NOTA 1

Serie de Taylor de $f(x)$

↓

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

↓

Serie o expansión en torno a $x = x_0$

↓

Si $x_0 = 0$ ⟶ SERIE DE McLAURIN

↓

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

↓

<u>Objetivo</u>: Determinar los coeficientes a_n.

Serie de McLaurin (Taylor con $X_0=0$)

Sea

$$* \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \dots$$

Hay que hallar los coef. a_n !!!

$$f(0) = a_0 = 0!\, a_0 \,/\!/$$

$$* \quad f'(x) = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \dots$$

$$f'(0) = a_1 = 1!\, a_1 \,/\!/$$

$$* \quad f''(x) = 2a_2 + 2.3 a_3 X + \dots$$

$$f''(0) = 2a_2 = 1.2\, a_2 = 2!\, a_2 \,/\!/$$

$$* \quad f'''(x) = 2.3\, a_3 + o(x)$$

$$f'''(0) = 2.3.a_3 = 1.2.3\, a_3 = 3!\, a_3$$

$$\vdots$$

$$\therefore \quad f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

$$\Downarrow$$

Entonces los coeficientes quedan así determinados

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}}$$

Obs. La serie p/ $f(x)$ existe si $f^{(n)}(0)$ está definida.

Serie de M^cLaurin de $f(x) = \text{sen}(x)$

- $f(x) = \text{sen}\, x$

  $f(0) = 0$

- $f'(x) = \cos x$

  $f'(0) = 1$

- $f''(x) = -\text{sen}\, x$

  $f''(0) = 0$

- $f^{(3)}(x) = -\cos x$

  $f^{(3)}(0) = -1$

- $f^{(4)}(x) = \text{sen}\, x$

  $f^{(4)}(0) = 0$

- $f^{(5)}(x) = \cos x$

  $f^{(5)}(0) = 1.$

$\vdots$

Solo derivadas impares tienen un valor no nulo en $x=0$.

dado que $a_n = \dfrac{1}{n!} \dfrac{d^{(n)} f(x)}{dx^n} \Big|_{x=0}$.

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = 0$

$a_3 = -1$

$a_4 = 0$

$a_5 = 1$

$\vdots$

y luego

$$\text{sen}\, x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots$$

$$= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \ldots$$

lo que se puede resumir en:

$$\text{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

* Se procede de igual forma para $f(x) = \cos(x)$