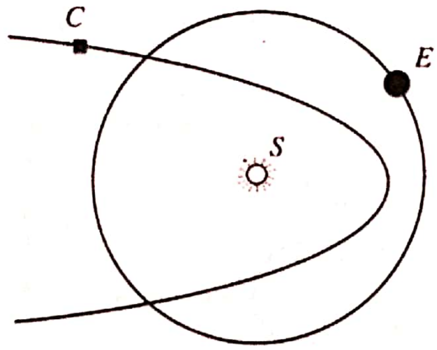
**Prueba Módulo II - Forma B**
**Mecánica Intermedia**
Licenciatura en Física - 2021[1]

## Problema I

Encuentre el tiempo que un cometa (C) de masa $m$ que sigue una trayectoria parabólica alrededor del Sol (S) puede pasar dentro de la órbita de la Tierra (E). Suponga que la órbita de la Tierra es circular y de radio $R$ y está en el mismo plano que la del cometa. Se conoce además que el perihelio del cometa es $r_{mín}$ y la masa del Sol, $M_S$.




## Problema II

Considere el movimiento de una partícula de masa $m$ bajo la influencia de una fuerza central $\vec{F} = -K\vec{r}$, donde $K$ es una constante positiva y $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula.

1. (15%) Demuestre que el movimiento de la partícula ocurre en un plano.

[1]**Hora de inicio:** 18:30 hrs.
**Hora de término:** 22:00 hrs.
Envíe el documento en formato pdf

2. (30%) Encuentre la posición de la partícula como función del tiempo asumiendo las siguientes condiciones iniciales en $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= V_0 \end{aligned}$$

3. (20%) Muestre que la órbita es una elipse.

4. (15%) Encuentre el período.

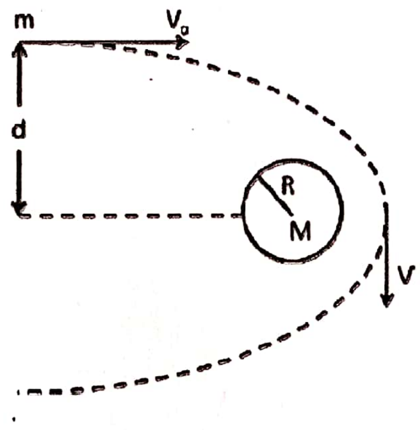
5. (20%) ¿Esta interacción obedece a la tercera ley de Kepler?.

---

**Problema III**

---

Un asteroide de masa $m$ viene desde muy lejos (trayectoria parabólica) acercándose a un planeta de masa $M$ y radio $R$, en cierto punto de la trayectoria tiene una velocidad $v_0$ perpendicular a la distancia $d$, distancia conocida como parámetro de impacto (ver figura).




1. (15%) Determine el momentum angular del asteroide en la posición mostrada en la figura.

2. (20%) La velocidad mínima $v_0$ para que el asteroide no choque con el planeta.

3. Si el asteroide estando en su punto más cercano al planeta se divide en dos partes, con una de ellas moviéndose en dirección hacia el centro del planeta con rapidez $\frac{v_0}{2}$ y con una masa de $\frac{m}{2}$, entonces:

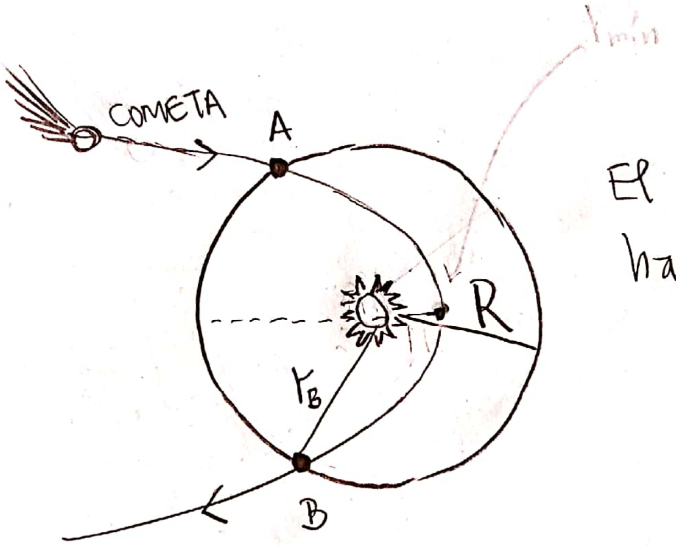
   (a) (25%) Determine la velocidad $\overrightarrow{V}_A$ del otro trozo del asteroide y el ángulo respecto a la horizontal.

