CAPITULO III ORTOGONALIDAD Y SISTEMAS DE STURM LIOUVILLE

Una transformación lineal $L: C^n[a,b] \to C[a,b]$ es un operador diferencial lineal de orden *n* (en el intervalo [a,b]) si puede expresarse en la forma :

$L = a_n(x)D^n + - - - - + a_1(x)D + a_0(x)$

donde D=d/dx y los coeficientes $a_j(x)$, $j \in \{1,---,n\}$ son funciones continuas en [a,b], con $a_n(x)$ no idénticamente nula en [a,b]. En particular si $f \in C^n([a,b])$, entonces

$$L[f](x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}f(x) + - - + a_0(x)f(x)$$

DEFINICION 1.-Se dice que un operador diferencial lineal de segundo orden ***L*** definido en un intervalo [a,b] esta en forma **autoadjunta**, si:

$$L = D\big(p(x)D\big) + q(x)$$

donde p es cualquier función en $C^1[a,b]$ tal que $p(x) > 0$ (o bien $p(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$ y q es una función arbitraria en C[a,b] .

Consideremos la EDO lineal de 2º orden

$$(1) \qquad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = 0;\ a_2(x) \neq 0.;\ x \in I$$

y sea

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right).$$

Como

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) = p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}p(x)\frac{dy}{dx}$$

entonces la ecuación (1) se puede escribir

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x)y = 0$$

o más simple

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0$$

donde

$$q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x)$$

La ecuación (2) se conoce como la **forma autoadjunta** de la ecuación (1)

EJEMPLO 1.- La forma autoadjunta de la **ecuación de Legendre**

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy+n(n+1)y=0 \qquad \text{es} \qquad \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\right]\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

EJERCICIOS 1 : Expresar cada unas de las ecuaciones siguientes en forma autoadjunta

a) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y=0$, $I=(-1,1)$
b) $x^2y'' - 2x^3y' - (4-x^2)y=0$, $I=\Re^+$
c) $(x^3-2)y'' - x^2y' - 3y=0$, $I=]\sqrt[3]{2},\infty[$

DEFINICION 2.- Un **problema con valores en la frontera** (PVF o PVC) para ecuaciones diferenciales lineales de 2º orden consiste en :

1º .- Una ecuación del tipo

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{Ly=h}$$

en que **L** es un operador diferencial lineal de 2º orden definido en [a,b] y $h \in C[a,b]$, y

2º Un par de condiciones de frontera de la forma :

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y(b)+\alpha_3 y'(a)+\alpha_4 y'(b)&=\gamma_1 \\ \beta_1 y(a)+\beta_2 y(b)+\beta_3 y'(a)+\beta_4 y'(b)&=\gamma_1 \end{aligned}$$

donde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ son constantes. Al menos una de las α_i y una de las β_i debe ser no nula y (4) debe contener términos no nulos incluyendo a cada uno de los extremos.

NOTAS. 1º.- Se dirá que las condiciones de fronteras dadas son homogéneas si

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

2º.- Se puede probar que el conjunto ***S*** de las funciones dos veces diferenciables en [a,b] que satisfacen condiciones de frontera homogéneas (4) es un subespacio de $C^2[a,b]$.

En este capítulo aprenderemos a resolver PVF de la forma:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} Ly=h \\ \alpha_1 y(a)\alpha_2 y(b)+\alpha_3 y'(a)+\alpha_4 y'(b)=0 \\ \beta_1 y(a)+\beta_2 y(b)+\beta_3 y'(a)+\beta_4 y'(b)=0 \end{cases}$$

donde L es un operador diferencial lineal L: ***S***$\rightarrow$C[a,b].

Las soluciones del PVF (5) están íntimamente ligadas a las soluciones del sistema:

$$(6)\qquad \begin{cases} Ly = \lambda y \\ \alpha_1 y(a)\alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

donde λ es un parámetro.
Observe que el PVF (6) admite siempre como solución la función nula, y que además no satisface el teorema de unicidad de soluciones. Nuestro interés está precisamente en encontrar las soluciones no nulas del PVF (6).
Los valores de λ para los cuales la ecuación $Ly=\lambda y$ tiene soluciones no nulas en el subespacio ***S*** de $C^2[a,b]$, son llamados **valores propios** (o valores característicos) de L, y para cada valor propio λ, las funciones no nulos en ***S*** que satisfacen $Ly=\lambda y$ se llaman **funciones propias** de L, correspondientes a ese λ.
La ecuación diferencial en (6) también suele escribese en la forma

$$Ly + \lambda y = 0$$

En este caso los valores de λ tienen signo opuesto a los hallados en (6).

EJEMPLO 2 .- Hallar los VP y las FP del siguiente problema diferencial:

$$y'' + \lambda y = 0 , \quad 0<x<\pi$$
$$y(0) = y'(\pi) = 0$$

SOL.:La ecuación característica asociada a la EDO $y'' + \lambda y = 0$ es $r^2+\lambda = 0$, de donde se obtiene que $r = \pm\sqrt{-\lambda}$. Así se distinguen tres situaciones para la correspondiente solución general

1^{ra} situación :$\lambda<0$

La solución general de la EDO $y'' + \lambda y = 0$ es:

$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$,
de donde obtenemos
$y'(x) = \sqrt{-\lambda}\,(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} - c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\,x})$.

Aplicando las condiciones de contorno (CC), resulta:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1+c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$$
$$y'(\pi)= 0 \Rightarrow 0 = -c_2(\sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + \sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}) \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Por lo tanto no hay VP negativos.

