La solución de Schwarzschild

Esta solución, exterior, representa una solución de vacío, estática cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + r^2 d\Omega^2$$

* Usaremos la masa geometrizada:

$2\frac{GM}{c^2} \equiv r_s$: radio de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2$$

Esta métrica tiene dos puntos conflictivos:

i) $r = r_s$

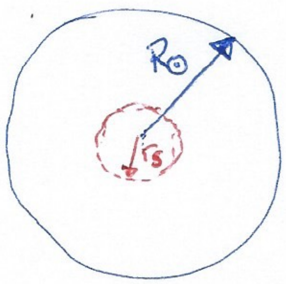
ii) $r = 0$

Se puede mostrar que $r = r_s$ es una singularidad debido a la elección de las coordenadas. Esto quiere decir que se puede remover cambiando el sistema de coordenadas.

Sin embargo, la singularidad en $r=0$ no es removible pues representa una singularidad de curvatura. Esto queda en evidencia observando el escalar de Kretschmann

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{12 r_s^2}{r^6}$$ ← Invariante de curvatura.

Entonces, $r=0$ es la única singularidad. Podría representar un agujero negro.

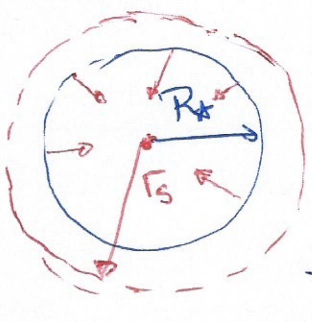


$R_\odot \simeq 7\times10^5$ km

$R_{eb} \simeq 10^2 - 10^3$ km.

$r_{s\odot} \simeq 3$ km.

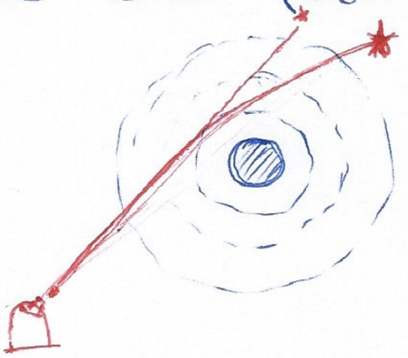
$R_\odot \gtrsim R_{eb} \gg r_{s\odot}$



si $R_\star \lesssim r_s \Rightarrow$ estrella colapsa en agujero negro.

Toda la materia-energía colapsa hacia la singularidad en $r=0$.

El espacio-tiempo es curvado por la masa M de manera que la luz sufre deflexión al pasar cerca de una fuente gravitacional.



Eddington logra mostrar este efecto 1919

Podemos estudiar, como primer approach, el campo gravitacional usando la metrica de Schwarzschild cuyo Lagrangiano

$$2\mathcal{L} = -f(r)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$

Notar que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{t}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$

i.e., no depende de $\{t, \phi\}$ ← coordenadas cíclicas

Las ecuaciones de movimiento de obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, 3 \\ t\ \ r\ \ \theta,\ \phi \end{pmatrix}$$

$$\{t, \phi\} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad (q_i = t, \phi\}$$

$$\Rightarrow \quad p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -f(r)\dot{t} \equiv -E \quad : \text{cte.}$$

$$\wedge \quad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi} \equiv L \quad : \text{cte.}$$

* El E-T de Schwarzschild es asintóticamente pleno, es decir, cuando $r \to \infty$, la métrica se convierte en Minkoswki. Como consecuencia, la constante de movimiento E puede ser reconocida como la energía.