



## PROGRAMA DE ASIGNATURA

# Técnicas de cálculo avanzado para la Física

Iván P. González - 2022

### Descripción de la Asignatura

El estudiante integra el marco teórico de herramientas de cálculo integral y diferencial a nivel avanzado, que permitan la evaluación de problemas complejos provenientes de las distintas áreas de la física. Aplica las herramientas en contextos de física fundamental y física aplicada, para favorecer el desarrollo del pensamiento lógico-deductivo.

El estudiante desarrolla procedimientos para evaluar problemas en los que intervienen: Integrales univariadas y multivariadas; Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales con condiciones iniciales.

En cuanto a los aspectos teóricos del curso, se presentarán dos herramientas matemáticas, el método de integración conocido como IBD (Integration by Differentiation) y la técnica denominada MoB (Method of Brackets), un método de carácter heurístico el cual ha demostrado ser una herramienta muy útil para evaluar una amplia variedad de problemas del cálculo.

### Requisitos de entrada

- Comprende integración multivariable y ecuaciones diferenciales.
- Comprende transformadas integrales: Laplace, Fourier, Mellin.

### Contribución al perfil de egreso

- Aplicar conocimientos avanzados de las matemáticas para desempeño en las investigaciones.
- Extraer información de artículos escritos en idioma inglés.
- Desempeñarse de forma autónoma en sus actividades de investigación en su área disciplinar.

### Resultados de Aprendizaje que se esperan lograr en esta asignatura.

- **Identifica** series de potencias y representaciones integrales de varias funciones especiales de la Física derivándolas fundamentalmente de ecuaciones diferenciales (problemas de Sturm-Liouville).
- **Adquiere** conocimientos del Método de Brackets (MoB), **resolviendo** problemas de integración uni/multivariable provenientes de la Mecánica Clásica, Electrodinámica, Mecánica Cuántica, Teoría Cuántica de Campos, Mecánica Estadística, etc.
- **Adquiere** conocimientos del método de Integración por Derivación (IBD) y de conceptos fundamentales de cálculo fraccional, **aplicándolos** en la evaluación de integrales provenientes de la Física fundamental y aplicada.
- **Resuelve** ecuaciones diferenciales lineales y no lineales en términos de series de potencias, **aplicando** el Método de Brackets (MoB), (problemas que dependan de condiciones iniciales).

## Contenidos temáticos

### Módulo I : Integración por derivación (IBD)

- Función Delta Dirac y función de Heaviside : Propiedades.
- Operadores diferenciales y funciones de operadores.
- IBD a partir de transformada de Fourier.
- IBD a partir de la transformada de Laplace.
- Introducción al cálculo fraccional y aplicación a IBD.

### Módulo II : Funciones y representaciones en series de potencias

- Expansión en serie de Taylor/McLaurin de funciones.
- Radio de convergencia.
- Funciones elementales y expansión en serie de potencias.
- Función Gamma : Propiedades.
- Función Beta, función Psi, función de Lerch.
- Símbolos de Pochhammer : Propiedades.
- Función hipergeométrica generalizada : Condiciones de convergencia
- Representación hipergeométrica de funciones elementales.
- Representación hipergeométrica de funciones especiales : Polinomios ortogonales, funciones de Bessel, etc.
- Función hipergeométrica bivariada : funciones de Kampé de Fériet, funciones de Lauricella.
- Funciones más generales : G-Meijer, H de Fox, etc.

### Módulo III : Método de Brackets (MoB)

- Deducción heurística de MoB.
- Concepto de brackets y sus propiedades.
- Expansión en serie de brackets de funciones.
- Integración definida a partir de la expansión en serie de brackets de la integral.
- Aplicabilidad de MoB, reglas heurísticas y teoremas.
- Teorema Maestro de Ramanujan y MoB.
- Integración multidimensional con MoB.
- Continuación analítica y no analítica de series de potencias con MoB.
- Extensión I de MoB : Representaciones nulas y divergentes de funciones.
- Extensión II de MoB : Integrales de contorno y propiedad continua/discreta de un bracket.
- Aplicaciones a Mecánica Cuántica, Mecánica Estadística, Teoría Cuántica de Campos, etc.
- Conexión IBD / MoB.

### Módulo IV : Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, MoB y series de potencias

- Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de orden  $n$  y método de serie de potencias.
- Transformada de Mellin y MoB.
- Resolución de EDO's mediante Transf. Mellin+MoB.
- Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y resolución con Transf. Mellin+MoB :
  - Péndulo simple.
  - Partícula en fluido viscoso no lineal.
  - Ecuación de Lotka-Volterra.
  - Circuitos eléctricos no lineales.
  - Ecuación de Sine-Gordon, etc.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales: Problema de los 3 cuerpos, ecuaciones de

Hodgkin–Huxley, etc.  
- Extensión de MoB a la resolución de sistemas de ecuaciones integrales e integro-diferenciales.