(b) (20%) Obtenga la expresión final para la energía mecánica de este trozo en función de $M$, $m$, $R$ y $d$.

(c) (20%) Este trozo ¿orbitará o no al planeta?.

FORMA B

PROBL. I




El tiempo que se desea hallar es $t_B - t_A$

$\Downarrow$

Tiempo que pasa el cometa al interior de la órbita de la Tierra

Ahora bien $E = 0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ ; con $k = GmM_s$

para $r = r_{min} \Longrightarrow \dot{r} = 0 \quad \therefore \quad 0 = \frac{l^2}{2mr_{min}^2} - \frac{k}{r_{min}}$

de lo cual se puede hallar el momentum angular del cometa:

$$l = 2mkr_{min} = 2Gm^2M_s r_{min}$$

En cualquier instante se cumple que:

$$E = 0 = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

$$0 = \dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2r^2} - \frac{2k}{mr}$$

$$0 = \dot{r}^2 + \frac{2mk\,r_{mín}}{m^2 r^2} - \frac{2k}{mr}$$

$$0 = \dot{r}^2 + \frac{2k\,r_{mín}}{mr^2} - \frac{2k}{mr}$$

$$\Downarrow$$

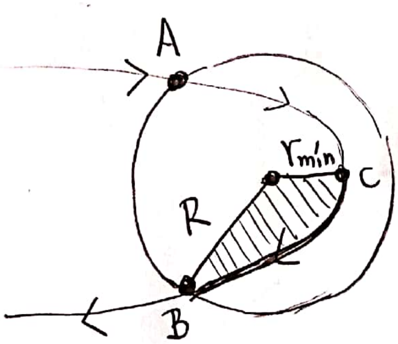
$$\dot{r} = \left[\frac{2k}{mr} - \frac{2k\,r_{mín}}{mr^2}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{r_{mín}}{r^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \frac{1}{r}\sqrt{r - r_{mín}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_{r_C}^{r_B} \frac{r\,dr}{\sqrt{r - r_{mín}}} = \int_{t_C}^{t_B} dt = t_B - t_C$$ = tiempo que demora el cometa el área achurada.




en $t = t_C \Rightarrow r_C = r_{mín}$

$t = t_B \Rightarrow r_B = R$

**Obs.** $$\int \frac{r}{[r-r_{min}]^{1/2}}\,dr = \frac{2}{3}(2r_{min}+r)\sqrt{r-r_{min}}$$

$$\therefore \int_{r_{min}}^{R} \frac{r}{\sqrt{r-r_{min}}}\,dr = \frac{2}{3}(2r_{min}+R)\sqrt{R-r_{min}}$$

Finalmente:

$$T = t_B - t_A = 2(t_B - t_C) = 2\sqrt{\frac{m}{2k}}\cdot\frac{2}{3}(2r_{min}+R)\sqrt{R-r_{min}}$$

$$T = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{m}{2k}}(2r_{min}+R)\sqrt{R-r_{min}} \quad ///$$

$\alpha_4$

PROBL. II

1) De la segunda Ley de Newton:

$$\vec{\tau}_{TOTAL} = \frac{d\vec{l}}{dt} \quad ; \ \vec{l} = \text{momentum angular}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_{TOTAL} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$\vec{r} \times (-K\vec{r}) = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow -K \overbrace{\cancel{\vec{r} \times \vec{r}}}^{0} = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow \vec{l} = cte.$$

Por otro lado:

$$\vec{l} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} = (\overbrace{\cancel{\vec{r} \times \vec{r}}}^{0}) \cdot \vec{p} = 0$$

dado que $\vec{r}$ es la posición de la partícula y $\vec{l}$ es constante $\Rightarrow$ $\vec{r} \perp \vec{l}$ siempre $\Rightarrow$ el movimiento entonces es siempre en un plano $\perp$ a $\vec{l}$.

2) $$\vec{F}_{TOTAL} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow -K\vec{r} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{K}{m}\vec{r} = \vec{0}$$

Escogemos el plano XY para describir el movimiento.

