1.3.5 Modelo de Ising en dos dimensiones

El modelo bidimensional fue resuelto por primera vez usando la técnica de matriz de transferencia por Onsager [2] con campo nulo y por Yang [3] con campo magnético. Posteriormente fue resuelto por diferentes autores usando diferentes técnicas de cálculo [4]. En cualquiera de ellas, la resolución es muchísimo mas complicada que en el caso unidimensional. Nos limitaremos aqui a presentar los resultados principales y discutiremos sus consecuencias.

En el límite termodinámico (en la red cuadrada y a campo nulo) la energía libre por partícula resulta

$$\beta f(T) = -\ln\left(2\cosh 2\beta J\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\phi \ln\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\kappa^2 \mathrm{sen}^2\phi}\right)\right] \tag{143}$$

donde

$$\kappa = \frac{2\,\mathrm{senh}(2\beta J)}{\cosh^2(2\beta J)} \tag{144}$$

La energía interna por spin viene dada por

$$u(T) = \frac{\partial(\beta f(T))}{\partial\beta} = -2J\tanh\left(2\beta J\right) + \frac{\kappa}{2\pi}\frac{d\kappa}{d\beta}\int_0^\pi d\phi \frac{\mathrm{sen}^2\phi}{\Delta(1+\Delta)} \tag{145}$$

donde $\Delta(\phi) = \sqrt{1-\kappa^2\mathrm{sen}^2\phi}$. Se verifica facilmente que

$$\int_0^\pi d\phi \frac{\mathrm{sen}^2\phi}{\Delta(1+\Delta)} = \frac{1}{\kappa^2}\int_0^\pi \frac{d\phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\pi}{\kappa^2} \tag{146}$$

Reemplazando en la Ec.(145) obtenemos, con algo de trabajo, que

$$u(T) = -J\coth(2\beta J)\left[1+\frac{2}{\pi}\kappa' K_1(\kappa)\right] \tag{147}$$

donde

$$K_1(\kappa) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\kappa^2\mathrm{sen}^2\phi}} \tag{148}$$

es una integral elíptica completa de primera especie y

$$\kappa' \equiv 2\tanh^2(2\beta J) - 1$$

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$$

Derivando la Ec.(147) podemos obtener, con cierto trabajo, el calor específico

$$c(T) = \frac{du(T)}{dT} = \frac{2k_B}{\pi}\left(\beta J\coth(2\beta J)\right)^2 \left\{2K_1(\kappa) - 2E_1(\kappa) - (1-\kappa')\left[\frac{\pi}{2}\kappa' K_1(\kappa)\right]\right\} \tag{149}$$

donde

$$E_1(\kappa) \equiv \int_0^{\pi/2} d\phi\sqrt{1-\kappa^2\mathrm{sen}^2\phi} \tag{150}$$

[2] L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944); B. Kaufman, Phys. Rev. **76**, 1232 (1949); B. Kaufman y L. Onsager, Phys. Rev. **76**, 1244 (1949).
[3] C. N. Yang, Phys. Rev. **85**, 809 (1952).
[4] T. D. Schultz, D. C. Mattis y E. H. Lieb, Rev. Mod. Phys. **36**, 856 (1964).

es una integral elíptica completa de segunda especie.

La integral elíptica $K_1(\kappa)$ tiene una singularidad en $\kappa = 1$ ($\kappa' = 0$), en cuyo entorno tenemos que

$$K_1(\kappa) \sim \ln \frac{4}{|\kappa'|}$$

$$E_1(\kappa) \sim 1$$

En dicho punto todas las funciones termodinámicas son no-analíticas. La temperatura crítica resulta entonces de la condición

$$\kappa = \frac{2\,\mathrm{senh}(2\beta_c J)}{\cosh^2(2\beta_c J)} = 1 \tag{151}$$

o bien de $\kappa' = 0$

$$2\tanh^2(2\beta_c J) = 1 \tag{152}$$

de donde resulta

$$k_B T_c / J = \frac{2}{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}. \tag{153}$$

Otra relación satisfecha por T_c es

$$\mathrm{senh}^2(2\beta_c J) = 1. \tag{154}$$

En el entorno de T_c tenemos entonces que

$$c(T) \sim -\frac{2k_B}{\pi}\left(\frac{2J}{k_B T_c}\right)^2 \ln|\kappa'| \tag{155}$$

Pero

$$\kappa' = 2\tanh^2(2\beta J) - 1 = 2\tanh^2(2\beta J) - 2\tanh^2(2\beta_c J) \sim D(T - T_c)$$

donde D es una constante. Asi

$$c(T) \sim -\frac{2k_B}{\pi}\left(\frac{2J}{k_B T_c}\right)^2 \ln\left|1 - \frac{T}{T_c}\right| \tag{156}$$

esto es, $c(T)$ presenta una singularidad logarítmica, en contraste con la predicción de campo medio de una discontinuidad.

El parámetro de orden, esto es, la magnetización por partícula es

$$m(T) = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \left\{1 - [\mathrm{senh}(2\beta J)]^{-4}\right\}^{1/8} & T \le T_c \end{cases} \tag{157}$$

En el entorno del punto crítico tenemos que

$$m(T) \sim \left[\mathrm{senh}^4(2\beta J) - \mathrm{senh}^4(2\beta_c J)\right]^{1/8} \sim A(T_c - T)^{1/8} \tag{158}$$

donde A es una constante. El exponente crítico del parámetro de orden resulta entonces $\beta = 1/8$ ($\beta = 1/2$ en la solución de campo medio). En la tabla (1) se muestra una comparación entre los valores de los exponentes α, β y γ para $d = 2$, $d = 3$ (obtenidos mediante métodos aproximados) y campo medio.

	α	β	γ
$d = 2$	0 (log)	$1/8$	1.75
$d = 3$	0.12	0.31	1.25
campo medio	0	$1/2$	1

Tabla 1: Algunos exponentes críticos para el modelo de Ising.

Vemos que al aumentar la dimensión los exponentes se aproximan a los de campo medio. De hecho, puede demostrarse que la teoría de campo medio resulta exacta para dimensiones $d \geq 4$.