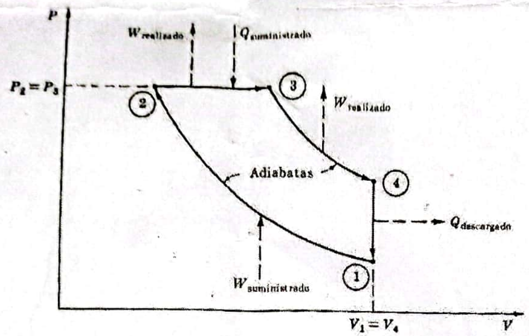
# Mecánica Estadística (Prueba 1)

Primer Semestre de 2023

★ **Parte I.** Resuelva los siguientes problemas.

**I.1.-** Encuentre la eficiencia de la máquina térmica que funciona de acuerdo con el ciclo mostrado en la figura (Ciclo Diesel). Para sus cálculos considere un gas ideal.




**I.2.-** A bajas frecuencias, la velocidad del sonido $v_s$ en un fluido, se relaciona con la compresibilidad adiabática $\kappa_s$ mediante

$$v_s = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa_s}},$$

$K_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s$

donde $\rho$ es la densidad del fluido.

Calcule la velocidad del sonido en (a) un gas ideal y (b) en un fluido incompresible.

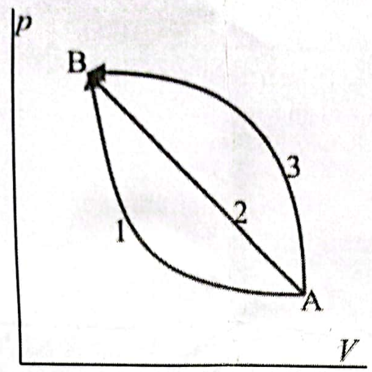
**I.3.-** Para un gas de Van de Waals calcule (a) la energía interna y (b) la entropía, como función de la temperatura y el volumen a número de partículas constante.

$\left(P - \frac{n}{Va^2}\right)(V - nb) =$

★ **Parte II.** En 10 líneas o menos responda cada una de las siguientes preguntas.

$\left(P - \frac{n^2 a^2}{V^2}\right)(V - n$

**II.1.-** Considere una expansión adiabática de un gas ideal, en la que $T_1$ es su temperatura inicial y $T_2$ la final. Discuta si estas temperaturas son iguales o no y en caso de ser diferentes, indique cuál es mayor.




**II.2.-** Para los procesos cuasiestáticos de la figura, correspondientes a un gas ideal ¿en cuál de ellos es mayor la variación de la energía interna? Explique.

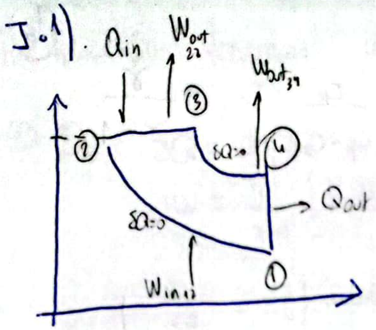
**II.3.-** En relación a la figura de la pregunta anterior ¿en cuál es mayor el calor absorbido por el gas?

**Duración y Puntajes.**
Duración: 90 minutos

- **Parte I:** 1.- 1.5 2.- (a) 0.5 ; (b) 0.5 ; 3.- (a) 0.7 ; (b) 0.7
- **Parte II:** 0.7 cada pregunta.

