Una aproximación analítica al problema de N-cuerpos

Daniel Salinas[1] & Iván González[2]
Instituto de Física y Astronomía, Universidad de Valparaíso, Chile
[1]salinas.a.daniel@gmail.com, [2]ivan.gonzalez@uv.cl

Resumen

En este trabajo presentamos una solución analítica aproximada al problema gravitacional de *N*-cuerpos [1, 2, 3]. Dicha aproximación se realiza resolviendo las ecuaciones de movimiento mediante la técnica de series de potencias. Nuestro objetivo final es hallar las ecuaciones de recurrencia que generan los coeficientes de dichas series, finalmente se presenta la solución general para el vector posición $\mathbf{r}_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, 2, ..., N)$ de cada masa del sistema, la cual esta sujeta a condiciones iniciales arbitrarias.

I. Introducción

Consideremos N partículas con masas m_α $(\alpha = 1, ..., N)$ interactuando gravitacionalmente entre si en un espacio euclidiano $\left(\mathbb{R}^3\right)$ y cuyas posiciones son especificadas por el vector $\mathbf{r}_\alpha$. De acuerdo a la ley de gravitación de Newton, la interacción entre dos masas arbitrarias m_α y m_β depende solo de la posición relativa entre ellas: $\left\|r_\alpha - r_\beta\right\| = \left[(r_\alpha - r_\beta)\cdot(r_\alpha - r_\beta)\right]^{1/2}$, tal que dicha dependencia se ve reflejada en la ecuación de movimiento de cada partícula. Asi, para la partícula α-*ésima*, la ecuación de movimiento está dada por la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\alpha(t) = -G \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} \frac{m_\beta\left[\mathbf{r}_\alpha(t) - \mathbf{r}_\beta(t)\right]}{\left\|\mathbf{r}_\alpha(t) - \mathbf{r}_\beta(t)\right\|^3}, \quad (\alpha = 1, ..., N), \tag{1}$$

la cual esta sujeta a las siguientes condiciones iniciales $\mathbf{r}_\alpha(0) = \mathbf{r}_{\alpha 0}$ y $\dot{\mathbf{r}}_\alpha(0) = \dot{\mathbf{r}}_{\alpha 0}$ arbitrarias. El factor G corresponde a la constante de gravitación universal.

II.Resolución

i. Simplificación

El procedimiento que presentamos consiste en minimizar la complejidad de la no linealidad de la ecuación de movimiento, para ello introducimos variables auxiliares:

$$g_{\alpha\beta}(t) = \left[\mathbf{r}_\alpha(t) - \mathbf{r}_\beta(t)\right]\cdot\left[\mathbf{r}_\alpha(t) - \mathbf{r}_\beta(t)\right]. \tag{2}$$

$$f_{\alpha\beta}(t) = \left[g_{\alpha\beta}(t)\right]^{-\frac{3}{2}}, \tag{3}$$

el costo matemático de esta operación es la adición de dos ecuaciones diferenciales, una para cada variable auxiliar. Sin embargo, logramos disminuir la complejidad de la no linealidad. Finalmente debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\alpha(t) = -G \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} m_\beta\left[\mathbf{r}_\alpha(t) - \mathbf{r}_\beta(t)\right] f_{\alpha\beta}(t), \tag{4}$$

$$\dot{g}_{\alpha\beta}(t) = 2\left[\mathbf{r}_\alpha(t) - \mathbf{r}_\beta(t)\right]\cdot\left[\dot{\mathbf{r}}_\alpha(t) - \dot{\mathbf{r}}_\beta(t)\right], \tag{5}$$

$$g_{\alpha\beta}(t)\,\dot{f}_{\alpha\beta}(t) = -\frac{3}{2} f_{\alpha\beta}(t)\,\dot{g}_{ij}(t), \tag{6}$$

las condiciones iniciales extras son las siguientes:

$$g_{\alpha\beta}(0) = \left[\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right]\cdot\left[\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right]. \tag{7}$$

$$f_{\alpha\beta}(0) = \left[g_{\alpha\beta}(0)\right]^{-\frac{3}{2}}, \tag{8}$$

Es importante visualizar que la no linealidad de nuestro nuevo problema es a lo más cuadrática en cada término de la ecuaciones.

