Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba 0
Mecánica Cuántica I
Licenciatura en Física - 2022

Problema I : Algo de operadores

Considere un espacio bidimensional donde un operador hermitiano tal que $\hat{\mathbf{A}}\left|1\right\rangle = \left|1\right\rangle$ y $\hat{\mathbf{A}}\left|2\right\rangle = -\left|2\right\rangle$. Si $\hat{\mathbf{B}} = \left|1\right\rangle\left\langle 2\right|$:

1. (10%) Evalúe $\hat{\mathbf{B}}^2$.
2. (10%) Muestre que $\left(\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^\dagger\right)^2 = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^\dagger$.
3. (20%) Evalúe el conmutador $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right]$
4. (20%) Sea $f(\xi) = \sum a_n \xi^n$, con $a_n \in \mathbb{R}$, halle $f\left(\hat{\mathbf{B}}^\dagger\hat{\mathbf{B}}\right)$.
5. (20%) Muestre que $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^\dagger - \hat{\mathbf{B}}^\dagger\hat{\mathbf{B}}$ es unitario.
6. (20%) Considere $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^\dagger + \hat{\mathbf{B}}^\dagger\hat{\mathbf{B}}$. Evalúe $\hat{\mathbf{C}}\left|1\right\rangle$ y $\hat{\mathbf{C}}\left|2\right\rangle$.

Problema II : La función de Morales $M_n(x)$

La función de Morales $y(x) = M_n(x)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + n\right] M_n(x) = 0. \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

1. (10%) Halle el intervalo para el cual $M_n(x)$ está definida. ¿Explique porque no son ortogonales las funciones $M_n(x)$?.
2. (20%) Halle la forma autoadjunta de la ecuación de Morales.
3. (20%) Determine la condición de ortogonalidad que satisfacen las soluciones de la forma autoadjunta.
4. (25%) Determine la regla de completitud respectiva, matricialmente y su proyección en coordendas.
5. (25%) Halle las componentes de la expansión de $f(x)$ en términos de la función de Morales $M_n(x)$.

Problema III : Algo de autovalores

Si $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ son dos operadores hermitianos,halle sus respectivos autovalores si se cumple que:

1. (40%) $\hat{\mathbf{A}}^2 = 2\hat{\mathbf{I}}$.
2. (60%) $\hat{\mathbf{B}}^4 = \hat{\mathbf{I}}$.

Donde $\hat{\mathbf{I}}$ es el operador identidad.

Probl. I) $\hat{A}|1\rangle = |1\rangle$ y $\hat{A}|2\rangle = -|2\rangle \Rightarrow \langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

$$\Downarrow$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = |1\rangle\langle 2|$$

1) $\hat{B}^2 = |1\rangle\langle 2|1\rangle\langle 2| = 0$ //
10

2) $\hat{B}^\dagger = |2\rangle\langle 1| \Rightarrow (\hat{B}\hat{B}^\dagger)^2 = (|1\rangle\overbrace{\cancel{\langle 2|2\rangle}}^{1}\langle 1|)^2 = (|1\rangle\langle 1|)^2$
10

$$= |1\rangle\overbrace{\cancel{\langle 1|1\rangle}}^{1}\langle 1| = |1\rangle\langle 1| \;//$$

3) $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{A}|1\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 2|\hat{A}$
20

$$= |1\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| = 2\hat{B} \;//$$

4) $f(\xi) = \sum_n a_n \xi^n \Rightarrow f(\hat{B}^\dagger\hat{B}) = \sum_n a_n (\hat{B}^\dagger\hat{B})^n$
20

donde $\hat{B}^\dagger\hat{B} = |2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| = |2\rangle\langle 2|$

$$\therefore f(\hat{B}^\dagger\hat{B}) = a_0 + a_1|2\rangle\langle 2| + a_2|2\rangle\overbrace{\cancel{\langle 2|2\rangle}}^{1}\langle 2|$$

$$+ a_3|2\rangle\overbrace{\cancel{\langle 2|2\rangle}}^{1}\overbrace{\cancel{\langle 2|2\rangle}}^{1}\langle 2| + \dots$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)|2\rangle\langle 2|$$

$$\therefore \quad f(\hat{B}^\dagger\hat{B}) = f(1)\,\hat{B}^\dagger\hat{B}$$

5) $$(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B})(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B})^\dagger = (\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B})(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B})$$

20

$$= \hat{B}\hat{B}^\dagger\hat{B}\hat{B}^\dagger - \cancel{\hat{B}\underbrace{\hat{B}^\dagger\hat{B}^\dagger}_{(\hat{B}^\dagger)^2=0}\hat{B}}^{\,0} - \cancel{\hat{B}^\dagger\underbrace{\hat{B}\hat{B}}_{\hat{B}^2=0}\hat{B}^\dagger}^{\,0} + \hat{B}^\dagger\hat{B}\hat{B}^\dagger\hat{B}$$

Obs. $\hat{B}\hat{B}^\dagger = |1\rangle\langle 1|$ / $\hat{B}^\dagger\hat{B} = |2\rangle\langle 2|$