2^{da} situación $\lambda=0$:

La solución general ahora es: $y(x) = C_1 x + C_2$. Luego, $y'(x) = C_1$. Aplicando las condiciones de contorno se obtiene $C_1=C_2=0$. Por lo tanto $\lambda = 0$ no es VP.

3^{ra}situación $\lambda>0$:

La solución general ahora es: $y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x$.

Luego, $y'(x) = -\sqrt{\lambda}A\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}x$.

Aplicando la primera CC, resulta : $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

Por lo tanto $y'(x) = \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}x$.

Aplicando la segunda CC: $y'(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0, B \neq 0$

$$\therefore\ \pi\sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\therefore\ \text{VP: } \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

y así $$\text{FP: } y_n = \mathrm{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)x \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

EJEMPLO 3. Consideremos la ecuación de Euler:

(7) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $1 < x < e^{2\pi}$, $\lambda \geq 0$ con las CC :

$y'(1) = y'(e^{2\pi}) = 0.$

SOL.: Observamos que la forma autoadjunta de (7) es

(8) $$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y = 0$$

Por hipótesis, $\lambda \geq 0$; luego discutimos sólo dos casos:

i) **λ=0 :** La ecuación de Euler toma la forma

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0, \qquad 1 < x < e^{2\pi}\ (\therefore\ x > 0)$$

$$\therefore \qquad y(x) = c_1\ln x + c_2 \quad \text{e} \quad y'(x) = c_1/x$$

CC : $y'(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = c_2$, c_2 cte. arbitraria no nula.

$y'(e^{2\pi}) = 0 \Rightarrow y'(x) = 0 \qquad \forall x.$

Luego $\lambda = 0$ es valor propio y la correspondiente función propia es $y_0(x)=c_2$.

ii) **λ > 0:** De (8) se obtiene $xy''+y'+\frac{\lambda}{x}y = 0$, y dividiendo ambos miembros por *x* ($x \neq 0$) resulta :

$$x^2y''+xy'+\lambda y = 0$$

que es la forma más conocida ecuación de Euler. La sustitución $x = e^t$ transforman esta ecuación en su equivalente:

$$y''(t)+\lambda y(t)=0$$

Como λ>0, la solución general es : $y(t) = c_1\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}t + c_2\cos\sqrt{\lambda}t$,
es decir

$$y(x) = c_1\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\ln x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

$$\therefore \qquad y'(x)=\frac{c_1\sqrt{\lambda}}{x}\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)-\frac{c_2\sqrt{\lambda}}{x}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\ln x), \qquad x>0$$

+CC: $y'(1)=0 \Rightarrow c_1\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow c_1=0 \ \therefore\ y'(x)=-\dfrac{c_2\sqrt{\lambda}}{x}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\ln x), \qquad x>0$.

+CC: $y'(e^{2\pi})=0 \Rightarrow 0=-\dfrac{c_2\sqrt{\lambda}}{e^{2\pi}}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\ln e^{2\pi}),$

e.d. $\quad c_2\sqrt{\lambda}e^{-2\pi}\operatorname{sen}(2\pi\sqrt{\lambda})=0 \overset{C_2\neq 0}{\Rightarrow} \operatorname{sen}(2\pi\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\lambda}=n\pi$, n=1,2,3,...

$$\therefore \qquad \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{2\pi}$$

e.d.

$$\text{VP: } \lambda_n=\frac{n^2}{4}, \qquad n=1,2,.. \qquad\qquad \text{FP: } y(x)=\cos\left(\frac{n}{2}\ln x\right), \quad n=1,2,...$$

DEFINICION 3. .- Sea L:S $\to$V**,** donde S y V son espacios euclidianos , y S es un subespacio de V. Se dice que L es simétrico con respecto al producto interior en V si :

(9) $\qquad \langle Lx,y\rangle=\langle x,Ly\rangle \quad ; \quad \forall\ x\ ,\ y\in S$

Propiedades :

a) Todos los valores propios para una transformación lineal simétrica , sobre un subespacio V *son reales*

b) Cada par de vectores propios , correspondientes a diferentes valores propios, para una transformación lineal simétrica L: S$\to$ V *son ortogonales en* V

TEOREMA 1. .-Sea ***S*** un subespacio de $C^2[a,b]$ determinado por las funciones que verifican las condiciones de fronteras homogéneas :

$$\alpha_1y(a)+\alpha_2y(b)+\alpha_3y'(a)+\alpha_4y'(b)=0$$
$$\beta_1y(a)+\beta_2y(b)+\beta_3y'(a)+\beta_4y'(b)=0$$

y sea ***L*** cualquier operador diferencial lineal autoadjunto, que transforma ***S*** en C[a,b]. Entonces ***L*** es simétrico con respecto al producto interior en C [a,b] si y solo si :

(10) $\qquad p(x)\left[y_1(x)y_2'-y_2(x)y_1'(x)\right]\Big|_a^b=0 \quad \forall y_1,y_2\in$ ***S.***

Observaciónes.

a) Si y(a) = y(b) =0 entonces (10) se satisface sin restricción, y así podemos escribir ***S*** = $C^2[a,b]$.

b) Sea S el conjunto de todas las funciones **y** en C[a,b] tales que :

$$\alpha_1y(a)+\alpha_2y'(a)=0$$

(11)

$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$

con $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Entonces (10) se verifica de inmediato. En efecto, si y_1, y_2 son dos funciones cualquiera en ***S*** , se tiene :

$$(12) \qquad \begin{aligned} y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a) = 0 \\ y_1(b)y_2'(b) - y_2(b)y_1'(b) = 0 \end{aligned}$$

