Universidad de Valparaíso
CHILE

Tarea Obligatoria I
MMF II
Licenciatura en Física - 2020

Problema I : Integral doble e hipergeométricas

Resuelva la siguiente integral:

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\exp(-x)\exp\left(\frac{xy}{x+y}A\right)}{(x+y)^\alpha}\,dxdy$$

Esta integral no es posible evaluarla de forma iterada solo con la utilización de las representaciones integrales de las funciones Gamma y Beta, en este caso es recomendable primero utilizar una expansión en serie de parte del integrando y luego proceder iteradamente, Ud. debe hallar la mejor forma de hacer esto.

1. (70%) Escriba la solución como una función hipergeométrica.
2. (30%) Evalúe la solución para el caso $A = 1$.

Problema II : Par e Impar

1. (40%) Una función que no tiene paridad definida (no es Par ni Impar) siempre se puede escribir como la suma de una función Par y otra Impar. Un ejemplo conocido es el siguiente:

   $$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

   donde la parte Par de $\exp(ix)$ es $\cos(x)$ y la parte Impar es $i\sin(x)$. Lo mismo ocurre con las series de potencias, también las podemos escribir como la suma de una serie Par y otra

2. Impar, el ejemplo dado anteriormente lo podemos reescribir en términos de series de potencias (hipergeométricas), esto es:

$${}_0F_0\left(\begin{array}{c|c} - & \\ & ix \\ - & \end{array}\right) = {}_0F_1\left(\begin{array}{c|c} - & \\ & -\frac{x^2}{4} \\ \frac{1}{2} & \end{array}\right) + ix\,{}_0F_1\left(\begin{array}{c|c} - & \\ & -\frac{x^2}{4} \\ \frac{3}{2} & \end{array}\right)$$

En general podemos separar una serie de la forma $\sum_{n\geq 0} ...x^n$ (sin paridad) como la suma de dos series de paridad definida tal como sigue:

$$\sum_{n\geq 0} ...x^n = \sum_{n\geq 0} ...x^{2n} + \sum_{n\geq 0} ...x^{2n+1}$$

Con esta idea halle la parte Par e Impar de la función hipergeométrica generalizada:

$$f(x) = {}_pF_q\left(\begin{array}{c|c} a_1, ..., a_p & \\ b_1, ..., b_q & x \end{array}\right)$$

Obs.: Recuerde que una función Par cumple con la identidad $f(-x) = f(x)$ y la función Impar con $f(-x) = -f(x)$.

3. (60%) La siguiente serie representa una función Par:

$$f_{Par}(x) = {}_0F_3\left(\begin{array}{c|c} - & \\ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2 & x^2 \end{array}\right)$$

Determine la función $F(x)$ tal que $f_{Par}(x)$ corresponde a su parte Par.

Problema III

Verifique las siguientes identidades:

1. (25%) $B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1)$
2. (25%) $B(a,b) = \dfrac{a+b}{b} B(a,b+1)$
3. (25%) $B(a,b) = \dfrac{b-1}{a} B(a+1,b-1)$
4. (25%) $B(a,b) B(a+b,c) = B(b,c) B(a,b+c)$

PROBLEMA I

Paso 1: Expansión de la fn. $e^{\frac{xy}{x+y}A}$, esto es:

$$e^{\frac{xy}{x+y}A} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n y^n}{(x+y)^n} \frac{A^n}{n!}$$

Paso 2: Reemplazamos en la integral e invertimos sumación discreta-continua

$$\therefore \quad J = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^n y^n e^{-x}}{(x+y)^{\alpha+n}} \, dx\, dy$$

Paso 3: Ahora evaluamos le integral en y:

$$\int_0^\infty \frac{y^n}{(x+y)^{\alpha+n}} dy = \frac{1}{x^{\alpha+n}} \int_0^\infty \frac{y^n}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\alpha+n}} dy$$

haciendo $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow dy = x\,dz$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{y^n}{(x+y)^{\alpha+n}} dy = \frac{1}{x^{\alpha-1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{z^n}{(1+z)^{\alpha+n}} dz}_{B(n+1,\,\alpha-1)}$$

$$= x^{1-\alpha} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

$$\therefore J = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \int_0^\infty x^{n-\alpha+1} e^{-x} dx$$

donde $\int_0^{\infty} x^{(n-\alpha+2)-1} e^{-x} dx = \Gamma(n-\alpha+2)$

Luego :

$$J = \Gamma(\alpha-1) \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)} \frac{A^n}{n!},$$

donde en términos de símbolos de Pochhammer tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = \cancel{\Gamma(1)}^{1} (1)_n = (1)_n$$
$$\Gamma(2-\alpha+n) = \Gamma(2-\alpha)(2-\alpha)_n$$
$$\Gamma(\alpha+n) = \Gamma(\alpha)(\alpha)_n$$

