7.2. Deduce the virial expansion (7.1.13) from equations (7.1.7) and (7.1.8), and verify the quoted values of the virial coefficients.

7.1.13
$$\frac{PV}{NkT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1},$$

7.1.7
$$\frac{P}{kT} = -\frac{2\pi(2mkT)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty x^{1/2}\ln(1-ze^{-x})dx = \frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}(z)$$

7.1.8
$$\frac{N-N_0}{V} = \frac{2\pi(2mkT)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{z^{-1}e^x-1} = \frac{1}{\lambda^3}g_{3/2}(z),$$

Es muy util usar la aproximación de N >> N0, se abusa bastante de esta, es la cantidad de particulas para energia en estado 0.

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \quad \text{entonces} \quad n\lambda^3 = g_{3/2}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{3/2}} = z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}}$$

$$\frac{P}{kT}\frac{V}{N} = \frac{P}{kT}\,\frac{1}{n}$$

Necesitamos invertir la serie recien obtenida

$$n\lambda^3 = z + 2^{-3/2} z^2 + 3^{-3/2} z^3 + \dots = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

$$z = a_1 (n\lambda^3) + a_2 (n\lambda^3)^2 + \dots$$

$$(b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3)$$
$$(b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3)$$

Las inversiones de series son un proceso largo y desordenado, se recomienda hacer tablas

$$z = a_1 (b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots) + a_2 (b_1^2 z^2 + 2 b_1 b_2 z^3 + \dots) + a_3 (b_1^3 z^3 + \dots)$$

$z)$ $\quad a_1 b_1 = 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = 1$

$z^2)$ $\quad a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad b_2 + a_2 = 0 \rightarrow a_2 = -2^{-3/2}$

$z^3)$ $\quad a_1 b_3 + a_2 \cdot 2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 = 0 \rightarrow -b_3 - 2 a_2 b_2 = a_3 = -3^{-3/2} - 2(-2^{-3/2})^2$

$$a_3 = -3^{-3/2} + \frac{1}{4}$$

$$z = (n\lambda^3) - 2^{-3/2}(n\lambda^3)^2 + \left(\frac{1}{4} - 3^{-3/2}\right)(n\lambda^3)^3 + \dots$$

Luego se reemplazará la serie que tenemos de z, para cada potencia de z, de esa forma seremos capaces de dividir termino a termino

$$\frac{P}{kT}\frac{1}{n} = \frac{1}{\lambda^3 n} g_{5/2}(z) = \frac{1}{n\lambda^3}\left(z + 2^{-5/2} z^2 + 3^{-5/2} z^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{n\lambda^3}\left\{ \left((n\lambda^3) - 2^{-3/2}(n\lambda^3)^2 + \left(\frac{1}{4} - 3^{-2/3}\right)(n\lambda^3)^3 \dots\right) + 2^{-5/2}\left((n\lambda^3) - 2^{-3/2}(n\lambda^3)^2 + \left(\frac{1}{4} - 3^{-2/3}\right)(n\lambda^3)^3\right)^2 + \dots \right\}$$

$$= 1 - 2^{-3/2}(n\lambda^3) + 2^{-5/2}(n\lambda^3) + \left(\frac{1}{4} - 3^{-2/3}\right)(n\lambda^3)^2 + 2^{-5/2}(n\lambda)^2 + 2^{-5/2}\left(2\cdot\left(-2^{-3/2}\right)\right)(n\lambda)^2$$

$$= 1 + \left(-2^{-3/2} + 2^{-5/2}\right)(n\lambda^3) + \left(\frac{1}{4} - 3^{-2/3} + 2^{-5/2} - 2^{-5/2}\cdot 2^{-1/2}\right)(n\lambda)^2 + \dots$$

$$= \underbrace{1}_{a_1=1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{2\cdot 2^{3/2}}\right)}_{a_2 = -0.176}(n\lambda^3) + \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{2/3}} + \frac{1}{2^{5/2}} - \frac{1}{2^{6/2}}\right)}_{a_3 = 0.109}(n\lambda)^2 + \dots$$

where $v (\equiv 1/n)$ is the volume per particle;

$$\frac{PV}{NkT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}, = \sum_{l=1}^{\infty} a_l (n\lambda^3)^{l-1} = a_1 + a_2(n\lambda^3) + a_3(n\lambda^3)^2$$

debe ser de acuerdo a 7.1.14

$$a_1 = 1, \checkmark$$

$$a_2 = -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -0.17678, \checkmark$$

$$a_3 = -\left(\frac{2}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{8}\right) = -0.00330,$$

$$a_4 = -\left(\frac{3}{32} + \frac{5}{32\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right) = -0.00011,$$

Se considerá el ejercicio como completo, para este termino es necesario tener en cuenta muchas multiplicaciones cruzadas, quizas con una tabla o un computador se logrará esto, pero manualmente es algo que más allá del 3r termino requeriria de un tiempo exponencial