Obs. $\hat{B}^\dagger\hat{B}^\dagger = |2\rangle\cancel{\langle 1|2\rangle}^{\,0}\langle 1| = 0$

$$\Downarrow$$

$$(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B})(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B}) = \hat{B}\overbrace{\hat{B}^\dagger\hat{B}}^{|2\rangle\langle 2|}\hat{B}^\dagger + \hat{B}^\dagger\overbrace{\hat{B}\hat{B}^\dagger}^{|1\rangle\langle 1|}\hat{B}$$

$$= |1\rangle\cancel{\langle 2|2\rangle}\cancel{\langle 2|2\rangle}\langle 1| + |2\rangle\cancel{\langle 1|1\rangle}\cancel{\langle 1|1\rangle}\langle 2|$$

$$= |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \sum_{i=1}^{2} |i\rangle\langle i| = \hat{\mathbb{1}}$$

$\therefore$ $(\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B})$ es unitaria.

6) $$\hat{C} = \hat{B}\hat{B}^\dagger + \hat{B}^\dagger\hat{B}$$

20

$$\Downarrow$$

$$\hat{C}|i\rangle = \left(|1\rangle\langle 2|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2|\right)|i\rangle$$

$\hat{C}|1\rangle = |1\rangle$ y $\hat{C}|2\rangle = |2\rangle$

$$\Downarrow \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{1}}$$

Probl. II) $\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(1-x)\frac{d}{dx}+n\right]M_n(x)=0$

$\downarrow$

$$x(1-x)\frac{d^2M_n(x)}{dx^2}+(1-x)\frac{dM_n(x)}{dx}=\underbrace{-n}M_n(x)$$

$(n \in \mathbb{Z})$

auto valor $\rightarrow (-n)$

1) intervalo de validez $\Rightarrow$ singularidades en $x=0$ y $x=1$.

10

$\therefore$ $M_n(x)$ es válido $\forall\, x \in [0,1]$ y no son ortogonales porque el operador diferencial no es hermitiano !!!

2) $\alpha_0 = x(1-x)$

20

$\alpha_1 = 1-x$

$\alpha_2 = 0$

$$p(x)= e^{\int \frac{(1-x)}{x(1-x)}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$q(x)=0$$

$$w(x)=\frac{1}{x(1-x)}\cdot x = \frac{1}{1-x}$$

$\therefore$ la forma autoadjunta es:

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)M_n(x) = -n\,\frac{1}{1-x}\,M_n(x)}$$ forma autoadjunta.

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{1-x}\,\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,M_n(x) = -n\,\frac{M_n(x)}{\sqrt{1-x}}$$

sea $\xi_n(x) = \dfrac{M_n(x)}{\sqrt{1-x}}$

Es hermitiano

$$\Downarrow$$

$$\therefore \left[\sqrt{1-x}\,\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{d}{dx}\right)\sqrt{1-x}\right]\xi_n(x) = -n\,\xi_n(x)$$

donde

$\{\xi_n(x)\}$ forma una base ORTONORMAL COMPLETA.

3) De lo anterior $\langle \xi_n | \xi_m \rangle = N^2 \delta_{nm}$

20

$\uparrow$ cte. (en gral. dependiente de n)

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 \xi_n^*(x)\,\xi_m(x)\,dx = N^2\delta_{nm}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 \frac{M_n^*(x)\,M_m(x)}{1-x}\,dx = N^2\delta_{nm}$$

<u>Obs</u>: $N = N(n)$

(5)

4) 2.5 [X] $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\xi}_n\rangle\langle\tilde{\xi}_n| = \hat{\mathbb{1}}$ $/|x'\rangle$ con $n \in \mathbb{Z}$

$|\tilde{\xi}_n\rangle = \frac{1}{N}|\xi_n\rangle$

Ket normalizado

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(x)\,\xi_n^*(x') = \delta(x-x') \quad \rightsquigarrow \frac{1}{N^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M_n(x)\,M_n^*(x')}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-x'}} = \delta(x-x')$$

5) 2.5 $$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n|\tilde{\xi}_n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{N(n)}\frac{M_n(x)}{\sqrt{1-x}}$$

con $a_n = \langle\tilde{\xi}_n|f\rangle$

$$= \int_0^1 \frac{1}{N}\frac{M_n(x)}{\sqrt{1-x}} f(x)\,dx$$

Prob. III)

1) Sea $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$

40

$$\downarrow$$

$$\hat{A}^2|a\rangle = a^2|a\rangle$$ Se conoce que $\hat{A}^2 = 2\hat{\mathbb{1}}$

$$\therefore \quad 2\hat{\mathbb{1}}|a\rangle = a^2|a\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = 2$$ $\Rightarrow$ Valores propios $a = \pm\sqrt{2}$ //

2) si $\hat{B}|b\rangle = b|b\rangle \Rightarrow \hat{B}^4|b\rangle = b^4|b\rangle$; pero $\hat{B}^4 = \hat{\mathbb{1}}$

60

$$\Downarrow$$

$$\therefore \quad |b\rangle = b^4|b\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$b^4 = 1$$ $\Rightarrow$ Valores propios

$$\Downarrow$$

$$b = 1, -1, i, -i$$ //