Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba III
Métodos Matemáticos
Licenciatura en Física - 2016
IPGG

Obs.: La prueba es de carácter individual.

(I) Algo de Mecánica Cuántica

El operador Hamiltoniano está dado por la expresión:

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \mathbf{V}(\widehat{\mathbf{x}})$$

- (50%) Evalúe el conmutador $\left[\widehat{\mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{x}}\right]$.
- (50%) Utilice el resultado anterior para demostrar que:

$$-i\frac{\hbar}{m}\langle\phi_k|\widehat{\mathbf{p}}|\phi_l\rangle = (E_k - E_l)\langle\phi_k|\widehat{\mathbf{x}}|\phi_l\rangle$$

donde el conjunto $\{|\phi_j\rangle\}$ y E_j son autoestados y autovalores (Energías de un sistema físico) del Hamiltoniano.

(II) Brackets y ketbras

Se tiene cierto estado $|\Psi\rangle$ normalizado y cierto operador $\widehat{\mathbf{A}}^\dagger = \widehat{\mathbf{A}}$, tal que $\widehat{\mathbf{A}}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$. Si $|\Psi\rangle$ es descrito como una combinación lineal de autoestados de $\widehat{\mathbf{A}}$, esto es $|\Psi\rangle = \sum_j c_j|a_j\rangle$. Demuestre la siguiente identidad:

$$\left\langle\Psi\middle|\widehat{\mathbf{A}}\middle|\Psi\right\rangle = \mathbf{Tr}\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}\widehat{\mathbf{A}}\right),$$

donde $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ corresponde al operador densidad y el cual está definido como sigue:

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

(III) Ecuaciones diferenciales

Sea la ecuación diferencial descrita para $\phi(x)$:

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\phi(x)}{dx}\right) + a\frac{d\phi(x)}{dx} + b\phi(x) = 0$$

determine la ecuación diferencial equivalente para $\widetilde{\phi}(k)$, la transformada de Fourier de $\phi(x)$.

(IV) Misceláneos

- (50%) Evalúe el conmutador $\left[\exp\left(\alpha\widehat{\mathbf{x}}\right), \widehat{\mathbf{k}}\right]$.
- (50%) Determine el vector resultante de la operación $\exp\left(\beta\widehat{\mathbf{k}}\right)|x\rangle$.

<Pauta>

Probl. 1

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

a) $$[\hat{H}, \hat{x}] = [\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \hat{x}]$$

$$= [\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x}] + [V(\hat{x}), \hat{x}]$$

$$= \frac{1}{2m}[\hat{p}^2, \hat{x}] + [V(\hat{x}), \hat{x}]$$

* Se conoce que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \implies [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$

$$\therefore \quad [\hat{p}^2, \hat{x}] = \hat{p}[\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{x}]\hat{p}$$

$$= \hat{p}(-i\hbar) - i\hbar\hat{p} = -2i\hbar\hat{p}$$

* Por otro lado $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{x}^2, \hat{x}] = \hat{x}\cancelto{0}{[\hat{x}, \hat{x}]} + \cancelto{0}{[\hat{x}, \hat{x}]}\hat{x}$$

$$= 0$$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{X}^3, \hat{X}] = [\hat{X}\hat{X}^2, \hat{X}] = \hat{X}\cancel{[\hat{X}^2, \hat{X}]}^{0} + \cancel{[\hat{X}, \hat{X}]}^{0}\hat{X}^2$$

$$\Downarrow$$

Suficiente para concluir que $[\hat{X}^n, \hat{X}] = 0$.

