FUNCIONES GAMMA Y BETA

1. LA FUNCIÓN GAMMA. PROPIEDADES ELEMENTALES.

La función Gamma fue definida por Euler mediante

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad , \quad x > 0 \tag{1}$$

donde la condición $x>0$ es exigida para la convergencia de la integral.

En vez de una rigurosa demostración de la convergencia, se justificará ésta mediante el siguiente razonamiento:

Se tiene que $e^{-t} t^{x-1} \to 0$ cuando $x \to \infty$, de manera que no se esperan inconvenientes en el límite superior de la integral. Cerca del límite inferior $t=0$, el integrando se aproxima a t^{x-1} ya que $e^{-t} \simeq 1$. De esta manera

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &\simeq \int_0^c t^{x-1} dt + \int_c^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\ &\simeq \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^c + \int_c^\infty e^{-t} t^{x-1} dt\end{aligned}$$

y para que el primer término de la derecha permanezca finito, se debe tener $x>0$.

De la definición (1) es fácil ver que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$$

y

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = 2\underbrace{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)}_{\text{(Resultado conocido)}} = \sqrt{\pi}$$

Una relación básica de la función Gamma es

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2}$$

la cual se deduce a partir de (1) e integrando por partes, como sigue:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\
&= \cancelto{0}{\left[-e^{-t}t^{x}\right]_0^\infty} + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}
$$

La fórmula (2) juega un papel importante en el cálculo de valores de la función Gamma.

Si se toma $x{=}n$ (n entero positivo) y se usa (2) repetidamente, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= n(n-1)(n-2)\cdot\cdots 1\cdot\Gamma(1)
\end{aligned}
$$

esto es

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{3}$$

Esta última expresión puede usarse para definir $0!$, si se aplica para $n{=}0$, obteniéndose

$$0! = \Gamma(1) = 1$$

Análogamente, para n entero positivo, se observa que

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1/2) &= (n-1/2)\Gamma(n-1/2) \\
&= (n-1/2)(n-3/2)\Gamma((n-3/2) \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= (n-1/2)(n-3/2)(n-5/2)\cdot\cdots\cdot 1/2\cdot\Gamma(1/2) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

de donde

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{4}$$

La función Gamma satisface

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen\pi x} \quad , \quad 0 < x < 1 \tag{5}$$

En efecto:
Usando (1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\cdot\int_0^\infty e^{-s}s^{-x}ds \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+s)}t^{x-1}s^{-x}dtds
\end{aligned}$$

Haciendo

$$u = t+s \quad , \quad v = \frac{t}{s} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{uv}{1+v} \quad , \quad s = \frac{u}{1+v}$$

se tiene que el Jacobiano de la transformación viene dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} - \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{u}{(1+v)^2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{uv}{1+v}\right)^{x-1}\left(\frac{u}{1+v}\right)^{-x}\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{uv}{1+v}\right)^{x-1}\left(\frac{u}{1+v}\right)^{-x}\frac{u}{(1+v)^2} dudv \\
&= \int_0^\infty e^{-u}\ v^{x-1}\frac{1}{1+v} dudv \\
&= \underbrace{\int_0^\infty e^{-u}du}_{1} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v}dv}_{\frac{\pi}{sen\pi x}} \quad \text{(resultado conocido)}
\end{aligned}$$

Haciendo $pt = w$, es fácil ver que

$$\int_0^\infty e^{-pt}\ t^{z-1}dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z} \quad , \quad \begin{matrix} z > 0 \\ p > 0 \end{matrix} \tag{6}$$

2 FUNCIÓN BETA.

Se define la función Beta por

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \tag{7}$$

Haciendo el cambio $t = sen^2\theta$ en (7), se tiene que

$$B(x,y) = \int_0^{\pi/2} sen^{2x-2}\theta\ cos^{2y-2}\theta \cdot 2sen\theta cos\theta d\theta$$

de donde

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} sen^{2x-1}\theta\ cos^{2y-1}\theta\ d\theta \quad , \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \tag{8}$$

Si en (7) se hace $u=\frac{t}{1-t}$, se tiene que

$$B(x,y) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1}\frac{du}{(u+1)^2}$$

y al simplificar queda

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}} \quad , \quad \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix} \tag{9}$$

