

Guía N° 2

Cálculo III - Facultad de Ciencias
UV

1.- Siendo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x,y) = 3x^3y - 2xy$ hallar :

a) $f(0,0)$ b) $f(-1,3)$ c) $f(a,y)$ d) $f(x,2)$ e) $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

2.- Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \ln(x+y+2) & \text{si } |y| \leq x \\ 2x+y & \text{si } xy > 0 \wedge x < 0 \end{cases}$

a) hallar y graficar A b) hallar $f(-1,2)$
c) hallar $f(1,-1)$ d) hallar $f(-2,-2)$.

3.- Hallar el dominio adecuado para cada una de las siguientes funciones y hacer un gráfico del mismo en cada caso :

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}$

b) $f(x,y) = \ln|(x+3)(y-2)|$

c) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-3x^2-2y}}{\ln|5-x^2+y|}$

d) $f(x,y) = \frac{\ln|2y-x^2-y^2|}{\cos(\pi y)}$

e) $f(x,y) = \frac{\arccos(x^2+y^2-3)}{x^2+y^2-4}$

f) $f(x,y) = \frac{\ln|3-x^2+y|}{\sqrt{1-x^2-y}}$

g) $f(x,y) = \frac{\ln\left|\frac{14x^2}{5} - y\right| \ln|y-x^2+4|}{\sqrt{3-\frac{|x|}{2}-y}}$

h) $f(x,y) = \frac{\cos(y)}{1+\sin(x)}$

i) $f(x,y) = \sqrt{|y|-1} + \sqrt{|x|-2}$

j) $f(x,y) = \sqrt{|x+2y|-3}$

k) $f(x,y) = \arcsen(xy)$

l) $f(x,y) = \frac{3x}{5-|x|}$

4.- Hallar las curvas de nivel para cada una de las siguientes funciones. En cada caso considerar , según el recorrido , los valores que pueden asignarse a z .

a) $f(x,y) = \frac{1}{5y+x}$

b) $f(x,y) = 4 - |x| - |y|$

c) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 1$

d) $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$

e) $f(x,y) = \ln(x-4y)$

f) $f(x,y) = y - x^2 + x - 2$

5.- Determinar las superficies de nivel correspondientes a las siguientes funciones :

- a) $f(x,y,z) = x + y - z$ b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$
c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$ d) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$

6.- Probar la existencia de los siguientes límites hallando $\delta(\epsilon)$ en cada caso :

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x + 4y) = 11$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} (x^2 + xy) = 6$
c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$ d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2}$

7.- Calcular los siguientes límites :

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2 + 5y - 1}{3x^2 + 9y^2 + 8} \right)$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (7,2)} \frac{x - y}{\sqrt{x + y}}$
c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-3)} \sqrt[3]{9 - x^2 - y^2}$ d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} \left(\frac{xy - x + 5}{y^2} \right)$
e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} e^{x+y-1}$ f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{e^{xy} - e^{-xy}}{2} \right)$
g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)} \left(\sin(x) \cos \left(\frac{y + x - \pi}{y^2 + 2} \right) \right)$ h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \left(\frac{\sin(x) + y}{x - \cos(y)} \right)$
i) $\lim_{(2,0) \rightarrow (2,0)} \frac{y \sin(x - 2)}{x^2 - 4}$ j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} (x^3 + y^3) \sin \left(\frac{x^2 y}{\pi y + \pi x} \right)$
k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{8x^3 + y^3}{2x + y}$ l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x) \sin^2(y)}{2xy \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}(y)}$
m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\sqrt{(1+4x)(1+6y)} - 1}{2x + 3y} \right)$ n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{y + 4\sqrt{y} - 4x - 8\sqrt{x}}{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}} \right)$
o) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \left(\frac{x - y + z}{x^2 + y^2} \right)$ p) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + z^2} - y} \right)$
r) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2) \sin(y^2)}{x^6 + |y|}$ s) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + (x - y)^2}$