$\therefore$ si $V(\hat{X}) = \sum a_n \hat{X}^n$

$$\Downarrow$$

$$[V(\hat{X}), \hat{X}] = [\sum a_n \hat{X}^n, \hat{X}]$$

$$= \sum a_n [\hat{X}^n, \hat{X}] = 0$$

Finalmente $[\hat{H}, \hat{X}] = \frac{1}{2m}[\hat{p}^2, \hat{X}]$

$$= -\frac{i\hbar}{m}\hat{p}$$

Por otro lado se conoce que

$$\hat{H}|\phi_\ell\rangle = E_\ell|\phi_\ell\rangle$$

$$\hat{H}|\phi_k\rangle = E_k|\phi_k\rangle$$

entonces construimos el bracket:

$$\langle\phi_k| \Big/ \; [\hat{H},\hat{x}] = -\frac{i\hbar}{m}\hat{p} \; \Big/ |\phi_\ell\rangle$$

$$\langle\phi_k|[\hat{H},\hat{x}]|\phi_\ell\rangle = -\frac{i\hbar}{m}\langle\phi_k|\hat{p}|\phi_\ell\rangle$$

$$\langle\phi_k|\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H}|\phi_\ell\rangle = -\frac{i\hbar}{m}\langle\phi_k|\hat{p}|\phi_\ell\rangle$$

$$\langle\phi_k|\hat{H}\hat{x}|\phi_\ell\rangle - \langle\phi_k|\hat{x}\hat{H}|\phi_\ell\rangle = -\frac{i\hbar}{m}\langle\phi_k|\hat{p}|\phi_\ell\rangle$$

$$\langle\phi_k|E_k\hat{x}|\phi_\ell\rangle - \langle\phi_k|\hat{x}E_\ell|\phi_\ell\rangle = -\frac{i\hbar}{m}\langle\phi_k|\hat{p}|\phi_\ell\rangle$$

$$E_k\langle\phi_k|\hat{x}|\phi_\ell\rangle - E_\ell\langle\phi_k|\hat{x}|\phi_\ell\rangle = -\frac{i\hbar}{m}\langle\phi_k|\hat{p}|\phi_\ell\rangle$$

Finalmente

$$-\frac{i\hbar}{m}\langle\phi_k|\hat{p}|\phi_\ell\rangle = (E_k-E_\ell)\langle\phi_k|\hat{x}|\phi_\ell\rangle \quad ///$$

Q.E.D.

Prob. 2

$$\hat{A}^{\dagger} = \hat{A} \quad y \quad \hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

- $\{|a_i\rangle\}$ base ortonormal complete
- $\{a_i\} \in \mathbb{R}$

luego si $|\psi\rangle = \sum c_j |a_j\rangle$ entonces

MODO 1

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_i \sum_j c_i^* c_j \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle$$

$$= \sum_i \sum_j c_i^* c_j a_j \underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_i c_i^* c_i a_i = \sum_i |c_i|^2 a_i$$

Por otro lado

$$\hat{\rho}_{ij} = \left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)_{ij} = \langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|a_j\rangle$$

$$= \langle a_i|\psi\rangle\langle a_j|\psi\rangle^*$$

donde $\langle a_l|\psi\rangle = \sum_k c_k \underbrace{\langle a_l|a_k\rangle}_{\delta_{lk}} = c_l.$

$$\Downarrow$$

$$\langle a_i|\psi\rangle = c_i$$

$$\langle a_j|\psi\rangle^* = c_j^*$$

Matricialmente (suponiendo espacio n-dim

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & \cdots & c_1 c_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n c_1^* & \cdots & |c_n|^2 \end{pmatrix}$$

análogamente

$$(\hat{A})_{ij} = A_{ij} = \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle = a_j \langle a_i | a_j \rangle$$

$$= a_j \delta_{ij}$$

Matricialmente

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

luego

$$\hat{\rho}\hat{A} = |\psi\rangle\langle\psi|\hat{A} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |c_n|^2 a_n \end{pmatrix}$$

Multiplicar matriz por matriz diagonal

$\Downarrow$

Es otra matriz diagonal.

se observa que $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = \sum_i |c_i|^2 a_i$

$$\therefore \quad \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$$

QED.

