

PROBLEMA GUÍA I / # 14

Analizamos la componente i -ésima del lado derecho:

$$(\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}))_i = \partial_i(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \partial_i(v_x v_x) = 2 v_x \partial_i v_x$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))_i &= \epsilon_{ijk} v_j (\nabla \times \vec{v})_k \\ &= \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \partial_l v_m \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} v_j \partial_l v_m \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} v_j \partial_l v_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l v_m \\ &= v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i \\ &= v_x \partial_i v_x - v_x \partial_x v_i \end{aligned}$$

¡ hacemos $j=l$

Es un índice fantasma, desaparece después de la suma.

Ahora bien, la componente i -ésima del lado derecho es la siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \right)_i &= \frac{1}{2} \cdot 2 v_x \partial_i v_x - (v_x \partial_i v_x - v_x \partial_x v_i) \\ &= v_x \partial_x v_i \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad \text{QED.}$$