El Método de Brackets (MoB), una nueva técnica de integración : Aplicaciones

Paulina Cabrera & Iván González
Instituto de Física y Astronomía, Universidad de Valparaíso, Chile

Resumen

En este trabajo presentamos una nueva técnica de integración a través de una secuencia de aplicaciones asociadas a integrales de una o más variables. La técnica se denomina Método de Brackets (MoB, su sigla en inglés) [1, 2] y tiene su origen en la teoría cuántica de campos, donde fué utilizada para evaluar diagramas de Feynman. Mostraremos los procedimientos planteados por MoB, los cuales se utilizarán para evaluar diversos problemas de Matemática Pura como también de la Física Matematica. Una gran cantidad de ejemplos son mostrados en Ref. [1, 2, 3], donde MoB ha permitido la evaluación de una lista extensa de integrales de Ref. [4].

I.- Reglas básicas

Regla cero : Definición de un bracket

$$\int_0^\infty x^{a_1+a_2+...+a_n-1}dx = \langle a_1+a_2+...+a_n\rangle \tag{1}$$

Regla uno :Expansión de polinomios

$$\begin{aligned}&(A_1+...+A_r)^{\pm\mu} = \\ &\sum_{n_1}...\sum_{n_r}\phi_{n_1}...\phi_{n_r}\ (A_1)^{n_1}...(A_r)^{n_r}\frac{\langle \mp\mu+n_1+...+n_r\rangle}{\Gamma(\mp\mu)}\end{aligned} \tag{2}$$

siendo $\phi_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}$.

Regla dos : Resolución de la suma de brackets

$$\begin{aligned}\mathbf{J} = &\sum_{n_1}...\sum_{n_r}\phi_{n_1}...\phi_{n_r}\ C(n_1,...,n_r)\\ &\times\ \langle a_{11}n_1+...+a_{1r}n_r+c_1\rangle\ ...\\ &\times...\langle a_{r1}n_1+...+a_{rr}n_r+c_r\rangle\,,\end{aligned} \tag{3}$$

siendo el coeficiente $C(n_1,...,n_r)$ es una cantidad dependiente de parámetros arbitrarios de la integral y de los índices de suma $\{n_i\}$ $(i=1,...,r)$. La solución a esta suma múltiple viene dada mediante la siguiente fórmula general:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|}\ \Gamma\left(-n_1^*\right)...\Gamma\left(-n_r^*\right)\ C(n_1^*,...,n_r^*), \tag{4}$$

donde:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}, \tag{5}$$

y los valores para las variables $\{n_i^*\}$ $(i=1,...,r)$ corresponden a la solución del sistema lineal obtenido por anulación de los brackets en Ec. (3):

$$\begin{cases} a_{11}n_1+...+a_{1r}n_r = & -c_1\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ a_{r1}n_1+...+a_{r}n_r = & -c_r.\end{cases} \tag{6}$$

Si la matriz A no es invertible, entonces el valor para J no está definido. Para aquellos casos donde el número de sumas es mayor que el número de brackets, el procedimiento está indicado en [1, 2] partir de estas simples reglas podemos hallar la solución a una amplia variedad de integrales.

II.- Aplicaciones de MoB

II.a.- Integrales de Cauchy-Frullani

Analicemos la siguiente familia de integrales:

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\ dx \tag{7}$$

Teorema : Si $f(x)$ admite una expansión en serie de potencias de la forma $f(x) = \sum_{k\geq 0}\phi_k\ C(k)\,x^{\beta k}$, siendo β un exponente positivo arbitrario y con $C(0)\neq 0$ pero finito, entonces la solución de Ec. (7) está dada por la fórmula a continuación:

$$I = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{8}$$

Demostración

Para evaluar dicha integral agregaremos un parámetro extra para regularizar la solución, esto es:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x^{1-\epsilon}}\ dx, \tag{9}$$

luego, la integral puede ser reescrita como sigue:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \sum_{k\geq 0}\phi_k\ C(k)\left[a^{\beta k}-b^{\beta k}\right]x^{\beta k}\frac{dx}{x^{1-\epsilon}}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_k \phi_k\ C(k)\left[a^{\beta k}-b^{\beta k}\right]\langle\beta k+\epsilon\rangle\,.\end{aligned} \tag{10}$$

