# Termodinámica - Clase 19

Graeme Candlish

Institúto de Física y Astronomía, UV
*graeme.candlish@ifa.uv.cl*

# Contenido

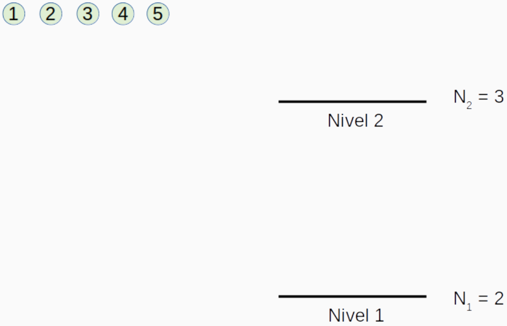
# Conceptos en esta clase

- Contando microestados (con ciertos valores de los $N_j$):
  - Maxwell-Boltzmann
  - Bose-Einstein
  - Fermi-Dirac

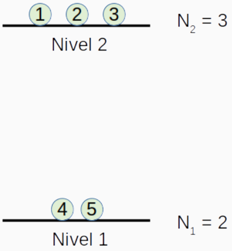
# Contenido

# Ejemplo con dos niveles de energía

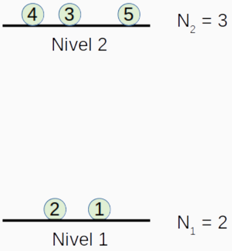
Consideremos primero un sistema donde no hay degeneración de los niveles de energía. En el ejemplo hay 2 niveles, 5 partículas, y los números de ocupación son $N_2 = 3$ y $N_1 = 2$.



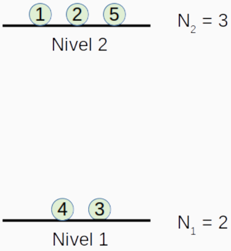
# Ejemplo con dos niveles de energía



# Ejemplo con dos niveles de energía



# Ejemplo con dos niveles de energía



# Ejemplo con dos niveles de energía

Tenemos el problema de organizar 5 objetos (partículas) en 2 cajas (niveles de energía) donde hay 3 objetos (partículas) en la primera caja (nivel de energía) y 2 objetos en la segunda. Ya sabemos como resolver este problema!

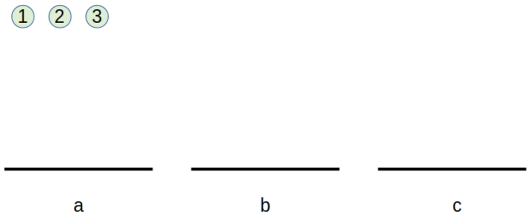
$$W = N! \prod_j \frac{1}{N_j!} = 5! \frac{1}{3!} \frac{1}{2!} = 10$$

# Estadística de Maxwell-Boltzmann

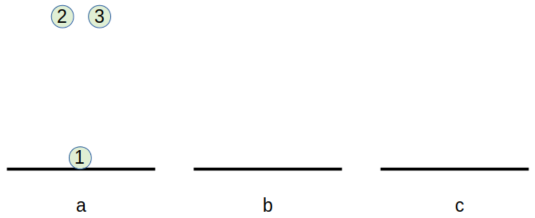
Ahora incluyimos la degeneración de los niveles de energía. Consideremos un nivel de energía $j$ con número de ocupación $N_j$. Ya que las partículas son **distinguibles** podemos identificar partícula 1, partícula 2, etc.

- Partícula 1: elegimos uno de los $g_j$ estados posibles.
- Partícula 2: no hay límite en el número de partículas que pueden ocupar el mismo estado, así que hay $g_j$ estados posibles de nuevo.
- Partícula 3: de nuevo, $g_j$ estados posibles.
- ...hasta partícula $N_j$. Todas las partículas tienen $g_j$ estados posibles.

