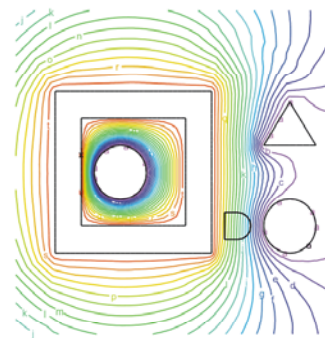
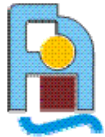


Problema del potencial



Antonio González Fernández
Dpto. de Física Aplicada III
Universidad de Sevilla



Definición y propiedades del equilibrio electrostático

- Es un estado en el que las cargas de los conductores se encuentran en reposo
- Ello implica que
 - El campo eléctrico es nulo en los conductores
 - La superficie de cada uno es equipotencial
 - La única carga es superficial
 - El campo eléctrico exterior es normal a cada superficie
 - No hay líneas de campo que vayan de un conductor a sí mismo

Ecuaciones del problema del potencial



- El cálculo del campo entre conductores se reduce a resolver la ecuación de Poisson en el espacio entre conductores

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Sobre cada superficie conductora, S_k , el potencial tiene un valor constante, V_k

$$\phi = V_k \quad (\mathbf{r} \in S_k)$$

- En el infinito el potencial se anula

$$\phi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

Diferencias entre conductores a carga constante y a potencial constante

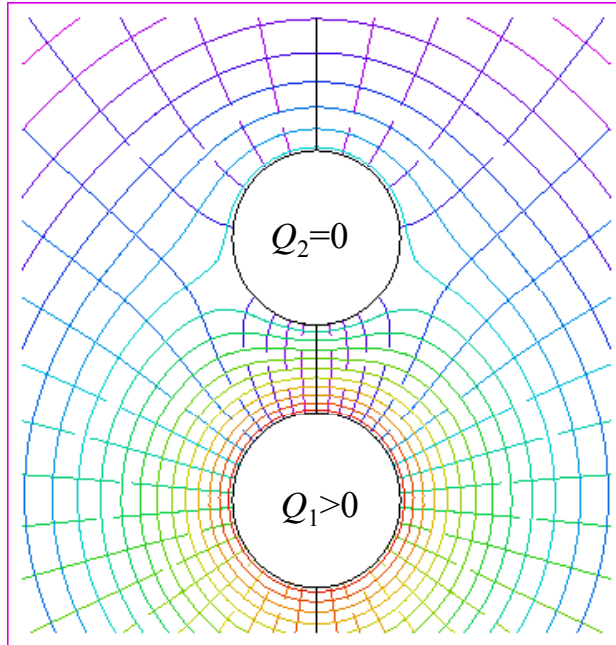


- Un conductor puede estar tener fijado su potencial o su carga total, pero no ambas magnitudes a la vez
- Si el conductor está aislado (no conectado a nada) tiene carga constante. La carga se redistribuye pero el total no cambia. El potencial puede variar
- Un conductor conectado a una fuente de tensión ideal mantiene constante su potencial. La fuente añade o quita carga para que no varíe el potencial

Ejemplo de conductores a carga constante



A un conductor circular con carga constante se acerca otro conductor descargado



© 2008, Antonio González Fernández

La distribución de campo cambia al introducir el segundo conductor

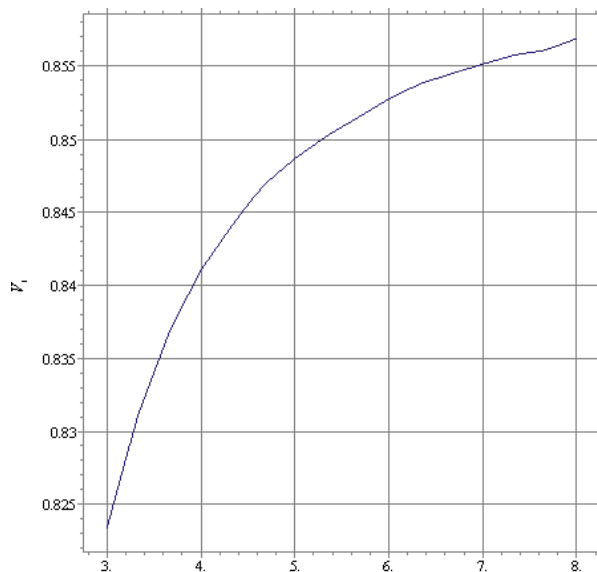
En el conductor descargado entran y salen líneas de campo

↕ La densidad de carga superficial σ_s no es nula, aunque sea nula la carga total

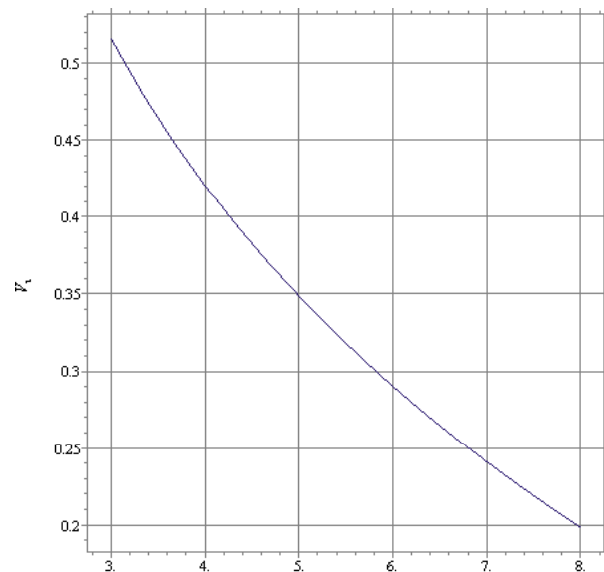
Ejemplo de conductores a carga constante



El potencial de cada conductor va cambiando:
 V_1 disminuye al disminuir d ; V_2 aumenta.



V_1 como función de d

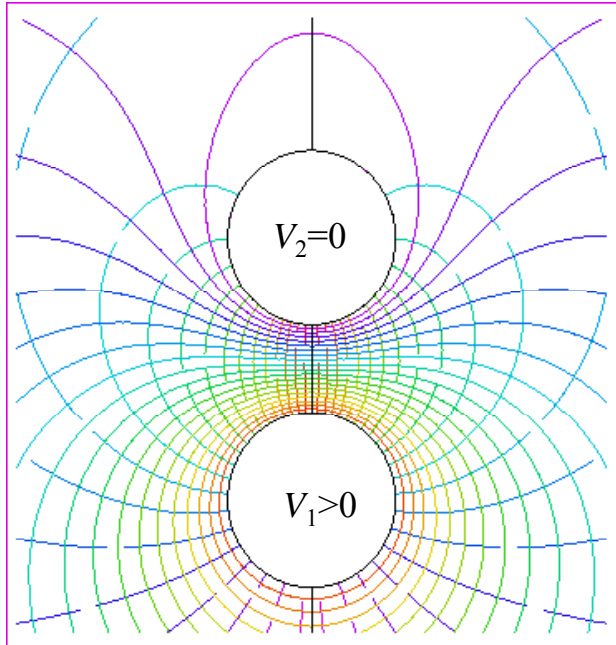


V_2 como función de d

© 2008, Antonio González Fernández

Ejemplo de conductores a potencial constante

A un conductor circular a potencial constante se acerca otro conductor puesto a tierra



© 2008, Antonio González Fernández

La distribución de campo cambia de forma diferente al caso de cargas constantes

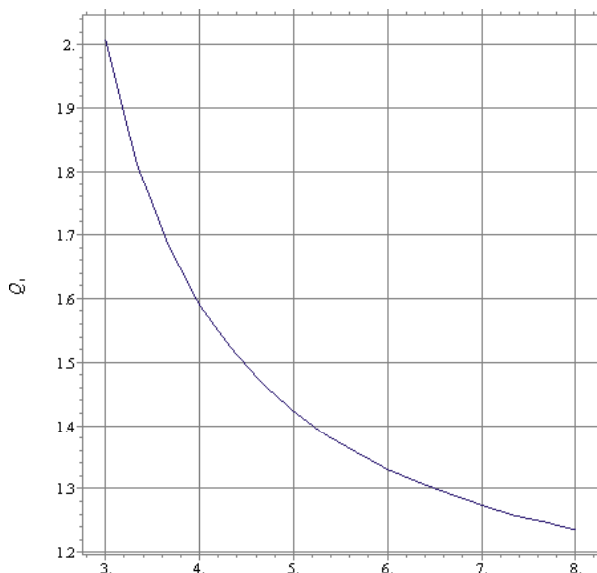
La carga del conductor 2 es siempre negativa.

