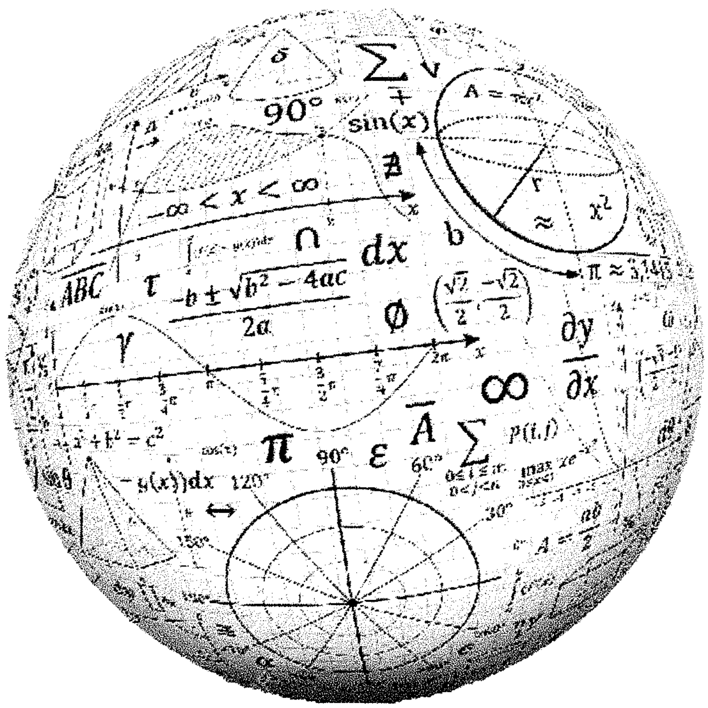
MÓDULO I
"MÉTODO DE BRACKETS"



Submódulo II : Método de Brackets

Sección I - Conceptos preliminares

A).- El Bracket ☑

B).- Propiedades básicas ☑

C).- Series de brackets ☑

.
.
.
ETC.

Método de Brackets
(Method of Brackets: MoB)

¿Qué es el método de Brackets?

MoB es una técnice de cálculo cuyo objetivo es la evaluación de integrales multidimensionales de la forma:

$$I = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Esta técnice está basade en un procedimiento de carácter heurístico y tiene su origen en la representación integral de la función Gamma. Dado su origen semirigoroso, en esta sección mostraremos MoB como un secuencia de:

- Definiciones
- Teoremas
- Reglas (conclusiones empíricas)

A manera de motiver el aprendizage de esta técnica diremos que MoB transforma una integral a una estructura matemático que denominaremos SERIE DE BRACKETS. La solución (suma) de esta serie se encuentra resolviendo un sistema de ecuaciones lineales que la misma técnico genera al aplicar sus procedimientos a una integral.

Del punto de vista de la complejidad de las herramientas matemáticos requeridas para evalvar integrales múltiples, MoB reemplaza la necesidad de càlculo avanzado por herramientas de álgebra lineal básica, el conocimiento para resolver un sisteme de ecuaciones lineales.

(I) CONCEPTOS PRELIMINARES

(A) El Bracket

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, se define el bracket con argumento $\alpha \Rightarrow \langle \alpha \rangle$, como la siguiente integral divergente:

$$(51) \qquad \langle \alpha \rangle \equiv \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\,dx$$

DEFINICIÓN I (BRACKET)

<u>Obs.</u> Es evidente que la integral tiende a $+\infty$ o $-\infty$ si $Re(\alpha) \geq 1$ o $Re(\alpha) < 1$ respectivamente, desde este punto de vista el bracket $\langle \alpha \rangle$ corresponde a una estructura matemática "singular" y "extraña".

(B) Propiedades básicas

$$(52) \qquad \langle \alpha\beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|}\langle \beta \rangle = \frac{1}{|\beta|}\langle \alpha \rangle$$

TEOREMA I (DE ESCALAMIENTO)

$$(53) \qquad \langle -\alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$$

TEOREMA II (DE SIMETRÍA)

(54) $\langle \alpha n+\beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|}\left\langle n+\frac{\beta}{\alpha}\right\rangle$ **TEOREMA III** (DE ESCAMIENTO GENERALIZADO)

TAREA I

Demuestre el teorema de simetria a partir de la representación integral del bracket.

TAREA II

Demuestre el teorema de escalamiento generalizado. Ver Ec. (54).

