

Sobre la expansión térmica

Felipe Ortiz, Fabian Trigo

Universidad de Valparaíso, Laboratorio de Termodinámica 2020

Abstract

Un material, al variar su temperatura, acaba por variar sus dimensiones.

Dichas variaciones de longitud y de temperatura fueron medidas para barras de tres distintos materiales: hierro, cobre y aluminio, con el objetivo de hallar el coeficiente de dilatación térmica lineal para cada uno de ellos. Por medio de un *fit* de rectas, se calcularon los coeficientes buscados, los cuales, teniendo unidades de $[^{\circ}\text{C}^{-1}] * 10^{-6}$, son

los siguientes: $\alpha_{\text{hierro}} = 5.5$; $\alpha_{\text{cobre}} = 4.1$; $\alpha_{\text{aluminio}} = 7.6$

Los que además poseen un rango de errores relativos porcentuales de aproximadamente 50% a 80%, con respecto a los valores teóricos para las constantes de estos materiales.

Abstract EN

A material changes its dimensions according to a change in its temperature, this variations of temperature and length were measured in three bars with different materials: iron, copper, aluminum. The objective was to find the coefficient that connected the changes in temperature to its change in length, assuming a linear model. Via the fitting of data the coefficients found with $[^{\circ}\text{C}^{-1}] * 10^{-6}$ dimensions were

$\alpha_{\text{iron}} = 5.5$; $\alpha_{\text{copper}} = 4.1$; $\alpha_{\text{aluminum}} = 7.6$

Keywords

Expansión térmica, variación de largo, coeficiente lineal, termodinámica.

Thermal expansion, length variation, linear coefficient, thermodynamics.

Marco teórico

Un cuerpo producto de un cambio en su temperatura sufrirá una expansión o contracción. Esto es debido a que todos los objetos son de alguna forma fluidos, el mismo cristal que parece estático a lo largo de siglos se deforma, como es posible observarse en ventanales de antiguas iglesias.

Sucede que la temperatura de un fluido viene dada por el movimiento de sus moléculas, elementos con temperatura fría tendrán las moléculas más quietas y naturalmente buscarán compactificación; mientras que, generalmente, un aumento del movimiento de las moléculas provocaría un aumento del volumen

Podemos pensar en una varilla larga como un cuerpo unidimensional, el largo de la varilla será una función de su temperatura, *ecuación 1*:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T \quad (1)$$

donde L_0 es el largo de la barra medida en una temperatura inicial. este largo variará mientras la temperatura varíe. Esta ecuación funcionara en el rango de temperatura donde no se produzcan cambios de fase en la barra. α es un coeficiente el cual depende del material y de variables como presión, temperatura, .. sin embargo es posible considerarlo constante dentro de un rango de temperaturas.

Material a 20 °C	Expansión fraccional por Celsius x10 ⁻⁶
Vidrio ordinario	9
Vidrio Pyrex	4
Aluminio	23
Latón	19
Cobre	17
Hierro	12

La expansión fraccional es el coeficiente entre cuánto se ha extendido un material y su largo inicial.

$$\Delta L/L_0 = \alpha \Delta T \quad (2)$$

Fit de curvas

Modelos propuestos a lo largo del análisis:

$$L = at + b \quad (3) \text{ lineal}$$

$$L = at^n + b \quad (4) \text{ l. generalizado}$$

$$\text{Log}(\Delta L) = \text{Log}(a) + n \text{Log}(t) \quad (5) \text{ logarítmico}$$

Llevar los datos al reino logarítmico, *proceso-ecuación (6)*

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T^n$$

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T^n / \ln []$$

$$\ln \left[\frac{\Delta L}{L_0} \right] = \ln [\alpha] + n \ln [\Delta T]$$

Procedimiento experimental

Para realizar los experimentos fueron utilizados los siguientes materiales:

- Tres barras cilíndricas (con un hueco cilíndrico a lo largo de cada barra) de la misma longitud, pero distinto material (hierro, cobre y aluminio).
- Un medidor de cambio de longitud o dilatómetro (con unidad mínima de la centésima de un milímetro).
- Un anafe.
- Un multímetro.
- Un termopar o termocupla.
- Un frasco cónico de vidrio.
- Agua (suficiente como para llenar el frasco).
- Un tapón (del tamaño ideal para cubrir el frasco) con un orificio del que sale un tubo de plástico.
- Guantes protectores.
- Un contenedor metálico bajo.
- Un poco de cinta adhesiva.

