Física Contemporánea

Dr. Víctor H. Cárdenas
Instituto de Física y Astronomía
Universidad de Valparaíso

Clase 12

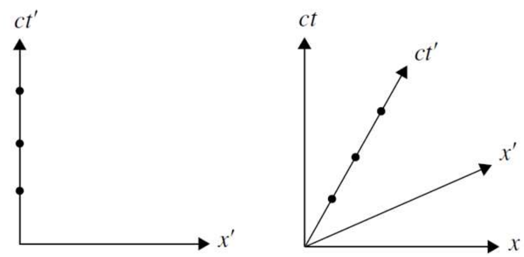
- Dos experimentos pensados(Gemelos; Tubo y varilla)
- Covarianza electrodinámica

Clase anterior

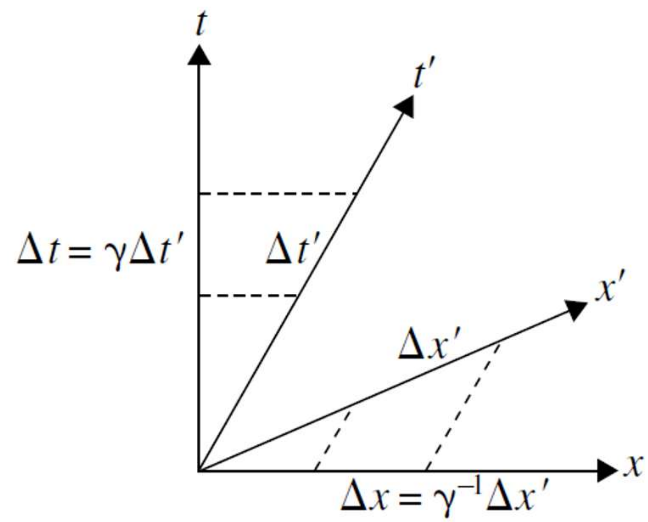
Dilatación temporal

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t), \quad c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x)$$

Ticks en O'



$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' \qquad \gamma > 1.}$$

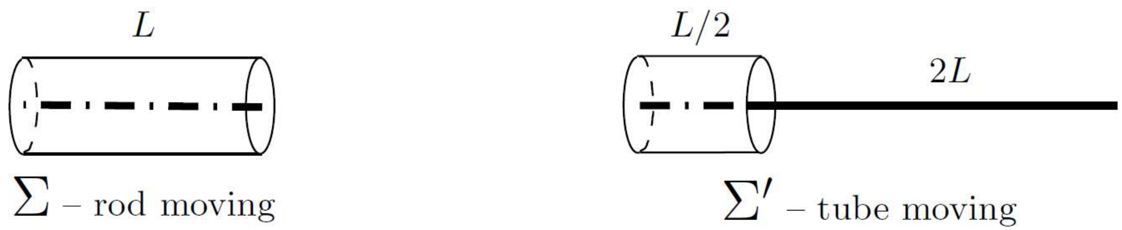


Contracción de longitud

$$\boxed{\Delta x' = \gamma \Delta x > \Delta x.}$$

El tubo y la varilla

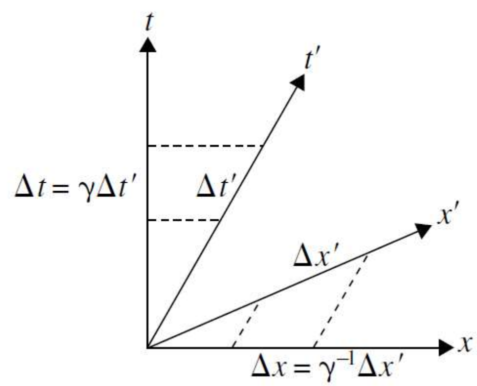
Tomemos una varilla de longitud *2L* y un tubo de longitud *L* (ambos medidos en reposo),



<u>Sistema Σ</u>: (tubo en reposo, varilla en movimiento) si la varilla se mueve con $v = c\sqrt{3}/2$, la varilla mide $2L\sqrt{1 - v^2/c^2} = L$

<u>Sistema Σ'</u>: (tubo en movimiento, varilla en reposo) la varilla es 4 veces mas largo que el tubo, nunca cabrá en el tubo!

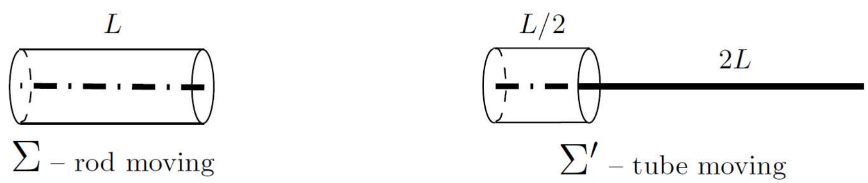
¿Cómo es posible este resultado?