$\therefore$

$$J = \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n\geq 0} \frac{(1)_n (2-\alpha)_n}{(\alpha)_n} \frac{A^n}{n!},$$

Luego

1) $$J = \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 2-\alpha\\ \alpha\end{matrix}\middle| A\right)$$

2) si $A = 1$ y conociendo la identidad :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

entonces

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 2-\alpha\\ \alpha\end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha-3)}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2\alpha-2)}$$

Finalmente

$$J = \frac{\cancel{\Gamma(\alpha-1)}\,\Gamma(2-\alpha)}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(\alpha)}\,\Gamma(2\alpha-3)}{\cancel{\Gamma(\alpha-1)}\,\Gamma(2\alpha-2)}$$

$$J = \frac{\Gamma(2-\alpha)\,\Gamma(2\alpha-3)}{\Gamma(2\alpha-2)}$$

PROBLEMA II

1) Sea $f(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(b_j)_n} \frac{x^n}{n!}$

separamos la serie en su parte par e impar:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{2n}}{\prod_{j=1}^{q}(b_j)_{2n}} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{2n+1}}{\prod_{j=1}^{q}(b_j)_{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Obs. $(\alpha)_{2n} = 4^n \left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$ (Identidad)

$\Downarrow$

$(a_j)_{2n} = 4^n \left(\frac{a_j}{2}\right)_n \left(\frac{a_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$; análogamente

$(b_j)_{2n} = 4^n \left(\frac{b_j}{2}\right)_n \left(\frac{b_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$

por otro lado

$$(\alpha)_{2n+1} = \frac{\Gamma(\alpha+2n+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}(\alpha+1)_{2n} = \alpha(\alpha+1)_{2n}$$

$$= \alpha\, 4^n \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$$

$$= \alpha\, 4^n \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha}{2}+1\right)_n$$

$$\Downarrow$$

$$(a_j)_{2n+1} = a_j 4^n \left(\frac{a_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{a_j}{2}+1\right)_n$$

$$(b_j)_{2n+1} = b_j 4^n \left(\frac{b_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{b_j}{2}+1\right)_n$$

Entonces:

$$\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{2n} = 4^{np}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{a_j}{2}\right)_n\left(\frac{a_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$$

$$\prod_{j=1}^{q}(b_j)_{2n} = 4^{nq}\prod_{j=1}^{q}\left(\frac{b_j}{2}\right)_n\left(\frac{b_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$$

$$\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{2n+1} = 4^{np}\prod_{j=1}^{p} a_j\left(\frac{a_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{a_j}{2}+1\right)_n$$

$$= 4^{np}\left(\prod_{j=1}^{p} a_j\right)\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{a_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{a_j}{2}+1\right)_n$$

análogamente

$$\prod_{j=1}^{q}(b_j)_{2n+1} = 4^{nq}\left(\prod_{j=1}^{q} b_j\right)\prod_{j=1}^{q}\left(\frac{b_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{b_j}{2}+1\right)_n$$

Por otro lado :

$$(2n)! = \Gamma(1+2n) = \overset{1}{\cancel{\Gamma(1)}}\,(1)_{2n} = 4^n \left(\tfrac{1}{2}\right)_n \overset{n!}{\cancel{(1)_n}}$$

$$(2n+1)! = \Gamma(2+2n) = \overset{1}{\cancel{\Gamma(2)}}\,(2)_{2n} = 4^n \underset{n!}{\cancel{(1)_n}} \left(\tfrac{3}{2}\right)_n$$

