

## Capítulo 2

# Introducción a la Electrostatica

### 2.1. Aspectos básicos

Observaciones de la electrización de los cuerpos se han hecho desde tiempos muy antiguos<sup>1</sup>. Por ejemplo, el frotamiento entre dos cuerpos provoca un cambio en las propiedades de estos: *se cargan*. Este experimento sirve para introducir un concepto muy importante: *la carga eléctrica*. Pero la carga en sí no se crea en el proceso. La carga total, es decir la suma de las cargas de los dos cuerpos es la misma que antes de la electrización. Lo que realmente ocurre es que hay un traspaso de electrones de un cuerpo a otro. En adelante denotaremos la carga eléctrica con el simbolo  $q$ .

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de las partículas elementales. De hecho, la materia está compuesta básicamente de electrones (carga negativa), protones (carga positiva), y neutrones (sin carga), y por lo tanto, a cada cuerpo le podemos asociar una *carga eléctrica neta* que es igual a la suma algebraica de las cargas negativas y positivas que el cuerpo contiene. Así, si el cuerpo tiene exceso de electrones se dice que el cuerpo está cargado negativamente, y si tiene exceso de protones decmos que el cuerpo está cargado positivamente. Si la suma de las cargas es cero, se dice que el cuerpo está electricamente neutro.

Es un hecho comprobado que la carga eléctrica se conserva en un sistema aislado, lo cual nos permite enunciar el principio de conservación de la carga:

*No se puede crear ni destruir la carga, sólo se puede separar las cargas positivas y negativas.*

---

<sup>1</sup>Los griegos conocían los efectos de frotar *ámbar* con otros cuerpos

Desde el punto del análisis se hace necesario introducir el concepto de carga puntual:

**Definición:** La *carga puntual* es la carga contenida en un cuerpo de dimensión muy pequeña en comparación con las dimensiones de los otros cuerpos y distancias consideradas.

De acuerdo a esta definición, podemos decir que el concepto de carga puntual es un concepto relativo.

Existen tres formas básicas para electrizar los cuerpos: *frotación*, *inducción* y *contacto*. Veamos un poco en detalle estos fenómenos eléctricos.

**Electrización por frotación.** La electrización por frotación se explica del siguiente modo. Consideremos que frotamos una barra de ámbar en un paño de lana. Por efecto de la fricción, los electrones externos de los átomos del paño de lana son liberados y cedidos a la barra de ámbar, con lo cual ésta queda cargada negativamente y aquél positivamente. En términos análogos puede explicarse la electrización del vidrio por la seda. En cualquiera de estos fenómenos se pierden o se ganan electrones, pero el número de electrones cedidos por uno de los cuerpos en contacto es igual al número de electrones aceptado por el otro, de ahí que en conjunto no hay producción ni destrucción de carga eléctrica. Esta es la explicación, desde la teoría atómica, del principio de conservación de la carga eléctrica formulado por Franklin con anterioridad a dicha teoría sobre la base de observaciones sencillas.

**Electrización por inducción.** La electrización por inducción es un efecto de las fuerzas eléctricas. Debido a que éstas se ejercen a distancia, un cuerpo cargado positivamente en las proximidades de otro neutro atraerá hacia sí a las cargas negativas, con lo que la región próxima queda cargada negativamente. Si el cuerpo cargado es negativo entonces el efecto de repulsión sobre los electrones atómicos convertirá esa zona en positiva. En ambos casos, la separación de cargas inducida por las fuerzas eléctricas es transitoria y desaparece cuando el agente responsable se aleja suficientemente del cuerpo neutro.

**Electrización por contacto.** La electrización por contacto es considerada como la consecuencia de un flujo de cargas negativas de un cuerpo a otro. Si el cuerpo cargado es positivo es porque sus correspondientes átomos poseen un déficit de electrones, que se verá en parte compensado por la aportación del cuerpo neutro cuando ambos entran en contacto. El resultado final es que el cuerpo cargado se hace menos positivo y el neutro adquiere carga eléctrica positiva. Aun cuando en realidad se hayan transferido



electrones del cuerpo neutro al cargado positivamente, todo sucede como si el segundo hubiese cedido parte de su carga positiva al primero. En el caso de que el cuerpo cargado inicialmente sea negativo, la transferencia de carga negativa de uno a otro corresponde, en este caso, a una cesión de electrones.

