

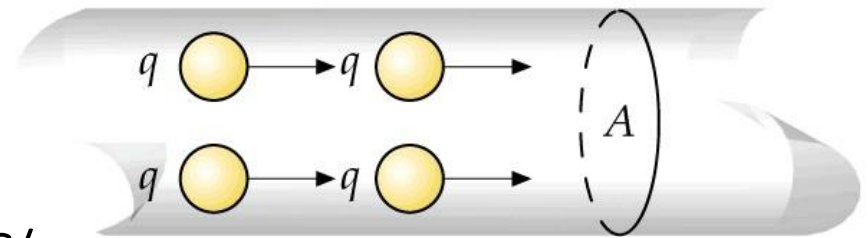
Tema 4: Electrocínética

- 4.1 Corriente eléctrica y densidad de corriente
- 4.2 Conductividad, resistividad, resistencia y Ley de Ohm
- 4.3 Potencia disipada y Ley de Joule
- 4.4 Fuerza electromotriz y baterías
- 4.5 Leyes de Kirchhoff
- 4.6 Circuito RC: carga y descarga de un condensador

4.1 Corriente eléctrica y densidad de corriente

- Consideramos un segmento de un hilo conductor que transporta una corriente.
- ΔQ es la cantidad de carga que atraviesa un área A en un tiempo Δt
- La intensidad de la corriente es:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

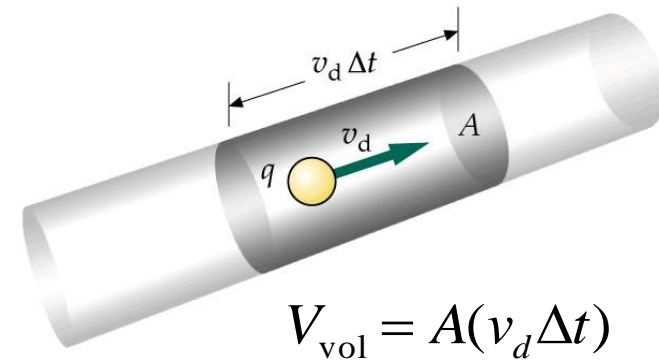


- Unidad de corriente: 1 Ampere = 1 C/s

$$\Delta Q = \sum_i q_i$$

- n : densidad de partículas = número de partículas por unidad de volumen (la densidad de carga es $\rho = qn$)

$$\Delta Q = q n V_{\text{vol}} = q n A (v_d \Delta t)$$



- donde v_d es la velocidad media de desplazamiento de las cargas (\ll que la velocidad instantánea media).

$$\Rightarrow I = q n A v_d = \rho A v_d$$

Ejemplo

Un cable de cobre tiene radio 0.815 mm y transporta una corriente de 1 A.

- Calcular la carga de los electrones de 1 m de cable. Asumir que cada átomo aporta un electrón libre (densidad de masa ρ_m : 8.93 g/cm³, masa molecular $M=63.5$ g/mol, $N_A=6.02 \times 10^{23}$ átomos/mol)
- Calcular la velocidad media de desplazamiento de los electrones libres.
- Asumiendo el teorema de equi-partición de la energía (la energía cinética media de un electrón es $3k_B T/2$, $k_B=1.38 \times 10^{-23}$ J/K) calcular la velocidad media instantánea de los electrones libres a $T=300$ K.

$$Q = -e n A L \quad n = \frac{\rho_m}{M} N_A \quad Q / L = -2.8 \times 10^4 \text{ C/m}$$

$$I = e n A v_d = (Q / L) v_d \Rightarrow v_d = \frac{I}{Q / L} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ mm/s}$$

$$\frac{m_e \langle v \rangle^2}{2} = \frac{3k_B T}{2} \Rightarrow \langle v \rangle = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = 1.17 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Densidad de corriente

$$I = \rho A v_d$$

- Densidad de corriente = corriente por unidad de área (A/m^2) $J = \frac{I}{A} = \rho v_d$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_d$$

- Corriente (carga por unidad de tiempo) que atraviesa una superficie: es el flujo de la densidad de corriente a través de la superficie.

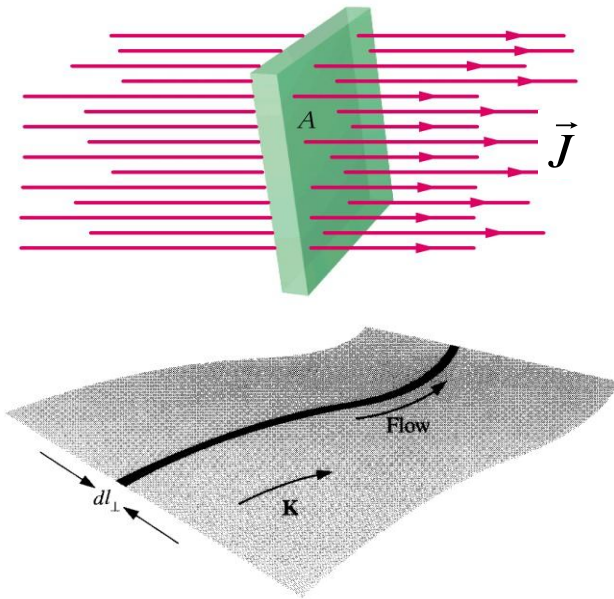
$$I = \iint \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

- Densidad de corriente superficial (A/m): cuando las cargas se mueven sobre una superficie.

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}_d$$

- Cuando las cargas se mueven sobre una línea (un cable conductor con densidad de carga λ):

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}_d$$



Ecuación de continuidad y conservación de la carga

- Consideremos una superficie cerrada S que encierra a un volumen V

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV$$

- Como la carga se conserva, el flujo de carga que sale a través de la superficie tiene que ser igual a la disminución de la carga encerrada.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\frac{dQ}{dt}$$

- Considerando un volumen fijo. $\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

- Como se cumple para todo V : $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ Ecuación de continuidad:
representa la conservación de la carga

- Forma integral de la conservación de la carga:

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA = -\frac{dQ}{dt}$$

4.2 Conductividad, resistividad, resistencia y Ley de Ohm

- En un conductor la densidad de corriente es proporcional a la fuerza eléctrica por unidad de carga ($F/q=E$)

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- donde σ es la conductividad del material (no confundir con densidad de carga!)
- La resistividad ρ del material es (no confundir con densidad de carga!)

$$\rho = 1/\sigma \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \rho \vec{J}$$

- Ley de Ohm (forma diferencial): $\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{E} = \rho \vec{J}$
- La conductividad (y la resistividad) de una sustancia dependen de la temperatura.
- Para un conductor perfecto: $\sigma = \infty \quad \rho = 0$
- Unidad: 1 ohm $\Omega = 1 \text{ V} / 1 \text{ A}$
- Unidad de resistividad ρ : $\Omega \text{ m}$

Modelos de conducción en metales

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_d = qn \vec{v}_d = -en_e \vec{v}_d$$

- n_e es la densidad de electrones libres (número de electrones por unidad de volumen) y $-e$ es la carga del electrón.

