SEGUNDA PRUEBA
10 de Noviembre de 2022
Electromagnetismo Intermedio
LFIS322

Instrucciones: Dispone de 90 minutos para responder el examen. El puntaje total de la prueba es 60 y el de cada pregunta esta indicado. La prueba es personal. No puede consultar formularios, cuadernos, libros ni compañeros. No sólo importa contestar sino hacerlo fundadamente.

Problema 1 (40 pts.) *Problema con simetria azimutal.*

(a) (10 pts.) Demuestre la expansión

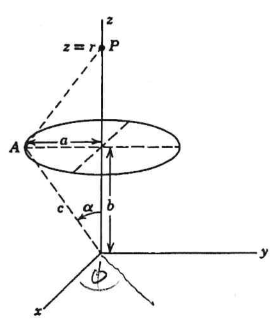
$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma), \tag{1}$$

donde $r_<$ ($r_>$) es el menor (mayor) entre $|\mathbf{r}|$ y $|\mathbf{r}'|$, y α es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$. (Hint: puede ser de utilidad usar la expansión vista en clases,

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta). \qquad). \tag{2}$$

Notar que si alineamos $\vec{r}$ con el eje z, el ángulo $\alpha = \theta'$ (ya que $\theta = 0$), y como $P_l(\cos\theta) = 1$, podemos usar la expansión del caso particular ($r = z$) para obtener la solución completa (para θ arbitario). Hint: la parte (b) se puede resolver de ésta forma.

(b) Ahora queremos aplicar el resultado anterior para resolver un ejercicio. Considere un anillo cargado (con carga q) de radio a ubicado a una distancia b desde el plano xy haciendo que su eje coincida con el eje z.



(a) (5 pts.) Calcule el potencial electrostático en un punto P sobre el eje z.

(b) (15 pts.) Use el resultado de (a) para calcular una expresión del potencial válido en todo el espacio. (Hint: use el resultado de (a) y expanda esa solución para que se parezca a (1) pero evaluado en el eje z (o sea $\theta = 0$). Habrán dos soluciones, dependiendo si $c > r$ o $c < r$).

Problema 2 (10 pts.) Considere un cilindro de radio a e infinitamente largo que tiene una magnetización permanente de $\vec{M} = k\rho\hat{k}$, donde k es una constante y ρ es la distancia radial desde el eje. No existen corrientes libres. Encuentre el campo magnético dentro y fuera del cilindro.

Problema 3 (20 pts.) En general, la expansión multipolar del potencial electrostático es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r)^n P_n(\cos\theta') \rho(\vec{r}') dV'.$$

Considere una carga Q distribuída linealmente entre $z = -a$ a $z = +a$. Calcule el potencial hasta los primeros tres términos no nulos.

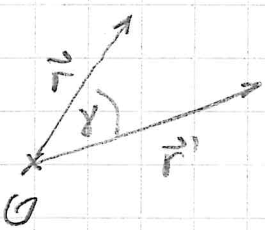
FIS 322

(1) (a) Demuestre la expansión

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

donde $r_<$ ($r_>$) es el menor (mayor) entre $|\vec{r}|$ y $|\vec{r}\,'|$ y γ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$.

Consideremos los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ de la figura.



$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}$$
$$= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}$$

Supongamos que $r \gg r'$. Entonces, usamos

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = r\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma}_{\epsilon}} \qquad (1)$$

luego

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \simeq \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma\right] + \frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma\right]^2 - \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{1 + \frac{r'}{r}\cos\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\cos^2\gamma - \frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\cos\gamma + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4\right.$$

$$= \frac{1}{r}\left\{P_0(\cos\gamma) + \frac{r'}{r}P_1(\cos\gamma) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos\gamma) + \dots\right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^{l}}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \quad // \qquad \text{donde } r' < r \quad (\Rightarrow r' = r_<,\ r = r_>).$$

Si suponemos que $r' >> r$, la expresión es idéntica, salvo que en (1) se factoriza r' y el cálculo es idéntico salvo el cambio $r \leftrightarrows r'$.