I.1) Fabian Trigo (1a)

6 4

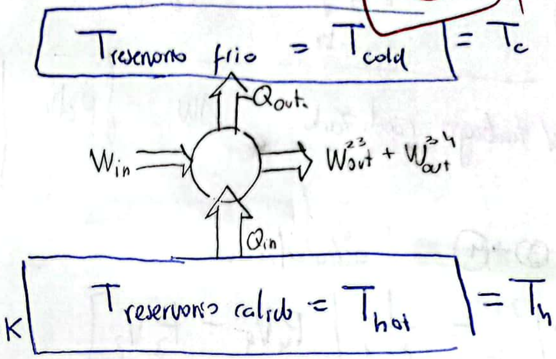



datos: $P_1 = \_\_$ $\quad P_4 = \_\_$

$P_2 = P_3$

$V_1 = V_4$ ; $V_2 = \_\_$ , $V_3 = \_\_$

Prime assumption: la represento como:




ciclo ①→②

ya que es adiabatico $PV^{\gamma} = cte = K$

$$\therefore \quad dU = \cancel{\delta Q} + dW = dW = -PdV = -KV^{-\gamma}dV \rightarrow \Delta W = -K\int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma}dV$$

$$\Delta W = -K\left[\frac{V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] \quad \Big|\, K = PV^{\gamma} \Big| = -\left[P_2 V_2^{\gamma} V_2^{1-\gamma} - P_1 V_1^{\gamma} V_1^{1-\gamma}\right]\frac{1}{1-\gamma}$$

$$\Delta W = -\frac{1}{1-\gamma}\left[P_2V_2 - P_1V_1\right] = \boxed{W_{in}^{12} = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_2V_2 - P_1V_1\right]}$$

Ciclo ②→③

Presión constante

$$\delta Q_{rev} = C_p dT + (C_v - C_p)\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dP = C_p dT \qquad \left\{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{\partial PV}{\partial V\, nR}\right)_p = \frac{P}{nR}$$

or

$$\delta Q_{rev.} = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV + \cancel{C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP} = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV$$

$$\therefore \quad \Delta Q = Q_{in}^{23} = \int C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = \int C_p \frac{P}{nR}\, dV = P\int \frac{C_p}{nR}\, dV$$

(1b)

$$\Delta Q = Q_{in}^{23} = P_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{C_p}{nR}\, dV$$

$$C_p - C_v = nR.$$

$$\frac{C_p}{nR} = \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{C_p \,/\frac{1}{C_v}}{C_p - C_v \,/\frac{1}{C_v}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{Q_{in}^{23} = P_2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{V_2}^{V_3} dV = P_2\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)(V_3 - V_2).}$$

y el trabajo realizado. $\Delta W = -\int_{V_2}^{V_3} P\,dV = \boxed{-P_2\,(V_3 - V_2) = W_{out}^{23}}$

ciclo (3)→(4) adiabatico.

$$W_{out}^{34} = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_4 V_4 - P_3 V_3\right].$$

ciclo (4)→(1). (volumen constante)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{PV}{nR}\right)_V = \frac{V}{nR}$$

$$\delta Q_{rev} = \cancel{C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV} + C_v\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP. \Rightarrow C_v \frac{V}{nR}\int_4^1 dP = Q_{out}^{14}$$

$$= \frac{C_v}{C_p - C_v} V (P_1 - P_4) = \frac{\frac{C_v}{C_v}}{\frac{C_p}{C_v} - \frac{C_v}{C_v}} V_4 (P_1 - P_4) = \frac{1}{\gamma - 1} V_4 (P_1 - P_4)$$

$$\boxed{Q_{out}^{14} = \frac{1}{\gamma-1} V_4 (P_1 - P_4)}$$

Escaneado con CamScanner

hasta ahora tenemos información de cada ciclo. Fabian Trejo (2

① → ②. $\Delta Q = 0$ (S)

$$\Delta W = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_2V_2 - P_1V_1\right] \rightarrow \Delta U = \Delta W = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_2V_2 - P_1V_1\right]$$

$\Delta S = 0 \cdot \left[\frac{J}{K}\right]$ (adiabatica).

