Nuevas técnicas de integración desde la Física : Método de Brackets (MoB)

Iván González
ivan.gonzalez@uv.cl
Departamento de Física y Astronomía, Universidad de Valparaíso

Resumen

Presentamos un metodo heurístico destinado a la evaluación simbólica de integrales definidas multivariables, cuyo intervalo de integración es $[0,\infty[$. Este método se denomina Método de Brackets (**MoB**, su sigla en inglés), el cual tiene su origen en el formalismo matemático de la teoría cuántica de campos, específicamente, en la evaluación de las integrales asociadas a los diagramas de Feynman. A pesar de su origen no formal, **MoB** resulta ser una generalización multidimensional del Teorema Maestro de Ramanujan. Esta técnica de integración es una poderosa herramienta de cálculo cuyas características y procedimientos la dejan al nivel de cualquier técnica de integración multivariable conocida. En este trabajo presentamos las reglas operacionales de **MoB** y se desarrollarán algunos ejemplos que permitirán su entendimiento.

I. El método de brackets (MoB)

El objetivo de esta técnica es evaluar integrales multivariables definidas en el intervalo $[0,\infty[$. El método de brackets tiene su origen en técnicas desarrolladas para evaluar diagramas de Feynman [2, 3, 4]. A continuación haremos la descripción breve de las reglas operacionales para la aplicación de **MoB**. Muchos ejemplos son discutidos en Refs. [3, 4]. La aplicación de este procedimiento transforma la integral a través de expansiones sucesivas en una serie múltiple denominada "serie de brackets": $\langle\cdot\rangle$. A partir de esta serie y a través de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, generado por el mismo procedimiento de integración es posible hallar la solución de la integral.

Regla 0 : El bracket

A la pregunta: ¿qué es un brackets?, podemos por ahora indicar una estructura matemática que representa a una integral divergente. Por definición, dicha equivalencia es la siguiente:

$$\int_0^\infty x^{a_1+a_2+\ldots+a_n-1}dx=\langle a_1+a_2+\ldots+a_n\rangle, \qquad (1)$$

siendo $\{a_i\}$ $(i=1,\ldots n)$ índices arbitrarios. Desde el punto de vista de la operación matemática el comportamiento del brackets es similar a la de una delta de Kronecker. A continuación presentamos la secuencia de pasos necesarios para transformar una integral arbitraria en su equivalente serie de brackets y luego hallar la solución de la misma integral.

Regla i : Expansión de una función arbitraria

Para aplicar esta técnica de integración debemos reemplazar cada parte del integrando por su respectiva serie de potencias, si esta existe. Es necesario representar una función arbitraria $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\, C(n)\ x^n, \qquad (2)$$

siendo $C(n)$ un coeficiente y ϕ_n un factor convencional y que es necesario generar por cada expansión realizada en el integrando. Dicho factor está definido de la siguiente forma $\phi_n=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}$, esto permite una correcta aplicación de MoB cuando utilizamos las reglas que a continuación siguen.

Regla ii : Expansión de polinomios

Para estructuras polinómicas de la forma $(A_1+\ldots+A_r)^{\pm\mu}$, utilizamos la siguiente representación en términos de series de brackets:

$$(A_1+\ldots+A_r)^{\pm\mu}=\sum_{n_1}\ldots\sum_{n_r}\phi_{n_1,\ldots,n_r}\,(A_1)^{n_1}\ldots(A_r)^{n_r}\times\frac{\langle\mp\mu+n_1+\ldots+n_r\rangle}{\Gamma(\mp\mu)}, \qquad (3)$$

la derivación de esta regla está demostrada en [3]. Donde ademas se ha utilizado por comodidad la notacion siguiente: $\phi_{n_1,\ldots,n_r}=\phi_{n_1}\ldots\phi_{n_r}$

Regla iii : Eliminando signos de integración

Una vez aplicada las reglas I y II, solo nos basta reemplazar los signos integrales utilizando para ello la definición del bracket (Regla 0).

Regla iv : Encontrando la solución

Una vez aplicada las reglas anteriores, el resultado es la representación en términos de una serie de brackets de la integral a evaluar. Llamemos **J** a dicha representación, para el caso donde el número de sumas es igual a la cantidad de brackets, esto es:

$$\mathbf{J}=\sum_{n_1}\sum_{n_r}\phi_{n_1}\ldots\phi_{n_r}\,C(n_1,\ldots,n_r)\,\langle a_{11}n_1+\ldots+a_{1r}n_r+c_1\rangle \times\ldots\times\langle a_{r1}n_1+\ldots+a_{rr}n_r+c_r\rangle, \qquad (4)$$

siendo el coeficiente $C(n_1,\ldots,n_r)$ una cantidad dependiente de parámetros arbitrarios de la integral y de los índices de suma $\{n\}$ $(i=1,\ldots,r)$. La solución a esta suma múltiple viene dada mediante la siguiente fórmula general:

$$\mathbf{J}=\frac{1}{|\det(\mathbf{A})|}\Gamma(-n_1^*)\ldots\Gamma(-n_r^*)\ C(n_1^*,\ldots,n_r^*), \qquad (5)$$

donde $\det(\mathbf{A})$ es evaluado a partir de la siguiente expresión:

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}, \qquad (6)$$

y los valores para las variables $\{n_i^*\}$ $(i=1,\ldots,r)$ corresponden a la solución del sistema lineal obtenido por anulación de los brackets en Ec. (4):

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}n_1+\ldots+a_{1r}n_r &=& -c_1\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r1}n_1+\ldots+a_{rr}n_r &=& -c_r.\end{array}\right. \qquad (7)$$

Si la matriz **A** no es invertible, entonces el valor para **J** no está definido (no es posible obtener resultado alguno). Para aquellos casos donde el número de sumas es mayor que el número de brackets, el procedimiento está indicado en [3, 4]. A partir de estas simples reglas podemos hallar la solución a una amplia variedad de integrales de manera muy simple.