## 2.2. Ley de Coulomb

Charles A. de Coulomb (1736 - 1806) estableció, a partir de observaciones experimentales de las fuerzas de interacción entre cargas puntuales, los siguientes resultados:

- a).- Hay dos, y sólo dos clases de carga eléctrica, conocidas ahora como positiva y negativa.
- b).- La fuerza de interacción entre dos cargas actúa sobre la línea que las une y su magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre ellas.
- c).- Estas fuerzas son proporcionales al producto de las cargas; son repulsivas para cargas de igual signo y atractiva para cargas de signo contrario.

Estos resultados los podemos resumir como

$$|\vec{F}| \propto \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2},$$

donde  $r_{12}$  es la distancia de separación entre  $q_1$  y  $q_2$ . Esta última relación la podemos escribir como una igualdad incluyendo una constante de proporcionalidad,  $C$ ,

$$|\vec{F}| = C \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2},$$

la cual depende del sistema de unidades usado. En el sistema *Gaussiano*,  $C = 1$ , pero se debe ajustar el valor de la carga con el fin de que el valor de  $|\vec{F}|$  concuerde con los experimentos. En 1901, Giorgi demostró que todas las unidades eléctricas comunes, tales como *Ampere* ( $[A]$ ), *Coulomb* ( $[c]$ ), *Ohm* ( $[\Omega]$ ), etcétera, se pueden combinar con uno de los sistemas mecánicos (MKS). Este sistema de unidades se llama sistema MKSA o MKS *racionalizado*. En este sistema la constante de proporcionalidad vale

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

donde  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} [\frac{c^2}{Nm^2}]$ , es la permitividad eléctrica del vacío. Finalmente, planteamos la ley de Coulomb en su forma vectorial (ver Fig.2.1)

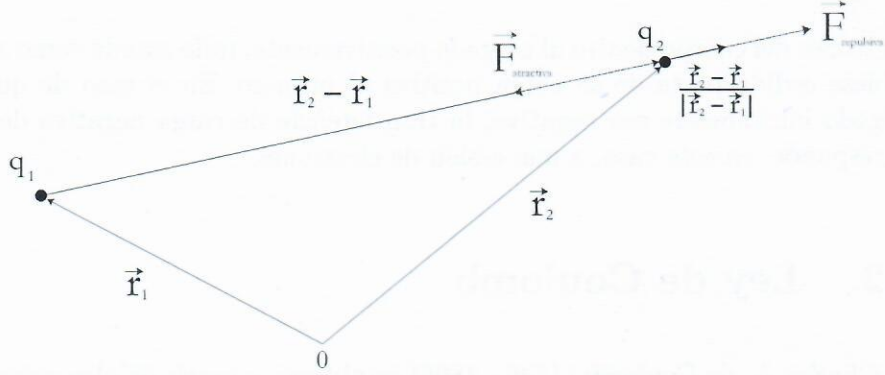


Figura 2.1:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.1)$$

Notemos que en esta ecuación las cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  intervienen con sus respectivos signos. Si  $q_1$  y  $q_2$  son del mismo signo, la fuerza  $\vec{F}$  tiene el sentido de  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ , es decir, es del tipo *repulsiva*; y si  $q_1$  y  $q_2$  son de signo contrario, la fuerza  $\vec{F}$  tiene el sentido de  $-(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ , es decir, es del tipo *atractiva*.

