Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba II
Parte 1
Métodos Matemáticos
Licenciatura en Física - 2015
IPGG

Obs. La tarea-prueba es de carácter individual.

Integración múltiple de deltas Dirac

---

a).- (25%) Demuestre la propiedad:

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(x+\frac{b}{a}\right) \tag{1}$$

b).- (75%) Consideremos la integral múltiple:

$$I = \int dx_1 ... \int dx_n\, f(x_1, ..., x_n)\; \delta(a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + c_1) ... \delta(a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + c_n)\,. \tag{2}$$

Resolviendo iteradamente las integrales y con uso de la propiedad de Ec. (1), demuestre por inducción que la solución a esta integral viene dada por la siguiente fórmula general:

$$I = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|}\, f(x_1^*, ..., x_n^*)\,, \tag{3}$$

donde $\det(\mathbf{A})$ es evaluado a partir de la siguiente expresión:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

y los valores para las variables $\{x_i^*\}$ $(i = 1, ..., n)$ corresponden a la solución del sistema lineal obtenido por anulación de los los argumentos de las deltas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = & -c_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = & -c_n. \end{cases} \tag{5}$$

Densidades de carga

---

a).- (40%) Dos placas cuadradas cargadas eléctricamente están situadas una frente a la otra, cada una de ellas tiene arista $2a$ y se encuentran separadas una distancia $2d$. Para un sistema de referencia donde el origen se ubica está en el centro geométrico de esta distribución, la placa ubicada en $z = d$ le asociamos una densidad σ_1, mientras la otra placa está caracterizada por una densidad σ_2. Determine la densidad volumétrica de carga de esta distribución.

b).- Considere un anillo de carga Q y radio R el cual yace en el plano $z = 0$ y con centro coincidente con el origen. Determine:

- (10%) $\rho(\mathbf{r})$ en coordenadas cilíndricas.
- (20%) $\rho(\mathbf{r})$ en coordenadas esféricas.

- (30%) Halle el potencial en algún punto z del eje del anillo utilizando la expresión:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

Resuelva utilizando coordenadas esféricas.

Integración con DDFBM (Delta Dirac function based Method)

Resuelva las siguientes integrales.

a).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)\sin(\beta x)\cos(\gamma x)}{x^2}\, dx$ (30%)

b).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\alpha x)\exp\left(-\beta x^2\right)\, dx$ (30%)

c).- $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ (40%)

— Certámen II —

$\overline{B_1}$

Probl. 1)

a) Se tiene que (Demostraremos 1º que $\delta(-x)=\delta(x)$)

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,dk$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$$; si hacemos $k=-\tilde{k}$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\tilde{k}x}\,d\tilde{k}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tilde{k}x}\,d\tilde{k}=\delta(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(-x)=\delta(x) \qquad \overline{\underline{\text{Ec. 1}}}$$

Ahora bien $\delta(ax+b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(ax+b)}\,dk$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ika(x+\frac{b}{a})}\,dk$$

luego

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(ax+b)}\,dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ika(x+\frac{b}{a})}\,dk$$

con el cambio de variable $\tilde{k} = ka$

$$\Downarrow$$

$$dk = \frac{d\tilde{k}}{a}$$

se obtiene que

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{a}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tilde{k}(x+\frac{b}{a})}\,d\tilde{k}$$

$$= \frac{1}{a}\,\delta\left(x+\frac{b}{a}\right) \quad (*)$$

de la identidad dada en Ec. 1. también se cumple que:

$$\delta(ax+b) = \delta(-(ax+b)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(-(ax+b))}\,dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ika(x+\frac{b}{a})}\,dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\tilde{a}\left(x+\frac{b}{a}\right)}\, dk$$

donde $\tilde{a} = -a$

luego haciendo $k\tilde{a} = \tilde{k} \Rightarrow dk = \frac{d\tilde{k}}{\tilde{a}}$

se obtiene

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{\tilde{a}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tilde{k}\left(x+\frac{b}{a}\right)}\, d\tilde{k}$$

$$= \frac{1}{\tilde{a}}\,\delta\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{(-a)}\,\delta\left(x+\frac{b}{a}\right) \quad (**)$$

si comparamos $(*)$ $\wedge$ $(**)$ la igualdad se da si $\delta(ax+b) = 0$ (lo que no es sol.)

o si $\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\,\delta\left(x+\frac{b}{a}\right)$ //h.

