COMPLEMENTO V

Problemas de Sturm-Liouville

$\Downarrow$

EDO's lineales de 2° orden

$\Downarrow$

Con solución válida para $x \in [a,b]$

$\Downarrow$

No está definida fuera de este intervalo.

$\Downarrow$

Suponemos que es nula

Descripciones

A) Forma canónica

$$\left[\alpha_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_1(x)\frac{d}{dx} + \alpha_2(x)\right] Y_\lambda(x) = \lambda Y_\lambda(x)$$

$\Downarrow$ En el espacio de Hilbert

$$\underbrace{\left[-\alpha_0(\hat{x})\hat{k}^2 + i\alpha_1(\hat{x})\hat{k} + \alpha_2(\hat{x})\right]}_{\hat{O}} |Y_\lambda\rangle = \lambda\, |Y_\lambda\rangle$$

Obs. Esto es un PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

$\Downarrow$

λ = Valor propio

$\{|Y_\lambda\rangle\} \Longrightarrow \{Y_\lambda(x)\}$ = Base vectorial de fns.

Obs. El operador $\hat{O}$ no necesariamente hermítico, si lo fuera, entonces $\{Y_\lambda(x)\}$ conforma una base vectorial de funciones ortogonal en el intervalo $[a,b]$.

B) FORMA Autoadjunta

$$\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right]Y(x) = \lambda\, \omega(x)\, Y(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left[-\hat{k}\, p(\hat{x})\hat{k} + q(\hat{x})\right]}_{\hat{O}}|Y\rangle = \lambda\, \omega(\hat{x})|Y\rangle$$

Obs. No es un probleme de valores propios

Obs. El operador $\hat{O}$ es hermitiano

Obs. Si $\omega(\hat{x}) = \hat{\mathbb{1}}$, es un probleme de valores propios y $\{Y(x) = Y_\lambda(x)\}$ forme une base vectorial de fns completa y ortogonal en $[a,b]$

Ej. Demostrar que

$$[f(\hat{x})]^{\dagger} = f(\hat{x}) \quad \text{si} \quad \hat{x}^{\dagger} = \hat{x}$$

sea $f(\hat{x}) = \sum_n a_n \hat{x}^n$ con $a_n \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$[f(\hat{x})]^{\dagger} = \left[\sum_n a_n \hat{x}^n\right]^{\dagger} = \sum_n (a_n \hat{x}^n)^{\dagger}$$

$$= \sum_n (\hat{x}^n)^{\dagger} a_n^{\dagger}$$

; pero $a_n^{\dagger} = a_n^{*} = a_n$

y $(\hat{x}^n)^{\dagger} = (\hat{x}^{\dagger})^n = \hat{x}$

$$\therefore [f(\hat{x})]^{\dagger} = \sum_n a_n \hat{x}^n = f(\hat{x})$$

Conclusión: si $\hat{x}^{\dagger} = \hat{x}$ y $\hat{k}^{\dagger} = \hat{k} \Longrightarrow (\hat{k}\, p(\hat{x})\, \hat{k})^{\dagger} = \hat{k}\, p(\hat{x})\, \hat{k}$

RELACIÓN ENTRE LA FORMA CANÓNICA Y AUTOADJUNTA

de (B) $$\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right] Y(x) = \lambda w(x) Y(x)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{dY}{dx}\right)\right) + \frac{q}{w} Y = \lambda Y$$

$$\frac{1}{w}\frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{w}p\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{q}{w}y=\lambda y$$

$\therefore$ comparando este resultado con (A) se cumple que:

i) $\alpha_0(x)=\dfrac{p(x)}{w(x)}$

ii) $\alpha_1(x)=\dfrac{1}{w(x)}\dfrac{dp(x)}{dx}$

iii) $\alpha_2(x)=\dfrac{q(x)}{w(x)}$

si conocemos $\alpha_i(x)$ $(i=0,1,2)$ podemos hallar $p(x)$, $q(x)$ y $w(x)$.

