Guía de ejercicios N° 6

Rectas y planos en el espacio

Ecuaciones vectorial y paramétrica de una recta en el espacio

Dado un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y un vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, la ecuación de la recta L que pasa por el punto P y tiene la dirección de $\vec{d}$ tiene la siguiente **ecuación vectorial**:

$$L: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \ \alpha(v_x, v_y, v_z)$$

donde α es un número real.

En lenguaje de columnas, esto puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Se obtienen las siguientes **ecuaciones paramétricas de la recta**:

$$x = x_1 + \alpha v_x$$
$$y = y_1 + \alpha v_y$$
$$z = z_1 + \alpha v_z$$

Despejando α e igualando, queda la siguiente **ecuación continua de la recta**:

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y} = \frac{z - z_1}{v_z}$$

En el plano, se trabaja igual pero sin la tercera coordenada. En tal caso, y de la última ecuación que sería:

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

puede despejarse la variable y, para obtener la **ecuación principal:**

$$y = mx + n$$

o llevar todo a la forma **general**:

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuaciones vectorial y paramétrica de un plano en el espacio

La ecuación vectorial de un plano en el espacio, se escribe como la de una recta, pero en lugar de un vector generador tiene dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$:

$$L: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \ \alpha\big(v_x, v_y, v_z\big) + \beta(u_x, u_y, u_z)$$

donde α y β son números reales.

En lenguaje de columnas, esto puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Trabajando en cada coordenada, se obtienen las siguientes **ecuaciones paramétricas de la recta**:

$$x = x_1 + \alpha v_x + \beta u_x$$
$$y = y_1 + \alpha v_y + \beta u_y$$
$$z = z_1 + \alpha v_z + \beta u_z$$

Eliminando α y β, se llega a la **ecuación general del plano**:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

1. ¿Pasa por el punto (-3, -15, -42) la recta $(x, y, z) = (-2, -10, -28) + \alpha(1,5,14)$? ¿por el (0, 0, 0)? ¿por el (2, 2, 1)?

2. (a) ¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta?

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-8}{-1}$$

(b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto sobre la recta con abscisa $x = 0$?

3. Si se conocen las ecuaciones vectoriales de dos rectas en el espacio, ¿cómo es posible determinar si son paralelas?

4. Si se conocen las ecuaciones vectoriales de dos planos en el espacio, ¿cómo es posible determinar si son paralelos?

5. ¿Cuál es la ecuación cartesiana del plano que contiene a los puntos $(2, 3, 4), (-2, 4, 8), (-1, -1, 1)$?

Respuesta: $\boldsymbol{-13x + 24y - 19z = -30}$

6. ¿Son coplanares las siguientes rectas? En caso afirmativo, encuentre la ecuación general del plano que las contiene:

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + s(1, 1, 1)$$
$$(x, y, z) = (2, 0, 2) + t(4, 2, -2)$$

7. ¿Cuál es la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto (3, 1, 2) y a la recta L: $(x, y, z) = (6, 0, 0) + t(-1, 1, 0)$?

Respuesta: $\boldsymbol{x + y + z = 6}$

8. Sean $A(3, -1, -2), B(1, 1, 1)$ y $C(0, 0, 1)$ tres puntos en el espacio. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones sobre estos puntos es (son) verdaderas?

I. Los tres puntos son colineales.

II. Una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A y B es

$$(x, y, z) = (3, -1, -2) + t(2, -2, -3).$$

III. La ecuación del plano que contiene a los tres puntos es:

$$-3x + 3y - 4z = -4.$$

Respuesta: II y III

9. ¿Cuál es una posible ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos $A(4,0,-1)$, $B(0,-1,1)$ y $C(3,2,0)$?

