Pauta de corrección prueba Módulo I

Universidad de Valparaíso CHILE

**Prueba Módulo I**
**Mecánica Intermedia**
Licenciatura en Física - 2023[1]

**Instrucciones :** La prueba consta de cuatro problemas, el problema (I) es obligatorio para tod@s, de los tres restantes solo deben escoger dos. De resolver (parcial o totalmente) un cuarto problema, se hará la corrección considerando 280 puntos como base de evaluación. Se puede utilizar formulario.

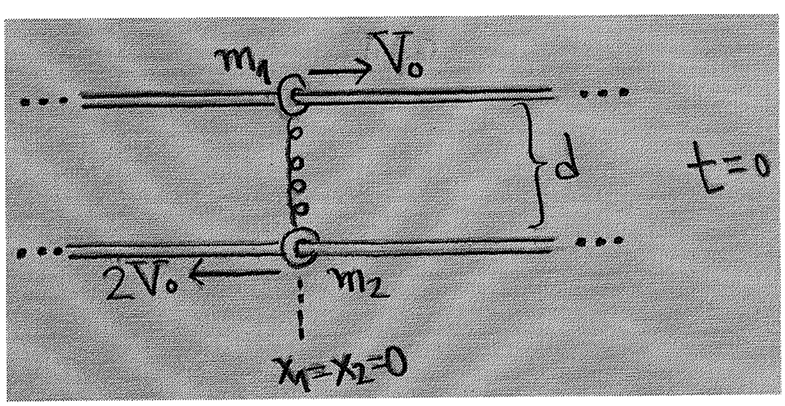
**Nombre completo :** IVÁN GONZÁLEZ G.

**Puntaje obtenido / Puntaje total :** $\frac{220}{220}$

**Nota final :** 7,0

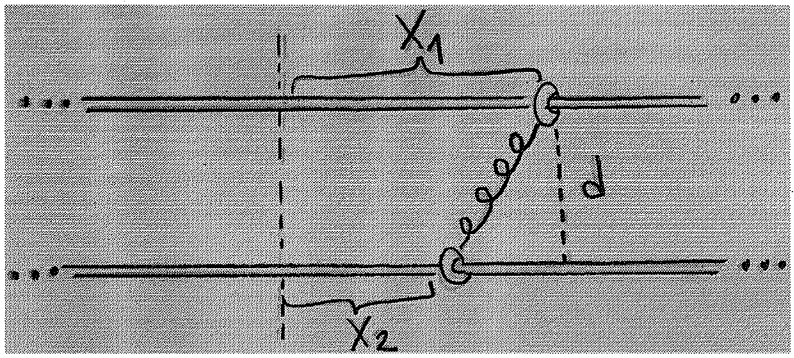
**Problema I (Obligatorio) : Sistema acoplado oscilatorio (100 pts.)**

Dos masas, $m_1$ y $m_2$, están conectadas mediante un resorte de constante elástica $k$, las cuales pueden deslizar por rieles paralelos sin roce y que se encuentran separados por una distancia $d$. La figura a continuación muestra la configuración para $t = 0$:




[1]Hora de INICIO: 12:00 hrs.
Hora de TÉRMINO: 14:00 hrs.

Para $t > 0$ se tiene la siguiente configuración arbitraria:




Suponga que el resorte tiene longitud natural despreciable. Determine:

1. (10 pts.) Las ligaduras y las condiciones iniciales del sistema.
2. (20 pts.) Halle el lagrangiano asociado y obtenga las ecuaciones de movimiento para cada coordenada libre.
3. (10 pts.) Halle una relación entre $\ddot{x}_1(t)$ y $\ddot{x}_2(t)$.
4. (20 pts.) A partir del resultado del item anterior halle por integración directa una relacion entre $\dot{x}_1(t)$ y $\dot{x}_2(t)$.
5. (20 pts.) Para $m_1 = 2m$ y $m_2 = m$, halle una relación entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$.(Ud. decida el procedimiento).
6. (20 pts.) Utilizando el resultado del item anterior halle la solución para $x_1(t)$.