(c) Series de Brackets

El bracket como estructura matemática es dependiente de parametros (argumentos del bracket), los cuales eventualmente pueden ser índices de suma, por tanto también es posible construir sumas de brackets de la forma:

(55) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \, C(n) \langle n+\alpha \rangle$

Donde hemos definido el factor ϕ_n, tal que:

(56) $$\phi_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}$$ **DEFINICIÓN II** (INDICADOR)

El factor $C(n)$ es un coeficiente arbitrario dependiente del índice de suma n. La Ec. (55) es posible sumarla utilizando la siguiente regla de sumación:

(57) $$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n C(n) \langle n+\alpha \rangle = C(-\alpha)\Gamma(\alpha)$$

REGLA I (DE SUMACIÓN) (OPERACIÓN)

Más adelante mostraremos como se encuentra esta regla de suma. De la Ec. (57) y en el contexto de una suma discreta se cumple:

(58) $$n\langle n \rangle = 0$$ **TEOREMA IV**

(59) $$F(n)\langle n+\beta \rangle = F(-\beta)\langle n+\beta \rangle$$ **TEOREMA V**

La regla de sumación presentada en Ec. (57) nos permite concluir que los brackets simplifican una suma, desde el punto de vista de lo operacional, la regla de sumación se puede reducir a un algoritmo:

$$\Downarrow$$

Si tenemos la suma $\sum_n \phi_n C(n) \langle n+\alpha \rangle$,

el bracket cumple las siguientes tareas:

a) Elimina la suma $\sum_n$

b) Elimina el factor ϕ_n

c) Genera una función Gamma $\Gamma(-n)$

d) Realiza la evaluación $n=-\alpha$, que equivale a anular el argumento del bracket, esto es, a resolver la ecuación $n+\alpha=0$.

TAREA III

Demuestre las siguientes igualdades:

a) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n\, 4^n \langle n+3/2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{16}$$

b) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n\, A^{2n} \langle 3n+1/2 \rangle = \frac{2}{3} A^{-1/3} \frac{\pi}{\Gamma(5/6)}$$

c) $$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} \phi_n \phi_m\, 3^{m+n} \langle n+1 \rangle \langle n+m+1/2 \rangle = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\pi}$$

TAREA IV

Demuestre que la siguiente serie de brackets tiene dos resultados posibles si aplicamos la regla de sumación de la Ec. (57):

$$S = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} \phi_n \phi_m\, A^n B^m \langle n+m+1 \rangle$$

TAREA I | Solución

Demostrar que $\langle -a \rangle = \langle a \rangle$.

de la definición de un bracket se cumple que:

$$\langle -a \rangle = \int_0^\infty t^{-a-1}\, dt \quad ; \text{ si hacemos } u = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u}$$

lo que implica que $\quad dt = -\frac{du}{u^2}$ y $\int_0^\infty dt \Rightarrow \int_\infty^0$

$$\therefore \langle -a \rangle = \int_\infty^0 u^{a+1}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_\infty^0 u^{a-1}\, du$$

$$= \int_0^\infty u^{a-1}\, du \equiv \langle a \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\therefore \langle -a \rangle = \langle a \rangle$$

TAREA II | Solución

Se tiene que $\langle \alpha\beta \rangle = \int_0^\infty t^{\alpha\beta - 1}\, dt$ (TEOREMA II)

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$t^\alpha = y \Longrightarrow t = y^{1/\alpha} \Longrightarrow dt = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty dt \Rightarrow \int_0^\infty dy$$

$$\therefore \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1}\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty y^{\beta-1}\, dy = \frac{1}{\alpha}\langle \beta \rangle$$

Por otro lado se cumple que:

$$\langle \alpha' \beta \rangle = \frac{1}{\alpha'} \langle \beta \rangle$$ si hacemos $\alpha' = -\alpha$

entonces:

$$\langle -\alpha \beta \rangle = \frac{1}{-\alpha} \langle \beta \rangle$$, por el teorema de simetría además se cumple que:

$$\langle -\alpha \beta \rangle = \langle \alpha \beta \rangle$$

lo que nos permite concluir que si

$$\langle -\alpha \beta \rangle = \langle \alpha \beta \rangle$$ entonces el resultado debe ser independiente del signo de α, esto es:

$$\langle \alpha \beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle \beta \rangle$$

QED.

Ahora es caso $\langle \alpha n + \beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle n + \beta/\alpha \rangle$ se demuestra fácilmente, esto es

$$\langle \alpha n + \beta \rangle = \langle \alpha (n + \beta/\alpha) \rangle$$

luego utilizando el resultado antes obtenido, se cumple que:

$$\langle \alpha n + \beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle n + \beta/\alpha \rangle$$

QED.