El procedimiento comenzó posicionando la barra de hierro en el dilatómetro; las barras utilizadas estaban diseñadas específicamente para esta tarea, por lo que no se requirió de ninguna acción especial en este paso. Luego, se conecta, el tubo de plástico del tapón, al hueco de un extremo de la barra de hierro; el otro extremo estará posicionado sobre un contenedor metálico. Después de esto, una termocupla se conecta entre un multímetro (el cual estará configurado para medir temperatura en grados Celsius) y el centro de la barra, sujetándola con cinta adhesiva. Por último, el frasco se llena de agua, se tapa con el tapón, y se comienza a calentar con el anafe. Es importante en este punto asegurarse de que el dilatómetro esté ajustado en el cero, de no ser así, ajustarlo.

El agua calentada, en algún punto, comenzará a evaporarse, pasando por el tubo y entrando al hueco de la barra de hierro, calentándola.

En algún otro momento, el vapor se condensará en el otro extremo de la barra y caerá al contenedor metálico. A medida que la barra se calienta, serán tomados datos de temperatura (por el multímetro) y de cambio de longitud (por el dilatómetro), hasta que el sistema llegue a un estado relativamente estático y ya no cambien ninguna de estas dos mediciones, momento en el cual la barra será retirada utilizando guantes protectores (a causa de la alta temperatura a la que esta acaba) y se dejará en una zona aparte para que se enfríe. Acto seguido, el mismo procedimiento será realizado para la barra de cobre y luego para la de aluminio.



Análisis

El largo inicial de la barra no es importante, sino su variación. El análisis de los datos fue realizado de tal manera que este dato no fuera necesario, de esa forma evitando la incertidumbre que provocaría integrar esta medición.

Los datos tomados se encuentran adjuntos en: Tabla [1,2,3]

Se comenzó el análisis con los datos de la barra de hierro, postulando el siguiente modelo:

$$\Delta L/L_0 = \alpha \Delta T^n$$

Donde a partir de la ecuación (1) se sabe que n debe aproximarse a 1. Luego, tomando logaritmo natural en ambos lados de la ecuación:

$$\ln(\Delta L/L_0) = \ln(\alpha) + n \ln(\Delta T)$$

Usando este modelo, se aplicó logaritmo natural a los datos de diferencia de longitud y diferencia de temperatura de la barra de hierro, para luego encontrar la mejor recta que se ajuste a dichos datos. Este acercamiento al problema dejó un **modelo cercano a los datos**, ya que a n se le permitió variar. Sin embargo un modelo cercano a los datos **no siempre es un modelo que sea bueno generalizando**. Ello lo podemos ver en la magnitud de α , el coeficiente de dilatación lineal obtenido fue $3.66 * 10^{-4} [^{\circ}C^{-1}]$, mientras que, de acuerdo a la bibliografía, la constante α del hierro es $12 * 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$, es decir, se tiene un error porcentual relativo de 2946% (Fig. 8).

Tenemos entonces el fenómeno de *overfitting* (Fig. 7). Sucede que permitimos demasiados parámetros al modelo, creando un modelo **poco robusto que no es capaz de predecir datos que no se incluyen en su creación**.

Por ello se optó por **restricciones**: se usa un modelo puramente lineal, es decir, dejando $n = 1$ (Fig. 9), similar a la ecuación (1):

$$\Delta L/L_0 = \alpha \Delta T$$

Además, como se puede observar en los gráficos de los datos (figuras 1, 2 y 3), estos siguen un comportamiento aproximadamente lineal, por lo que el modelo propuesta es acorde con los datos. Efectuando el mismo procedimiento de *fitting* para hallar la mejor recta, la magnitud de α para el hierro de acuerdo a este modelo es $22,1 * 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$. Comparado a la magnitud de la bibliografía se puede notar que **el error porcentual baja a un 85%**. Esto muestra que n provoca *overfitting*, por tanto, para hacer posteriores análisis se dejará $n = 1$. Entonces se vuelve **superfluo llevar al reino logarítmico el problema**.

