

Cinemática de Rotación

Héctor Figueroa - Fabián Trigo - Felipe Ortiz

Estudiantes de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias , Universidad de Valparaíso

Jueves 20 de diciembre 2018

Resumen

En este experimento se plantea como objetivo comprobar la relación entre la aceleración angular α y la aceleración tangencial a_T de un punto en el borde de un disco que gira en un plano vertical. Para realizar esto se empleó un sistema de discos, con un disco mayor y otro menor, centrados en el mismo punto; se consideró un punto situado en el extremo del disco mayor. Además, se sujetó un extremo de un hilo a una masa y se enrolla el otro extremo al disco menor, de esta forma, al liberar la masa produciría la rotación del sistema de discos aplicando una fuerza tangencial al disco menor. En los resultados el valor teórico de la aceleración tangencial correspondía a $0,176 [m/s^2]$ y el experimental a $0,156 [m/s^2]$, teniendo un error porcentual de 11,36%.

Introducción

Para entender la relación entre aceleración angular y tangencial, primero se ha de comprender algunas definiciones, entre ellas la definición de radianes.

Un radián es la unidad de medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo cuyos lados son cortados por el arco de la circunferencia, y que además dicho arco tiene una longitud igual a la del radio.

$$\Theta_{rad} = S / R \quad (1)$$

La ecuación 1 define y relaciona los radianes y con el radio, donde S es la longitud de arco, R es el radio, el cual no varía despejando longitud de arco y derivando por el tiempo dos veces se llega a:

$$R * \frac{d^2 \Theta_{rad}}{dt^2} = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (2)$$

continuando, la segunda derivada del ángulo en el tiempo es igual a la aceleración angular, y la segunda derivada del arco (metros) en el tiempo es la aceleración tangencial.

$$R * a_{radial} = a_{tangencial} \quad (3)$$

Con el uso de trigonometría se puede tener que:

$$x = \tan(\Phi) \quad (4)$$

Donde Φ es un ángulo en radianes y x es la salida de la función tangente con dicho ángulo, entonces, usando la función inversa a la tangente para despejar Φ :

$$\arctan(x) = \Phi \quad (5)$$

Montaje experimental

Para realizar el presente experimento se utilizará:

- Regla
- 2 Discos (mayor y menor)
- Un soporte
- Hilo
- Una masa
- Una cámara y su soporte
- Un computador con el software tracker

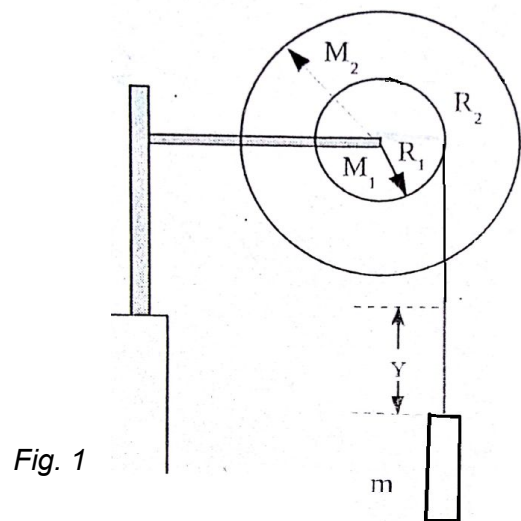


Fig. 1

El procedimiento necesario para llevar a cabo esta experimentación comienza con calibrar la cámara de forma que divise el experimento como se muestra en la figura 1, es decir que el radio mayor (R_2) del disco tenga una medida equidistante en cualquier punto. Una vez realizado esto procedemos a atar el hilo en el disco menor (radio R_1), mientras que por el otro extremo del hilo cuelga una masa “m”, cabe mencionar que el disco mayor debe tener una marca en un punto que se encuentre cercano al extremo del radio con el fin de usarlo como referencia en el momento de realizar el video (recordar que ambos discos barren los mismos ángulos en el mismo tiempo) ; posteriormente con ayuda de la cámara se graba un video en el que se deja caer la masa, el vídeo debe tener un tiempo suficiente para que el disco mayor alcance una revolución. Realizado esto se procede a analizar el video en el software “tracker” en específico mediante la función “control de trayectoria”, para así obtener los datos de la posición y el tiempo de la masa mientras cae, y del punto que gira anteriormente marcado.

