Física Contemporánea

Dr. Víctor H. Cárdenas
Instituto de Física y Astronomía
Universidad de Valparaíso

10. Relatividad II

- Dilatación temporal/Contracción de longitud
- Paradoja de los gemelos
- Suma de velocidades
- Dinámica relativista
- Masa y Energía

Clase anterior

Postulados relatividad especial:

- Principio de relatividad

The Laws of Physics are the same in all Inertial Frames.

- Constancia de la velocidad de la luz *c*

Transformaciones de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

Invariante de Lorentz (para la luz)

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu = x_0 x^0 - x_i x^i = 0$$

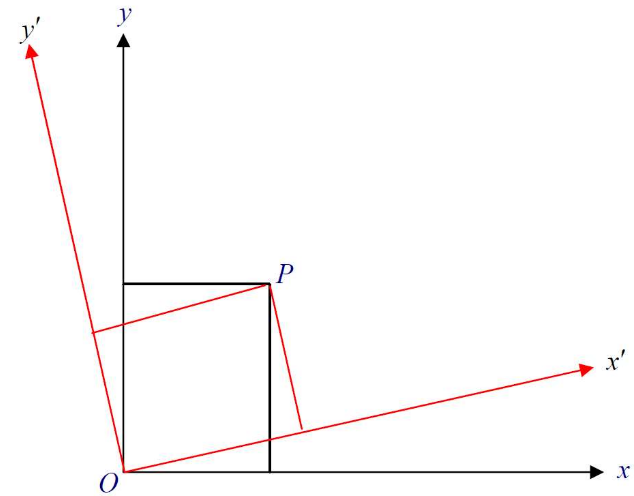
Clase anterior

Invariante de Lorentz (para la luz)

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Analogía en 2D

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 = \left(x_1' - x_2'\right)^2 + \left(y_1' - y_2'\right)^2.$$



Entonces

$$c^2\left(t_1 - t_2\right)^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2 = c^2\left(t_1' - t_2'\right)^2 - \left(x_1' - x_2'\right)^2 = s^2,$$

Invariante llamado “intervalo de espacio tiempo”

Dos eventos simultáneos en O’

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 - c^2\left(t_1 - t_2\right)^2 > 0. \qquad \text{space-like}$$

Dos eventos en el mismo lugar en O’

$$c^2\left(t_1 - t_2\right)^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2 = c^2\left(t_1' - t_2'\right)^2 > 0. \qquad \text{time-like}$$

Cono de luz

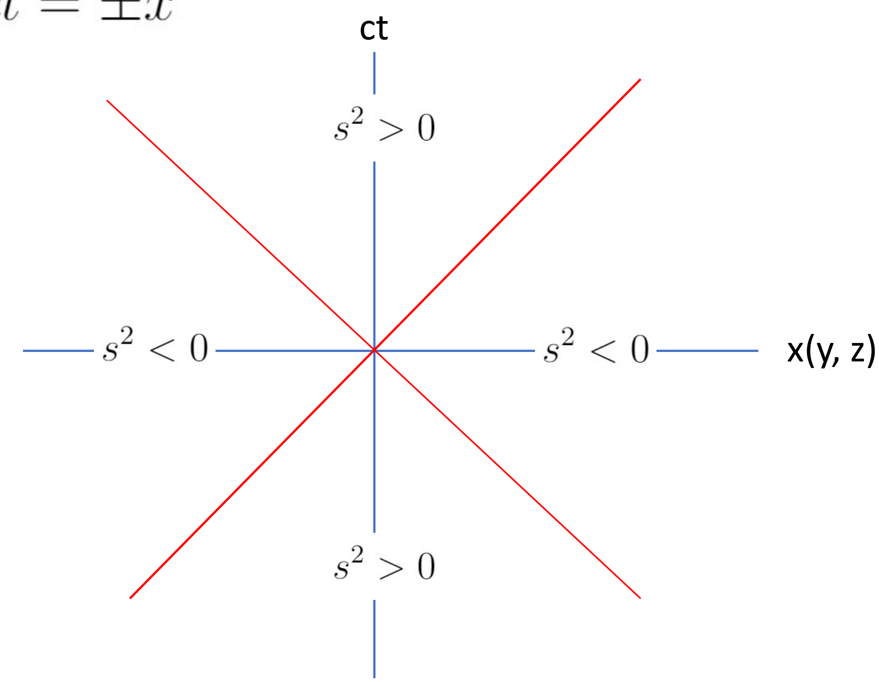
$$c^2\left(t_1 - t_2\right)^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2 = c^2\left(t_1' - t_2'\right)^2 - \left(x_1' - x_2'\right)^2 = s^2,$$