NOTA. Una condición de frontera de forma anterior, que involucra valores de y , y' sólo en uno de los extremos del intervalo, se conoce con el nombre de***: CONDICION DE FRONTERA NO MIXTA.***

c) Si ***S*** es el subespacio de $C^2[a,b]$ que consiste de todas las funciones **y** tales que :

(13) y(a)=y(b) , y´(a) = y´(b)

y además

p(a) = p(b*)* **(condicion de compatibilidad)**

entonces (10) se verifica para toda y_1, y_2 en ***S .***

NOTA ***.*** Esta situación (13) se conoce con el nombre de***: "CONDICIONES DE FRONTERA PERIÓDICAS ".***

EJEMPLO 4*:* Sea $L=-D^2$ definido en el intervalo $[0,2\pi]$ y sea ***S*** el subespacio de $C^2[0,2\pi]$ descrito por las condiciones de fronteras :

$y(0) = y(2\pi)$

$y'(0) = y'(2\pi)$

Como $-D^2 = D(-D)$, entonces $p(x) = -1, \forall x \in [0,2\pi]$ y $p(0) = p(2\pi)$. Entonces ***L*** es simétrico en el subespacio de $C^2[0,2\pi]$ descrito por las condiciones de frontera anteriores.

Para encontrar los valores propios y los funciones propias respectivas, se debe resolver la ecuación diferencial

$y'' + \lambda y = 0$

con las condiciones de frontera $y(0) = y(2\pi)$; $y'(0) = y'(2\pi)$.

Puesto que ***L*** es simétrico entonces sus valores propios son reales y sus funciones propias son ortogonales. Luego,

i) Si λ **< 0** , entonces se obtienen sólo soluciones triviales

ii) Si λ **= 0**, entonces la solución general de la EDO. es $y(x) = c_1 + c_2 x$

Aplicando las condiciones de fronteras, se obtiene las soluciones y(x)=Cte. Así , $\lambda = 0$ es valor propio para ***L*** sobre ***S .***

iii) Si λ **> 0** la solución general de la E.D. es: $y(x) = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x$.

Aplicando las condiciones de fronteras, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$C_2 \left(1 - \cos 2\pi\sqrt{\lambda}\right) = C_1 \operatorname{sen} 2\pi\sqrt{\lambda}$

(14)

$$C_1\left(1-\cos 2\pi\sqrt{\lambda}\right) = -C_2 \operatorname{sen} 2\pi\sqrt{\lambda}$$

Ahora, si $\sqrt{\lambda}$ = 1,2,3,... se tiene que para cualesquier C_1, C_2 se satisface (14) , y los enteros 1, 4, 9, ... son valores propios para ***L.*** Así, las funciones propias son :

$y_n(x) = C_1 \operatorname{sen} nx + C_2 \cos nx.$

EJEMPLO 5. Como se verá más adelante, el siguiente PVC aparece en el estudio de la conducción del calor en un anillo.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , -\pi < x < \pi$$
$$y(-\pi) = y(\pi)$$
$$y'(-\pi) = y'(\pi)$$

Sol.: Se trata de un PVC periódico. Antes de resolverlo, debemos verificar si se cumple la "condición de compatibilidad" . En efecto,

$$p(x) \equiv 1 \Rightarrow p(-\pi) = p(\pi).$$

De la ecuación característica, deducimos que debemos analizar el PVC para $\lambda = 0$; $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

λ=0 : $y'' = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x$.
+CC: $y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow c_1 - c_2\pi = c_1 + c_2\pi \Rightarrow 2c_2\pi = 0 \Rightarrow c_2 = 0$
$\therefore$ $y(x) = c_1$ e $y'(x) = 0$.
+CC: $y'(-\pi) = y'(\pi)$, que siempre es válida. Por lo tanto λ=0 es VP, y la FP asociada es $y_0(x)$ = cte.arbitraria, digamos K_0.

λ<0 : $y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow$ ecuación característica: $m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda}$ (raíces reales y distintas).
Podemos definir $\alpha = +\sqrt{-\lambda}$, $-\alpha = -\sqrt{-\lambda}$, y así la solución general será
$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$

+CC: $y(-\pi) = y(\pi) \Rightarrow c_1 e^{-\alpha\pi} + c_2 e^{\alpha\pi} = c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi}$

$$\therefore \quad c_1\left(e^{-\alpha\pi} - e^{\alpha\pi}\right) = c_2\left(e^{-\alpha\pi} - e^{\alpha\pi}\right) \Rightarrow c_1 \equiv c_2.$$

Por otro lado,
$y'(x) = \alpha c_1 e^{\alpha x} - \alpha c_2 e^{-\alpha x} = \alpha\left(c_1 e^{\alpha x} - c_2 e^{-\alpha x}\right)$
+CC: $y'(-\pi) = y'(\pi) \Rightarrow \left(c_1 e^{-\alpha\pi} - c_2 e^{\alpha\pi}\right) = \left(c_1 e^{\alpha\pi} - c_2 e^{-\alpha\pi}\right)$,$\alpha \neq 0$.

Como $c_1 = c_2$ entonces
$2c_1\left(e^{-\alpha\pi} - e^{\alpha\pi}\right) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 \equiv 0$
$\therefore$ No hay VP negativos.

λ>0 : La solución general es $y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x$

$\therefore$ $y'(x) = -\sqrt{\lambda}A\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}x.$

+CC: $y(-\pi)=y(\pi) \Rightarrow A\cos\sqrt{\lambda}(-\pi)+B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}(-\pi)=A\cos\sqrt{\lambda}\pi+B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\pi$

(15) $\therefore$ $2B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\pi=0$

+CC: $y'(-\pi)=y'(\pi) \Rightarrow \sqrt{\lambda}A\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\pi+\sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}\pi=-\sqrt{\lambda}A\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\pi+\sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}\pi$

(16) $\therefore$ $2A\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\pi=0$.