Ahora, se realizará un tercer método para hallar las constantes de dilatación lineal, y este es generalizar el modelo lineal antes propuesto, es decir:

$$\Delta L/L_0 = \alpha \Delta T + m$$

Donde se sabe por la ecuación (1) que m debería aproximarse a cero.

Datos:

A continuación, se mostrarán los gráficos de los datos de diferencia de longitud y de diferencia de temperatura para las tres barras.



Figura 1: Primer Experimento - Barra de Hierro

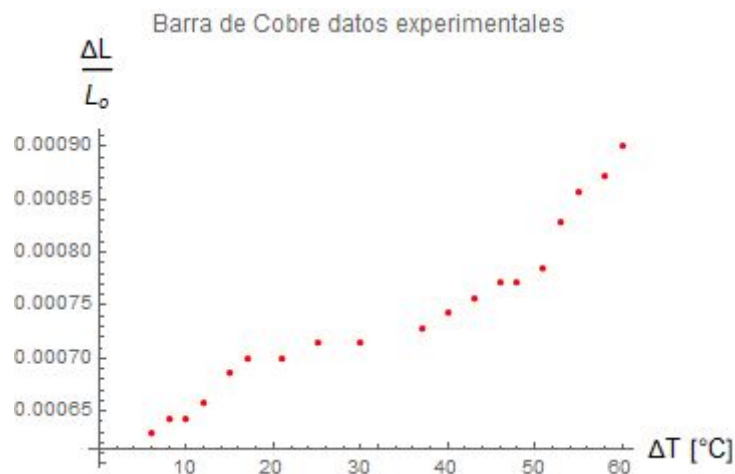


Figura 2: Segundo Experimento - Barra de Aluminio

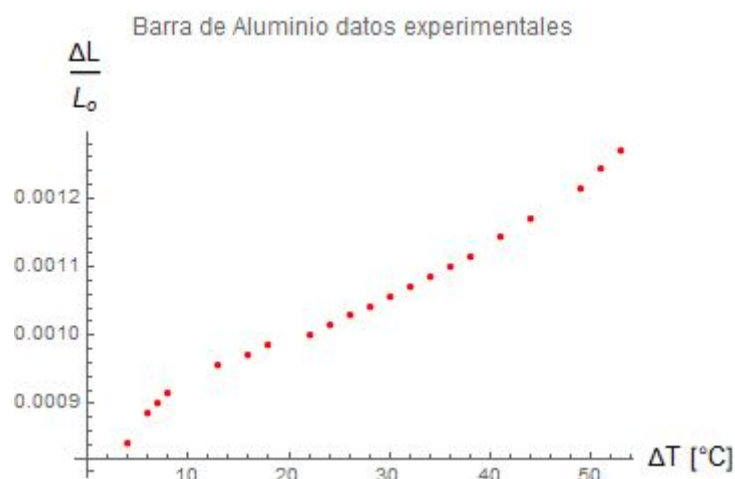


Figura 3: Tercer Experimento - Barra de Aluminio

Ajuste de las rectas:

Utilizando el modelo lineal propuesto anteriormente, se realizó un ajuste a los datos, encontrando la mejor recta que pasa por ellos. La pendiente del modelo será igual a la magnitud del *coeficiente de expansión lineal* para cada experimento y material, puede revisar estos valores en la Tabla 1

