Felipe Ortiz Arredondo

Tarea 1

Problema 1:

$$E_1 = \frac{5E_0}{(4x-3t)^2+2} \quad ; \quad E_2 = \frac{-5E_0}{(4x+3t-6)^2+2}$$

* Las ondas tiene rapidez $V = \frac{\omega}{k}$ $\Rightarrow V = \frac{3}{4}$ [m/s]

a. Las ondas se mueven en dirección del eje x, lo que se puede saber ya que: $E_i = E_{0i}(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_i)$ es la forma general de una onda plana, y en este caso se puede apreciar que $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = 4\hat{\imath}$ $\therefore$ $\vec{k}\cdot\vec{r} = 4x$

Ahora bien, ambas ondas se mueven en sentidos opuestos:

- E_1 tiene la forma $E_i = E_{0i}(k_x X - \omega_i t + \varphi_i)$, y dado el término $-\omega_i t$ se ve que la onda se mueve en la dirección positiva del eje X.
- E_2, por otro lado, tiene la forma $E_i = E_{0i}(k_x X + \omega_i t + \varphi_i)$, lo que implica que se mueve en la dirección negativa del eje X.

b. $E_R = E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow 5E_0\left(\frac{1}{(4x-3t)^2+2} + \frac{-1}{(4x+3t-6)^2+2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(4x-3t)^2+2} = \frac{1}{(4x+3t-6)^2+2} \Rightarrow (4x+3t-6)^2 \cancel{+2} = (4x-3t)^2 \cancel{+2}$$

$$\Rightarrow (4x+3t-6)^2 = (4x-3t)^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow \cancel{4x}+3t-6 = \cancel{4x}-3t$$

$\Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow \boxed{t=1}$ $\therefore$ En el instante $t=1$ la superposición es cero en todos lados.

c. Usando la lógica anterior: $\sqrt{(4x+3t-6)^2} = \sqrt{(4x-3t)^2}$

$\Rightarrow |4x+3t-6| = 4x-3t$; en la parte b se usó el caso del valor absoluto mayor a cero, ahora se usará el otro caso (menor a cero)

$$\Rightarrow -(4x+3t-6) = 4x-3t \Rightarrow -4x\cancel{-3t}+6 = 4x\cancel{-3t}$$

$\Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3/4}$ $\therefore$ En el punto $x=3/4$ la superposición es cero en todo instante.

Problema 2: $E = 0{,}02\,\mathrm{sen}(\omega t + \epsilon)$

(a) La fórmula general para la amplitud de una superposición de N ondas es:

$$(*)\; E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0i}E_{0j}\cos(\alpha_j - \alpha_i) \quad , \text{ con } \alpha_i = \vec{k}_i \cdot r + \varphi_i$$

Como se trata de ondas idénticas se tienen iguales amplitudes y números de ondas, y además, para este caso, tenemos iguales φ_i. Por lo tanto, la ecuación se reduce a: $E_0^2 = N^2 E_{01}^2 \Rightarrow E_0 = N E_{01}$

$N = 100$, $E_{01} = 0{,}02$ $\therefore$ $\boxed{E_0 = 2}$

(b) Con fases aleatorias, el segundo término de la ecuación $(*)$ se hace efectivamente cero si $N \gg 1$, entonces la ecuación queda: $E_0^2 = N E_{01}^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{N}\, E_{01}$

Considerare $N = 100$ lo suficientemente grande para usar esta ecuación, por lo tanto $\boxed{E_0 = 0{,}2}$

Problema 3: $Y = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right)$

(a) • La superposición "Y" no tiene dependencia temporal, por lo que se puede asumir que las ondas que la conforman tampoco la tienen.

• Los i-ésimos k de cada onda deben ser iguales, pues, de lo contrario, la onda "Y" tendría beats, que no es el caso.

• Como la oscilación "Y" no tiene desfase, las ondas que la compongan deben tener algún número entero de 2π como desfase, o bien, existir pares de ondas con un desfase inverso (aditivo) del otro, de modo que se cancelen (en ese caso no importaría la amplitud, frecuencia o número de ondas de estos pares).

Por lo tanto, la oscilación "Y" debe estar conformada por las siguientes N ondas: $Y = \sum_{i=1}^{N} \frac{Y_0}{N}\,\text{sen}(k x + 2\pi n)$, donde $Y_0 = 3$ y $k = \frac{\pi}{10}$, y $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Entonces las características de cada onda son:

• Amplitud: $\boxed{Y_i = 3/N}$

• Longitud de onda $= \lambda_i = \frac{2\pi}{k_i} = \frac{2\pi 10}{\pi} \Rightarrow \boxed{\lambda_i = 20}$

• La rapidez es nula y, por lo tanto las ondas no se desplazan a ninguna dirección.

