Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba II
Mecánica Cuántica I
Licenciatura en Física - 2022

Problema I : Potencial y deltas Dirac

Una partícula de masa m se encuentra afectada por un potencial de la forma $V(x) = -\alpha\delta(x) + \beta\delta(x-a)$, donde α y β son cantidades reales y positivas.

1. (20 pts.) Dé una descripción de las características sobre la **base completa** de autovectores del Hamiltoniano.
2. (20 pts.) Halle la solución general para el caso $E > 0$. Suponga que la partícula viaja hacia la izquierda desde $x \to \infty$.
3. (30 pts.) Encuentre las ecuaciones que permiten hallar "todas" las constantes asociadas a este problema.
4. (20 pts.) Determine las expresiones que permiten calcular los coeficientes T_{32}, T_{21}, T_{31}, R_{33}, R_{22} y haga todas las comparaciones relevantes posibles (use los comparadores $>$ ó $<$).
5. (20 pts.) Halle la solución general para el caso $E < 0$.
6. (30 pts.) Encuentre las ecuaciones que permiten hallar "todas" las constantes asociadas a este problema.

140 pts.

Problema II : Operadores de subida y bajada

Una partícula de masa m posee el siguiente Hamiltoniano:

$$\widehat{H} = \beta\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} + \alpha\left(\widehat{a} + \widehat{a}^{\dagger}\right)$$

con α y β constantes conocidas.

1. (25 pts.) Halle el Hamiltoniano en términos de los operadores $\widehat{x}$ y $\widehat{p}$.
2. .(30 pts.) Bosqueje el potencial $V(x)$ (solo con los datos esenciales).
3. (15 pts.) Determine la frecuencia ω natural del sistema.
4. (15 pts.) Halle la constante elástica del sistema.
5. (25 pts.) Halle el espectro de energía para este sistema, suponga que ya conoce el caso $\widehat{H}' = \frac{\widehat{p}'^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\widehat{x}'^2$. Argumente el razonamiento que utiliza en su respuesta.

110 pts.

TOTAL PRUEBA
250 pts.

Pauta prueba II

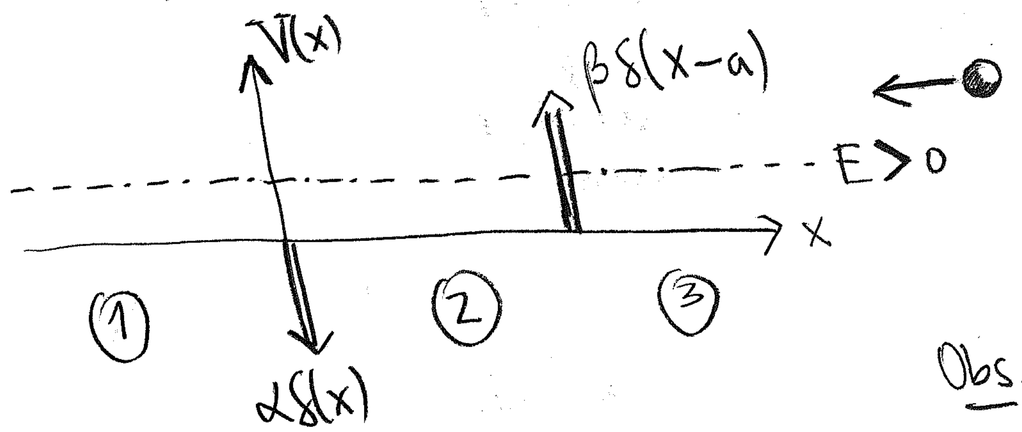
1) Base completa = Base discreta finita ortonormal $(E<0)$ + Base continua ortogonal $(E>0)$

$\downarrow$ Base completa: autovectores de $\hat{H}$

$\downarrow$ Base discreta: Estados ligados

$\downarrow$ Base continua: Estados libres

2) Partícula viene de $x \to \infty$ moviéndose hacia la izquierda.