$Q_2=0$ no implica $V_2=0$.

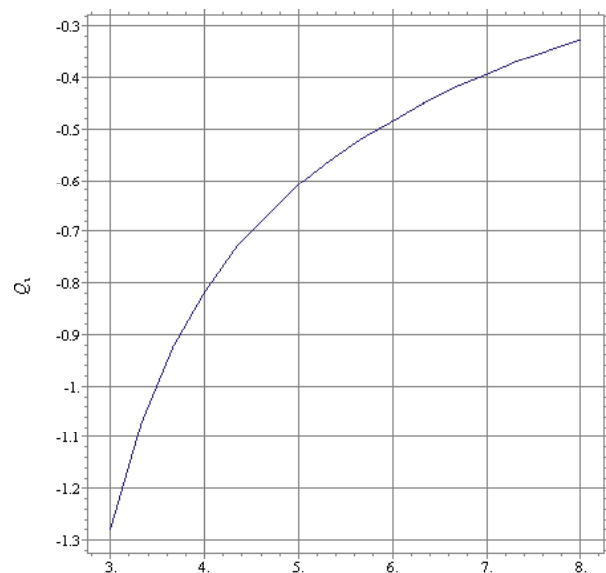
$V_2=0$ no implica $Q_2=0$.

Ejemplo de conductores a potencial constante

La carga de cada conductor va cambiando:
 Q_1 aumenta, Q_2 se hace más negativa al disminuir d .



Q_1 como función de d



Q_2 como función de d

© 2008, Antonio González Fernández

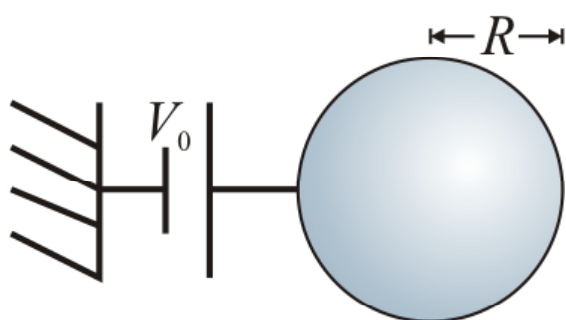
Teorema de unicidad para el problema del potencial



- El problema del potencial, cuando los diferentes conductores están a potencial constante o a carga constante, posee solución única.
- Ello permite emplear diferentes métodos o hipótesis para resolverlo.
- Dada una posible solución, sólo hay que verificar que se satisfacen la ecuación y las condiciones de contorno

© 2008, Antonio González Fernández

Ejemplo de una esfera conductora



- Sea una esfera metálica a potencial V_0 . No hay más carga ni más conductores en el sistema

- Debe resolverse la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (r > R) \quad \phi = V_0 \quad (r = R) \quad \phi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

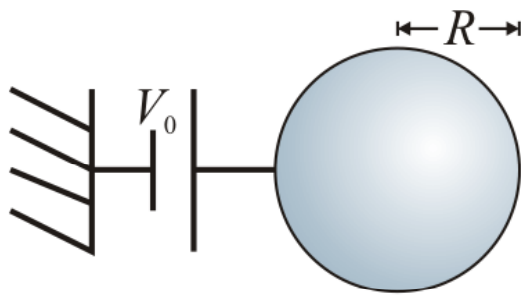
- Por la simetría del sistema, podemos suponer que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi(r)$$

siendo r la distancia al centro de la esfera

© 2008, Antonio González Fernández

Solución del potencial para una esfera conductora, con V conocido



- La ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) \right) = 0$$

- Integrando dos veces

$$\phi = A + \frac{B}{r}$$

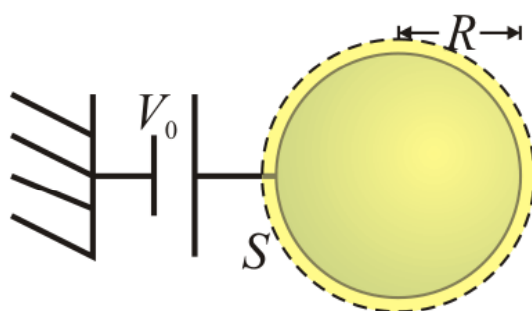
- Imponiendo las condiciones de contorno queda

$$\phi = \begin{cases} V_0 & (r < R) \\ \frac{V_0 R}{r} & (r > R) \end{cases} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi = \begin{cases} \mathbf{0} & (r < R) \\ \frac{V_0 R}{r^2} \mathbf{u}_r & (r > R) \end{cases}$$

- Resulta una distribución superficial uniforme de carga

$$\sigma_s = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}] = \epsilon_0 \mathbf{u}_r \cdot \left(\frac{V_0 R}{R^2} \mathbf{u}_r - \mathbf{0} \right) = \frac{\epsilon_0 V_0}{R}$$

¿Cómo se calcula la carga almacenada en la esfera?



- Si V está fijado, no podemos conocer la carga Q de antemano
- Una vez resuelto el problema del potencial sí podemos hallar Q ...

1. Empleando la ley de Gauss para una superficie que envuelva la esfera

$$\begin{aligned} Q &= \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \epsilon_0 \oint_S \frac{V_0 R}{r^2} dS = \\ &= 4\pi \epsilon_0 R V_0 \end{aligned}$$

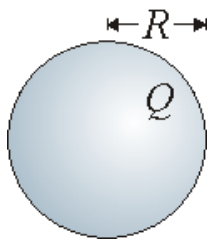
2. Calculando la densidad de carga superficial e integrando

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}] = \frac{\epsilon_0 V_0}{R} \\ Q &= \int \sigma_s dS = 4\pi \epsilon_0 R V_0 \end{aligned}$$

3. Comparando su comportamiento para $r \gg R$ con el desarrollo multipolar

$$\begin{aligned} \frac{V_0 R}{r} &\sim \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ \Rightarrow Q &= 4\pi \epsilon_0 R V_0 \end{aligned}$$

¿Y si lo que se conoce es la carga de la esfera?