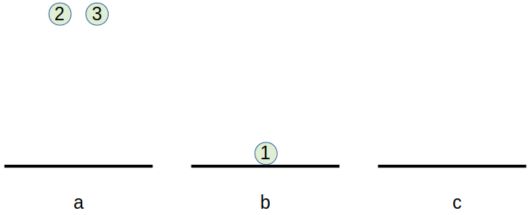
# Ejemplo con $3$ estados degenerados



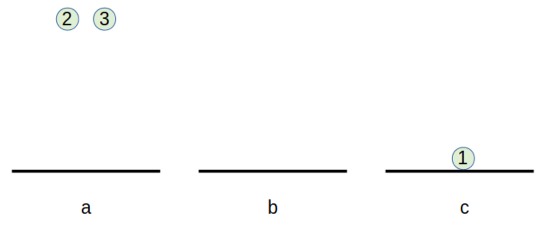
# Ejemplo con $3$ estados degenerados



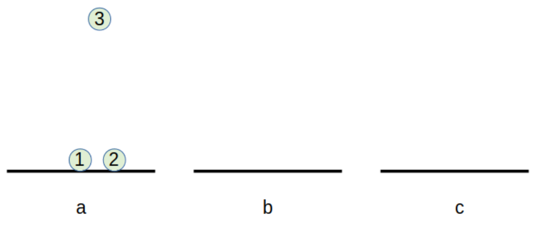
# Ejemplo con $3$ estados degenerados



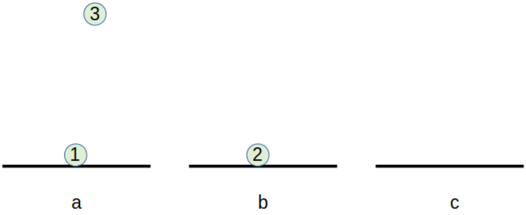
# Ejemplo con $3$ estados degenerados



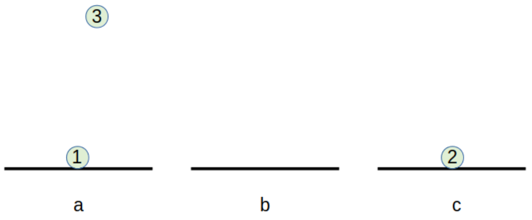
## Ejemplo con 3 estados degenerados



# Ejemplo con 3 estados degenerados



# Ejemplo con $3$ estados degenerados



# Número de microestados en un nivel degenerado

Ejemplo:

- Para partícula 1 hay 3 estados posibles ($g_j = 3$).
- Para partícula 2 hay, de nuevo, 3 estados posibles.
- Para partícula 3 hay, de nuevo, 3 estados posibles.
- Es lo mismo para partículas 4 y 5.
- Entonces, hay $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ estados posibles en total (para este nivel de energía).

# Número de microestados en un nivel degenerado

Entonces, para partículas que cumplen la estadística de Maxwell-Boltzmann (sin restricción en el número de partículas en cada estado y las partículas son distinguibles) el número de estados posibles en nivel $j$ con degeneración $g_j$ es:

$$\boxed{\omega_j = g_j^{N_j}}$$

## Número total de microestados (con ciertos $N_j$)

- Hay $\omega_j$ estados posibles en nivel $j$ con número de ocupación $N_j$.
- Entonces, considerando todos los niveles de energía, hay $\prod_j \omega_j = \prod_j g_j^{N_j}$ estados posibles, donde $N_j$ es el número de ocupación de cada nivel.

# Número total de microestados (con ciertos $N_j$)

- Ya vimos como podemos organizar $N$ partículas entre los $j$ niveles.
- Por lo tanto el número **total** de formas de organizar $N$ partículas entre los niveles de energía, con número de ocupación $N_j$ y degeneración $g_j$ es

$$\boxed{\mathcal{W} = N! \prod_j \frac{g_j^{N_j}}{N_j!}}$$

# Microestados en la estadística de Maxwell-Boltzmann

$$\mathcal{W}_{MB} = N! \prod_j \frac{g_j^{N_j}}{N_j!}$$

- Este resultado expresa el número de microestados posibles **para estos números de ocupación** $N_j$.
- Para calcular el número total de microestados disponibles, hay que sumar sobre todas las combinaciones posibles de números de ocupación, que son consistentes con la energía total del sistema.