Luego en (9) y (10), si A y B son no nulas, entonces

$\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}\pi=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi=n\pi, \quad n=1,2,\ldots$

$\therefore$ Los VP son $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,3,\ldots$Así, para un mismo VP tenemos dos soluciones l.i.: sen(nx), cos(nx), es decir,

VP={0,1,4,9,....} ; FP ={K_0, A_n cosnx+B_n senx} , n=1,2,3,...

DEFINICION 4. Un problema, o sistema, de **Sturm-Liouville** esta formado por una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden de la forma

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+\left(q(x)-\lambda\right)y=0$$

con p una función cualquiera en $C^1[a,b]$ tal que p(x)>0 , o bien p(x)<0 **,** $\forall$ x$\in$(a,b) , y q es una función arbitraria en C[a,b], junto con un par de condiciones de fronteras (homogéneas) escogidas en forma tal que las funciones propias correspondientes a diferentes valores propios para el operador $D(p(x)D)+q(x)$, son ortogonales

EJEMPLO 6 ***:*** Resolver el PVC.
y" +λy =0, 0<x<1
y(0)=0
y(1)+hy'(1) = 0
siendo h una constante positiva .

SOL: Obviamente L es autoadjunto con p=1; q=0; ρ=1. Los VP son positivos y la solución de la EDO es:

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x$$

CC: y(0)=0 $\Rightarrow$ c_1= 0 $\Rightarrow$ y(x) = $c_2\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x$ $\Rightarrow$ y '(x) = $\sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}x$

CC: y(1)+hy'(1)=0 $\Rightarrow$ $c_2(\mathrm{sen}\sqrt{\lambda}+h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda})=0$.

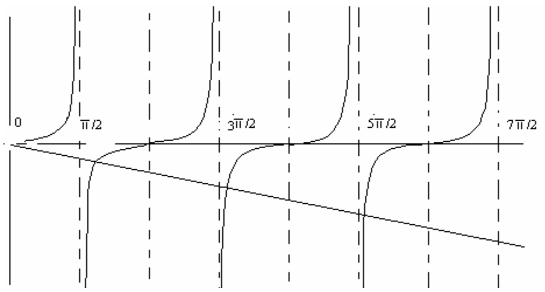

Figura 1.

Si $c_2 \neq 0$, entonces
$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda} = 0$.
Luego, $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -h\sqrt{\lambda}$. Si hacemos $\alpha = \sqrt{\lambda}$ tenemos una ecuación trigonométrica: $\operatorname{tg}\alpha = -h\alpha$ que no posee solución explícita, pero podemos resolverla gráficamente, como se muestraen la Figura 1, en un sistema $(\alpha, \xi(\alpha)), \xi = \operatorname{tg}\alpha$.

Observamos que existen infinitas raíces α_n , n=1,2,... A cada raíz α_n le corresponde un VP : $\lambda_n = \alpha_n^2$, n=1,2,..

Por lo tanto existe una sucesión de VP:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \text{con} \quad \text{lím}_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

y las correspondientes funciones propias son : $y_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\, x$.

EJERCICIOS 2: i) Compruebe que los VP y las FP del PVF:

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \qquad 0<x<L \\ &y(0) = 0 \quad ; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

son $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n(x) = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}$,respectivamente para n=1,2,3,... y que los VP y FP de:

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \qquad 0<x<L \\ &y'(0)=y'(L)=0 \end{aligned}$$

son $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n(x) = \cos\dfrac{n\pi x}{L}$, respectivamente para n=0,1,2,3,...

ii) Sin realizar cálculos, escriba los VP y FP de los siguientes PVC.

a) $\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \qquad 0<x<1 \\ &y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \qquad 0<x<\pi \\ &y(0) = 0 \quad ; \quad y(\pi) = 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \qquad 0<x<1 \\ &y'(0)=y'(1)=0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0 \qquad 0<x<\pi \\ &y'(0)=y'(\pi)=0 \end{aligned}$

Hasta el momento hemos visto que ciertos PVC generan valores propios reales y funciones propias ortogonales, pero nada sabemos sobre posibles *bases* conformadas por estas funciones propias. El siguiente teorema da una agradable respuesta, su demostración cae fuera del interés del curso.

TEOREMA 2. Sea ***L*** un operador diferencial lineal de segundo orden definido en un intervalo cerrado [*a,b*], y sea ***S*** un subespacio de $C^2[a,b]$ determinado por un par de condiciones de fronteras no mixtas. Entonces :
1º.- ***L*** tiene una sucesión infinita de valores propios reales $\{\lambda_n\}$, donde n =0,1,2,...tal que

$$|\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots..$$

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

2º.- Los subespacios propios de C[a,b] correspondientes a diferentes valores propios son unidimensionales.
3º.- Cualquier conjunto completo de funciones propias para ***L***, una por cada valor propio, es una base para C[a,b].
4º.-El desarrollo en serie, de cualquier función ***h*** suave por tramos en [a,b], relativa a tal base converge uniformemente y absolutamente en cualquier intervalo cerrado donde ***h*** es continua.

APLICACIÓN DE LA TEORIA DE STURM-LIOUVILLE A LA RESOLUCION DE PVC.