- Por estar en equilibrio, su superficie es equipotencial
- **NO** hay que suponer nada sobre la distribución de la carga en la superficie
- Hay que suponer un potencial V , que se determinará más tarde

- Supuesto el potencial, la solución es idéntica a la anterior

$$\phi = \begin{cases} V & (r < R) \\ \frac{VR}{r} & (r > R) \end{cases}$$

$$Q = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon_0 RV$$

- Conocida la carga se halla el potencial

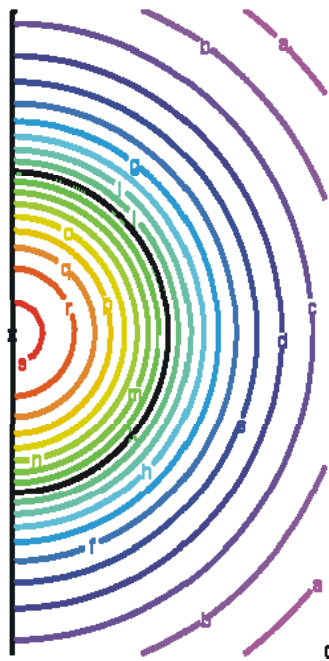
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow \phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R) \end{cases}$$

Comentarios sobre el caso de un solo conductor esférico

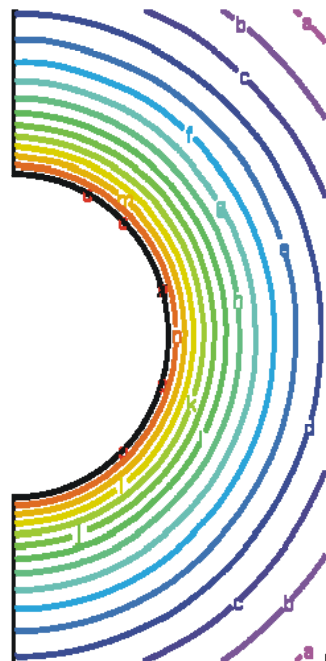


- Para un solo conductor esférico resulta una distribución de carga uniforme
 - Esto **NO** ocurre si hay más conductores o más cargas en el sistema
- Podemos comparar el caso de conductor esférico con carga Q y una esfera cargada en volumen con la misma carga
 - En el primer caso no hay campo en el interior. El volumen es equipotencial
 - En el segundo caso el volumen no es equipotencial y hay campo en el interior

Comparación de equipotenciales para una esfera cargada y un conductor cargado



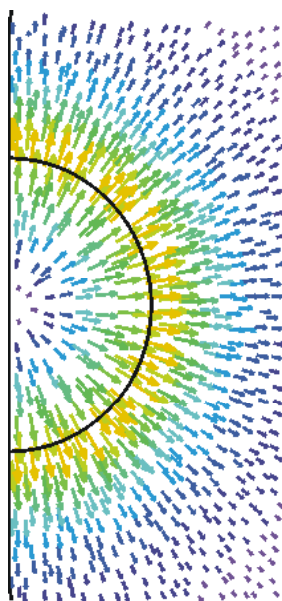
Esfera cargada en volumen



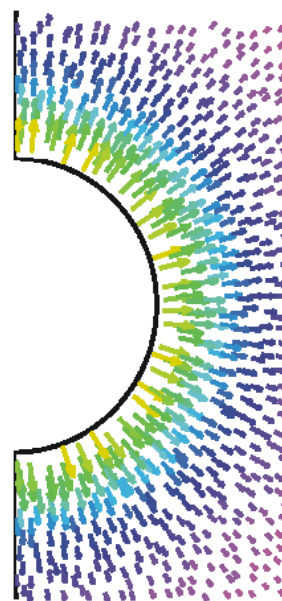
Esfera conductora cargada

Las figuras representan el potencial sobre un semiplano $\varphi = \text{cte}$.

Comparación del campo eléctrico para una esfera cargada y un conductor cargado



Esfera cargada en volumen

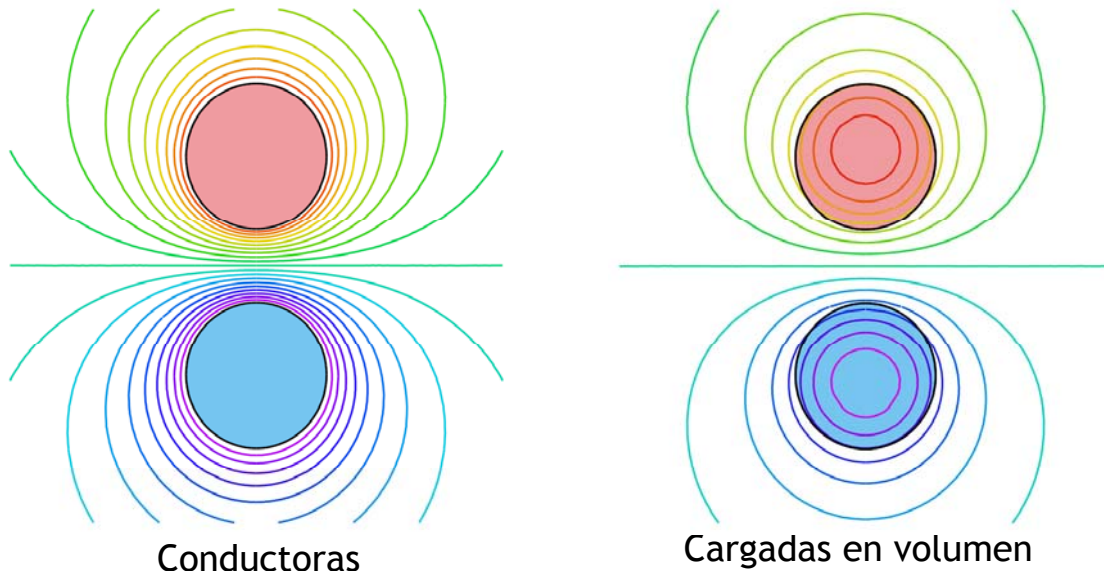


Esfera conductora cargada

Comparación de dos esferas conductoras con dos esferas cargadas en volumen



- Las diferencias entre volúmenes conductores y no conductores son más evidentes en el caso de que tengamos dos esferas a una cierta distancia, tanto si tienen cargas del mismo signo como si son de signo opuesto



© 2008, Antonio González Fernández

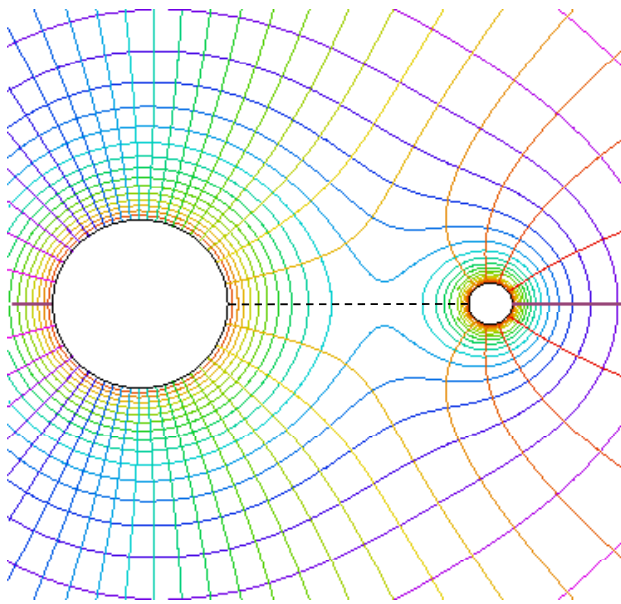
Efecto punta: incremento del campo en las puntas de los conductores



- Cuando se tiene un conductor cuya curvatura varía de un punto a otro, la densidad de carga tiende a ser mayor donde es mayor la curvatura
- Esta concentración del campo eléctrico es el principio del pararrayos:
 - Mayor densidad de carga implica mayor campo en la zona próxima
 - Si el campo es lo bastante intenso puede ionizar el aire de alrededor
 - Un medio ionizado conduce mejor la corriente eléctrica
 - Cuando cae el rayo sigue el camino de menor resistencia, impactando en el pararrayos
 - Esta corriente es luego desviada a tierra por un cable de conexión