(b) Si el anillo de radio a tiene carga q, entonces $\lambda = q/2\pi a$. El potencial en un punto P sobre el eje z es

(a)

$$V(r=z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda\, dl}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

donde

$$\vec{r} = z\hat{k} \;;\; \vec{r}' = a(\hat{\imath}\cos\phi' + \hat{\jmath}\sin\phi') + b\hat{k}$$

así

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \left((z-b)^2 + a^2\right)^{1/2} \;;\; dl = a\,d\phi'$$

entonces

$$V(r=z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{a}{\sqrt{(z-b)^2+a^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+c^2-2zb}}$$

donde $c^2 = a^2+b^2$ (de la figura) y el término $2zb$ lo podemos escribir como

$$2zb = 2zc\cos\alpha$$

(b) Para $r > c$ (o $z > c$) y siguiendo (a)

$$V_1(r=z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^l P_l(\cos\alpha) \qquad (2)$$

y para $r < c$

$$V_2(r=z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^l P_l(\cos\alpha) \qquad (3)$$

que no son otra cosa que los soluciones "internos" y "externos" que aparecen en

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta)$$

donde se ha evaluado r en el eje z $\Rightarrow \cos\theta = 1$ y entonces todos los P_l's son 1.

La solución en cualquier punto del espacio es entonces

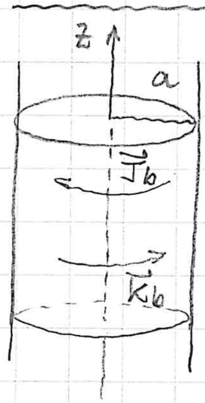
para $r > c$ $(\Rightarrow A_l = 0)$ $\Rightarrow V(r,0) = \sum_l B_l r^{-(l+1)} = V_1(r=z)$

$$\therefore \; V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\alpha)\, P_l(\cos\theta) \quad //$$

y para $r < c$ $(\Rightarrow B_l = 0)$ $\Rightarrow V(r,0) = \sum_l A_l r^l = V_2(r=z)$

$$\therefore \; V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{c^{l+1}} P_l(\cos\alpha)\, P_l(\cos\theta) \quad //$$

(2) Considere un cilindro de radio a infinitamente largo con magnetización permanente $\vec{M} = k\rho\hat{k}$ donde k es una constante y ρ es la distancia radial desde el eje. No existen corrientes libres. Encuentre el campo magnético dentro y fuera del cilindro.



Las corrientes ligadas son:

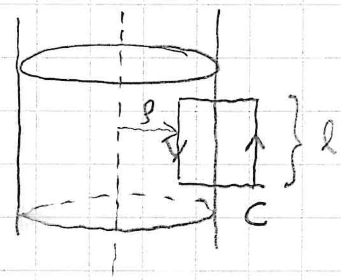
- $\vec{J}_b = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \hat{\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\rho}(k\rho)\right) = -k\hat{\phi}$ //

- $\vec{K}_b = \vec{M}\times\hat{\rho} = ka\hat{\phi}$ //

Por la regla de la mano derecha, $\vec{B}$ esta en el eje z. Este sistema es como un doble solenoide infinito, por tanto $\vec{B} = 0$ afuera, $(\rho > a)$.

Para $\rho < a$, usamos la ley de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl = \mu_0 I_{encl_C} = \mu_0 \left[\int J_b \, ds + K_b l \right]$$



$$= \mu_0 \left[-kl(a-\rho) + kal \right]$$

$$= \mu_0 k l \rho$$

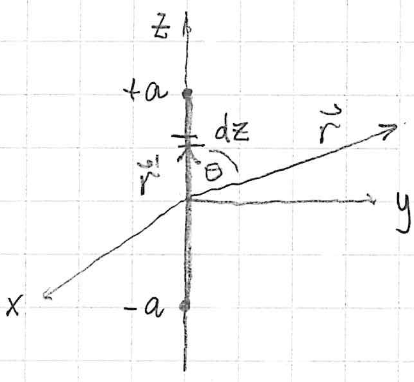
$$\therefore \quad \vec{B} = \mu_0 k l \rho \, \hat{k} \quad \text{adentro} \quad (\rho < a).$$

(3) En general

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos\theta') \, \rho(\vec{r}') \, dV'$$

Considere una carga Q distribuida linealmente entre $z = -a$ y $z = +a$. Calcule el potencial hasta los primeros tres términos no nulos.

En este caso $dq = \rho \, dV = \lambda \, dl$, donde $\lambda = Q/2a$.



$$\vec{r}' = z\hat{k}, \quad dl = dz$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{-a}^{a} z^n P_n(\cos\theta) \frac{Q}{2a} \, dz$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2a} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \int_{-a}^{a} z^n \, dz$$

Para n impar, el argumento es una función impar y la integral es cero. Cuando n es par

$$\int_{-a}^{a} z^n dz = \left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2a^{n+1}}{n+1} \qquad (n \text{ par})$$

Luego

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\sum_{n\,\text{par}} \frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad //$$