Consideremos la ecuación diferencial

(17) $$\mathbf{Ly = h}$$

en que h es una función conocida en C[a,b] ; L un operador diferencial lineal autoadjuntode segundo orden, actuando sobre el subespacio ***S*** de $C^2[a,b]$ definido por un par de condiciones de fronteras homogéneas.
Para resolver este PVC podemos aplicar el "método de los valores propios" para espacios euclidianos de dimensión infinita .
En efecto, supongamos que $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$son valores propios para L sobre ***S*** , y sean $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$, el conjunto de funciones propias correspondientes a los λ_n $n \in IN$.
Supongamos que dicho conjunto de funciones propias forman una **base** para C[a,b]. Luego, podemos escribir la serie generalizada de Fourier para un elemento h cualquiera de ese espacio en la forma:

(18) $$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$ (convergencia en media)

donde los coeficientes generalizados de Fourier están definidos por:

(19) $$c_n = \frac{\langle h, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\int_a^b h(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx} \quad .$$

Si suponemos que la solución buscada tiene la forma:

(20) $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x)$$

entonces, el problema está resuelto si hallamos los coeficientes α_n.

Sustituyendo (20) en (17), resulta:

(21) $$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \ .$$

Ahora, si **L** puede aplicarse a (20) termino a termino , se tiene :

(22) $$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

de donde se deduce que (20) es una solución de (17) siempre que :

i) (23) $\alpha_n \lambda_n = c_n \ , \ \forall n \ \in IN$

ii) (24) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x)$

defina una función en $C^2[a,b]$, cuyas primeras dos derivadas puedan calcularse por derivación termino a termino de la serie.

OBSERVACIONES IMPORTANTES:

1. Respecto de (23) ; claramente $\alpha_n = \dfrac{c_n}{\lambda_n}, \quad \lambda_n \neq 0 \quad \forall n$ (y así existe una única solución). Pero si uno de los λ_n , digamos λ_0 es cero, el problema no tiene solución si $c_0 \neq 0$, y tiene infinitas soluciones si $c_0 = 0$.

2. El análisis completo es más complicado pues debemos investigar la convergencia de la serie $\sum \dfrac{c_n}{\lambda_n} \phi_n(x)$. Esta convergencia depende de las propiedades de h y de las constantes c_n , que resultan del sistema OG particular $\{\phi_n(x)\}$. Luego, cada caso deberá examinarse individualmente. En general, para que la solución-serie sea "buena" (e.d. de clase C^2), se requiere que h sea "buena".

EJEMPLO 7. Resuelva el PVC: $y'' = \pi x - x^2 \ , 0 < x < \pi$
$y(0) = y(\pi) = 0$
usando las FP del SSL asociado .

SOL.: Sabemos que el SSL asociado es $y'' = \lambda y \ , \quad 0 < x < \pi$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

cuyas FP, de acuerdo a EJERCICIOS 2, son $\phi_n(x) = \operatorname{sen} nx$, y los correspondientes VP son : $\lambda_n = n^2 \quad n = 1,2,\ldots$

$\therefore$ el sistema ON será: $\phi_n(x) = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx \right\}_{n=1}^{\infty}$ y $c_n = \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)$.

Además

$$h(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \qquad x \in [0,\pi]$$

Sea $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$, entonces $\alpha_n = \frac{c_n}{\lambda_n} = \frac{\frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)}{n^2} = \frac{8}{n^5}$, n impar.

$\therefore$

$$y(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^5}.$$

EJERCICIO 3.

Determinar la solución formal de la ecuación $y'' = -x$ sujeta a las condiciones de fronteras $y(0) = y'(\pi) = 0$.

ORTOGONALIDAD CON RESPECTO A UNA FUNCION PESO

Una generalización parcial e importante para problemas con valores en la frontera consiste de :

a) Una ecuación diferencial lineal lineal homogénea de 2º orden de la forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left(q(x) - \lambda r(x)\right)y = 0 \qquad , x \in [a,b]$$

b) Un par de condiciones de fronteras homogéneas que definen el espacio dominio ***S*** para el operador

$$L = D\left[p(x)D\right] + q(x)$$

donde ***p*** y ***q*** son funciones en $C^1[a,b]$ y en $C[a,b]$ respectivamente , y ***p(x)*** no se anule en (a,b) , y además ***r*** es una función continua, no negativa en [a,b] que se anula a lo más en un número finito de puntos, llamada **función ponderadora**.

TEOREMA 3. Sea ***L*** un operador diferencial lineal verificando las hipótesis anteriores, ***r*** una función ponderadora cualquiera en[a,b] y sea ***S*** un subespacio de $C^2[a,b]$ tal que

$$p(x)\left[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\right]\Big|_a^b = 0$$

para cada par de funciones y_1 , y_2 en ***S.*** Entonces, cualesquier conjunto de funciones propias correspondientes a diferentes valores propios para ***L*** sobre ***S*** es ortogonal en C[a,b] con respecto a la función ***r.***

NOTA.- Debemos observar que en general el operador *L* **no es simetrico** en *S* con respecto al producto interior anterior, pero el teorema afirma que las funciones propias correspondientes a diferentes valores propios son aún *ortogonales.*

Puede probarse que si : a) $L : S \to C[a,b]$ es *uno a uno*
b) $r(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$

entonces C[a,b] tiene una ***base*** (conjunto ortogonal completo) compuesta de las funciones propias para *L.*
Para este resultado son importantes las siguientes propiedades:

a) Si ***S*** es el subespacio de $C^2[a,b]$ determinado por condiciones de fronteras no mixtas , y si y_1, y_2 son soluciones l.i. de la ecuación Ly=0, entonces L es uno a uno cuando se restringe a ***S*** si, y solamente si , el determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a) \\ \beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Si ***S*** es el subespacio de $C^2[a,b]$ determinado por condiciones de fronteras periodicas, y si y_1, y_2 son soluciones l.i. de la ecuación Ly=0, entonces L es uno a uno cuando se restringe a ***S*** si, y solamente si , el determinante

$$\begin{vmatrix} y_1(a) - y_1(b) & y_2(a) - y_2(b) \\ y_1'(a) - y_1'(b) & y_2'(a) - y_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

EJEMPLO. 8. Hallar los VP y las FP del SSL:

$$4y'' - 4y' + (1+\lambda)y = 0$$
$$y(-1) = 0, \qquad y(1) = 0$$

y discutir la ortogonalidad de la FP en C[-1,1].

