COMPLEMENTO DE LA

CLASE 2 (JU 01/09/16)

(Circuito de corriente alterna)

$\Downarrow$

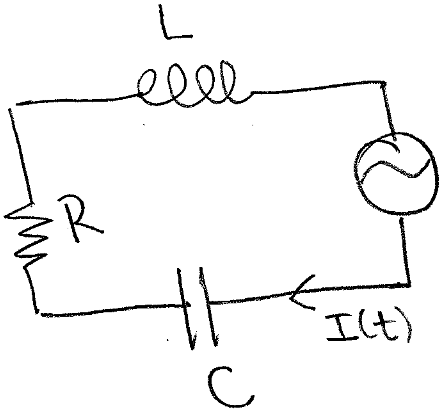
Válido cuando el circuito ha alcanzado su estado estacionario

$\Downarrow$

Independiente de condiciones iniciales.

$t \to \infty$

Sea el siguiente circuito en serie:



$V(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t)$

<u>Idea</u> Hallar la corriente del circuito

La ec. de malla es la siguiente:

$$L\frac{dI(t)}{dt} + I(t)R + \frac{q(t)}{C} = V_0 \operatorname{sen}(\omega t) = \operatorname{Im}\left[V_0 e^{i\omega t}\right]$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{1}{C}\int I\,dt = \operatorname{Im}\left[V_0 e^{i\omega t}\right]$$

La corriente $I(t)$ está en fase con la fuente

$\therefore$ debe tener la siguiente forma:

$$I(t) = \mathrm{Im}\left[I_0 e^{i\omega t}\right] \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

Entonces:

$*$ $$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\left(I_0 e^{i\omega t}\right)\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left(I_0 e^{i\omega t}\right)\right]$$
$$= \mathrm{Im}\left[I_0 i\omega e^{i\omega t}\right]$$

$*$ $$\int I\,dt = \int \mathrm{Im}\left[I_0 e^{i\omega t}\right] dt$$
$$= \mathrm{Im}\left[\int I_0 e^{i\omega t} dt\right]$$
$$= \mathrm{Im}\left[\frac{I_0}{i\omega} e^{i\omega t}\right]$$

Reemplazando en la ec. diferencial:

$$L\,\mathrm{Im}\left[I_0 i\omega e^{i\omega t}\right] + R\,\mathrm{Im}\left[I_0 e^{i\omega t}\right] + \frac{1}{C}\mathrm{Im}\left[\frac{I_0}{i\omega} e^{i\omega t}\right]$$
$$= V_0 \,\mathrm{sen}(\omega t) = V_0\,\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right]$$

o equivalentemente

$$\cancel{\mathbb{I}m}\left[L I_0 i\omega e^{i\omega t}\right] + \cancel{\mathbb{I}m}\left[R I_0 e^{i\omega t}\right] + \cancel{\mathbb{I}m}\left[\frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t}\right]$$

$$= \cancel{\mathbb{I}m}\left[V_0 e^{i\omega t}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$L I_0 i\omega \cancel{e^{i\omega t}} + R I_0 \cancel{e^{i\omega t}} + \frac{I_0}{i\omega C} \cancel{e^{i\omega t}} = V_0 \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\left(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}\right) I_0 = V_0$$

luego

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

COMPLEJA.

luego de ecuación (*).

$$I(t) = \mathbb{I}m\left[I_0 e^{i\omega t}\right]$$

donde

$$I_0 e^{i\omega t} = \frac{V_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} e^{i\omega t}$$

$$= V_0 \frac{e^{i\phi}}{\left| R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right|} e^{i\omega t}$$

$$\left\| R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right\| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

Finalmente

$$I(t) = \mathbb{I}m \left[\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{i(\omega t + \phi)} \right]$$

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Otras preguntas que hacer

$U_L = \frac{1}{2} L I^2$ (Energía almacenada en el campo magnético del inductor)

$U_C = \frac{1}{2} C V_c^2$ (Energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor)

$$V_L = \frac{1}{C} \int I \, dt$$

$P_R = I^2 R$ (Potencia disipada por el resistor)

Evaluación de la integral $\int_a^b x^n \operatorname{sen} x \, dx$

$$I = \int_a^b x^n \operatorname{sen} \beta x \, dx = \int_a^b x^n \, \mathbb{I}m\left(e^{i\beta x}\right) dx$$

dado que $\{X, a, b\} \in \mathbb{R}$

$$I = \int_a^b \mathbb{I}m\left[x^n e^{i\beta x}\right] dx$$

$$= \mathbb{I}m\left[\int_a^b x^n e^{i\beta x}\right]$$

Obs. $\frac{d}{d\beta} e^{i\beta x} = i x e^{i\beta x}$

$$\frac{d^2}{d\beta^2} e^{i\beta x} = i^2 x^2 e^{i\beta x}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{d\beta^n} e^{i\beta x} = i^n x^n e^{i\beta x}$$

$$\therefore \quad x^n e^{i\beta x} = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\beta^n} e^{i\beta x}$$

luego en la integral:

$$I = \mathrm{Im}\left[\int_a^b (-i)^n \frac{d^n}{d\beta^n} e^{i\beta x} \, dx \right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[(-i)^n \frac{d^n}{d\beta^n} \int_a^b e^{i\beta x} \, dx \right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[(-i)^n \frac{d^n}{d\beta^n} \left(\frac{1}{i\beta} e^{i\beta x} \right) \Bigg|_{x=a}^{b} \right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[(-i)^{n+1} \frac{d^n}{d\beta^n} \left(\frac{1}{\beta} \left(e^{i\beta b} - e^{i\beta a} \right) \right) \right]$$

Se realizan 2 operaciones

⇒ derivación y extraer la parte imaginaria (Esto último al parecer es mejor para comenzar)