Universidad de Valparaíso
CHILE

Miniprueba VIII

Mecánica Intermedia (FIS 311)

Licenciatura en Física mención Astronomía

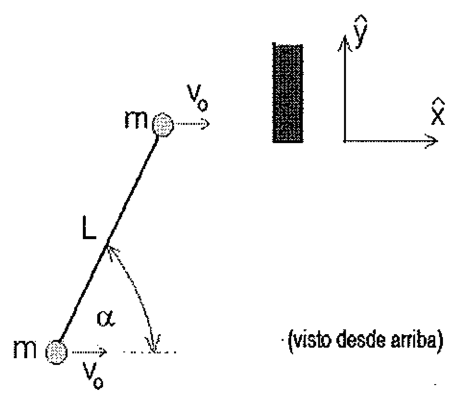
IPGG[1]

Contenido : Dinámica rotacional

Problema 1 : Considere una varilla rígida (de masa despreciable), que en cada uno de sus extremos tiene adosada una masa m. La varilla se desplaza inicialmente sin rotar sobre el plano (x, y), con la velocidad del centro de masas $\vec{v} = v_0\hat{x}$ y con la varilla orientada de manera de formar un ángulo con el eje x, (ver figura). En cierto lugar una de las masas choca elásticamente con una pared rígida, tal como se muestra en la figura. Después de la colisión (el centro de masas de) la varilla con las masas se trasladará uniformemente, rotando simultáneamente con velocidad angular constante.

Desprecie el roce entre las masas m y el plano y suponga también que la pared está pulida, es decir, no hay fuerzas de roce entre la masa m y la pared cuando entran en contacto.

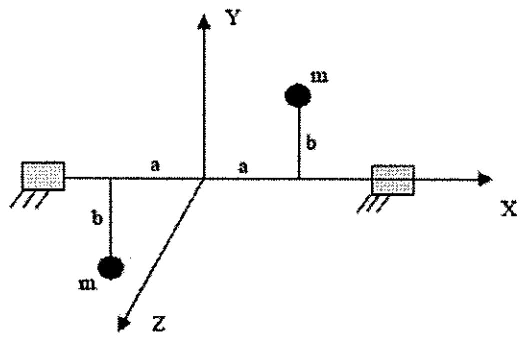
- Determine la velocidad angular de la varilla después de la colisión.
- Encuentre el impulso transmitido al sistema por la pared durante la colisión.
- Verifique que el resultado obtenido en el item previo da los resultados correctos en los límites $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



---

[1]**Fecha de entrega** : *Miércoles 04/07/2012*
No se recibirán tareas después de esta fecha.

Problema 2 : Determine el tensor de inercia del sistema mostrado en la figura, suponga que los únicos elementos que tienen masa son las esferas. Determine la dirección y el módulo del momentum angular cuando el sistema gira con velocidad ω respecto a un eje coincidente con el eje x.

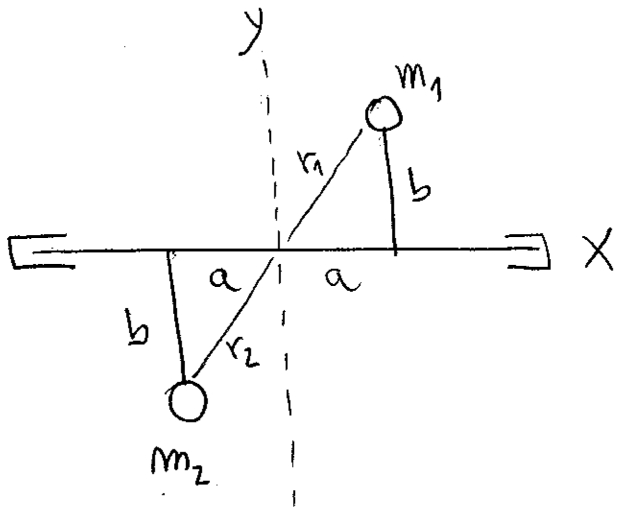


Problema 3 : Demuestre que para el movimiento general de un sólido rígido alrededor de un punto fijo, la variación temporal de la energía cinética T está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}$$

siendo $\vec{\tau}$ el torque total que actúa sobre el cuerpo.

PROBLEMA 2



$$\begin{cases} X_3^{(i)} = 0 \\ r_i^2 = a^2 + b^2 \quad (i=1,2) \end{cases}$$

$X_1^{(1)} = a$

$X_1^{(2)} = -a$

$X_2^{(1)} = b$

$X_2^{(2)} = -b$

$m_1 = m_2$

⟨FORMA 1⟩

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \left(r_k^2 \delta_{ij} - X_i^{(k)} X_j^{(k)} \right) m_k$$