de (i) $w=\dfrac{p}{\alpha_0}$; en (ii) $\alpha_1=\dfrac{\alpha_0}{p}\dfrac{dp}{dx}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p(x)=e^{\int\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}dx}}$$

luego en (iii) $\dfrac{q}{w} = \alpha_2$

$$\Downarrow$$

$$q = \alpha_2 w = \alpha_2 \frac{p}{\alpha_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{q(x) = \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_0(x)} e^{\int \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)} dx}}$$

finalmente:

$$\boxed{w(x) = \frac{1}{\alpha_0(x)} e^{\int \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)} dx}}$$

Obs. Recordar que al proyectar en autovectores de posición ocurren las siguientes equivalencias:

$$\hat{k} \longleftrightarrow -i\frac{d}{dx}$$

$$g(\hat{k}) \longleftrightarrow g\left(-i\frac{d}{dx}\right)$$

$$f(\hat{x}) \longleftrightarrow f(x)$$

Analizando EDO's

I) Ecuación de Legendre

$\Downarrow$

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' = -\ell(\ell+1)\,y$$

a) condiciones: (i) $\ell \in \{\mathbb{N} + \{0\}\}$

(ii) $y(x)$ es válida para $x \in [-1,1]$

$y(x) = 0$ si $x \notin [-1,1]$

b) Características a priori

$\Downarrow$

Es un problema de valores propios, estos son discretos

$\Downarrow$

$\{y(x) = y_\ell(x) = P_\ell(x)\}$ forman una base vectorial completa de funciones.

c) Hallando la forma autoadjunta

$\Downarrow$

donde $\alpha_0(x) = 1 - x^2$, $\alpha_1(x) = -2x$

y $\alpha_2(x) = 0$

luego $p = e^{\int \frac{\alpha_1}{\alpha_0} dx} \Longrightarrow -\int \frac{2x}{1-x^2} dx = \ln(1-x^2)$

$$\Downarrow$$

$$p = 1 - x^2$$

$$q = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} p = 0$$

y $w = \frac{p(x)}{\alpha_0(x)} = \frac{1-x^2}{1-x^2} = 1.$

∴ la forma autoadjunta es:

$$\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] P_\ell(x) = -\ell(\ell+1) P_\ell(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\left[-\hat{k}(1-\hat{x}^2)\hat{k}\right]|\ell\rangle = -\ell(\ell+1)|\ell\rangle$$

M $\langle x|\ell\rangle = P_\ell(x)$

$$\Downarrow$$

$\langle \ell|\ell'\rangle = \delta_{\ell\ell'} A^2$ (donde A es una cte. de normalización, es 1 si $|\ell\rangle$ ya está normalizado) si no $|\ell\rangle$ no está normalizada basta redefinir $|\tilde{\ell}\rangle = \frac{|\ell\rangle}{A}$

m $\langle\tilde{\ell}|\tilde{\ell}'\rangle = \delta_{\ell\ell'} \Rightarrow \langle x|\tilde{\ell}\rangle = \tilde{P}_\ell(x)$

$\Downarrow$

i) $$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_\ell^*(x)\,\tilde{P}_{\ell'}(x)\,dx = \delta_{\ell\ell'}$$ // (condición de ortonormalidad)

ii) condición de completitud

$\Downarrow$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |\tilde{\ell}\rangle\langle\tilde{\ell}| = \hat{\mathbb{1}}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{P}_\ell(x)\,\tilde{P}_\ell^*(x') = \delta(x-x')$$ //

Obs. La función $P_\ell(x)$ se conoce como polinomio de Legendre.
cumple con:
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}$$

iii) $$|\phi\rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\,|\tilde{\ell}\rangle \quad ; \quad a_\ell = \langle\tilde{\ell}|\phi\rangle$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$$\phi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\,\tilde{P}_\ell(x) \quad // \qquad a_\ell = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_\ell^*(x)\,\phi(x)\,dx$$ //

Ej: Función de Bessel

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 \right] Y(x) = \nu^2 Y(x)$$

- Con $x \in [0, \infty]$
- $\nu \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ No significa que operador sea hermitiano.
- $Y(x) \equiv J_\nu(x)$ (Función de Bessel de 1^{er} tipo)

Hasta ahora solo una base vectorial de fns. completa $\longleftarrow$ El operador no es hermitiano!!!

