Termodinámica (LFIS 224)

Licenciatura en Física

Profesor: J.R. Villanueva e-mail: jose.villanueva@uv.cl

Tarea 2

1. Demuestre que la expansión de Taylor para una función $\psi = \psi(x, y, z)$ está dada por

$$\psi(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z) = e^{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}}\psi(x, y, z), \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} e^p &= 1 + p + \frac{1}{2!}p^2 + \cdots + \frac{1}{n!}p^n + \cdots , \\ \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{\nabla} &= \mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

2. Considere las diferenciales (1) $du_1 = (2xy + x^2)dx + x^2dy$ y (2) $du_2 = y(x-2y)dx - x^2dy$. Para ambas diferenciales, encuentre el cambio en $u(x, y)$ entre dos puntos, (a, b) y (x, y). Calcule el cambio de dos formas distintas:

   (a) integre a lo largo del camino $(a, b) \to (x, b) \to (x, y)$, e

   (b) integre a lo largo del camino $(a, b) \to (a, y) \to (x, y)$.

   Discuta el significado de sus resultados.

3. Sea dF una diferencial exacta, y sean cuatro variables de estado x, y, z, y w, donde w es una función de cualquier otro par de variables x, y ó z. Demuestre las siguientes relaciones de mucha importancia que se satisfacen a lo largo de caminos en los cuales $F(x, y, z) = 0$:

   (a)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}.$$

   (b)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

   (c)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z.$$

   (d)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z$$

4. (a) Se realizan integraciones sobre los siguientes dos caminos de un plano:
   (i) las líneas rectas $(x_1, y_1) \to (x_2, y_1) \to (x_2, y_2)$;
   (ii) las líneas rectas $(x_1, y_1) \to (x_1, y_2) \to (x_2, y_2)$.

   $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos, y $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Las formas diferenciales a ser integradas son

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &\equiv \mathrm{d}x + \mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v &\equiv x(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y). \end{aligned}$$

   Muestre que

$$\int_{\text{(i)}} \mathrm{d}u = \int_{\text{(ii)}} \mathrm{d}u = u(Q) - u(P),$$

   donde $u = x + y$, y

$$\int_{\text{(i)}} \mathrm{d}v \neq \int_{\text{(ii)}} \mathrm{d}v,$$

   y discuta el resultado.
   [Denotaremos la forma diferencial con esta propiedad por $đv$ en lugar de $\mathrm{d}v$, y las llamaremos inexactas, mientras que $\mathrm{d}u$ es una diferencial exacta. En relaciones del tipo $\mathrm{d}u(x, y, \dots) = g(x, y, \dots)đv(x, y, \dots)$, $g(x, y, \dots)$ será designado como *factor integrante*.]

   (b) Si

$$\mathrm{d}F = X(x, y)\mathrm{d}x + Y(x, y)\mathrm{d}y$$

   es una diferencial exacta, muestre que

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y .$$

   (c) Las formas de Pfaffian tienen la estructura

$$\mathrm{d}v \text{ o } đv = \sum_{j=1}^{n} X_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathrm{d}x_j.$$

   ($\mathrm{d}v$ puede ser exacta o inexacta).
   Muestre que para $n = 2$, si los X_j son funciones mono-valuadas, continuas y diferenciables, $đv$ siempre tiene un factor integrante siempre que X_2 no sea cero en el dominio de variación considerado.

   (d) Verifique que la forma the Pfaffian con $n = 3$ no necesita tener un factor integrante considerando $đv = x\mathrm{d}y + k\mathrm{d}z$, donde k es una constante distinta de cero.

5. En un cilindro vertical cerrado por ambos extremos se encuentra un émbolo de fácil movilidad, en cada lado del cual hay un mol de aire. En estado de equilibrio, cuando la temperatura es $T_0 = 300$ K, el volumen de la parte superior del cilindro es $\eta = 4$ veces mayor que el de la parte inferior. ¿A qué temperatura la relación entre estos volúmenes llegará a ser $\eta' = 3$?

6. Con una bomba neumática de émbolo se evacua el aire de un recipiente cuyo volumen es V. La bomba extrae en cada ciclo (en cada carrera del émbolo) un volumen ΔV. ¿Cuántos ciclos deben realizarse para que la presión en el recipiente disminuya η veces? Considerar que el proceso es isotérmico y el gas es ideal.

7. Hallar la temperatura máxima posible de un gas ideal en cada uno del los siguientes procesos:
   (a) $P = P_0 - \alpha V^2$,
   (b) $P = P_0 e^{-\beta V}$,

   donde P_0, α y β son constantes positivas; V es el volumen de un mol de gas ideal.

8. Determinar la presión mínima posible de un gas ideal en un proceso que transcurre según la ley $T = T_0 + \alpha V^2$, donde T_0 y α son constantes positivas y V es el volumen de un mol de gas. Representar el gráfico de este proceso en coordenadas P y V.

9. ¿A qué presión es necesario someter el gas carbónico que se encuentra a temperatura $T = 300$ K, para que su densidad alcance el valor $\rho = 500$ g/l? Realizar el cálculo tanto para un gas ideal, como también para el de Van der Waals.

10. En un recipiente cuyo volumen $V = 1$ l se encuentra un mol de nitrógeno. Determinar:
    (a) la temperatura del nitrógeno, para la cual el error en el cálculo de la presión, determinada mediante la ecuación de estado del gas ideal, constituye un $\eta = 10\%$ (en comparación con el de la presión determina por la ecuación de Van der Waals);
    (b) la presión del gas a esta temperatura.

11. En un recipiente cuyo volumen $V = 0.250$ l se encuentra un mol de cierto gas. Cuando la temperatura es $T_1 = 300$ K, la presión del gas es $P_1 = 90$ atm, y cuando $T_2 = 350$ K, la presión es $P_2 = 110$ atm. Hallar las constantes de Van der Waals para este gas.

12. Se encuentra para un gas que $\kappa_T = Tvf(P)$ y $\alpha_P = (Rv/P) + (Av/T^2)$, donde T es la temperatura, v es el volumen molar, P es la presión. A es una constante, y $f(P)$ es una función desconocida de P.
    (a) Determine la función $f(P)$.
    (b) Encuentre $v = v(P, T)$.

13. Un material tiene una expansividad termal
    $$\alpha_P = \frac{R}{Pv} + \frac{a}{RT^2 v},$$
    y una compresibilidad isotermal
    $$\kappa_T = \frac{1}{v}\left(Tf(P) + \frac{b}{P}\right),$$
    donde $v = V/n$ es el volumen molar.
    (a) Encuentre la función $f(P)$.
    (b) Encuentre la ecuación de estado.
    (c) ¿Bajo qué condiciones es estable este material?

14. (a) Calcular el coeficiente de compresibilidad isotérmica κ_T del gas de Van der Waals en función del volumen V para la temperatura T.
    (b) Haciendo uso del apartado anterior, hallar la temperatura a la cual el coeficiente de compresibilidad isotérmica κ_T del gas de Van der Waals es mayor que la del gas ideal. Examinar el caso cuando la magnitud del volumen molar es considerablemente mayor que la de la corrección b.

15. Considere un gas obedeciendo la ecuación de estado de Dieterici,

$$P = \frac{nRT}{(V - nb)} \, \text{Exp}\left(-\frac{na}{VRT}\right),$$

donde a y b son constantes.

(a) Calcule el coeficiente de expansión termal y la compresibilidad isotermal.

(b) Calcule el coeficiente de Joule y el coeficiente de Joule-Kelvin.