(3)

$$\frac{dA'}{dt'} \simeq \frac{1}{2}R^2\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{2M}{R}+\frac{\gamma}{3}R\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{M}{R}+\frac{\gamma}{2}R\right)\frac{d\theta}{dt}$$

siguiendo la aproximación del paper si es que me de mejor resultado.

$$=\frac{1}{2}R^2\left(1+\frac{\alpha}{2}+\frac{M}{R}+\frac{\gamma}{2}R+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha M}{2R}+\frac{\alpha\gamma}{4}R+\frac{2M}{R}+\frac{2M\alpha}{2R}+\frac{2M\gamma R}{2R}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma}{3}R+\frac{\gamma\alpha}{6}R+\frac{\gamma R M}{3R}+\frac{\gamma^2R^2}{6}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{1}{2}R^2\left(1+\alpha+\frac{3M}{R}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3\gamma R+2\gamma R}{6}+\frac{M\alpha}{R}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\alpha\gamma R\left(\frac{6+4}{24}\right)\right.$$
$$\left.+M\gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{\gamma^2R^2}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}R^2\left(1+\alpha+\frac{3M}{R}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{3\gamma R+2\gamma R}{6}+\frac{M\alpha}{R}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\alpha\gamma R\left(\frac{6+4}{24}\right)\right.$$
$$\left.+M\gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{\gamma^2R^2}{6}\right)$$

$$\frac{dA'}{dt'}=\frac{1}{2}R^2\left(1+\alpha+\frac{3M}{R}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{5}{6}\gamma R+\frac{3}{2}\frac{M\alpha}{R}+\frac{10}{24}\alpha\gamma R+\frac{4}{3}M\gamma+\frac{1}{6}\gamma^2R^2\right)\frac{d\theta}{dt}$$

comparando terminos con espacio plano

$$\frac{1}{2}R^2\,d\theta'=\frac{1}{2}R^2\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{R}\left(3M+\frac{3}{2}M\alpha\right)+R\left(\frac{5\gamma}{6}+\frac{5}{12}\alpha\gamma\right)+\frac{4}{3}M\gamma+R^2\frac{\gamma^2}{6}\right)d\theta$$

$$\Delta\theta'=\int^{2\pi}1+\alpha+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{4}{3}M\gamma\;d\theta+\int^{2\pi}3M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{R}d\theta+5\gamma\left(\frac{1}{6}+\frac{\alpha}{12}\right)\int_0^{2\pi}R\,d\theta+\frac{\gamma^2}{6}\int^{2\pi}R^2\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}R^2 d\theta' = \frac{1}{2}R^2\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{R}\left(3M+\frac{3}{2}M\alpha\right)+R\left(\frac{5\gamma}{6}+\frac{5}{12}\alpha\gamma\right)+\frac{4}{3}M\gamma+R^2\frac{\gamma^2}{6}\right)d\theta$$

$$\Delta\theta' = \int_0^{2\pi} 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{4}{3}M\gamma\, d\theta + \int_0^{2\pi} 3M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{R}d\theta + 5\gamma\left(\frac{1}{6}+\frac{\alpha}{12}\right)\int_0^{2\pi} R\, d\theta + \frac{\gamma^2}{6}\int_0^{2\pi} R^2 d\theta$$

en donde $R = \frac{\ell}{1+\epsilon\cos\theta}$; $\int_0^{2\pi}\frac{1+\epsilon\cos\theta}{\ell}d\theta = \frac{2\pi}{\ell}$; $\left\{\int_0^{2\pi}\frac{1}{R}d\theta = \frac{2\pi}{\ell}\right.$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\ell}{1+\epsilon\cos\theta}d\theta \cdot \frac{1-\epsilon\cos\theta}{1-\epsilon\cos\theta} = \ell\int_0^{2\pi}\frac{1-\epsilon\cos\theta}{1-\epsilon^2\cos^2\theta}d\theta$$

$\epsilon^2 = \epsilon^2\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta$

$1-\epsilon^2\cos^2\theta = 1-\epsilon^2+\epsilon^2\sin^2\theta$:/

aproximación con $\epsilon < 1$ $\epsilon^2 \ll 1$

$$\ell\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\epsilon\cos\theta} \to f(\theta) = (1+\epsilon\cos\theta)^{-1} \;;\; f'(\theta) = -\frac{1}{(1+\epsilon\cos\theta)^2}\epsilon(-\sin\theta) = \frac{\epsilon\sin\theta}{(1+\epsilon\cos\theta)^2}$$

respecto al angulo

respecto a la excentricidad $\to g(\epsilon) = (1+\epsilon\cos\theta)^{-1}$; $g'(\epsilon) = -\frac{\cos\theta}{(1+\epsilon\cos\theta)^2}$; $g''(\epsilon) = \frac{2\cos^2\theta}{(1+\epsilon\cos\theta)^3}$;

$$g(\epsilon) \approx 1-\epsilon\cos\theta + 2\epsilon^2\cos^2\theta + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

$$\ell\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\epsilon\cos\theta} \simeq 2\pi\ell - \ell\int_0^{2\pi}\epsilon\cos\theta\, d\theta + 2\epsilon^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = 2\pi\ell + 2\epsilon^2\pi = 2\pi(\ell+\epsilon^2)$$

