# Mecánica Intermedia (LFIS 312)

*Licenciatura en Física*

*Profesor: J. R. Villanueva* I Semestre 2020

*Nombre:* *Fabián Alexsander Trigo Faúndez* *RUT:* *20.183.107-5*

---

Prueba 2: P1:______ P2:______ P3:______ NF:________

---

1. En óptica geométrica, la trayectoria de un rayo de luz viene dada por el principio de Fermat, el cual establece que un rayo viaja entre dos puntos fijos de tal manera que el tiempo de tránsito es estacionario con respecto a pequeñas variaciones en la trayectoria. Considere la propagación de un rayo de luz en la atmósfera, asumiendo que el índice de refracción $n$ es sólo función de la distancia desde el centro de la tierra. Exprese el principio de Fermat en forma integral. Derive la siguiente ecuación para un rayo en la atmósfera:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = r\,(k\,n^2\,r^2 - 1)^{1/2},$$

donde $k$ es una constante y $(r, \phi)$ son las coordenadas polares de un punto sobre el rayo con el centro de la tierra como origen. Si $n$ es proporcional a $r^m$, encuentre el valor de $m$ tal que el rayo inicialmente en una dirección tangencial (paralelo a $\widehat{\phi}$) permenezca a una distancia constante al centro de la tierra para cualquier valor de $r$.

2. Una masa puntual $m$ desliza sin fricción en el interior de la superficie de revolución $z = \alpha \sin(r/R)$ cuyo eje de simetría está a lo largo de la dirección de un campo gravitacional $\vec{g}$. Considere $0 < r/R < \pi/2$.

   (a) Construya el Lagrangiano $L(r, \phi; \dot{r}, \dot{\phi})$, y calcule las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas $r$ y $\phi$.

   (b) ¿Existen las órbitas circulares estacionarias horizontales?

   (c) ¿Cuáles de estas órbitas son estables bajo pequeño impulsos a lo largo de la superficie transversal a la dirección?

   (d) Si la órbita es estable, ¿cuál es la frecuencia de oscilación en torno a la órbita de equilibrio?

3. Un péndulo doble con longitudes iguales $\ell$ y masas diferentes $m_1$ y $m_2$ realiza pequeñas oscilaciones en un plano. Introduzca los desplazamientos transversales de la primera partícula desde la vertical $\eta_1$, y de la segunda partícula desde la primera partícula $\eta_2$.

   (a) Muestre que el Lagrangiano viene dado por

$$L = \frac{1}{2} m_1\,\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\,(\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2)^2 - \frac{g}{2\ell}\left[(m_1 + m_2)\,\eta_1^2 + m_2\,\eta_2^2\right] \tag{1}$$

(b) Derive las frecuencias de modos normales

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g/\ell}{(1 \pm \gamma)}, \qquad \text{donde} \quad \gamma \equiv \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}. \tag{2}$$

(c) Construya los autovectores de modos normales y describa los movimientos. Muestre que estos reproducen el comportamiento esperado para grandes y pequeños valores de $m_1/m_2$.

(d) Verifique que la matriz modal tiene la forma

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{bmatrix} (1-\gamma)^{1/2} & -(1-\gamma)^{1/2} \\ \gamma^{-1}(1-\gamma)^{1/2} & \gamma^{-1}(1-\gamma)^{1/2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

y demuestre explícitamente que $\mathcal{A}$ diagonaliza las matrices $\overline{m}$ y $\overline{v}$.

(e) Construya las coordenadas normales.

(f) Asuma que $m_2 \ll m_1$. Si la masa superior es desplazada ligeramente desde la vertical y luego se suelta, muestre que el movimiento subsecuente es tal que a intervalos regulares un péndulo es estacionario y el otro oscila con la máxima amplitud.