Nombre: ____________________

Prueba #2 LFIS 325 - Estadística para Ciencias Físicas

1. (20 puntos) Se sabe que la duración, en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente normal con desviación estándar poblacional de 25 horas. Se toma una muestra aleatoria de 16 focos, la cual resulta tener una duración media de 1014 horas.
   (a) (7 puntos) Confeccione un intervalo de confianza del 95 % para la duración media.
   (b) (7 puntos) ¿Es posible suponer que la duración media difiere de las 1100 horas, indicadas por el fabricante? Utilice un nivel de significancia del 5 %. Justifique.
   (c) (6 puntos) ¿Qué tamaño muestral se requiere para estimar la duración media de los focos, con una confianza del 98.12 % y una amplitud de 4 horas?

Solución: Sea X : { Duranción, en horas, de un foco de 75 watts }. Por enunciado $X \sim N(\mu, 25^2)$. El intervalo de confianza pedido está dado por:

$$\left[\overline{X} \mp Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

En donde $\alpha = 0{,}05$ y $Z_{1-\alpha/2} = 1{,}96$. Luego, reemplazando con la información de enunciado, se tiene que el intervalo pedido es:

$$IC_{95\,\%}(\mu) = [1001{,}8; 1026{,}3]$$

Por enunciado, se tiene la siguiente prueba de hipótesis:

$$H_0 : \mu = 1100$$
$$H_1 : \mu \neq 1100$$

Por lo que, utilizando el estadístico de prueba Z rechazaremos la hipótesis nula si:

$$Z \leq -1,96 \qquad \text{o si} \qquad Z \geq 1,96$$

Luego, el valor de nuestro estadístico está dado por: $Z = -13{,}76$. Utilizando el intervalo de confianza del item a), y dado que la amplitud es 4 horas. Se tiene:

$$2Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4$$

En donde $\alpha = 0{,}0188$ y $Z_{1-\alpha/2} = 2{,}35$. Luego, despejando para n y usando el hecho que $\sigma = 25$, se tiene que el tamaño de muestra pedido es: $n = 862,89 \approx 863$

2. (15 puntos) El nivel de llenado de unas botellas de bebidas gaseosas tiene una distribución normal con media 2 [litros] y desviación estándar de 0,06 [litros]. Si las botellas contienen menos de 1,9 [litros], la empresa corre el riesgo de recibir una multa por parte de la entidad encargada de fiscalizar este tipo de productos.
   Por otro lado, si las botellas tienen un contenido mayor a 2,1 [litros], se genera el efecto no deseado de derramar parte del líquido al momento de abrirlas.
   (a) (2 puntos) Defina la variable bajo estudio.
   (b) (4 puntos) Si se selecciona una botella de la producción al azar, ¿Cúal es la probabilidad de que la empresa corra el riesgo de ser multada?

(c) (4 puntos) Si se selecciona una botella al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que una botella pueda provocar un derrame?

(d) (5 puntos) Si se obtiene una muestra aleatoria de 30 botellas desde la línea de llenado, ¿ Cuál es la probabilidad de que haya más de 2 botellas que puedan provocar un derrame al abrirlas?

Solución: Sea X : { Nivel de llenado de unas botellas de bebidas gaseosas en litros }

$$X \sim N(2, 0{,}06^2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 1{,}9) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-2}{0{,}06} < \frac{1{,}9-2}{0{,}06}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Z < -1.\overline{6}\right) \qquad Z \sim N(0,1)\\ &= 0{,}048\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 2{,}1) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2{,}1)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-2}{0{,}06} < \frac{2{,}1-2}{0{,}06}\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left(Z < -1.\overline{6}\right) Z \sim N(0,1)\\ &= 1 - 0{,}952\\ &= 0{,}048\end{aligned}$$

Sea Y : { Número de botellas cuyos niveles de llenado es mayor a 2.1 litros}

$$Y \sim Bin(30, 0{,}048)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 2) &= \mathbb{P}(Y \geq 3)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2)\\ &= 1 - 0{,}8122\\ &= 0{,}1878\end{aligned}$$

3. (15 puntos) Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 120x(y-x)(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

(a) (3 puntos) Determine la densidad marginal de Y.

