COMPLEMENTO V

Representación en serie de potencias en torno a $x=0$ de fns. singulares en $x=0$

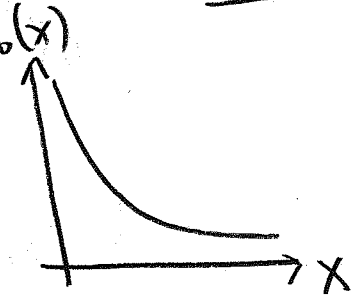
I) $f(x)$ posee une representación integral

II) Aplicar MoB a le integral

III) Haller las series de potencias de la integral. Hay de 2 tipos

$\Downarrow$

Nulas o divergentes

Eg.) $K_0(x) \longrightarrow$  $\longrightarrow K_0(0)=\infty$

Ahora $K_0(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{(t^2+1)^{1/2}}\,dt$

con: $\cos(xt) = {}_1F_0\left(\begin{matrix}-\\ 1/2\end{matrix}\middle| -\frac{x^2t^2}{4}\right) = \Gamma(1/2)\sum_n \phi_n \frac{x^{2n}t^{2n}}{4^n\Gamma(1/2+n)}$

$$(t^2+1)^{-1/2} = \sum_{m,l} \phi_{m,l}\, t^{2m} \frac{\langle 1/2+m+l\rangle}{\Gamma(1/2)}$$

$$\therefore\ K_0(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{(t^2+1)^{1/2}}\,dt$$

$$= \sum \phi_{n,m,l} \frac{x^{2n}}{4^n \Gamma(1/2+n)} \langle 1/2+m+l \rangle \underbrace{\int_0^\infty t^{2n+2m}\,dt}_{\langle 2n+2m+1 \rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$K_0(x) = \sum \phi_{n,m,l} \frac{x^{2n}}{4^n \Gamma(1/2+n)} \langle 1/2+m+l \rangle \langle 2n+2m+1 \rangle$$

$$\Downarrow$$

\# Términos obtenidos : 3

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_n \phi_n \Gamma(-n) \left(\frac{x^2}{4}\right)^n$$

$$T_2 = \frac{1}{x} \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(1/2+n)^2}{\Gamma(-n)} \left(\frac{4}{x^2}\right)^n$$

$$T_3 = T_1$$

REGLA DE SIMILARIDAD

Esta regla es útil cuando se buscan representaciones en serie de potencias en torno a $x=0$ de fns. que son singulares en $x=0$. La regla dice:

"Las representaciones divergentes o nulas repetidas se descartan"

$\therefore$

$$K_0(x) = \frac{1}{2}\sum_n \phi_n \Gamma(-n)\left(\frac{x^2}{4}\right)^n \quad \text{(Serie divergente)}$$

ó

$$K_0(x) = \frac{1}{x}\sum_n \phi_n \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(-n)}\left(\frac{4}{x^2}\right)^n \quad \text{(Serie nula)}$$

OTRA FORMA

Ahora utilizamos para $\cos(xt)$ otra expansión:

$$\cos(xt) = \sum_n \frac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n!}{\Gamma(2n+1)} x^{2n} t^{2n}$$

$$= \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} x^{2n} t^{2n}$$

y ya se tenía que:

$$(t^2+1)^{-1/2} = \sum_{m,l} \phi_{m,l}\, t^{2m} \frac{\langle 1/2+m+l \rangle}{\Gamma(1/2)}$$

$$\therefore \quad K_0(x) = \sum \phi_{n,m,l}\, x^{2n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} \frac{\langle 1/2+m+l \rangle}{\Gamma(1/2)} \langle 2n+2m+1 \rangle$$

$\Downarrow$ Se obtienen 3 términos

$$T_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(-n)\Gamma(1/2+n)\Gamma(1+n)}{\Gamma(2n+1)} x^{2n}$$

$$T_2 = \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(1/2+n)^2\,\Gamma(1/2-n)}{\Gamma(-2n)} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}$$

$$T_3 = T_1$$

se descarta T_3 (está repetido) ← REGLA DE SIMILARIDAD

$\therefore$

$$K_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_n \phi_n \, \frac{\Gamma(-n)\Gamma(1/2+n)\Gamma(1+n)}{\Gamma(2n+1)} \, x^{2n}$$

Representación divergente para $K_0(x)$

$$K_0(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \sum_n \phi_n \, \frac{\Gamma(1/2+n)^2\,\Gamma(1/2-n)}{\Gamma(-2n)} \, \frac{1}{x^{2n}}$$

Representación nula para $K_0(x)$

↑

Ambas son representaciones equivalentes para utilizar con MoB

TAREA: Hallar la integral

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} K_0(x)\,dx$$

utilizando las 4 representaciones halladas para $K_0(x)$