Universidad de Valparaíso CHILE

Licenciatura en Física
Mención Astronomía
y Ciencias Atmosféricas

ÁLGEBRA LINEAL 124
Prof. Mario Marotti

Nombre …………………………………………………………….. Nota ……………

3ª. prueba parcial

15 de Noviembre de 2017

En todos los ejercicios, justifique cada paso con la mayor claridad posible

---

1. (a) Determine una base y la dimensión del subespacio W de $\mathbf{R}^3$ dado por:

$$W_1 = \{(x, y, z) / \; x - y + 2z = 0\}$$ **(0.5 puntos)**

(b) Dado el espacio vectorial W_2 generado por el siguiente conjunto de vectores,

$$\{(-1,1,1), (1,2,1)\}$$

encuentre una base para el subespacio vectorial $W_1 + W_2$. **(1.0 puntos)**

(c) ¿Es la suma antes mencionada una suma directa? Explique. **(0.5 puntos)**

2. (a) Probar que los conjuntos

$$B_1 = \{(1, (x-1), (x-1)^2\} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \{1, x-5, (x-3)^2\}.$$

son bases del conjunto $\mathbf{P}^2\mathbf{(x)}$ de todos los polinomios en la variable x de grado menor o igual a 2. **(0,5 puntos)**

(b) Hallar la matriz de pasaje de un sistema de coordenadas en la base B_1 a otro en la base B_2. **(1.0 puntos)**

(c) Trabajando con matrices, exprese al polinomio $p(x) = 2 - x + x^2$ en la base B_2 y compruébelo trabajando con los polinomios directamente. **(1.0 puntos)**

3. (a) Dado el conjunto de vectores $\{(1, 1, 2),\; (2, 1, -3),\; (3, 2, -1)\}$, indique la dimensión del subespacio vectorial W generado por ellos. **(1.0 puntos)**

(b) Encuentre una base ortonormal de W que contenga un vector colineal con $(1, 1, 2)$. **(1.0 puntos)**

Ejercicio 1:

(a) $W_1 = \{(x,y,z) \mid x - y + 2z = 0\}$

Despejo $x = y - 2z$

Por tanto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base $= \{(1,1,0)(-2,0,1)\}$ Dimensión $= 2$.

(b) $W_1 + W_2 = \mathrm{Gen}\{(1,1,0)(-2,0,1)(-1,1,1)(1,2,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2' = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3' = 2F_3 - F_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El conjunto de vectores no es linealmente independiente.

Una base posible es $B = \{(1,1,0)(-2,0,1)(1,2,1)\}$

(c) No. No es suma directa. El conjunto de 4 vectores anterior debería ser linealmente independiente para que eso ocurriera.

Ejercicio 2:

(a) Expresadas como vectores, las bases son:

$B_1 = \{ (1,0,0)\ (-1,1,0)\ (1,-2,1) \}$ — Las matrices tienen rango 3,

$B_2 = \{ (1,0,0)\ (-5,1,0)\ (9,-6,1) \}$

y ambos conjuntos son linealmente independientes.

(b) $B_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} B_C \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} B_2$

Calculamos: $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La matriz de pasaje es: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Resp: $(18, 5, 1)$.

Comprobando:

$p(x) = 1(x-3)^2 + 5(x-5) + 18$

$p(x) = x^2 - 6x + 9 + 5x - 25 + 18$

$p(x) = x^2 - x + 2$ ✓

Ejercicio ~~4~~3:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 - 2F_1]{F_2' = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3' = F_3 - 7F_2}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ La dimensión es 2.

Hay sólo 2 vectores linealmente independientes.

$\text{Base} = \{ \underbrace{(1,1,2)}_{\vec{a}} \; \underbrace{(2,1,-3)}_{\vec{b}} \}$

(b) $\boxed{\vec{u_1} = (1,1,2)}$

Por el método de Gram-Schmidt,

$\vec{u_2} = (2,1,3) - \text{proy}_{\vec{u_1}} \vec{b}$

$\vec{u_2} = (2,1,3) - \dfrac{(1,1,2)(2,+1,-3)}{(1,1,2)(1,1,2)}(1,1,2)$

$\vec{u_2} = (2,1,3) + \frac{1}{2}(1,1,2)$

$\boxed{\vec{u_2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -2\right)}$

Falta normalizar: $||\vec{u_1}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$||\vec{u_2}|| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\vec{e_1} = \dfrac{\vec{u_1}}{||\vec{u_1}||} = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)}$

$\vec{e_2} = \dfrac{\vec{u_2}}{||\vec{u_2}||} = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}\right)}$