Apuntes FIS - 411
Licenciatura en Física mención Astronomía
Universidad de Valparaiso
Valparaiso, Chile

Iván P. González G.*

1 Derivación del principio de incertidumbre (Heisenberg) (paso a paso)

Para dos operadores $\widehat{\Omega}$ y $\widehat{\Lambda}$, ambos hermitianos:

$$\begin{cases} \widehat{\Lambda}^{\dagger} = \widehat{\Lambda} \\ \widehat{\Omega}^{\dagger} = \widehat{\Omega} \end{cases} \tag{1}$$

Podemos de manera general expresar el conmutador entre ambos operadores tal como sigue:

$$\left[\widehat{\Omega}, \widehat{\Lambda}\right] = i\widehat{\Gamma} \tag{2}$$

Obs. : $\widehat{\Gamma}$ es un operador hermítico. Es fácil demostrar este hecho. A partir de la Ec. (2) obtenemos que:

$$\widehat{\Gamma} = -i\left[\widehat{\Omega}, \widehat{\Lambda}\right] \tag{3}$$

aplicando el adjunto a la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}^{\dagger} &= -\left(i\left[\widehat{\Omega}, \widehat{\Lambda}\right]\right)^{\dagger} = -(i)^{*}\left[\widehat{\Omega}, \widehat{\Lambda}\right]^{\dagger} = i\left(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda} - \widehat{\Lambda}\widehat{\Omega}\right)^{\dagger} \\ &= i\left(\left(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}\right)^{\dagger} - \left(\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega}\right)^{\dagger}\right) = i\left(\widehat{\Lambda}^{\dagger}\widehat{\Omega}^{\dagger} - \widehat{\Omega}^{\dagger}\widehat{\Lambda}^{\dagger}\right) = i\left(\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}\right) \\ &= -i\left(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda} - \widehat{\Lambda}\widehat{\Omega}\right) = -i\left[\widehat{\Omega}, \widehat{\Lambda}\right] \\ &= \widehat{\Gamma}\ (\mathcal{QED}) \end{aligned} \tag{4}$$

*e-mail : ivan.gonzalez@usm.cl, ivan.gonzalez@uv.cl

Obs. : De manera similar demostraremos que el anticonmutador $\left\{\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}\right\}$ también da origen a un operador hermítico. Veamos:

$$\left\{\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}\right\}^{\dagger}=\left(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}+\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega}\right)^{\dagger}=\left(\widehat{\Lambda}^{\dagger}\widehat{\Omega}^{\dagger}+\widehat{\Omega}^{\dagger}\widehat{\Lambda}^{\dagger}\right)=\left(\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega}+\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}\right)=\left\{\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}\right\}\ (\mathcal{QED}) \tag{5}$$

Luego:

$$\begin{cases}\left\{\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}\right\}^{\dagger}=\left\{\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}\right\}\\ \widehat{\Gamma}^{\dagger}=\widehat{\Gamma}\end{cases} \tag{6}$$

Estas propiedades nos serán muy útiles más adelante.

Pues bien supongamos ahora cierto estado $|\Psi\rangle$ el cual ya está normalizado : $\langle\Psi\,|\Psi\rangle=1$ y con el cual podemos evaluar las incertezas en las mediciones asociadas a $\widehat{\Omega}$ y $\widehat{\Lambda}$, esto es:

$$(\Delta\Omega)^2=\langle\Omega^2\rangle-\langle\Omega\rangle^2=\left\langle\Psi\left|\widehat{\Omega}^2\right|\Psi\right\rangle-\left\langle\Psi\left|\widehat{\Omega}\right|\Psi\right\rangle^2 \tag{7}$$

$$(\Delta\Lambda)^2=\langle\Lambda^2\rangle-\langle\Lambda\rangle^2=\left\langle\Psi\left|\widehat{\Lambda}^2\right|\Psi\right\rangle-\left\langle\Psi\left|\widehat{\Lambda}\right|\Psi\right\rangle^2 \tag{8}$$

Sin embargo utilizaremos estas expresiones equivalentes:

$$(\Delta\Omega)^2=\left\langle\Psi\left|\left(\widehat{\Omega}-\langle\Omega\rangle\right)^2\right|\Psi\right\rangle \tag{9}$$

$$(\Delta\Lambda)^2=\left\langle\Psi\left|\left(\widehat{\Lambda}-\langle\Lambda\rangle\right)^2\right|\Psi\right\rangle \tag{10}$$