(4)

$$\Delta\Theta' = 2\pi + 2\pi\left(\alpha\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)+\frac{4}{3}M\gamma\right) + \frac{2\pi}{\ell}3M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) + 5\gamma\left(\frac{2+\alpha}{12}\right)2\pi\left(\ell+\epsilon^2\right) + \frac{\gamma^2}{6}\int_0^{..} R^2 d\theta$$

donde si asumimos $\gamma^2 \ll 1$, $\alpha^2 \ll 1$ como un termino despreciable, despejamos el avance del perihelio.

$$\Delta\phi = 2\pi\left[\alpha\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)+\frac{4}{3}M\gamma\right] + \frac{2\pi}{\ell}3M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+5\gamma\left(\frac{2+\alpha}{12}\right)2\pi\left(\ell+\epsilon^2\right)$$

$$= \alpha\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)2\pi + \frac{2\pi}{\ell}3M\frac{\alpha}{2} + \frac{5\gamma\alpha}{12}2\pi\left(\ell+\epsilon^2\right) + 2\pi\cdot\frac{4}{3}M\gamma + \frac{2\pi}{\ell}3M + 5\gamma\frac{2}{12}\cdot 2\pi\left(\ell+\epsilon^2\right)$$

$$\Delta\phi_\alpha = 2\pi\left\{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)+\frac{3M\alpha}{2\ell}\right\} \approx 2\pi\left\{1+\frac{3M}{2\ell}\right\}\alpha$$

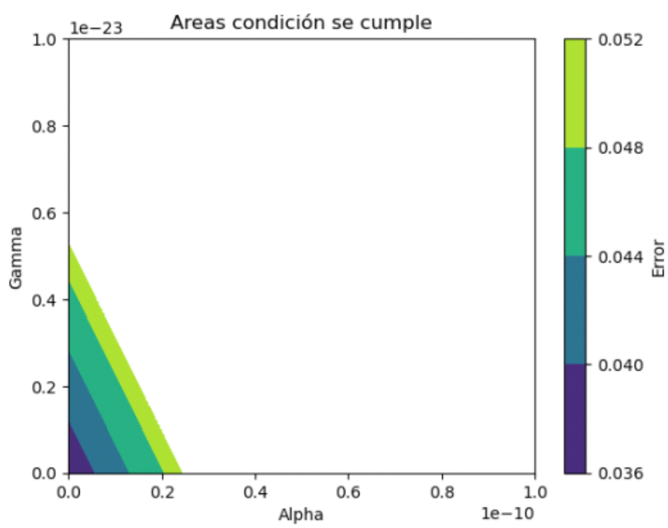
$$\Delta\phi_\gamma = 2\pi\left\{\frac{4}{3}M\gamma+\frac{10\gamma}{12}\left(\ell+\epsilon^2\right)\right\} = 2\pi\left\{\frac{4M}{3}+\frac{5}{6}\left(\ell+\epsilon^2\right)\right\}\gamma$$

$$\Delta\phi_{\gamma\alpha} = 2\pi\left\{\frac{5}{12}\left(\ell+\epsilon^2\right)\right\}\gamma\alpha$$

← termino acoplado, interacción quintaesencia y cuerdas

$$\Delta\phi_{M\ell} = 2\pi\left\{\frac{3M}{\ell}\right\}$$

```python
rs = 2.95e5 # cm proviene de rs = 2.95e3 # metros
M = rs/2 # M en cm
pi = np.pi

def phi_r(e, l, tau):
    l = l * 1e11
    return 2 * pi * 3 * M / l

def phi_alpha(e,l,tau,alpha):
    l = l * 1e11
    return 2*pi*(1+ 3*M/(2*l)) * alpha

def phi_gamma(e, l, tau, gamma):
    l = l * 1e11
    return 2*pi*(4*M/3 + 5*(l+e**2)/6) * gamma

def phi_alpha_gamma(e,l,tau,alpha,gamma):
    l = l * 1e11
    return 2*pi*(5*(l+e**2)/12)*gamma*alpha

def Phi(alpha,gamma,e,l,tau):
    """ El avance total del perihelio"""
    return (phi_r(e, l, tau) + phi_alpha(e,l,tau,alpha) + phi_gamma(e, l, tau, gamma) + phi_alpha_gamma(e,l,tau,alpha,gamma)) * tau
```