② → ③.

$$\Delta Q = Q_{in}^{23} = P_2\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)(V_3 - V_2) \rightarrow \Delta U = P_2(V_3 - V_2)\frac{1}{\gamma-1}$$

$$\Delta W = W_{out}^{23} = -P_2(V_3 - V_2)$$

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q_{in}^{23}}{T_{hot}} = \ldots$$ (sin embargo no se especifica isoterma).

③ → ④

$$\Delta W = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_4V_4 - P_3V_3\right]$$

$$\Delta Q = 0 \rightarrow \Delta U = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_4V_4 - P_3V_3\right]$$

$\Delta S = 0$.

④ → ① $\Delta Q = \frac{1}{\gamma-1}(V_4)(P_1 - P_4) \rightarrow \Delta U = \frac{1}{\gamma-1}V_4(P_1 - P_4)$

$\Delta W = 0$

el cambio de energia total

$P_3 = P_1$

$$\Delta U_{Total} = \frac{1}{\gamma-1}\left\{\cancel{P_2V_2} - \cancel{P_1V_1} + \cancel{P_2V_3} - \cancel{P_2V_2} + \cancel{P_1V_4} - P_3V_3 + \cancel{P_1V_4} - \cancel{P_4V_4}\right\}$$

$\Delta U_{Total} = 0$ ✓

¿Qué tipo de proceso es (2)(3) ; calculos extras:

$$\Delta U = \int C_v dT = Q_{in}^{23} + W_{out}^{23} = P_2(V_3 - V_2)\left[\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right] = P_2(V_3-V_2)\left[\frac{\gamma-\gamma+1}{\gamma-1}\right]$$

$$\boxed{\Delta U_{23} = P_2(V_3-V_2)\left[\frac{1}{\gamma-1}\right].}$$

$$\Delta U_{34} = \underbrace{\cancel{Q_{out}^{34}}}_{0} + W_{out}^{34} = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_4V_4 - P_3V_3\right],$$

estos se usan para la tabla en (2a)

$$\Delta U_{41} = Q_{out}^{41} + \cancel{\Delta W} = \frac{1}{\gamma-1}(V_4)(P_1-P_4).$$

en la hoja anterior se comprueba (2a) la condición de ciclo, $\Delta U_{ciclo} = 0$. ✓

luego el rendimiento $\eta = \dfrac{W_{out\ total}}{Q_{in}} =$

$$W_{out\ total} = \sum W_i = \frac{1}{\gamma-1}\left[P_2V_2 - P_1V_1\right] + (-P_2)(V_3-V_2) + \frac{1}{\gamma-1}\left[P_4V_4 - V_3P_3\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\left[P_2V_2 - P_1V_1 - (\gamma-1)(P_2V_3 - P_2V_2) + P_4V_4 - P_3V_3\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\left[\cancel{P_2V_2} - P_1V_1 - \gamma P_2V_3 + \gamma P_2V_2 + \cancel{P_2V_3} - \cancel{P_2V_2} + P_4V_4 - \cancel{P_3V_3}\right]$$

$P_2 = P_3$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\left[P_4V_4 - P_1V_1 + \gamma P_2V_2 - \gamma P_3V_3\right]$$

$$\boxed{W_{out}^{total} = \frac{1}{\gamma-1}\left[V_1(P_4-P_1) + \gamma P_2(V_2-V_3)\right]}$$

teniendo el trabajo total:

Fabian Trig

3a

$$\eta = \frac{W_{total}}{Q_{in}} = \frac{\cancel{\frac{1}{\gamma-1}}\left[V_1(P_4-P_1)+\gamma P_2(V_2-V_3)\right]}{P_2(V_3-V_2)\cdot\cancel{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\eta = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{V_1(P_4-P_1)+\gamma P_2(V_2-V_3)}{P_2(V_3-V_2)}\right]$$

$$\eta = \frac{V_1(P_4-P_1)}{\gamma P_2(V_3-V_2)} + \frac{P_2(V_2-V_3)}{-P_2(V_2-V_3)} = \frac{V_4(P_4-P_1)}{\gamma P_2(V_3-V_2)} - 1$$

$$\boxed{\eta = \frac{V_4(P_4-P_1)}{\gamma P_2(V_3-V_2)} - 1}$$

- de aquí sería necesario establecer que tipo de gas es para decidir el valor de $\gamma$