b)

caso 1 variable

$$I = \int dx_1\, f(x_1)\, \delta(a_{11}x_1 + c_1) = \int dx_1\, f(x_1)\, \frac{1}{|a_{11}|}\, \delta\left(x_1 + \frac{c_1}{a_{11}}\right)$$

$$= \frac{1}{|a_{11}|} f(x_1^*)$$

con x_1^* solución de $x_1^* + \frac{c_1}{a_{11}} = 0$.

$$x_1^* = -\frac{c_1}{a_{11}}$$

caso 2 variables

$$I = \iint dx_1\, dx_2\, f(x_1, x_2)\, \delta(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1)\, \delta(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2)$$

Eliminamos la suma en x_2 con la 2ª delta:

$$I = \int dx_1\, f(x_1, x_2^*)\, \frac{\delta(a_{11}x_1 + a_{12}x_2^* + c_1)}{|a_{22}|}$$

con x_2^* solución de la ec.

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2^* + c_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_2^* = \frac{-c_2 - a_{21}x_1}{a}$$

luego tenemos que

$$I = \frac{1}{|a_{22}|}\int dx_1\, f(x_1, x_2^*)\, \delta\left(a_{11}x_1 + a_{12}\left(-\frac{c_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}\right) + c_1\right)$$

$$= \frac{1}{|a_{22}|}\int dx_1\, f(x_1, x_2^*)\, \delta\left(\left[\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}\right]x_1 - \frac{a_{12}c_2 + c_1}{a_{22}}\right)$$

$$= \frac{1}{|a_{22}|}\,\frac{1}{\left|\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}\right|}\, f(x_1^*, x_2^*)$$

$$= \frac{1}{\cancel{|a_{22}|}}\,\frac{\cancel{|a_{22}|}}{|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|}\, f(x_1^*, x_2^*)$$

$$= \frac{1}{|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|}\, f(x_1^*, x_2^*)$$

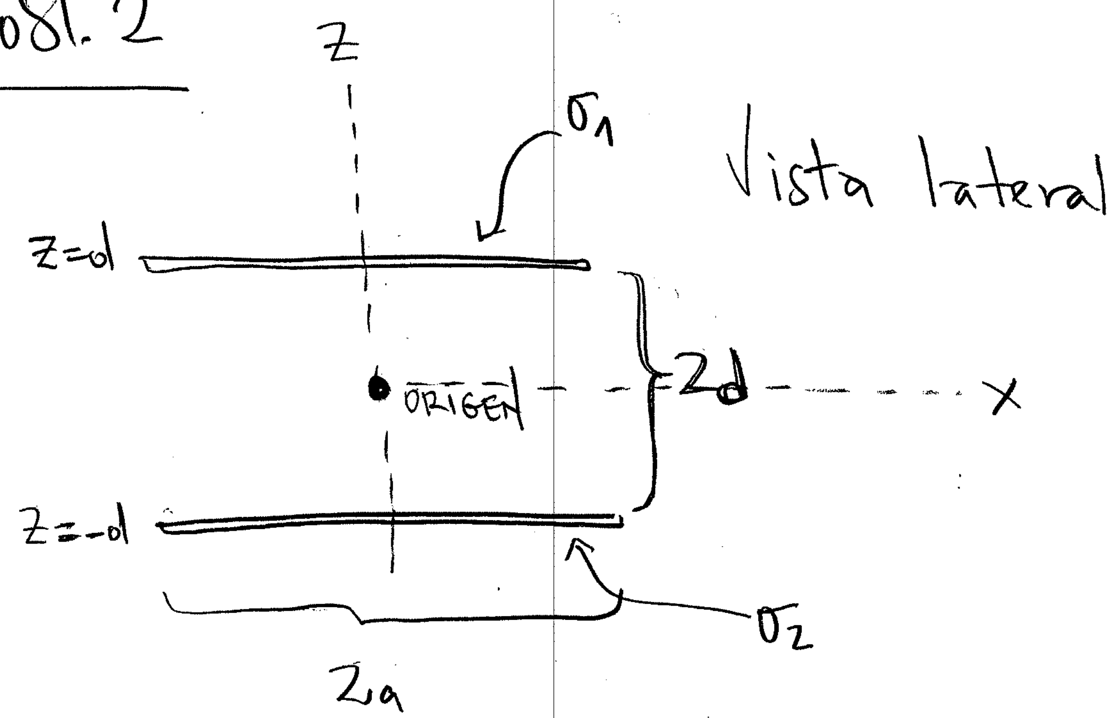
$$= \frac{1}{|\det A|}\, f(x_1^*, x_2^*) \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y x_1^*, x_2^* soluciones de anular los argumentos de los deltas Dirac. //

El proceso se puede generalizar a integrales de N variables.

