1 Cuadrivectores

Hasta ahora hemos hablado de las transformaciones de Lorentz, y cómo estas afectan tanto a las coordenadas espaciales como al tiempo.

El vector que define un punto en el espacio-tiempo se denomina cuadrivector, ya que posee 3 coordenadas espaciales y una temporal.

La transformación de Lorentz de un cuadrivector la escribíamos como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}.$$

Todo objeto que represente un vector en el espacio de Minkowski debe transformar de esta forma al cambiar de sistema de referencia.

Ahora nos interesa definir la velocidad en cuatro dimensiones. Ya que la velocidad es un vector deberá tener la misma regla de transformación.

Recordemos cómo definimos la velocidad en mecánica clásica

Para un vector en $\Re^3$ tenemos $\vec{r} = (x, y, z)$. Luego, para definir la velocidad simplemente variamos $\vec{r}$ con respecto al tiempo

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Esto lo podemos hacer ya que en mecánica clásica el tiempo es invariante bajo una transformación de sistema de referencia. El tiempo tiene un carácter absoluto, para todos los sistemas y por tanto es un parámetro independiente de la transformación.

En $\Re^3$ sabemos que un vector transforma según $x'_i = R_{ij} x_j$, y por tanto cuando escribimos la velocidad, satisface la misma ley de transformación.

Sin embargo, en Relatividad el tiempo t no es un parámetro. Es una coordenada más, la cual se ve afectada al pasar de un sistema de referencia a otro. Por tanto no tiene ningún sentido escribir

$$\frac{dx^{\mu}}{dt}$$

Podemos verificar que la velocidad definida de esta forma no transforma como un vector bajo una T.L.

En clases mostramos que el intervalo

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

se mantiene invariante bajo una transformación de Lorentz

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Por tanto, definimos el tiempo propio $d\tau = \sqrt{ds^2}$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \vec{v}^2}$$

De acá deducimos que la relación entre la coordenada temporal t y el tiempo propio es $t = \gamma\tau$ (Un reloj en movimiento se atrasa con respecto a uno en reposo).

El parámetro τ (invariante!) recibe el nombre de tiempo propio porque para un sistema en reposo, coincide con la coordenada t

Supongamos un reloj en el el sistema S' en el punto $x' = 0$

$$ds'^2 = dt'^2 \equiv d\tau \tag{1.1}$$

Para este sistema el cuadrivector de posición es $x'^\mu = (x^0, 0, 0, 0)$, por tanto su cuadrivelocidad es

$$\frac{dx'^\mu}{d\tau} = \vec{1}$$

Para una partícula que se desplaza en el sistema de referencia tenemos que su cuadrivector está dado por $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, por tanto su cuadrivelocidad será

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma\vec{v}) \tag{1.2}$$

en representación matricial tenemos

$$u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Es fácil verificar que la velocidad escrita de esta forma transforma como un vector bajo una T.L.

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \tag{1.4}$$

El módulo de la cuadrivelocidad está dado por

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = 1$$

1.1 Clasificación de cuadrivectores

La norma de un vector puede ser positiva, negativa o cero.

Sea el vector A^μ, podemos clasificarlo como

- Si $A_\mu A^\mu > 0$ se denomina vector tipo tiempo

- Si $A_\mu A^\mu = 0$ se denomina vector tipo luz

- Si $A_\mu A^\mu < 0$ se denomina vector tipo espacio

De esta forma clasificamos los cuadrivectores. Ya que la norma de un vector es invariante (escalar) esta propiedad del vector se mantendrá en todos los sistemas de referencia inerciales.

El significado físico es el siguiente: si un cuadrivector es tipo tiempo, indica que es un vector que está contenido dentro del cono de luz. Por ejemplo, si el cuadrivector representa la cuadrivelocidad de una partícula, ésta se desplaza con velocidades menores a la de la luz.

Si la partícula es tipo luz, el vector se apoya en el manto del cono de luz, y por tanto viaja con velocidad $c = 1$.

Si el vector es tipo espacio, indica que el vector se encuentra fuera del cono de luz.

1.2 Cuadri-aceleración

La cuadri-aceleración está definida como

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$$

A partir de la norma para la cuadri-velocidad

$$u_\mu u^\mu = 1$$

Derivamos respecto al tiempo propio

$$2\frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu = 0$$

por tanto concluímos que la aceleración es un vector perpendicular a la velocidad

$$a^\mu u_\mu = 0$$

La cuadri-aceleración está dada por

$$a^\mu = \begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{u} \\ \vec{a} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Mientras que visto desde el sistema de referencia en que la partícula está en reposo

$$a^\mu u_\mu = a^0 = 0$$

$$a^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ a^i \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

1.3 Cuadri- Momentum

A partir de la definición de momento

$$p^\mu = m_0 u^\mu = m_0\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \gamma\vec{p} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Notar que la componente $p^0 = m_0\gamma$ y podemos definir $m = m_0\gamma$, por lo que

$$p^\mu = \begin{pmatrix} m \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

m_0 se denomina *masa en reposo* y la masa $m = \gamma m_0$ varía según la velocidad de la partícula (no es un escalar!).