Análisis

Una vez analizado el video y procesado los datos, se obtuvieron los datos del desplazamiento de la masa “m” (conforme bajaba) y su respectivo tiempo relacionado. Se exponen en la tabla I:

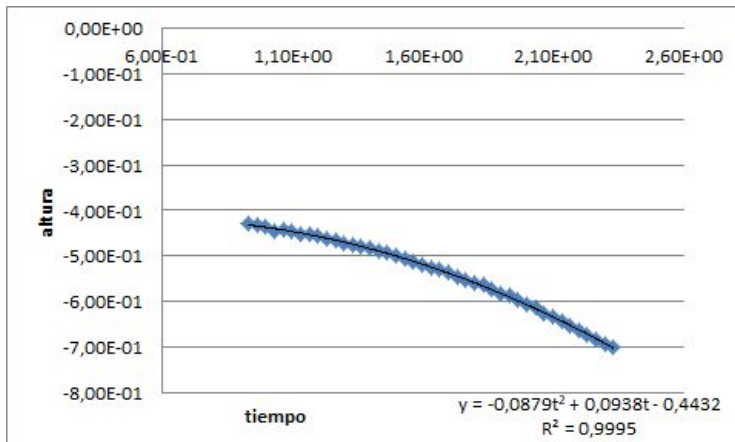
Tabla I - Caída libre de la Masa

t [s]	y [m]
9,33E-01	-4,29E-01
9,66E-01	-4,32E-01
1,00E+00	-4,35E-01
1,03E+00	-4,46E-01
1,07E+00	-4,43E-01
1,10E+00	-4,46E-01
1,13E+00	-4,51E-01
1,17E+00	-4,54E-01
1,20E+00	-4,57E-01
1,23E+00	-4,63E-01
1,27E+00	-4,66E-01
1,30E+00	-4,73E-01
1,33E+00	-4,77E-01
1,37E+00	-4,81E-01
1,40E+00	-4,84E-01
1,43E+00	-4,90E-01
1,47E+00	-4,93E-01
1,50E+00	-4,99E-01
1,53E+00	-5,06E-01
1,57E+00	-5,12E-01
1,60E+00	-5,18E-01
1,63E+00	-5,25E-01

1,67E+00	-5,29E-01
1,70E+00	-5,36E-01
1,73E+00	-5,45E-01
1,77E+00	-5,51E-01
1,80E+00	-5,61E-01
1,83E+00	-5,64E-01
1,87E+00	-5,72E-01
1,90E+00	-5,85E-01
1,93E+00	-5,88E-01
1,97E+00	-5,97E-01
2,00E+00	-6,05E-01
2,03E+00	-6,15E-01
2,07E+00	-6,26E-01
2,10E+00	-6,35E-01
2,13E+00	-6,44E-01
2,17E+00	-6,54E-01
2,20E+00	-6,63E-01
2,23E+00	-6,73E-01
2,27E+00	-6,82E-01
2,30E+00	-6,95E-01
2,33E+00	-7,01E-01

Estableciendo una relación entre la posición y con el tiempo t se realiza el gráfico I.

Gráfico I - Caída de la Masa



Se postula un modelo polinómico de segundo grado para obtener la ecuación de movimiento de la masa: $y = -0,4432 + 0,0938 \cdot t - 0,0879 \cdot t^2$; este tiene una correlación lineal de $R^2 = 0,9995$.

A partir del modelo se extrae la aceleración de la masa al bajar, que es equivalente a la aceleración tangencial del disco menor: $a_T = 0,176 [m/s^2]$

La tabla II representa la posición en los ejes x e y del punto situado en el extremo del disco mayor.

Tabla II - Tracking de un punto alrededor del disco

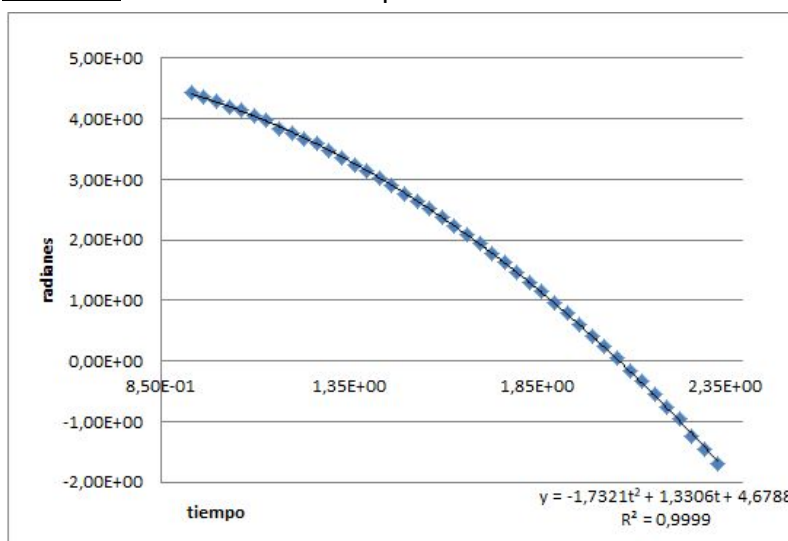
t [s]	x [m]	y [m]	ángulo [rad]
9,33E-01	5,08E-02	1,78E-01	4,43E+00
9,66E-01	6,16E-02	1,68E-01	4,36E+00
1,00E+00	7,39E-02	1,65E-01	4,29E+00
1,03E+00	9,08E-02	1,61E-01	4,20E+00
1,07E+00	1,02E-01	1,58E-01	4,14E+00
1,10E+00	1,15E-01	1,48E-01	4,05E+00
1,13E+00	1,28E-01	1,39E-01	3,97E+00
1,17E+00	1,46E-01	1,24E-01	3,84E+00
1,20E+00	1,55E-01	1,13E-01	3,77E+00
1,23E+00	1,66E-01	9,76E-02	3,67E+00
1,27E+00	1,77E-01	8,53E-02	3,59E+00
1,30E+00	1,88E-01	6,38E-02	3,47E+00
1,33E+00	1,94E-01	4,38E-02	3,36E+00