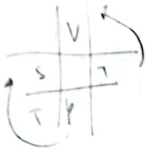
1,5

I.2 a bajas pre $V_s = \sqrt{\frac{1}{\rho K_s}}$

análogo a $K_T = \left[-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right] \to K_s = \left|-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right|$

$$V_s = \sqrt{\frac{-V}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s} \quad \therefore \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

relación de Maxwell




$$-\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

luego

$$T\,dS = C_V\,dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

$$0 = C_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \frac{-T}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$$

luego

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + \left(-\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right)\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s$$

$$\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1\right.$$

$$\therefore V_s = \sqrt{\frac{-V}{\rho}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T - \frac{T}{C_V}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right]^2\right\}} = \sqrt{\frac{V}{\rho}}\sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + \frac{T}{C_V}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right]^2}$$

Caso gas ideal:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial V}\frac{nRT}{V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2} \;;\; \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{nRT}{V}\right)_V = \frac{nR}{V}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\cancel{V}}{\rho}}\sqrt{\frac{nRT}{V^2} + \frac{T}{C_V}\frac{n^2R^2}{V^2}} = \sqrt{\frac{1}{\rho}}\sqrt{\frac{nRT}{V} + \frac{nRT}{V}\cdot\frac{nR}{C_V}}$$

continuando (3b),

$$V_s = \sqrt{\frac{1}{\rho}}\sqrt{\frac{nRT}{V} + \frac{nRT}{V}\,\frac{nR}{C_v}}$$

$\frac{nRT}{V} = P$

$\frac{nR}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \gamma - 1$

$$V_s = \sqrt{\frac{1}{\rho}}\sqrt{P + P(\gamma-1)} = \sqrt{\frac{1}{\rho}}\sqrt{P\gamma} = \boxed{\sqrt{\frac{P\gamma}{\rho}} = V_s}$$

velocidad del sonido gas ideal

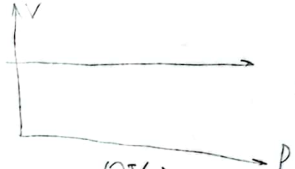
proporcional a la raíz cuadrada de la presión

0,5

para un fluido incompresible.

$$V_s = \sqrt{\frac{1}{\rho}}\sqrt{\frac{T}{C_v}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\right]^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{1}{\rho}}\sqrt{\frac{T}{C_v}\left[-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right]^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}$$




x aproxima a 0 por lo negativo

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,\ldots} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x}$$

o al reducir el volumen: la presión explota

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \lim_{x\to\infty} -x$$

aproximando a un fluido incompresible.

$$V_s = \sqrt{\frac{1}{\rho}}\sqrt{\frac{T}{C_v}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\lim_{x\to\infty} x\right)\right]^2 + \lim_{x\to\infty} x}$$

$$V_s \simeq \sqrt{\frac{T}{\rho C_v}}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\lim_{x\to\infty} x\right)$$

para un fluido perfecto e incompresible $V_s$ tiende al infinito

0,5

J.3) gas de Van der Waals ; usamos la siguiente notación de constantes

$$\boxed{\left(P - \frac{n^2a^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT}$$

a) energía interna : usando: $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P.$

$$P = \frac{nRT}{(V-nb)} + \frac{n^2a^2}{V^2}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V-nb}$$

$$\therefore \; T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \frac{nRT}{V-nb} - \left(\frac{nRT}{V-nb} + \frac{n^2a^2}{V^2}\right) = \frac{-n^2a^2}{V^2}$$

$$\rightarrow \therefore \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{-n^2a^2}{V^2}$$

{ al Incrementar el volumen }
{ la energía interna deciende }.