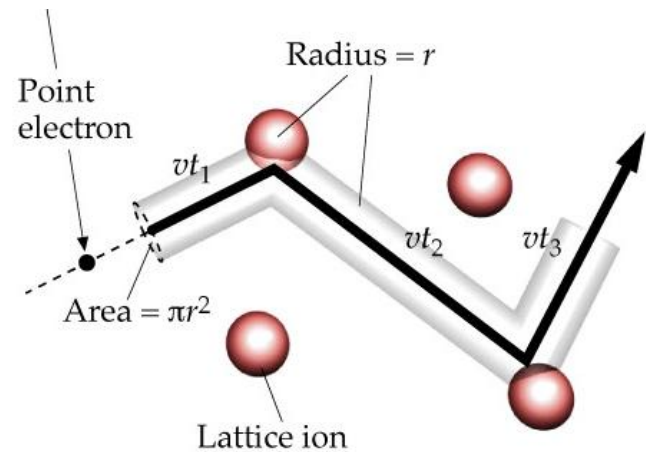
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{E}}{\rho} = -en_e \vec{v}_d$$

- En presencia del campo eléctrico, la ecuación del movimiento de un electrón es

$$m_e \vec{a} = -e\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{E}}{m_e} t$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \tau$$

- τ es el tiempo medio entre colisiones



Modelo clásico de Drude

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{E}}{\rho} &= -en_e \vec{v}_d \\ \vec{v}_d &= -\frac{e\vec{E}}{m_e} \tau \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau} \quad \Rightarrow \rho = \frac{m_e \langle v \rangle}{e^2 n_e \lambda} \quad \lambda = \langle v \rangle \tau$$

λ es la distancia media que un electrón recorre entre dos colisiones consecutivas

- La velocidad de desplazamiento media es: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$
- Según el modelo clásico, λ se relaciona con:
 - El tamaño de los iones de la red cristalina (A)
 - El número de iones por unidad de volumen (n_{ion})
$$\lambda = \frac{1}{n_{ion} A}$$
- Como λ y $\langle v \rangle$ no dependen del campo eléctrico, la resistividad ρ tampoco, lo que esta de acuerdo con la Ley de Ohm.
- Problema: ρ debería variar con la temperatura, $\rho \propto \sqrt{T}$ porque $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$
- Experimentalmente se observa que la resistividad aumenta linealmente con T .
- El modelo clásico falla porque los electrones no obedecen la mecánica clásica.

Ejemplo: tiempo de redistribución de la carga en el interior de un conductor óhmico

$$\left. \begin{array}{l} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} = -\sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\sigma \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho$$
$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t} = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ *Tiempo de relajación: el tiempo que demora en disminuir la densidad de carga a un e^{-1} (36.7%) del valor inicial.*

Para el cobre: $\approx 10^{-19}$ s, para la mica ≈ 15 hs

Ejemplo: conductor óhmico homogéneo que transporta una corriente estacionaria

$$\left. \begin{array}{l} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \text{Conductor} \\ \text{homogéneo} \end{array}$$

Corriente estacionaria

Consecuencias:

1) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \rho = 0$ En el interior del conductor la densidad de carga libre es cero (ya lo sabíamos para cargas en reposo).

2) $\nabla \times \vec{E} = 0$
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla V) = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$

En el interior del conductor podemos calcular el potencial resolviendo la ecuación de Laplace.

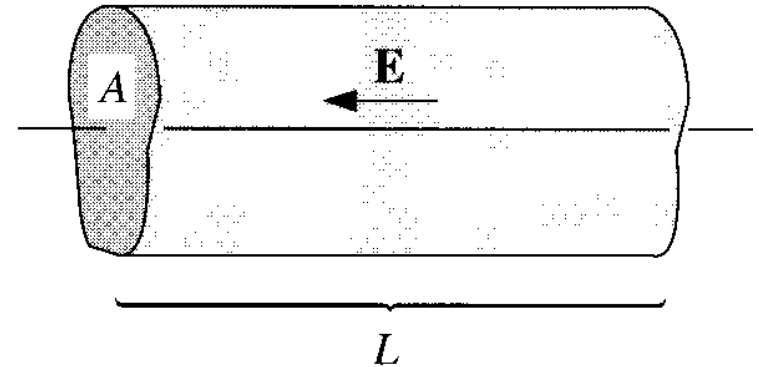
Resistencia

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

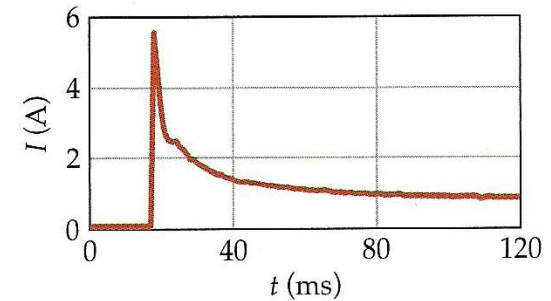
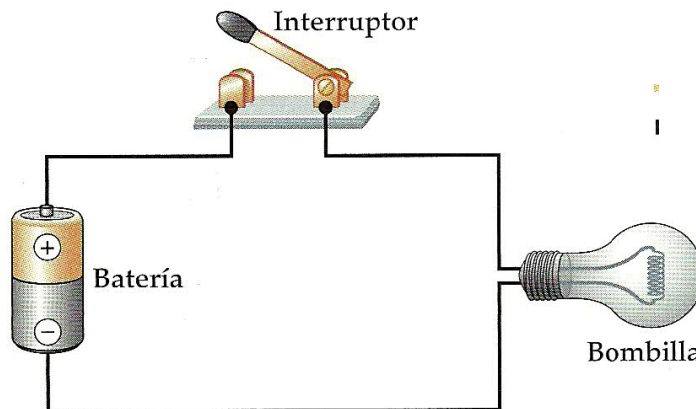
$$I = JA$$

$$E = \frac{\Delta V}{L} \Rightarrow \Delta V = EL = \frac{J}{\sigma} L = \frac{I/A}{\sigma} L$$

$$\Delta V = \frac{L}{\sigma A} I = R I \quad R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{\rho L}{A}$$



- La resistencia depende de la temperatura



- La resistencia del filamento de la bombilla (y de todos los metales) aumenta con T

Ejemplo

Los dos cilindros están separados por un material dieléctrico de permitividad ϵ y resistividad ρ y se mantienen a una diferencia de potencial V . El cilindro interior tiene carga λ por unidad de longitud.

