Incidencia oblicua

Suponemos que una O.E.M. incide desde la derecha sobre el plano $z=0$ (como antes), y golpea el plano formando un ángulo θ_i con la normal. Así también se espera una onda reflejada y otra transmitida.

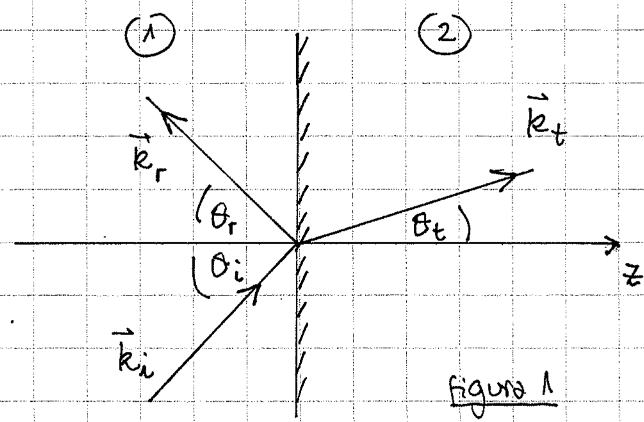


figura 1

Las ondas se pueden escribir:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{oi}\, e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad , \quad \vec{B}_i = \frac{1}{v_1}\vec{k}_i\times\vec{E}_i$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{or}\, e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad , \quad \vec{B}_r = \frac{1}{v_1}\vec{k}_r\times\vec{E}_r \qquad (17)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{ot}\, e^{i(\vec{k}_t\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad , \quad \vec{B}_t = \frac{1}{v_2}\vec{k}_t\times\vec{E}_t$$

Como todos los ω's son iguales, entonces

$$\omega = k_i v_1 = k_r v_1 = k_t v_2$$

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1}k_t = \frac{n_1}{n_2}k_t \qquad (18)$$

Al aplicar las condiciones de borde la estructura de las ecuaciones es del tipo

$$(\ldots)\,e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t)} + (\ldots)\,e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega t)} = (\ldots)\,e^{i(\vec{k}_t\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (19)$$

válida en $z=0$ (el plano). Por lo tanto debe cumplirse que las fases sean las mismas, luego

$$\vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_r\cdot\vec{r} = \vec{k}_t\cdot\vec{r} \qquad (z=0) \qquad (20)$$

o explícitamente

$$k_{ix}x + k_{iy}y = k_{rx}x + k_{ry}y = k_{tx}x + k_{ty}y$$

válido en cualquier punto del plano xy. En particular, en los puntos donde $x=0$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} \tag{21}$$

como también en $y=0$

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \tag{22}$$

O si hubiésemos orientado $\vec{k}_i$ con el plano xz (o sea $k_{iy}=0$) nos llevaría a la misma conclusión para los vectores $\vec{k}_r$ y $\vec{k}_t$. Esto nos sugiere que estos vectores forman un plano.

<u>Primera Ley</u> Los vectores de onda $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ y $\vec{k}_t$ forman un plano (llamado <u>plano de incidencia</u>) que también incluye el vector normal a la superficie (aquí el plano $z=0$).

A partir de (22) y viendo la figura 1 podemos escribir

$$k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t$$

entonces como en (18) mostramos que $k_i = k_r$

<u>Segunda Ley</u> El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión

$$\theta_i = \theta_r \qquad \text{ley de reflexión} \tag{23}$$

Además, a partir de (18) se mostró que $k_i = \frac{n_1}{n_2} k_t$

<u>Tercera Ley</u> El ángulo de incidencia con el ángulo transmitido o refractado, satisfacen

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \text{Ley de Snell} \qquad (24)$$

Volviendo a la relación (19).