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV_T = -n^2a^2 \int \frac{dV_T}{V^2} = -n^2a^2\left(\frac{V^{1-2}}{1-2}\right) + C[T]$$

$$U[T,V] = \frac{n^2a^2}{V} + C[T] + U_0$$

recordemos solo se puede calcular cambios.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial C[T]}{\partial T}\right)_V = C_V \quad \rightarrow \quad \boxed{U[T,V] = \frac{n^2a^2}{V} + C_V} + U_0$$

$(T-T_0)$

0,65

...J3..

Fabian Triq. (4c)

b). obtener la entropia

$$TdS = C_v dT + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV \qquad (1)$$

$$TdS = C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP$$

$$\frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{nR}{C_V} = \gamma - 1$$

usando (1).

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV \quad \Big| \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V-nb}.$$

$$\int dS = \int \frac{C_v}{T} dT + \int \frac{nR}{V-nb} dV$$

// asumiendo $C_v$ en el rango de integración

$$\Delta S = C_v \ln T + nR \ln(V-nb) = C_v\left(\ln T + (\gamma-1)\ln(V-nb)\right)$$

solo se pueden calcular cambios de entropia

0,65

II2). la variación de la energía interna.
al ser una función de estado, solo importa
el inicio y el final.

osea $U(punto = A) = U(punto = B)$.

Si bien algunos caminos implican más trabajo,
tambien implicarian mayor movimiento de calor
por tanto ni 1, 2, 3 poseen variación de la energía interna,
ya que son procesos cuasiestaticos.

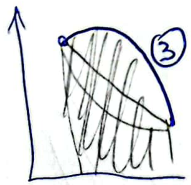
0,7

II3). como se dijo en II2 a mayor trabajo realizado.
mayor calor absorbido
se asume realizado pues $V_A > V_B \Rightarrow \boxed{\Delta V < 0}$

por tanto la linea que posee mayor area bajo ella en
el grafico PV, sera la que realizó más trabajo,
por tanto la que absorbió más calor para
mantener la energía interna.

sería el camino 3

0,2




I.1 - 1,5
I.2 - 1,0
I.3 - 1,3
II.1 - 0,7
II.2 - 0,7
II.3 - 0,2

$5,4 / 6,0 \Rightarrow \boxed{6,4}$

4
5b
fin

II

Fabian Trigo (5a)

$\frac{nR}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = (\gamma - 1)$

II.1 expansión adiabática gas ideal, $T_1 \to T_2$.

$$dU = \delta Q + dW \to c_v dT = -\frac{nRT}{V} dV \to \frac{dT}{T} = -\frac{nR}{c_v}\frac{dV}{V} = -(\gamma-1)\frac{dV}{V}$$

$$dU = C_v\, dT$$

$$\to \ln(T) + (\gamma-1)\ln V = \text{cte}$$

$$\to T V^{\gamma-1} = \text{cte}:$$

$PV = nRT$

$V = \frac{nRT}{P}$

en la expansión $\int dW = -\int p\, dV = \left(\frac{1}{\gamma-1}\right)(P_2V_2 - P_1V_1)$

$$\Delta W = \frac{1}{\gamma-1}(nRT_2 - nRT_1) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) < 0 \Rightarrow \Delta U < 0$$

$$\to \boxed{T_2 < T_1}$$

Respuesta:

en una expansión, se consume energía interna para incrementar el volumen contra la presión del ambiente.

el Trabajo (para ser exactos el cambio de Trabajo $\Delta W$) es proporcional a las diferencia de Temperaturas, al ser negativo pues es trabajo usado, $\boxed{T_2 - T_1 < 0}$

por tanto $T_2 < T_1 \to \boxed{T_{final} < T_{inicial}}$

podrían ser iguales en el caso de expandirse en el vacío (expansión de Joule).

0.7