1,37E+00	1,98E-01	2,07E-02	3,25E+00
1,40E+00	2,03E-01	7,63E-04	3,15E+00
1,43E+00	2,01E-01	-2,23E-02	3,03E+00
1,47E+00	2,00E-01	-4,69E-02	2,91E+00
1,50E+00	1,91E-01	-7,61E-02	2,76E+00
1,53E+00	1,77E-01	-9,92E-02	2,63E+00
1,57E+00	1,65E-01	-1,21E-01	2,51E+00
1,60E+00	1,48E-01	-1,42E-01	2,37E+00
1,63E+00	1,23E-01	-1,61E-01	2,22E+00
1,67E+00	1,02E-01	-1,78E-01	2,09E+00
1,70E+00	7,23E-02	-1,90E-01	1,93E+00
1,73E+00	4,31E-02	-2,01E-01	1,78E+00
1,77E+00	1,08E-02	-2,02E-01	1,62E+00
1,80E+00	-2,30E-02	-1,99E-01	1,46E+00
1,83E+00	-5,37E-02	-1,98E-01	1,31E+00
1,87E+00	-8,29E-02	-1,84E-01	1,15E+00
1,90E+00	-1,14E-01	-1,65E-01	9,68E-01
1,93E+00	-1,43E-01	-1,45E-01	7,94E-01
1,97E+00	-1,63E-01	-1,11E-01	6,00E-01
2,00E+00	-1,81E-01	-8,07E-02	4,19E-01
2,03E+00	-1,94E-01	-4,84E-02	2,45E-01
2,07E+00	-1,94E-01	-1,00E-02	5,16E-02
2,10E+00	-1,94E-01	3,15E-02	-1,61E-01
2,13E+00	-1,81E-01	6,38E-02	-3,38E-01
2,17E+00	-1,64E-01	1,02E-01	-5,56E-01
2,20E+00	-1,37E-01	1,31E-01	-7,66E-01
2,23E+00	-1,09E-01	1,56E-01	-9,61E-01

2,27E+00	-6,14E-02	1,76E-01	-1,24E+00
2,30E+00	-2,30E-02	1,82E-01	-1,45E+00
2,33E+00	2,31E-02	1,90E-01	-1,69E+00

Los datos originales de la tabla II fueron modificados, de tal manera que en un gráfico de x vs y , el centro de la circunferencia fuera el punto (0,0), para hacer esto, se ajustaron los puntos tomando como referencia el punto más grande del eje x y el más grande del eje y , se les sumó lo suficiente como para que fueran igual al radio del disco mayor y después se aplicó la misma traslación a todos los puntos.

Gráfico II - Radianes vs Tiempo



A los datos de la tabla II, x e y , se les aplicó la **fórmula 5**, a la columna de datos que dió origen se le sumó y restó pi medio, debidamente para hacer un gráfico continuo, ya que antes presentaba cortes, esto producto de que el recorrido de la función arcotangente de excel es de $[-\pi/2, \pi/2]$. Para obtener la ecuación se postuló un modelo polinómico de segundo grado.

Conclusión

A partir de las ecuaciones de los dos gráficos, fue posible extraer la aceleración, tangencial y radial. La aceleración extraída del primer gráfico es la aceleración tangencial del disco pequeño (está siendo el factor t^2 luego multiplicada por dos para obtenerla), un poco aproximada debido a que es en referencia a la masa que caía y no estaba sostenida de una cuerda ideal, recordemos que las cuerdas realistas son capaces de deformarse, pero esto no es más que un bajo porcentaje; regresando a la aceleración:

$$\text{aceleración tangencial experimental} = 0,176 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

A partir del segundo gráfico y su ecuación, con el mismo método que la aceleración previa, fue posible obtener la aceleración radial:

$$\text{aceleración radial experimental} = 3,4642 \text{ [rad/s}^2\text{]}$$

Para alcanzar el objetivo del experimento, estas han de ser comparadas, el radio del disco menor es de 0,045 [m], entonces aplicando la ecuación 3:

$$3,4642 \text{ [rad/s}^2\text{]} \times 0,045 \text{ [m]} = 0,176 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$0,156 \text{ [m/s}^2\text{]} = 0,176 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Comparando los resultados, porcentualmente nuestro error es de un 11,36%

Este error fue principalmente producto por cómo se registraron los desplazamientos en el tracker. Recordemos que fue registrado fotograma a fotograma y a mano.

Bibliografía

https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecci%C3%B3n_ortogr%C3%A1fica