La solución obtenida es la siguiente:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{\beta}\right)C\left(-\frac{\epsilon}{\beta}\right)\left[a^{-\epsilon}-b^{-\epsilon}\right]}{|\beta|}. \tag{11}$$

Evaluando en el límite $\epsilon\to 0$ permite hallar la solución:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to 0}\ C(0)\left[\ln(b)-\ln(a)\right]+O(\epsilon)\\ &= C(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

pero $C(0) = f(0)$, por lo tanto:

$$I = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{13}$$

II.b.- Integrales de funciones hipergeométricas

Si $f(x)$ es una función expresable en términos de una función hipergeométrica de la forma ${}_qF_p\left(\begin{matrix}\{a\}\\ \{b\}\end{matrix}\middle|-Ax^\beta\right)$, entonces la solución de la integral:

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\ {}_qF_p\left(\begin{matrix}\{a\}\\ \{b\}\end{matrix}\middle|-Ax^\beta\right)dx, \tag{14}$$

comienza con hallar su respectiva expansión en brackets, esto es:

$$I = \sum_n \phi_n\ A^n\frac{(a_1)_n...(a_q)_n}{(b_1)_n...(b_p)_n}\langle\alpha+\beta n\rangle \tag{15}$$

y posteriormente aplicando la regla de reemplazo del bracket obtenemos lo siguiente:

$$I = A^n\frac{(a_1)_n...(a_q)_n}{(b_1)_n...(b_p)_n}\frac{\Gamma(-n)}{\beta}, \tag{16}$$

donde hacemos $n=-\frac{\alpha}{\beta}$, luego la solución es:

$$I = A^{-\frac{\alpha}{\beta}}\frac{(a_1)_{-\frac{\alpha}{\beta}}...(a_q)_{-\frac{\alpha}{\beta}}}{(b_1)_{-\frac{\alpha}{\beta}}...(b_p)_{-\frac{\alpha}{\beta}}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\beta}, \tag{17}$$

los símbolos $(a)_n$ corresponden a los símbolos de Pochhammer y se definen como un cuociente de funciones Gamma:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{18}$$

II.c.- Integrales del producto de funciones hipergeométricas

Deseamos integrar mediante MoB el siguiente problema genérico:

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)\,g(x)\ dx. \tag{19}$$

Supondremos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones expresables en términos de series infinitas y en particular como funciones hipergeométricas generalizadas, esto es:

$$f(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,...,a_p\\ b_1,...,b_q\end{matrix}\middle|-Cx^\beta\right), \tag{20}$$

$$g(x) = {}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_1,...,A_P\\ B_1,...,B_Q\end{matrix}\middle|-Dx^\delta\right), \tag{21}$$

siendo $\alpha, A, B, \beta, \delta$ cantidades arbitrarias. La aplicación de MoB a esta integral nos permite obtener la expansión en brackets equivalente, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$I \to \sum_{l_1=0}^\infty\sum_{l_2=0}^\infty \phi_{l_1,l_2}\frac{(a_1)_{l_1}...(a_p)_{l_1}}{(b_1)_{l_1}...(b_q)_{l_1}}\frac{(A_1)_{l_2}...(A_P)_{l_2}}{(B_1)_{l_2}...(B_Q)_{l_2}} \tag{22}$$

$$\times C^{l_1}D^{l_2}\langle\alpha+l_1\beta+l_2\delta\rangle\,, \tag{23}$$

y a partir de la cual se obtienen evidentemente dos soluciones:

$$\begin{aligned} I_1 = &\frac{1}{\delta D^{\frac{\alpha}{\delta}}}\sum_{n=0}^\infty\frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...(b_q)_n}\frac{(A_1)_{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}n}...(A_P)_{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}n}}{(B_1)_{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}n}...(B_Q)_{-\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}n}}\\ &\times\Gamma\left(\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}n\right)\frac{\left(-\frac{C}{D^{\frac{\beta}{\delta}}}\right)^n}{n!},\end{aligned} \tag{24}$$

y también:

$$\begin{aligned} I_2 = &\frac{1}{\beta C^{\frac{\alpha}{\beta}}}\sum_{n=0}^\infty\frac{(a_1)_{-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\beta}n}...(a_p)_{-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\beta}n}}{(b_1)_{-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\beta}n}...(b_q)_{-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\delta}{\beta}n}}\frac{(A_1)_n...(A_P)_n}{(B_1)_n...(B_Q)_n}\\ &\times\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\delta}{\beta}n\right)\frac{\left(-\frac{D}{C^{\frac{\delta}{\beta}}}\right)^n}{n!}.\end{aligned} \tag{25}$$

Los términos en Ec. (24) y Ec. (25) corresponden a soluciones diferentes de I pero ambos son equivalentes.

II.d.- Integral de Fermi-Dirac generalizada

$$F_{k,m}(\eta,\beta) = \int_0^\infty\frac{x^k\left(1+\frac{1}{2}\beta x\right)^m}{e^{x-\eta}+1}\ dx, \tag{26}$$

la expansión en brackets de esta integral es la siguiente:

$$\begin{aligned} F_{k,m}(\eta,\beta) = &\sum_{n_1}...\sum_{n_5}\phi_{n_1}...\phi_{n_5}\ (\text{-}1)^{-n_5}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n_2}\frac{\exp(-\eta\ n_3)n_3^{n_5}}{\Gamma(-m)}\\ &\times\ \langle\text{-}m+n_1+n_2\rangle\langle 1+n_3+n_4\rangle\langle k+1+n_2+n_5\rangle\,,\end{aligned} \tag{27}$$

a partir de la cual hallamos la solución general para este caso:

$$\begin{aligned} F_{k,m}(\eta,\beta) = &\text{-}\Gamma(k+1)\sum_{n=0}^\infty\frac{(k+1)_n(-m)_n}{n!}\left(\text{-}\frac{\beta}{2}\right)^n\\ &\times\mathbf{Li}_{k+1+n}(\text{-}\exp(\eta))\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Aplicación : La presión de un gas de fermiones en un régimen de degenerancia y de velocidades (relativistas) arbitrarios está descrita por la expresión $P = \frac{16\pi\sqrt{2}m^4c^5}{3h^3}\beta^{\frac{5}{2}}\ F_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\eta,\beta)$.

II.e.- Función de Debye

$$D_N(\alpha,X) = \frac{N}{X^N}\int_0^X\frac{t^N}{e^t-\alpha}dt, \tag{29}$$

cuya expansión en serie de brackets es la siguiente:

$$\begin{aligned} D_N(\alpha,X) = &NX\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\phi_{n_1}\phi_{n_2}\phi_{n_3}\ (\text{-}1)^{n_2-n_3}\\ &\times\ \alpha^{n_2}n_1^{n_3}X^{n_3}\frac{\Gamma(N+1+n_3)}{\Gamma(N+2+n_3)}\langle 1+n_1+n_2\rangle\,,\end{aligned} \tag{30}$$

de la cual una de sus soluciones es la siguiente:

$$D_N(\alpha,X) = \frac{N\Gamma(N+1)}{X^N\alpha}\left[\mathbf{Li}_{N+1}(\alpha)\text{-}\sum_{k=0}^N\mathbf{Li}_{N+1-k}\left(\alpha e^{-X}\right)\frac{X^k}{k!}\right]. \tag{31}$$

Aplicación : De acuerdo con el modelo de Debye, la energía interna de un sólido depende de la temperatura absoluta T según la expresión $U = 3Nk_BT\ D_3\left(1,\frac{\Theta_D}{T}\right)$.

