} = (-x)^n\, e^{-kx}$$

$$\Downarrow$$

$$x^n e^{-kx} = (-1)^{-n} \frac{d^n}{dk^n} e^{-kx} \quad ; \quad n \text{ entero.}$$

entonces

$$F(k) = \sum_n a_n \left(-\frac{d}{dk}\right)^n \underbrace{\int_0^\infty e^{-kx}\, dx}_{=\frac{1}{k}}$$

$$\therefore \; F(k) = \underbrace{\left[\sum_n a_n \left(-\frac{d}{dk}\right)^n\right]}_{f\left(-\frac{d}{dk}\right)} \frac{1}{k}$$

y

$$\boxed{F(k) = f\left(-\frac{d}{dk}\right) \frac{1}{k}}$$

Equivalentemente

$$\int_0^\infty f(x)\, e^{-kx}\, dx = f\left(-\frac{d}{dk}\right) \frac{1}{k}$$

del resultado anterior tb. se deduce que:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = f\left(-\frac{d}{dk}\right)\frac{1}{k}\Bigg|_{k=0}$$

b) Si

$$F_1(k) = \int_0^\infty f_1(x)\, e^{-kx}\,dx = f_1\left(-\frac{d}{dk}\right)\frac{1}{k} \quad (*)$$

$$F_2(k) = \int_0^\infty f_2(x)\, e^{-kx}\,dx = f_2\left(-\frac{d}{dk}\right)\frac{1}{k} \quad (**)$$

entonces

$$I = \int_0^\infty f_1(x) f_2(x)\, e^{-kx} = f_1\left(-\frac{d}{dk}\right)\overbrace{f_2\left(-\frac{d}{dk}\right)\frac{1}{k}}$$

Ecs. (*) y (**)

$$= f_2\left(-\frac{d}{dk}\right)\underbrace{f_1\left(-\frac{d}{dk}\right)\frac{1}{k}}$$

De acuerdo a lo anterior es posible deducir que:

$$I = f_1\left(-\frac{d}{dk}\right)F_2(k) = f_2\left(-\frac{d}{dk}\right)F_1(k)$$

c) Veamos la integral

$$I = \int_{\beta}^{\infty} e^{-kx}\, dx = \int_0^{\infty} H(x-\beta)\, e^{-kx}\, dx$$

de acuerdo a la técnica

$$\int_0^{\infty} H(x-\beta) e^{-kx} = H\left(-\frac{d}{dk} - \beta\right) \frac{1}{k}$$

Por otro lado la integral es fácilmente evaluable

$$\int_{\beta}^{\infty} e^{-kx}\, dx = \frac{e^{-\beta x}}{k}$$

entonces se deduce que:

$$H\left(-\frac{d}{dk} - \beta\right) \frac{1}{k} \equiv \frac{e^{-\beta x}}{k}$$

$\overline{\underline{N_5}}$

a) $I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} e^{-kx}$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{i\left(-\frac{d}{dk}\right)} - e^{-i\left(-\frac{d}{dk}\right)}\right] \frac{1}{\left(-\frac{d}{dk}\right)} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{i}{2}\left[e^{-i\frac{d}{dk}} - e^{i\frac{d}{dk}}\right](\ln k + \text{cte})$$

$$= \frac{i}{2}\left[e^{-i\frac{d}{dk}} - e^{i\frac{d}{dk}}\right]\ln k$$

$$= \frac{i}{2}\left[\ln(k-i) - \ln(k+i)\right]$$

$$= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{k-i}{k+i}\right) = tg^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Obs. si $k=0 \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$

b) $$I = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^x - 1}\, dx \quad ; \quad m \text{ entero.}$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx$$

donde podemos expandir el denominador de la siguiente forma:

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geq 0} e^{-nx}$$

$$\therefore \quad I = \sum_{n\geq 0} \int_0^\infty x^{m-1}\, e^{-(1+n)x}\, dx$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left[\left(-\frac{d}{dk}\right)^{m-1} e^{-(n+1)\left(-\frac{d}{dk}\right)} \right] \frac{1}{k} \Bigg|_{k=0}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left[e^{(n+1)\frac{d}{dk}} (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dk^{m-1}} \right] \frac{1}{k} \Bigg|_{k=0}$$

$\overline{\alpha_7}$

Veamos

$$\frac{d}{dk}\frac{1}{k} = -\frac{1}{k^2}$$

$$\frac{d^2}{dk^2}\frac{1}{k} = (-1)\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{k^2}\right) = (-1)(-2)\frac{1}{k^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dk^n}\frac{1}{k} = (-1)^n \frac{n!}{k^{n+1}} \quad \text{si} \quad n = m-1$$

$$\frac{d^{m-1}}{dk^{m-1}}\frac{1}{k} = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{k^m}$$

Luego $I = \sum_{n\geq 0} \cancel{(-1)^{m-1}} e^{(n+1)\frac{d}{dk}} \left.\frac{\cancel{(-1)^{m-1}}(m-1)!}{k^m}\right|_{k=0}$

$$I = (m-1)! \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^m} = (m-1)! \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^m}$$

$\therefore$

$$I = (m-1)!\, \zeta_m$$ //