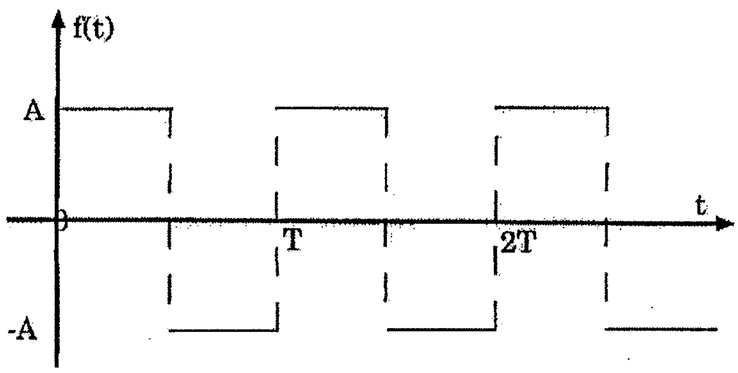
Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba II
Métodos Matemáticos de la Física II
Licenciatura en Física - 2017
IPGG

(I.A) Heaviside y Deltas

Para la siguiente función periódica definida para $t \geq 0$:



a).- (60%) Halle la función $f(t)$ que la representa, utlice para ello la operación de Traslación.
b).- (40%) Halle la función $\frac{df(t)}{dt}$ y grafíquela.

(I.B) Algebrización del operador derivada

Se tiene la siguiente EDO lineal con coeficientes constantes:

$$\left(\hat{\mathrm{p}} - \hat{\mathrm{p}}^2\right) x(t) = te^{-\alpha t}$$

donde $\hat{\mathrm{p}} = \dfrac{d}{dt}$.
a).- (40%) Demuestre que $F(\hat{\mathrm{p}})\, e^{-\alpha t} = F(\alpha)\, e^{-\alpha t}$, siendo $F(\hat{\mathrm{p}})$ una función arbitraria del operador $\hat{\mathrm{p}}$.
b).- (60%) Halle la solución particular $x_p(t)$ para esta EDO.

(II.A) Otras extensiones de IBD

La solución de las integrales de la forma:

$$F(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ist} f(t)\, dt$$

también pueden ser descrita mediante la técnica *IBD* (Integration by Differentiating).

a).- (50%) Demuestre que la representación de la solución por *IBD* de esta familia de integrales es de la forma:

$$F(s) = 2f(-i\partial_s)\left[\frac{\sin(\pi s)}{s}\right]$$

b).- (50%) A partir de la fórmula anterior, halle la identidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ist}\cos(t)\, dt = 2s\frac{\sin(\pi s)}{1-s^2}$$

(II.B) IBD desde la Transformada de Fourier

Se conoce que $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\, dx = 6$, resultado obtenido directamente a partir de la representación integral de la función Gamma. Sin embargo se desea demostrar este resultado por otro camino, esta vez utilizando *IBD* derivado de la transformada de Fourier.

Puede ser útil para la demostración, conocer la transformada de Fourier de la función de Heaviside:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\, e^{ikx}\, dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k)$$

(III) Distribución de carga y potencial eléctrico $\phi(\mathbf{r})$

Se tiene un alambre recto de longitud L y carga distribuída uniformemente Q, el cual está dispuesto en el eje z^+ con el extremo inferior en $z = a$.

a).- (40%) Determine la densidad volumétrica de carga $\rho(\mathbf{r}')$ para esta distribución, utilice el sistema cartesiano para representarla.

b).- (40%) Halle la *integral* (no la resuelva) resultante que determina el potencial eléctrico $\phi(\mathbf{r})$ para una posición arbitraria $\mathbf{r}$ debido a esta carga lineal. Recuerde que:

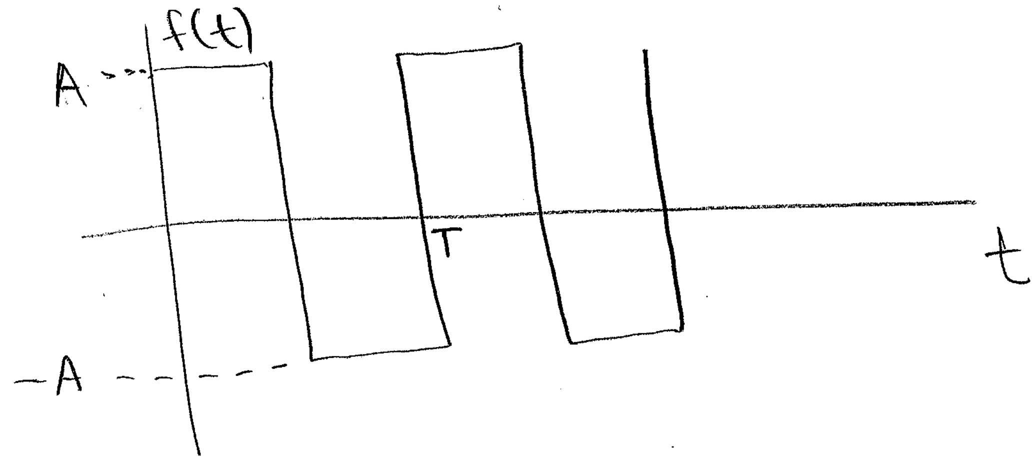
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

c).- (20%) A partir de la expresión anterior escriba la expresión del potencial eléctrico para algún punto arbitrario del plano xy.

PAUTA CERTÁMEN II

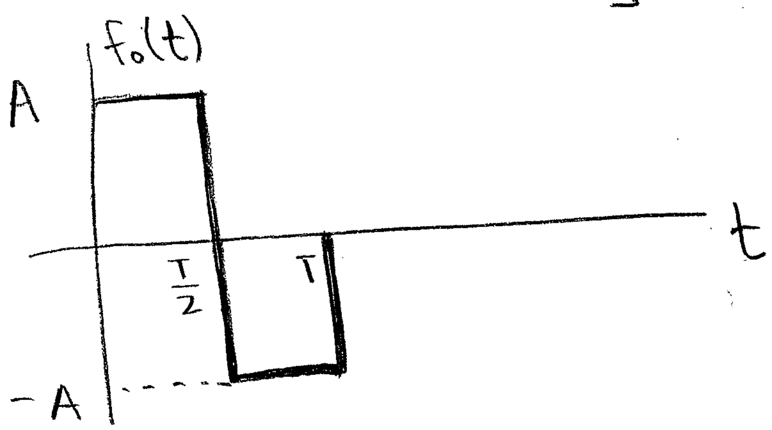
PROBL. 1

a)



Construcción de $f(t)$ en el intervalo $0 \le t \le T$

Llamemos a esta función $f_0(t)$



Esta función está dada por la siguiente expresión:

$$f_0(t) = A\left[H(t) - 2H\left(t-\frac{T}{2}\right) + H(t-T)\right]$$

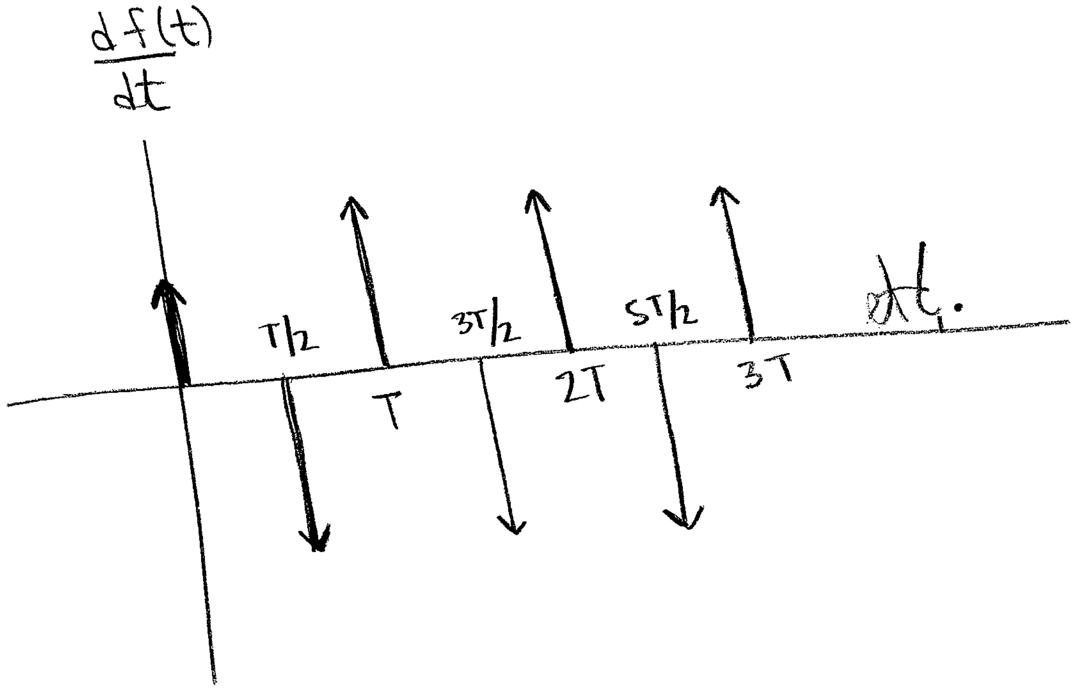
Es posible observar que:

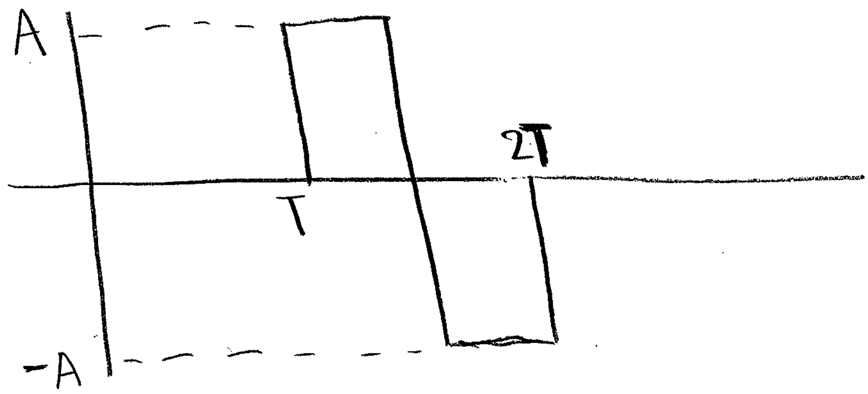
$$e^{-T\partial_t} f_0(t) = A\left[H(t-T) - 2H\left(t-\frac{3}{2}T\right) + H(t-2T)\right]$$

cuya gráfica es la siguiente:

1.2

b)





, Para construir los escalones siguientes se utiliza la misma idea.

$\therefore$ La función $f(t)$ es entonces descrita por la expresión:

$$f(t) = f_0(t) + e^{-T\partial_t} f_0(t) + e^{-2T\partial_t} f_0(t) + \dots$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT\partial_t} \right] f_0(t) \; //$$

Obs. Hay otras formas de escribir $f(t)$, esta es la más compacta.

— Probl. 2

a)

$$F(\hat{p})e^{-\alpha t} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{p}^n\right] e^{-\alpha t} \quad ; \text{ con } \hat{p} = \frac{d}{dt}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\hat{p}^n e^{-\alpha t}\right] \quad \text{y } F(\cdot) = \sum_{n \geq 0} a_n (\cdot)^n$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{p} e^{-\alpha t} = -\alpha e^{-\alpha t}$$

$$\hat{p}^2 e^{-\alpha t} = (-1)^2 \alpha^2 e^{-\alpha t}$$

$$\vdots$$

$$\hat{p}^n e^{-\alpha t} = (-1)^n \alpha^n e^{-\alpha t}$$

Finalmente

$$F(\hat{p}) e^{-\alpha t} = \sum_{n \geq 0} a_n \left[\hat{p}^n e^{-\alpha t}\right]$$

$$= \sum_{n \geq 0} a_n \left[(-\alpha)^n\right] e^{-\alpha t}$$

$$= \left[\sum_{n \geq 0} a_n (-\alpha)^n\right] e^{-\alpha t} = F(-\alpha)\, e^{-\alpha t}$$

QED.

b)

$$(\hat{p} - \hat{p}^2)\, x(t) = t e^{-\alpha t}$$

$$\Downarrow$$

$x_p(t)$ = Solución particular

$$\Downarrow$$

$$x_p(t) = \left(\frac{1}{\hat{p} - \hat{p}^2}\right) t e^{-\alpha t}$$

Obs.: $t e^{-\alpha t} = -\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha t}$

$$\therefore \; x_p(t) = -\left(\frac{1}{\hat{p} - \hat{p}^2}\right) \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha t}$$