II. Solución de integrales de la forma

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)dx$$

Si $f(x)$ es una función expresable en términos de una función hipergeométrica de la forma ${}_qF_p\left(\begin{matrix}\{a\}\\ \{b\}\end{matrix}\middle|-Ax^\beta\right)$, entonces la solución de la integral está dada por la siguiente expresión general:

$$\boxed{I=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_p)}{A^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta\ \Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_q)}\frac{\Gamma\left(a_1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\ldots\Gamma\left(a_q-\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\Gamma\left(b_1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\ldots\Gamma\left(b_p-\frac{\alpha}{\beta}\right)}}$$

La demostración de esta fórmula la hacemos a continuación:

$$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\ {}_qF_p\left(\begin{matrix}\{a\}\\ \{b\}\end{matrix}\middle|-Ax^\beta\right)dx,$$

o equivalentemente

$$I=\sum_n\phi_n\,A^n\frac{(a_1)_n\cdots(a_q)_n}{(b_1)_n\cdots(b_p)_n}\underbrace{\int x^{\alpha+\beta n-1}}_{\langle\alpha+\beta n\rangle},$$

con lo que se obtiene la expansión en brackets correspondiente:

$$I=\sum_n\phi_n\,A^n\frac{(a_1)_n\cdots(a_q)_n}{(b_1)_n\cdots(b_p)_n}\langle\alpha+\beta n\rangle$$

y posteriormente aplicando la regla IV, obtenemos la solución siguiente:

$$I=A^n\frac{(a_1)_n\cdots(a_q)_n}{(b_1)_n\cdots(b_p)_n}\frac{\Gamma(-n)}{\beta},$$

donde $n=-\frac{\alpha}{\beta}$, haciendo los reemplazos correspondientes tenemos finalmente que:

$$I=A^{-\frac{\alpha}{\beta}}\frac{(a_1)_{-\frac{\alpha}{\beta}}\ldots(a_q)_{-\frac{\alpha}{\beta}}}{(b_1)_{-\frac{\alpha}{\beta}}\ldots(b_p)_{-\frac{\alpha}{\beta}}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\beta}$$

Como aplicación evaluemos la siguiente integral:

$$I=\int_0^\infty dx\ x^\mu J_\nu(ax)$$

$$\Downarrow$$

$$I=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{a}{2}\right)^\nu\int_0^\infty dx\ x^{(\mu+\nu+1)-1}\times\ {}_0F_1\left(-;\ 1+\nu\middle|-\frac{1}{4}a^2x^2\right)$$

Teniendo ya la estructura requerida, simplemente se aplica la fórmula dada con anterioridad para hallar la solución:

$$\boxed{I=\frac{2^\mu}{a^{\mu+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)}}$$

III. Algoritmo general de MoB

Las reglas procedurales de **MoB**, es posible resumirlas de forma implícita en el siguiente diagrama o algoritmo:

INTEGRAL ORIGINAL

$\Downarrow$

GENERALIZAR ESTRUCTURA DE LA INTEGRAL $\Longrightarrow \int\frac{1}{x+1}\Longrightarrow\int\frac{x^\alpha}{(Ax+B)^\beta}$

$\Downarrow$

OBTENER LA EXPANSION DE BRACKETS

$\Downarrow$

OBTENER TODAS LAS CONTRIBUCIONES

$\Downarrow$

DESCARTAR TODAS LAS CONTRIBUCIONES : NULAS $\bigwedge$ DIVERGENTES

$\Downarrow$

¿QUEDAN TÉRMINOS NO DESCARTADOS? $\Longrightarrow$ NO $\Longrightarrow$ EL MÉTODO NO APLICA A ESTA INTEGRAL

$\Downarrow$

SI

$\Downarrow$

LA SOLUCIÓN CORRECTA ESTA ENTRE LAS CONTRIBUCIONES NO DESCARTADAS

IV. Conclusiones

- **MoB** resuelve N integrales múltiples de manera simultánea. Convencionalmente se evalúan N integrales iteradamente.
- **MoB** no requiere herramientas de cálculo avanzado, solo elementos básicos de álgebra lineal $\Longrightarrow$ Resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- **MoB** se basa en reglas y procedimientos, un algoritmo. Estas características hacen que esta técnica sea altamente automatizable, por ejemplo en Mathematica, MAPLE,Matlab, etc.
- **MoB** es una técnica no completamente formalizada, desde el punto de vista de las Matemáticas. Sin embargo, siendo ella una generalizacion de **RMT**, cualquier demostración rigurosa del método debe tener su origen en el Teorema Maestro de Ramanujan [1].
- Finalmente, la integración múltiple ya no es complicada...la vida hoy es más fácil.

Referencias

- T. Amdeberhan, O. Espinosa, I. González, M. Harrison, Victor H. Moll and A. Straub. "*Ramanujan's Master Theorem*". The Ramanujan Journal, Volume 29, Issue 1-3 , pp 103-120 (2012).
- I. Gonzalez, I. Schmidt. *Optimized negative dimensional integration method (NDIM) and multiloop Feynman diagram calculation.* Nuclear Physics B, 769 (2007) 124–173.
- I. Gonzalez and V. Moll, *Definite integrals by method of brackets. Part 1*, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73 (2010).
- I. Gonzalez, V. Moll and A. Straub, *The method of brackets. Part 2: examples and applications*, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 2010, Pages 157-171.
- L.S. Gradshteyn, L.M.Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 2000 (6th ed.).