---

**Problema II : Demostraciones (60 ptos.)**

---

**Obs.:** *Si escoge este problema solo debe demostrar uno de los dos ítemes*

1. (60 pts.) Se conoce que la ecuación de movimiento también se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

siendo $Q_j$ todas las fuerzas generalizadas asociadas a la coordenada $q_j$. Demuestre que esta ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Dicha fórmula se conoce a veces como la forma de Nielsen de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

2. (60 pts.) La energía cinética de un sistema puede ser descrita de manera general mediante la siguiente forma cuadrática:

$$T = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} C_{ij}(\{q\}, t)\,\dot{q}_i\dot{q}_j$$

siendo $C_{ij}(\{q\}, t)$ el coeficiente de la expansión y el cual es independiente de las velocidades. Demuestre que:

$$\sum_{l=1}^{s} \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T$$

## Problema III : Algo de gravitación (60 pts.)

Un planeta de masa $M$ se ve sometido a la siguiente energía potencial gravitatoria:

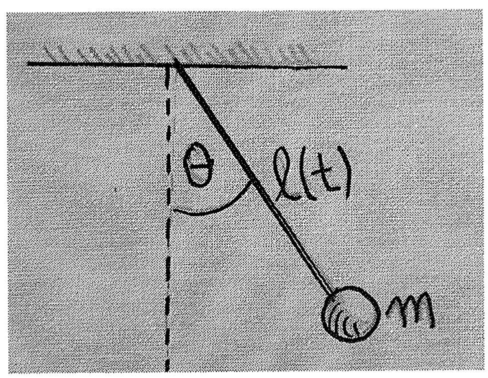
$$V = -\frac{\beta}{r} \quad (\beta \text{ es una constante})$$

Determine en coordenadas polares (plano $x - y$):

1. (15 pts.) El lagrangiano del sistema.
2. (20 pts.) Las ecuaciones de movimiento.
3. (25 pts.) Reescriba la ecuación radial solo en términos de la coordenada radial y sus derivadas. ¿A qué corresponde el término $-\frac{\beta}{r^2}$?.

## Problema IV : Péndulo de longitud variable (60 pts.)

Para el péndulo simple de la figura:




la longitud de la cuerda varía de acuerdo a la siguiente ley:

$$\frac{d\ell(t)}{dt} = -\alpha \quad (\alpha \text{ una constante positiva})$$

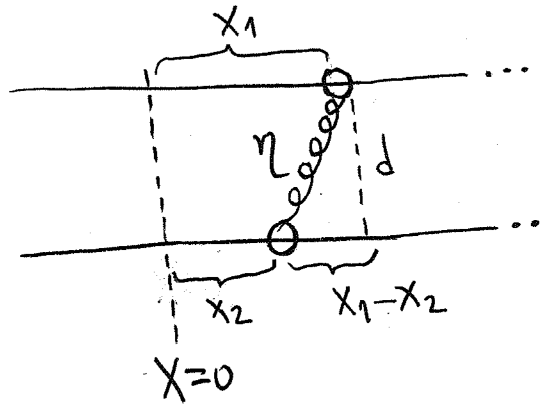
Suponga que $\ell(0) = \ell_0$.

1. (10 pts.) ¿La frecuencia de oscilación aumenta o disminuye a medida que pasa el tiempo?. Explique.
2. (10 pts.) ¿Cuál es la expresión que gobierna a $\ell(t)$?.
3. (20 pts.) Escriba el lagrangiano y halle la(s) ecuación(es) de movimiento.
4. (20 pts.) ¿Es $H$ (Hamiltoniano) una constante de movimiento?.

# Pauta Prueba Módulo I



Probl. I)




$\eta$ = Estiramiento
$\Uparrow$
con supuesto de long. natural despreciable.

1) $$\left.\begin{aligned} z_1 &= z_2 = 0 \\ y_1 &= d \\ y_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ligaduras (Una entre varias de acuerdo al sist. de referencia utilizado por Ud.)

Condiciones iniciales

$x_1(0) = 0 \qquad \dot{x}_1(0) = V_0$

$x_2(0) = 0 \qquad \dot{x}_2(0) = -2V_0$

2) $$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k \eta^2 \quad ; \text{ pero } \eta^2 = d^2 + (x_1 - x_2)^2$$

$$\therefore \; L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k d^2$$

Ec. de mov. para $x_1$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2)$$

luego: $$\boxed{m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0} \quad (i)$$

<u>Ec. de mov. para $x_2$</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_1 - x_2)(-1) = k(x_1 - x_2)$$

$$\therefore \quad \boxed{m_2\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0} \quad (ii)$$

3) De (i) $\quad m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2)$

de (ii) $\quad m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$

de esto se deduce que:

$$\boxed{m_1\ddot{x}_1 = -m_2\ddot{x}_2}$$

4) $$m_1\ddot{x}_1 = -m_2\ddot{x}_2 \Rightarrow m_1\frac{d\dot{x}_1}{\cancel{dt}} = -m_2\frac{d\dot{x}_2}{\cancel{dt}}$$

$$\Downarrow$$

$$m_1\int_0^t d\dot{x}_1 = -m_2\int_0^t d\dot{x}_2$$

luego $$m_1(\dot{x}_1(t) - \underbrace{\cancel{\dot{x}_1(0)}}_{V_0}) = -m_2(\dot{x}_2(t) - \underbrace{\cancel{\dot{x}_2(0)}}_{-2V_0})$$

entonces:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1}\dot{x}_2(t) + V_0\left(1 - 2\frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1}\dot{x}_2(t) + \left(\frac{m_1 - 2m_2}{m_1}\right)V_0}$$