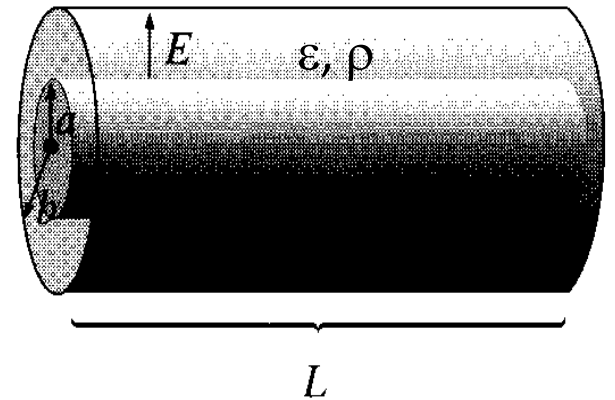
$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{\lambda}{2\pi r} \quad a \leq r \leq b$$

$$\Delta V = -\int_b^a E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

$$I = \int_s \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_s \frac{\vec{E}}{\rho} \cdot \hat{n} dA$$

donde S es una superficie cilíndrica que encierra el cilindro interior.

$$I = \frac{E}{\rho} 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\rho \epsilon} \Rightarrow \lambda = \frac{\rho \epsilon}{L} I \quad \Delta V = R I$$
$$\Delta V = \left(\frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a} \right) I \Rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$$



Conductores, semiconductores y aislantes

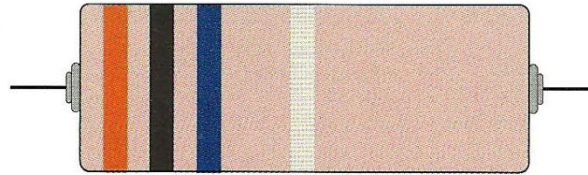
$$\alpha = \frac{(\rho - \rho_0)/\rho_0}{T - T_0}$$

Material	Resistividad ρ a 20 °C, $\Omega \cdot m$	Coeficiente de temperatura α a 20 °C, K^{-1}	Material	Resistividad ρ a 20 °C, $\Omega \cdot m$	Coeficiente de temperatura α a 20 °C, K^{-1}
<i>Elementos conductores</i>			<i>Semiconductores</i>		
Aluminio	$2,8 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$	Germanio	0,45	$-4,8 \times 10^{-2}$
Carbono	3500×10^{-8}	$-0,5 \times 10^{-3}$	Silicio	640	$-7,5 \times 10^{-2}$
Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,93 \times 10^{-3}$	<i>Aislantes</i>		
Hierro	10×10^{-8}	$5,0 \times 10^{-3}$	Ámbar	5×10^{14}	
Mercurio	96×10^{-8}	$0,89 \times 10^{-3}$	Goma dura	$10^{13} - 10^{16}$	
Plata	$1,6 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$	Madera	$10^8 - 10^{14}$	
Platino	100×10^{-8}	$3,927 \times 10^{-3}$	Neopreno	$\sim 10^9$	
Plomo	22×10^{-8}	$4,3 \times 10^{-3}$	Poliestireno	$\sim 10^8$	
Tungsteno	$5,5 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$	Porcelana	$\sim 10^{11}$	
<i>Aleaciones conductoras</i>			Sulfuro	1×10^{15}	
Constantan (60% Cu, 40% Ni)	$\sim 44 \times 10^{-8}$	$0,002 \times 10^{-3}$	Teflón	1×10^{14}	
Latón	$\sim 8 \times 10^{-8}$	2×10^{-3}	Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	
Manganina (~84% Cu, ~12% Mn, ~4% Ni)	44×10^{-8}	$0,000 \times 10^{-3}$	<i>Material biológico</i>		
Nicrom	100×10^{-8}	$0,4 \times 10^{-3}$	Grasa	25	
			Sangre	1,5	

- El carbono es normalmente utilizado para las resistencias de equipos electrónicos.

Ejemplo: Un cable de nicrom tiene un radio de 0.65 mm. ¿Qué longitud de cable se necesita para obtener una resistencia de 2 Ω ? Resp: 2.65 m

Tabla 25.3 Código de colores para resistencias y otros dispositivos

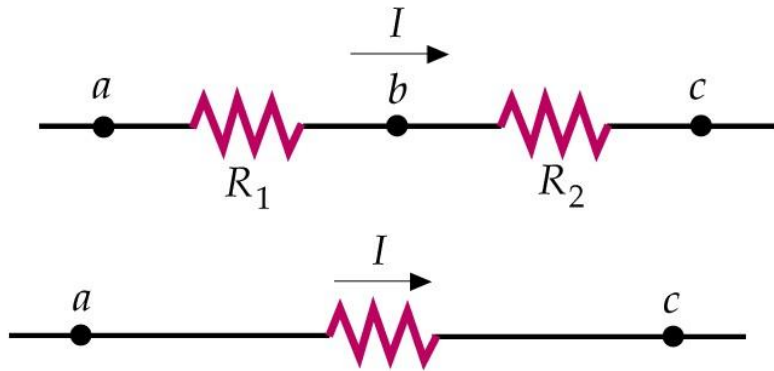


Colores Dígitos	Tolerancia
Negro = 0	Marrón = 1%
Marrón = 1	Rojo = 2%
Rojo = 2	Dorado = 5%
Naranja = 3	Plateado = 10%
Amarillo = 4	Ninguno = 20%
Verde = 5	
Azul = 6	
Violeta = 7	
Gris = 8	
Blanco = 9	

Las bandas de colores deben ser leídas comenzando con la que está más próxima al extremo de la resistencia. Con las primeras dos bandas se determina un número entre 1 y 99. La tercera banda representa el número de ceros que se han de añadir a la derecha del número formado por las dos primeras. En la resistencia mostrada en la figura, los colores de las tres primeras bandas son, naranja, negro y azul, por lo que el número es 30 000 000 y, consecuentemente, la resistencia es de 30 M Ω . (Si una banda verde se inserta entre la negra y la azul, la resistencia sería de 305 M Ω .) La cuarta banda representa la tolerancia. Como la banda del dibujo es plateada, la tolerancia es del 10%. El 10% de 30 es 3, por lo que la resistencia del dibujo es (30 ± 3) M Ω .