Para $v \to c$ la masa comienza a aumentar hasta volverse infinitamente grande.

La cantidad

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - m_0^2\gamma^2 v^2 = m_0^2 \tag{1.9}$$

es un invariante de Lorentz (positivo!)

Por tanto, una partícula masiva tiene un vector de momento tipo tiempo.

Qué sucede con una partícula de masa igual cero?

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = 0, \qquad p^o = \pm|\vec{p}| \tag{1.10}$$

Tal como hemos definido el 4-momento, éste tiene sentido de vector. Por tanto bajo una transformación de Lorentz debe cumplirse que

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} \tag{1.11}$$

Es decir, las componentes del 4-vector transforman según

$$\begin{aligned} p'^{0} &= \Lambda^{0}{}_{0} p^{0} + \Lambda^{0}{}_{i} p^{i} && (1.12) \\ p'^{i} &= \Lambda^{i}{}_{0} p^{0} + \Lambda^{i}{}_{j} p^{j} && (1.13) \end{aligned}$$

donde la matriz Λ es la que encontramos al realizar una transformación de Lorentz al 4-vector x^{μ}.

Veamos que esto realmente es así:

las componentes del 4-momento son $p^{\mu} = (E, m\vec{v})$, por tanto al cambiar de sistema de referencia se debe cumplir

$$p'^{\mu} = (E', m'\vec{v}')$$

Sea S el sistema que se mueve con velocidad v uniforme. Nos interesa conocer la velocidad de S vista desde un sistema S' el cual se mueve a una velocidad relativa u.

Luego, la velocidad de S vista desde S' será

$$v' = \frac{v-u}{1-vu}, \tag{1.14}$$

por tanto, encontramos que

$$\gamma' = \frac{1-uv}{\sqrt{(1-v^2)(1-u^2)}}. \tag{1.15}$$

Se sigue que la transformación de energía está dada por

$$E' = m_0\gamma' = \frac{E - \vec{u}\cdot\vec{p}}{\sqrt{1-u^2}} \tag{1.16}$$

Análogamente

$$\vec{p}' = m_0\gamma'\vec{v}' \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= m_0 \frac{v-u}{\sqrt{(1-v^2)(1-u^2)}} && (1.18) \\ &= \frac{\vec{p} - \vec{u}E}{\sqrt{(1-u^2)}} && (1.19) \end{aligned}$$

En mecánica clásica sabemos que para un sistema en el que no actúan fuerzas externas, el momento y energía del sistema se conservan.

Qué sucedera en relatividad especial?

Partamos de la definición del vector de 4-fuerza

$$F^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \tag{1.20}$$

Si no hay fuerzas externas $\Rightarrow F^{\mu} = 0$

$$\Rightarrow p^{\mu} = co\vec{n}st$$

Debe cumplirse que la componente cero y la componente espacial del 4-vector se conservan.

$$\sum_i p^{\mu} \text{ (antes)} = \sum_i p^{\mu} \text{ (después)} \tag{1.21}$$

Si E y $\vec{p}$ están conservados en una reacción, lo estarán en cualquier sistema de referencia.

Una consecuencia de la conervación del 4-momentoes que masa y energía no son independientes, como en mecánica clásica. La ley de conservación de masa y energía se vuelven una sola.

Clásicamente

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 + m_3 && (1.22)\\ \vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 && (1.23)\\ E_i &= E_f && (1.24)\\ E_i &= T_1 + T_2 + T_3 && (1.25) \end{aligned}$$

Relatividad especial en cambio

$$\begin{aligned} p_i^0 &= p_f^0 \quad \text{conservación de masa y energía} && (1.26)\\ \vec{p}_i &= \vec{p}_f && (1.27) \end{aligned}$$

Volvamos a la 4-fuerza definida anteriormente

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \gamma \left(m_0 \frac{d\gamma}{dt}, m_0 \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} \right) \tag{1.28}$$

$$F^\mu = \gamma \left(\frac{m_0 v \dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}}, \vec{F} \right), \tag{1.29}$$

donde $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$.

Si

$$F^\mu = 0 \Rightarrow p^\mu = co\vec{n}st$$

Lo que implica que la 4-velocidad $v^\mu = const$, es decir, su módulo y dirección permanecen inalterados.

Esto nos lleva a la conclusión que $\cdot v = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} E &= m_0\gamma = const & (1.30) \\ \vec{p} &= m_0\gamma\vec{v} = const & (1.31) \end{aligned}$$

y por tanto la conservación de la energía y momento

$$\frac{dE}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$