La demostración de la equivalencia es la siguiente. Para un operador arbitrario $\widehat{\chi}$, la incerteza es dada por la expresión:

$$\begin{aligned}(\Delta\chi)^2&=\left\langle\Psi\left|(\widehat{\chi}-\langle\chi\rangle)^2\right|\Psi\right\rangle=\left\langle\Psi\left|\widehat{\chi}^2-2\widehat{\chi}\langle\chi\rangle+\langle\chi\rangle^2\right|\Psi\right\rangle\\&=\left\langle\Psi\left|\widehat{\chi}^2\right|\Psi\right\rangle-2\langle\chi\rangle\langle\Psi\,|\widehat{\chi}|\,\Psi\rangle+\langle\chi\rangle^2\langle\Psi\mid\Psi\rangle\\&=\langle\chi^2\rangle-2\langle\chi\rangle\langle\chi\rangle+\langle\chi\rangle^2\\&=\langle\chi^2\rangle-\langle\chi\rangle^2\ (\mathcal{QED})\end{aligned} \tag{11}$$

Esto es:

$$\left\langle\Psi\left|(\widehat{\chi}-\langle\chi\rangle)^2\right|\Psi\right\rangle=\langle\chi^2\rangle-\langle\chi\rangle^2 \tag{12}$$

Luego podemos reescribir el producto de las incertidumbres de una forma diferente:

$$(\Delta\Omega)^2(\Delta\Lambda)^2=\left\langle\Psi\left|\left(\widehat{\Omega}-\langle\Omega\rangle\right)^2\right|\Psi\right\rangle\left\langle\Psi\left|\left(\widehat{\Lambda}-\langle\Lambda\rangle\right)^2\right|\Psi\right\rangle \tag{13}$$

Para simplificar la notación definamos los siguientes operadores:

$$\widehat{\omega} = \widehat{\Omega} - \langle \Omega \rangle \tag{14}$$

y

$$\widehat{\lambda} = \widehat{\Lambda} - \langle \Lambda \rangle \tag{15}$$

Obs. : tanto $\widehat{\omega}$ como $\widehat{\lambda}$ son operadores hermitianos. Demostremos esto:

$$\widehat{\omega}^{\dagger} = \left(\widehat{\Omega} - \langle \Omega \rangle\right)^{\dagger} = \widehat{\Omega}^{\dagger} - (\langle \Omega \rangle)^{\dagger} = \widehat{\Omega}^{\dagger} - \langle \Omega \rangle^{*} \tag{16}$$

como los valores de expectación de operadores hermitianos son reales, entonces.

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}^{\dagger} &= \widehat{\Omega}^{\dagger} - \langle \Omega \rangle^{*} \\ &= \widehat{\Omega}^{\dagger} - \langle \Omega \rangle \\ &= \widehat{\omega} \ (\mathcal{QED}) \end{aligned} \tag{17}$$

Para $\widehat{\lambda}$ de manera análoga se obtiene que $\widehat{\lambda}^{\dagger} = \widehat{\lambda}$. Luego escribimos la Ec. (13) tal como sigue:

$$\begin{aligned} (\Delta\Omega)^2 (\Delta\Lambda)^2 &= \left\langle \Psi \left| \widehat{\omega}^2 \right| \Psi \right\rangle \left\langle \Psi \left| \widehat{\lambda}^2 \right| \Psi \right\rangle = \langle \Psi \left| \widehat{\omega}\widehat{\omega} \right| \Psi \rangle \left\langle \Psi \left| \widehat{\lambda}\widehat{\lambda} \right| \Psi \right\rangle \\ &= \left\langle \widehat{\omega}^{\dagger}\Psi \mid \widehat{\omega}\Psi \right\rangle \left\langle \widehat{\lambda}^{\dagger}\Psi \mid \widehat{\lambda}\Psi \right\rangle \\ &= \langle \widehat{\omega}\Psi \mid \widehat{\omega}\Psi \rangle \left\langle \widehat{\lambda}\Psi \mid \widehat{\lambda}\Psi \right\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

Desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz

A continuación mostramos esta interesante desigualdad:

$$\boxed{\langle f \mid f \rangle \langle g \mid g \rangle \geqslant |\langle f \mid g \rangle|^2} \tag{19}$$

Es muy simple darse cuenta de esta inecuación si la mostramos aplicada a vectores usuales **3D** (evidentemente no es el caso más general de vectores, aún así muy útil para clarificar el concepto). Sean dos vectores arbitrarios $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, tal que se cumple que:

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)^2 &= \left(\left\|\overrightarrow{A}\right\| \left\|\overrightarrow{B}\right\| \cos(\theta)\right)^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{B}\right\|^2 \cos^2(\theta) \leq \left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{B}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A}\right) \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}\right) \\ &\leq \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A}\right) \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

o equivalentemente:

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{B}\right)\geq\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2 \tag{21}$$

Este resultado es idéntico al mostrado en la Ec. (19) salvo la notación asociada a un producto interno generalizado.