TAREA III | Solución

a) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n 4^n \langle n+3/2 \rangle = 4^n \Gamma(-n)\Big|_{n=-3/2}$$

$$= 4^{-3/2}\,\Gamma(3/2)$$

$$= 2^{-3}\,\Gamma(1/2+1)$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2) = \frac{1}{16}\sqrt{\pi} \quad \text{QED.}$$

b) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \langle 3n+\tfrac{1}{2} \rangle = \sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \frac{1}{|3|} \langle n+\tfrac{1}{6} \rangle$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \langle n+\tfrac{1}{6} \rangle$$

$$= \frac{1}{3} A^{2n} \Gamma(-n)\Big|_{n=-1/6}$$

$$= \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}}\,\Gamma(1/6)$$

$$= \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(1/6)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(5/6)}$$

$$= \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}} \frac{\Gamma(1-5/6)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(5/6)}$$

donde $\Gamma(1-5/6)\Gamma(5/6) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\pi\cdot\frac{5}{6}\right)} = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

Finalmente

$$\sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \langle 3n+1/2 \rangle = \frac{2}{3} A^{-\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\Gamma(5/6)} \quad \text{QED.}$$

c) $$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} \phi_n \phi_m 3^{m+n} \langle n+1 \rangle \langle n+m+1/2 \rangle = I$$

Hay varias formos de evaluer esta sumo doble, escogeremos tomar el bracket $\langle n+1 \rangle$ pera eliminar le sume en n:

$$I = \sum_{m\geq 0} \phi_m 3^m \left[\sum_{n\geq 0} \phi_n 3^n \langle n+m+1/2 \rangle \langle n+1 \rangle \right]$$

$$= \sum_{m\geq 0} \phi_m 3^m \left[3^n \langle n+m+1/2 \rangle \Gamma(-n) \right]_{n=-1}$$

$$= \sum_{m\geq 0} \phi_m 3^m 3^{-1} \langle -1+m+1/2 \rangle \cancel{\Gamma(1)}^{\,1}$$

$$= \frac{1}{3} \sum \phi_m 3^m \langle m-1/2 \rangle$$ Finalmente

$$= \frac{1}{3} \; 3^m \Gamma(-m) \Big|_{m=1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(-1/2)\Gamma(-1/2)}{(-1/2)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Gamma(1-1/2)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi}$$ QED.

Ud. puede probar otras combinaciones suma-bracket, La solución de esta suma es independiente de esta elección.

TAREA IV | Solución

La suma $S = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} A^n B^m \langle n+m+1\rangle$

CASO 1:

Dejaremos el índice n libre (dejaremos la sume $\sum_{n\geq 0}$ y eliminaremos o sumemos $\sum_{m\geq 0}$)

$\therefore$

$$S_n = \sum_{n\geq 0}\phi_n A^n\left[\sum_{m\geq 0}\phi_m B^m \langle n+m+1\rangle\right]$$

$$= \sum_{n\geq 0}\phi_n A^n B^m \Gamma(-m)\Big|_{m=-n-1}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\phi_n A^n B^{-n-1}\Gamma(n+1)$$

$$(*)\quad S_n = \frac{1}{B}\sum_{n\geq 0}\Gamma(n+1)\frac{\left(-\frac{A}{B}\right)^n}{n!} = \frac{1}{B}\,{}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\-\end{matrix}\middle|-\frac{A}{B}\right)$$

$\Gamma(n+1)=\Gamma(1)\,(1)_n$

CASO 2:

Indice m libre (nos quedamos con la sume $\sum_{m\geq 0}$),

entonces:

$$S_m = \sum_{m\geq 0}\phi_m B^m\left[\sum_{n\geq 0}\phi_n A^n \langle n+m+1\rangle\right]$$

$$\Downarrow$$

$$S_m = \sum_{m \geq 0} \phi_m B^m A^n \Gamma(-n) \Big|_{n=-m-1}$$

$$= \sum_{m\geq 0} \phi_m B^m A^{-m-1} \Gamma(m+1)$$

$$= \frac{1}{A} \sum_{m \geq 0} \phi_m \Gamma(m+1) \left(\frac{B}{A}\right)^m$$

$$= \frac{1}{A} \sum_{m \geq 0} \phi_m (1)_m \left(\frac{B}{A}\right)^m$$

$$(**) \quad S_m = \frac{1}{A} \sum_{m\geq 0} (1)_m \frac{\left(-\frac{B}{A}\right)^m}{m!} = \frac{1}{A}\, {}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix} \middle| -\frac{B}{A}\right)$$

Finalmente, se observa que se obtienen dos términos S_n y S_m, en principio distintos, sin embargo, recordando que

$${}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix} \middle| x\right) = \frac{1}{(1-x)^\alpha},$$ se observa que:

$$\Downarrow$$

$$S_n = \frac{1}{B}\, {}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix} \middle| -\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{B} \frac{1}{\left(1+\frac{A}{B}\right)} = \frac{1}{A+B}$$

y

$$S_m = \frac{1}{A}\, {}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix} \middle| -\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A} \frac{1}{\left(1+\frac{B}{A}\right)} = \frac{1}{A+B}$$

En conclusión, el resultado final es independiente de como sumemos usando los brackets.