$\uparrow$ Demostrar

$\therefore$

$$x^2 Y'' + x Y' + x^2 Y = \nu^2 Y$$

$\Downarrow$

$$\alpha_0 = x^2 \qquad \alpha_1 = x \qquad \alpha_2 = x^2$$

$$\Longrightarrow \quad p = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

$$q = x$$

$$w = \frac{1}{x}$$

Luego la forma autoadjunta es:

$$\left[\frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} \right) + x \right] Y(x) = \nu^2 \frac{1}{x} Y(x)$$

¿ $Y(x)$ es completa pero no ortogonal ?

¿Que es lo ortogonal?

Suponga la sigte. forma autoadjunta

$$\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right] Y_\lambda(x) = \lambda\, w(x)\, Y_\lambda(x)$$

con $Y(x)$ válida en $x \in [a,b]$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left[-\hat{k}\, p(\hat{x})\hat{k} + q(\hat{x})\right]}_{\hat{A}} |Y_\lambda\rangle = \lambda \underbrace{w(\hat{x})}_{\hat{B}^2} |Y_\lambda\rangle$$

$\uparrow \hat{B} = B(\hat{x})$

Def.

con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ hermitianos

$$\Downarrow$$

$$\hat{A}|Y_\lambda\rangle = \lambda \hat{B}^2 |Y_\lambda\rangle \quad / \hat{B}^{-1}$$

$$\hat{B}^{-1}\hat{A}|Y_\lambda\rangle = \lambda \hat{B}|Y_\lambda\rangle$$

o equivalentemente:

$$\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{B}^{-1}\hat{B}|\psi_\lambda\rangle = \lambda\hat{B}|\psi_\lambda\rangle$$

Def. $|\xi_\lambda\rangle = \hat{B}|\psi_\lambda\rangle$, además se observa que $(\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{B}^{-1})^\dagger = \hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{B}^{-1}$

∴ la función $\langle x|\xi_\lambda\rangle = \xi_\lambda(x)$ es una función ortogonal es en el intervalo $[a,b]$ y forma una base vectorial de funciones.

$$\boxed{\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{B}^{-1}|\xi_\lambda\rangle = \lambda|\xi_\lambda\rangle}$$

si λ discreto

$$\langle\xi_\lambda|\xi_{\lambda'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$$ (suponiendo $|\xi_\lambda\rangle$ normalizado)

$$\sum_{\substack{\forall\lambda \\ \text{posible}}} |\xi_\lambda\rangle\langle\xi_\lambda| = \hat{\mathbb{1}}$$

o equivalentemente

$$\int_a^b \xi_\lambda^*(x)\,\xi_{\lambda'}(x)\,dx = \delta_{\lambda\lambda'}$$

pero $\xi_\lambda(x) = \langle x|\xi_\lambda\rangle$

$= \langle x|B(\hat{X})|\Upsilon\rangle$

$\xi_\lambda(x) = B(x)\,\Upsilon_\lambda(x)$

$\downarrow$

$$\int_a^b |B(x)|^2\,\Upsilon_\lambda^*(x)\,\Upsilon_{\lambda'}(x)\,dx = \delta_{\lambda\lambda'}$$

asimismo:

$$\sum_{\substack{\forall\lambda\\ \text{posible}}} |\xi_\lambda\rangle\langle\xi_\lambda| = \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow \sum_{\substack{\forall\lambda\\ \text{posible}}} B^*(x)\,\Upsilon_\lambda^*(x)\,B(x')\,\Upsilon_\lambda(x') = \delta(x-x')$$

* Para λ continuo hallar la respectiva regla de ortogonalidad y completitud.