Obs. : La desigualdad (19) se transforma en igualdad cuando:

$$|g\rangle=\alpha\,|f\rangle \tag{22}$$

siendo α un escalar arbitrario. Lo anterior implica que ambos vectores son "colineales". Utilicemos nuevamente vectores en **3D** para mostrar esto. Si $\vec{B}=\alpha\vec{A}$, entonces:

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2&=\alpha\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)\times\alpha\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)=\alpha^2\left\|\vec{A}\right\|^2\left\|\vec{A}\right\|^2\\&=\left\|\vec{A}\right\|^2\left\|\alpha\vec{A}\right\|^2=\left\|\vec{A}\right\|^2\left\|\vec{B}\right\|^2=\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{B}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

Ahora, podemos utilizar el resultado (19) para escribir la Ec. (18) de manera diferente:

$$\begin{aligned}(\Delta\Omega)^2(\Delta\Lambda)^2&\geq\left|\left\langle\widehat{\omega}\Psi\mid\widehat{\lambda}\Psi\right\rangle\right|^2=\left|\left\langle\Psi\left|\widehat{\omega}^{\dagger}\widehat{\lambda}\right|\Psi\right\rangle\right|^2\\&\geq\left|\left\langle\Psi\left|\widehat{\omega}\widehat{\lambda}\right|\Psi\right\rangle\right|^2\end{aligned} \tag{24}$$

El operador $\widehat{\omega}\widehat{\lambda}$ lo podemos representar también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}\widehat{\lambda}&=\tfrac{1}{2}\left(\widehat{\omega}\widehat{\lambda}+\widehat{\lambda}\widehat{\omega}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\widehat{\omega}\widehat{\lambda}-\widehat{\lambda}\widehat{\omega}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\left\{\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right\}+\tfrac{1}{2}\left[\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

Lo que nos lleva a la expresión:

$$(\Delta\Omega)^2(\Delta\Lambda)^2\geq\tfrac{1}{4}\left|\left\langle\Psi\left|\left\{\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right\}\right|\Psi\right\rangle+\left\langle\Psi\left|\left[\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right]\right|\Psi\right\rangle\right|^2 \tag{26}$$

Es fácil demostrar que $\left[\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right]=\left[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}\right]=i\widehat{\Gamma}$ (por favor hágalo) por lo tanto la expresión anterior se reduce aún más:

$$(\Delta\Omega)^2(\Delta\Lambda)^2\geq\tfrac{1}{4}\left|\left\langle\Psi\left|\left\{\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right\}\right|\Psi\right\rangle+i\left\langle\Psi\left|\widehat{\Gamma}\right|\Psi\right\rangle\right|^2 \tag{27}$$

pero dado que $\left\{\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right\}$ y $\widehat{\Gamma}$ son hermitianos (demostrado previamente), sus valores de expectación son reales y por lo tanto considerando que para un complejo de la forma $(a+ib)$ con a,b reales el módulo al cuadrado es simplemente $\left(a^2+b^2\right)$ entonces se concluye que:

$$\left|\left\langle\Psi\left|\left\{\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right\}\right|\Psi\right\rangle+i\left\langle\Psi\left|\widehat{\Gamma}\right|\Psi\right\rangle\right|^2=\left\langle\Psi\left|\left\{\widehat{\omega},\widehat{\lambda}\right\}\right|\Psi\right\rangle^2+\left\langle\Psi\left|\widehat{\Gamma}\right|\Psi\right\rangle^2 \tag{28}$$

más aún, ambos términos son positivos (elevados al cuadrado). Obtenemos entonces:

$$(\Delta\Omega)^2 (\Delta\Lambda)^2 \geq \tfrac{1}{4} \left\langle \Psi \left| \left\{ \widehat{\omega}, \widehat{\lambda} \right\} \right| \Psi \right\rangle^2 + \tfrac{1}{4} \left\langle \Psi \left| \widehat{\Gamma} \right| \Psi \right\rangle^2 \tag{29}$$

La desigualdad sigue cumpliéndose a cabalidad si eliminamos el primer término (no sabemos en general como es la regla de anticonmutación entre ambos operadores):

$$\boxed{(\Delta\Omega)^2 (\Delta\Lambda)^2 \geq \tfrac{1}{4} \left\langle \Psi \left| \widehat{\Gamma} \right| \Psi \right\rangle^2} \tag{30}$$

Hemos así obtenido el principio de incertidumbre de Heisenberg. en términos del conmutador $\left[\widehat{\Omega}, \widehat{\Lambda}\right]$. Para el caso particular en que $\widehat{\Gamma} = \hbar\widehat{\mathbf{1}}$ la expresión anterior se reduce a la ya conocida

$$\boxed{(\Delta\Omega)(\Delta\Lambda) \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{31}$$

Una pregunta importante : ¿Cuáles son las condiciones para que el producto de las incertezas sea mínimo? (Visto en clases).