<u>SOL</u>.: Forma autoadjunta: $p(x) = e^{-x}, \quad q(x) = \frac{1}{4}e^{-x}, \quad r(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$

$$\therefore\ 4y'' - 4y' + (1+\lambda)y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}\lambda e^{-x}\right)y = 0 \quad /.4$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(4e^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + \left(e^{-x} + \lambda e^{-x}\right)y = 0.$$

$\therefore$ Redefinimos $p(x) = 4e^{-x}, q(x) = e^{-x}, \quad r(x) = e^{-x}$.

De las CC, resulta: $p(x)\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)\Big|_{-1}^{1} = 0$.
Las FP serán OG con respecto a la función peso $r(x) = e^{-x}$ en C[-1,1].

La ecuación característica es: $4m^2 - 4m + (1+\lambda) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}$

1° **caso:** λ**<0** Sol. gral. $y(x) = e^{x/2}\left[c_1 e^{x\sqrt{-\lambda}/2} + c_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}/2}\right]$ + CC $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

2° **caso:** λ**=0** Sol. gral. $y(x) = e^{x/2}\left[c_1 + c_2 x\right]$ + CC $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

3° **caso:** λ**>0** Sol. gral. $y(x) = e^{x/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} x\right]$.

+ CC y(-1)=0 $\Rightarrow 0 = e^{-1/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right] \therefore c_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ (*)

CC y(1)=0 $\Rightarrow 0 = e^{1/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right] \therefore c_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ (**)

Restando y sumando (*) y (**), resulta:

$$2c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0 \overset{c_2 \neq 0}{\Rightarrow} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = n\pi \therefore \qquad \lambda_n = 4n^2\pi^2 \text{ , n=1,2,3,...}$$
$$2c_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0 \overset{c_1 \neq 0}{\Rightarrow} \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = (2n-1)\pi \therefore \quad \lambda_n = (2n-1)^2\pi^2 \text{ , n=1,2,3,...}$$

$\therefore$ $\qquad$ FP : $\left\{ e^{x/2}\cos n\pi x, e^{x/2}\operatorname{sen} n\pi x \right\}_{n=1}^{\infty}$.

EJEMPLO 9.

a) Hallar la SGF para f(x)=xe^{-2x} , en términos de las FP del SSL :

$$y''+4y'+(5-\lambda)y=0$$
$$y(0)=y(1)=0$$

b) Hallar la solución formal del PVC : $\begin{cases} y''+4y'+5y = xe^{-2x} \\ y(0) = 0; \quad y(1) = 0 \end{cases}$

SOL.: Forma autoadjunta: $p(x) = 4e^{4x}; q(x) = 5e^{4x}; \rho(x) = e^{4x}$

a) Ecuación característica: $r^2 + 4r + 5 - \lambda = 0 \Rightarrow r = \frac{-4 \pm 2\sqrt{\lambda - 1}}{2} \Rightarrow$ r =-2$\pm\sqrt{\lambda-1}$.

i) λ**>1** : y(x)=$e^{-2x}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda-1}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda-1}x}\right)$ + CC y(0)=0 $\Rightarrow$ c_2=-c_1

$\therefore$ $\qquad$ y(x)=$e^{-2x}c_1\left(e^{\sqrt{\lambda-1}x} - e^{-\sqrt{\lambda-1}x}\right)$ + CC y(1)=0 $\Rightarrow$ c_1=0 $\therefore$ c_2=0

e.d. $\quad$ No hay VP mayores que 1.

ii) λ**=1** : $y(x)=e^{-2x}\left(c_1+c_2x\right)$ + CC y(0)=0 $\Rightarrow c_1=0$ $\therefore$ $y(x)=e^{-2x}c_2x$

+ CC y(1)=0 $\Rightarrow c_2=0$
e.d. 1 no es VP.

iii) λ**<1** : $y(x)=e^{-2x}(c_1\cos\sqrt{1-\lambda}x+c_2\,\mathrm{sen}\sqrt{1-\lambda}x)$ + CC y(0)=0 $\Rightarrow c_1=0$

$\therefore$ $y(x)=c_2e^{-2x}\,\mathrm{sen}\sqrt{1-\lambda}x$ + CC y(1)=0 $\Rightarrow c_2e^{-2}\,\mathrm{sen}\sqrt{1-\lambda}=0\Rightarrow\sqrt{1-\lambda}=n\pi$

$\therefore$ **VP** $\lambda_n=1-n^2\pi^2;\quad n=1,2,3,...$ **FP** $\phi_n(x)=e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\quad n=1,2,3,..$

$\therefore$ El conjunto $\left\{e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ forma un conjunto ON completo con respecto a la función ponderadora r (x)=e^{4x}, en C[0,1].