### 2.3. principio de superposición

El principio de superposición establece que: *la fuerza que actúa sobre una partícula puntual  $q$ , debido a un sistema discreto de  $n$  cargas puntuales,  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ , es igual a la suma vectorial de las fuerzas  $\vec{F}_i$  que, independientemente cada carga  $q_i$  ejerce sobre  $q$ , es decir,*

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \text{donde} \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i),$$

y por lo tanto,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.2)$$

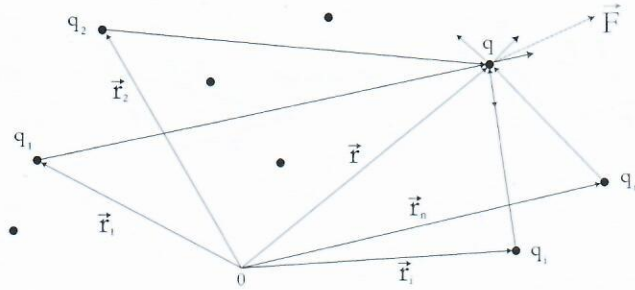


Figura 2.2: Principio de superposición

Una generalización del principio de superposición nos permite considerar la interacción entre una distribución continua de cargas y una carga puntual. Toda distribución macroscópica de cargas eléctricas contiene un número muy grande de cargas elementales. Podemos proceder como si el elemento de carga es subdividido infinitamente y de esta forma describir las distribuciones macroscópicas de cargas en términos de funciones continuas de punto, llamadas *densidades de carga*. Podemos definir las siguientes funciones:

1. *Densidad lineal de cargas*  $\lambda$ : Si tenemos la carga distribuida en alguna curva  $\zeta$ , cuyo elemento de línea es  $d\ell$ , entonces

$$\lambda = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\ell} = \frac{dq}{d\ell}. \quad (2.3)$$

2. *Densidad superficial de cargas*  $\sigma$ : Si la carga está distribuida en alguna superficie  $S$ , cuyo elemento de superficie es  $da$ , entonces

$$\sigma = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta a} = \frac{dq}{da}. \quad (2.4)$$

3. *Densidad volumétrica de cargas*  $\rho$ : Para la carga distribuida en una volumen  $V$ , cuyo elemento de volumen es  $dv$ , tenemos que

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}. \quad (2.5)$$

De esta forma, la fuerza entre una distribución continua de cargas y una carga puntual  $q$ , es

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.6)$$



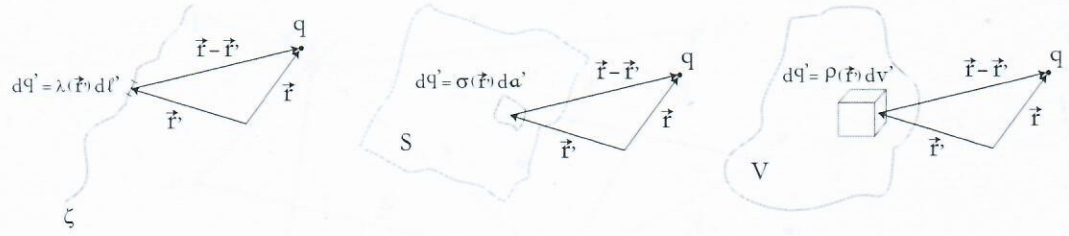


Figura 2.3: Distribuciones continuas de carga.

donde  $\Sigma$  es la variedad diferencial en la cual esta distribuida la carga. Así, si la variedad es una curva  $\zeta$  en el espacio, se tiene que  $dq' = \lambda(\vec{r}') dl'$ ; por otro lado, si la variedad es una superficie  $S$ , tenemos que  $dq' = \sigma(\vec{r}') da'$ ; finalmente, si la variedad es un volumen  $V$ , tenemos que  $dq' = \rho(\vec{r}') dv'$ , ver FIG.2.3.

## 2.4. Campo Eléctrico

El campo eléctrico en un punto del espacio es la razón entre la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga puntual  $q$  en reposo en el punto, y el valor de la carga, es decir,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}. \quad (2.7)$$

La necesidad de introducir el límite en esta definición es debido a que una carga lo suficientemente grande puede afectar la configuración inicial, y de esta forma el campo eléctrico ya no es el mismo que se tenía inicialmente. La unidad de campo eléctrico en el sistema MKSA es

$$[\vec{E}] = \left[ \frac{N}{C} \right] = \left[ \frac{V}{m} \right],$$

donde  $[N]$ : Newton,  $[C]$ : Coulomb,  $[V]$ : Volt, y  $[m]$ : metro. Para distribuciones discretas de cargas tenemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (2.8)$$

mientras que para distribuciones continuas se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.9)$$

Con el objetivo de visualizar la estructura del campo eléctrico asociado a una distribución de cargas, se introducen la *líneas de fuerza* (que son normales a las *curvas de nivel*), las cuales son líneas imaginarias tangentes a la dirección del campo eléctrico.