Obs.: Las derivadas en t y α se pueden intercambiar de orden (conmutan).

$$\Downarrow$$

$$x_p(t) = -\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{(\hat{p} - \hat{p}^2)} e^{-\alpha t}\right]$$

por el item (a) se obtiene entonces que:

$$x_p(t) = -\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{-\alpha-(-\alpha)^2} e^{-\alpha t}\right]$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha+\alpha^2} e^{-\alpha t}\right]$$

$$= -\left[\frac{\alpha t(1+\alpha)+2\alpha+1}{(1+\alpha)^2\alpha^2}\right] e^{-\alpha t}$$

$$= -\frac{te^{-\alpha t}}{(1+\alpha)\alpha} - \frac{(2\alpha+1)}{(1+\alpha)^2\alpha^2} e^{-\alpha t} \quad //$$

– PROBL. 3

a) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ist} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ist}\left[\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right] dt$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n \int_{-\pi}^{\pi} t^n e^{ist}\,dt$$

Se conoce que : $t^n e^{ist} = (-i\partial_s)^n e^{ist}$; $\partial_s = \frac{d}{ds}$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^{ist} f(t)\,dt = \left[\sum_{n\geq 0} a_n (-i\partial_s)^n\right] \int_{-\pi}^{\pi} e^{ist}\,dt$$

$$= f(-i\partial_s) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ist}\,dt$$

$$= f(-i\partial_s)\,\frac{1}{is}\underbrace{\left[e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}\right]}_{2i\,\mathrm{sen}(\pi s)}$$

$$= 2\,f(-i\partial_s)\left[\frac{\mathrm{sen}(\pi s)}{s}\right]$$

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ist}\cos t\,dt = 2\cos(-i\partial_s)\left[\frac{\mathrm{sen}(\pi s)}{s}\right]$$

$$= \cancel{2}\left(\frac{e^{-\partial_s} + e^{\partial_s}}{\cancel{2}}\right)\left[\frac{\mathrm{sen}(\pi s)}{s}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}[\pi(s-1)]}{s-1} + \frac{\operatorname{sen}[\pi(s+1)]}{s+1}$$

Obs. $\operatorname{sen}[\pi(s-1)] = \operatorname{sen}[\pi s - \pi] = -\operatorname{sen}(\pi s)$

$\operatorname{sen}[\pi(s+1)] = \operatorname{sen}[\pi s + \pi] = -\operatorname{sen}(\pi s)$

$\therefore$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ist} \cos t \, dt = -\operatorname{sen}(\pi s) \left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right]$$

$$= -\operatorname{sen}(\pi s) \left[\frac{s+1 + s-1}{(s-1)(s+1)} \right]$$

$$= -\operatorname{sen}(\pi s) \cdot \frac{2s}{(s^2-1)}$$

$$= \frac{2s \operatorname{sen}(\pi s)}{1-s^2} \qquad \text{QED.}$$

- PROBL. 4

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\, x^3 e^{-x}\,dx$$

$$= 2\pi \left(-i\partial_k\right)^3 e^{i\partial_k} H(-i\partial_k)\,\delta(k)\Big|_{k=0} \qquad (*)$$

por otro lado

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} H(x)\,dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(k)$$

$$= \sqrt{2\pi}\, H(-i\partial_k)\,\delta(k)$$

$$\therefore\ H(-i\partial_k)\,\delta(k) = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\delta(k)$$

Reemplazando en $(*)$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = 2\pi\left(-i\partial_k\right)^3 e^{i\partial_k}\left[\frac{i}{2\pi}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\delta(k)\right]\Bigg|_{k=0}$$

$$= 2\pi\left(-i\partial_k\right)^3\left[\frac{i}{2\pi}\frac{1}{k+i}+\frac{1}{2}\delta(k+i)\right]\Bigg|_{k=0}$$

$$= -i^4\,\partial_k^3\left[\frac{1}{k+i}\right]+\pi i\,\delta^{(3)}(k+i)\Bigg|_{k=0}$$

$$= -\left(-\frac{6}{(k+i)^4}\right)+i\pi\,\delta^{(3)}(k+i)\Bigg|_{k=0}$$

$$= \frac{6}{i^4}+i\pi\,\cancelto{0}{\delta^{(3)}(i)} = 6$$

OTRA FORMA.

