Física Contemporánea

Dr. Víctor H. Cárdenas
Instituto de Física y Astronomía
Universidad de Valparaíso

13. Pre-cuántica

- Radiación de Planck
- Interpretación de Einstein

Radiación de cuerpo negro

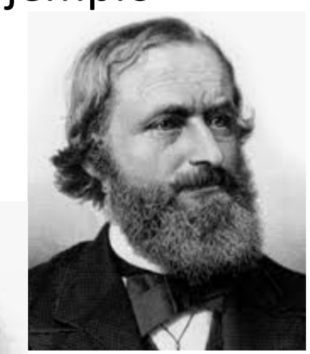
¿Cómo irradian y absorben los cuerpos?

Vibraciones de las moléculas transfieren energía mecánica en o.e.m.

La absorción ocurre para algunas frecuencias.

¿Cómo reflejan los metales? Las oscilaciones inducidas por las o.e.m. sobre los electrones hacen re-emitir radiación.

Kirchhoff demostró que buenos absorbentes deben ser buenos emisores (ejemplo de una pieza llena de objetos a igual T)



La radiación depende entonces de T y varía en frecuencia: ¿cuál será esta distribución? (Kirchhoff, 1859). Cuerpo negro.

Ley de Stefan (1879)

$$P = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ watts/sq.m./K}^4.$$

Radiación de cuerpo negro

Boltzman dedujo esta ley en 1884

$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2 / \mu_0\right)$ $\quad \vec{P} = \varepsilon_0 \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$ en una onda $B = E/c$, entonces

$$u = \varepsilon_0 \vec{E}^2 \qquad \left|\vec{P}\right| = \varepsilon_0 \vec{E}^2 / c$$

O bien $E = cp.$

La presión ejercida por ondas será $P = \frac{1}{3} u.$

Entonces de $dU = TdS - PdV$ y de las definiciones $u = U/V,\ s = S/V,$

$$du = Tds + \frac{1}{V}\left(Ts - \frac{4}{3}u\right)dV.$$

pero

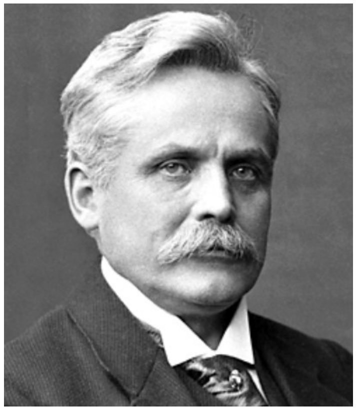
$$du = Tds \qquad Ts = \frac{4}{3}u \qquad \frac{du}{ds} = T = \frac{\frac{4}{3}u}{s}$$

finalmente

$$u = \text{constant} \times s^{4/3} \qquad \boxed{u = aT^4}$$

Radiación de cuerpo negro

Ley de Wien (1893)



Un contenedor cubico de lado L se expande isotrópica y adiabáticamente.

Las ondas estacionarias tienen longitudes de onda que *escalan con L*.

$$\lambda^3 \propto V$$

Para las o.e.m. $PV = \frac{1}{3}U$ Que sea adiabático $dU = -PdV$

Luego $P^{3/4}V = \text{constant}$ usando la ley de Stefan $T^3V = \text{constant.}$

Entonces a medida que aumenta el volumen, las frecuencias crecen

$$f_1 = \frac{T_1}{T_2} f_2, \quad df_1 = \frac{T_1}{T_2} df_2.$$

De la Ley de Stefan la radiación total sería

$$\int_0^\infty \rho(f_1, T_1)\, df_1 = \frac{T_1^4}{T_2^4} \int_0^\infty \rho(f_2, T_2)\, df_2$$

Radiación de cuerpo negro

A partir de la hipótesis de Wien:

$$\rho(f_1, T_1)\, df_1 = \frac{T_1^4}{T_2^4}\rho(f_2, T_2)\, df_2.$$

Usando

$$f_1 = \frac{T_1}{T_2} f_2, \quad df_1 = \frac{T_1}{T_2} df_2.$$

encontramos

$$\rho\left(\frac{T_1}{T_2} f_2, T_1\right) \frac{T_1}{T_2} df_2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 \rho(f_2, T_2)$$

simplificando

$$\boxed{\rho(f, T) = T^3 \rho\left(\frac{f}{T}, 1\right)}$$

Luego la distribución tiene la misma forma como función de *f/T.*

Si la radiación es más intensa en una frecuencia, entonces

$$\boxed{f_{\max} \propto T.}$$

Radiación de cuerpo negro

En 1890 se logró medir la emisión de un cuerpo negro tipo.