### 2.4.1. Campo Eléctrico de una carga puntual

Este es un caso particular de una distribución discreta con  $n = 1$ , de tal forma que su campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1). \quad (2.10)$$

Si por simplicidad escogemos el origen de coordenadas en la posición de la carga ( $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{0}$ ), y hacemos  $q_1 \rightarrow q$ , esta última expresión queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.11)$$

Notemos que el sentido del campo eléctrico depende exclusivamente del signo de la carga puntual  $q$ , como es mostrado en la FIG.2.4.

### 2.4.2. Campo eléctrico para dos cargas puntuales

El campo eléctrico en un punto  $\vec{r}$  generado por dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  ( $n = 2$ ), las cuales están ubicadas en los puntos  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , respectivamente, es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2) \right]. \quad (2.12)$$

Este caso tiene un importante aplicación que veremos a continuación.

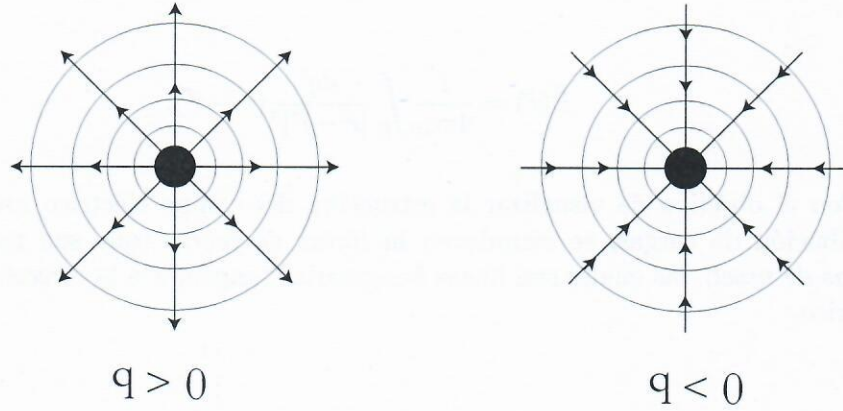


Figura 2.4: Líneas de campo eléctrico para una carga puntual  $q$ ; si  $q > 0$ , las líneas de campo *salen* de  $q$ ; y si  $q < 0$  las líneas de campo *entran* a  $q$ .

### Campo eléctrico para un dipolo eléctrico puntual

El sistema compuesto por dos cargas puntuales de igual magnitud, pero de signo contrario,  $q_1 = -q_2 = q$ , separados por una pequeña distancia,  $d$ , forman lo que se conoce por *dipolo eléctrico puntual*. De esta forma, y partir de la ecuación (2.12), se tiene que el campo eléctrico en un punto determinado por el vector posición  $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{d})}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{d}|^3} - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]. \quad (2.13)$$

Esta situación es mostrada en la FIG.2.5, en donde el campo eléctrico generado por el dipolo es determinado en un punto  $p$  que se encuentra muy alejado en comparación con la separación entre las cargas ( $d \ll r$ ). Así, haciendo uso del teorema del binomio, y despreciando términos de segundo orden, tenemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]. \quad (2.14)$$

Obviamente, existen más contribuciones al campo eléctrico debido a los términos de orden superior en  $\vec{d}$ , sin embargo, cuando  $|\vec{d}| \ll |\vec{r} - \vec{r}'|$ , estas contribuciones se hacen más pequeñas. Ahora, definiendo el *dipolo puntual* por medio de la ecuación

$$\vec{p} = \lim_{d \rightarrow 0} q \vec{d}, \quad (2.15)$$



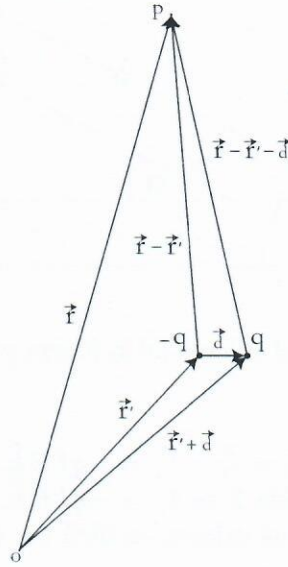


Figura 2.5: Esquema de un dipolo eléctrico puntual.