# Contenido

**Bose-Einstein**: partículas *indistinguibles*, sin restricción en sus estados.

En este caso no podemos elegir una partícula como partícula 1, la otra como partícula 2, etc. porque son todas iguales! Las partículas cuánticas son así.

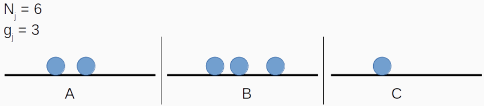

Lo que importan son los $N_j$.

## Estadística Bose-Einstein

Consideremos un nivel de energía $j$. Tenemos $N_j$ partículas, y $g_j$ estados. Así que el problema es determinar cuántas formas de organizar las $N_j$ partículas en distintos grupos, donde hay un máximo de $g_j$ grupos posibles.

# Estadística Bose-Einstein

- Consideremos $N_j$ puntos, y $g_j - 1$ líneas que dividen los puntos en $g_j$ grupos.
- Entonces, hay $g_j + N_j - 1$ ubicaciones, donde $g_j - 1$ están ocupadas por las líneas, las otras por los puntos.
- ¿Cómo podemos organizar $g_j - 1$ objetos de un total de $g_j + N_j - 1$?



## Estadística Bose-Einstein

El coeficiente binomial nos dice cuantas formas hay de elegir $n$ objetos de un conjunto de $N$.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

En este caso tenemos

$$\binom{g_j + N_j - 1}{g_j - 1} = \frac{(g_j + N_j - 1)!}{(g_j - 1)!(g_j + N_j - 1 - (g_j - 1))!} = \frac{(g_j + N_j - 1)!}{(g_j - 1)!N_j!}.$$

Entonces

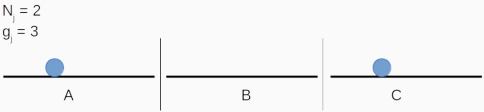
$$\omega_j = \frac{(g_j + N_j - 1)!}{(g_j - 1)!N_j!}, \qquad \mathcal{W}_{BE} = \prod_j \frac{(g_j + N_j - 1)!}{(g_j - 1)!N_j!}.$$

Podemos ver que $\mathcal{W}_{BE} \neq \mathcal{W}_{MB}$! De nuevo el número **total** de microestados viene de la suma sobre todos los valores de $N_j$ consistentes con la energía total.

# Contenido

# Estadística Fermi-Dirac

**Fermi-Dirac**: partículas *indistinguibles*, sólo una partícula por estado.



# Estadística Fermi-Dirac

De nuevo, consideremos un nivel de energía $j$. Hay que elegir $N_j$ estados del conjunto total de $g_j$. ¿Cuántas formas hay de elegir $N_j$ elementos de un conjunto de $g_j$ elementos? El coeficiente binomial de nuevo!

$$\binom{g_j}{N_j} = \frac{g_j!}{(g_j - N_j)!N_j!}. \tag{1}$$

Entonces,

$$\omega_j = \frac{g_j!}{(g_j - N_j)!N_j!}, \qquad \mathcal{W}_{FD} = \prod_j \frac{g_j!}{(g_j - N_j)!N_j!}. \tag{2}$$

# Contenido

# Resumen

Para ciertos valores de los $N_j$, hemos obtenido el número de microestados en un sistema que cumple las estadísticas de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein o Fermi-Dirac.

$$\mathcal{W}_{MB} = N! \prod_j \frac{g_j^{N_j}}{N_j!} \qquad \mathcal{W}_{BE} = \prod_j \frac{(g_j + N_j - 1)!}{(g_j - 1)! N_j!}$$

$$\mathcal{W}_{FD} = \prod_j \frac{g_j!}{(g_j - N_j)! N_j!}$$