8.- Verificar que no existe límite doble en el origen , mediante límites sucesivos o diferentes trayectorias :

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{b) } f(x,y) = \frac{6x^2 - 5y^2}{x^2 + 2y^2} \quad \text{c) } f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{d) } f(x,y) = \frac{\operatorname{tg}(x) \operatorname{sen}(y)}{x^2 + y^2} \quad \text{e) } f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (x-y)^2}$$

9.- Sea $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^3}$. Calcular límite en el origen para sus restricciones a los siguientes conjuntos : $C_1 = \{(x,y) / y = 4x\}$, $C_2 = \{(x,y) / y^2 = x\}$

10.- Idem para $f(x,y) = \frac{2x - y - 1}{x^2 - y^2}$ en $(1,1)$ sobre :
 $C_1 = \{(x,y) / y = -x^2 + 2\}$ y $C_2 = \{(x,y) / y = 2x - 1\}$

11.- Idem para $f(x,y) = \frac{x^2 - y}{x - y^3}$ en $(1,1)$ sobre .
 $C_1 = \{(x,y) / y = x\}$ y $C_2 = \{(x,y) / y = 2 - x^2\}$

12.- Investigar si existe límite doble en $(1,1)$ para :

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{1 - xy}{x^2 - y^3} \quad \text{b) } f(x,y) = \frac{x^2 + xy - 2}{1 - xy}$$

$$\text{c) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ 1 & \text{si } |x| = |y| \end{cases}$$

13.- Investigar si existe o no límite doble en el origen para :

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^4 + 2x^2y + y^2} \quad \text{b) } f(x,y) = \frac{xy^2}{y^4 + x^2}$$

$$\text{c) } f(x,y) = \frac{10x^3 - 2y^3}{(x-1)^3 + y^3 + 1} \quad \text{d) } f(x,y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2}$$

14.- ¿ Existe $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{4x + y - 3z}{2x - 5y + 2z}$? . Justifique su respuesta.

15.- Averigüe si la siguiente función es o no continua en $(0,0)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } |y| < x^2 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

16.- Analice la continuidad de f en $(0,0)$,en $(0,1)$ y en $(1,1)$ si :

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

$$b) f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) & \text{si } (x+y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x+y) = 0 \end{cases}$$

$$c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

17.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican :

$$a) f(x,y) = \frac{xy+2x+4y+8}{xy-y^2+2x-2y} \text{ en } (-4,-2)$$

$$b) f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y^2-9)}{\operatorname{tg}(3x+3y^2-27)} \text{ en } (5,2)$$

18.- En que puntos (x,y) del plano las siguientes funciones son continuas.

$$a) f(x,y) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{y}}$$

$$b) f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{y-x^2-1}\right) + \ln(y+x^2-2)$$

$$c) f(x,y) = 3y + \frac{\cos(4x)}{\operatorname{sen}(9x)}$$

$$d) f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{9x^2+4y^2-1}}$$

$$d) f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2-x^4}{x^2+y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}$$

19.- Determinar el conjunto de puntos para los cuales la siguiente función presenta discontinuidad

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2-y^2 & \text{si } x^2-y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2-y^2 > 1 \end{cases}$$

20.- ¿ Es posible definir $f(x,y) = \frac{x(1+y^2)-(y^2+1)}{x-1}$ de manera que sea continua en $(1,0)$?

21.- Determinar los puntos (x,y,z) para los cuales las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x,y,z) = 1 - x + y^2 + z^3$

b) $f(x,y,z) = \cos(x + y + z)$

c) $f(x,y,z) = \frac{y}{z^2 + x^2 - 9}$

d) $f(x,y,z) = \frac{x+1}{(z-1)(y+3)}$

e) $f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 \neq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

22.- Demuestre que la siguiente función es continua en el punto $(0,0,0)$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2xz + 3xy + 4yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$