Órbitas circulares para fotones en plasma

Cuando el potencial efectivo posee un máximo, aparece la llamada esfera de fotones, lo que nos permite, a su vez, determinar la sombra de los agujeros negros.

Ya que el máximo genera una órbita circular (inestable), tenemos $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ en $r = r_c$, y así $p_r = 0$. Luego,

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2\omega_0^2}{A(r)} + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \hbar^2\omega_e^2(r) = 0} \qquad (*)$$

Además, $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = A(r)\, p_r \Rightarrow \boxed{p_r = \frac{\dot{r}}{A(r)}}$

$$\therefore \dot{p}_r = \frac{\ddot{r}}{A(r)} - \frac{A'(r)}{A^2(r)} \cdot \dot{r}^2$$

$\Rightarrow$ En la órbita circular $\boxed{\dot{p}_r = 0}$

También $\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}$

$$\dot{p}_r = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p_t^2 A'}{A^2(r)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 p_\phi^2}{r^3} + \frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dr}\omega_e^2\right) = 0$$

cl 27 ②

$\dot{p}_r = 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{p_t^2 A'}{A^2} + \frac{2p_\phi^2}{r^3} - \frac{d}{dr}(\hbar^2\omega_e^2) = 0}$ $(**)$

De $(*)$ $\boxed{\frac{p_\phi^2}{r^2} = \frac{\hbar^2\omega_0^2}{A} - \hbar^2\omega_e^2}$ $(\bigstar)$

De $(**)$ $\boxed{\frac{2p_\phi^2}{r^3} = \frac{\hbar^2\omega_0^2 A'}{A^2} + \frac{d}{dr}(\hbar^2\omega_e^2)}$ $(\bigstar\bigstar)$

$(\bigstar)$ $p_\phi^2 = r^2\left(\frac{\hbar^2\omega_0^2}{A(r)} - \hbar^2\omega_e^2(r)\right)$

$(\bigstar\bigstar)$ $p_\phi^2 = \frac{r^3}{2}\left(\frac{\hbar^2\omega_0^2 A'(r)}{A^2(r)} + \frac{d}{dr}(\hbar^2\omega_e^2)\right)$

Restando ambas ecuaciones

$$0 = r^2\left\{\frac{\hbar^2\omega_0^2}{A} - \hbar^2\omega_e^2 - \frac{r}{2}\frac{\hbar^2\omega_0^2 A'}{A^2} - \frac{r(\hbar^2\omega_e^2)'}{2}\right\}$$

$$\frac{1}{2r}0 = r^2\left\{\hbar^2\omega_0^2\left(\frac{1}{A} - \frac{r}{2}\frac{A'}{A^2}\right) - \left(\hbar^2\omega_e^2 + \frac{r}{2}(\hbar^2\omega_e^2)'\right)\right\}$$

$$0 = \frac{r}{2}\left\{\hbar^2\omega_0^2\left(\frac{2r}{A} - r^2\frac{A'}{A^2}\right) - \left(2r\,\hbar^2\omega_e^2 + r^2(\hbar^2\omega_e^2)'\right)\right\}$$

ec 27 ③

$$0 = \hbar^2 \omega_0^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{A}\right) - \frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot \hbar^2 \omega_e^2\right) = 0$$

$$0 = \hbar^2 \omega_0^2 \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{A} - r^2 \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}\right)\right]$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{1}{A(r)} - \frac{\omega_e^2(r)}{\omega_0^2}\right)\right] = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dr} h^2(r) = 0} \leftarrow \text{En una órbita circular.}$$

Esta ecuación determina el radio de la esfera de fotones.

Notemos que se satisface si hacemos $h^2(r) = C$: cte.

$$\therefore \quad r^2\left(\frac{1}{A(r)} - \frac{\omega_e^2(r)}{\omega_0^2}\right) = C$$

$$\frac{1}{A(r)} - \frac{\omega_e^2(r)}{\omega_0^2} = \frac{C}{r^2}$$

$$\frac{\omega_e^2(r)}{\omega_0^2} = \frac{1}{A(r)} - \frac{C}{r^2}$$

$$\omega_e(r) = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{A(r)} - \frac{C}{r^2}}$$

$$\frac{1}{A(r)} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} = \frac{r}{r - r_s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_e(r) = \omega_0 \sqrt{\frac{r}{r - r_s} - \frac{C}{r^2}}}$$

Perfil para la frecuencia del plasma en la órbita circular.

La constante C debe satisfacer

$$\frac{r^3}{r - r_s} > C$$

Nota: Recordar que en el caso de vacío la esfera de fotones se encuentra en $r = \frac{3}{2} r_s = 3M$.