b. La distancia internodal: $\boxed{\lambda/2 = 10}$

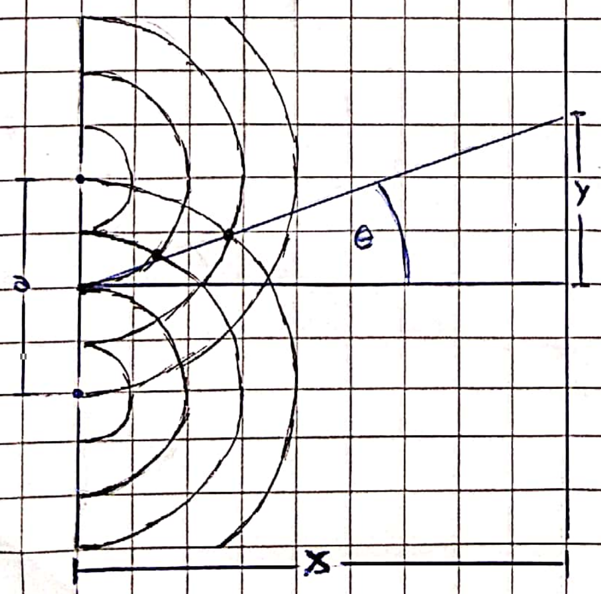
c. Voy a asumir que k tiene las siguientes unidades: $k = \frac{\pi}{10}\ [cm^{-1}]$

Entonces, en $x = 5$ [cm]: $Y = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi 5}{10}\right) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

La oscilación no depende del tiempo, por lo que no hay ni velocidad ni aceleración.

Problema 4:

$a = 0{,}5$ [mm], $\lambda = 600$ [nm], $y = 1$ [mm]



$a\,\text{sen}\theta \approx m\lambda$ (si $a \ll x$)

Para este caso, $m = 1$

Además, si $y \ll x$: $\text{sen}\theta \approx \tan\theta \approx y/x$

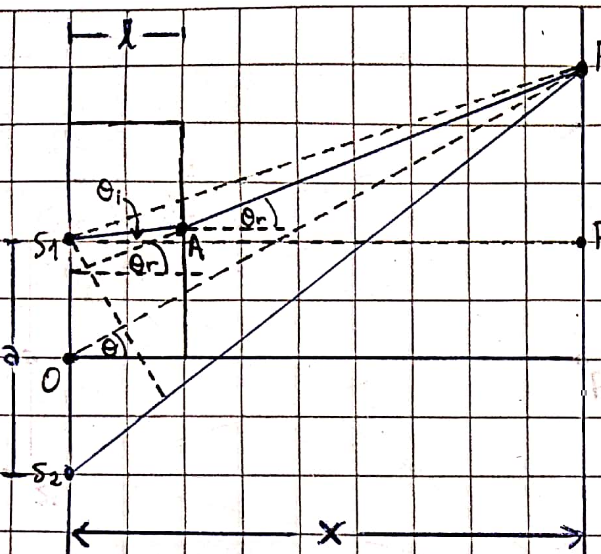
$\therefore \frac{a y}{x} = \lambda \Rightarrow x = \frac{a y}{\lambda}$

$x = \frac{0{,}5\,[mm] \cdot 1\,[mm]}{600 \cdot 10^{-6}\,[mm]} = 833{,}3\,[mm]$

Efectivamente $a, y \ll x$, por lo que puedo usar estas expresiones

$\therefore x = 833{,}3\,[mm]$

b.



En un caso sin el vidrio: $\Delta_1 = \overline{S_2P} - \overline{S_1P}$

Sin embargo acá: $\Delta_2 = \overline{S_2P} - (\overline{S_1A} + \overline{AP})$

En el caso constructivo: $\Delta_1 = m\lambda$

Al haber una diferencia de camino: $\Delta_2 = m\lambda + C$

$\Rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 = C$

$\Rightarrow C = \overline{S_2P} - (\overline{S_1A} + \overline{AP}) - \overline{S_2P} + \overline{S_1P}$

$C = \overline{S_1P} - \overline{S_1A} - \overline{AP}$

$a << x \Rightarrow \theta \approx \measuredangle PS_1P'$

$\therefore \overline{S_1P}\cos\theta \approx x \Rightarrow \boxed{\overline{S_1P} \approx \dfrac{x}{\cos\theta}}$

De la figura: $\overline{S_1A}\cos\theta_i = l \Rightarrow \boxed{\overline{S_1A} = \dfrac{l}{\cos\theta_i}}$

$\overline{AP}\cos\theta_r = x - l \Rightarrow \boxed{\overline{AP} = \dfrac{x-l}{\cos\theta_r}}$

Nuevamente, como $a << x$, $\theta \approx \theta_r$: $n_1 \operatorname{sen}\theta_i \approx n_2 \operatorname{sen}\theta$

$n_1\sqrt{1-\cos^2\theta_i} = n_2 \operatorname{sen}\theta \quad /()^2 \Rightarrow n_1^2 - n_1^2\cos^2\theta_i = n_2^2 \operatorname{sen}^2\theta$

$\Rightarrow \cos^2\theta_i = \dfrac{n_1^2 - n_2^2\operatorname{sen}^2\theta}{n_1^2} \Rightarrow \cos\theta_i = \dfrac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2\operatorname{sen}^2\theta}}{n_1}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{S_1A} = \dfrac{n_1 l}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2\operatorname{sen}^2\theta}}} \qquad \therefore C = l\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{n_1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2\operatorname{sen}^2\theta}}\right)$

* Las franjas se desplazarán una cantidad C, dependiente del ángulo θ.

c. $\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = m\lambda \\ \Delta_2 = (m+1/2)\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 = \cancel{m\lambda} + \lambda/2 - \cancel{m\lambda} = \lambda/2$

Un corrimiento de franjas de un máximo al mínimo próximo corresponde a una diferencia de caminos de $\lambda/2$