Luego, $$\left\|\phi_n(x)\right\|^2=\int_0^1 e^{4x}e^{-4x}\,\mathrm{sen}^2\,n\pi x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Sea $f(x)=xe^{-2x}=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x$, con $c_n=2\int_0^1 xe^{-2x}e^{2x}e^{4x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx$

$\therefore$ $$c_n=2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

y así $$xe^{-2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x$$

b) Sea $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_ne^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x$ la solución del problema con α_n por determinar.

Luego, $$L[y]=xe^{-2x}\Rightarrow L\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_ne^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x$$

$\therefore$ $$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nL(e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x$$

e.d. $$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\lambda_ne^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\Rightarrow\alpha_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi(1-n^2\pi^2)}$$

Luego, la solución del PVC es: $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi(1-n^2\pi^2)}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,n\pi x$

EJERCICIOS 4.

1. Exprese cada uno los siguientes operadores diferenciales lineales en forma autoadjunta:

a) $D^2 + \frac{1}{x}D + 1$, x>0

b) $(\cos s)D^2 + (\operatorname{sen} x)D - 1$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

c) $x^2D^2 + xD + (x^2 - p^2)$, x>0, siendo p un número real.

d) $(1 - x^2)D^2 - 2xD + n(n+1)$, -1<x<1 , siendo n un entero no negativo.

2. Hallar todos los VP y las FP de los SSL regulares

a) $\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(0) + y'(0) = 0 \end{array}$

e) $\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-1) = y(1), y'(-1) = y'(1) \end{array}$

f) $\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi) \end{array}$

g) $\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \end{array}$

h) $\begin{array}{c} y'' + y' + (1 + \lambda)y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{array}$

i) $\begin{array}{c} y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{array}$

j) $\begin{array}{c} y'' - 3y' + 3(1 + \lambda)y = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{array}$

k) $\begin{array}{c} x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0 \\ y(1) = 0, y(e) = 0 \end{array}$

l) $\begin{array}{c} \frac{d}{dx}\left[(2 + x)^2 y'\right] + \lambda y = 0 \\ y(-1) = 0, y(1) = 0 \end{array}$

m) $\begin{array}{c} (1 + x^2)y'' + 2(1 + x)y' + 3\lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{array}$

SOLS.:

a) $\lambda_n = n^2, \phi_n(x) = \operatorname{sen} nx \qquad n = 1,2,3,..$

b) $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, \phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x \qquad n = 1,2,3,..$

c) $\lambda_n = n^2, \phi_n(x) = \cos nx \qquad n = 0,1,2,3,..$

e) $\lambda_n = 0, n^2\pi^2, \phi_n(x) = 1, \operatorname{sen} n\pi x, \cos n\pi x \qquad n = 1,2,3,..$

f) $\lambda_n = 0, n^2, \phi_n(x) = 1, \operatorname{sen} nx, \cos nx \qquad n = 1,2,3,..$

g) $\lambda_n = 0, 4n^2 \ , \phi_n(x) = 1, \operatorname{sen} 2nx, \cos 2nx \qquad n = 1,2,3,..$

h) $\lambda_n = -\left(\frac{3}{4} + n^2\pi^2\right), \phi_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \operatorname{sen} n\pi x \qquad n = 1,2,3,..$

k) $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2, \phi_n(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen}(n\pi \ln x), \qquad n = 1,2,3,..$

l) $\lambda_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{\ln 3}\right)^2, \phi_n(x) = \left[\frac{1}{(x+2)^{1/2}}\right]\operatorname{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{\ln 3}\right)\ln(x+2)\right], n \in \aleph$

m) $\lambda_n = \frac{1}{12}\left[1 + \left(\frac{2n\pi}{\ln 2}\right)^2\right], \quad \phi_n(x) = \left[\frac{1}{(1+x)^{1/2}}\right]\operatorname{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)\ln(1+x)\right], n \in \aleph$

3. Determinar todos los VP y las FP de los SSL:

a) $x^2y''+xy'+\lambda y = 0$, y(1)=0 ; y e y ' son acotadas en x=0

b) y "+λy=0 ; y(0) = 0; y e y ' son acotadas al infinito.

4. **a)** Probar que el PVC

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \omega^2 y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$
$$y'(0)=y'(1)=0$$

tiene soluciones no triviales sí y sólo si $\cos\sqrt{\omega} = \frac{1}{\cosh\sqrt{\omega}}$.

b) Usar la técnica de hallar gráficamente los VP, para demostrar que éste PVC tiene infinitos VP no negativos λ_n, donde n=0,1,2,..Cómo se comportan estos VP cuando n$\to\infty$?

c) Cuál es la solución general del PVC correspondiente al VP λ_n ?

5. L indica el operador diferencial de cuarto orden D^4, y ***S*** indica el subespacio de C^4[a,b] que consiste de todas las funciones y tales que

y(a) = y "(a) = y(b) = y "(b) = 0.

a) Demostrar que

$$y_1(Ly_2) - y_2(Ly_1) = [y_1y_2''' - y_2y_1''' - y_1'y_2'' + y_2'y_1'']' \quad \forall y_1, y_2 \in \boldsymbol{S}.$$

b) Usar el resultado en a) para probar que las FP correspondientes a diferentes VP para el PVC L:*S*$\to$C[a,b] , son OG.

6. Transforme cada una de las siguientes EDO en la forma autoadjunta equivalente:

a) La ecuación de Laguerre: xy "+(1-x)y '+ny=0 , n=0,1,2,3,...
b) La ecuación de Hermite : y "-2xy '+2ny=0 , n=0,1,2,3...
c) La ecuación de Tchebycheff : $(1-x^2)$y "-xy '+n^2y=0 , n=0,1,2,3...

