Universidad de Valparaíso
CHILE

Tarea Voluntaria II
MMF II
Licenciatura en Física - 2020

Demuestre la siguiente identidad que involucra símbolos de Pochhammer:

$$\frac{(a)_n}{(a+1)_n}\frac{(b)_n}{(b+1)_n} = \frac{a}{a-b}\frac{(b)_n}{(b+1)_n} - \frac{b}{a-b}\frac{(a)_n}{(a+1)_n}$$

donde los parámetros cumplen con la condición $a \neq b$. Solo como dato, dicha identidad puede ser útil para simplificar la estructura de una función hipergeométrica de la forma ${}_pF_q\left(\cdots\right)$ a una suma de dos hipergeométricas de la forma ${}_{(p-1)}F_{(q-1)}\left(\cdots\right)$.

Ideas útiles para enfrentar este problema:

- $\Gamma\left(z+1\right) = z\Gamma\left(z\right)$
- $\Gamma\left(z+n\right) = \Gamma\left(z\right)\left(z\right)_n$
- Fracciones parciales

$$\frac{(a)_n}{(a+1)_n}\frac{(b)_n}{(b+1)_n} = \frac{\dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\dfrac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}}{\dfrac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+1)}\dfrac{\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(b+1}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(a+n+1)\,\Gamma(b+n+1)}$$

donde $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$

$\Gamma(b+1) = b\,\Gamma(b)$

$\Gamma(a+n+1) = (a+n)\Gamma(a+n)$

$\Gamma(b+n+1) = (b+n)\,\Gamma(b+n)$

$$\therefore \frac{(a)_n(b)_n}{(a+1)_n(b+1)_n} = \frac{ab}{(a+n)(b+n)}$$

Utilizando fracciones parciales para el producto en el denominador:

$$\frac{1}{(a+n)(b+n)} = \frac{1}{(a-b)}\left[\frac{1}{b+n} - \frac{1}{a+n}\right]$$

Identidad: $\alpha = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \implies \dfrac{1}{b+n} = \dfrac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b+n+1)}$ | $\dfrac{1}{a+n} = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a+n+1)}$

$= \dfrac{\Gamma(b)(b)_n}{\Gamma(b+1)(b+1)_n}$ | $= \dfrac{\Gamma(a)(a)_n}{\Gamma(a+1)(a+1)_n}$

$= \dfrac{1}{b}\dfrac{(b)_n}{(b+1)_n}$ | $= \dfrac{1}{a}\dfrac{(a)_n}{(a+1)_n}$

$$\therefore \frac{(a)_n(b)_n}{(a+1)_n(b+1)_n} = \frac{ab}{a-b}\left[\frac{1}{b}\frac{(b)_n}{(b+1)_n} - \frac{1}{a}\frac{(a)_n}{(a+1)_n}\right]$$

$$\frac{(a)_n(b)_n}{(a+1)_n(b+1)_n} = \frac{a}{a-b}\frac{(b)_n}{(b+1)_n} - \frac{b}{a-b}\frac{(a)_n}{(a+1)_n}$$ QED.