Para la situación de la figura:

$$\circledast\; I_{11} = \left(r_1^2 - X_1^{(1)} X_1^{(1)}\right) m_1 + \left(r_2^2 - X_1^{(2)} X_1^{(2)}\right) m_2$$

$$= \left(\cancel{a^2} + b^2 - \cancel{a^2}\right) m + \left(\cancel{a^2} + b^2 - \cancel{a^2}\right) m$$

$$= 2mb^2 \;//$$

$$\circledast\; I_{22} = \left(r_1^2 - X_2^{(1)} X_2^{(1)}\right) m_1 + \left(r_2^2 - X_2^{(2)} X_2^{(2)}\right) m_2$$

$$= \left(a^2 + \cancel{b^2} - \cancel{b^2}\right) m + \left(a^2 + \cancel{b^2} - \cancel{b^2}\right) m$$

$$= 2ma^2$$

⊛ $I_{33} = \left(r_1^2 - \cancel{X_3^{(1)}} X_3^{(1)}\right) m_1 + \left(r_2^2 - \cancel{X_3^{(2)}} X_3^{(2)}\right) m_2$

$= 2m(a^2+b^2)$ //

⊛ $I_{12} = I_{21} = \left(-X_1^{(1)} X_2^{(1)}\right) m_1 + \left(-X_1^{(2)} X_2^{(2)}\right) m_2$

$= -abm - abm$

$= -2abm$ //

⊛ $I_{13} = I_{31} = \left(-X_1^{(1)} \cancel{X_3^{(1)}}\right) m_1 + \left(-X_1^{(2)} \cancel{X_3^{(2)}}\right) m_2$

$= 0$ //

Análogamente

⊛ $I_{23} = I_{32} = 0$ //

$$\therefore \quad I = \begin{pmatrix} 2mb^2 & -2abm & 0 \\ -2abm & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

<FORMA 2>

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$I_{ij} = \int \rho \, dV \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) \quad ; \; dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

siendo $\rho(\vec{r}) = m\left[\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z) + \delta(x+a)\delta(y+b)\delta(z)\right]$

$$= m\left[\delta(x_1-a)\delta(x_2-b)\delta(x_3) + \delta(x_1+a)\delta(x_2+b)\delta(x_3)\right]$$

luego

$$I_{11} = \int \rho \, dV \left[\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right) - x_1^2 \right]$$

$$= m\left[\int \left(x_2^2 + x_3^2 \right) \delta(x_1-a)\delta(x_2-b)\delta(x_3) \, dV + \int \left(x_2^2 + x_3^2 \right) \delta(x_1+a)\delta(x_2+b)\delta(x_3) \, dV \right]$$

$$= m\left[b^2 + b^2 \right] = 2mb^2$$

De manera similar para $I_{22} = 2ma^2$

$$I_{33} = 2m\left(a^2 + b^2\right)$$

Para $I_{12} = -\int \rho \, dV \, x_1 x_2$

$$I_{12} = -m\left[\int dV\, x_1 x_2\, \delta(x_1-a)\,\delta(x_2-b)\,\delta(x_3) + \int dV\, x_1 x_2\, \delta(x_1+a)\,\delta(x_2+b)\,\delta(x_3)\right]$$

$$= -m\left[ab + ab\right] = -2mab$$

Asimismo

$$I_{23} = I_{32} = I_{13} = I_{31} = 0$$

$$\therefore \quad I = \begin{pmatrix} 2mb^2 & -2mab & 0 \\ -2mab & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

$$I = 2m\begin{pmatrix} b^2 & -ab & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Luego si $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_1 = \omega \hat{\imath}$

Notación conveniente

entonces

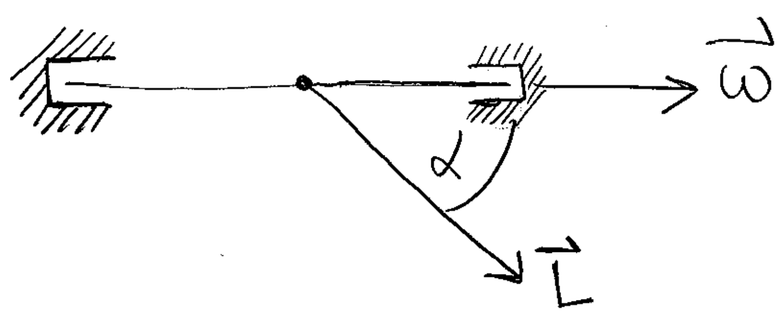
$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = 2m \begin{pmatrix} b^2 & -ab & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = 2m \begin{pmatrix} b^2 \\ -ab \\ 0 \end{pmatrix} \omega$$

$$\Downarrow$$

$$L_1 = 2mb^2\omega$$
$$L_2 = -2mab\omega$$
$$L_3 = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{L} = 2mb\omega\left(b\hat{e}_1 - a\hat{e}_2\right) = 2mb\omega\left(b\hat{\imath} - a\hat{\jmath}\right)$$



Extra: cálculo de α (forma general) (Opcional)

$$\vec{L}\cdot\vec{w} = Lw\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{L}\cdot\vec{w}}{Lw}$$