Cancelados los factores exponenciales, las condiciones de borde (4) resultan en:

$$(i) \quad \epsilon_1(\vec{E}_{oi} + \vec{E}_{or})_z = \epsilon_2(\vec{E}_{ot})_z \qquad (25)$$

$$(ii) \quad (\vec{B}_{oi} + \vec{B}_{or})_z = (\vec{B}_{ot})_z \qquad (26)$$

$$(iii) \quad (\vec{E}_{oi} + \vec{E}_{or})_{xy} = (\vec{E}_{ot})_{xy} \qquad (27)$$

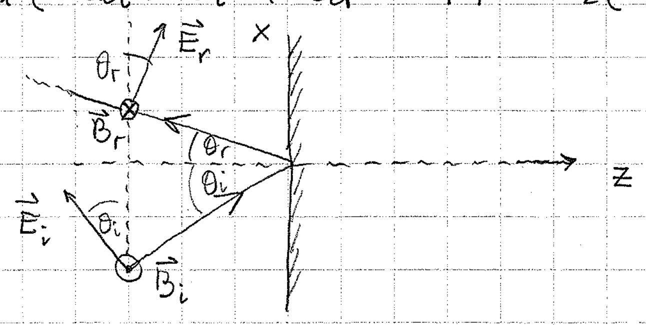
$$(iv) \quad \frac{1}{\mu_1}(\vec{B}_{oi} + \vec{B}_{or})_{xy} = \frac{1}{\mu_2}(\vec{B}_{ot})_{xy} \qquad (28)$$

donde en cada caso $\vec{B}_o = \frac{1}{v}\vec{k}\times\vec{E}_o$.

Supongamos ahora que la onda incidente es paralela al plano de incidencia (xz). Diremos que su estado de <u>polarización</u> es paralelo al plano xz.

A partir de (i)

$$\epsilon_1(-E_{oi}\sin\theta_i + E_{or}\sin\theta_r) = \epsilon_2(-E_{ot}\sin\theta_t) \qquad (29)$$



La relación (ii) no aporta nada en este caso.
La relación (iii) resulta

$$E_{oi} \cos\theta_i + E_{or} \cos\theta_r = E_{ot} \cos\theta_t \qquad (30)$$

y la (iv) genera

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{oi} - E_{or}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{ot} \qquad (31)$$

A partir de las leyes de reflexión y refracción (23), (24) las ecuaciones (29) y (31) se reducen a (hacer!)

$$E_{oi} - E_{or} = \beta E_{ot} \quad \wedge \quad E_{oi} + E_{or} = \alpha E_{ot} \qquad (32)$$

donde

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} , \quad \alpha = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \qquad (33)$$

y al combinar ambas (32) se obtienen

$$E_{or} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{oi} \quad \wedge \quad E_{ot} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{oi} \qquad (34)$$

llamadas <u>ecuaciones de Fresnel</u>.

Suponiendo que la onda incidente tenga una polarización <u>perpendicular</u> al plano de incidencia, se obtienen 2 ecuaciones más (hacer!).

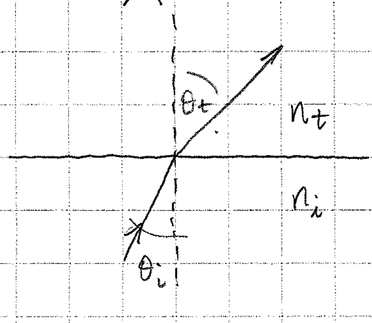
A partir de (34) vemos que la onda transmitida <u>siempre</u> está en fase con la incidente, sin embargo, la reflejada puede estar en fase ($\alpha > \beta$) o fuera de fase ($\alpha < \beta$).

Reflexión total interna

Usando la ley de Snell

$$\sin\theta_i = \frac{n_t}{n_i}\sin\theta_t$$

Si $n_i > n_t$ entonces el ángulo de refracción es mayor que el incidente, por lo tanto, existe un valor de θ_i tal que



$\theta_t = \pi/2$, o sea

$$\sin\theta_c = \frac{n_t}{n_i}$$

Para $\theta_i > \theta_c$ (ángulo crítico) toda la energía incidente se refleja.