<u>Obs.</u> $k_1 = k_2 = k_3 = k$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\phi_3(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\phi_2(x) = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$$

$$\phi_1(x) = \cancel{E}^{\,0} e^{ikx} + F e^{-ikx}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \phi_3(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} & (a < x < \infty) \\ \phi_2(x) = C e^{ikx} + D e^{-ikx} & (0 < x < a) \\ \phi_1(x) = F e^{-ikx} & (-\infty < x < 0) \end{cases}$$

3) $\phi_2(a) = \phi_3(a)$

$\downarrow$

$$Ce^{ika} + De^{-ika} = Ae^{ika} + Be^{-ika} \;// \quad (ec.1)$$

$\phi_2(0) = \phi_1(0)$

$\downarrow$

$$C + D = F \;// \quad (ec.2)$$

<u>en $x=0$</u>

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha\delta(x)\phi(x) + \beta\delta(x-a)\phi(x) = E\phi(x) \quad \Big/ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx$$

con $\epsilon \to 0$

$\downarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\phi(\epsilon)}{dx} - \frac{d\phi(-\epsilon)}{dx}\right) - \alpha\phi(0) = 0$$

$\downarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\phi_2(0)}{dx} - \frac{d\phi_1(0)}{dx}\right) - \alpha\phi_1(0) = 0$$

ó $\phi_2(0)$

$\downarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(ikC - ikD + ikF\right) - \alpha F = 0$$

$\downarrow$

$$\frac{ik\hbar^2}{2m}\left(D - C - F\right) - \alpha F = 0 \;// \quad (ec.3)$$

I.2

en $x=a$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx} - \alpha\delta(x)\phi(x) + \beta\delta(x-a)\phi(x) = E\phi(x) \quad \Big| \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx$$

con $\epsilon \to 0$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\phi}{dx}(a+\epsilon) - \frac{d\phi}{dx}(a-\epsilon)\right) + \beta\phi(a) = 0$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\phi_3(a)}{dx} - \frac{d\phi_2(a)}{dx}\right) + \beta\phi_3(a) = 0$$

ó $\phi_2(a)$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(ikAe^{ika} - ikBe^{-ika} - ikCe^{ika} + ikDe^{-ika}\right)$$

$$\downarrow \qquad + \beta\left(Ae^{ika} - Be^{-ika}\right) = 0$$

$$-\frac{ik\hbar^2}{2m}\left((A-C)e^{ika} + (D-B)e^{-ika}\right) + \beta\left(Ae^{ika} - Be^{-ika}\right) = 0$$

(ec. 4)

Como es un proceso de scattering, estas 4 ecs. bastan para obtener información relevante (T y/o R). Recordar que esta solución no es normalizable.

4) $T_{32} = \left|\frac{D}{B}\right|^2$; $T_{21} = \left|\frac{F}{D}\right|^2$; $T_{31} = \left|\frac{F}{B}\right|^2$