Respuesta: $\boldsymbol{(x,y,z) = (4,0,-1) + \lambda(-4,-1,2) + \mu(-1,2,1)}$

10. Se tienen dos rectas en el plano, de ecuaciones:

$$(x,y) = t(-3, a+1) + (1,b)$$
$$(x,y) = s\left(\frac{1}{2}, b-1\right) + (1,a)$$

¿Qué condición deben cumplir a y b para que sean perpendiculares?

11. ¿Cuál es la ecuación cartesiana asociada a la ecuación vectorial del plano dado?

$$(x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(4,2,1) + \mu(0,-3,-2)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Respuesta: $\boldsymbol{x - 8y + 12z - 33 = 0}$

12. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = (1,1,2)$ y $\vec{b} = (2,-1,4)$.

13. (a) Demostrar que el vector $\vec{n} = (A,B,C)$ es un **vector normal** al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

(b) Utilizando dicho resultado encontrar el ángulo que forma el vector $\vec{p} = (4,3,0)$ con el plano de ecuación $3x - 4y + 5z + 5 = 0$. ¿Qué concluyes?

(c) ¿Y el vector $\vec{q} = (2,2,1)$ con ese mismo plano?

14. Hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por el punto A(1, 1, 1) y tiene como vectores directores a $\vec{u} = (1,-1,1)$ y $\vec{p} = (2,3,-1)$.

Respuesta: la ecuación general es $\boldsymbol{-2x + 3y + 5z - 6 = 0}$

15. Pruebe que la recta

$$(x,y,z) = \lambda(-1,1,1) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

y el plano

$$2x + 3y - z + 1 = 0$$

no se intersectan. ¿Alcanza con que sean paralelos?

16. Hallar k para que el plano $2x - y + z + 6 = 0$ sea paralelo al vector $\vec{v} = (2,k,-3)$.

17. Considere las rectas cuyas ecuaciones son:

$$(x,y,z) = (2,2,k) + \alpha < 1,-1,-1 >$$
$$(x,y,z) = (k,2,1) + \beta < 0,2,1 >$$

(a) Encuentre k para que las rectas sean coplanares (esto es, estén contenidas en un mismo plano)

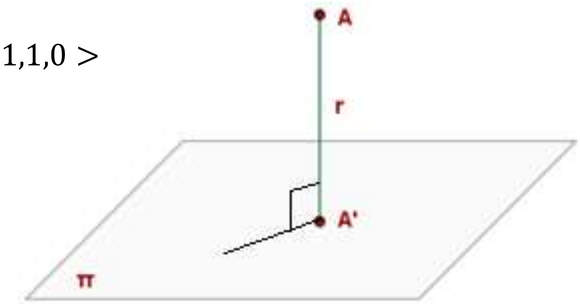
(b) Encuentre la ecuación general del plano que las contiene.
(c) Encuentre las coordenadas del punto de intersección de ambas.

Respuestas: $\boldsymbol{k = 0;\ x - y + 2z = 0; (0, 1 - 1)}$

18. Dado el punto $A(2,1,3)$ y el plano de ecuación

$(x, y, z) = (0,1,2) + \alpha < -1, -1,2 > + \beta < 1,1,0 >$

encuentre el punto A',
(proyección ortogonal de A
sobre el plano dado).



Respuesta: $\boldsymbol{A(3, 0, 4)}$

19. Encuentre el o los puntos P pertenecientes a la recta contenida en $\boldsymbol{R^2}$

$$r: (x, y) = (-2, -11) + \mu < 3, 4 >$$

cuya distancia al punto A(0,0) cumpla

$$d(P, A) = 5$$

¿Cuántos puntos encontró?

Respuesta: $\boldsymbol{\mu = 2}$**, un punto solamente:** $\boldsymbol{P(4, -3)}$

20. Hallar el ángulo α formado por las rectas del espacio cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} (x, y, z) = (0,0,-5) + \lambda < 6,-8,0 > \\ (x, y, z) = (1,-4,0) + \beta < 3,-4,5 > \end{cases}$$

Respuesta: $\boldsymbol{\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}}$