Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba III
Métodos Matemáticos II
Licenciatura en Física - 2017
IPGG

Problema I

Se tienen dos operadores: $\widehat{\mathbf{a}}$ y su adjunto $\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}$, tal que:

$$\widehat{\mathbf{a}}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

y

$$\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$

donde el conjunto $\{|n\rangle\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, ..., \infty)$ corresponde a una base vectorial ortonomal completa arbitraria.

a).- Evalúe los siguientes elementos de matriz:

a.1).- (20%) $\langle m\,|\widehat{\mathbf{a}}|\,n\rangle$.

a.2).- (20%) $\langle m\,|\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}\widehat{\mathbf{a}}\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}|\,n\rangle$.

b).- (60%) Halle el conmutador $\left[\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}\right]$.

Problema II

---

a).- (25%) Un operador hermitiano $\widehat{\mathbf{c}}$ cumple con la siguiente ecuación de valores propios:

$$\widehat{\mathbf{c}}\,|c_i\rangle = c_i\,|c_i\rangle$$

demuestre que:

$$f\left(\widehat{\mathbf{c}}\right)|c_i\rangle = f\left(c_i\right)|c_i\rangle$$

b).- Un conjunto de 4 operadores $\widehat{\mathbf{M}}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ obedecen a la siguiente regla de anticonmutación:

$$\widehat{\mathbf{M}}_i\widehat{\mathbf{M}}_j + \widehat{\mathbf{M}}_j\widehat{\mathbf{M}}_i = 2\delta_{ij}\,\widehat{\mathbf{1}}$$

b.1).- (25%) Muestre que los valores propios de cada uno de estos operadores son ± 1 (Hint: use la expresión anterior para $i = j$ y la base de vectores propios de $\widehat{\mathbf{M}}_i$).

b.2).- (25%) Demuestre que $\mathrm{Tr}\left(\widehat{\mathbf{M}}_i\widehat{\mathbf{M}}_j\right) = 0$ para $i \neq j$.

b.3).- (25%) Para un espacio N-dimensional evalúe $\mathrm{Tr}\left(\widehat{\mathbf{M}}_i^2\right)$.

Problema III

Considere un espacio N-dimensional caracterizado por el conjunto de autoestados $\{|\eta_i\rangle\}$, autoestados propios del operador $\widehat{\boldsymbol{\eta}}$. Dicho operador cumple con la siguiente ecuación de valores propios:

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}}\,|\eta_i\rangle = \eta_i\,|\eta_i\rangle$$

Demuestre que:

$$\left[\prod_{i=1}^{N}(\widehat{\boldsymbol{\eta}}-\eta_i)\right]|\eta_j\rangle = 0\,|\eta_j\rangle$$

Problema IV

Se tiene un operador hermitiano $\widehat{\mathbf{H}}$, posteriormente se define el operador $\widehat{\mathbf{U}} = \exp\left(i\widehat{\mathbf{H}}\right)$:

a).- (35%) Demuestre que $\widehat{\mathbf{U}}$ es un operador unitario.

b).- (65%) Demuestre que $\det\widehat{\mathbf{U}} = \exp\left(i\mathrm{Tr}\left(\widehat{\mathbf{H}}\right)\right)$. Recuerde que el determinante y la traza de un operador son invariantes a un cambio de base.

PROBLEMA 1

I

a.1) $\langle m|\hat{a}|n\rangle = \langle m|\sqrt{n}|n-1\rangle$
$$= \sqrt{n}\,\langle m|n-1\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} \quad //$$

a.2) $\langle m|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \langle m|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$
$$= \sqrt{n+1}\,\langle m|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n+1\rangle$$
$$= \sqrt{n+1}\,\langle m|\hat{a}^{\dagger}\sqrt{n+1}\,|n\rangle$$
$$= (n+1)\,\langle m|\hat{a}^{\dagger}|n\rangle$$
$$= (n+1)\,\langle m|\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$= (n+1)^{3/2}\,\langle m|n+1\rangle$$
$$= (n+1)^{3/2}\,\delta_{m,n+1} \quad //$$

b) Para evaluar el conmutador $[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]$ lo aplicamos a un vector $|n\rangle$:

$$[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a})|n\rangle$$
$$= \hat{a}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle$$
$$= \sqrt{n+1}\,\hat{a}|n+1\rangle - \sqrt{n}\,\hat{a}^{\dagger}|n-1\rangle$$
$$= \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\,|n\rangle - \sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle$$
$$= (n+1)|n\rangle - n|n\rangle$$

Finalmente

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]|n\rangle = |n\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$$

PROBLEMA 2

a) Sea $\hat{c}|c_i\rangle = c_i|c_i\rangle$, luego

$$f(\hat{c})|c_i\rangle = \left[\sum_{n\geq 0} a_n \hat{c}^n\right]|c_i\rangle$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n \hat{c}^n |c_i\rangle$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n c_i^n |c_i\rangle$$

$$= \left[\sum_{n\geq 0} a_n c_i^n\right]|c_i\rangle$$

$$= f(c_i)|c_i\rangle$$

b.1) Existe el problema de valores propios:

$$\hat{M}_i |m_\ell^{(i)}\rangle = m_\ell^{(i)} |m_\ell^{(i)}\rangle$$

i = i-ésimo operador
l = l-ésimo valor y vector propio del i-ésimo operador.