A baja frecuencia, este crece cuadráticamente

Para

$$f_{\max}(2T) = 2f_{\max}(T)$$

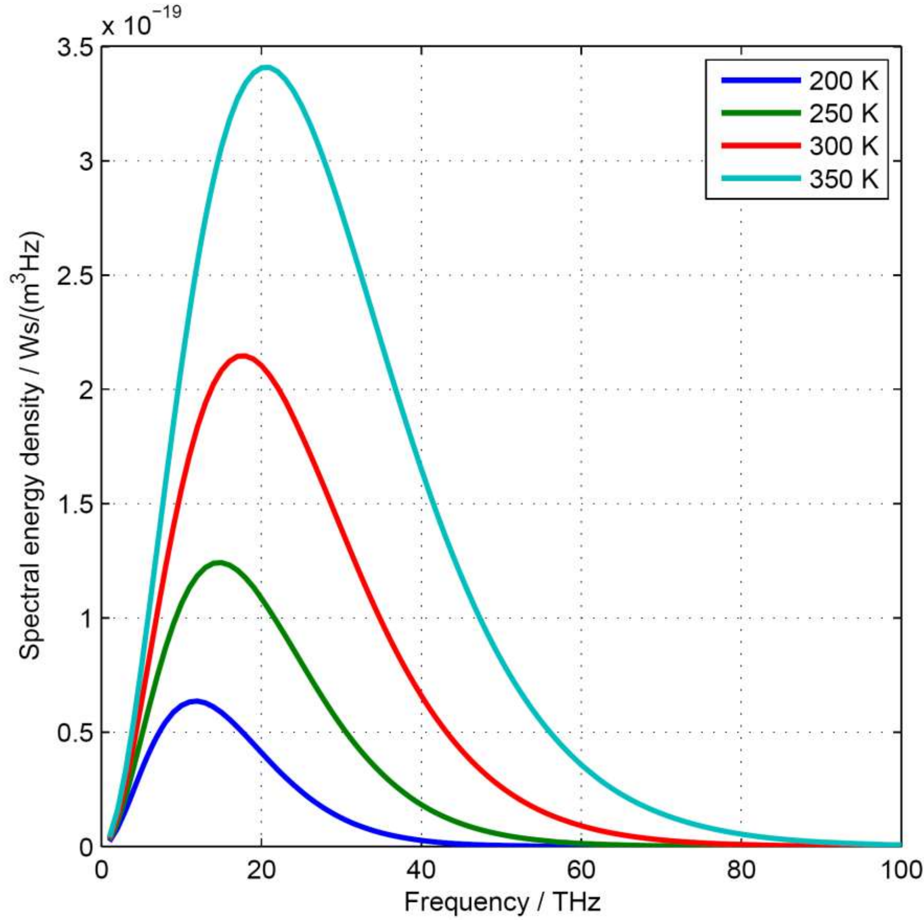
La curva $\rho(f, 2T)$, es 8 veces la altura de $\rho(f, T)$.

Y se extiende el doble lateralmente, así el area bajo la curva al doblar T es 16 veces,

$$P = \sigma T^4.$$

En 1900 Planck sugirió una explicación para el resultado: la energía *se emite y absorbe en cuantos de energía* *hf* donde

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ joule.sec.}$$



$$\rho(f,T)=T^3\rho\left(\frac{f}{T},1\right)$$

Radiación de cuerpo negro

La historia de Planck

Basado en su trabajo, Wien sugirió $\rho(f)=\alpha f^3 e^{-\beta f/T}$, pero a baja *f* esta crecía con f^2

Planck asume la emisión modelada por un oscilador

$$m\ddot{x}+m\omega_0^2 x-\left(2e^2/3c^3\right)\dddot{x}=eE\cos\omega t.$$

para pequeñas amortiguaciones

$$-\left(2e^2/3c^3\right)\dddot{x}=-\left(2e^2/3c^3\right)\omega^2\dot{x}=-\gamma\dot{x},$$