(b) (4 puntos) Obtenga la densidad condicional de X dado $Y = y$.

(c) (4 puntos) Calcule $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right)$.

(d) (4 puntos) Calcule $\mathbb{E}\left(X \mid Y = \frac{1}{2}\right)$.

Solución:

Para obtener la densidad marginal de Y, se debe calcular:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y 120x(y-x)(1-y)\mathrm{d}x = 120(1-y)\left[\frac{yx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^y \\ &= 120(1-y)\left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{3}\right) = 20(1-y)y^3, \quad 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

La densidad condicional de $X \mid Y = y$ es dada por:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{120x(y-x)(1-y)}{20(1-y)y^3} = \frac{6x(y-x)}{y^3}, \quad 0 \le x \le y.$$

Como:

$$f_{X|Y}\left(x \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{6x\left(\frac{1}{2} - x\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 48x\left(\frac{1}{2} - x\right), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}.$$

sigue que

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{4} \middle| Y = \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 48x\left(\frac{1}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Tenemos también que

$$\mathbb{E}\left(X \mid Y = \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 48x^2\left(\frac{1}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

4. (10 puntos) Los siguientes datos representan las calificaciones de física para una muestra aleatoria de 12 alumnos de primer año de cierta universidad, junto con sus calificaciones de una prueba de aptitud que se les aplicó cuando aún eran alumnos de último año de enseñanza media:

Calificación en la prueba	65	50	55	65	55	70	65	70	55	70	50	55
Calificación en física	85	74	76	90	85	87	94	98	81	91	76	74

Se sabe que:

$$\sum(\text{ Calificación en la prueba }) = 725 \quad , \quad \sum(\text{ Calificación en la prueba })^2 = 44{,}475$$
$$\sum(\text{ Calificación en física }) = 1011 \quad , \quad \sum(\text{ Calificación en física })^2 = 85{,}905$$

La ecuación de la línea de regresión para predecir la calificación en física a partir de la calificación en la prueba viene dada por:

$$\hat{y}_i = 30,043 + 0,897x_i \quad , \quad i = 1, \ldots, 12$$

Además, con esta información, se obtuvo $R^2 = 0,743$.

(a) (5 puntos) Confeccione la tabla de análisis de varianza (ANOVA).

(b) (5 puntos) Mediante un análisis de varianza, pruebe la hipótesis de que la calificación en la prueba influye en la calificación en química. (Utilice $\alpha = 0,05$)

Solución: Sea Y : Calificación en física, X : Calificación en la prueba. Se tiene que el modelo de regresión lineal simple está dado por:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Luego,

$$SSTO = \sum_{i=1}^{12} y_i^2 - 12\overline{y}^2 = 85{,}905 - 12 * (84{,}25)^2 = 728{,}25$$

y,

$$R^2 = \frac{SSR}{SSTO} \Rightarrow SSTO = 0{,}743 * 728{,}25 = 541{,}08975$$

Luego la tabla ANOVA estará dado por:

F.V.	SS	g.l.	MS	F
Regresión	541.08975	1	541.08975	28.9105
Error	187.16025	10	18.716025	
Total	728.25	11		

El test de hipótesis pedido es:

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

y el estadístico de prueba es:

$$F = \frac{MSR}{MSE} \sim F(1, 10)$$

Rechazaremos nuestra hipótesis nula si $F > F_{0{,}95}(1, 10) = 4{,}965$ (por tabla). Luego, como $28{,}9105 > 4{,}965$ se rechaza H_0. Así, la calificación en la prueba influye en la calificación en física con una significancia del 5 %.

Problema	Puntos	Resultado
1	20	
2	15	
3	15	
4	10	
Total:	60	