De la relación de anticonmutación se obtiene que $\hat{M}_i^2 = \hat{\mathbb{1}}$ (*)

El problema de valores propios para $\hat{M}_i^2$ es:

$$\hat{M}_i^2 |m_\ell^{(i)}\rangle = {m_\ell^{(i)}}^2 |m_\ell^{(i)}\rangle$$

$\Downarrow$ de (*)

$$\hat{\mathbb{1}} |m_\ell^{(i)}\rangle = {m_\ell^{(i)}}^2 |m_\ell^{(i)}\rangle$$

$\Downarrow$ ∴ los valores propios son

$${m_\ell^{(i)}}^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$m_\ell^{(i)} = \pm 1 \Leftarrow$$ VALORES PROPIOS DE $\hat{M}_i$.

b.2) si $i \neq j$ de la relación de anticonmutación se tiene que

$$\hat{M}_i \hat{M}_j = -\hat{M}_j \hat{M}_i \quad / \mathrm{Tr}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{M}_i \hat{M}_j) = -\mathrm{Tr}(\hat{M}_j \hat{M}_i)$$

pero $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{A})$

$$\therefore \mathrm{Tr}(\hat{M}_i \hat{M}_j) = -\mathrm{Tr}(\hat{M}_j \hat{M}_i) = -\mathrm{Tr}(\hat{M}_i \hat{M}_j)$$

$$\Downarrow$$

Luego $\mathrm{Tr}(\hat{M}_i \hat{M}_j) = 0$ //

b.3) se tenía que $\hat{M}_i^2 = \hat{\mathbb{1}}$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{M}_i^2) = \mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = N \text{ //}$$

para un espacio N-dim.

PROBLEMA III

Se tiene que $\hat{\eta}|\eta_i\rangle = \eta_i|\eta_i\rangle$, en general $f(\hat{\eta})|\eta_i\rangle = f(\eta_i)|\eta_i\rangle$ (de acuerdo al probl. 2)

$$\therefore \left[\prod_{i=1}^{N}(\hat{\eta}-\eta_i)\right]|\eta_j\rangle = \prod_{i=1}^{N}(\eta_j-\eta_i)|\eta_j\rangle$$

$$= (\eta_j-\eta_1)(\eta_j-\eta_2)\cdots\overset{0}{\cancel{(\eta_j-\eta_j)}}\cdots(\eta_j-\eta_N)|\eta_j\rangle$$

existe un $i=j$ cuando se realiza la productoria.

$$\therefore \left[\prod_{i=1}^{N}(\hat{\eta}-\eta_i)\right]|\eta_j\rangle = 0\,|\eta_j\rangle$$

PROBLEMA IV

a) Si $\hat{H}^{\dagger} = \hat{H}$

y $\hat{U} = e^{i\hat{H}} \Longrightarrow \hat{U}^{\dagger} = e^{(i\hat{H})^{\dagger}}$

$= e^{\hat{H}^{\dagger} i^{\dagger}} = e^{i^{*}\hat{H}} = e^{-i\hat{H}}$

luego $\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = e^{i\hat{H}} e^{-i\hat{H}} = \hat{\mathbb{1}}$

$\therefore$ $\hat{U}$ es unitario

b) La base de autovectores de $\hat{H}$ puede ser supuesta como $\hat{H}|h_i\rangle = h_i|h_i\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}|h_i\rangle = e^{ih_i}|h_i\rangle$$ (usando resultado problema 2)

en la base $\{|h_i\rangle\}$ tanto $\hat{U}$ como $\hat{H}$ son "diagonales". (la base es ortonormal y completa).

Demo Los elementos de matriz de $\hat{U}$ en esta base son

$$\langle h_j|\hat{U}|h_i\rangle = \langle h_j| e^{i\hat{H}}|h_i\rangle = \langle h_j|e^{ih_i}|h_i\rangle$$
$$= e^{ih_i}\delta_{ij}$$

$$\therefore \hat{U} = \begin{pmatrix} e^{ih_1} & & & 0 \\ & e^{ih_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{ih_\ell} \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det(\hat{U}) = e^{ih_1} e^{ih_2} \cdots e^{ih_\ell} \cdots$$

$$= e^{i(h_1 + h_2 + \ldots + h_\ell + \ldots)}$$

Análogamente $\hat{H}$ es diagonal $\therefore$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} h_1 & & & 0 \\ & h_2 & & \\ & & \ddots\, h_\ell & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\therefore h_1 + h_2 + \ldots + h_\ell + \ldots = \sum_j h_j = \mathrm{Tr}\,\hat{H}$$

$$\therefore \det(\hat{U}) = e^{i\,\mathrm{Tr}(\hat{H})} \quad \text{QED}$$

Obs. Se escogió la base de autovectores de $\hat{H}$ dado que determinante y traza son independientes de la base escogida.