Asociaciones de resistencias

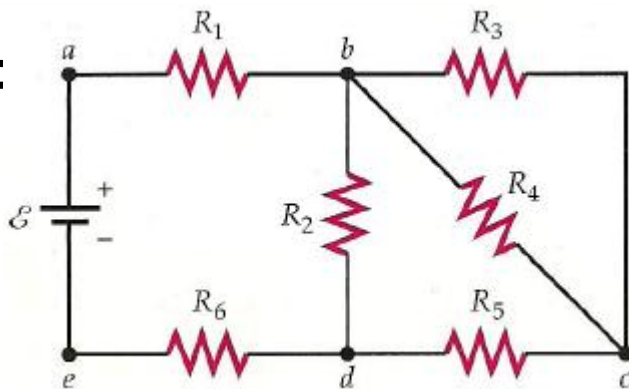
Serie



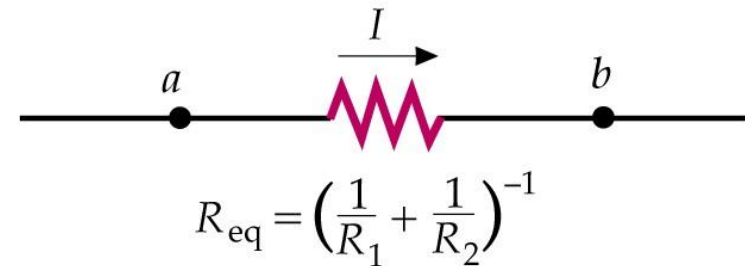
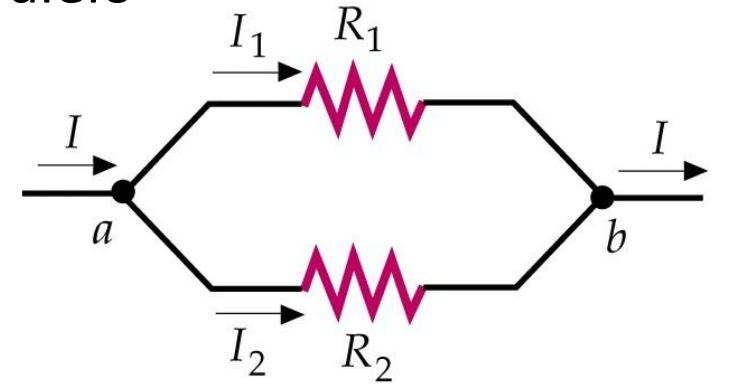
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Ejemplo:



Paralelo



$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} > \frac{1}{R_i} \Rightarrow R_{eq} < R_i$$

4.3 Potencia disipada y Ley de Joule

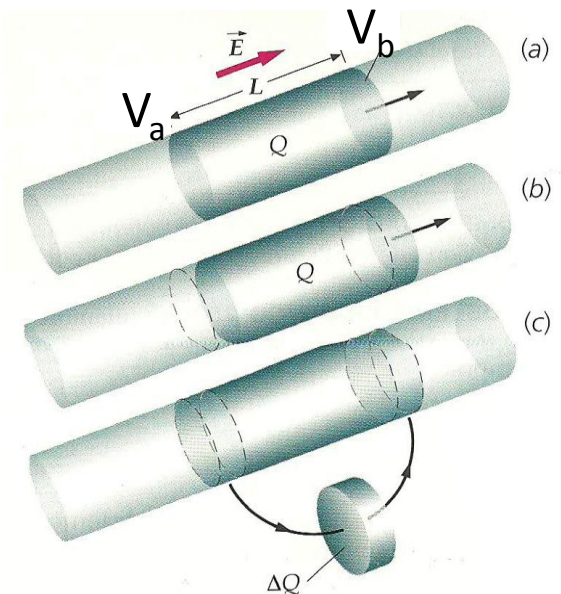
- Cuando por un conductor de resistividad ρ circula corriente eléctrica, parte de la energía cinética de los electrones se transforma en calor debido a los choques que sufren los electrones con los átomos del material, lo que produce un aumento de la temperatura (efecto Joule).
- Cuando por el conductor circula una corriente estacionaria una parte de la energía se disipa en forma de calor debido a las colisiones de electrones libres con los átomos fijos.

$$W = \Delta U = \Delta Q(V_b - V_a)$$

$$V = V_a - V_b > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = -\Delta Q V$$

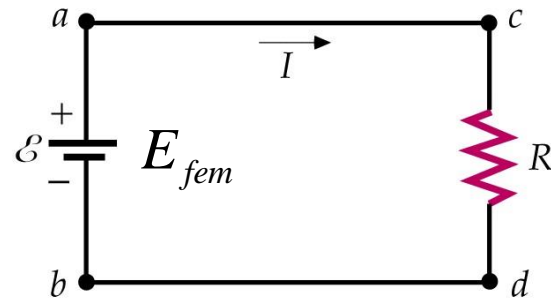
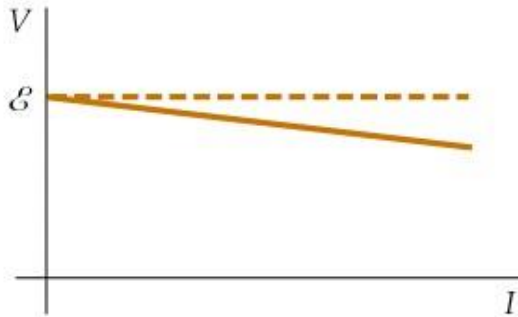
$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} V = -IV$$

$$\Rightarrow P = IV = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad \text{Potencia disipada en una resistencia}$$