El tubo y la varilla

Una varilla de longitud *2L* y

un tubo de longitud *L*



El tubo mide L en el sistema O. En este mismo sistema medimos la longitud de la varilla, entonces

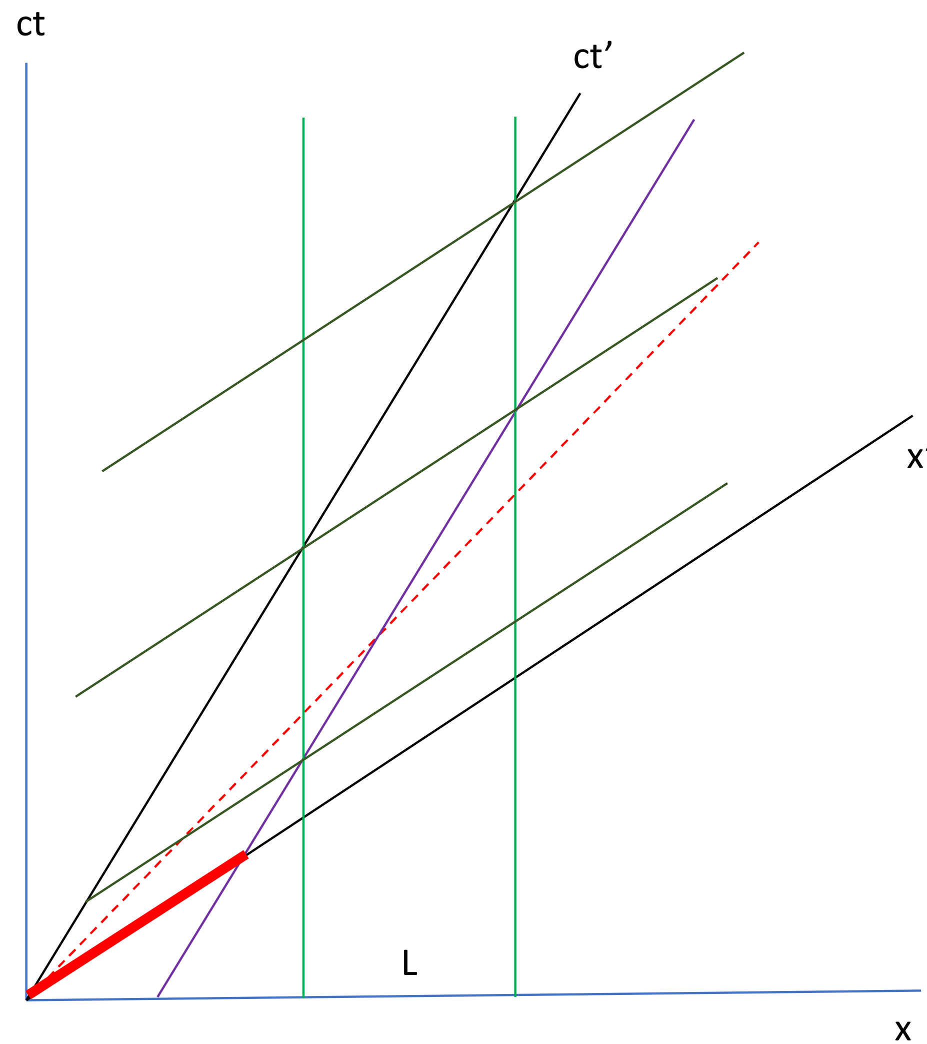
$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

donde hemos asumido $t_1 = t_2$.

La varilla mide $2L$ en el sistema O'. En este mismo sistema medimos la longitud de la varilla, entonces