* Lo que sigue no se solicita como respuesta:
También es posible hallar por integración directa una relación entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^t dx_1 = -\frac{m_2}{m_1}\int_0^t dx_2 + \left(\frac{m_1 - 2m_2}{m_1}\right)V_0 \int_0^t dt$$

$$\Downarrow$$

$$x_1(t) - \cancel{x_1(0)}^{\,0} = -\frac{m_2}{m_1}\left(x_2(t) - \cancel{x_2(0)}^{\,0}\right) + \left(\frac{m_1 - 2m_2}{m_1}\right)V_0\, t$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_1(t) = -\frac{m_2}{m_1}x_2(t) + \left(\frac{m_1 - 2m_2}{m_1}\right)V_0\, t} \quad \text{(iii)}$$

5) $m_1 = 2m \;;\; m_2 = m$

forme A: De ecuacion (iii) se deduce inmediatamente que:

$$\boxed{x_1(t) = -\frac{1}{2}\, x_2(t)}$$

forme B: Dado que no existen fuerzas horizontales sobre el sisteme

$$\Downarrow$$

$p_{cm_x} = cte$ (cantidad conservada)

en $t=0$

$$p_{cm_x} = \frac{m_1 \dot{x}_1(0) + m_2 \dot{x}_2(0)}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{2m \cdot v_0 + m \cdot (-2v_0)}{3m}$$

$$p_{cm_x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$v_{cm_x} = 0 \Longrightarrow X_{cm} = cte$$

en $t=0$

$$X_{cm} = \frac{m_1 \cancel{x_1(0)}^{\,0} + m_2 \cancel{x_2(0)}^{\,0}}{m_1 + m_2} = 0$$

para $t>0$

$$X_{cm} = 0 = \frac{m_1 X_1(t) + m_2 X_2(t)}{m_1 + m_2}$$

$$0 = 2m\, X_1(t) + m\, X_2(t)$$

$$\Downarrow$$

$$X_1(t) = -\frac{1}{2} X_2(t)$$

6) De ecuación de movimiento (i)

$$m_1 \ddot{X}_1 + k(X_1 - X_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2m\ddot{X}_1 + k(X_1 + 2X_1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{X}_1 + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}_{w_0^2} X_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$\therefore$ $$X_1(t) = A\cos(w_0 t) + B\,\text{sen}(w_0 t)$$

con condiciones iniciales $X_1(0) = 0$
$\dot{X}_1(0) = V_0$

Aplicando C.I. $x_1(0) \Rightarrow A=0$.

$\therefore \quad x_1(t) = B\,\mathrm{sen}(w_0 t)$

$\Downarrow$

$\dot{x}_1(t) = B w_0 \cos(w_0 t)$ ; aplicando $\dot{x}_1(0) = V_0$

$\Rightarrow \quad V_0 = B w_0 \Rightarrow B = \dfrac{V_0}{w_0}$

Finalmente $\boxed{x_1(t) = \dfrac{V_0}{w_0}\,\mathrm{sen}(w_0 t)}$

No se pide, pero:

$$x_2(t) = -2\frac{V_0}{w_0}\,\mathrm{sen}(w_0 t) \quad //$$

Probl. II)

1) Se conoce que $T \equiv T(\{q\},\{\dot{q}\},t)$

$$\therefore \frac{dT}{dt} = \dot{T} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t}$$

luego

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\sum_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l \partial t}$$

$$= \sum_j \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l \partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\overbrace{\cancel{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l}}}^{\delta_{jl}} + \sum_j \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

$$+ \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\overbrace{\cancel{\frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial \dot{q}_l}}}^{0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right)$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_l} = \sum \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right)\ddot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) \qquad (i)$$

Por otro lado, sea $u = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} \equiv u(\{q\},\{\dot{q}\},t)$

$$\therefore \quad du = \sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j}\, dq_j + \sum_j \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}\, d\dot{q}_j + \frac{\partial u}{\partial t}\, dt$$

$$\frac{du}{dt} = \sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_j}\, \ddot{q}_j + \frac{\partial u}{\partial t}$$

o equivalentemente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right)\ddot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right) \qquad \text{(ii)}$$

comparando (i) con (ii) se obtiene que

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right)$$

$\therefore$ en la ec. de Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$

se transforme en:

$$\boxed{\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\ell} - 2\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

