Clase 24 061221 (1)

Agujero Negro de Kerr:

Generaliza al agujero negro de Schwarzschild en el sentido que incluye la rotación de la fuente.

Los parámetros relevantes son la masa, $\underline{M}$, y el momentum angular, $\underline{J}$.

Trabajando en unidades geometrizadas, es útil definir la cantidad

$$\boxed{a = \frac{J}{M}}, \quad \dim(a)_{geom} = L \text{ : longitud.}$$

la métrica de Kerr:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta\, d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)d\phi - a\,dt\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

donde

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

- La métrica de Kerr posee simetría axial, pero no esférica:

Veamos que para r y t constantes

$$ds_2^2 = \rho^2 d\theta^2 + \frac{(R^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\, d\phi^2$$

$$a=0 \rightarrow ds_2^2 = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

- $a=0 \Rightarrow \text{Kerr} \xrightarrow[J=0]{} \text{Schwarzschild}.$

- En general: $ds^2 = -g_{tt}\,dt^2 + g_{rr}\,dr^2 + g_{\theta\theta}\,d\theta^2 +$

$$+ g_{\phi\phi}\,d\phi^2 + 2g_{t\phi}\,dt\,d\phi$$

Para una métrica axial: La diferencia está en el término

$$\boxed{g_{t\phi} = -a\cdot\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}.}$$

$g_{t\phi}$ introduce nuevos efectos sobre la trayectoria de las partículas.

Ya que $g_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}(\phi)$, $\forall(\alpha,\beta)$, el momento canónico conjugado de ϕ, p_ϕ, es conservado.

$$p^\phi = g^{\phi\alpha} p_\alpha = g^{\phi t} p_t + \underbrace{g^{\phi r}}_{=0} p_r + \underbrace{g^{\phi\theta}}_{=0} p_\theta + g^{\phi\phi} p_\phi$$

$$p^\phi = g^{\phi t} p_t + g^{\phi\phi} p_\phi$$

Si consideramos ~~partículas~~ radiales, $L = 0 \Rightarrow p_\phi = 0$.

$$\therefore \; p^t = m \frac{dt}{d\tau} \quad ; \quad p^\phi = m \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} \equiv \omega(r,\theta)$$

ω representa la velocidad angular de una partícula con momentum angular cero.

- El espacio-tiempo de Kerr posee dos horizontes: Estos se encuentran en los puntos donde $\Delta = 0$, i.e $g_{rr} \to \infty$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \Big|_{r=r_h} = 0$$

$$r_h = \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 - 4a^2}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(M \pm \sqrt{M^2 - a^2}\right)}{2}$$

$$r_h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_h = r_+ &= M + \sqrt{M^2 - a^2} \\ r_h = r_- &= M - \sqrt{M^2 - a^2} \end{aligned}}$$

r_+: Horizonte de eventos

r_-: Horizonte de Cauchy.

Ergoregión: Pensemos en fotones emitidos en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, para algún r.

Si inicialmente se mueve en dirección $\pm \hat{\phi}$, es decir tangente al circulo $r = \text{const}$, y ya que $ds^2 = 0$ para fotones

$$0 = -g_{tt}\, dt^2 + 2g_{t\phi}\, dt\, d\phi + g_{\phi\phi}\, d\phi^2$$

$$g_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + 2g_{t\phi}\left(\frac{d\phi}{dt}\right) - g_{tt} = 0$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + 2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\left(\frac{d\phi}{dt}\right) - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} = 0$$

a 24

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{-2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{4\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 + 4\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}}{2}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 + \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}}$$

* Si $g_{tt} = 0$

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_1 = 0 \quad \wedge \quad \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_2 = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

$$g_{tt} = 0 = \left.\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta = a^2}$$

en cualquier otro plano θ:

$$\Delta - a^2 \sin^2\theta = 0$$

$$r^2 - 2Mr + a^2 - a^2 \sin^2\theta = 0$$

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2\theta = 0$$

Ergoesfera $r = r_0$

$$\boxed{r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}}$$

El área de la superficie generada por el horizonte de eventos:

$$A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{g_{\phi\phi} \cdot g_{\theta\theta}}\Big|_{r=r_+} \sin\theta$$

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \sqrt{(r^2+a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta}\,\Big|_{r=r_+}$$

$$\boxed{A = 4\pi (r^2+a^2)}$$