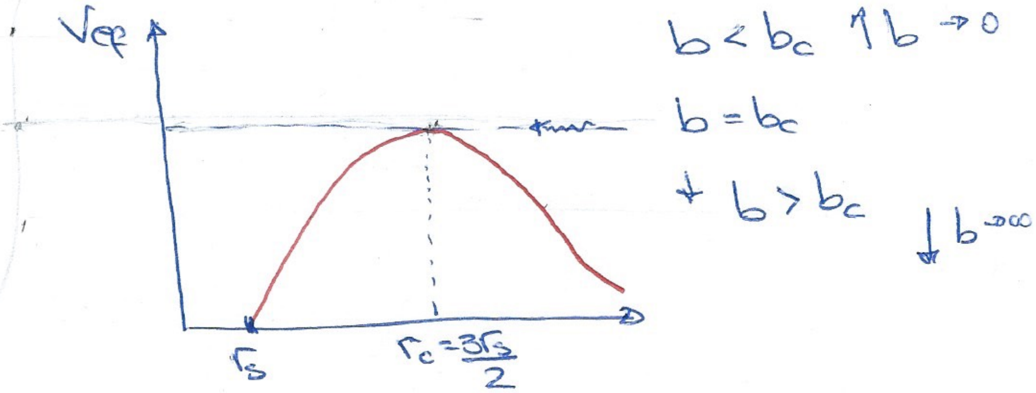
I.b: Movimiento angular ($L \neq 0$)

$$V_{ef}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}$$



I.b.1: Trayectorias críticas: Estas órbitas inestables se encuentran a la distancia r_c de la singularidad donde $r_c = \frac{3r_s}{2} = 3M$

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{L}{r^2}\sqrt{E^2 - V_{ef}(r)}$$

$$* \quad E^2 - V_{ef}(r) = E^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} =$$

$$= E^2 - \frac{L^2}{r^2} + \frac{r_s L^2}{r^3} = \frac{E^2 r^3 - L^2 r + r_s L^2}{r^3}$$

$$E^2 - V_{ef}(r) = \frac{P_3(r)}{r^3}, \text{ donde}$$

$$\boxed{P_3(r) = E^2 r^3 - L^2 r + r_s L^2}$$

Apéndice: Método de Cardano.

Consideremos la ecuación cúbica general:

$$\boxed{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0}.$$

siempre, haciendo el cambio de variable $z = x - \frac{a_2}{3a_3}$ es posible reescribir lo anterior en su forma canónica:

$$\boxed{b_3 z^3 + b_1 z + b_0 = 0}$$

* $z = x + b$

$z^2 = x^2 + 2bx + b^2$

$z^3 = x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3$

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 =$$

$$a_3x^3 + 3a_3bx^2 + 3a_3b^2x + a_3b^3 + a_2x^2 +$$

$$+ 2a_2bx + a_2b + a_1x + a_1b + a_0 =$$

c19

$$\to \quad a_3 z^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3}\right) z + \left(a_0 + \frac{2a_2^3}{27a_3^2} - \frac{a_1 a_2}{3a_3}\right)$$

Luego

$$b_3 = a_3$$

$$b_1 = a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3}$$

$$b_0 = a_0 + \frac{2a_2^3}{27a_3^2} - \frac{a_1 a_2}{3a_3}$$

Escribamos

$$\boxed{4z^3 - g_2 z - g_3 = p_3^*(z)}$$

$$g_2 = \frac{4a_2^2}{3a_3^2} - \frac{4a_1}{a_3}$$

$$g_3 = \frac{4a_1 a_2}{3a_3^2} - \frac{8a_2^3}{27a_3^3} - \frac{4a_0}{a_3}$$

El polinomio P_3^* puede tener

- 3 raíces reales distintas
- 3 raíces reales (dos iguales y una distinta)
- 1 real más un par conjugado.

Todo esto depende del discriminante cúbico:

$$\Delta = 4g_2^3 - 27g_3^2$$

i) $\{g_3, g_2\} > 0$

$$P_3^* = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

ii) $g_3 > 0 \wedge g_2 < 0$

$$P_3^* = 4z^3 + |g_2| z - g_3$$

iii) $g_3 < 0 \wedge g_2 > 0$

$$P_3^* = 4z^3 - g_2 z + |g_3|$$

iv) $\{g_2, g_3\} < 0$

$$P_3^*(z) = 4z^3 + |g_2|z + |g_3|$$

Consideremos (λ)

$$p_3^*(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

y la identidad trigonométrica

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0 \quad (*)$$

$$Z = Y\cos\theta$$

reemplazamos y multiplicamos por un multiplicador de Lagrange λ

$$p_3^* = 4\lambda Y^3\cos^3\theta - g_2\lambda Y\cos\theta - g_3\lambda$$

Comparando con $(*)$

(1) $\quad 4 = 4\lambda Y^3$

(2) $\quad 3 = g_2\lambda Y$

(3) $\quad \cos 3\theta = g_3\lambda$

(1): $\lambda = \frac{1}{Y^3}$

reempl. en (2): $3 = g_2 \cdot \frac{1}{Y^3} Y \Rightarrow \boxed{Y = \sqrt{\frac{g_2}{3}}}$

(3): $\cos 3\theta = \frac{g_3}{Y^3} = \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}}$

$\cancel{m \in \mathbb{Z}}$

$$3\theta = \text{ArcCos} \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}} + 2m\pi$$

$$\theta_m = \frac{1}{3} \text{ArcCos} \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}} + \frac{2m\pi}{3}$$

Así: $Z_m = \sqrt{\frac{g_2}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \text{ArcCos} \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}} + \frac{2m\pi}{3}\right]$

Haciendo $\xi = \sqrt{\frac{g_2}{3}} \wedge \theta_0 = \frac{1}{3} \text{ArcCos} \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}}$

$$\left.\begin{aligned} Z_0 &= \xi \cos \theta_0 \\ Z_1 &= \xi \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ Z_2 &= \xi \cos\left(\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\}$$