Probl. 2

a)



$$\rho(\vec{r}) = \rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r})$$

ρ_1: asociada a placa superior

ρ_2: asociada a placa inferior

Para

$$\rho_1(\vec{r}) = \text{algo}_1\, q_1\, \delta(z-d) \left[H(x+a) - H(x-a)\right] \cdot$$
$$\times \left[H(y+a) - H(y-a)\right]$$

determinamos algo$_1$.

$\overline{B_7}$

$$q_1 = \int_{\substack{\text{TODO}\\ \text{EL}\\ \text{ESPACIO}}} \rho_1 \, dV$$

$$= \text{algo}_1 \, q_1 \iiint_{\text{TODO EL ESPACIO}} \delta(z-d) \Big(H(x+a) - H(x-a)\Big)\Big(H(y+a) - H(y-a)\Big) dx\,dy\,dz$$

$$= \text{algo}_1 \, q_1 \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} dz \, \delta(z-d)}}_{1.}$$

$$\cancel{q_1} = \text{algo}_1 \, \cancel{q_1} \, (2a)^2$$

$$1 = \text{algo}_1 \, 4a^2 \implies \text{algo}_1 = \frac{1}{4a^2}$$

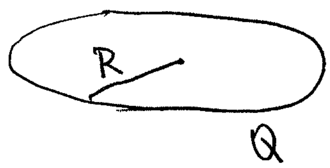
$$\therefore \quad \rho_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{4a^2} \, \delta(z-d) \Big(H(x+a) - H(x-a)\Big)\Big(H(y+a) - H(y-a)\Big)$$

$$\rho_1(\vec{r}) = \sigma_1 \, \delta(z-d) \Big(H(x+a) - H(x-a)\Big)\Big(H(y+a) - H(y-a)\Big)$$

Análogamente

$$\rho_2(\vec{r}) = \sigma_2 \, \delta(z+d) \Big(H(x+a) - H(x-a)\Big)\Big(H(y+a) - H(y-a)\Big)$$

b)



b.1) En coord. cilíndricas

$$\rho(\vec{r}) = \text{algo}\; Q \;\delta(z)\,\delta(r-R)$$

Ahora evaluamos "algo".

$$Q = \int_{\substack{\text{TODO}\\ \text{ESPACIO}}} \rho(\vec{r})\, dV = \text{algo} \times Q \iiint \delta(z)\,\delta(r-R)\, \underbrace{dV}_{dz\,dr\,r\,d\phi}$$

$$= \text{algo} \times Q \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz\,\delta(z) \int_0^{\infty} r\,\delta(r-R)\, dr$$

$$\cancel{Q} = \text{algo} \times \cancel{Q} \times 2\pi \times 1 \times R$$

$$\Downarrow$$

$$\text{algo} = \frac{1}{2\pi R}.$$

Finalmente

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R}\,\delta(z)\,\delta(r-R)$$

; si la carga está distribuida homogéneamente

$$\frac{Q}{2\pi R} = \lambda.$$

si no es así

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{\delta(z)\,\delta(r-R)}{r}$$

b.2) En coord. esféricas

$$\rho(\vec{r}) = \text{algo} \times Q\ \delta(\theta - \pi/2)\ \delta(r-R)$$

determinando "algo"

$$Q = \int_{\text{ALL SP}} \rho(\vec{r})\, dV$$

$$= \text{algo} \times Q \iiint_{\text{ALL SP.}} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\ \delta(\theta - \pi/2)\ \delta(r-R)$$

luego

$$Q = \text{algo} \times Q \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \, \delta(\theta - \pi/2) \int_0^{\infty} r^2 \, \delta(r-R) \, dr$$

$$\cancel{Q} = \text{algo} \times \cancel{Q} \times 2\pi \times \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \times R^2$$

$$\Downarrow$$

$$\text{algo} = \frac{1}{2\pi R^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\delta(\theta - \pi/2)\, \delta(r-R)}{R^2}$$

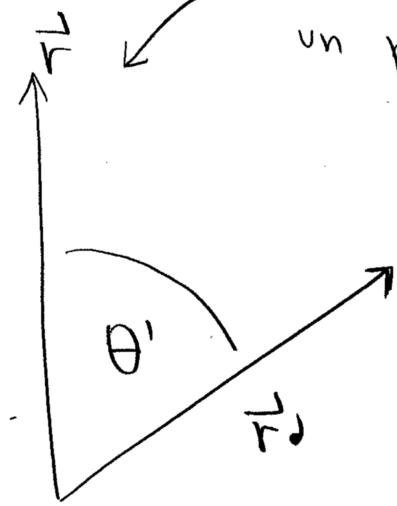
b.3) El potencial está dado por:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