4.4 Fuerza electromotriz y baterías

- Para mantener una corriente estacionaria en un circuito real (que posee una cierta resistencia) se requiere un suministro de energía.
- Batería o pila: convierte energía química en energía eléctrica.
- Motor: convierte energía mecánica en energía eléctrica.
- Fuente de FEM (motor o batería): realiza trabajo sobre toda carga que pasa a través de la fuente, elevando su energía potencial.
- Una fuente de FEM ideal es un dispositivo que suministra energía eléctrica (fuente electromotriz) y que mantiene una diferencia de potencial E_{fem} constante entre sus dos terminales.
- Para una fuente real:



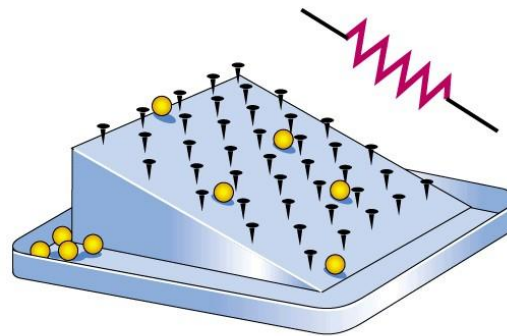
Fuente de fuerza electromotriz

- En el interior de la fuente las cargas se mueven de una región de bajo potencial a otra de mayor potencial.
- Cuando un elemento de carga ΔQ atraviesa la fuente su energía aumenta en

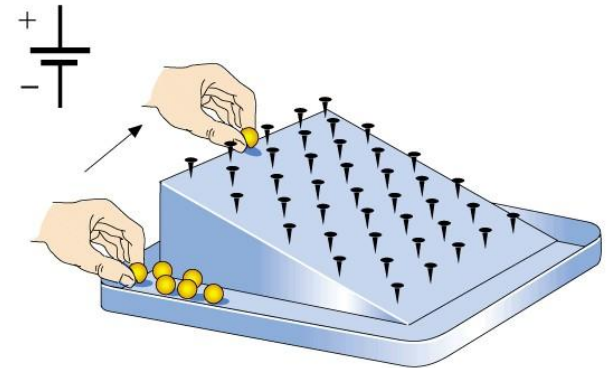
$$\Delta Q E_{fem}$$

- La potencia suministrada por la fuente es $P = \frac{\Delta Q E_{fem}}{\Delta t} = I E_{fem}$

- Analogía mecánica:



(a)



(b)

Energía almacenada en una batería

$$I = \frac{E_{fem}}{R + r} \quad \begin{array}{l} r \text{ es la resistencia} \\ \text{interna de la} \\ \text{batería.} \end{array}$$

- Las baterías se suelen especificar en Ampere hora, lo que indica la carga total Q que pueden suministrar:

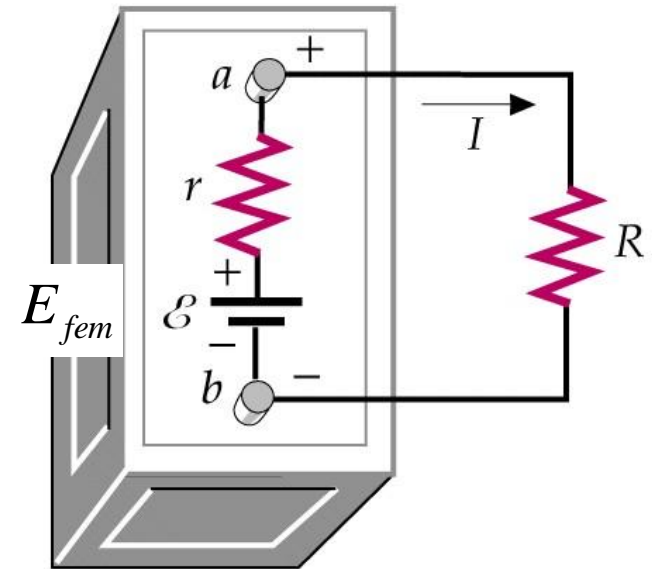
$$1 \text{ Ah} = (1 \text{ C/s})(3600 \text{ s}) = 3600 \text{ C}$$

- La energía total almacenada es:

$$P = IE_{fem} \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad P = \frac{dE_{\text{almacenada}}}{dt}$$

$$\frac{dE_{\text{almacenada}}}{dt} = \frac{dQ}{dt} E_{fem}$$

$$E_{fem} \text{ es constante} \\ \Rightarrow E_{\text{almacenada}} = Q(t)E_{fem}$$



La energía almacenada es la carga total multiplicada por la fem y es igual al trabajo total que puede realizar la batería.

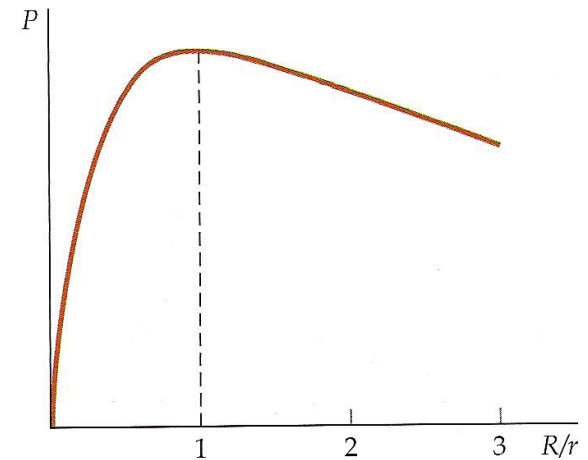
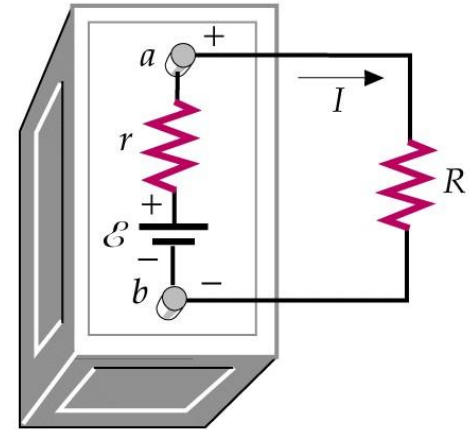
Potencia suministrada por una batería

$$I = \frac{E_{fem}}{R + r}$$

$$P = IE_{fem} = I^2 R = \left(\frac{E_{fem}}{R + r} \right)^2 R$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Leftrightarrow R = r$$

La potencia suministrada por la batería es máxima cuando la resistencia externa es igual a la interna.



