Ya que el movimiento se realiza en un plano invariante, escogemos sin pérdida de generalidad $\theta = \pi/2$.

Luego,

$$P_\phi = r^2 \dot{\phi} = L : \text{cte}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}}$$

Por normalización,

$$\mathcal{L} = \begin{cases} 0 & \text{para fotones} \\ -1/2 & \text{para bariones. (partículas masivas)} \end{cases}$$

$$\overset{\text{III}}{-m/2}$$

$$-m = -f(r)\cdot\left[\frac{E}{f(r)}\right]^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2\cdot\left[\frac{L}{r^2}\right]^2$$

$$-m = -\cancel{f}\cdot\frac{E^2}{f^{\cancel{2}}} + \frac{\dot{r}^2}{f} + \cancel{r^2}\frac{L^2}{r^{\cancel{4}\,2}}$$

$$= \frac{-E^2 + \dot{r}^2}{f} + \frac{L^2}{r^2} \quad / f$$

$$-m f(r) = -E^2 + \dot{r}^2 + f(r)\cdot\frac{L^2}{r^2}$$

d7

$$\dot{r}^2 = E^2 - \underbrace{f(r)\left[m + \frac{L^2}{r^2}\right]}_{V_{ef}(r)}$$

El potencial efectivo depende la clase de partícula y de la cte de movimiento L.

$$\boxed{V_{ef}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(m + \frac{L^2}{r^2}\right)}$$

Podemos reconocer 4 clases distintas del V_{ef}. Los vamos a clasificar de la siguiente manera:

- Geodésicas nulas ($m=0$)
  - → movimiento radial ($L=0$)
  - → movimiento angular ($L\neq 0$)

- Geodésicas tipo-tiempo ($m\neq 0$)
  - → $L=0$
  - → $L\neq 0$

Geodésicas nulas

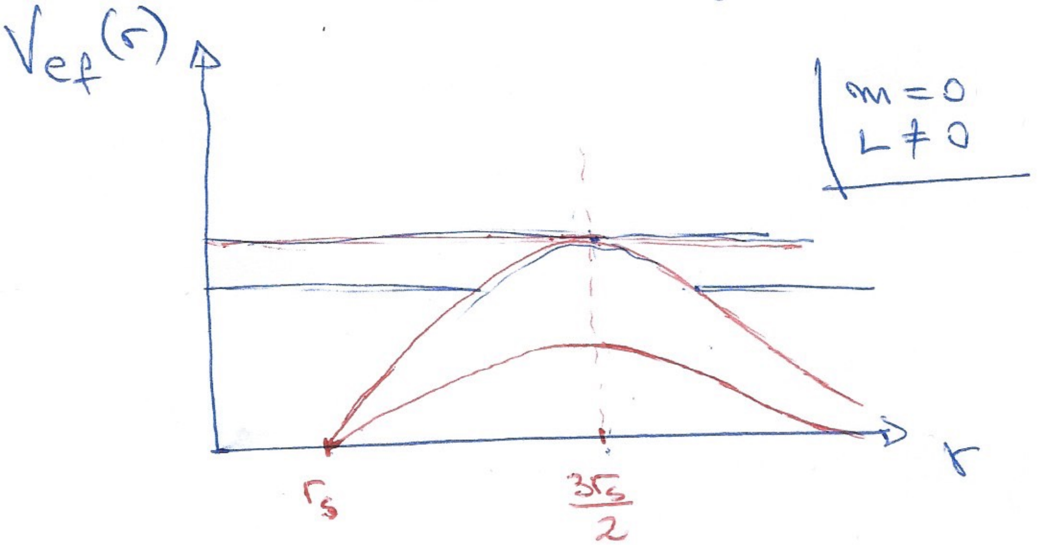
$$V_{ef}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}$$

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{r^2} - \frac{r_s L^2}{r^3}$$

$$V'_{ef}(r_c) = -\frac{2L^2}{r_c^3} + \frac{3 r_s L^2}{r_c^4} = 0 \quad \Big/ \frac{r_c^4}{L^2}$$

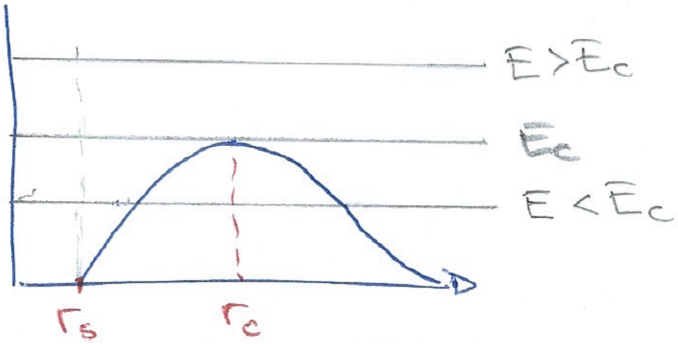
$$-2r_c + 3r_s = 0$$

$$\Rightarrow r_c = \frac{3r_s}{2} = 3M$$



↳ Es una esfera de fotones.

El potencial efectivo admite los siguientes movimientos:



El análisis cuantitativo se realiza por medio de las ecs. de mov.

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{ef}(r)$$

ó

$$\boxed{\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = \pm\sqrt{E^2 - V_{ef}}}$$

También $\dfrac{dr}{d\tau} = \dfrac{d\phi}{d\tau}\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{L}{r^2}\dfrac{dr}{d\phi}$

$$\boxed{\left(\frac{dr}{d\phi}\right) = \pm\frac{L}{r^2}\sqrt{E^2 - V_{ef}(r)}}$$

$$\boxed{\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{E}{f(r)}} \qquad \boxed{\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}}$$