$R_{33} = \left|\frac{A}{B}\right|^2$; $R_{22} = \left|\frac{C}{D}\right|^2$

$\downarrow$

- $T_{32} < R_{33}$
- $T_{21} > R_{22}$

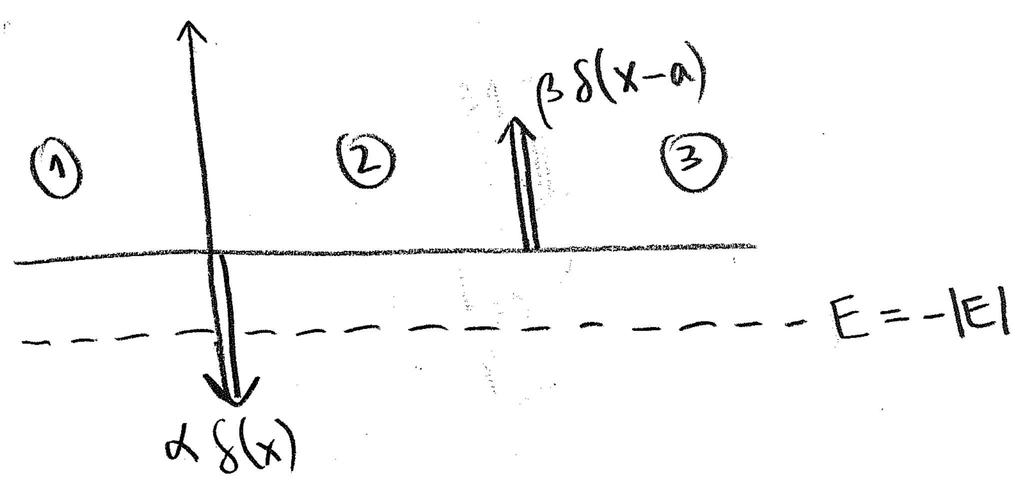
- $T_{32} < T_{21}$

$T_{31} = T_{32} \cdot T_{21}$

$\Downarrow$

- $T_{31} < T_{32}$
- $T_{31} < T_{21}$

5)



$\phi_1(x) = A e^{Kx} + \cancel{B}^{0} e^{-Kx}$ con $K = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$

$\phi_2(x) = C e^{Kx} + D e^{-Kx}$

$\phi_3(x) = \cancel{E}^{0} e^{Kx} + F e^{-Kx}$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \phi_1(x) = Ae^{Kx} & (-\infty < x < 0) \\ \phi_2(x) = Ce^{Kx} + De^{-Kx} & (0 < x < a) \\ \phi_3(x) = Fe^{-Kx} & (a < x < \infty) \end{cases}$$

6) $\phi_1(0) = \phi_2(0)$

$$\downarrow$$

$$A = C + D \,\| \quad (\text{ec. } 1)$$

$$\phi_2(a) = \phi_3(a)$$

$$\downarrow$$

$$Ce^{Ka} + De^{-Ka} = Fe^{-Ka} \,\| \quad (\text{ec. } 2)$$

en $x = 0$ (por analogía de resultados anteriores)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\phi_2(0)}{dx} - \frac{d\phi_1(0)}{dx}\right) - \alpha\phi_1(0) = 0$$

$\circ\ \phi_2(0)$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(KC - KD - KA\right) - \alpha A = 0$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{K\hbar^2}{2m}\left(C - A - D\right) - \alpha A = 0 \,\| \quad (\text{ec. } 3)$$

en $x=a$ (tal como antes)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\phi_3(a)}{dx}-\frac{d\phi_2(a)}{dx}\right)+\beta\phi_3(a)=0$$

o $\phi_2(a)$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-KFe^{-Ka}-KCe^{Ka}+KDe^{-Ka}\right)+\beta Fe^{-Ka}=0$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\hbar^2 K}{2m}\left((D-F)e^{-Ka}-Ce^{Ka}\right)+\beta Fe^{-Ka}=0$$

(ec. 4)

Dado que E (Estado ligado) es otra incógnita se agrega la normalización.

$$\int_{-\infty}^{0}|\phi_1(x)|^2dx+\int_{0}^{a}|\phi_2(x)|^2dx+\int_{a}^{\infty}|\phi_3(x)|^2dx=1$$

∴ 5 ecs. y 5 incógnitas (A, C, D, F y Energía)

Probl. II) $\hat{H} = \beta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \alpha(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$

II.1

1) con $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p}) \rightarrow \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p})$

y $\hat{q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}$

$\hat{p} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{q} - i\hat{p})(\hat{q} + i\hat{p}) = \frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2) + \frac{1}{2}i[\hat{q}, \hat{p}]$$

con $[\hat{q}, \hat{p}] = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}[\hat{x}, \hat{p}]$