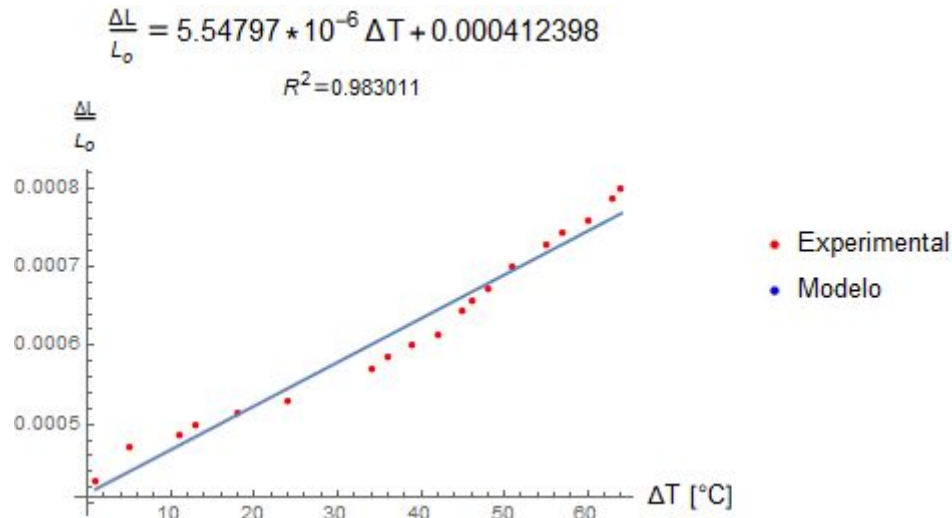


Figura 4: Fit Primer Experimento - Barra de Hierro

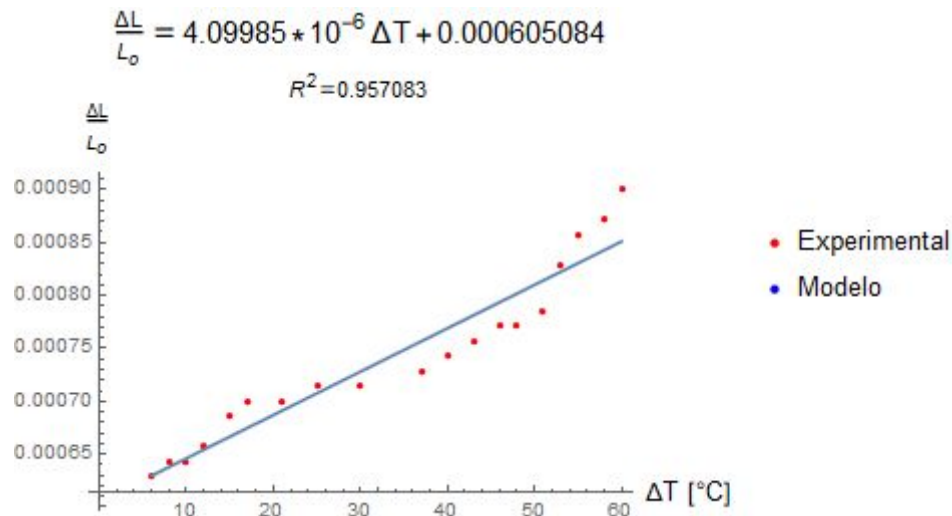


Figura 5: Primer Segundo Experimento - Barra de Cobre

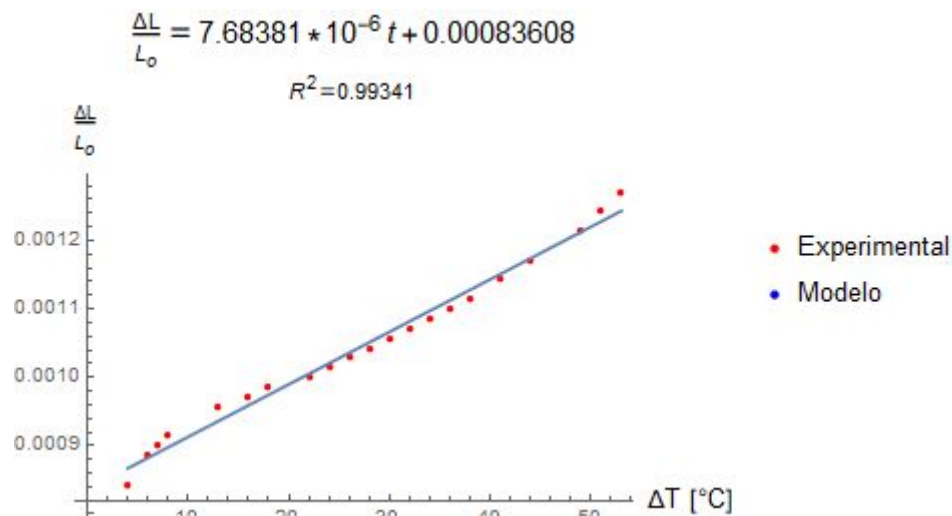


Figura 6: Fit Tercer Experimento - Barra de Aluminio

Constantes de los experimentos:

Las constantes calculadas fueron los coeficientes de expansión lineal de cada material, se mostrará el valor experimental, el valor literario y el error relativo porcentual (ERP)., siendo este último una medida de que tanto difieren

	Experimental $10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$	Teórico $10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$	ERP. [%]
Hierro	5.5	12	54
Cobre	4.1	17	76
Aluminio	7.6	23	67

Tabla 1: Resultados Experimentales y su Error

Conclusión

El objetivo de este experimento fue **calcular las constantes de dilatación lineal** de tres distintos materiales: hierro, cobre y aluminio.

Los valores de los coeficiente de dilatación térmica, que pueden observarse en la Tabla 1, entregaron valores de $5.5 * 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$ para el hierro, de $4.1 * 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$ para el cobre y de $7.6 * 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$ para el aluminio. Además, estos nos entregan un rango de error porcentual relativo con respecto a la literatura que va desde el 50% al 80%, aproximadamente.

Se ha de tener en cuenta que la temperatura registrada por la termocupla no se refiere a la temperatura global de la barra, sino que es un dato únicamente puntual (el centro de la barra). En otras palabras, sólo conocemos un punto de la temperatura de la barra en todo momento, lo que puede producir un retardo entre el cambio en la temperatura y el cambio en la longitud producido por esta. Sin embargo, no somos capaces de conocer con el comportamiento de este retardo con los datos que poseemos.

Se tiene que considerar que estos valores, tanto los provenientes de la bibliografía como los teóricos, son del orden de $1 * 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$, lo que quiere decir milésima de la milésima de un $^{\circ}C^{-1}$. Esto quiere decir que, si bien los errores relativos son grandes, **los errores absolutos son bastante pequeños**. Añadido a esto hay que destacar que los resultados experimentales poseen **igual orden de magnitud** que los valores teóricos, que es lo importante. Tener arriba o abajo de dos órdenes de magnitud incorrectos de los coeficientes, en cuanto a construcción se refiere, que es el principal uso de esta información, podría significar una catástrofe.

Otro punto que juega un rol importante es la pureza de los materiales: el coeficiente de dilatación de una aleación es diferente al de sus materiales en estado puro, y como desconocemos la pureza de las barras, hay una posible fuente de errores latente.

Teniendo en cuenta todos los factores, un error relativo porcentual menor al 80% permite llamar al experimento un éxito.