2) $T = \sum_{i,j} c_{ij}(\{q\},t)\, \dot{q}_i \dot{q}_j$

Luego $$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\Big(\sum_{i,j} c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j\Big)$$
$$= \sum_l \sum_{i,j} \dot{q}_l c_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}(\dot{q}_i \dot{q}_j)$$

donde $$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}(\dot{q}_i \dot{q}_j) = \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_l}}_{\delta_{il}} \dot{q}_j + \dot{q}_i \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l}}_{\delta_{jl}} = \dot{q}_j \delta_{il} + \dot{q}_i \delta_{jl}$$

$$\therefore \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_l \sum_{i,j} \dot{q}_l c_{ij} \dot{q}_j \delta_{il} + \sum_l \sum_{i,j} \dot{q}_l c_{ij} \dot{q}_i \delta_{jl}$$
$$= \underbrace{\sum_l \sum_j c_{lj} \dot{q}_l \dot{q}_j}_{T} + \underbrace{\sum_l \sum_i c_{il} \dot{q}_i \dot{q}_l}_{T}$$

finalmente
$$\boxed{\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T}$$ QED

Probl. III)

1) $T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ; $x = r\cos\theta$
$y = r \,\mathrm{sen}\,\theta$

$\Downarrow$

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}$
$\dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$

$\Downarrow$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$\therefore \; L = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\beta}{r}$

2) <u>Para coord. r</u>

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = M\ddot{r}$ ; $\frac{\partial L}{\partial r} = Mr\dot{\theta}^2 - \frac{\beta}{r^2}$

$\therefore \; M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + \frac{\beta}{r^2} = 0$

<u>para coord. θ</u>

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(Mr^2\dot{\theta}\right)$ ; $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. $\therefore \; \frac{d}{dt}\left(Mr^2\dot{\theta}\right) = 0$

$\Downarrow$

$Mr^2\dot{\theta} = \Pi_\theta = \text{cte.}$

Momentum angular

3) La ec. radial es:

$$M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + \frac{\beta}{r^2} = 0 \quad (*)$$

Ahora bien $\quad \Pi_\theta = cte = Mr^2\dot{\theta} \quad \Big| ()^2$

$$\Pi_\theta^2 = M^2 r^4 \dot{\theta}^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Pi_\theta^2}{Mr^3} = Mr\dot{\theta}^2 \Rightarrow$$ reemplazamos en ec. (*)

esto es:

$$M\ddot{r} - \frac{\Pi_\theta^2}{Mr^3} + \frac{\beta}{r^2} = 0$$

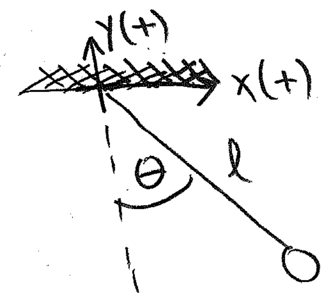
El término $-\frac{\beta}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} = f_r$ (fuerza radial q' apunta hacia el origen)

Probl. IV)

1) Dado que $\alpha > 0$ $l(t)$ disminuye en el tiempo, como $\omega \propto \sqrt{\frac{1}{l}}$ entonces $\omega$ aumenta en t. Esto es solo p/ dar una idea.

2) $$\frac{dl(t)}{dt} = -\alpha \implies l(t) = -\alpha t + l_0$$

3) $$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta$$




$x = l\,\text{sen}\theta$

$y = -l\cos\theta$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{2}m\left(\alpha^2 + (l_0 - \alpha t)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(l_0 - \alpha t)\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(m(l_0-\alpha t)^2\dot\theta\right) = -2\alpha m(l_0-\alpha t)\dot\theta + m(l_0-\alpha t)^2\ddot\theta$$

$$= -2\alpha m l(t)\dot\theta + m l(t)^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(l_0-\alpha t)\,\text{sen}\,\theta = -mg\,l(t)\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Downarrow$$

Entonces la ec. de movimiento es:

$$\cancel{m}\,\cancel{l(t)}^2\ddot\theta - 2\alpha\cancel{m}\,\cancel{l(t)}\dot\theta + \cancel{m}g\,\cancel{l(t)}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot\theta - \frac{2\alpha}{l(t)}\dot\theta + \frac{g}{l(t)}\,\text{sen}\,\theta = 0}$$

4) Basta observar que $L = L(\theta, \dot\theta, t)$

y ver que $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \implies \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$

$$\Downarrow$$

$H$ no es una cte. de movi.