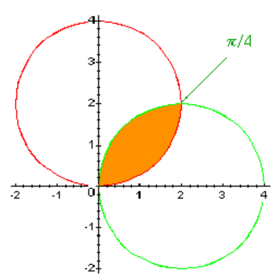
Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Calculo II
Período Lectivo I - 2018
Taller III
__/08/2018

Calificacion:______

Estudiante:__________________________________	**RUT:**__________________

Indicaciones: Responda cada una de las preguntas de forma razonada, "argumentada" y ordenada. Cualquier actitud sospechosa, motivará la anulación de la prueba, se prohibe el uso de celulares y artefactos electronicos como tablets y laptops.

1.- (1.5 puntos) Calcule el área de la región R que se encuentra fuera de la curva $r_1 = 4\sin(\theta)$, y dento de la curva $r_2 = 4\cos(\theta)$. Ayuda: les mostramos el grafico de ambas funciones.



solucion:

$$r = 4sen\theta = 4cos\theta \Rightarrow tg\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{4}.$$

$$A = \tfrac{1}{2}\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4cos\theta)^2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}}(4sen\theta)^2 d\theta\right\}$$

$$= 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta d\theta + 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^2\theta d\theta$$

$$= 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta + 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos2\theta}{2} d\theta = \pi - 2 + \pi - 2 = 2\pi - 4$$

$$8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2\theta)d\theta = \pi - 2.$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^2\theta d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos2\theta}{2} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-cos2\theta)d\theta = \pi - 2.\bigstar$$

2. (1.5 puntos). Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$$

solucion:

Como ambos límites de integración son infinitos, descomponemos la integral en dos sumandos. Si escribimos el integrando como $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} + \lim_{b'\to-\infty} \int_{b'}^0 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arc\,tg} e^x\right]_0^b + \lim_{b'\to-\infty} \left[\operatorname{arc\,tg} e^x\right]_{b'}^0 \\ &= \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arc\,tg} e^b - \pi/4) + \lim_{b'\to-\infty} (\pi/4 - \operatorname{arc\,tg} e^{b'}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. (1.5 puntos). Estudie la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2.e^{-2n}}{n^2+1}.$$

solucion:

Utilice criterio de comparación al límite. En efecto, sea $a_n = e^{-2n}$, entonces la siguiente es una serie geométrica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-2}\right)^n = \frac{1}{e^2 - 1}.$$

Defínase $b_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} a_n$, entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{1+n^2} = 1$ luego, por comparación al límite la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \mathrm{e}^{-2n}}{n^2+1}$ converge.

Exitos...