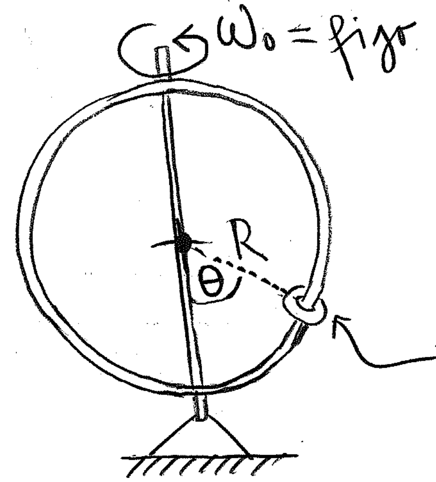
Complemento V

α_1



m (no hay roce)

Obs. Angulo de equilibrio estático en la coord. θ

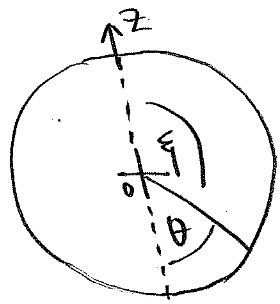
$$\theta \to \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega_0^2 R}\right)$$

calculado a lo Newton

Ec. de movimiento para $\theta(t)$

$\Downarrow$

Usando coord. esféricas



$\rightsquigarrow$
$$x = r \,\text{sen}\,\xi \cos\varphi$$
$$y = r \,\text{sen}\,\xi \,\text{sen}\,\varphi$$
$$z = r \cos\xi$$

ligaduras:

$r = R$

$\varphi = \omega_0 t + \cancel{\varphi_0}$ 0 (sin perder generalidad)

Obs: θ en este problema no es el usual asociado a coord. esféricas, se utilizó ξ.

$$\therefore \quad \begin{aligned} x &= R\cos(\omega_0 t)\,\text{sen}\,\xi \\ y &= R\,\text{sen}(\omega_0 t)\,\text{sen}\,\xi \\ z &= R\cos\xi \end{aligned}$$

Obs. $\xi = \pi - \theta \Rightarrow \operatorname{sen}\xi = \operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\cos\xi = \cos(\pi - \theta) = \cos\theta$

luego en términos de $\theta(t)$ se cumple que:

$$x = R\cos(w_0 t)\operatorname{sen}\theta$$
$$y = R\operatorname{sen}(w_0 t)\operatorname{sen}\theta$$
$$z = -R\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x} = -Rw_0\operatorname{sen}(w_0 t)\operatorname{sen}\theta + R\cos(w_0 t)\cos\theta\,\dot{\theta}$$
$$\dot{y} = Rw_0\cos(w_0 t)\operatorname{sen}\theta + R\operatorname{sen}(w_0 t)\cos\theta\,\dot{\theta}$$
$$\dot{z} = R\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$(*) \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Luego $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2 w_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + R^2\dot{\theta}^2$

$$\therefore \quad \boxed{L = \frac{1}{2}mR^2\left(w_0^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + mgR\cos\theta}$$

— Ec. de movimiento: ——

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$mR^2\ddot\theta - mR^2\omega_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + mgR\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

(a) $$\ddot\theta - \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta = 0 \quad //$$

$\theta = \theta_0 =$ Ángulo de equilibrio

$$\Downarrow$$

$$\dot\theta = 0 \ \wedge \ \ddot\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega_0^2 R}\right) \quad ///$$

$$\Downarrow$$

Se cumplió que:

(b) $$\omega_0^2 \operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 = \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta_0 \quad //$$

← Oscilación en torno a $\theta = \theta_0$

(*) Sea $\theta = \theta_0 + \eta$ ($\eta \to$ muy pequeño)

$\Downarrow$ ← Una perturbación

$\ddot{\theta} = \ddot{\eta}$ (Reemplazamos en Ec. (a))

(*) $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta_0 + \eta) = \operatorname{sen}\theta_0 \cos\eta + \cos\theta_0 \operatorname{sen}\eta$

$\cos\theta = \cos(\theta_0 + \eta) = \cos\theta_0 \cos\eta - \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\eta$

para $\eta \to 0 \implies \cos\eta \to 1 + O(\eta^2)$

$\operatorname{sen}\eta \to \eta + O(\eta^3)$

$\therefore$ $\operatorname{sen}(\theta_0+\eta)\cos(\theta_0+\eta) \approx \cos\theta_0 \operatorname{sen}\theta_0 + (\cos^2\theta_0 - \operatorname{sen}^2\theta_0)\eta + \cancel{O(\eta^2)}^{\,0}$

y $\operatorname{sen}(\theta_0+\eta) \sim \operatorname{sen}\theta_0 + \cos\theta_0\,\eta + \cancel{O(\eta^2)}^{\,0}$

$\therefore$ La ecuación de movimiento en torno al punto de equilibrio $\theta = \theta_0$ es

$$\ddot{\eta} - \omega_0^2 \cos\theta_0 \operatorname{sen}\theta_0 - \omega_0^2(\cos^2\theta_0 - \operatorname{sen}^2\theta_0)\eta + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta_0 + \frac{g}{R}\cos\theta_0\,\eta = 0$$

Utilizando la ec. (b) se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{\eta} + \left[\frac{g}{R}\cos\theta_0 - \omega_0^2\left(\cos^2\theta_0 - \operatorname{sen}^2\theta_0\right)\right]\eta = 0$$

Ec. de M.A.S con frecuencia natural

$$\boxed{\omega_\eta^2 = \frac{g}{R}\cos\theta_0 + \omega_0^2\left(\operatorname{sen}^2\theta_0 - \cos^2\theta_0\right)}$$

Válida para oscilaciones pequeñas en torno a $\theta = \theta_0$