A partir de las leyes de Newton obtuvimos:

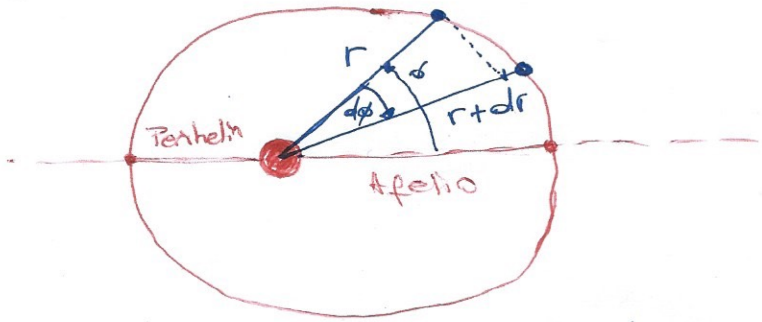
$$L = m r^2 \dot{\phi}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}}_{U_{ef}(r)\,:\ \text{Potencial efectivo}}$$

i) En el caso del potencial Newtoniano

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

Es posible obtener órbitas "planetarias" las que, en general, son elipses.



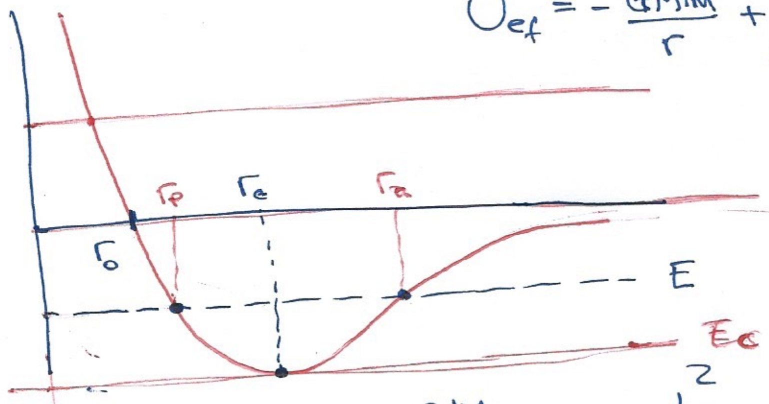
$$dA = \frac{r \cdot r\,d\phi}{2} = \frac{1}{2} r^2 d\phi = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{m} = \frac{L}{2m} = cte. \Rightarrow$$ Ley de las áreas de Kepler.

ii) ¿cuáles son las órbitas permitidas?

El potencial efectivo entrega información cualitativa (y también) cuantitativa) sobre la clase de órbitas. Con $L \neq 0$

$$U_{ef} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$



r_0 : $U_{ef}(r_0) = 0 \Rightarrow -\frac{GMm}{r_0} + \frac{L^2}{2mr_0^2} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{L^2}{2GMm^2}} > 0$$

r_c : $\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{r=r_c} = 0 = \left[\frac{GMm}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}\right]_{r=r_c}$

$$\boxed{r_c = \frac{L^2}{GMm^2} = 2r_0} > 0$$

∴ En $r = r_c$ se encuentra la órbita circular (estable)

¿Cuál es la energía en esta órbita circular?

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{ef}(r)$$

En una órbita circular $\dot{r} = 0$

$$E_c \equiv U_{ef}(r_c)$$

$$\boxed{E_c = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}} < 0$$

Luego, para energías $E_c < E < 0$, existen dos puntos de retorno, el perihelio, r_p, y el afelio, r_a. Se cumple que

$$r_p \leq r_c \leq r_a$$

¿Cómo los calculamos? son solución de la ecuación

$$E = U_{ef}(r_t)$$

$$E = -\frac{GMm}{r_t} + \frac{L^2}{2m r_t^2} \quad / r_t^2$$

$$E \cdot r_t^2 + GMm\, r_t - \frac{L^2}{2m} = 0$$

$$r_t = \frac{-GMm \pm \sqrt{\frac{G^2M^2m^3 + 2L^2E}{m}}}{2E}$$

$r_t = r_t(E)$, donde $E < 0$.

El discriminante se hace cero

$$G^2M^2m^3 + 2L^2E = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{G^2M^2m^2}{2L^2} \doteq E_c}$$

¿Qué ocurre con r_t cuando $E \to 0$?
Una raíz tiende a r_0 y otra a ∞.
En este caso la órbita es una parábola.

Por último, si $E > 0$, la órbita es una hipérbola