Por comparación

MODO 2 (camino corto)

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = \sum_i \langle a_i|\hat{\rho}\hat{A}|a_i\rangle$$

$$= \sum_i \langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}|a_i\rangle$$

$$= \sum_i \langle\psi|\hat{A}\underbrace{|a_i\rangle\langle a_i|}_{\hat{\mathbb{I}}}\psi\rangle$$

(completitud de la base $\{|a_i\rangle\}$)

$$= \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

QED

Prob. 3

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\phi(x)}{dx}\right)+a\frac{d\phi(x)}{dx}+b\phi(x)=0$$

$$\Downarrow$$

llevamos al espacio de Hilbert.

$$\left[x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)+a\frac{d}{dx}+b\right]\phi(x)=0$$

Operacionalmente $x\longrightarrow\hat{x}$

$\frac{d}{dx}\longrightarrow i\hat{k}$

La ecuación anterior es la proyección en estados de posición de esta otra ecuación:

$$\left[\hat{x}(i\hat{k})\hat{x}(i\hat{k})+ai\hat{k}+b\right]|\phi\rangle=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[-\hat{x}\hat{k}\hat{x}\hat{k}+ai\hat{k}+b\right]|\phi\rangle=0$$

proyectando en espacio de autoestados de $\hat{k}$, esto es:

$$\langle k| -\hat{x}\hat{k}\hat{x}\hat{k} + ia\hat{k} + b|\phi\rangle = 0$$

operacionalmente (estaba autoestado esto)

$\Downarrow$

la proyección en autoestados de $\hat{k}$

lleva

$$\hat{k} \longrightarrow k$$

$$\hat{x} \longrightarrow i\frac{d}{dk}$$

$$\langle k|\phi\rangle \longrightarrow \tilde{\phi}(k)$$

$$\left[-i\frac{d}{dk}\left(k\,i\frac{d}{dk}\right)k + iak + b\right]\tilde{\phi}(k) = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dk}\left(k\frac{d}{dk}(k\tilde{\phi}(k))\right) + iak\tilde{\phi}(k) + b\tilde{\phi}(k) = 0$$

PROBL. 4

a) $\left[e^{\alpha\hat{x}}, \hat{k}\right] = ??$

se tiene que $[\hat{x}, \hat{k}] = i$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{k}, \hat{x}] = -i$$

Obs. $[\hat{x}^2, \hat{k}] = \hat{x}[\hat{x}, \hat{k}] + [\hat{x}, \hat{k}]\hat{x}$

$$= 2i\hat{x}$$

$$[\hat{x}^3, \hat{k}] = [\hat{x}\hat{x}^2, \hat{k}] = \hat{x}[\hat{x}^2, \hat{k}] + [\hat{x}, \hat{k}]\hat{x}^2$$

$$= 2i\hat{x}^2 + i\hat{x}^2 = 3i\hat{x}^2$$

$\vdots$

$$[\hat{x}^n, \hat{k}] = n i \hat{x}^{n-1}$$

luego $e^{\alpha \hat{x}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{x}^n$

$$\therefore \; [e^{\alpha \hat{x}}, \hat{k}] = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} [\hat{x}^n, \hat{k}]$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \, n i \hat{x}^{n-1}$$

$$= i \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d}{d\hat{x}} \hat{x}^n$$

$$= i \frac{d}{d\hat{x}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{x}^n$$

$$= i \frac{d}{d\hat{x}} e^{\alpha \hat{x}} = i \alpha e^{\alpha \hat{x}} \,//.$$

b) sea $|x'\rangle = e^{\beta \hat{k}} |x\rangle$ $\hat{\mathbb{1}}$

$$|x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta \hat{k}} |k\rangle\langle k|x\rangle \, dk$$

luego $\quad e^{\beta\hat{k}}|k\rangle = e^{\beta k}|k\rangle$

$$\therefore \quad |x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta k}|k\rangle \underbrace{\langle k|x\rangle}_{\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}} dk$$

$$|x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx+\beta k}}{\sqrt{2\pi}} |k\rangle \, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(x-i\beta)}}{\sqrt{2\pi}} |k\rangle \, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle k|x-i\beta\rangle |k\rangle \, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |k\rangle\langle k|x-i\beta\rangle \, dk$$

$$= |x-i\beta\rangle$$

$$\therefore \quad e^{\beta\hat{k}}|x\rangle = |x'\rangle = |x-i\beta\rangle$$