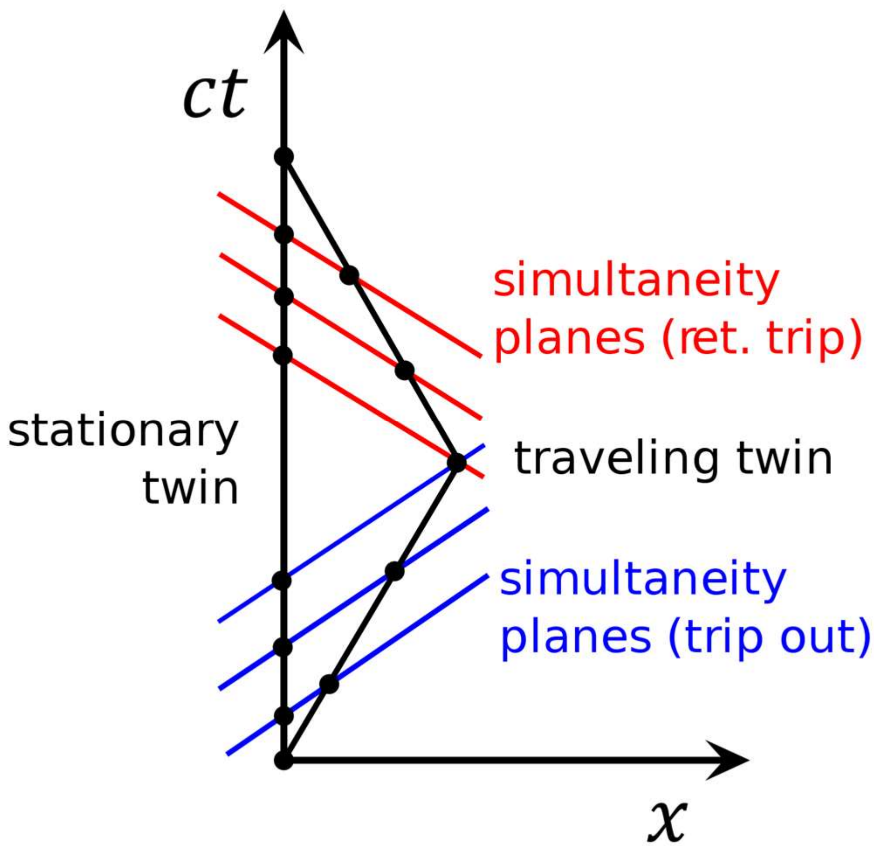
$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

donde hemos asumido $t'_1 = t'_2$.



Paradoja de los gemelos

Un gemelo se queda en la tierra y el otro viaja a $v = c\sqrt{3}/2,$ y regresa después de 1 año de viaje (para él). En la Tierra han pasado 2 años.



Covarianza de la Electrodinámica

<u>Cuadrivectores</u>

Un evento en el *espacio-tiempo* tiene coordenadas $X^\mu = (ct, x, y, z) \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$

Con la *métrica de Minkowski* $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ podemos

$X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu \qquad X^\nu = \eta^{\nu\mu} X_\mu$

Y formar el *invariante* cuadrático $X \cdot X = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Invariante frente a transformaciones de Lorentz:

$$\boxed{X^\mu \to X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} X_\mu \to X'_\mu &= \eta_{\mu\rho} X'^\rho \\ &= \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma X^\sigma \\ &= \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu} X_\nu \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{X_\mu \to \Lambda_\mu{}^\nu X_\nu}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad &\Rightarrow \quad \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda_{\rho\nu} = \eta_{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \quad \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda_\rho{}^\sigma = \delta^\sigma_\mu \\ &\Rightarrow \quad \Lambda_\rho{}^\sigma \Lambda^\rho{}_\mu = \delta^\sigma_\mu \end{aligned}$$

Covarianza de la Electrodinámica

Mecánica relativista

$$U_\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad P = mU$$

Un covector muy útil

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \,, \nabla \right)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} \to \frac{\partial}{\partial X'^\mu} = \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu}\frac{\partial}{\partial X^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \qquad X^\mu \to X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$$

Dinámica relativista

Imitando a Newton requerimos algo como: $m\frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu$

Del electromagnetismo

$$f^\mu = (f^0, \gamma\vec{F})$$

De la componente espacial

$$m\frac{d}{d\tau}(\gamma\vec{v}) = \gamma\vec{F} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \vec{F}}$$

De las relaciones anteriores

$$m\dot{u}^\mu = f^\mu \qquad m\dot{u}^\mu u_\mu = f^\mu u_\mu = 0 \qquad \boxed{f^\mu = \left(\gamma\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}, \gamma\vec{F}\right)}$$

De la componente temporal

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\boxed{E = \gamma mc^2} \qquad \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m\ c^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$$

Tensores

$$T'^{\mu_1\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\ldots\nu_m} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\ldots\Lambda^{\mu_n}{}_{\rho_n}\Lambda_{\nu_1}{}^{\sigma_1}\ldots\Lambda_{\nu_m}{}^{\sigma_m}T^{\rho_1\ldots\rho_n}{}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,, \nabla\right)$$

Covarianza de la Electrodinámica

Primeras relaciones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad J^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \qquad \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

Ecuaciones homogéneas

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Libertad de Gauge

$$\phi \to \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi$$

Gauge de Lorentz

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot A = 0 \qquad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \qquad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \chi \qquad \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Covariant_formulation_of_classical_electromagnetism

Covarianza de la Electrodinámica

<u>Tensor electromagnético</u>

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \chi - \partial_\nu \partial_\mu \chi = F_{\mu\nu}$$

$$F_{01} = \frac{1}{c}\frac{\partial(-A_x)}{\partial t} - \frac{\partial(\phi/c)}{\partial x} = \frac{E_x}{c} \qquad F_{12} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -B_z$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}}$$

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \\ B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}$$