© 2008, Antonio González Fernández

Ejemplo: potencial en dos esferas de distinto radio conectadas por un hilo



© 2008, Antonio González Fernández

El campo es más intenso cerca de la esfera pequeña (equipotenciales más próximas)

Si está alejadas y $R_1 > R_2$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &\approx 4\pi\epsilon_0 R_1 V_0 \\ Q_2 &\approx 4\pi\epsilon_0 R_2 V_0 \end{aligned} \right\} Q_1 > Q_2$$

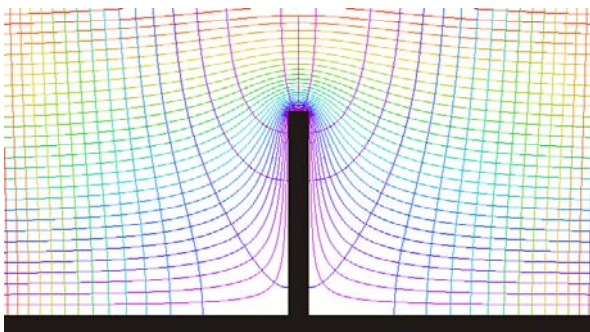
La densidad es mayor en la esfera pequeña

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_1} \\ \sigma_2 &= \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_2} \end{aligned} \right\} \sigma_1 < \sigma_2$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} < E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

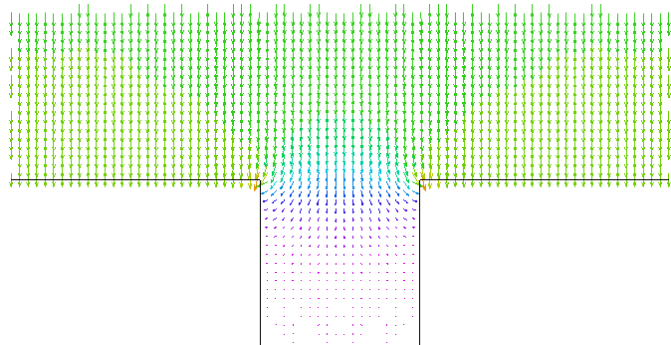
Ejemplo de un pararrayos en barra y de una zanja

El mismo principio se puede aplicar a una barra cilíndrica o a un hueco, aunque se necesite la solución numérica



© 2008, Antonio González Fernández

En el caso de una barra el campo se concentra en su extremo superior y a los lados de la barra

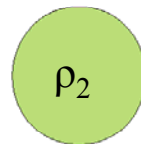
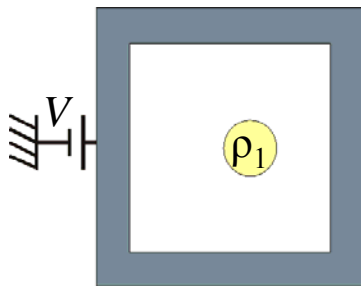


En el caso de un hueco o zanja, prácticamente no hay campo en el interior (lugar más seguro)

Apantallamiento y jaulas de Faraday



- Cuando tenemos un conductor con un hueco y el conductor está a potencial constante, se dice que tenemos una Jaula de Faraday

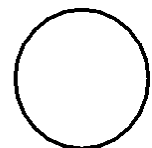
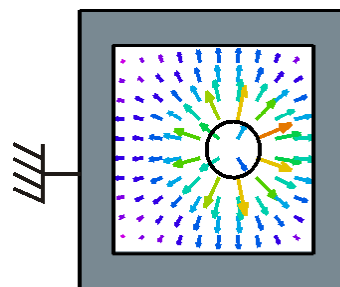
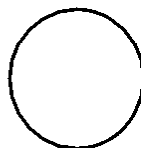
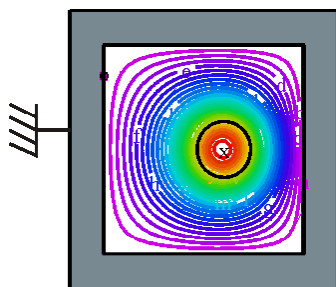


- Del mismo modo, el potencial fuera no depende de qué hay dentro del hueco

- Dado que el potencial queda determinado por su valor en la frontera de una región y la densidad de carga dentro, el potencial en el hueco no depende de qué hay fuera
- Los dos problemas están desacoplados

© 2008, Antonio González Fernández

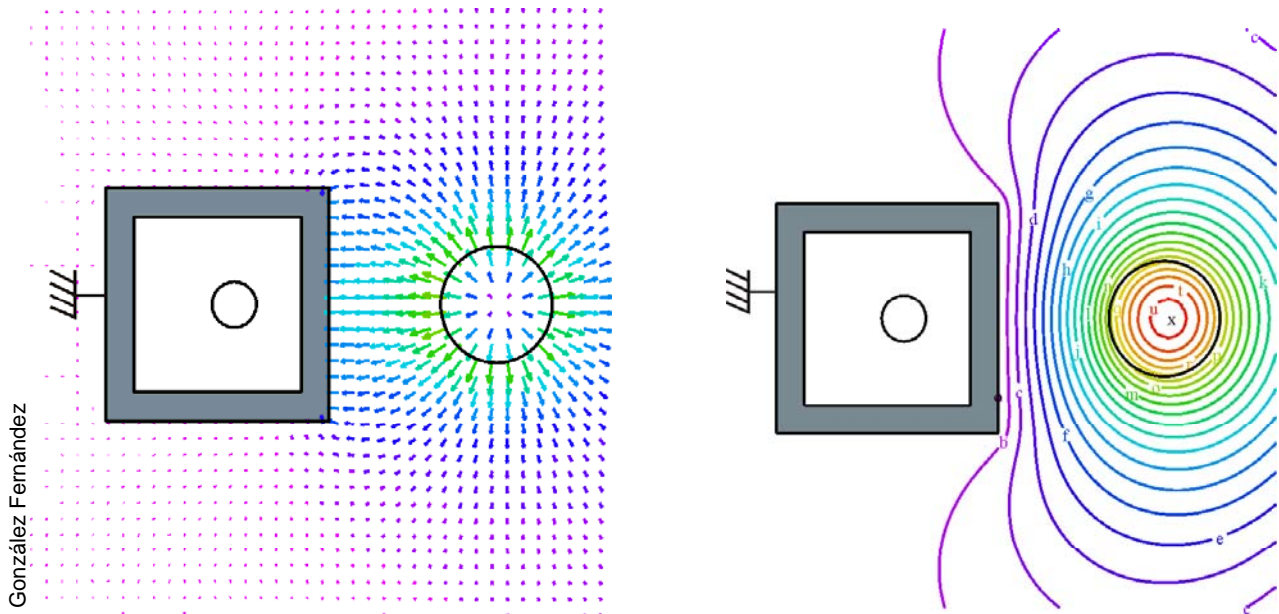
Conductor con densidades de carga interior: equipotenciales y campo



- Si la carga exterior es nula, el único campo es el interior al hueco. Todas las líneas de campo van a parar a la superficie interior del conductor.
- Dado que el campo en el material conductor es nulo, en la superficie del hueco hay la misma carga que en su interior, pero de signo contrario.