Tomando p=1+u y z=x+y en (6), queda

$$\frac{1}{(u+1)^{x+y}}=\frac{1}{\Gamma(x+y)}\int_0^\infty e^{-(1+u)t}t^{x+y-1}dt$$

y al sustituir esta expresión en (9), se tiene que

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^\infty u^{x-1}\left(\frac{1}{\Gamma(x+y)}\int_0^\infty e^{-(1+u)t}t^{x+y-1}dt\right)du \\ &= \frac{1}{\Gamma(x+y)}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+y-1}\left(\int_0^\infty e^{-ut}u^{x-1}du\right)dt \end{aligned}$$

Si en la integral respecto a u se usa de nuevo (6), se tiene que

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(x+y)}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)}{t^x}dt \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}dt \end{aligned}$$

de donde se obtiene la importante relación

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad , \quad \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix} \tag{10}$$

De (10) resulta evidente que

$$B(y,x)=B(x,y) \tag{11}$$

3. FÓRMULA DE DUPLICACIÓN DE LA FUNCIÓN GAMMA.

De acuerdo con (7) y (10)

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Para x=y, queda

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt \\ &= 2\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt\end{aligned}$$

Haciendo el cambio $t=\frac{1-\sqrt{u}}{2}$ en la integral, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= 2\int_1^0 \left(\frac{1-\sqrt{u}}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{1+\sqrt{u}}{2}\right)^{x-1}\left(-\frac{1}{4}\right)u^{-1/2}du \\ &= \frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{x-1}dt \\ &= \frac{1}{2^{2x-1}}B(1/2,x) \\ &= \frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(x)}{\Gamma(1/2+x)}\end{aligned}$$

de donde resulta la llamada fórmula de duplicación

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)=\sqrt{\pi}\Gamma(2x) \qquad (12)$$

4. EXTENSIÓN DEL DOMINIO DE LA FUNCIÓN GAMMA.

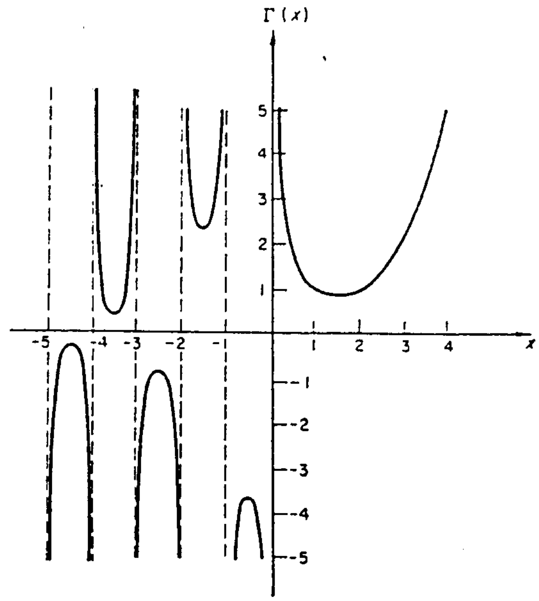
En (1) se definió la función Gamma para valores positivos de la variable x. Es posible extender el dominio de definición de $\Gamma(x)$ para valores de x negativas, usando para ello la fórmula (2) escrita en la forma

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad (13)$$

De acuerdo con (13), $\Gamma(0)=\frac{\Gamma(1)}{0}$ es infinito. Mediante aplicaciones repetidas de (13), es fácil ver que $\Gamma(-1),\Gamma(-2),\Gamma(-3),....$ también son infinitos. Para cualquier otro valor negativo de x, se puede calcular $\Gamma(x)$ usando (13) cuantas veces sea necesario, hasta que $\Gamma(x+1)$ tenga argumento positivo.

De esta manera, juntando (1) y (13), la función $\Gamma(x)$ queda definida para todos los valores de x, excepto x=0, -1, -2, -3,....

En la bibliografía especializada están disponibles tablas de valores de $\Gamma(x)$; además, la función Gamma está incluida en los programas de biblioteca de calculadoras y computadoras de uso científico.



5. EJEMPLOS.

Ejemplo 1. Calcular $\Gamma(6)$, $\Gamma(5/2)$ y $\Gamma(-3/2)$.

Solución.