II.f.- Una integral multidimensional

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty...\int_0^\infty\frac{x_1^{p_1-1}...x_n^{p_n-1}}{\left[1+(r_1x_1)^{q_1}+...+(r_nx_n)^{q_n}\right]^s}\ dx_1...dx_n. \tag{32}$$

La expansión en serie de brackets se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} I = &\sum_{k_0}...\sum_{k_n}\phi_{k_0}...\phi_{k_n}\ (r_1)^{q_1k_1}...(r_n)^{q_nk_n}\\ &\times\frac{\langle s+k_0+k_1+...+k_n\rangle\langle p_1+q_1k_1\rangle...\langle p_n+q_nk_n\rangle}{\Gamma(s)}.\end{aligned} \tag{33}$$

Es fácil verificar que la solución a esta integral es la siguiente:

$$G = \frac{1}{q_1...q_n}\frac{1}{r_1^{p_1}...r_n^{p_n}}\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}\right)...\Gamma\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\Gamma\left(s-\frac{p_1}{q_1}-...-\frac{p_n}{q_n}\right)}{\Gamma(s)}. \tag{34}$$

II.g.- Otra familia de integrales

$$I = \int_0^\infty \ln^k(x)\,f(x)\ dx, \tag{35}$$

suponemos luego que $f(x)$ tiene representación en serie de potencias de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_n\phi_n\ C(n)\,x^{\alpha+\beta n}, \tag{36}$$

luego podemos reescribir el factor logarítmico como sigue:

$$\ln^k(x) = \left[\frac{d^k}{d\zeta^k}\left(x^\zeta\right)\right]_{\zeta=0}. \tag{37}$$

Entonces, con MoB obtenemos la serir de brackets de este problema:

$$\begin{aligned} I = &\frac{d^k}{d\zeta^k}\left[\sum_{n\geq 0}\phi_n\ C(n)\int_0^\infty x^{\zeta+\alpha+\beta n}dx\right]_{\zeta=0}\\ &\frac{d^k}{d\zeta^k}\left[\sum_{n\geq 0}\phi_n\ C(n)\,\langle 1+\zeta+\alpha+\beta n\rangle\right]_{\zeta=0},\end{aligned} \tag{38}$$

y finalmente su solución:

$$I = \frac{1}{|\beta|}\frac{d^k}{d\zeta^k}\left[C\left(-\frac{1+\zeta+\alpha}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1+\zeta+\alpha}{\beta}\right)\right]_{\zeta=0} \tag{39}$$

o equivalentemente:

$$I = \frac{1}{|\beta|}\frac{d^k}{d\alpha^k}\left[C\left(-\frac{1+\alpha}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right)\right] \tag{40}$$

III.- Conclusiones

Desventajas

- Las soluciones se buscan en términos de un algoritmo$\Longrightarrow$conjeturas (En este aspecto falta formalizar los procedimientos$\Longrightarrow$teoremas).
- MoB siempre entrega una solución, pero no necesariamente es amigable.

Ventajas

- El Método de Brackets es una técnica de integración simple con la cual es posible evaluar problemas complejos.
- La justificación formal de método se halla en RMT (Teorema Maestro de Ramanujan).
- El Método de Brackets tiene reglas simples y es sistemático, por ende su automatización es factible realizarla en algún paquete de programación : Mathematica, MAPLE, etc.
- Resuelve integrales múltiples de forma simultánea.
- Para evaluar integrales solo se requiere evaluar sistemas de ecuaciones lineales.

Referencias

[1] I. González and V. Moll, Definite integrals by method of brackets. Part 1, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73 (2010).

[2] I. González, V. Moll and A. Straub, The method of brackets. Part 2: examples and applications, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 157-171 (2010).

[3] I. González, K. Kohl, V. H. Moll, "Evaluation of Entries in Gradshteyn and Ryzhik employing the Method of Brackets". Scientia, Series A: Math. Sciences, Vol. 25, 65-84 (2014).

[4] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. Table of Integrals, Series, and Products. Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. Academic Press, New York, 7th edition, 2007.