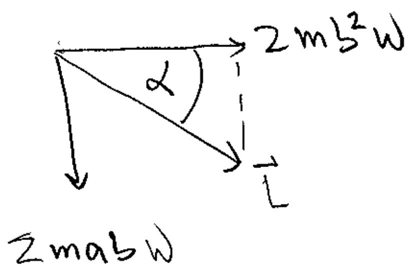
donde $\vec{L}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} 2mb^2w & -2mabw & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2mb^2w^2$

$$L = |\vec{L}| = 2mbw(a^2+b^2)^{1/2}$$

$$|\vec{w}| = w$$

$$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left[\frac{\cancel{2}\cancel{m}\cancel{b^2}\cancel{w^2}}{w\cdot\cancel{2}\cancel{m}\cancel{b}\cancel{w}(a^2+b^2)^{1/2}}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

Este resultado es más fácil si evaluamos el ángulo α de la figura con el eje x:



$$\cos\alpha = \frac{2mb^2w}{\left[(2mb^2w)^2+(2mabw)^2\right]^{1/2}} = \frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

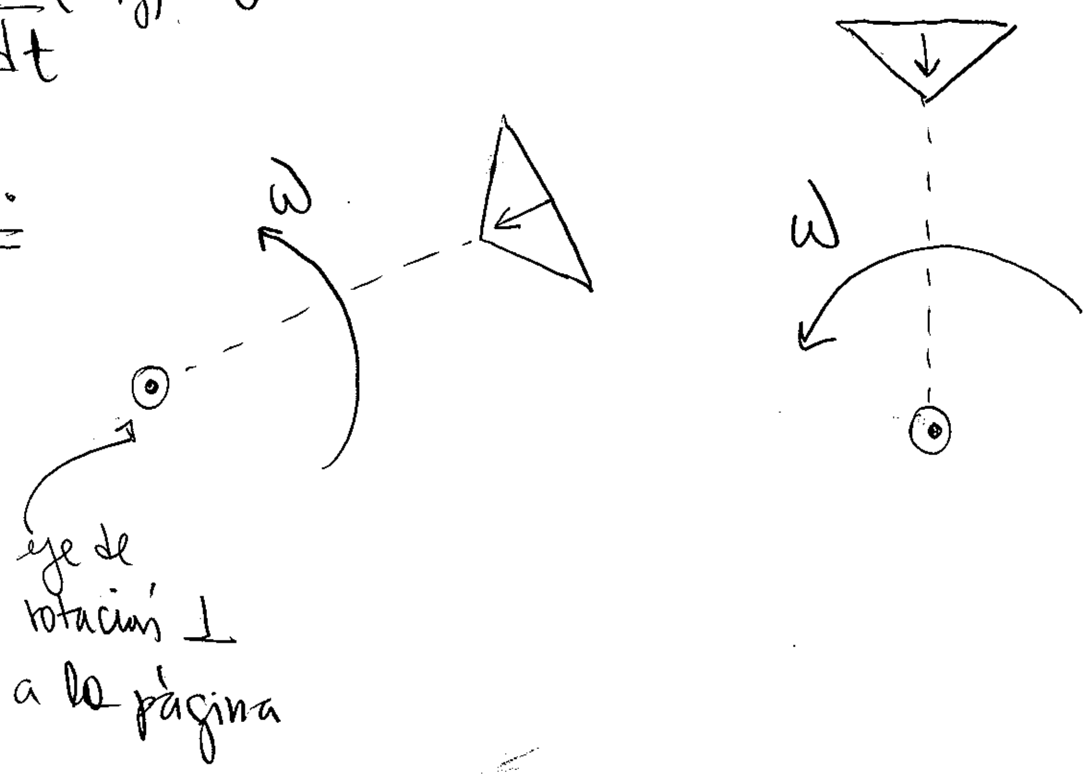
etc.

< PROBLEMA 3 >

Si cuerpo gira con respecto a un eje fijo y si su distribución de masa no varía respecto a eje de rotación, entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(I_{ij}\right) = 0$$

Ej.



Recordando que

$$T = \frac{1}{2}\, w_i I_{ij} w_j \quad ; \text{derivando en } t:$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{dw_i}{dt} I_{ij} w_j + \frac{1}{2}\, w_i I_{ij} \frac{dw_j}{dt}$$

Por otro lado la 2ª ley de Newton nos dice que:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \tau_i = \frac{dL_i}{dt}$$

pero en este caso $L_i = I_{ij} w_j$

$$\therefore \quad \tau_i = I_{ij} \frac{dw_j}{dt}$$

Entonces

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw_i}{dt} I_{ij} \right) w_j + \frac{1}{2} w_i \left(I_{ij} \frac{dw_j}{dt} \right)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$I_{ij} \frac{dw_i}{dt} \qquad\qquad \tau_i$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_j$$

Entonces

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \tau_j w_j + \frac{1}{2} w_i \tau_i$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{w} + \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{\tau} = \vec{w} \cdot \vec{\tau} \quad // \quad (Q.E.D)$$