Universidad de Valparaíso
CHILE

Tarea Voluntaria III
MMF II
Licenciatura en Física - 2020

La función Polilogaritmo $Li_n(z)$ de orden n está definida por la siguiente serie de potencias:

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$$

Como un dato de interés de cultura matemática, cuando $z = 1$, esta función es igual a la función Zeta de Riemann, $\xi(n)$, cuyas raíces complejas tienen la parte real igual a $\frac{1}{2}$, esto ha sido testeado computacionalmente, sin embargo, no ha sido demostrado rigurosamente. Aquella persona que logre tal demostración se llevará US$1.000.000, este problema es uno de los problemas matemáticos del milenio.

Utilizando esta definición, halle la representación en términos de serie hipergeométrica de la función $Li_3\left(e^{x^2}\right)$.

Tenemos que:

$$Li_3(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^3}$$

La sume es necesario que inicie desde cero $\sum_0^\infty$, luego es necesario un cambio de variable en el índice:

Sea $k = l+1 \Rightarrow l = k-1$

$$\therefore \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^3} = \sum_{l \geq 0} \frac{z^{l+1}}{(l+1)^3} = z \sum_{l \geq 0} \frac{z^l}{(l+1)^3}$$

Debemos construir los símbolos de Pochhammer

$$(l+1) = \frac{\Gamma(l+2)}{\Gamma(l+1)} = \frac{\overset{1}{\cancel{\Gamma(2)}}\,(2)_l}{\underset{1}{\cancel{\Gamma(1)}}\,(1)_l} = \frac{(2)_l}{(1)_l}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(l+1)} = \frac{(1)_l}{(2)_l}$$

$$\therefore \frac{1}{(l+1)^3} = \frac{(1)_l^3}{(2)_l^3} = \frac{(1)_l (1)_l (1)_l}{(2)_l (2)_l (2)_l}$$

luego

$$Li_3(z) = z \sum_{l \geq 0} \frac{(1)_l (1)_l (1)_l}{(2)_l (2)_l (2)_l} z^l \cdot \frac{(1)_l}{(1)_l} \quad ; \underline{\text{Obs.}}\ (1)_l = l!$$

$$\therefore Li_3(z) = z \sum_{l \geq 0} \frac{(1)_l (1)_l (1)_l (1)_l}{(2)_l (2)_l (2)_l} \frac{z^l}{l!} = z\ {}_4F_3\left(\begin{matrix} 1,1,1,1 \\ 2,2,2 \end{matrix} \middle| z\right)$$

si hacemos $z = e^{x^2}$

$$Li_3(e^{x^2}) = e^{x^2}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix} 1,1,1,1 \\ 2,2,2 \end{matrix} \middle| e^{x^2}\right)$$