Usando (3): $\Gamma(6) = \Gamma(5+1) = 5! = 120.$

Usando (4): $\Gamma(5/2) = \Gamma(2+1/2) = \frac{1.3}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$

Usando (13): $\Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{(-3/2)(-1/2)} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$

Ejemplo 2. Calcular

$$\mathrm{I}=\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx$$

Solución.

$$x^3 = t \Rightarrow x = t^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\,t^{-2/3}dt$$

$$\mathrm{I}=\int_0^\infty t^{1/6}e^{-t}\cdot\frac{1}{3}t^{-2/3}dt = \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt = \frac{1}{3}\Gamma(1/2)$$

(donde se ha usado la definición (1))

$$\text{I}=\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

Ejemplo 3. Calcular

$$\text{I}=\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx$$

Solución.

$$x^2 = a^2t \Rightarrow x = at^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{a}{2}t^{-1/2}dt$$

$$\text{I}=\int_0^1 a^4t^2\sqrt{a^2-a^2t}\cdot\frac{a}{2}t^{-1/2}dt = \frac{a^6}{2}\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{1/2}dt = \frac{a^6}{2}B(5/2,3/2)$$

(donde se ha usado la definición (7).

Ahora, según (10), se tiene que

$$\text{I} = \frac{a^6}{2}\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)} = \frac{a^6}{2}\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!}$$

$$\text{I}=\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^6\pi}{32}$$

Ejemplo 4. Calcular

$$\text{I}=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

Solución.

$$x^4 = u \Rightarrow x = u^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4}u^{-3/4}du$$

$$\text{I}=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{u^{-3/4}du}{1+u} = \frac{1}{4}B(1/4,3/4)$$

(donde se ha usado (9)).

Según (10) y (5), se tiene que

$$\text{I}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4}\Gamma(1/4)\Gamma(1-1/4) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{sen\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{I}=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

6. OTRAS DEFINICIONES DE LA FUNCIÓN GAMMA.

Definición de Gauss:

$$\Gamma(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{n!\; n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)} \tag{14}$$

Definición de Weierstrass:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty} e^{-x/n}\left(1+\frac{x}{n}\right) \tag{15}$$

γ es la constante de Euler, la cual está dada por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) \simeq 0.57721566$$

donde

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdot + \frac{1}{n}$$

7. FUNCIONES GAMMA INCOMPLETAS.

Se definen las funciones Gamma incompletas por

$$\gamma(x,\alpha) = \int_0^\alpha e^{-t}t^{x-1}dt \tag{16}$$

$$\Gamma(x,\alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{17}$$

Es evidente que

$$\gamma(x,\alpha) + \Gamma(x,\alpha) = \Gamma(x)$$

8. EL SÍMBOLO $(\lambda)_k$ DE POCHHAMMER.

$$(\lambda)_0 = 1$$

$$(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot\dots\cdot(\lambda+k-1) = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} \tag{18}$$

EJERCICIOS

1. Demostrar:

$$a)\ \Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt \quad , \quad x > 0$$

$$b)\ \int_0^1 x^p \left(\ln\frac{1}{x}\right)^q dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(\rho+1)^{q+1}} \qquad , \qquad p, q > -1$$

$$c)\ \int_0^{\pi/2} tg^{\nu}\theta d\theta = \frac{\pi}{2} sec\frac{\nu\pi}{2}$$

$$d)\ \int_{-1}^1 (1+x)^{\rho-1}(1-x)^{q-1} dx = 2^{p+q-1} B(p,q)$$

$$e)\ \int_0^{\pi/2} cos^{2n}\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

2. Calcular:

$$a)\ \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx. \qquad b)\ \int_0^{\infty} \sqrt[4]{x}\ e^{-\sqrt{x}} dx. \qquad c)\ \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$$

$$d)\ \int_0^{\infty} \frac{x\ dx}{1+x^6} \qquad e)\ \int_0^4 u^{3/2}(4-u)^{5/2} du$$

$$f)\ \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^4-y^4}} \qquad g)\ \int_0^{\pi/2} sen^4\theta cos^4\theta d\theta.$$

3. Demostrar:

$$a)\ pB(p, q+1) = qB(p+1, q)$$

$$b)\ B(p, q)B(p+q, r) = B(q, r)B(q+r, p)$$

$$c)\ B(p, n+1) = \frac{n!}{(p)_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$d)\ \gamma(x+1, \alpha) = x\gamma(x, \alpha) - e^{-\alpha}\alpha^{x}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. N.N. Lebedev: SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS. Dover Publications, Ine.
2. W.W. Bell: SPECIAL FUNCTIONS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS. D. Van Nostrand Company, Ud.
3. E.D. Rainville: SPECIAL FUNCTIONS. Chelsea Publishing Company.
4.M. Spiegel: ANALISIS DE FOURIER (Serie de Compendios Shaum). Me Graw-Hill.