

PROBLEMA GUÍA I | #16

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Obs. Se generalizó este producto, se cambió el índice k del 2º Levi-Civita por el índice s . (No considere el de la guía)

Ahora calcularemos los siguientes casos:

Caso: $l=i$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ims} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{is} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{js} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{ks} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{ii} (\delta_{jm} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{ji} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{ki}) + \delta_{is} (\delta_{ji} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ki})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ims} &= 3 (\delta_{jm} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{km}) - \left[\underbrace{\delta_{im} \delta_{ij} \delta_{ks}}_{\delta_{jm}} - \underbrace{\delta_{im} \delta_{js} \delta_{ki}}_{\delta_{km}} \right] \\ &\quad + \left[\underbrace{\delta_{is} \delta_{ji} \delta_{km}}_{\delta_{js}} - \underbrace{\delta_{is} \delta_{jm} \delta_{ki}}_{\delta_{ks}} \right] \\ &= 3 \cancel{\delta_{jm} \delta_{ks}} - 3 \cancel{\delta_{js} \delta_{km}} - [\cancel{\delta_{jm} \delta_{ks}} - \cancel{\delta_{js} \delta_{km}}] \\ &\quad + \cancel{\delta_{js} \delta_{km}} - \cancel{\delta_{ks} \delta_{jm}} = -\delta_{js} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{ks} \end{aligned}$$

∴

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ims} = \delta_{jm} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{km}$$

Caso: $\begin{cases} l=i \\ m=j \end{cases}$

Retomemos el resultado anterior:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{igs} &= \delta_{jj} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kj} \\ &= 3 \delta_{ks} - \delta_{ks} \\ &= 2 \delta_{ks} // \end{aligned}$$

Caso: $\begin{cases} l=i \\ m=j \\ s=k \end{cases}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikl} &= 3 \delta_{kk} - \delta_{kk} \\ &= 3 \cdot 3 - 3 = 6 // \end{aligned}$$