7. Pruebe que: Si q(x) y ρ(x) son continuas y p(x) es dos veces continuamente diferenciable en [a,b], entonces las soluciones del SSL de cuarto orden

$$[p(x)y''(x)]''+[q(x)+\lambda\rho(x)]y(x)=0$$
$$[a_1y+a_2(py'')']_{x=a}=0,[b_1y+b_2(py'')']_{x=b}=0$$
$$[c_1y'+c_2(py'')]_{x=a}=0,[d_1y'+d_2(py'')]_{x=b}=0$$

con $a_1^2+a_2^2\neq 0, b_1^2+b_2^2\neq 0, c_1^2+c_2^2\neq 0, d_1^2+d_2^2\neq 0$ son OG con respecto a la función peso ρ en [a,b].

8. En cada uno de los siguientes PVC, hallar las FP, los VP y determine en cada caso un espacio euclidiano en el que un conjunto completo de FP para el problema dado, sea un conjunto ortogonal.

a) $y''+(1+\lambda)y=0; y(0)=y(\pi)=0$
b) $y''+(1-\lambda)y=0; y'(0)=y'(1)=0$
c) $y''+2y'+(1-\lambda)y=0; y(0)=y(1)=0$
d) $y''-4y'+(4-\lambda)y=0; y(0)=y(\pi)=0$
e) $4y''-4y'+(1+\lambda)y=0; y(-1)=y(1)=0$
f) $y''+(1-\lambda)y=0; y(0)+y'(0)=0, y(1)+y'(1)=0$
g) $y''+2y'+(1-\lambda)y=0; y'(0)=y'(\pi)=0$
h) $y''-3y'+2(1+\lambda)y=0; y(0)=y(1)=0$
i) $y''+4y'+(4-9\lambda)y=0$; $y(0)=y(a)=0$.

SOLS:

a) $\lambda_n=n^2, \phi_n(x)=\operatorname{sen} nx, n=1,2,3,..$; Ortogonal en $C[0,\pi]$
c) $\lambda_n=-n^2\pi^2, \phi_n(x)=e^{-x}\operatorname{sen} n\pi x, n=1,2,3,..$; Ortogonal en C[0,1] con respecto a la función peso e^{2x}.

e) $\lambda_n=-n^2\pi^2, \phi_n(x)=\begin{cases} e^{x/2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2}, n=2,4,6,.. \\ e^{x/2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}, n=1,3,5,.. \end{cases}$; Ortogonal en C[-1,1] con respecto a la función peso e^{-x}

g) $\lambda_n=-n^2, \phi_n(x)=e^{-x}(n\cos nx+\operatorname{sen} nx), n=1,2,3,..$; $\lambda=1, \phi(x)=1$; Ortogonal en $C[0,\pi]$ con respecto a la función peso e^{2x}.

9. Si las funciones propias del problema: $\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(ry')+\lambda y=0, \quad 0<r<a \\ c_1y(a)+c_2y'(a)=0 \\ \text{lím}_{r\to 0^+} y(r)<\infty \end{cases}$

satisfacen $\text{lím}_{r\to 0^+} ry'(r)=0$, muestre que todos los VP son reales para c_1 y c_2 reales.

10. Hallar el desarrollo formal en serie de la solución de los siguientes PVC, en términos de las FP del SSL asociado:

a) $y''=x(x-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(\pi)=0$ SOL: $y=\frac{128}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x$

b) $y''=x^2-\pi^2$, $y'(0)=0$, $y(\pi)=0$.

c) $y''=\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, y'(0)=0, y'(L)=0$ SOL.: No hay solución; $\lambda_0=0, c_0=\frac{-2}{\pi}\neq 0$

d) $y''=\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, y(0)=0, y'(L)=0$

e) $y''=\begin{cases}-x, 0\le x<\pi/2\\ x-\pi/2, \pi/2<x\le\pi\end{cases}$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$

SOL.: $$y=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}4}{(2k-1)^4\pi}-\frac{1}{(2k-1)^3}\right]\operatorname{sen}(2k-1)x+\left[\frac{1+(-1)^{k+1}}{8k^3}\right]\operatorname{sen}2kx$$

f) $y''+y=1$; $y(0)=y(1)=0$

g) $y''+4y=e^x$; $y(0)=y'(1)=0$

h) $y''=\operatorname{sen}x$; $y(0)=0$; $y(1)+2y'(1)=0$

i) $y''=-h(x)$; $y(0)=y(2\pi)$, $y'(0)=y'(2\pi)$, considerando que $h\in C[0,2\pi]$.
Sugerencia: considear los casos :

$$\int_0^{2\pi}h(x)dx=0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi}h(x)dx\neq 0 \quad \text{separadamente.}$$

SOL.: Si la integral de h es distinta de cero, no hay solución. Si es cero, entonces

$$y=c+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen}nx,$$

donde $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(x)\operatorname{sen}nx\,dx$ y c es una cte. arbitraria.

11. Hallar todos los VP y las FP del SSL "singular" $x^2y''-xy'+(1+\lambda)y=0$ considerando que $y(1)=0$, y $\lim_{x\to 0^+}|y(x)|<\infty$.

Cómo difieren los VP de otros problemas propuestos?

[Sugerencia: Note que se trata de la ecuación de Euler y recuerde que cuando el polinomio característico tiene raices complejas, el espacio solución en $(0,\infty)$ está generado por las funciones $x^\alpha\operatorname{sen}(\beta\ln x)$, $x^\alpha\cos(\beta\ln x)$].

SOL: VP $\lambda_n=-\frac{n^2\pi^2}{9a^2}$ n=1,2,3,... FP $\phi_n(x)=e^{-2x}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$ n=1,2,3,...

—•—