$$\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\,x^3e^{-x}\,dx = 2\pi\left(-i\partial_k\right)^3H(-i\partial_k)\,\delta(k)\Bigg|_{k=-i}$$

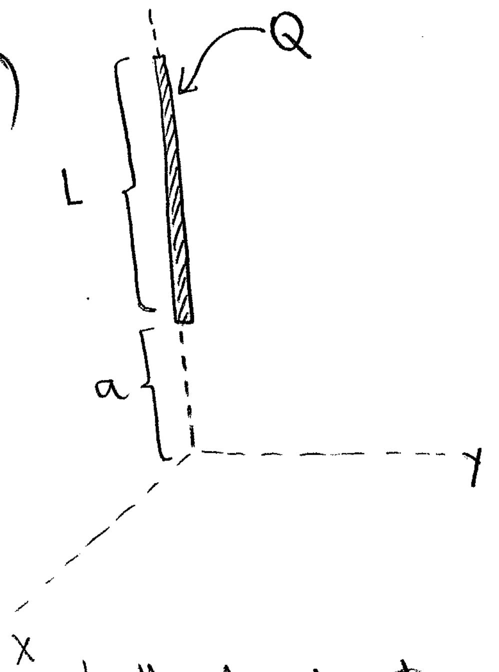
$$=\left(-i\partial_k\right)^3\left[\frac{i}{k}+\pi\,\delta(k)\right]_{k=-i}$$

$$=\left[-\partial_k^3\left[\frac{1}{k}\right]+i\pi\,\cancelto{0}{\delta^{(3)}(k)}\right]_{k=-i}$$

$$=\left(\frac{6}{k^4}\right)_{k=-i} = \frac{6}{i^4}=6$$

— PROBL. 5

a)



Para este caso la densidad debe estar dada por:

$$\rho(\vec{r}\,') = C\,\delta(x')\,\delta(y')\left[H(z'-a) - H(z'-L-a)\right]$$

hallando la cte. C:

$$\int_{\substack{\text{ALL}\\\text{SPACE}}} \rho(\vec{r}\,')\,dV' = Q = \lambda_0 L$$

Por otro lado

$$Q = \int_{\substack{\text{ALL}\\\text{SPACE}}} \rho(\vec{r}\,')\,dV' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C\,\delta(x')\,\delta(y')\left[H(z'-a) - H(z'-a-L)\right]dx'dy'dz'$$

$$= C\int_{a}^{a+L} dz' = CL$$

$$\therefore \quad \lambda_0 L = CL \implies C = \lambda_0.$$

y finalmente

$$\rho(\vec{r}\,') = \lambda_0\,\delta(x')\,\delta(y')\left[H(z'-a) - H(z'-a-L)\right]$$

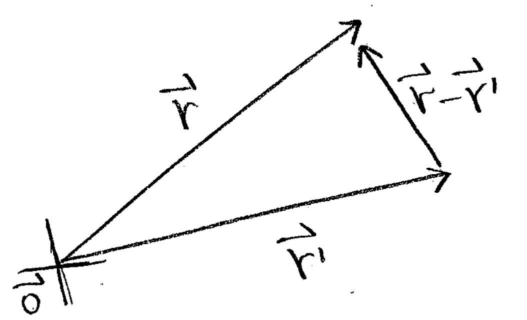
b)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{ALL SPACE}} \frac{\rho(\vec{r}\,')\, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

donde

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}\,' = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k}$$



$$\therefore\ |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

Luego

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_0\, \delta(x')\,\delta(y')\left[H(z'-a) - H(z'-a-L)\right] dx'\,dy'\,dz'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{\lambda_0}{\left[x^2 + y^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}\, dz'$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{1}{\left[r^2 - 2zz' + z'^2\right]^{1/2}}\, dz'$$

con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

c) haciendo $z=0$:

$$\phi(x,y,0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{1}{\left[x^2+y^2+z'^2\right]^{1/2}}\, dz' \quad //$$