Física Contemporánea

Dr. Víctor H. Cárdenas
Instituto de Física y Astronomía
Universidad de Valparaíso

20. Cuántica

- Niels Bohr
- Ondas piloto/Función de onda
- Principio de incerteza de Heisenberg

Modelo de Bohr

Descubrimiento de nuevas líneas espectrales (mezcla hidrógeno/helio)

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

"…aparecen líneas para semi-enteros en la fórmula de Balmer"

Bohr: reemplazar *e* por *2e* válido para el Helio. Eso genera el factor 4 necesario.

$$R = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3}$$

Alfred Fowler midió con tal precisión, que la predicción no fue 4, sino 4.0016

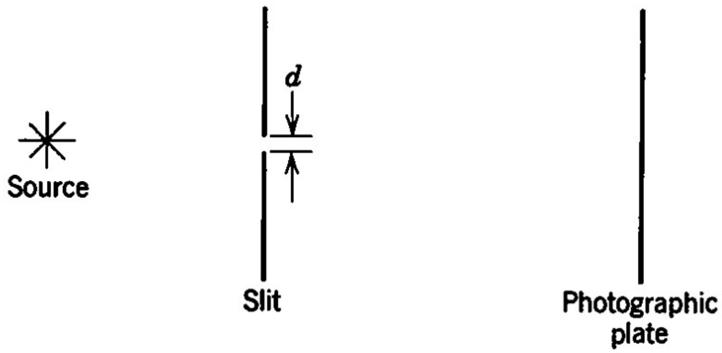
Bohr: su análisis despreció la masa del núcleo. El electrón en su órbita debería tener masa, $mM/(m+M)$ con lo cual el factor fue de … 4.0016!!

Louis de Broglie (1924)

Quería conectar la relatividad con las ideas cuánticas.

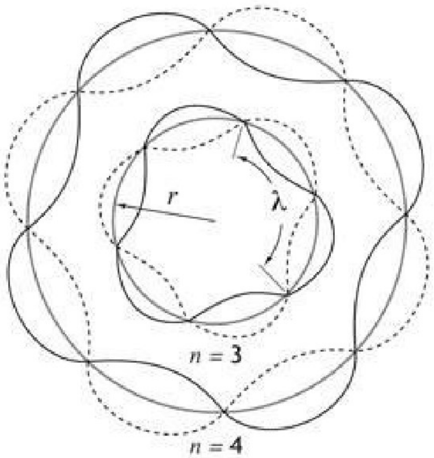
En analogía con la electrodinámica (o.e.m. / cuanto de luz)

Naturaleza onda/partícula



Luego

$$E = cp, \quad \lambda f = c \qquad\qquad E = hf, \quad p = h/\lambda$$



Suponiendo que el electrón tiene propiedades ondulatorias. Con momentum *p* y en una órbita de radio *r :* $n\lambda = 2\pi r$ donde *n* es un entero, entonces

$$2\pi r = n\lambda = nh/p, \qquad\qquad L = rp = nh/2\pi.$$

Ondas piloto de de Broglie

En 1925 un experimento en los laboratorios Bell salió mal. (Clinton Davison and L. H. Germer)

