Termodinámica - Guía 7 (Procesos de expansión y otros sistemas termodinámicos)

1. Demostrar que el coeficiente de Joule para un gas de van der Waals es

$$\mu_J = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\frac{a}{C_V}\left(\frac{n}{V}\right)^2 \tag{1}$$

   Se necesita la ecuación de estado, la relación cíclica entre derivadas parciales, la "ecuación central" (la ecuación de TdS) y una relación de Maxwell.

2. (a) La expansión de Joule-Kelvin es un proceso isentálpico, en el cuál el cambio de temperatura es

$$\Delta T_{JK} = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H dP. \tag{2}$$

   Demostrar que el coeficiente de Joule-Kelvin puede escribirse en términos de la capacidad calorífica y la dilatación térmica:

$$\mu_{JK} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V}{C_P}(\beta T - 1). \tag{3}$$

   (b) Mostrar que el coeficiente de Joule-Kelvin es cero para un gas ideal.

   (c) Determinar el coeficiente de Joule-Kelvin para un gas de van der Waals (capacidad calorífica específica c_P).

   (d) Demostrar que, para un gas de van der Waals, la curva de inversión (donde $\mu_{JK} = 0$) está dada por

$$T_{in} = \frac{2a}{Rb}\left(\frac{v-b}{v}\right)^2. \tag{4}$$

   [Pista: es más fácil determinar $T(P, V)$ y $(\partial T/\partial v)_P$.]

3. Un gas ideal siempre se enfria en una expansión adiabática (que se puede comprobar por un diagrama PV con un par de líneas isotérmicas y una adiabática). Demostrar que el coeficiente de enfriamiento en una expansión adiabática es

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \tag{5}$$

   Explicar por qué una expansión adiabática produce más enfriamiento que un proceso isentálpico, con el mismo cambio de presión.

4. (a) Obtener la 'ecuación de la energía':

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \tag{6}$$

   [Pista: se necesita una relación de Maxwell derivada de la función de Helmholtz.] Si se conoce la ecuación del estado, la ecuación de la energía se permite calcular la dependencia de U en el volumen.

(b) Escribir el resultado análogo para una banda elástica, donde el trabajo hecho en el sistema es tensión por extensión (cambio de longitud).

(c) La ecuación del estado de una banda elástica es

$$\mathcal{F} = aT\left(\frac{L}{L_0} - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right) \tag{7}$$

donde a es una constante y L_0 es la longitud sin estirar. Demostrar que U es una función de T solamente.

(d) Si $L_0 = 1$ m y $a = 1,3 \times 10^{-2}$ N K^{-1}, calcular el trabajo hecho en la banda y el calor rechazado cuando se estira isotérmicamente y reversiblemente de 1m a 2m a $T = 300$K.

5. Si la banda elástic del problema previo se estira *adiabáticamente* y reversiblemente de 1m a 2m, ¿por cuánto sube la temperatura? (Suponer que la capacidad calorífica $C_L = 1,2$ J K^{-1}).

6. (a) Para un gas de fotones, la ecuación del estado puede escribirse como $P = u(T)/3$ donde $u(T)$ es la energía interna específica, que depende solamente de la temperatura. Demostrar que la energía interna de un gas de fotones satsiface $U = kVT^4$ donde k es una constante.

   (b) Un cilindro evacuado de volumen 1m^3 contiene un gas de fotones confinado por un pistón. ¿A qué temperatura el pistón se moverá contra la presión atmosférica? ($P_{atm} = 10^5$ Pa, $k = 7,56 \times 10^{-16}$ J/m^3/K^4).

7. Suponiendo que la tierra y el sol son cuerpos negros que radian isotrópicamente, usar la ley de Stefan-Boltzmann para estimar la temperatura del sol. (Temperatura de la tierra ≈ 287K, radio del sol $\approx 6,96 \times 10^8$m, distancia de la tierra al sol $1,5 \times 10^{11}$m, constante de Stefan-Boltzmann $5,67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}). [Pista: pensar en cuanto área ocupa la tierra relativa al superficie de emisión del sol al radio orbital de la tierra. Suponer que hay un equilibrio radiativo en la tierra.]

8. Un agujero negro sin carga y sin rotación tiene solamente una variable independiente: su masa. Se puede probar que los agujeros negros tienen entropía, dada por $S = k_B A c^3/4G\hbar$. Esta ecuación se llama la fórmula de Bekenstein-Hawking. A es el área de superficie. Usar esta fórmula para calcular la temperatura de un agujero negro con masa "pequeña" de $M = 10^{12}$kg y uno con la masa del sol $M = 2 \times 10^{30}$kg.

   [Pista: encontrar valores de las constantes $k_B, G, \hbar$ y c. El radio de un agujero negro está dado por $r = 2GM/c^2$ y su energía es $U = Mc^2$. La ecuación central de la termodinámica se permite introducir T explicitamente. Suponer que $S = S(U)$, es decir, solamente depende de la energía.]