ii. Solución

Suponemos a continuación que cada incógnita es equivalente a una serie de potencias en t :

$$\mathbf{r}_\alpha(t) = \sum_{k\geq 0} \phi_k\, \mathbf{R}_\alpha(k)\, t^k, \tag{9}$$

$$f_{\alpha\beta}(t) = \sum_{k\geq 0} \phi_k\, F_{\alpha\beta}(k)\, t^k, \tag{10}$$

$$g_{\alpha\beta}(t) = \sum_{k\geq 0} \phi_k\, G_{\alpha\beta}(k)\, t^k, \tag{11}$$

donde $\mathbf{R}_\alpha(k)$, $F_{\alpha\beta}(k)$ y $G_{\alpha\beta}(k)$ son coeficientes independientes de t y el factor ϕ_k es definido como $\phi_k = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}$, una cantidad establecida por conveniencia. De la ecuación (9), se deduce inmediatamente que:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\alpha(t) = \sum_{k\geq 0} \phi_k\, \mathbf{R}_\alpha(k+2)\, t^k, \tag{12}$$

de forma análoga obtenemos representaciones en serie para $\dot{f}_{\alpha\beta}(t)$ y $\dot{g}_{ij}(t)$.

iii.Integración

Al reemplazar las representaciones en serie de cada variable en las ecuaciones respectivas, se generan productos dobles, las cuales reducimos a una serie simple de potencias en t utilizando la fórmula de Cauchy:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} A(n)\ t^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} B(n)\ t^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} C(n)\ t^n, \tag{13}$$

donde el $C(n)$ está determinado por la ecuación:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n} A(n-k)\, B(k). \tag{14}$$

A continuación aplicamos a cada ecuación diferencial la transformada de Mellin y la integración respectiva la hacemos utilizando el Método de Brackets (MoB) [4, 5]. Este procedimiento lo resumimos de manera genérica a continuación.

Sea $u(t)$ una función tal que $u(t) = \sum_{k\geq 0} \phi_k\, \mathbf{U}(k)\, t^k$, la *transformada de Mellin* de esta función esta dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\left[u(t)\right](-n) &= \int_0^\infty t^{-n-1} u(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty t^{-n-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k\, \mathbf{U}(k)\, t^k\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k\, \mathbf{U}(k)\, \langle k-n\rangle \qquad \text{(Uso de MoB)} \\
&= \Gamma(-n)\, \mathbf{U}(n),
\end{aligned} \tag{15}$$

con el índice n un entero positivo. El resultado final es la obtención de un sistema de ecuaciones de recurrencia. Algunas transformaciones útiles las presentamos a continuación.

Sea una función arbitraria dependiente del tiempo $f_i(t) \equiv \sum_{k\geq 0} \phi_k\, \mathbf{F}_i(k)\, t^k$, son válidas las siguientes transformaciones:

$f_i(t)$	$\Gamma(-n)\,\mathbf{F}_i(n)$
$f_i^{(m)}(t)$	$(-1)^m\,\Gamma(-n)\,\mathbf{F}_i(n+m)$
$t^r f_i^{(m)}(t)$	$(-1)^m\,\Gamma(-n+r)\,\mathbf{F}_i(n-r+m)$
t^r	$(-1)^{-r}\,\Gamma(-n)\,\Gamma(r+1)\,\delta_{n,r}$
$f_i(At)$	$A^n\Gamma(-n)\,\mathbf{F}_i(n)$
$f_i(t^r)$	$\frac{1}{\lvert r\rvert}\Gamma\left(-\frac{n}{r}\right)\mathbf{F}_i\left(\frac{n}{r}\right)$

(16)

en particular hemos utilizado la siguiente regla de transformación:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}\left[t^r f_i^{(m)}(t)\, f_j^{(s)}(t)\right](-n) = (-1)^{m+s}\,\Gamma(-n+r) \\
&\times \sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r}{k}\mathbf{F}_i(k+m)\,\mathbf{F}_j(n-r+s-k)
\end{aligned} \tag{17}$$

v. Ecuaciones de Recurrencia

La aplicación de los procedimientos descritos previamente nos permiten obtener las ecuaciones de recurrencia que dan solución a nuestro problema:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_\alpha(n+2) = -G\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} m_\beta \\
&\times \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\left[\mathbf{R}_\alpha(\ell) - \mathbf{R}_\beta(\ell)\right] F_{\alpha\beta}(n-\ell),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell} G_{\alpha\beta}(\ell)\, F_{\alpha\beta}(n-\ell+1) = -\frac{3}{2} \\
&\times \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell} F_{\alpha\beta}(\ell)\, G_{\alpha\beta}(n-\ell+1),
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&G_{\alpha\beta}(n+1) = \\
&2\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\left[\mathbf{R}_\alpha(\ell)\text{-}\mathbf{R}_\beta(\ell)\right]\cdot\left[\mathbf{R}_\alpha(n\text{-}\ell\text{+}1)\text{-}\mathbf{R}_\beta(n\text{-}\ell\text{+}1)\right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Los valores de los primeros coeficientes en las series solución quedan definidos por las condiciones iniciales:

$$\mathbf{R}_\alpha(0) = \mathbf{r}_{\alpha 0}, \tag{21}$$

$$\mathbf{R}_\alpha(1) = -\dot{\mathbf{r}}_{\alpha 0}, \tag{22}$$

$$F_{\alpha\beta}(0) = \left[\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)\cdot\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)\right]^{-3/2} \tag{23}$$

$$G_{\alpha\beta}(0) = \left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)\cdot\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right). \tag{24}$$

Realizando las iteraciones necesarias hallamos los primeros coeficientes de las series que representan el vector posición de cada masa:

$$\mathbf{R}_\alpha(0) = \mathbf{r}_{\alpha 0},$$

$$\mathbf{R}_\alpha(1) = -\dot{\mathbf{r}}_{\alpha 0},$$

$$\mathbf{R}_\alpha(2) = -G\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} m_\beta \frac{\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)}{\left|\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right|^3},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_\alpha(3) = -G\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} m_\beta &\left[\frac{\left(\dot{\mathbf{r}}_{\alpha 0} - \dot{\mathbf{r}}_{\beta 0}\right)}{\left|\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right|^3}\right. \\
&\left. -3\frac{\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)\cdot\left(\dot{\mathbf{r}}_{\alpha 0} - \dot{\mathbf{r}}_{\beta 0}\right)}{\left|\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right|^5}\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)\right], \text{ etc.}
\end{aligned}$$

vi. Solución Global

Finalmente, presentamos una aproximación analítica del vector posición de cada masa asociada al sistema. Para la partícula $\alpha -$ *ésima* se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\alpha(t) = \quad & \mathbf{r}_{\alpha 0} + \dot{\mathbf{r}}_{\alpha 0} t - \tfrac{1}{2!}\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} m_\beta \frac{\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)}{\left|\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right|^3} t^2 \\
& + \tfrac{1}{3!} G \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} m_\beta \left[-3\frac{\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right)\cdot\left(\mathbf{v}_{\alpha 0} - \mathbf{v}_{\beta 0}\right)}{\left|\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right|^5}\right. \\
& \left. \times\left(\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right) + \frac{\left(\dot{\mathbf{r}}_{\alpha 0} - \dot{\mathbf{r}}_{\beta 0}\right)}{\left|\mathbf{r}_{\alpha 0} - \mathbf{r}_{\beta 0}\right|^3}\right] t^3 + O\left(t^4\right),
\end{aligned} \tag{25}$$

una solución válida para tiempos pequeños.

III. Conclusiones

Más allá de la existencia de otras técnicas para evaluar el problema aquí presentado, lo que se ha propuesto es una forma sistemática de simplificar el problema matemático no lineal y luego hallar un camino directo a la solución en términos de una serie de potencias en t. Como objetivo se plantea la obtención de un sistema de ecuaciones de recurrencia que determinan los coeficientes de dicha serie.

Una ventaja adicional de esta metodología es su utilidad para problemas más generales : sistemas de ecuaciones integro-diferenciales no lineales. Por otro lado una desventaja propia de la técnica de series de potencias es la casi nula o nula posibilidad de construir la serie completa dada la complejidad de la no linealidad de los problemas.

En este trabajo la aplicación de este método al problema de *N*-cuerpos, encontramos que la serie de potencias hallada demuestra ser de lenta convergencia y por lo tanto se hace necesario a futuro mejorar la aproximación con uso de técnicas que incrementan la rapidez de convergencia.

Referencias

- K. Sundman, *Mémoire sur lé probléme des trois corps* (1897).
- G. Adomian, *The N-body problem*, Foundations of Physics Letters, Vol. 6, No. 6, 1993.
- G. Adomian, A non-perturbative of N-body dynamics, Foundations of Physics Letters, Vol. 9, No. 3, 1996.
- I. Gonzalez and V. Moll, *Definite integrals by method of brackets. Part 1*, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73 (2010). (arXiv:0812.3356).
- I. Gonzalez, V. Moll and A. Straub, *The method of brackets. Part 2: examples and applications*, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 2010, Pages 157-171. (arXiv:1004.2062).