© 2008, Antonio González Fernández

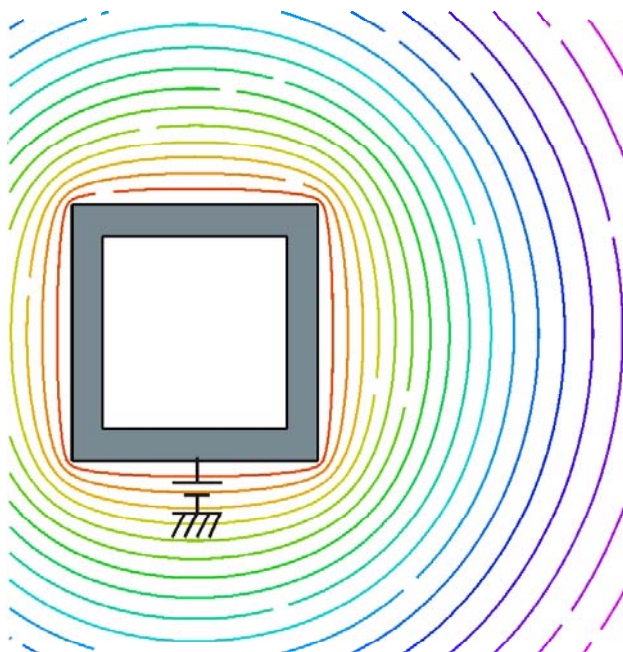
Conductor con densidades de carga exterior: equipotenciales y campo



© 2008, Antonio González Fernández

- Si la carga es exterior, no hay campo en el hueco
- El potencial en el hueco es nulo si el conductor está a tierra

Conductor hueco a potencial fijado

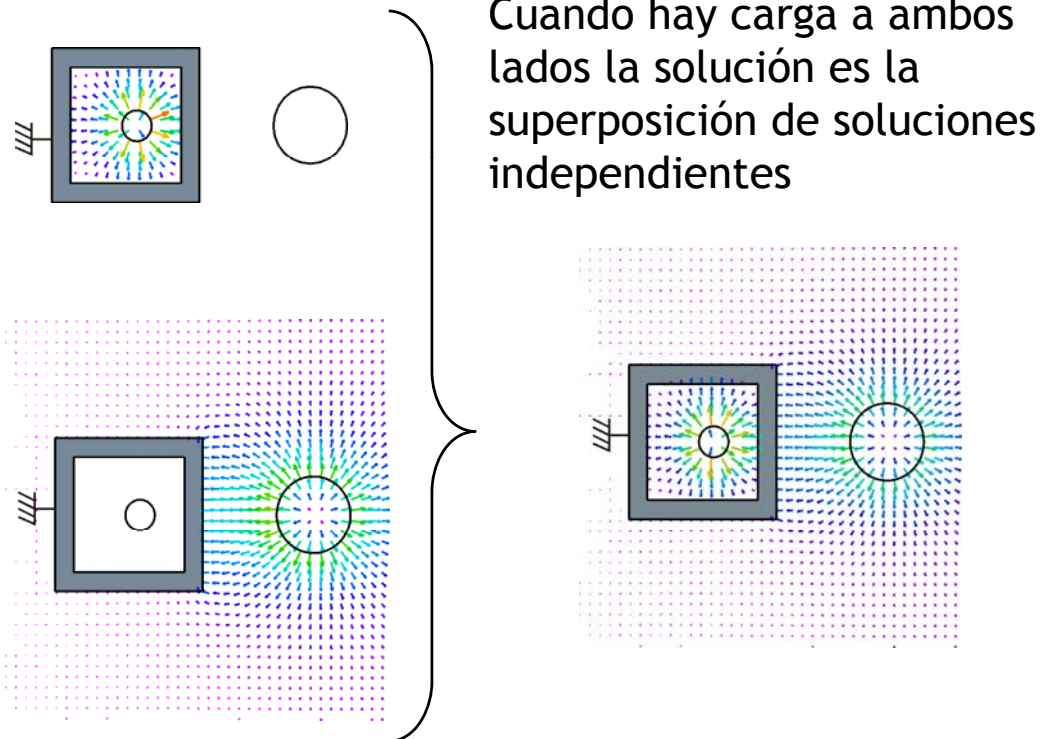


© 2008, Antonio González Fernández

Incluso cuando el conductor no está a tierra, sino a potencial fijado, el campo en un hueco vacío es nulo

Todos los puntos del hueco se encuentran al mismo potencial que el conductor

Conductor hueco con carga exterior e interior

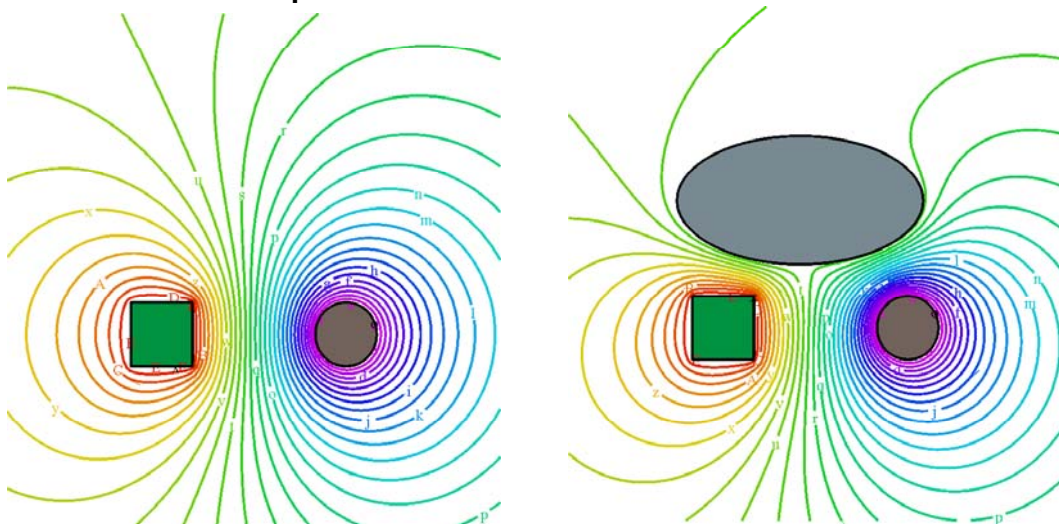


© 2008, Antonio González Fernández

El problema del potencial y el principio de superposición



En un sistema de conductores, la introducción de un conductor adicional (incluso descargado) modifica el campo de los conductores previos



© 2008, Antonio González Fernández

El campo total **NO** es la suma de los que crean cada conductor por separado, como si no estuvieran los demás

¿Puede aplicarse algún tipo de superposición al problema del potencial?

- La solución del problema del potencial sí puede escribirse como suma de soluciones
- El problema general consiste en resolver

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

suponiendo $\phi = V_k$ en cada superficie conductora S_k

- La solución es una combinación lineal de soluciones base

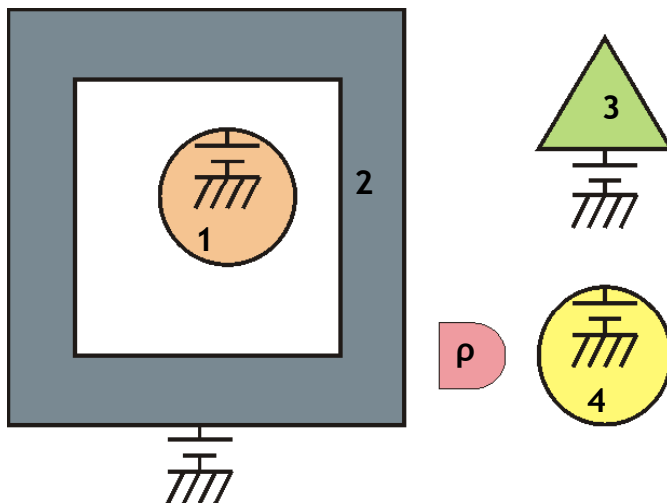
$$\phi = \phi_0 + \sum_k V_k \phi_k$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_0 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\mathbf{r} \in \tau) \\ \phi_0 &= 0 \quad (\mathbf{r} \in S_j) \end{aligned}$$

