Yarina López Bonilla

47

I.

1.

$\langle E \rangle = U$ → canónico $U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$

→ microcanónico $U = T \frac{\partial S}{\partial T}$, $S = k \ln \Omega$

a. $N = n_1 + n_2$

n_1 relativo a E_1

n_2 relativo a E_2

existen 2 posibles posiciones de las moléculas

$$\Omega = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$

$$S = k \ln \frac{N!}{n_1!\, n_2!} = k \left[\ln N! - \ln n_1! - \ln (N-n_1)! \right]$$

$$S = k \left[N \ln N - \cancel{N} - n_1 \ln n_1 + \cancel{n_1} - (N-n_1) \ln (N-n_1) + (\cancel{N - n_1}) \right]$$

$$S = k \left[N \ln \frac{N}{(N-n_1)} - n_1 \ln \frac{n_1}{(N-n_1)} \right]$$

Se pide $\frac{\partial S}{\partial T}$, asumo gas ideal $PV = NkT$

$$S = k \left[\frac{PV}{kT} \ln \frac{PV}{kT\left(\frac{PV}{kT} - n_1\right)} - n_1 \ln \frac{n_1}{\left(\frac{PV}{kT} - n_1\right)} \right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = k \left\{ \frac{0 - kPV}{(kT)^2} \cdot \ln \frac{PV}{kT\left(\frac{PV}{kT} - n_1\right)} + \frac{PV}{kT} \cdot \frac{\frac{0 - \left[k\left(\frac{PV}{kT} - n_1\right) + kT \cdot \left\{\frac{0-kPV}{(kT)^2}\right\}\right]}{\left[kT\left(PV/kT - n_1\right)\right]^2}}{\frac{PV}{kT\left(\frac{PV}{kT} - n_1\right)}} - n_1 \frac{\frac{0 - n_1\left[\frac{0-kPV}{(kT)^2}\right]}{\left(\frac{PV}{kT} - n_1\right)^2}}{\frac{n_1}{\left(\frac{PV}{kT} - n_1\right)}} \right\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = k\left\{ \frac{PV}{kT^2} \cdot \ln \frac{PV}{kT\left(\frac{PV}{kT}-n_1\right)} + \frac{-\left[k\left(\frac{PV}{kT}-n_1\right) + kT\left\{\frac{-kPV}{(kT)^2}\right\}\right] \cdot \left(\frac{PV}{kT}-n_1\right)}{\left[kT\left(\frac{PV}{kT}-n_1\right)\right]^2} \right\}$$

$$= k\left\{ \frac{PV}{kT^2} \cdot \ln \frac{N}{(N-n_1)} - \frac{1}{kT^2(N-n_1)} - \frac{\left(\frac{-\cancel{k}^2 TPV}{(\cancel{k}T)^2}\right)(N-n_1)}{kT\,(N-n_1)^2} \right]$$

$$= k\left\{ \frac{N}{T} \ln \frac{N}{(N-n_1)} - \frac{1}{kT^2(N-n_1)} + \frac{N}{(N-n_1)} \right\}$$

$$\boxed{U = \frac{k}{T}\left\{ \frac{N}{T} \ln \frac{N}{(N-n_1)} - \frac{1}{kT^2(N-n_1)} + \frac{N}{(N-n_1)} \right\} = \langle E \rangle}$$

¿Y la tensión de la cuerda?

0.5

¿Y $\langle L \rangle$?

b. $\langle E \rangle = U \rightarrow U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i E_i e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} = \frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}} \quad / \cdot e^{\beta E_1}$$

$$\boxed{= \frac{E_1 + E_2 e^{-\beta \Delta E}}{1 + e^{-\beta \Delta E}}} \qquad \Delta E = E_2 - E_1$$

$$\langle L \rangle = \frac{\sum_i l_i e^{-\beta l_i}}{\sum_i e^{-\beta l_i}} = \frac{l_1 e^{-\beta l_1} + l_2 e^{-\beta l_2}}{e^{-\beta l_1} + e^{-\beta l_2}} \boxed{= \frac{l_1 + l_2 e^{-\beta \Delta l}}{1 + e^{-\beta \Delta l}}}$$

con: $\Delta l = l_2 - l_1$

0,4

2. $Z(T,V,N) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}}\left[1+\frac{N^2a(T)}{2V}\right]$ $\qquad \lambda = \left(\frac{h^3}{2\pi m k T}\right)^{1/2}$

$$F = -kT\ln\left[\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}}\left[1+\frac{N^2a(T)}{2V}\right]\right]$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V}$$

$$F = -kT\left\{-\ln(N!\lambda^{3N}) + \ln V^N + \ln\left(1+\frac{N^2a(T)}{2V}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial V} = kT\left\{N\cdot\frac{1}{V} + \frac{\frac{0-2N^2a(T)}{(2V)^2}}{1+\frac{N^2a(T)}{2V}}\right\}$$

$$= kT\left\{\frac{N}{V} - \frac{\frac{2N^2a(T)}{4V^2}}{\frac{2V+N^2a(T)}{2V}}\right\} = kT\left\{\frac{N}{V} - \frac{2N^2a(T)\cdot 2V}{4V^2(2V+N^2a(T))}\right\}$$

$$\boxed{P = kT\left\{\frac{N}{V} - \frac{N^2a(T)}{V(2V+N^2a(T))}\right\}}$$

0,5

$$G = F + PV$$

$$G = -kT\ln\left[\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}}\left(1+\frac{N^2a(T)}{2V}\right)\right] + VkT\left\{\frac{N}{V} - \frac{N^2a(T)}{V(2V+N^2a(T))}\right\}$$

$$\boxed{G = kT\left[-\ln\left[\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}}\left(1+\frac{N^2a(T)}{2V}\right)\right] + \left\{N - \frac{N^2a(T)}{2V+N^2a(T)}\right\}\right]}$$

0,5

II

1. ① conteo de microestados posibles en el sistema que cumplan con los vínculos de energía (Ω) ② se usa $S = k \ln \Omega$ para hacer termodinámica. Está enfocado para estudiar sistemas aislados (E, V fijos). Resulta simple estudiar un sistema de dos energías, donde Ω sea la combinatoria de n. Para sistemas de energía continua se debe integrar en todo el espacio de fase$^{(p,q)}$ entre los límites de E, por lo que el conteo de microestados se reemplaza por integrar volúmenes. Ejemplo físico: Un dipolo en un campo magnético. $\Omega = \int_{E_0 \le H(p,q) \le E_1} \frac{\omega}{\omega_0} d^{3N}p \, d^{3N}q$

Funciona bien solo en sistemas a E y V (y N) fijos

0,9

2. ① Conocer la función de energía o las energías singulares para aplicar la distr. de Boltzman clásica $f \propto e^{-\beta E}$ ② se integra en el espacio de fase (p, q) para conocer Z (función de partición) $Z = \int e^{-\beta H(p,q)} d^{3N}p \, d^{3N}q$ ③ Se usa $F = -kT \ln Z$ para hacer termodinámica. Está enfocado para estudiar sistemas abiertos, en contacto generalmente con un reservorio, donde se fijan T y V. Ejemplo físico: Pendulo simple bajo un campo gravitatorio! Funciona bien solo en sistemas en T y V (y N) fijos

0,9