Evaluar: $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-2)}\,dz$ donde γ es una trayectoria arbitraria que encierre a $z=0$ y $z=2$.

FORMA 1: Por fracciones parciales

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2(z-2)} - \frac{1}{2z}.$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-2)}\,dz = \frac{1}{2}\oint_{\gamma} \frac{e^z}{(z-2)}\,dz - \frac{1}{2}\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z}\,dz$$

Usando la fórmula de Cauchy: $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = 2\pi i\, f(\alpha)$

si $\alpha \in$ al interior de γ.

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-2)}\,dz = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot 1.$$

$$= i\pi\left(e^2-1\right) \,\|$$

FORMA 2 : SUMA DE RESIDUOS

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z(z-2)}dz = 2\pi i \left[\lim_{z\to 0} z\, g(z) + \lim_{z\to 2} (z-2)\, g(z) \right]$$

$$\text{con} \quad g(z) = \frac{e^z}{z(z-2)}$$

$$= 2\pi i \left[\left.\frac{e^z}{z-2}\right|_{z=0} + \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2} \right]$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} \right]$$

$$= i\pi \left(e^2 - 1 \right)$$

FORMA 3 : Expansión en serie

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z(z-2)}dz = 2\pi i \left[c_{-1} + \tilde{c}_{-1} \right]$$ contribución de cada polo

donde c_{-1} es el coef. de la expansión de $g(z)$ en torno a $z=0$ y $\tilde{c}_{-1}$ es coeficiente de la expansión de $g(z)$ en torno a $z=2$.

evaluación de c_{-1}

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots\right)$$

luego:

$$\frac{e^z}{z(z-2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{z}{2} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1 + \frac{z}{2} + z + O(z^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{z} + O(z^0) \Longrightarrow c_{-1} = -\frac{1}{2}$$

evaluación de $\tilde{C}_{-1}$

$$g(z) = \frac{e^z}{z(z-2)} \quad \text{si hacemos} \quad \xi = z-2$$

$$\Rightarrow g(\xi) = \frac{e^{\xi+2}}{(\xi+2)\xi}$$

; Ahora hallamos el coef. $\tilde{C}_{-1}$ de $g(\xi)$ en torno a $\xi = 0$.

luego

$$g(\xi) = e^2 \frac{e^\xi}{\xi(\xi+2)} = e^2 \frac{1}{\xi} \frac{\left(1+\xi+\frac{\xi^2}{2!}+\cdots\right)}{(\xi+2)}$$

$$= e^2 \frac{1}{\xi}\left(1+\xi+\frac{\xi^2}{2!}+\cdots\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{\xi}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^2}{2}\frac{1}{\xi}\left(1+\xi+\frac{\xi^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^2}{4}+\cdots\right)$$

$$= \frac{e^2}{2\xi} + O(\xi^0) \Rightarrow \tilde{C}_{-1} = \frac{e^2}{2}$$

Finalmente

$$\oint \frac{e^z}{z(z-2)}\,dz = 2\pi i\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right] = i\pi\left(e^2-1\right)$$