$\therefore$ se cumple que:

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{K}{m} y = 0$$

Los soluciones son conocidas:

$$\begin{cases} x(t) = A \cos wt + B \operatorname{sen} wt \\ \Downarrow \\ \dot{x}(t) = -Aw \operatorname{sen} wt + Bw \cos wt \end{cases} \quad \left(\text{siendo } w^2 = \frac{K}{m}\right)$$

$$\begin{cases} y(t) = C \cos wt + D \operatorname{sen} wt \\ \Downarrow \\ \dot{y}(t) = -Cw \operatorname{sen} wt + Dw \cos wt \end{cases}$$

con las condiciones iniciales se halla que:

$$x(0) = x_0 = A \implies A = x_0$$
$$\dot{x}(0) = 0 = Bw \implies B = 0$$
$$y(0) = 0 = C \implies C = 0$$
$$\dot{y}(0) = v_0 = Dw \implies D = \frac{v_0}{w}$$

Finalmente la posición de la partícula es la siguiente: $\vec{r}(t) = x_0 \cos(wt)\hat{\imath} + \left(\frac{v_0}{w}\right) \operatorname{sen}(wt)\hat{\jmath}$

$X_b$

3) Se cumple que:

$$\operatorname{sen}^2 wt + \cos^2 wt = 1$$ de las soluciones obtenidas

luego tenemos que:

$$\frac{X(t)^2}{X_0^2} + \frac{Y(t)^2}{\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} = 1$$ lo cual representa una trayectoria elíptica.

4) El período se determina a partir de $w$:

$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

5) La 3ª ley de Kepler establece que

$$\frac{(\text{Período})^2}{(\text{long. semieje mayor})^3} = \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{4\pi^2 m}{k} \\ \uparrow \\ \text{No depende de condiciones iniciales}}}{\text{cte.}} \neq \begin{cases} \dfrac{T^2}{X_0^3} = \dfrac{4\pi^2 m}{K X_0^3} & (a>b) \\ \dfrac{T^2}{\left(\frac{v_0}{w}\right)^3} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dependen de condiciones iniciales.}}}{\dfrac{4\pi^2}{V_0^2}\sqrt{\dfrac{K}{m}}} & (b>a) \end{cases}$$

∴ Esta fuerza central no cumple la 3ª ley de Kepler. $\Longleftarrow$

B1

PROBLEMA (II en Forma A - III en forma B)

1) $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = m v_0 d$

15%

2) En el pto. más cercano (para que no choque)

20% $r = R$

$$\Downarrow$$

$$L = cte = m v_0 d = m v R \ (*)$$

$$\Downarrow$$

Por otro lado dado que $E=0$, en el pto. más cercano se cumple que:

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{mM}{R}$$

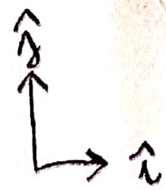
$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

reemplazando en (*)

$$v_0 = \frac{R}{d}\sqrt{\frac{2GM}{R}} \ //$$

3) Justo Antes — justo Despues




$B_2$

a)

25%


El momentum del asteroide se conserva

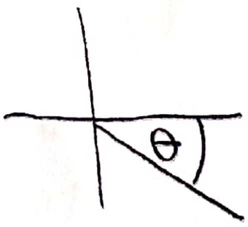
$$-m v \hat{j} = -\frac{m}{2}\frac{v_0}{2}\hat{i} + \vec{V}_A \frac{m}{2}$$

con $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$\therefore \vec{V}_A = \frac{v_0}{4}\hat{i} - v\hat{j} = \frac{v_0}{4}\hat{i} - \sqrt{\frac{2GM}{R}}\hat{j}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{R}{d}\sqrt{\frac{2GM}{R}}\hat{i} - \sqrt{\frac{2GM}{R}}\hat{j}$$

$$= \sqrt{\frac{2GM}{R}}\left(\frac{1}{4}\frac{R}{d}\hat{i} - \hat{j}\right)$$




$$\theta = tg^{-1}\left(-\frac{4d}{R}\right) \quad //$$

$\boxed{P_3}$

3.b) $E = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right) V_A^2 - \frac{GmM}{2R}$

20%

donde $V_A = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\left[\frac{R^2}{16d^2} + 1\right]^{1/2}$

$$\Downarrow$$

$$V_A^2 = \frac{2GM}{16Rd^2}\left(R^2 + 16d^2\right) \; //$$

$$E = \frac{1}{32}\frac{GMm}{Rd^2}\left(R^2 + 16d^2\right) - \frac{GmM}{2R}$$

$$= \frac{1}{32}\frac{GMmR}{d^2} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}} - \cancel{\frac{GmM}{2R}}$$

$$E = \frac{1}{32}\frac{GmMR}{d^2} \; //$$

3.c) E del trozo es mayor que cero
20% su órbita será abierta y nunca volverá al planeta.