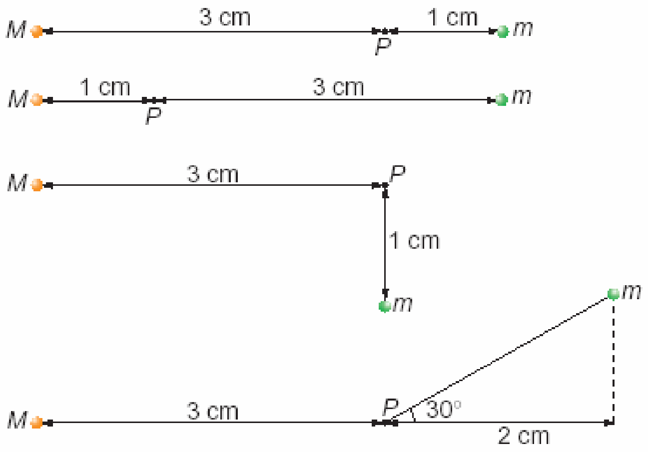
CAMPO GRAVITATORIO.

4. Calcula la intensidad de campo gravitatorio que crean dos masas, M y m, en un punto P, en los cuatro casos representados en la figura. En todos ellos, las intensidades de los campos creados por M y m tienen en P como módulo 5 y 20 N/kg, respectivamente.



Se trata de construir los vectores campo gravitatorio en el punto *P* para cada una de las situaciones propuestas. En cada caso, supondremos un sistema de referencia *OXY* situado en el punto *P*. Debemos tener en cuenta que el campo gravitatorio tiene la dirección de la línea que une la masa que lo crea y el punto *P*, estando dirigido su sentido hacia la masa.

Observa que las distancias que se proporcionan en la figura no son datos útiles, puesto que ya tenemos los módulos del campo creado por cada masa en el punto *P* como dato del enunciado. En cada uno de los casos obtendremos el vector campo gravitatorio que crea cada masa. Luego aplicaremos el principio de superposición:

Caso a)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{g}_M = -5\cdot\vec{i}\\ \vec{g}_m = +20\cdot\vec{i}\end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = 15\cdot\vec{i} \quad \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Caso b)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{g}_M = -5\cdot\vec{i}\\ \vec{g}_m = +20\cdot\vec{i}\end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = 15\cdot\vec{i} \quad \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Caso c)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{g}_M = -5\cdot\vec{i}\\ \vec{g}_m = -20\cdot\vec{j}\end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = (-5\cdot\vec{i} - 20\cdot\vec{j}) \quad \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Caso d)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{g}_M = -5\cdot\vec{i}\\ \vec{g}_m = 20\cdot(\cos 30^\circ\cdot\vec{i} + \operatorname{sen} 30^\circ\cdot\vec{j})\end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = (12{,}32\cdot\vec{i} + 10\cdot\vec{j}) \ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$$

5. La Tierra tarda un año en describir su órbita en torno al Sol. Esta órbita es, aproximadamente, circular, con radio R = 1,49.10^{11} m. calcula la masa del Sol.

La fuerza centrípeta que obliga a la Tierra a girar alrededor del Sol es, precisamente, la fuerza gravitatoria que este ejerce sobre ella. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{M_T \cdot v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T \cdot M_s}{R^2}$$

En la expresión anterior, M_T y M_S son las masas de la Tierra y el Sol, respectivamente; v es la velocidad orbital de la Tierra, y R es el radio de su órbita, dato que proporciona el enunciado del ejercicio. Si despejamos de ella la velocidad orbital de la Tierra, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{R}}$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} v = \omega \cdot R \\ \omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} \end{array}\right\} v = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot R$$

Podemos escribir lo siguiente:

$$\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot R = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{R}}$$

La masa del Sol es, por tanto:

$$M_s = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1{,}49 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

6. La Luna es, aproximadamente, esférica, con radio R = 1,74. 10^6 m y masa m = 7,35 .10^{22} kg:

a) Calcula la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.

b) Si se deja caer una piedra desde una altura de 2 m sobre la superficie lunar, ¿cuál será su velocidad al chocar con la superficie?

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} \rightarrow g_L = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(1{,}74 \cdot 10^6)^2} = 1{,}62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Este apartado se puede resolver aplicando las ecuaciones cinemáticas que corresponden al movimiento (m.r.u.a.) o mediante el principio de conservación de la energía. En este último caso se obtiene:

$$E_p\,(h = 2 \text{ m}) = E_c\,(h = 0 \text{ m}) \rightarrow m \cdot g_L \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1{,}62 \cdot 2} = 2{,}54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

7. Un satélite de 250 kg de masa describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura sobre su superficie de 500 km. Calcula:

a) Su velocidad.

b) Su período de revolución.

c) Las energías cinética y potencial del satélite.

d) La energía necesaria para ponerlo en órbita.

