Prueba Módulo I - Forma A
MMF II
Licenciatura en Física - 2020

Problema I : Integraciones misceláneas y aplicabilidad de MoB

Determine si en las siguientes integrales MoB puede aplicarse o no. Si MoB es aplicable obtenga la solución de la integral:

1. (50%) $\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-ax - \frac{1}{x}\right) \, dx$

2. (50%) $\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-ax^2 - \frac{1}{x^2}\right) \, dx$

Problema II : Funciones de Bessel y MoB

Halle el valor de la siguiente integral:

$$I = \int_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right) J_\nu(bx) \, dx$$

Problema III : Diagramas de Feynman y MoB

La siguiente integral tiene su origen en los diagramas de Feynman, en este caso, dicha integral contribuye a calcular teóricamente la masa de una partícula:

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \frac{\exp\left(xM^2\right) \exp\left(yM^2\right) \exp\left(-\frac{xy}{x+y} P^2\right)}{(x+y)^{\frac{D}{2}}} \, dxdy$$

1. (50%) Obtenga la serie de brackets equivalente para esta integral (Obs.: Esta serie tiene Índice 1).

2. (40%) Halle la solución en términos de series hipergeométricas, con argumentos $\dfrac{P^2}{4M^2}$ y $\dfrac{4M^2}{P^2}$ respectivamente.

3. (10%) ¿Cuál es la solución para el caso $M = 0$?.

PRUEBA MÓDULO I

FORMA A

PROBLEMA I

1) $$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-ax-\frac{1}{x}} dx$$

PASO 1: Expansión integrando

$$e^{-ax} e^{-\frac{1}{x}} = \sum_n \sum_\ell \phi_{n,\ell} a^n x^{n-\ell}$$

PASO 2: serie de brackets de la integral

$$I = \sum_n \sum_\ell \phi_{n,\ell} a^n \langle n-\ell+\alpha \rangle$$

PASO 3: Obtención de términos

* n libre $\rightarrow T_n$

$$T_n = \sum_{n\geq 0} \phi_n a^n \Gamma(-\ell) \Big|_{\ell = n+\alpha} = \sum_{n\geq 0} \Gamma(-n-\alpha) \frac{(-a)^n}{n!}$$

$$= \Gamma(-\alpha) \sum_{n\geq 0} (-\alpha)_{-n} \frac{(-a)^n}{n!}$$

(serie convergente) $\longrightarrow$ $$= \Gamma(-\alpha)\, {}_0F_1\left(\left. \begin{matrix} - \\ 1+\alpha \end{matrix} \right| a \right)$$

* ℓ libre $\Rightarrow T_\ell$

$$T_\ell = \sum_{\ell\geq 0} \phi_\ell\, a^n\, \Gamma(-n) \Big|_{n=\ell-\alpha} = \sum_{\ell\geq 0} \phi_\ell\, a^{\ell-\alpha}\, \Gamma(-\ell+\alpha)$$

$$= a^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha) \sum_{\ell\geq 0} (\alpha)_{-\ell} \frac{(-a)^\ell}{\ell!}$$

$$= a^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha)\; {}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} - \\ 1-\alpha \end{matrix}\right| a\right) \quad \text{(serie convergente)}$$

PASO 4: Solución integral

Dado que los términos T_n y T_ℓ tienen el mismo argumento, la solución de la integral es

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-ax-\frac{1}{x}}\, dx = T_n + T_\ell$$

2) $$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-ax^2} e^{-\frac{1}{x^2}}\, dx$$

PASO 1 : Expansión integrando

$$e^{-ax^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_n \sum_\ell \phi_{n,\ell}\, a^n\, x^{2n-2\ell}$$

PASO 2 : Serie de brackets de la integral

$$I = \sum_n \sum_l \phi_{n,l}\, a^n \langle 2n - 2l + \alpha \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \sum_l \phi_{n,l}\, a^n \langle n - l + \alpha/2 \rangle$$

PASO 3 : Generación de términos

Este caso es similar al caso anterior

$\Downarrow$

$$T_n = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \Gamma\left(-n - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{(-a)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma(-\alpha/2) \sum_{n\geq 0} (-\alpha/2)_{-n} \frac{(-a)^n}{n!} = \frac{1}{2} \Gamma(-\alpha/2)\, {}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} - \\ 1+\frac{\alpha}{2} \end{matrix}\right| a\right)$$

$$T_l = \frac{1}{2} a^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{l\geq 0} \Gamma\left(-l + \frac{\alpha}{2}\right) \frac{(-a)^l}{l!} = \frac{a^{-\alpha/2}}{2} \Gamma(\alpha/2)\, {}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} - \\ 1-\alpha/2 \end{matrix}\right| a\right)$$

Obs. La solución de esta integral es como el caso anterior:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-ax^2 - \frac{1}{x^2}} dx = T_l + T_n$$

PROBLEMA II

$$I=\int_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right)J_\nu(bx)\,dx$$

PASO 1 : Expansión del integrando

$$* \quad J_\nu\left(\frac{a}{x}\right)=\sum_{n\geq 0}\phi_n\frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{a}{2x}\right)^{2n+\nu}$$

$$=\frac{a^\nu}{2^\nu}\sum_{n\geq 0}\frac{a^{2n}}{4^n\Gamma(n+\nu+1)}x^{-2n-\nu}$$

$$* \quad J_\nu(bx)=\frac{b^\nu}{2^\nu}\sum_{\ell\geq 0}\frac{b^{2\ell}}{4^\ell\Gamma(\ell+\nu+1)}x^{2\ell+\nu}$$

