PROBLEMA GUÍA III / #2 (Algunos)

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{d\delta(x)}{dx}\,dx$ evaluada con integración con partes:

$$u = f(x) \qquad dv = \frac{d\delta(x)}{dx}\,dx$$

$$du = \frac{df(x)}{dx} \qquad v = \delta(x)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dx}\delta(x)\,dx = f(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\delta(x)\,dx$$

$$= f(\infty)\cancel{\delta(\infty)}^{0} - f(-\infty)\cancel{\delta(-\infty)}^{0} - \frac{df(0)}{dx}$$

$$= -\frac{df(0)}{dx} \quad \text{QED}$$

b) y c) Se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

$$= f(a)\cdot 1$$

$$= f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\,\delta(x-a)\,dx$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\,\delta(x-a)\,dx$$

Desde el punto de vista "operacional" se cumple: $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$

QED

d) A partir de la reprentación integral de $\delta(x)$:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk$$

se cumple que: $\delta(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(-x)}\, dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-k)x}$

en esta última integral hacemos el cambio de variable:

$$k = -\xi \Rightarrow dk = -d\xi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk \rightarrow -\int_{\infty}^{-\infty} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi$$

$$\therefore \delta(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\, d\xi$$

$$= \delta(x)$$

$$\therefore \delta(-x) = \delta(x)$$

QED

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\delta(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} d(\delta(x)) = \cancel{\delta(\infty)}^{0} - \cancel{\delta(-\infty)}^{0} = 0$

QED

h) Este item es una extensión del item (a). Utilice inducción

f) Es directo

e) Se tiene que $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$

$\therefore\ \delta(ax) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikax}\,dk$, supongamos que $a \in \mathbb{R}$

esto es: $a = \text{sign}(a)|a|$ con $\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a>0 \\ -1, & \text{si } a<0 \end{cases}$

$$\delta(ax) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\text{sign}(a)|a|kx}\,dk$$

haciendo $\xi = \text{sign}(a)|a|k \Rightarrow dk = \frac{\text{sign}(a)}{|a|}\,d\xi$

y $\int_{-\infty}^{\infty} dk \Rightarrow \int_{-\text{sign}(a)\infty}^{\text{sign}(a)\infty}$

Finalmente

$$\delta(ax) = \frac{\text{sign}(a)}{|a|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\text{sign}(a)\infty}^{\text{sign}(a)\infty} e^{i\xi x}\,d\xi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{|a|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{\delta(x)}{|a|} & ;\text{si } a>0 \\ -\frac{1}{|a|}\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{|a|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{\delta(x)}{|a|} & ;\text{si } a<0 \end{cases}$$

QED