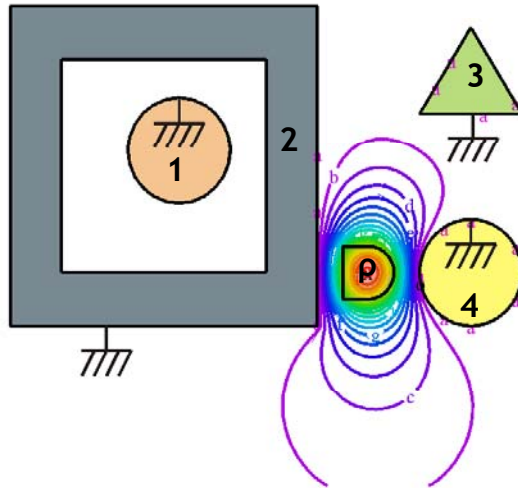
$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_k &= 0 \quad (\mathbf{r} \in \tau) \\ \phi_k &= 1 \quad (\mathbf{r} \in S_k) \quad \phi_k = 0 \quad (\mathbf{r} \in S_j, j \neq k) \end{aligned}$$

Ejemplo de superposición: Cuatro conductores y una carga.



- Para ilustrar el significado de la superposición de soluciones, veremos el ejemplo de cuatro conductores y una distribución uniforme de carga de forma irregular.

El término independiente: la función ϕ_0



- La función ϕ_0 verifica

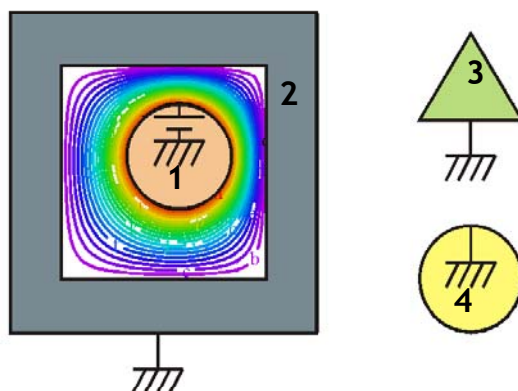
$$\nabla^2 \phi_0 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\mathbf{r} \in \tau)$$

$$\phi_0 = 0 \quad (\mathbf{r} \in S_k)$$

$$\phi_0 \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

- Esta es la distribución de potencial que habría si estuviera la carga frente a todos los conductores *puestos a tierra*, no la que habría si estuviera la carga y no los conductores.

Funciones base: la función ϕ_1



- La función ϕ_1 verifica

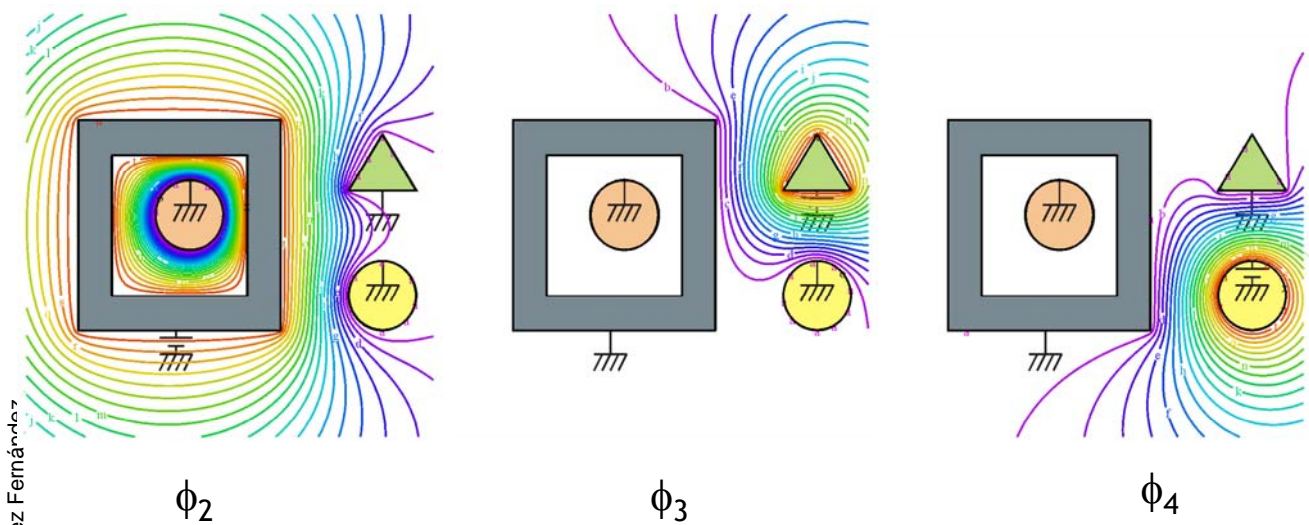
$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad (\mathbf{r} \in \tau)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 & (\mathbf{r} \in S_1) \\ \phi_1 = 0 & (\mathbf{r} \in S_k, k \neq 1) \\ \phi_1 \rightarrow 0 & (r \rightarrow \infty) \end{cases}$$

- Ésta es la distribución de potencial que habría si no hubiera carga, el conductor 1 estuviera a potencial unidad, y el resto a tierra

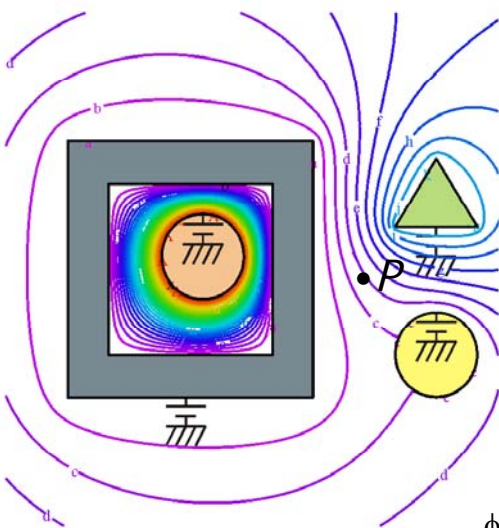
- Por estar en una jaula de Faraday, sólo hay campo en el hueco

Funciones base: las funciones ϕ_2 , ϕ_3 y ϕ_4



- Del mismo modo se pueden construir las funciones base ϕ_2 , ϕ_3 y ϕ_4 .
- Cada una de ellas es el potencial que habría si uno de los conductores estuviera a potencial y el resto a tierra.