Para rayos de luz se cumple que s^2=0 o que

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Usando solo la coordenada *x* como la espacial

$$ct = \pm x$$



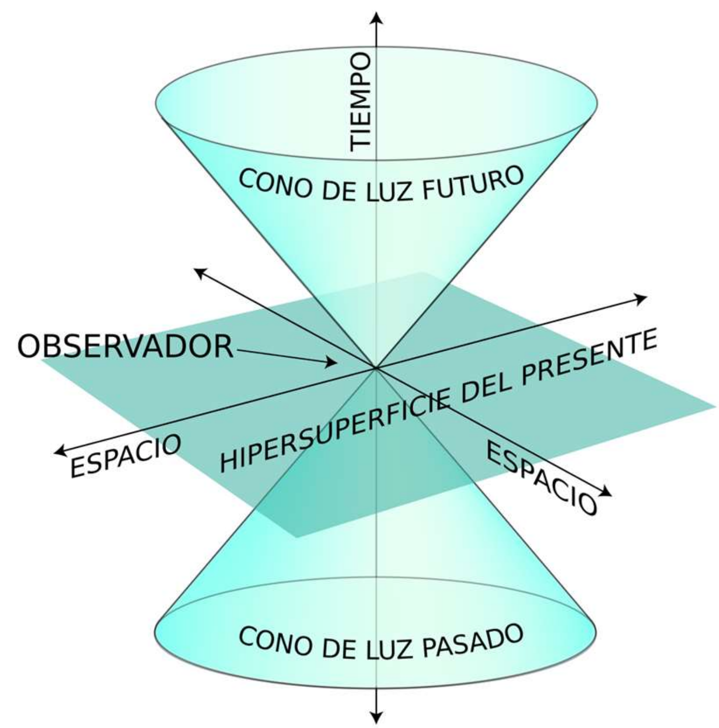
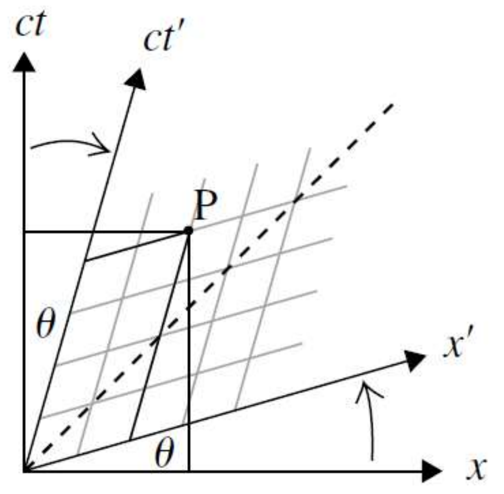


Diagrama espacio-tiempo

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t), \quad c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x)$$

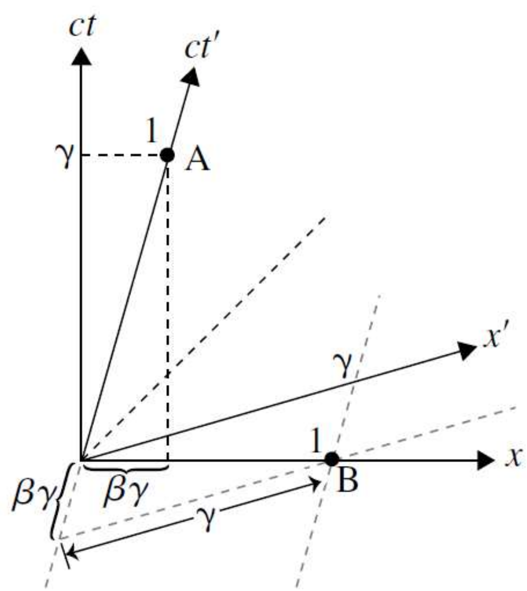


El eje x’ corresponde a la línea ct’=0

El eje ct’ corresponde a la línea x’=0

La separación temporal y espacial en el sistema O’ en relación al sistema O.

Un evento A tiene coordenadas $ct' = 1, x' = 0$



En O tiene coordenadas $ct = \gamma, x = \gamma\beta$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) = 0 \Rightarrow x = \beta ct,$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = ct\gamma(1 - \beta^2) = \frac{ct}{\gamma} = 1.$$

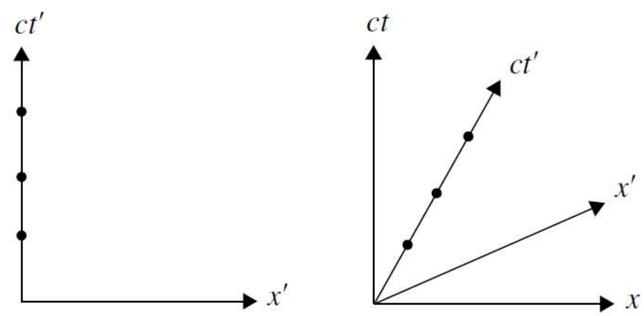
El evento B:

$(ct = 0, x = 1) \qquad (ct' = -\gamma\beta, x' = \gamma)$

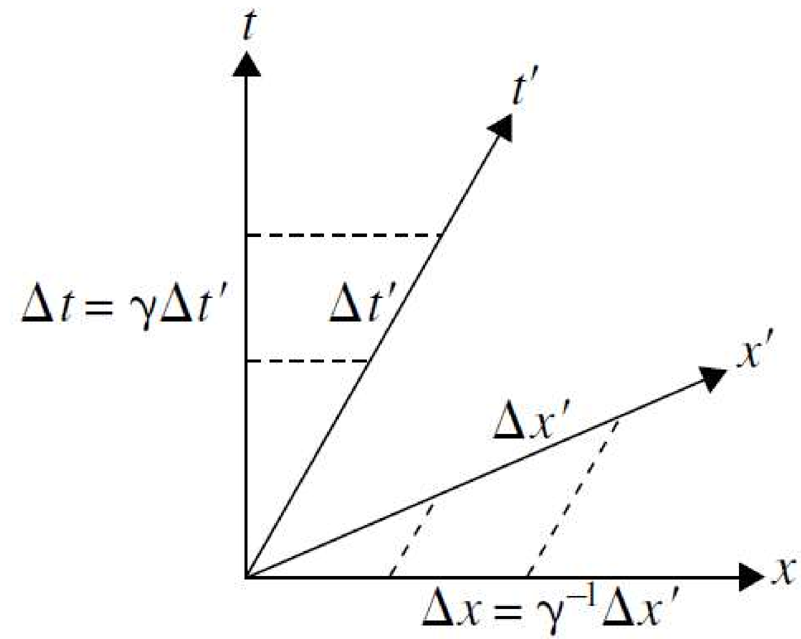
Dilatación temporal

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t), \quad c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x)$$

Ticks en O'



$$\boxed{\Delta t = \gamma\,\Delta t' \qquad \gamma > 1.}$$



Contracción de longitud

$$\boxed{\Delta x' = \gamma\,\Delta x > \Delta x.}$$

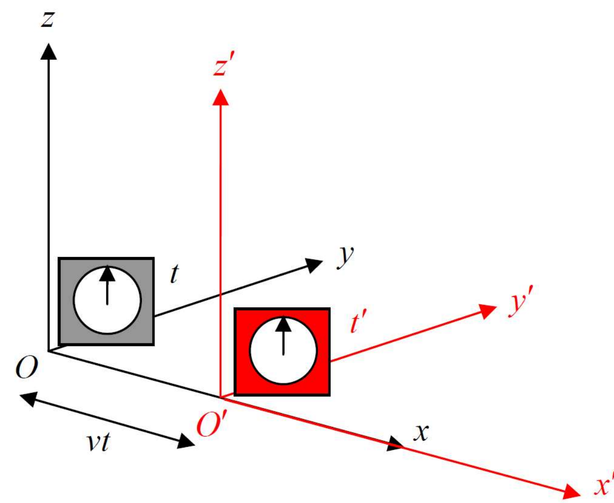
Suma de velocidades

$$dx' = \gamma(dx - vdt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right),$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - (v/c^2)dx} = \frac{u_x - v}{1 - (vu_x/c^2)},$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - (v/c^2)dx)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - (vu_x/c^2))},$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma(1 - (vu_x/c^2))}.$$



Dinámica relativista

Podemos definir el *tiempo propio* a partir de

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\tau^2$$

El análogo a la trayectoria x(t) es la *línea mundo* $x^\mu(\tau)$

Donde

$$x^0 = ct, \;\; x^1 = x, \;\; x^2 = y, \;\; x^3 = z \qquad\qquad \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

La *cuadri-velocidad* se define entonces

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \left(\frac{dx^0}{dt\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{d\vec{x}}{dt\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = (\gamma c, \gamma\vec{v})$$

La cuadri-aceleración

$$a^\mu = \dot{u}^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Dinámica relativista

Imitando a Newton requerimos algo como: $$m\frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu$$

Del electromagnetismo

$$f^\mu = (f^0, \gamma\vec{F})$$

De la componente espacial

$$m\frac{d}{d\tau}(\gamma\vec{v}) = \gamma\vec{F} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \vec{F}}$$

De las relaciones anteriores

$$m\dot{u}^\mu = f^\mu \qquad m\dot{u}^\mu u_\mu = f^\mu u_\mu = 0 \qquad \boxed{f^\mu = \left(\gamma\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}, \gamma\vec{F}\right)}$$

De la componente temporal

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\boxed{E = \gamma mc^2}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m\ c^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$$