B_{11}

Si $\vec{r} = z\hat{k}$

se calcula $\phi(\vec{r})$ en un pto. del eje z.



$$\therefore\ |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r\cos\theta'} \quad ; \ r = z$$

$$= \sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z\cos\theta'}$$

finalmente

$$\Phi(\vec{r} = z\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{Q}{2\pi R^2}\frac{\delta(\theta'-\pi/2)\,\delta(r'-R)\, r'^2 dr' d\theta' d\varphi' \operatorname{sen}\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z\cos\theta'}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} dr' \int_0^{\pi} d\theta' \frac{r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, \delta(r'-R)\,\delta(\theta'-\pi/2)}{(z^2 + r'^2 - 2r'z\cos\theta')^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\cancel{2\pi R^2}} \times \frac{\cancel{2\pi} \times \cancel{R^2} \times \underbrace{\operatorname{sen}\pi/2}_{1}}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos\pi/2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$\boxed{B_{12}}$

Probl. 3)

a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)\, \operatorname{sen}(\beta x)\, \cos(\gamma x)}{x^2}\, dx$

$$\operatorname{sen}(\alpha x) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\beta x) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right)$$

$$\cos(\gamma x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}\right)$$

luego

$$I = 2\pi \left. \frac{\operatorname{sen}\left(-i\alpha \frac{d}{dk}\right) \operatorname{sen}\left(-i\beta \frac{d}{dk}\right) \cos\left(-i\gamma \frac{d}{dk}\right)}{\left(-i \frac{d}{dk}\right)^2} \delta(k) \right|_{k=0}$$

Ahora bien, se cumple que:

$$\frac{1}{i^2}\frac{1}{\left(\frac{d}{dk}\right)}\frac{1}{\left(\frac{d}{dk}\right)}\delta(k) = -kH(k) + \text{cte.}$$

luego

$$I = \frac{2\pi}{(2i)(2i)(2)}\left[e^{\alpha\frac{d}{dk}} - e^{-\alpha\frac{d}{dk}}\right]\left[e^{\beta\frac{d}{dk}} - e^{-\beta\frac{d}{dk}}\right]$$

$$\times\left[e^{\gamma\frac{d}{dk}} + e^{-\gamma\frac{d}{dk}}\right]\left[-kH(k)\right]\Big|_{k=0}$$

etc.

Recordar que
$$e^{\alpha\frac{d}{dk}}f(k) = f(k+\alpha)$$

b) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}^2(\alpha x)\, e^{-\beta x^2}\, dx$$

$$= 2\pi \operatorname{sen}^2\left(-\alpha i\frac{d}{dk}\right) e^{-\beta\left(-i\frac{d}{dk}\right)^2}\delta(k)\Big|_{k=0}$$

Ahora bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} e^{-ikx}\, dx = 2\pi\, e^{-\beta\left(-i\frac{d}{dk}\right)^2} \delta(k)$$

Por otro lado

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} e^{-ikx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{k^2}{\beta}}$$

$$\therefore\ 2\pi\, e^{-\beta\left(-i\frac{d}{dk}\right)^2} \delta(k) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{k^2}{\beta}}$$

Luego

$$I = \operatorname{sen}^2\left(-\alpha i \frac{d}{dk}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{k^2}{\beta}} \Bigg|_{k=0}.$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}}{(2i)^2} \left(e^{\alpha\frac{d}{dk}} - e^{-\alpha\frac{d}{dk}}\right)\left(e^{\alpha\frac{d}{dk}} - e^{-\alpha\frac{d}{dk}}\right) e^{-\frac{1}{4}\frac{k^2}{\beta}} \Bigg|_{k=0}.$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left[e^{2\alpha\frac{d}{dk}} - 1 + e^{-2\alpha\frac{d}{dk}} - 1\right] e^{-\frac{1}{4}\frac{k^2}{\beta}} \Bigg|_{k=0}$$

B_{16}

$$I = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left[e^{-\frac{1}{4}\frac{(k+2\alpha)^2}{\beta}} - 2e^{-\frac{1}{4}\frac{k^2}{\beta}} + e^{-\frac{1}{4}\frac{(k-2\alpha)^2}{\beta}}\right]\Bigg|_{k=0}$$

$$I = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left[e^{-\frac{\alpha^2}{\beta}} - 2 + e^{-\frac{\alpha^2}{\beta}}\right]$$

$$I = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\beta}} - 1\right)$$

c) <u>No corre.</u>