Tests Observacionales en Gravitación

Profesor: J. R. Villanueva II Semestre 2021

*Nombre:*____ *RUT:*__________

Prueba 1

1. Considere el espacio-tiempo de Schwarzschild, cuyo elemento de línea viene dado por

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2\,\mathrm{d}\Omega_2, \tag{1}$$

donde $r_s = 2M$ es el radio de Schwarzschild (en unidades geometrizadas), $\mathrm{d}\Omega_2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$, es la métrica de una 2–esfera de radio unitario, y las coordenadas son definidas como $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$ y $0 < \phi < 2\pi$.

(a) A partir de (1) construya el lagrangiano $\mathcal{L}$. Determine las cantidades conservadas y encuentre las ecuaciones de movimiento tanto para partículas de prueba masivas y sin masa. Reduzca su sistema a un problema equivalente unidimensional.

(b) Partículas masivas:

i. Encuentre y grafique el potencial efectivo. Analice cualitativamente los movimientos permitidos.

ii. Determine y grafique la órbita de primera y segunda especie que corresponde en energía a la órbita planetaria (la ecuación polar de las órbitas).

(c) Partículas sin masa: Es posible calcular la deflexión observada de una geodésica nula en cualquier parte de su camino como sigue:

i. Suponga que $r_s u \ll 1$, y defina

$$y \equiv u(1 - r_s u/2) \;\Rightarrow\; u = y(1 + r_s y/2) + 0(r_s^2 u^2). \tag{2}$$

Muestre que la ecuación de movimiento queda escrita como

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} = \frac{1 + r_s y}{\sqrt{b^{-2} - y^2}} + 0(r_s^2 u^2), \tag{3}$$

donde $b = L/E$ es el parámetro de impacto.

ii. Integre (3) para mostrar que

$$\phi = \phi_0 + \frac{r_s}{b} + \arcsin(by) - r_s\sqrt{\frac{1}{b^2} - y^2}. \tag{4}$$

iii. Muestre que la ecuación (3) puede ser resuelta con

$$bu = \sin(\phi - \phi_0) + \frac{r_s}{2b}[1 - \cos(\phi - \phi_0)]^2 + 0\left(\frac{r_s^2}{b^2}\right). \tag{5}$$

iv. En coordenadas de Schwarzschild, el vector

$$\vec{v} \to -(0, 1, 0, \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}r) \tag{6}$$

es tangente a la trayectoria del fotón, visto por un observador en reposo en la métrica para la posición r. Muestre que este observador mide un ángulo α mostrado en la Fig. 1 dado por

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{e}_r)}{\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}}\sqrt{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r}, \tag{7}$$

donde $\vec{e}_r$ tiene componentes $(0, 1, 0, 0)$. Argumente que $\phi - \pi - \alpha$ es la posición angular aparente de la estrella, y muestre a partir de la ecuación (5) que si $r_s = 0$ (sin deflexión), $\phi - \pi - \alpha = \phi_0$.

v. Cuando $r_s \neq 0$, calcule la deflexión

$$\delta\phi = \phi - \pi - \alpha - \phi_0 \tag{8}$$

a primer orden en r_s/b. No olvide usar la métrica de Schwarzschild para calcular los productos escalares en (7). Obtenga

$$\delta\phi = \frac{r_s}{b}[1 - \cos(\phi - \phi_0)], \tag{9}$$

lo cual es, en la posición r del observador

$$\delta\phi = \frac{r_s}{r}\frac{1 - \cos(\phi - \phi_0)}{\sin(\phi - \phi_0)}. \tag{10}$$

vi. Para $r_s = 2M_\odot \simeq 2,94$ km, r =1 UA $= 1.5 \times 10^6$ km, ¿A qué distancia del sol en el cielo se puede detectar esta desviación si podemos medir ángulos con una precisión de 2 segundos de arco?

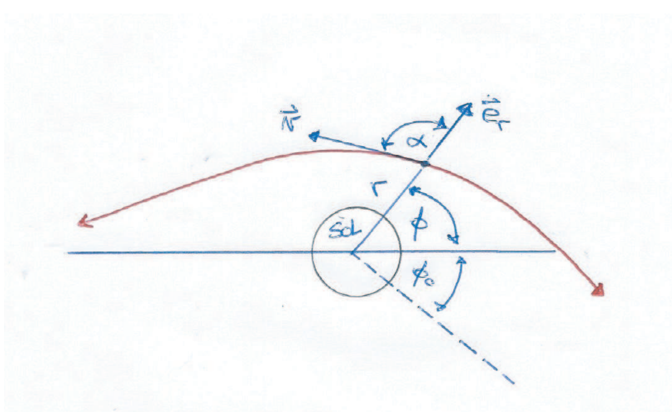

FIG. 1. Deflexión de la luz por el sol