Un factor perdido

COMPLEMENTO IV

En algunas situaciones al aplicar MoB, las series de potencias resultantes pueden contener factores de la forma $\frac{\Gamma(-Nk)}{\Gamma(-Mk)}$, donde $N, M \in \{\mathbb{N} + \{0\}\}$ y k el índice de suma. Como ejemplo particular evaluemos el siguiente cuociente:

$$I = \frac{\Gamma(-2k)}{\Gamma(-k)}$$

entonces podemos hacer lo siguiente

$$\Gamma(-2k) = \Gamma(-k-k) = \Gamma(-k)(-k)_{-k} = \Gamma(-k)\frac{(-1)^k}{(1+k)_k}$$

$$= (-1)^k \frac{\Gamma(-k)}{\Gamma(1+2k)}\Gamma(1+k) = (-1)^k \frac{\Gamma(-k)(1)_k}{(1)_{2k}}$$

Luego: $I = \frac{\Gamma(-2k)}{\Gamma(-k)} = (-1)^k \frac{(1)_k}{(1)_{2k}}$

$\Downarrow$

ó $\frac{\Gamma(-k)}{\Gamma(-2k)} = (-1)^k \frac{(1)_{2k}}{(1)_k}$

Estos valores sin embargo están equivocados por un factor!!!

Forma correcta de evaluar $I = \frac{\Gamma(-2k)}{\Gamma(-k)}$:

Sea

$$\frac{\Gamma(-2k)}{\Gamma(-k)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Gamma(-2(k+\epsilon))}{\Gamma(-(k+\epsilon))} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Gamma(-2k-2\epsilon)}{\Gamma(-k-\epsilon)}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Gamma(-2\epsilon)\,(-2\epsilon)_{-2k}}{\Gamma(-\epsilon)\,(-\epsilon)_{-k}}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Gamma(-2\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} \frac{(-1)^k (1+\epsilon)_k}{(1+2\epsilon)_{2k}}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Gamma(-2\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} (-1)^k \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(1+\epsilon)_k}{(1+2\epsilon)_{2k}}$$

$$= (-1)^k \frac{(1)_k}{(1)_{2k}} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Gamma(-2\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} \quad *$$

Este cuociente es finito

Serie de Laurent de $\Gamma(-N\epsilon)$:

Es evidente que si N es entero positivo entonces $\Gamma(-N\epsilon)$ es singular si $\epsilon\to 0$. La expansion en serie es la siguiente

$$\Gamma(-N\epsilon) = -\frac{1}{N}\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^0) \quad (\text{si } \epsilon\to 0)$$

Escaneado con CamScanner

$\therefore$ en Ec. (*) se cumple que:

$$I = (-1)^k \frac{(1)_k}{(1)_{2k}} \left(\frac{1}{2}\right)$$

ó

$$\boxed{\frac{\Gamma(-k)}{\Gamma(-2k)} = \frac{1}{2} (-1)^k \frac{(1)_{2k}}{(1)_k}}$$

Este es el resultado correcto!