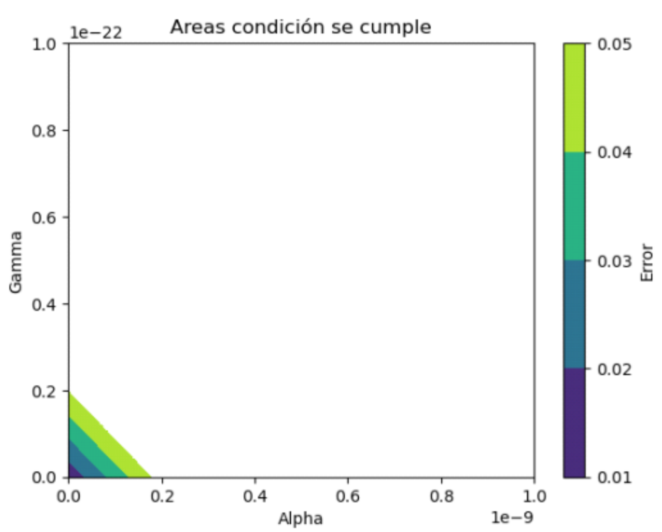


Mercurio

Condición cumplida para mercurio.
Se esta calculando la diferencia entre el shift observado y el calculado;
idealmente esta diferncia sería igual a 0, pero no llega a ese punto.

$$\alpha \in [0;2] \times 10^{-11}$$
$$\gamma \in [0;5] \times 10^{-24}$$

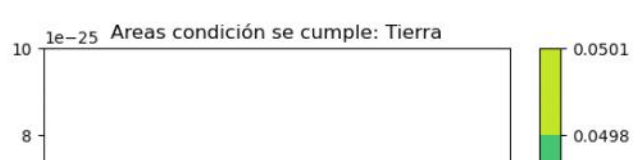
Otra aclaración es que el shift experimental con el que se compara también sea una aproximación, ya que se escribió 43.0 el error que debemos asumir es de 0.05
cual error bajo este será contado como suficientemente exacto



Venus

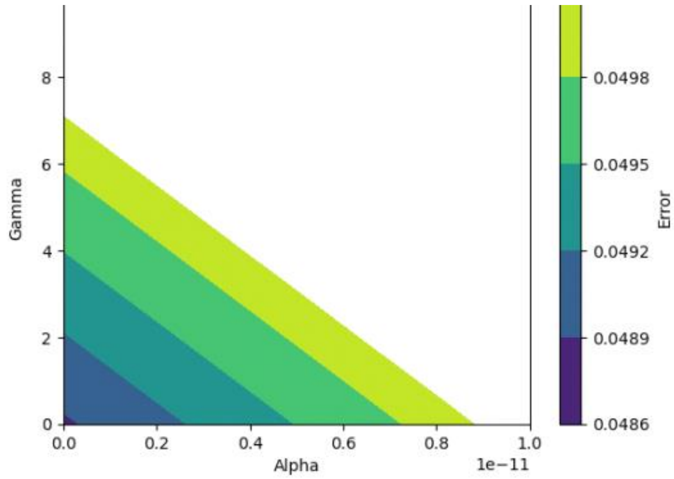
Se observa nuevamente que no alcanza a ser un error de 0, aún en el caso de ignorar alfa y gamma podria indicar que los datos

$$\alpha \in [0,2] \times 10^{-10}$$
$$\gamma \in [0,2] \times 10^{-23}$$



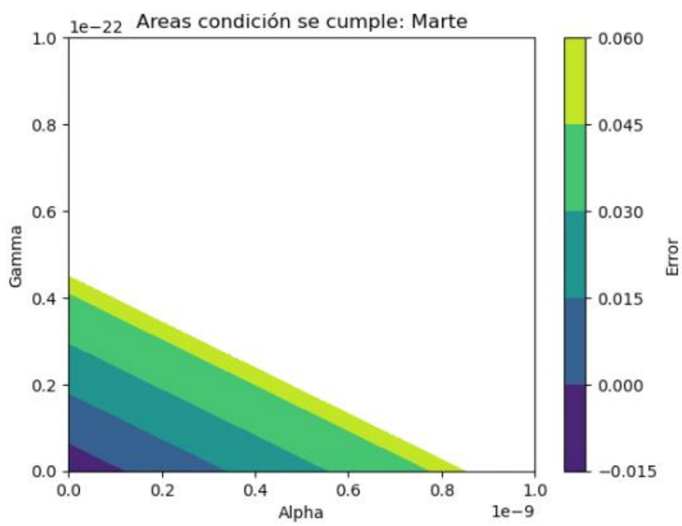
Tierra:

$$\alpha \in [0,9] \times 10^{-12}$$



$\alpha \in [0, 9] \times 10^{-12}$

$\gamma \in [0, 7] \times 10^{-25}$



Marte

$\alpha \in [0, 8] \times 10^{-10}$

$\gamma \in [0, 5] \times 10^{-22}$

Comparando a valores de shift de una tabla entregada por la NASA se encuentra un rango de estos valores alfa y gamma.
Son distintos para cada planeta, pero podria esperarse que los efectos fueran mayores cercanos a la fuente, aqui es posible introducir estadistica para obtener un verdadero intervalo de confianza para alfa y gamma, pero se tomarán los de mercurio ya que al ser el más cercano a su fuente se puede esperar que sean los efectos más limpios y directos

$$\alpha \in [0; 2] \times 10^{-11}$$
$$\gamma \in [0; 5] \times 10^{-24}$$

Nótese que al no aproximar tras haber hecho las dos primeras aproximaciones por el teorema del binomio y multiplicar limpiamente, el valor de Gamma es muchísimo menor.