Figures

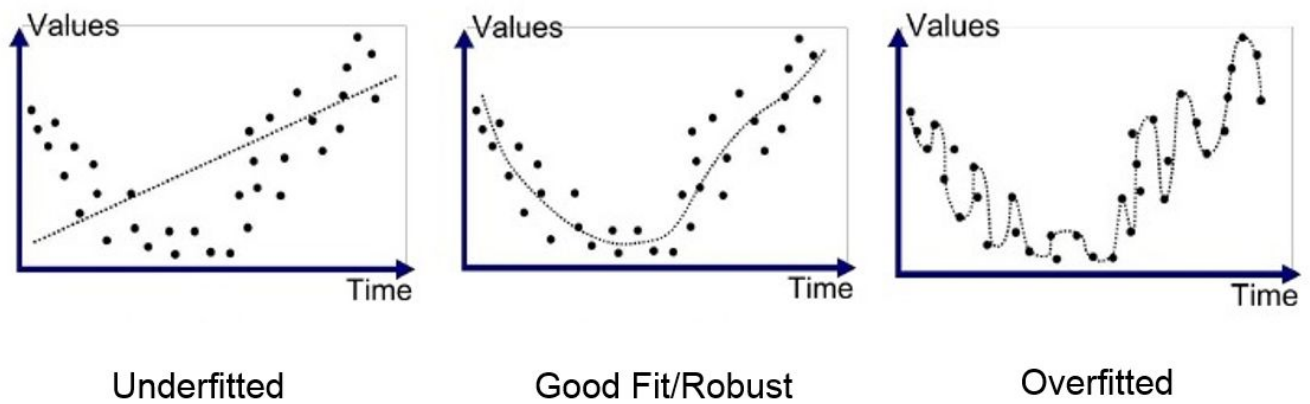


Figura 7: Overfitting de curvas

Hierro

```
logdlh = Log[dlh / lo];
           |logaritmo
logdth = Log[dth];
           |logaritmo
mod2 = log $\alpha$  + n logt;
solh2 = FindFit[{logdth, logdlh}^T, mod2, {log $\alpha$ , n}, logt]
           |ajusta una función parametrizada
{log $\alpha$   $\rightarrow$  -7.91389, n  $\rightarrow$  0.154411}
```

usando el fit encontrado, despejamos alfa

```
ah2 = Exp[log $\alpha$  /. solh2]
           |exponencial
0.00036563
```

Error porcentual

```
Abs[12*^-6 - ah2]
----- * 100
12*^-6
2946.92
```

Figura 8: Modelo con Overfit

Hierro

```
logdlh = Log[dlh / lo];  
          |logaritmo  
logdth = Log[dth];  
          |logaritmo  
mod2 = logα + logt;  
solh2 = FindFit[{logdth, logdlh}', mod2, {logα}, logt]  
          |ajusta una función parametrizada  
{logα → -10.7193}
```

usando el fit encontrado, despejamos alfa

```
αh2 = Exp[logα / . solh2]  
      |exponencial  
0.0000221134
```

Error porcentual

$$\frac{\text{Abs}[12 \cdot 10^{-6} - \alpha h2]}{12 \cdot 10^{-6}} \cdot 100$$

84.2787

Figura 9: Modelo lineal, n=1

Datos a partir de los videos

Hierro

T [°C]	ΔT [°C]	ΔL 10 ⁻² [mm]
18	0	0
19	1	30
23	5	33
29	11	34
31	13	35
36	18	36
42	24	37
52	34	40
54	36	41
57	39	42
60	42	43
63	45	45
64	46	46
66	48	47
69	51	49
73	55	51
75	57	52
78	60	53
81	63	55

82	64	56
84	66	59
86	68	63
88	70	66
89	71	68

Table 2: Barra de Hierro Longitud vs Temperatura

Cobre

T [°C]	ΔT [°C]	$\Delta L \cdot 10^{-2}$ [mm]
19	0	0
20	1	20
21	2	30
22	3	35
23	4	40
25	6	44
27	8	45
29	10	45
31	12	46
34	15	48
36	17	49
40	21	49
44	25	50
49	30	50
56	37	51
59	40	52
62	43	53
65	46	54
67	48	54
70	51	55
72	53	58
74	55	60
77	58	61
79	60	63
81	62	65
83	64	67
85	66	71
86	67	76
86	67	90

Table 3: Barra de Cobre Longitud vs Temperatura

Aluminio

T [°C]	ΔT [°C]	$\Delta L \cdot 10^{-2}$ [mm]
19	0	0
19	0	5
20	1	10
20	1	15

21	2	20
21	2	25
21	2	30
22	3	56
23	4	59
25	6	62
26	7	63
27	8	64
32	13	67
35	16	68
37	18	69
41	22	70
43	24	71
45	26	72
47	28	73
49	30	74
51	32	75
53	34	76
55	36	77
57	38	78
60	41	80
63	44	82
68	49	85
70	51	87
72	53	89
76	57	95
78	59	99
79	60	102
81	62	108
82	63	115

Table 4: Barra de Aluminio Longitud vs Temperatura

Bibliografía

- (1) Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2009). *Física: Para ciencias e ingeniería con Física Moderna* Raymond A. Serway y John W. Jewett, Jr (7a. ed.--.). México D.F.: Cengage.