Tarea I
Metodo de Brackets
Licenciatura en Física - 2022[1]

1. Transforme las siguientes integrales con el cambio de variable adecuado para ser evaluadas en el intervalo $[0,\infty[$:

   (a) $\displaystyle\int_0^a f(x)\ dx$

   (b) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\ dx$

   (c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$

2. Demuestre que:
$$\sum_{k=n}^{N} F(k) = \sum_{k=0}^{N-n} F(k+n)$$

3. Sea:
$$f(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix} \middle| x \right)$$
   halle la respectivas representaciones hipergeométricas de:

   (a) $\displaystyle\int f(x)\ dx$

   (b) $\displaystyle\frac{d}{dx} f(x)$

   (c) En la expresión ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix} \middle| x \right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}$,
   reescriba la suma infinita como una hipergeométrica.

[1] FECHA DE ENTREGA: Viernes 23 de Septiembre - 2022

4. Halle la k-*ésima* derivada $f^{(k)}(x)$ si:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \phi_n \, F(n) \, x^n$$

5. La evaluación del segundo coeficiente virial esta asociado con la siguiente integral definida:

$$B(T) = -2\pi \int_0^\infty \left[e^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1 \right] r^2 dr.$$

En la expresión anterior, $u(r)$ corresponde al potencial intermolecular entre las partículas del sistema. En nuestro caso utilizaremos para $u(r)$ el potencial de Mie, una generalización del potencial intermolecular de Lennard-Jones, el cual es definido por la expresión:

$$u(r) = \epsilon A \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^n - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^m \right] \qquad (n > m > 3),$$

donde por conveniencia notacional hacemos:

$$A = \left(\frac{n}{n-m} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^{\left(\frac{m}{n-m} \right)},$$

el parámetro ϵ corresponde a la profundidad del pozo de potencial, σ es la distancia (finita) en la que el potencial entre partículas es nulo y r es la distancia relativa entre las partículas. Luego, se tiene que:

$$B(T^*) = -2\pi \int_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{1}{T^*} \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^n - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^m \right] \right) - 1 \right) r^2 dr,$$

donde por conveniencia hemos definido $\dfrac{1}{T^*} = \dfrac{A\epsilon}{kT}$. Se conoce que la solución para $B(T^*)$ está dada por la siguiente expresión:

$$B(T^*) = -\frac{2\pi\sigma^3}{n(T^*)^{\frac{3}{n}}} \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma\left(\frac{km-3}{n} \right)}{k!} \left(\frac{1}{T^*} \right)^{\left(\frac{n-m}{n} \right) k}$$

   (a) Demuestre por integración por partes que la integral solo está definida para $m > 3$.
   (b) Para el caso $m = 6$ y $n = 9$, demuestre que $B(T^*)$ se puede escribir como una combinación de funciones hipergeométricas de la forma ${}_pF_p$ $(p = 1, 2, ...)$.

6. Si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a(n) \, x^n$ y $g(x) = \sum_{n\geq 0} b(n) \, x^n$, demuestre que $f(x) \, g(x) = \sum_{n\geq 0} c(n) \, x^n$, donde:

$$c(n) = \sum_{k=0}^{n} a(n-k) \, b(k)$$

7. Evalúe el siguiente límite:

$$L = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Gamma(-N\epsilon)}{\Gamma(-M\epsilon)}$$

para $\{N, M\} \in \mathbb{N}$.