#### Metodología de enseñanza y aprendizaje.

- **Clases teóricas - expositivas** centradas en los conceptos fundamentales, poniendo énfasis en el saber hacer.
- **Desarrollo de actividades de aplicación** basadas en problemas, para que los estudiantes analicen una situación en particular de los conceptos tratados y se debatan los resultados obtenidos analíticamente, comparándolos con los obtenidos computacionalmente o con otros métodos analíticos convencionales, si los hubiese.
- **Desafíos a los estudiantes:** Se fomentará y guiará al estudiante en la ampliación de los contenidos tratados en la asignatura, a través de bibliografía específica que permita la obtención de conocimientos útiles en asignaturas futuras o para el desarrollo de proyectos de interés personal.

#### Evaluación y calificación de la asignatura.

El curso contempla evaluaciones de carácter sumativo. Se evaluará, durante cada módulo, los niveles de aprendizajes considerando lo siguiente:

##### 1) *Certámen de Cátedra*

- *Es una prueba escrita donde se evalúa la **comprensión de los aspectos teórico-conceptuales** y el formalismo presentado, mediante preguntas conceptuales y casos particulares sencillos.*
- *Otra parte valorará la capacidad de **aplicación del formalismo**, mediante la resolución de problemas, así como la capacidad crítica respecto a los resultados obtenidos.*
- *En ambas partes se valorarán una correcta argumentación.*

##### 2) *Tareas: Evalúan periódicamente el avance del estudiante a través de trabajo individual y/o grupal.*

3) *Proyecto final: El estudiante presenta proyecto asociado a un **problema de interés personal**, el cual deberá **resolver con las herramientas conceptuales** entregadas en esta asignatura. El objetivo de este trabajo es favorecer el desarrollo del estudiante como futuro investigador.*

#### Requisitos de aprobación y calificación

Instrumento de evaluación	N°	%
Certámenes de cátedra	2	40%
Tareas	6	30%
Proyecto final	1	30%

C=Nota promedio de certámenes de cátedra

T=Nota promedio de tareas

P=Nota de proyecto final

**Nota final**=  $0.4 \cdot C + 0.3 \cdot T + 0.3 \cdot P$

## Recursos para el aprendizaje.

### Bibliografía:

Material Guía	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Arfken G., Weber H., Harris F., Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 7th edition, 2012.</li> <li>- Boas, M.L., Mathematical Methods in the Physical Sciences, Wiley International Edition, 3th edition, 2005.</li> </ul>
Material Complementario	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., Table of Integrals, Series, and Products. Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. Academic Press, New York, 7th edition, 2007.</li> <li>- Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. (Eds.), NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge University Press, 2010.</li> </ul> <p>Apuntes y artículos científicos entregados en clases:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gonzalez I., Moll V., Definite integrals by the method of brackets. Part 1. Adv. Appl. Math., 2010, 45:50–73.</li> <li>- Gonzalez I., Moll V., Straub A., The method of brackets. Part 2: Examples and applications. In: Amdeberhan T., Medina L., Moll V.H. (Eds.), Gems in Experimental Mathematics, 2010, vol. 517 of Contemporary Mathematics, 157–172. American Mathematical Society, 2010.</li> <li>- Kempf A, Jackson D M and Morales A H 2014 New dirac delta function based methods with applications to perturbative expansions in quantum field theory <i>J. Phys. A: Math. Theor.</i> <b>47</b> 415204.</li> <li>- Kempf A, Jackson D M and Morales A H 2015 How to (path-) integrate by differentiating <i>J. Phys.:Conf. Ser.</i> <b>626</b> 012015.</li> <li>- Ding J, Eugene T and Achim K, Integration by differentiation: new proofs, methods and examples, <i>J. Phys. A: Math. Theor.</i> 50 (2017) 235201 (25pp).</li> <li>- Gonzalez I., Schmidt I., Optimized negative dimensional integration method (NDIM) and multiloop Feynman diagram calculation. <i>Nuclear Physics B</i>, 2007, 769:124–173.</li> <li>- I. Gonzalez , K. Kohl , L. Jiu , V. H. Moll, An extension of the Method of Brackets. Part 1. <i>Open Mathematics</i> Volume 15 (2017), Issue 1, 1181--1211. (arXiv:1707.08942).</li> <li>- Gonzalez, I., Jiu, L. &amp; Moll, V. (2020). An extension of the method of brackets. Part 2. <i>Open Mathematics</i>, 18(1), 983-995. <a href="https://doi.org/10.1515/math-2020-0062">https://doi.org/10.1515/math-2020-0062</a>.</li> <li>- I.I. Gonzalez, I. Kondrashuk, V.H. Moll and L. Recabarren, Mellin-Barnes integrals and the method of brackets, <i>Eur. Phys. J. C</i> (2022) 82:28. (arXiv:2108.09421).</li> </ul>