4.5 Leyes de Kirchhoff

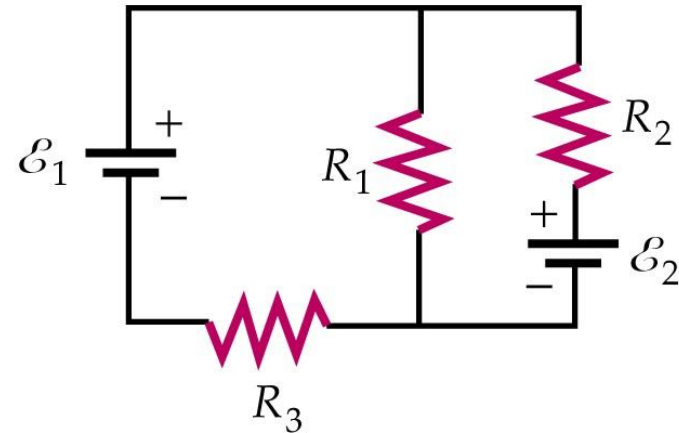
- Permiten calcular las corrientes y la diferencia de potencial en cada componente de un circuito en situación estacionaria (corrientes y voltajes constantes en el tiempo).

- **Regla de las mallas**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i \Delta V_i = 0$$

La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla cerrada del circuito debe ser igual a cero.



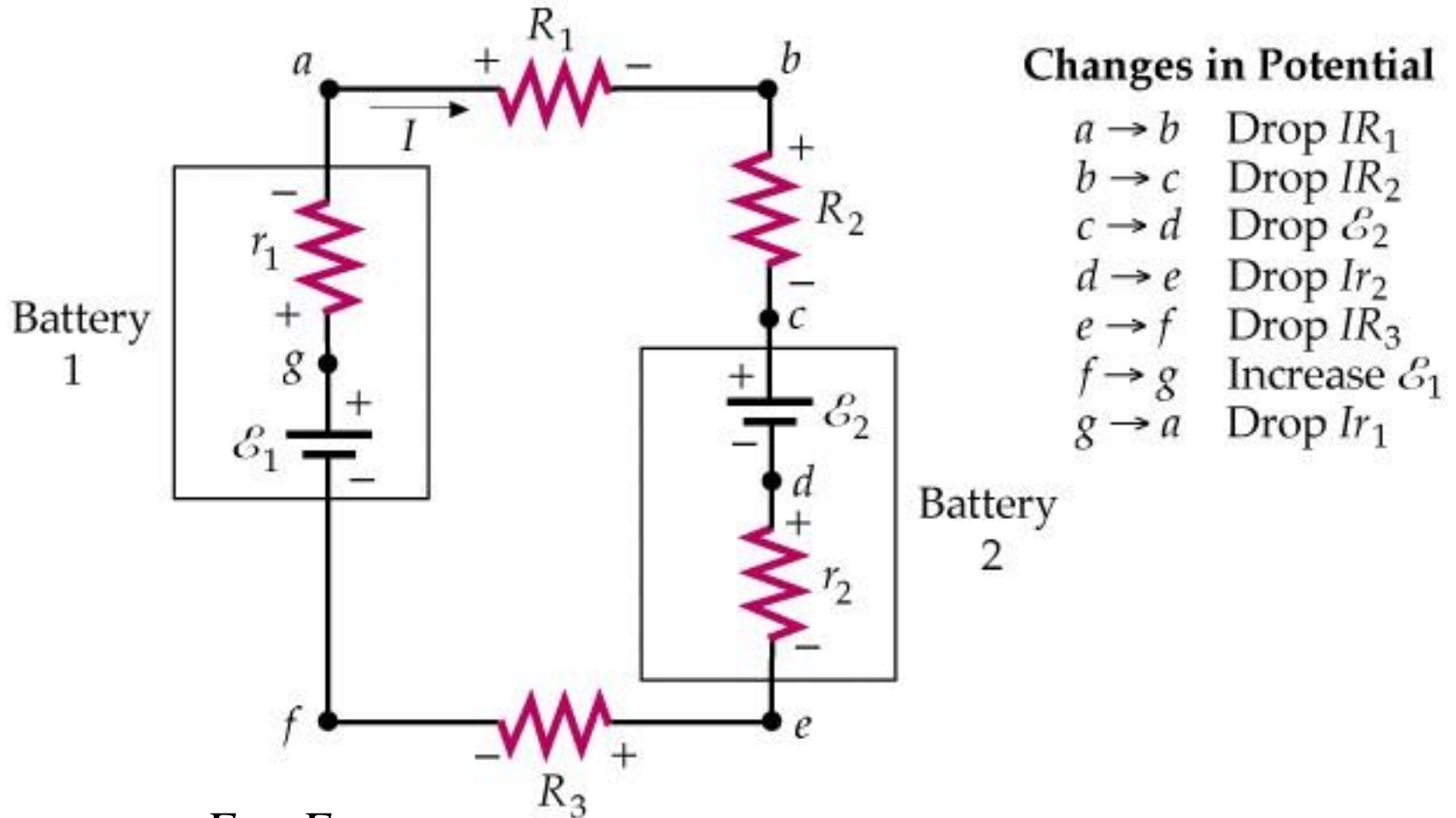
- **Regla de los nudos**

$$\oint_s \vec{J} \cdot \hat{n} dA = -\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\sum_i I_i = 0$$