PASO 2 : Serie de brackets de la integral

$$I=\frac{(ab)^\nu}{4^\nu}\sum_n\sum_\ell\phi_{n,\ell}\frac{a^{2n}b^{2\ell}}{4^{\ell+n}\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\ell+\nu+1)}\langle 2\ell-2n+1\rangle$$

o equivalentemente:

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{4}\right)^\nu\sum_n\sum_\ell\phi_{n,\ell}\frac{a^{2n}b^{2\ell}}{4^{\ell+n}\Gamma(n+\nu+1)\cdot\Gamma(\ell+\nu+1)}\left\langle \ell-n+\frac{1}{2}\right\rangle$$

De la serie de brackets se obtienen los siguientes términos:

$$I_1 = \frac{1}{b}\left(\frac{ab}{4}\right)^{\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(1/2-k)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(1/2+k+\nu)} \frac{\left(-\frac{a^2b^2}{16}\right)^k}{k!}$$

e

$$I_2 = \frac{1}{4^{\nu+1}} a(ab)^{\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(-1/2-k)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(3/2+k+\nu)} \frac{\left(-\frac{a^2b^2}{16}\right)^k}{k!}$$

∴ La solución de esta integral es:

$$I = I_1 + I_2$$ (Las series se suman dado que tienen el mismo argumento)

$\Downarrow$

series en potencias del argumento $\left(\frac{a^2b^2}{16}\right)$

PROBLEMA III

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{xM^2} e^{yM^2} e^{-\frac{xy}{x+y}P^2}}{(x+y)^{D/2}}\, dx\, dy$$

PASO 1: Expansión del integrando J :

$$J = \frac{e^{xM^2} e^{yM^2} e^{-\frac{xy}{x+y}P^2}}{(x+y)^{D/2}} = \frac{e^{-(x+y)(-M^2)} e^{-\frac{xy}{x+y}P^2}}{(x+y)^{D/2}}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-(x+y)(-M^2)} = \sum_n \phi_n (-M^2)^n (x+y)^n$$

$$e^{-\frac{xy}{x+y}P^2} = \sum_l \phi_l (P^2)^l x^l y^l (x+y)^{-l}$$

$\therefore$

$$J = \sum_n \sum_l \phi_{n,l} (-M^2)^n (P^2)^l \frac{x^l y^l}{(x+y)^{D/2+l-n}}$$

$$\sum_m \sum_k \phi_{m,k}\, x^m y^k \frac{\langle D/2+l-n+m+k \rangle}{\Gamma(D/2+l-n)}$$

Luego se tiene que:

$$J = \sum_n \sum_l \sum_m \sum_k \phi_{n,l,m,k} (-M^2)^n (p^2)^l \frac{\langle D/2 + l - n + m + k \rangle}{\Gamma(D/2 + l - n)}$$

$$\cdot\, x^{l+m} y^{l+k}$$

PASO 2: serie de brackets de la integral

Se obtener de manera directa del resultado obtenido en el paso 1:

$$I = \sum_n \sum_l \sum_m \sum_k \phi_{n,l,m,k} (-M^2)^n (p^2)^l$$

$$\times \frac{\langle D/2 + l - n + m + k \rangle \langle \alpha + l + m \rangle \langle \beta + l + k \rangle}{\Gamma(D/2 + l - n)}$$

PASO 3: Obtención de términos (Los resrminos)

$$I_1 = (p^2)^{D/2 - \alpha - \beta} \sum_{k \geq 0} \phi_k \frac{\Gamma(D/2 - \alpha - k)\,\Gamma(D/2 - \beta - k)\,\Gamma(\alpha + \beta - \frac{D}{2} + k)}{\Gamma(D - \alpha - \beta - 2k)} \left(\frac{M^2}{p^2}\right)^k$$

$$I_2 = (-M^2)^{D/2 - \alpha - \beta} \sum_{k \geq 0} \phi_k \frac{\Gamma(\beta + k)\,\Gamma(\alpha + k)\,\Gamma(\alpha + \beta - \frac{D}{2} + k)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2k)} \left(\frac{p^2}{M^2}\right)$$

$$I_3 = (-M^2)^{D/2-\beta}(p^2)^{-\alpha}\sum_{k\geq 0}\phi_k \frac{\Gamma(\beta-\alpha-k)\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta-D/2-k)}{\Gamma(2k+\beta-\alpha)}\left(\frac{M^2}{p^2}\right)$$

$$I_4 = (-M^2)^{D/2-\alpha}(p^2)^{-\beta}\sum_{k\geq 0}\phi_k \frac{\Gamma(\alpha-\beta-k)\Gamma(\beta+k)\Gamma(\alpha-D/2-k)}{\Gamma(2k+\alpha-\beta)}\left(\frac{M^2}{p^2}\right)$$

Luego la solución de la integral es

$$I = \begin{cases} I_1 + I_3 + I_4 & \left(\text{argumento } \frac{M^2}{p^2}\right) \\ \text{ó} & \\ I_2 & \left(\text{argumento } \frac{p^2}{M^2}\right) \end{cases}$$

Obs. Cada serie corresponde a hipergeométricas de la forma ${}_3F_2(\cdots)$, por lo tanto tienen radio de convergencia 1

$$\Downarrow$$

$$I = I_2 \left(\text{para } \left|\frac{p^2}{4M^2}\right| < 1\right)$$

$$I = I_1 + I_3 + I_4 \left(\text{para } \left|\frac{4M^2}{p^2}\right| < 1\right)$$

Para $M^2 = 0$ basta hacer en la serie de brackets $n=0$ y eliminar $\sum_n$. La solución obtenida en ese caso es: $I = (p^2)^{D/2-\alpha-\beta}\dfrac{\Gamma(D/2-\alpha)\Gamma(D/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-D/2)}{\Gamma(D-\alpha-\beta)}$