REFLECTION OF ELECTRONS BY A CRYSTAL OF NICKEL

BY C. J. DAVISSON AND L. H. GERMER

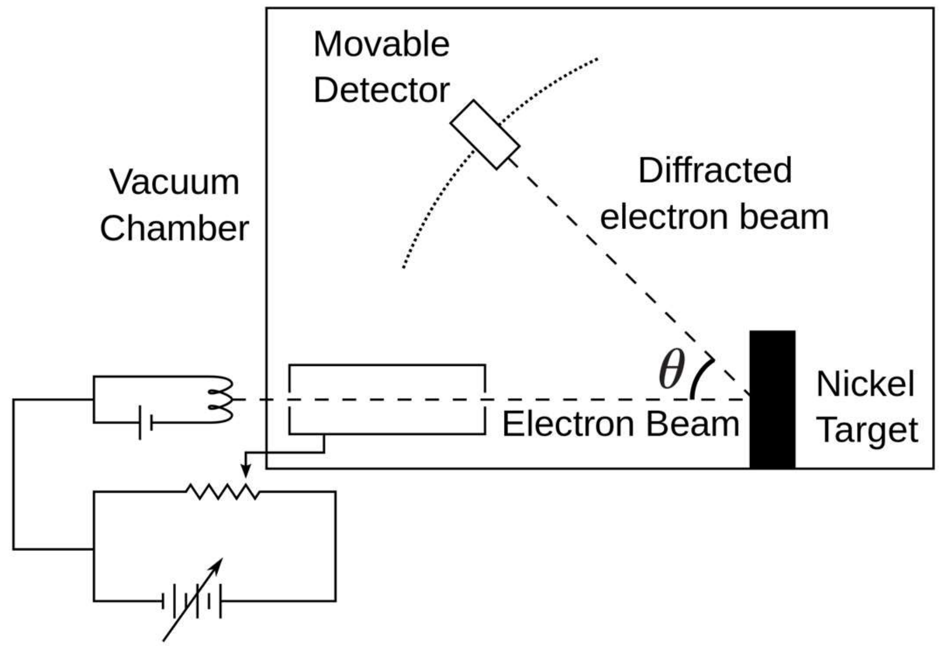
BELL TELEPHONE LABORATORIES, INC., NEW YORK CITY

Communicated March 10, 1928

Continuing our investigation of the interaction between a beam of electrons and a crystal of nickel (*Phys. Rev.*, **30,** 705 (1927)) we are now directing the electron beam against a {111}-face of the crystal at various angles of incidence, and are measuring the intensity of scattering in the incidence plane as a function of bombarding potential and direction.

We find that under certain conditions a sharply defined beam of scattered electrons issues from the crystal in the direction of regular reflection. This occurs whenever the speed of the incident electrons is comprised within any of certain ranges which change in location as the angle of incidence is varied. Within each of these ranges there is an optimum speed at which the intensity of the reflected beam attains a maximum.

That regular selective reflection of electrons from a crystal face would be observed under appropriate conditions was anticipated from our earlier observations on electron diffraction. The phenomenon is clearly the analogue of the regular selective reflection of x-rays on which the Bragg method of x-ray spectroscopy is based, and is, of course, to be interpreted in terms of the undulatory theory of mechanics. The incident beam of electrons of speed v is equivalent to a beam of waves of wave-length h/mv; a portion of the incident beam is regularly reflected, through the



Ondas piloto o función de Onda?

En 1926 Max Born interpretó la onda piloto de de Broglie como la amplitud de probabilidad. Así

$$|\psi(x,t)|^2 dx$$

Es la probabilidad de encontrar al electrón entre x y x+dx en t.

¿Cómo se relacionan las propiedades ondulatorias y de partícula?

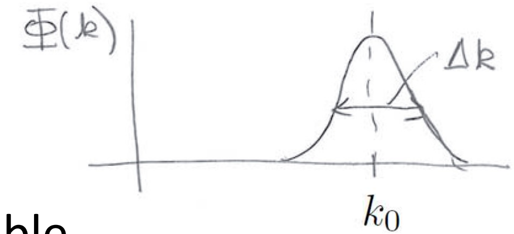
$$\tfrac{1}{2}mv^2 = E = hf, \quad mv = p = h/\lambda. \qquad \lambda f = \frac{h}{mv} \cdot \frac{\frac{1}{2}mv^2}{h} = \tfrac{1}{2}v.$$

¿Cómo se mantienen juntos el electrón y la onda?

https://www.youtube.com/watch?v=ngGpSyWgDcY&feature=youtu.be

Paquete de ondas

$$\psi(x,t) = \int dk\ \Phi(k) e^{i(kx-\omega(k)t)}$$



Y asumimos que $\Phi(k)$ tiene un máximo en $k = k_0$

Asumiendo $\Phi(k)$ es real, la fase sólo es $\varphi(k) = kx - \omega(k)t$.

Queremos saber los valores de x y t para que $\psi(x,t)$ sea apreciable.

Usando el *método de la fase estacionaria*

$$\left.\frac{d\varphi}{dk}\right|_{k_0} = x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t = 0$$

Luego el paquete de onda es apreciable para

$x = \left.\dfrac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t$, y la onda se mueve con <u>velocidad de grupo</u> $v_g = \left.\dfrac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$.

Paquete de ondas

Escribiendo

$$\psi(x,0) \;=\; \int dk\; \Phi(k) e^{ikx} \qquad\qquad (\#)$$

podemos expandir

$$\omega(k) \;=\; \omega(k_0) + (k-k_0)\,\frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0} + \mathcal{O}\left((k-k_0)^2\right)$$

luego

$$\psi(x,t) \;=\; \int dk\; \Phi(k)\, e^{ikx}\, e^{-i\omega(k_0)t} e^{-i(k-k_0)\,\frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t}$$

O bien

$$\psi(x,t) = e^{-i\omega(k_0)t + ik_0\,\frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t} \int dk\; \Phi(k) e^{ik\left(x - \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t\right)} .$$

Comparando con (#)

$$\psi(x,t) \;=\; e^{-i\omega(k_0)t + ik_0\,\frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t}\;\; \psi\left(x - \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0} t, 0\right)$$

La norma

$$|\psi(x,t)| = \left|\psi\left(x - \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0} t, 0\right)\right|.$$

Paquete de ondas

Si $\psi(x,0)$ tiene un máximo en x_0 entonces

$$x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t = x_0 \quad \rightarrow \quad x \;=\; x_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t\,,$$

Así el peak del paquete se mueve con $v_{\rm gr} = \frac{d\omega}{dk}$, evaluado en k_0.