Cuya amplitud y energía

$$A=\frac{eE}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}},\qquad U=\tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2$$

Asumiendo ahora muchos osciladores a diferentes frecuencias alrededor de ω_0

$$U=\tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2\cong\tfrac{1}{2}m\omega_0^2\frac{e^2}{4m^2\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2+(\gamma\omega_0)^2}E^2=\frac{1}{8m}\frac{e^2}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\gamma/2m\right)^2}E^2$$

Radiación de cuerpo negro

Integrando sobre todas las frecuencias alrededor de ω_0 el peso es

$$\frac{\pi e^2}{8m}\frac{2m}{\gamma}=\frac{\pi e^2}{4}\frac{3c^3}{2e^2\omega_0^2}=\frac{3\pi c^3}{8\omega_0^2}$$

luego

$$E^2=\frac{8\omega_0^2}{3\pi c^3}U$$

Este resultado es para 1D. Generalizando a 3D podemos identificar

$$E^2/2\rightarrow 4\pi\rho(\omega,T),$$

dando

$$\rho(\omega_0,T)=\frac{\omega_0^2}{3\pi^2c^3}U\ ,$$

O bien

$$\boxed{\rho(f,T)=\left(8\pi f^2/c^3\right)U(f,T)}$$

$$\boxed{\rho(f)=\alpha f^3 e^{-\beta f/T},}$$

Que relaciona densidad de radiación con la energía del oscilador.

Radiación de cuerpo negro

$$\boxed{\rho(f,T)=\left(8\pi f^2/c^3\right)U(f,T)}$$

$$\boxed{\rho(f)=\alpha f^3 e^{-\beta f/T},}$$

Luego

$$U(f)=\frac{\alpha c^3 f}{8\pi}e^{-\beta f/T}$$

Y de *T dS = dE*

$$S=-\frac{U}{\beta f}\left(\ln\frac{8\pi U}{\alpha f c^3}-1\right)$$

a partir de la cual

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}=-\frac{1}{\beta f U},$$

En 1900 los resultados de Rubens and Kurlbaum muestran que la densidad va con f^2

O sea, la equipartición funciona a baja frecuencia, así $U=kT$ y como $dU=TdS,$

asi

$$\partial^2 S/\partial U^2=-k/U^2$$

Planck propuso

$$\partial^2 S/\partial U^2=-\frac{k}{U(hf+U)}$$

Radiación de cuerpo negro

Integrando 2 veces $S = k\left[\left(1+U/hf\right)\ln\left(1+U/hf\right)-\left(U/hf\right)\ln\left(U/hf\right)\right]$

luego

$$\frac{dS}{dU} = \frac{k}{hf}\left[\ln\left(1+\frac{U}{hf}\right)-\ln\frac{U}{hf}\right] = \frac{1}{T}, \qquad \boxed{U = \frac{hf}{e^{hf/kT}-1}.}$$

Y la densidad de radiación

$$\boxed{\rho\left(f,T\right) = \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/kT}-1}}$$

Planck reconoció un cálculo de Boltzmann para N osciladores $NS = Nk\ln W$

$$W = \frac{\left(N+M-1\right)!}{M!\left(N-1\right)!} \qquad \ln N! \cong N\ln N - N$$

$$\ln W = N\left[\left(1+M/N\right)\ln\left(1+M/N\right)-\left(M/N\right)\ln\left(M/N\right)\right]$$

$$U/hf = M/N, \text{ or } NU = Mhf.$$

Interpretación de Einstein

$$\boxed{\rho(f,T)=\frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/kT}-1}}$$

En marzo de 1905

$$\rho(f,T)=\frac{8\pi f^2}{c^3}kT \qquad \rho(f,T)\,df=\frac{8\pi Vhf^3 df}{c^3}e^{-hf/kT} \qquad hf \gg kT$$

Analogía con un gas

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-E/kT}, \qquad f(E)=\left[4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\right]Ee^{-E/kT}$$

Un gas de osciladores con $E=hf$,

$$\rho(f,T)=\frac{8\pi f^2 hf}{c^3}e^{-hf/kT}$$

$$=\left[\frac{8\pi f^2}{c^3}\right]Ee^{-E/kT}.$$