el campo eléctrico del dipolo eléctrico queda finalmente escrito como

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') \right]. \quad (2.16)$$

### Fuerza y torque sobre un dipolo eléctrico.

Queremos estudiar el efecto de un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico externo uniforme  $\vec{E}$ , como el mostrado en la figura 2.6. Para este sistema, la fuerza total que actúa es

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}. \quad (2.17)$$

Para calcular el torque, lo hacemos respecto al punto medio, de forma que podemos escribir

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^2 \vec{\tau}_i. \quad (2.18)$$

Respecto a este, el brazo de palanca de cada carga puntual es  $l_j \equiv |\vec{l}_j| = (d/2) \sin \alpha$ , con  $j = 1, 2$  (ver figura 2.6). Así, para la partícula 1 tenemos que  $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$  y

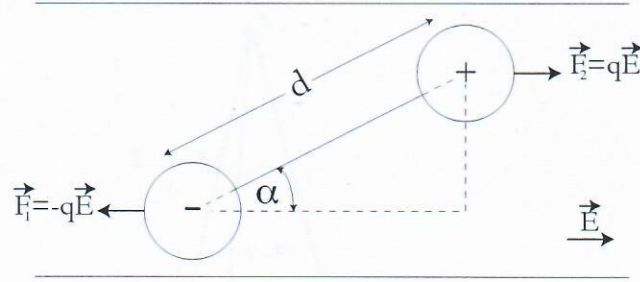


Figura 2.6: Esquema para el cálculo de la fuerza y el torque sobre un dipolo eléctrico.

$\vec{l}_1 = -l\hat{j}$ , y el torque es  $\vec{\tau}_1 = \vec{l}_1 \times \vec{F}_1 = -qlE\hat{k}$ . De manera análoga, se demuestra que el torque de la partícula 2 es  $\vec{\tau}_2 = -qlE\hat{k}$ . Sumando ambas contribuciones y reemplazando los respectivos valores, es fácil ver que

$$\vec{\tau} = -2qlE\hat{k} = -qdE \sin \alpha \hat{k}. \quad (2.19)$$

Ya que, por definición, el momento dipolar es  $p = qd$ , la última expresión se convierte en  $\vec{\tau} = -pE \sin \alpha \hat{k}$ . Finalmente, considerando que  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$  pertenecen al mismo plano  $XY$ , podemos expresar de forma general

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (2.20)$$

### 2.4.3. Campo eléctrico para un hilo recto con densidad lineal de cargas constante de largo finito

Vamos a utilizar la técnica del cálculo directo para determinar el campo eléctrico debido a un hilo recto de largo finito cuya densidad lineal de cargas es constante, es decir,  $\lambda(\vec{r}) = \lambda_0 = \text{constante}$ . Para realizar esto, consideremos la figura 2.7, en la cual el punto donde calculamos el campo se encuentra a una distancia perpendicular  $a$  del hilo y cuyos extremos, en relación al dicho punto, está especificado por los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . En este caso, el elemento de línea es  $d\vec{\ell} = dx\hat{i}$ , de manera que  $dq' = \lambda dx'$ . También  $\vec{r}' = x'\hat{i}$ ,  $\vec{r} = a\hat{j}$ , y así  $\vec{r} - \vec{r}' = a\hat{j} - x'\hat{i}$ . Reemplazando esto en la ecuación (2.9), tenemos que

$$\vec{E}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx'}{(a^2 + x'^2)^{3/2}} (a\hat{j} - x'\hat{i}). \quad (2.21)$$

Resulta instructivo, basado en la misma figura, realizar el siguiente cambio de variable:

$$x' = a \cot \theta, \quad dx' = -a \csc^2 \theta d\theta, \quad (2.22)$$