¿Qué función describe una <u>partícula libre</u>? $p = \hbar k\,, \quad \text{and} \quad E = \hbar\omega\,.$

1. $\sin(kx-\omega t)$ $\quad \Psi(x,t) = \sin(kx-\omega t) + \sin(kx+\omega t) = 2\sin(kx)\cos(\omega t)\,.$

2. $\cos(kx-\omega t)$ $\quad \Psi(x,t) = \cos(kx-\omega t) + \cos(kx+\omega t) = 2\cos(kx)\cos(\omega t)\,.$

3. $e^{i(kx-\omega t)} = e^{ikx}e^{-i\omega t}$ - $\quad \Psi(x,t) \;=\; e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(-kx-\omega t)} \;=\; 2\cos kx\, e^{-i\omega t}\,.$

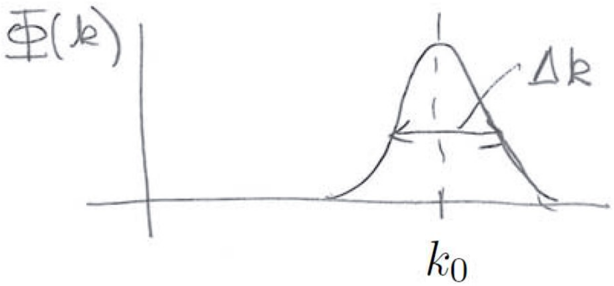
4. $e^{-i(kx-\omega t)} = e^{-ikx}e^{i\omega t}$ $\quad \Psi(x,t) \;=\; e^{-i(kx-\omega t)} + e^{-i(-kx-\omega t)} \;=\; 2\cos kx\, e^{i\omega t}\,.$

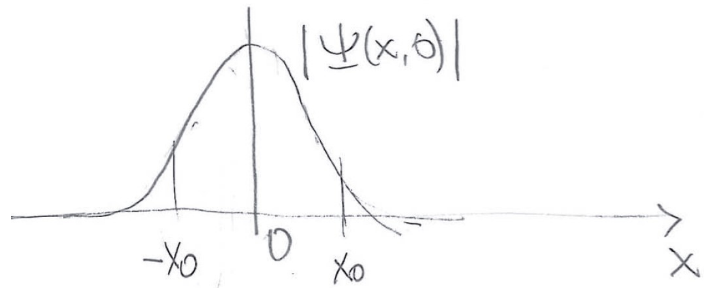
$$\boxed{\text{Free particle wavefunction :} \quad \Psi(x,t) \;=\; e^{i(kx-\omega t)}\,,}$$

Principio de incerteza de Heisenberg

Queremos construir un paquete de onda localizado que represente un electrón.

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ikx} dk. \qquad \Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} dx.$$





Expandiendo $k = k_0 + \widetilde{k}$,

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(k_0 + \widetilde{k}\right) e^{i\widetilde{k}x}\, d\widetilde{k}.$$

donde $\widetilde{k} \in \left[-\frac{\Delta k}{2}, \frac{\Delta k}{2}\right]$, $\qquad \widetilde{k}x \in \left[-\frac{\Delta k}{2}x\,,\ \frac{\Delta k}{2}x\right] \quad (\text{for } x > 0)\,,$

Principio de incerteza

Obtendremos una contribución significante en $\Delta k|x| \lesssim 1,$ y contribuciones que se cancelan en $\Delta k|x| \gg 1.$

Luego $\Psi(x,0)$ será no cero para $x \in (-x_0, x_0)$ donde $\Delta k x_0 \approx 1.$
Identificando el ancho de $\Psi(x,0)$ con $\Delta x := 2x_0$ entonces

$$\boxed{\Delta x\, \Delta k \approx 1\,.}$$

Como

$$\Delta p = \hbar \Delta k\,. \qquad \Delta x\, \Delta p \approx \hbar\,.$$

$$\boxed{\text{Heisenberg uncertainty product:} \quad \Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\,.}$$