$\therefore$

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{4^{np} \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{a_j}{2}\right)_n \left(\frac{a_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n}{4^{nq} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{b_j}{2}\right)_n \left(\frac{b_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n} \cdot \frac{x^{2n}}{4^n (1/2)_n\, n!}$$

$$+ \frac{\prod_{j=1}^{p} a_j}{\prod_{j=1}^{q} b_j} \sum_{n\geq 0} \frac{4^{np} \prod_{j=1}^{p} \left(\frac{a_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{a_j}{2}+1\right)_n}{4^{nq} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{b_j}{2}+\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{b_j}{2}+1\right)_n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{4^n (3/2)_n\, n!}$$

$$\Downarrow$$

Finalmente en términos de funciones hipergeométricas

$$f(x) = {}_{2p}F_{2q+1}\left(\left.\begin{matrix} \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_p}{2}, \frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}, \dots, \frac{a_p}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{b_1}{2}, \dots, \frac{b_q}{2}, \frac{b_1}{2}+\frac{1}{2}, \dots, \frac{b_q}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right| 4^{p-q-1} x^2\right)$$

$$+ x \frac{\prod_{j=1}^{p} a_j}{\prod_{j=1}^{q} b_j}\, {}_{2p}F_{2q+1}\left(\left.\begin{matrix} \frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}, \dots, \frac{a_p}{2}+\frac{1}{2}, \frac{a_1}{2}+1, \dots, \frac{a_p}{2}+1 \\ \frac{b_1}{2}+\frac{1}{2}, \dots, \frac{b_q}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b_1}{2}+1, \dots, \frac{b_q}{2}+1, \frac{3}{2} \end{matrix} \right| 4^{p-q-1} x^2\right)$$

2) $f_{par}(x) = {}_0F_3\left(\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2 \end{matrix} \middle| x^2\right)$

$$\Downarrow$$

$$f_{par}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\frac{5}{2}\right)_n (2)_n} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Se observa que:

$$(2)_{2n} = 4^n (1)_n \left(\tfrac{3}{2}\right)_n \implies (1)_n \left(\tfrac{3}{2}\right)_n = n!\, \left(\tfrac{3}{2}\right)_n = \frac{(2)_{2n}}{4^n}$$

$$(4)_{2n} = 4^n (2)_n \left(\tfrac{5}{2}\right)_n \implies \left(\tfrac{5}{2}\right)_n (2)_n = \frac{(4)_{2n}}{4^n}$$

$\therefore$

$$f_{par}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)_n \left(\frac{5}{2}\right)_n (2)_n} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{4^{2n}}{(4)_{2n} (2)_{2n}} x^{2n}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(4)_{2n} (2)_{2n}} \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}$$

pero $(2n)! = \Gamma(1+2n) = (1)_{2n}$, luego

$$f_{par}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(1)_{2n}\, 4^{2n}}{(4)_{2n} (2)_{2n}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

luego si $F(x) = \sum_{n\geq 0}' A_n X$, entonces su descomposición PAR|IMPAR

es: $F(x) = \sum_{n\geq 0}' A_{2n} X^{2n} + \sum' A_{2n+1} X^{2n+1}$

por comparación se deduce que:

$$A_{2n} = \frac{(1)_{2n}\, 4^{2n}}{(4)_{2n}\,(2)_{2n}\,(2n)!} \Rightarrow A_n = \frac{(1)_n\, 4^n}{(4)_n\,(2)_n\, n!}.$$

y por lo tanto

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(1)_n}{(4)_n\,(2)_n} \frac{(4x)^n}{n!}.$$

$$= {}_1F_2\left(\begin{matrix}1\\4\,,2\end{matrix}\,\middle|\,4X\right)$$

PROBLEMA III

1) $$B(a+1,b)+B(a,b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}+\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

$$=\frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}+\frac{\Gamma(a)\,b\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}$$

$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right]=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$=B(a,b)$$ QED.

2) $$\frac{a+b}{b}B(a,b+1)=\frac{a+b}{b}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

$$=\frac{\cancel{a+b}}{\cancel{b}}\frac{\Gamma(a)\cancel{b}\Gamma(b)}{\cancel{(a+b)}\Gamma(a+b)}=B(a,b)$$

QED.

3) $$\frac{b-1}{a}B(a+1,b-1)=\frac{b-1}{a}\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b-1)}{\Gamma(a+b)}$$

Obs. $(b-1)\Gamma(b-1)=\Gamma(b)$
$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$

$$\therefore\quad \frac{b-1}{a}B(a+1,b-1)=\frac{\cancel{a}\Gamma(a)\Gamma(b)}{\cancel{a}\Gamma(a+b)}=B(a,b)$$

QED.

4) $$B(a,b)B(a+b,c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\cancel{\Gamma(a+b)}} \frac{\cancel{\Gamma(a+b)}\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\ \Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \cdot \frac{\Gamma(b+c)}{\Gamma(b+c)}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}$$

$$= B(a, b+c) \cdot B(b,c)$$

QED.