Complemento I : Series hipergeométricas

En general, las soluciones de integrales corresponden a una suma finita de series de potencias de los parámetros que caracterizan a la integral, en particular, en este trabajo haremos referencia básicamente a las funciones hipergeométricas, las cuales están definidas como series de potencias de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= {}_pF_q\left(\left. \begin{array}{c} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{array} \right| x \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \, ... \, (a_p)_n}{(b_1)_n \, ... \, (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde los índices $\{p, q\} \in (\mathbb{N} + \{0\})$, los parámetros $a_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, ..., p)$ y $b_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, ..., q)$, los factores de la forma $(\beta)_n$ se denominan símbolos de Pochhammer y están descritos como sigue:

$$(\beta)_n = \frac{\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\beta)}. \tag{2}$$

Las condiciones de convergencia de la serie en Ec. (1) son las siguientes:

- Si $p < q + 1$, la serie converge absolutamente $\forall \ |x| < \infty$.
- Si $p > q + 1$, la serie no converge a excepción de $x = 0$. Este tipo de series si bien son divergentes, la truncación a cierto orden de interés permite hallar una aproximación asintótica para valores de x pequeños.
- Si $p = q + 1$, existen tres posibilidades:
  1. Si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente.
  2. Si $x = 1$, el requerimiento necesario para la convergencia de la serie es que $\mathrm{Re}(\omega) > 0$, donde ω es llamado exceso paramétrico y está dado por la ecuación:
  $$\omega = \sum_{j=0}^{q} b_j - \sum_{j=0}^{q+1} a_j. \tag{3}$$
  3. Si $x = -1$ es suficiente para que exista convergencia que $\mathrm{Re}(\omega) > -1$.

Varias funciones fundamentales y especiales poseen una representación hipergeométrica, por ejemplo:

- La Función de Bessel modificada de primer tipo: $I_\nu(x) = \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \, {}_0F_1\left(\left. \begin{array}{c} - \\ \nu + 1 \end{array} \right| \tfrac{1}{4}x^2 \right)$
- Una función trigonométrica: $\sin(x) = x \, {}_0F_1\left(\left. \begin{array}{c} - \\ \frac{3}{2} \end{array} \right| - \tfrac{1}{4}x^2 \right)$
- La función Error: $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} \, {}_1F_1\left(\left. \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{array} \right| - x^2 \right)$