Datos: Rt = 6 370 km; MT = 6.10^24 kg

a) Como el satélite se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra, describiendo un m.c.u., la fuerza resultante es la fuerza centrípeta, que coincide con la fuerza gravitatoria. Es decir:

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta} \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

de donde podemos obtener la velocidad:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3}} = 7\,632{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Al tratarse de un m.c.u., el período viene dado por:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 + 500) \cdot 10^3}{7\,632{,}4} = 5\,655{,}6 \text{ s}$$

c) Las energías cinética y potencial son:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 7\,632{,}4^2 = 7{,}28 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 250}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3} = -14{,}56 \cdot 10^9 \text{ J}$$

d) La energía necesaria para poner el satélite en órbita es el incremento de energía entre la situación inicial (sobre la superficie de la Tierra) y la del satélite en órbita.

Sobre la superficie terrestre, el satélite solo tiene energía potencial:

$$E_{pi} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 250}{6\,370 \cdot 10^3} = -15{,}7 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Cuando está en órbita, su energía es la suma de las energías potencial y cinética, calculadas anteriormente:

$$E_f = E_{cf} + E_{pf} = 7{,}28 \cdot 10^9 - 14{,}56 \cdot 10^9 = -7{,}28 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Por tanto, la energía necesaria resulta:

$$\Delta E = E_f - E_i = -7{,}28 \cdot 10^9 - (-15{,}7 \cdot 10^9) = 8{,}42 \cdot 10^9 \text{ J}$$

8. La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días. La masa de la tierra es 6 . 10^{24} kg,

a) Calcula la distancia que separa el centro de la Tierra del centro de la Luna.

b) Calcula la masa de la Luna, sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de 3,4 . 10^8 m.

c) Si en la Luna, cuyo radio es 1,7. 10^6 m, se deja caer sin velocidad inicial un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

a) La fuerza centrípeta que hace que la Luna orbite en torno a la Tierra es, precisamente, la fuerza gravitatoria que esta ejerce sobre la primera. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{M_L \cdot v_L^2}{r_{TL}} = G \cdot \frac{M_L \cdot M_T}{r_{TL}^2} \rightarrow r_{TL} = G \cdot \frac{M_T}{v_L^2}$$

Por otro lado, si suponemos que la órbita de la Luna es circular, podemos escribir lo siguiente:

$$v_L = \omega \cdot r_{TL} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r_{TL}$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, obtenemos el valor de la distancia Tierra-Luna, r_{TL}:

$$r_{TL} = G \cdot \frac{M_T}{\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r_{TL}\right)^2} \rightarrow r_{TL} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$$r_{TL} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (28 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

b) Si la partícula se encuentra en equilibrio, la resultante de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre ella ha de ser nula. Si llamamos r a la distancia que separa la partícula del centro de la Tierra, podemos escribir lo siguiente:

$$F_L = F_T \rightarrow G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(r_{TL} - r)^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow M_L = M_T \cdot \frac{(r_{TL} - r)^2}{r^2}$$

$$M_L = 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(3,9 \cdot 10^8 - 3,4 \cdot 10^8)^2}{(3,4 \cdot 10^8)^2} = 12,98 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

c) El valor de la intensidad del campo gravitatorio creado por la Luna a una altura de 10 m es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{12,98 \cdot 10^{22}}{(1,7 \cdot 10^6 + 10)^2} = 2,99 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

La velocidad con que el objeto llegará al suelo es, por tanto:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 2,99 \cdot 10} = 7,74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

9. Un satélite artificial se dice geoestacionario si está siempre en la vertical de un cierto punto de la Tierra:

a) ¿A qué altura están dichos satélites?

b) ¿Qué momento cinético respecto al centro de la Tierra tiene un satélite geoestacionario si su masa es de 100 kg?

c) ¿Por qué no puede haber un satélite geoestacionario en la vertical de las islas Baleares?

a) Un satélite artificial es geoestacionario si su vector posición respecto al centro de la Tierra corta siempre a la superficie de esta en el mismo punto. La órbita geoestacional se encuentra a cierta altura sobre el ecuador; su período de revolución es de un día solar (24 horas).

La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre él es la fuerza centrípeta que le obliga a orbitar en torno a ella. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m_s \cdot v^2}{R} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

Por otro lado:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Igualando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Si tenemos en cuenta, además, que:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Obtenemos, al sustituir $G \cdot M_T$ en la expresión anterior:

$$R = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot (24 \cdot 3\,600)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Por tanto, la altura a que se encuentran dichos satélites será:

$$h = R - R_T = 4,22 \cdot 10^7 - 6,37 \cdot 10^6 = 3,59 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) El momento cinético o angular del satélite respecto al centro de la Tierra lo calculamos de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) \rightarrow L = r \cdot m \cdot v \cdot sen\,\alpha$$

El satélite está sometido a una fuerza central ejercida por la Tierra; por tanto, su momento angular permanecerá constante. Al ser su trayectoria circular, el ángulo, α, que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$ será de 90°. Por tanto:

$$L = r \cdot m \cdot v$$

El valor de la velocidad orbital del satélite, v, es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4{,}22 \cdot 10^7}{24 \cdot 3\,600} = 3{,}07 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$L = r \cdot m \cdot v = R \cdot m \cdot v = 4{,}22 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 3{,}07 \cdot 10^3 = 1{,}30 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

c) En la vertical de las Islas Baleares no puede haber un satélite geoestacionario, ya que estas no se encuentran en el ecuador; una órbita es geoestacionaria si su eje de giro coincide con el de la Tierra y su período es el mismo que el de esta.

10. Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 500 km sobre su superficie. Si su período de revolución es T1 = 5 665 s, determina:

a) La velocidad del satélite en la órbita.

b) Las energías cinética, potencial y total del satélite en la citada órbita, y la necesaria para transferir este satélite a otra órbita de período T2 = 7 200 s.

a) La velocidad de órbita del satélite podemos obtenerla directamente a partir de su período de revolución:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 \cdot 10^3 + 500 \cdot 10^3)}{5\,665} = 7\,619{,}68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La energía cinética del satélite en la órbita es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 7\,619{,}68^2 = 2{,}9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía potencial del satélite en la órbita la podemos obtener a partir de la expresión:

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

Teniendo en cuenta que:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Por tanto:

$$E_p = -\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{R_T + h} = \frac{-9{,}81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 100}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3} = -5{,}79 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía total del satélite en la órbita será la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E_1 = E_c + E_p = 2{,}9 \cdot 10^9 - 5{,}79 \cdot 10^9 = -2{,}89 \cdot 10^9 \text{ J}$$

El resultado negativo obtenido indica que el satélite está ligado a la Tierra.

La energía necesaria para transferir el satélite a otra órbita de período $T_2 = 7\,200$ s la calculamos como se indica. En primer lugar, aplicando la tercera ley de Kepler, podemos obtener el radio de la nueva órbita:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3} = \frac{R_2^3}{(R_T + h)^3} \rightarrow R_2 = \sqrt[3]{\frac{T_2^2 \cdot (R_T + h)^3}{T_1^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7\,200^2 \cdot [(6\,370 + 500) \cdot 10^3]^3}{5\,665^2}} = 8,06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A partir de este dato, podemos calcular la velocidad en la nueva órbita, v_2:

$$T_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{v_2} \rightarrow v_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8,06 \cdot 10^6}{7\,200} = 7\,034,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la energía total del satélite en esa nueva órbita será:

$$E_2 = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_2} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_2^2 - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{R_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 7\,034,38^2 - \frac{9,81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 100}{8,06 \cdot 10^6} = -2,46 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Finalmente, la energía necesaria para transferir el satélite de una órbita a otra será la diferencia entre las energías totales del satélite en cada una de ellas. Por tanto:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -2,46 \cdot 10^9 - (-2,89 \cdot 10^9) = 0,43 \cdot 10^9 \text{ J}$$

11. Calcula la gravedad, g, en función de la que existe en la superficie de la Tierra, para un punto situado a una altura, h, mucho menor que el radio de esta, R.

La aceleración de la gravedad, que es el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra, viene dada por la expresión:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Para un punto próximo a la superficie de la Tierra, podemos escribir:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2 \cdot \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Si desarrollamos el binomio de la expresión anterior, resulta:

$$(*) \quad \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{h}{R_T} + \left(\frac{h}{R_T}\right)^2$$

En esta expresión podemos despreciar el término de segundo orden, ya que, según se nos dice en el enunciado, $h << R_T$.

Del resultado anterior (*), podemos establecer la igualdad:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{2 \cdot h}{R_T}}$$

que es el resultado pedido.

12. Un planeta tiene un radio que es tres veces mayor que el de otro. Si la densidad de ambos es la misma, ¿en cuál de los dos es mayor el peso de un mismo cuerpo? ¿Cómo afecta esto a la masa de un cuerpo?

Sabemos que las densidades de los dos planetas son iguales, aunque sus masas y radios son diferentes. Esto nos lleva a:

$$1 = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\left(\dfrac{M_1}{V_1}\right)}{\left(\dfrac{M_2}{V_2}\right)} = \frac{\dfrac{M_1}{4/3 \cdot \pi \cdot R_1^3}}{\dfrac{M_2}{4/3 \cdot \pi \cdot R_2^3}} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3}$$

A partir de la igualdad anterior es posible calcular la relación entre sus masas:

$$1 = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{3^3}{1} = 27$$

Para comprobar en qué planeta es mayor el peso, veamos la relación entre el campo gravitatorio en la superficie de cada uno:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{G \cdot \dfrac{M_1}{R_1^2}}{G \cdot \dfrac{M_2}{R_2^2}} \rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3$$