Combinación lineal de funciones base. Ejemplo numérico



- Supongamos el caso particular
 - $\rho = 0$
 - $V_1 = 10 \text{ V}$
 - $V_2 = -3 \text{ V}$
 - $V_3 = 2 \text{ V}$
 - $V_4 = -2 \text{ V}$
- Queremos hallar el potencial en el punto P
- Combinando las funciones base

- El valor calculado numéricamente es $\phi(P) = -1.8123 \text{ V}$

$\phi_0 = 0.0000 \text{ V}$	0.0000 V
$\phi_1 = 0.0000$	$+10 \times 0.0000 \text{ V}$
$\phi_2 = 0.5927$	$-3 \times 0.5927 \text{ V}$
$\phi_3 = 0.2157$	$+2 \times 0.2157 \text{ V}$
$\phi_4 = 0.1866$	$-2 \times 0.1866 \text{ V}$
	<hr/>
	1.8363 V

La ventaja es que si cambiamos los V_k no hay que recalcular los ϕ_k

Un ejemplo analítico del problema del potencial: esferas concéntricas



- Dos esferas: una maciza de radio a y una fina corteza de radio b ($b > a$)
- Entre ellas y fuera se cumple la ecuación de Laplace

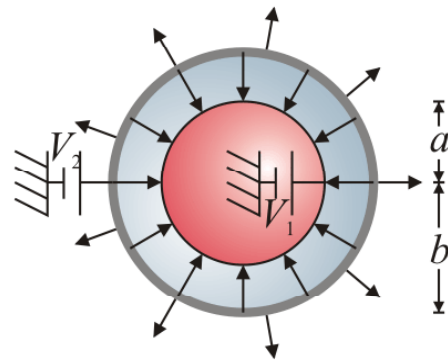
$$\nabla^2 \phi = 0$$

- Con las condiciones de contorno

$$\phi(r = a) = V_1 \quad \phi(r = b) = V_2$$

$$\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

- La corteza funciona como Jaula de Faraday



- El problema se separa en dos:
 - Uno entre $r = a$ y $r = b$
 - Otro para $r > b$
- Para $r < a$ la solución es trivial, $\phi = V_1$

Dos esferas concéntricas: solución del problema exterior

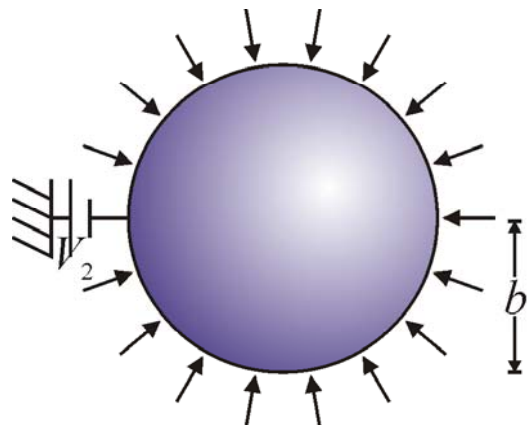


- Para $r > b$ tenemos la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

- Con las condiciones

$$\phi(r = b) = V_2 \quad \phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$



- Éste es exactamente el mismo problema que si tenemos una sola esfera de radio b puesta a potencial V_2
- La solución exterior es

$$\phi = \frac{V_2 b}{r} \quad (r > b)$$

- Esta solución no nos dice nada de qué ocurre *entre* las dos esferas

Dos esferas concéntricas: solución del problema interior

- Para $a < r < b$ tenemos la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

- Con las condiciones

$$\phi(r=a) = V_1 \quad \phi(r=b) = V_2$$

- Suponemos simetría de revolución, $\phi = \phi(r)$

- La solución es de la forma

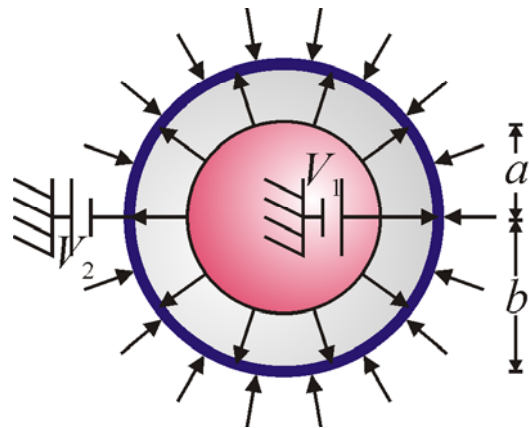
$$\phi = A + \frac{B}{r}$$

- Imponiendo las c.c.

$$V_1 = A + \frac{B}{a} \quad V_2 = A + \frac{B}{b}$$

- La solución interior es

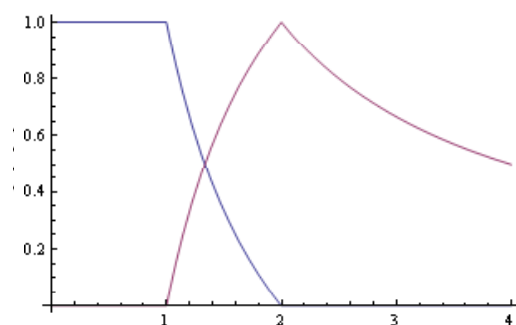
$$\phi = \frac{bV_2 - aV_1}{b-a} + \frac{ab(V_1 - V_2)}{(b-a)r}$$



Dos esferas concéntricas: solución completa

- Combinando los resultados

$$\phi = \begin{cases} V_1 & (r < a) \\ \frac{bV_2 - aV_1}{b-a} + \frac{ab(V_1 - V_2)}{(b-a)r} & (a < r < b) \\ \frac{V_2 b}{r} & (r > b) \end{cases}$$



- Esta solución se puede escribir como c.l. $\phi = V_1 \phi_1 + V_2 \phi_2$

$$\phi_1 = \begin{cases} 1 & (r < a) \\ \frac{ab}{b-a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{ab}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) & (a < r < b) \\ \frac{b}{r} & (r > b) \end{cases}$$

Cálculo de las funciones base por separado. Función ϕ_1



- Si $V_1 = V_0$, $V_2 = 0$
- Entre ellas y fuera se cumple la ecuación de Laplace, con las c.c.

$$\phi_1(r=a) = V_0 \quad \phi_1(r=b) = 0$$

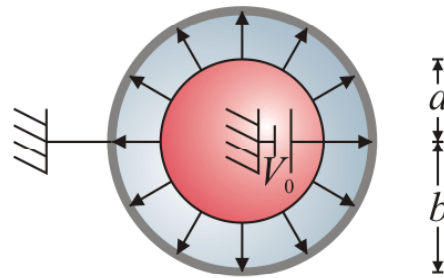
$$\phi_1(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

- En el exterior, el potencial es nulo.

$$\phi_1 = 0 \quad (r > b)$$

- En el interior es de la forma

$$\phi_1 = A + \frac{B}{r} \quad (a < r < b)$$



- Imponiendo las c.c.

$$V_0 = A + \frac{B}{a} \quad 0 = A + \frac{B}{b}$$

- Resulta

$$\phi_1 = \frac{V_0 ab}{b-a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \quad (a < r < b)$$

Cálculo de las funciones base por separado. Función ϕ_2



- Si $V_1 = 0$, $V_2 = V_0$, entre ellas y fuera se cumple la ecuación de Laplace, con las c.c.

$$\phi_2(r=a) = 0 \quad \phi_2(r=b) = V_0$$

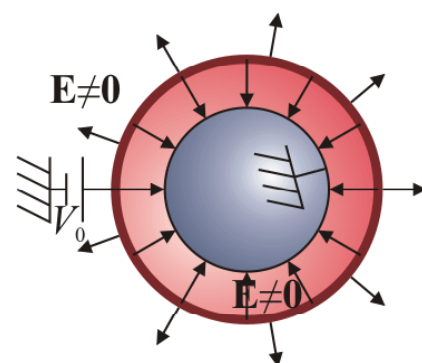
$$\phi_2(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

- En el exterior, es como el de una sola esfera.

$$\phi_2 = \frac{V_0 b}{r} \quad (r > b)$$

- Entre las dos, es de la forma

$$\phi_2 = A + \frac{B}{r} \quad (a < r < b)$$



- Imponiendo las c.c.

$$0 = A + \frac{B}{a} \quad V_0 = A + \frac{B}{b}$$

- Resulta

$$\phi_2 = \frac{V_0 ab}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \quad (a < r < b)$$

Apéndice: Listado de algunos programas



- Todas las gráficas de esta presentación han sido obtenidas con FlexPDE 5, un programa para la solución de ecuaciones diferenciales por el método de elementos finitos (www.pdesolutions.com).
- A continuación se incluyen algunos de los listados, que puede ser de interés para los que vayan a usar este programa.