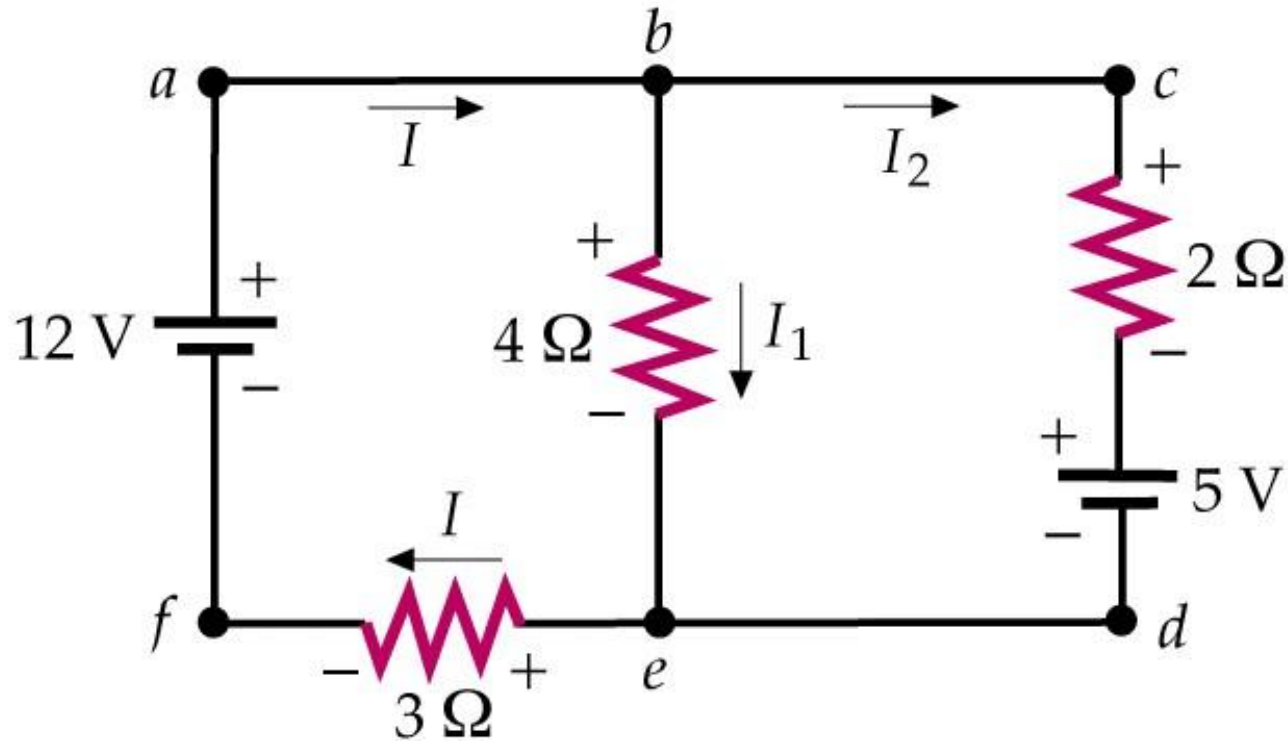
La carga no se acumula (ni se pierde) en ningún punto del circuito, por lo que en cada nudo donde puede dividirse la corriente, la suma de las corrientes que entran (negativas) debe ser igual a la suma de las corrientes que salen (positivas).

Circuitos de una sola malla



$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2}$$

Circuitos de múltiples mallas

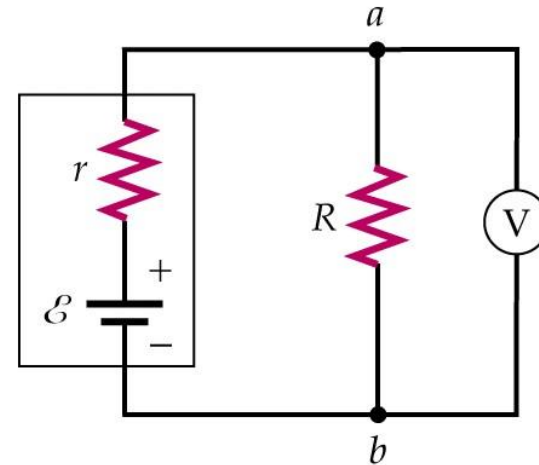
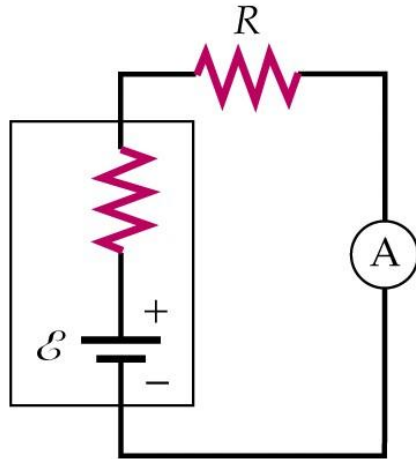


Calcular I_1 , I_2 y la energía disipada en 3 s en la resistencia de $4\ \Omega$.

Resp: 1.5 A, 0.5 A y 27 J

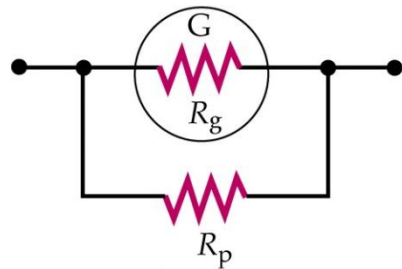
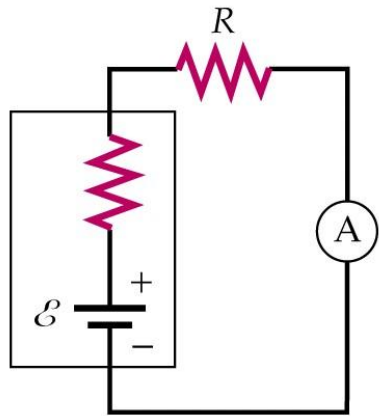
Amperímetros, Voltímetros y Ohmímetros

- Se conectan en serie (amperímetro) y en paralelo (voltímetro) para poder medir la intensidad (que circula por un cable) y la diferencia de potencial (entre dos puntos) respectivamente.



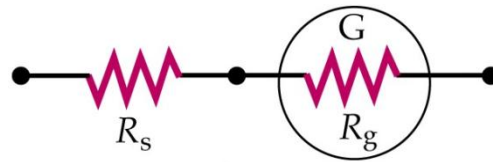
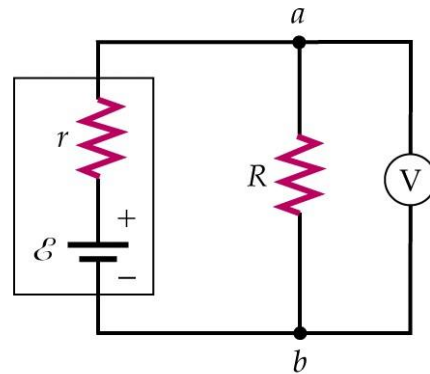
- El amperímetro, el voltímetro y el ohmímetro contienen un **galvanómetro**: la lectura del galvanómetro es proporcional a la corriente que pasa por el galvanómetro. Suele consistir en una bobina de alambre situada en un campo magnético permanente (imán). Cuando una corriente ***i*** circula por la bobina el campo magnético del imán ejerce un momento que hace girar la bobina y este giro permite medir la corriente ***i***.