$$= \frac{1}{\hbar} i\hbar = i$$

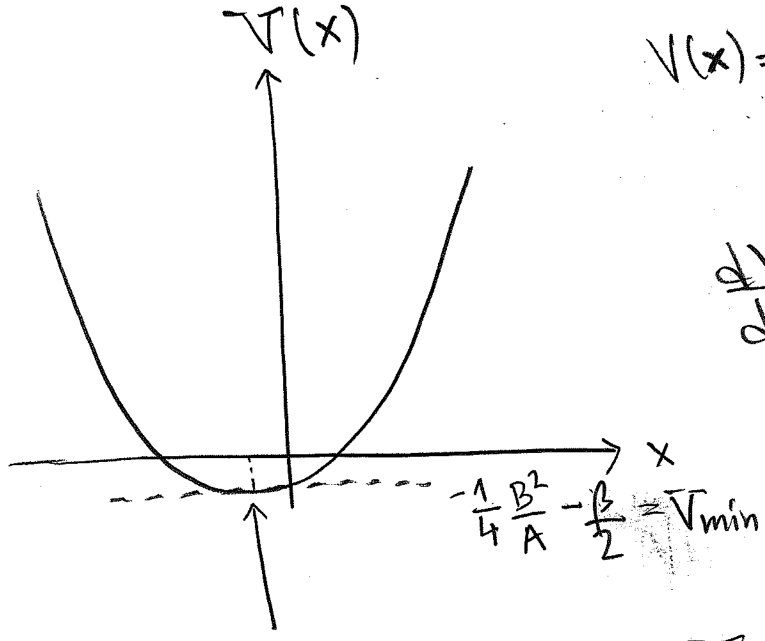
$\therefore$ $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}\hat{q}^2 + \frac{1}{2}\hat{p}^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{m\omega\hbar} - \frac{1}{2}$

y $\hat{a}^\dagger + \hat{a} = \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{q} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}$

$\therefore$ $\hat{H} = \frac{\beta}{2}\left(\frac{\hat{p}^2}{m\omega\hbar} + \frac{m\omega\hat{x}^2}{\hbar}\right) + \alpha\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} - \frac{\beta}{2}$

$$\hat{H} = \frac{\beta}{\omega\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\beta}{\omega\hbar}\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \alpha\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} - \frac{\beta}{2}$$

II.2

2) 

$V(x)=AX^2+BX-\frac{\beta}{2}$

$A,B>0$

$\frac{dV}{dx}=0 \rightarrow 2Ax=-B$

$\downarrow$

$X_{min}=-\frac{B}{2A}$

$$X_{min}=-\frac{B}{2A} \Longrightarrow V_{min}(X_{min})=A\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{2A}-\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{B^2}{4A}-\frac{B^2}{2A}-\frac{\beta}{2}$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{B^2}{A}-\frac{\beta}{2}$$

3) Por comparación

$$\frac{\beta}{\omega\hbar}=1 \Rightarrow \omega=\frac{\beta}{\hbar}$$

4) $$\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow k=m\omega^2=\frac{m\beta^2}{\hbar^2}$$

5) Se realiza un cambio de variable para trasladar el vértice al origen

$$V(x)=AX^2+BX=A\left(X^2+2\frac{B}{2A}X\right)$$

$$=A\left[\left(X+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2}{4A^2}+\frac{B^2}{4A^2}\right]$$

II.3

$$V(x) = A x'^2 - \frac{B^2}{4A} \qquad \text{con } x' = x + \frac{B}{2A}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}'^2 - \frac{B^2}{4A} - \frac{\beta}{2}$$

$$\tilde{E}_n = E_n - \frac{B^2}{4A} - \frac{\beta}{2} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{B^2}{4A} - \frac{\beta}{2}$$

$\uparrow$ oscilador armónico

con $A = \frac{1}{2} m\omega^2$

$B^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}\alpha^2$

$$\Downarrow$$

$$\frac{B^2}{4A} = \frac{2m\omega\alpha^2}{4\hbar} \cdot \frac{2}{m\omega^2} = \frac{\alpha^2}{\omega^2\hbar} = \frac{\alpha^2\hbar}{\beta}$$

$$\therefore \tilde{E}_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha^2\hbar}{\beta} - \frac{\beta}{2}$$