© 2008, Antonio González Fernández

Una esfera conductora



```
TITLE 'Una esfera conductora '
COORDINATES
  Ycylinder {Hace que sea un sistema de
    revolucion}
SELECT {Fija la precision}
  errlim=1e-5
VARIABLES
  phi {Potencial electrico}
DEFINITIONS {Parametros}
  Rext=10 {Radio de la esfera exterior}
  a=1 {Radio de la esfera conductora}
  V=1 {Voltaje de la esfera}
  Q = Sintegral(normal(grad(phi)), "Esfera")
    {Carga de la esfera}
EQUATIONS
  phi: div(grad(phi))=0 {Ecuacion de Laplace}
BOUNDARIES {Frontera}
  REGION 1 {Todo el contorno}
    START(0,-Rext) {Abajo del todo}
    value(phi)=0 {El potencial se anula en el
      "infinito"}
    arc(center=0,0) to (Rext,0) to (0,Rext)
    natural(phi)=0 {El eje es una linea de campo}
    line to (0,a)
    value(phi)=V {Voltaje de la esfera}
    arc(center=0,0) to (a,0) to (0,-a)
    natural(phi)=0 {El eje es una linea de campo}
    line to close
```

```
FEATURE 2 {La superficie de la esfera cargada}
  start "Esfera"(0,a)
  arc(center=0,0) to (a,0) to (0,-a)

PLOTS
  grid(r,z) zoom(-2*a,-2*a,4*a,4*a)
  contour(phi) zoom(-2*a,-2*a,4*a,4*a) as
    "Equipotenciales"
  report(V) {Informa del potencial y de la
    carga}
  report(Q)
  vector(-grad(phi)) zoom(-2*a,-2*a,4*a,4*a) as
    "Campo electrico"
  report(V) {Informa del potencial y de la
    carga}
  report(Q)
END
```

© 2008, Antonio González Fernández

Una esfera cargada



© 2008, Antonio González Fernández

```
TITLE 'Una esfera cargada '
COORDINATES
    Ycylinder      {Hace que sea un sistema con
                    simetria de revolucion}
SELECT            {Criterio para fijar la precision}
    errlim=1e-4
VARIABLES
    phi            {Potencial electrico}
DEFINITIONS      {Parametros}
    Rext=10        {Radio de la circunferencia
                    exterior}
    a=1            {Radio de la esfera}
    rho=0          {Densidad de carga en general}
    rho1=1         {Densidad de carga en la esfera}
EQUATIONS
    div(grad(phi))=-rho {Ecuacion de Poisson en
                        unidades adecuadas}
BOUNDARIES       {Frontera}
REGION 1         {El dominio completo}
    START(0,-Rext) {Comenzamos abajo del todo}
    value(phi)=0   {En el "infinito" el potencial
                    es cero}
    arc(center=0,0) to (Rext,0) to (0,Rext)
    {Circunferencia exterior}
    natural(phi)=0 {Esto implica que el eje Z es
                    una linea de campo}
    line to close
```

```
region 2          {La esfera cargada}
    rho=rho1      {Lo que vale la densidad en la
                    esfera}
    start(0,-a)
    arc(center=0,0) to (a,0) to (0,a)
    line to close

PLOTS             {Graficas}
    grid(r,z) zoom(-2*a,-2*a,4*a,4*a) {Malla}
    contour(phi) zoom(-2*a,-2*a,4*a,4*a) as
    "Equipotenciales"
    vector(-grad(phi)) zoom(-2*a,-2*a,4*a,4*a) as
    "Campo electrico"
    elevation(phi,-Dr(phi)) from (0,0) to (3*a,0)
    {Variacion del potencial y el campo con r}

END
```

Cuatro conductores y una distribución de carga (I)



© 2008, Antonio González Fernández

```
TITLE '4 Conductores '
SELECT
    errlim=1e-5 {Precisión}
VARIABLES
    u {Potencial eléctrico}
DEFINITIONS
{Fuentes}
    rho1=0 {Densidad de carga uniforme en la
            mancha}
    rho=0
    V1=0 {Potencial del círculo interior}
    V2=-3 {Cuadrado}
    V3=2 {Triángulo}
    V4=-2 {Círculo exterior}
{Dimensiones}
    Rext=15 {distancia al "infinito"}
    xc=.3 {Centro de la esfera interior}
    yc=.3
    xr=0 {Posición de la carga}
    yr=-2
    phi = VAL(u,0,0)
EQUATIONS
    div(grad(u))=-rho {Ecuación de Poisson con
                        eps0=1}
```

```
BOUNDARIES
REGION 1
    START "Exterior" (Rext,0) {Circunferencia
    del infinito}
    value(u)=0 {El
    potencial se anula en el infinito}
    arc(center=0,0) to (0,Rext) to (-Rext,0) to
    (0,-Rext) to close

    start "Conductor 3" (1,1) {Triángulo}
    value(u)=V3
    {Potencial igual a V3}
    line to (2, 2.6) to(3,1) to close

    start "Conductor 4" (2,-1) {Círculo
    exterior}
    value(u)=V4
    arc (center=2,-2) to (3,-2) to (2,-3) to (1,-
    2) to finish

    start "Conductor 2 ext" (-1,-3) {Borde de
    fuera del cuadrado}
    value(u)=V2
    line to (-7,-3) to (-7,3) to (-1,3) to close

    start "Conductor 2 int" (-2,2) {Borde de
    dentro}
    value(u)=V2
    line to (-6,2) to (-6,-2) to (-2,-2) to close
```

Cuatro conductores y una distribución de carga (II)



```
start "Conductor 1" (-3+xc,0+yc) {Círculo
interio}
value(u)=V1
arc(center=-4+xc,0+yc) to (-4+xc,-1+yc)
to (-5+xc,yc) to (-4+xc,1+yc) to close

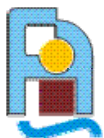
Region 2 {Región cargada}
rho=rho1 {Densidad uniforme de
carga}
start "Carga" (xr,-0.5+yr)
arc(center = xr,yr) to (0.5+xr,+yr) to
(0+xr,0.5+yr)
line to (xr-0.5,yr+0.5) to (xr-0.5,yr-0.5) to
close

PLOTS { save result displays }
grid(x,y) zoom(-8.5,-6,12,12) {Malla, con
los conductores}
contour(u) zoom(-8.5,-6,12,12) {Curvas de
potencial}
report(V1) as "V1" {Valores
de los potenciales}
report(V2) as "V2"
report(V3) as "V3"
report(V4) as "V4"
report(rho1) as "rho"
report(phi) as "phi"
```

```
contour(u) zoom(-8.5,-6,12,12) painted {Curvas
de potencial rellenas}
report(V1) as "V1" {Valores
de los potenciales}
report(V2) as "V2"
report(V3) as "V3"
report(V4) as "V4"
report(rho1) as "rho"
vector(-grad(u)) zoom(-8.5,-6,12,12) {Campo
eléctrico}
report(sintegral(normal(grad(u)), "Conductor
1")) as "Q1" {Cargas en cada conductor}
report(sintegral(normal(grad(u)), "Conductor
2 ext")+sintegral(normal(grad(u)), "Conductor
2 int")) as "Q2"
report(sintegral(normal(grad(u)), "Conductor
3")) as "Q3"
report(sintegral(normal(grad(u)), "Conductor
4")) as "Q4"

END
```

© 2008, Antonio González Fernández



Sevilla, diciembre de 2008