Amperímetros, Voltímetros y Ohmímetros



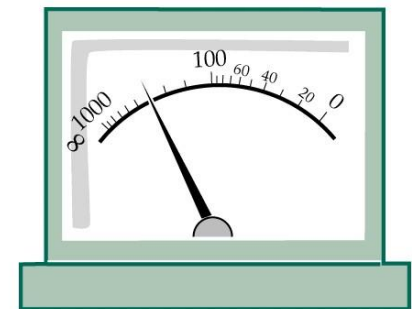
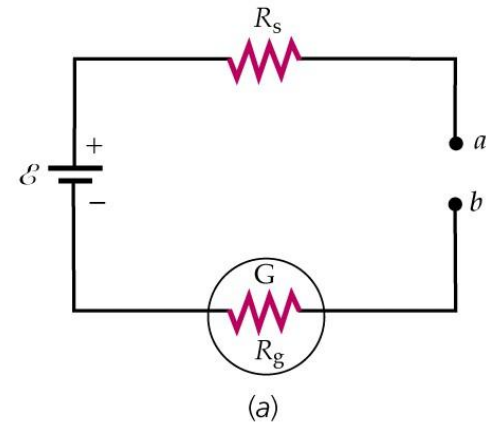
Amperímetro construido con un Galvanómetro (R_p pequeña)

Resistencia efectiva del amperímetro $\approx R_p \Rightarrow$ la corriente que circula por el circuito casi no se modifica.



Voltímetro construido con un Galvanómetro (R_s grande)

Resistencia efectiva del voltímetro $\approx R_s \Rightarrow$ la corriente que circula por el voltímetro es muy pequeña.

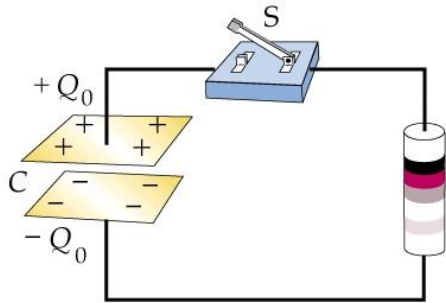


(b)

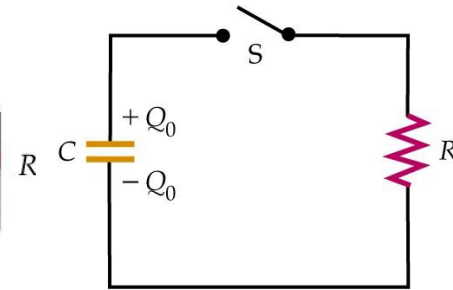
Ohmímetro: R_s se elige tal que la aguja indica 0 cuando a y b están en cortocircuito

4.6 Circuito RC: carga y descarga de un condensador

Descarga de un condensador



(a)

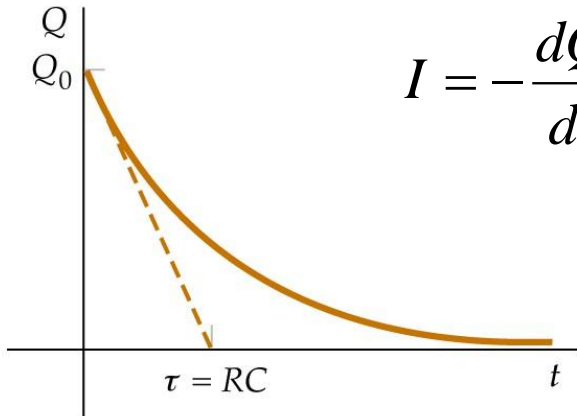


(b)

$$\frac{Q}{C} = IR \quad I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-t/RC}$$

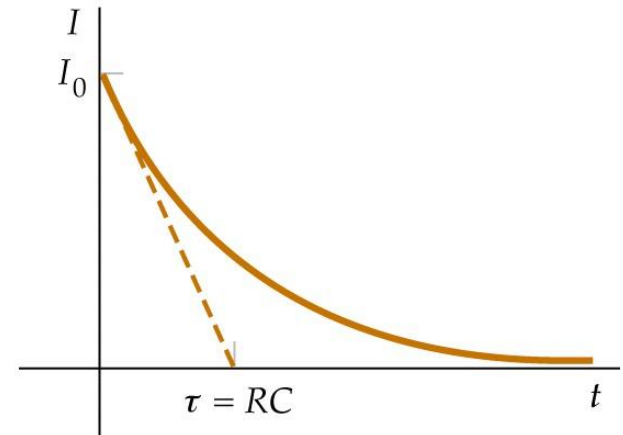
$$\tau = RC \quad \text{Constante de tiempo}$$



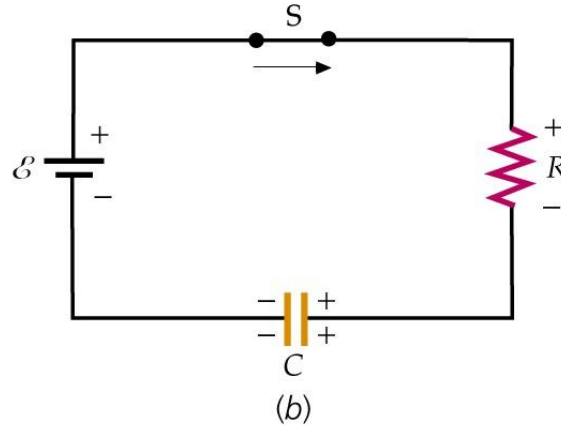
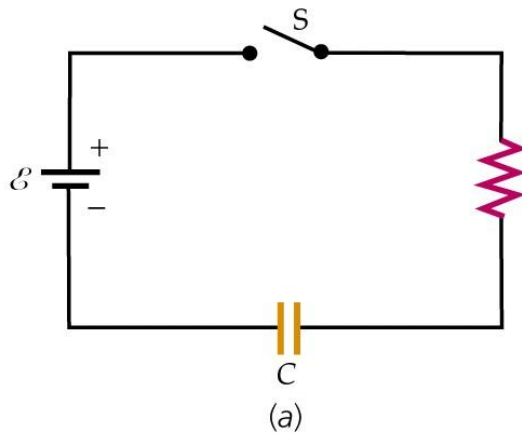
$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow I = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0 / C}{R}$$



Carga de un condensador



$$E_{fem} = IR + \frac{Q}{C}$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow E_{fem} - R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow Q = CE_{fem} (1 - e^{-t/RC})$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = \frac{E_{fem}}{R} e^{-t/\tau}$$

