Yanina López Bonilla

4^4

1. Bose - Einstein

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + n\Delta \qquad n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad ; \ \Delta = cte.$$

$$dN = \langle n_\varepsilon \rangle g(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon\beta} - 1}$$

$$dp = \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon - n\Delta)^{-1/2}}{(2m)^{1/2}} d\varepsilon$$

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} p^2 dp \quad ; \qquad \frac{\varepsilon - n\Delta}{2m} = p^2$$

$$p = \left(\frac{\varepsilon - n\Delta}{2m}\right)^{1/2}$$

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi V}{h^3} \frac{(\varepsilon - n\Delta)}{2m} \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon - n\Delta)^{-1/2}}{(2m)^{1/2}} d\varepsilon$$

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi V}{2h^3} \frac{(\varepsilon - n\Delta)^{1/2}}{(2m)^{3/2}} d\varepsilon$$

$$N - N_0 = \int_0^\infty \frac{\pi V}{h^3} \frac{(\varepsilon - n\Delta)^{1/2}}{(2m)^{3/2}} \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon\beta} - 1} d\varepsilon$$

$$N - N_0 = \frac{\pi V}{h^3 (2m)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon - n\Delta)^{1/2}}{z^{-1} e^{\varepsilon\beta} - 1} d\varepsilon$$

$$x = \varepsilon\beta \rightarrow \varepsilon = \frac{x}{\beta} \rightarrow \frac{\left(\frac{x}{\beta} - n\Delta\right)^{1/2}}{z^{-1} e^{x} - 1} \frac{dx}{\beta}$$

$$d\varepsilon = \frac{dx}{\beta}$$

$$\frac{N - N_0}{V} = \frac{\pi}{h^3} \frac{1}{(2m)^{3/2}} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{(x/\beta - n\Delta)^{1/2}}{z^{-1} e^{x} - 1} dx$$

Para $\Delta \gg kT$

$$\frac{x}{\beta} - n\Delta = xkT - n\Delta \rightarrow \text{este término sobrevive}$$

$$\frac{N-N_0}{V} = \frac{\pi}{h^3}\frac{kT}{(2m)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{-n\Delta}{z^{-1}e^x-1}\,dx \quad 1$$

En este punto, $-n\Delta$ debe ser por lo menos función de x para aplicar de alguna forma

$$\Gamma(n)g_n(z) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x-1}\,dx$$

así despejo T de la ec. 1 y para T crítico $z \to 1$.

0,6

2.

a. 2 dimensional:

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{h^2} 2m\varepsilon$$

$$dN = \langle n_\varepsilon \rangle g(\varepsilon) d\varepsilon \quad ; \quad \langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon\beta} + 1}$$

$$N = \frac{2\pi V}{h^2} 2m \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon\beta} + 1} d\varepsilon$$

$$x = \varepsilon\beta \qquad \frac{dx}{\beta} = d\varepsilon$$

$$\frac{N}{V} = \frac{2\pi}{h^2} \frac{2m}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{x}{z^{-1} e^x + 1} dx$$

usando $\Gamma(\nu) f_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu - 1}}{z^{-1} e^x + 1} dx$

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi m}{h^2 \beta^2} \Gamma(2) f_2(z)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi m (kT)^2}{h^2} \Gamma(2) f_2(z)$$

$$T^2 = \frac{N h^2}{V \Gamma(2) f_2(z) 4\pi m k^2}$$

$$T = \left(\frac{N h}{V \Gamma(2) f_2(z) 4\pi m k^2} \right)^{1/2} \Big/ \cdot \frac{1}{\varepsilon_F}$$

$$\frac{T}{\varepsilon_F} = \frac{\dfrac{(Nh)^{1/2}}{(V\Gamma(2) f_2(z) 4\pi m)^{1/2} k}}{\left(\dfrac{3N}{4\pi g V}\right)^{2/3} \dfrac{h^2}{2m}} = \frac{(4\pi V)^{1/6}}{N^{1/3} h^{3/2} k} \left(\frac{g}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{\Gamma(2) f_2(z)}\right)^{1/2} \cdot 2$$

$$\varepsilon_F = \frac{T}{2}\left(\frac{\Gamma(2) f_2(3)}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{g}\right)^{2/3}\frac{N^{1/2} h^{3/2} k}{(4\pi V)^{1/6}}$$

densidad $\cdot$ $\frac{N}{V}$

$$\boxed{\varepsilon_F \cdot \frac{T}{2}\left(\frac{\Gamma(2) f_2(3)}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{g}\right)^{2/3}\frac{n^{1/6} h^{3/2} k}{(4\pi)^{1/6}} N^3}$$

0,3

b. $U = TS - PV + \mu N$

$$\frac{U - TS + PV}{N} = \mu$$

$$U = \frac{\varepsilon}{N} \longrightarrow \frac{\frac{\varepsilon_F}{N} - TS + PV}{N} = \mu$$

$$\boxed{\mu = \frac{T}{2}\left(\frac{\Gamma(2) f_2(3)}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{g}\right)^{2/3}\frac{n^{1/6} h^{3/2} k N}{(4\pi)^{1/6}} - \frac{TS}{N} + \frac{PV}{N}}$$

0,1

c. $C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V$

$$U = kT^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{PV}{kT}\right)\right\}_{z,N}$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{g\, f_{5/2}(z)}{\lambda^3} \quad ; \quad g=2$$

$$P = \frac{2 f_{5/2}(z)}{\lambda^3} kT$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{2 f_{5/2}(z)}{\lambda^3}\frac{\cancel{kT}}{\cancel{kT}}\right)\right\}_{z,N} = \frac{2}{\lambda^3}\frac{\partial}{\partial T}\left[f_{5/2}(z)\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda^3}\frac{\partial f_{5/2}(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial T}$$

rel. de recurrencia $\quad z\frac{\partial f_\nu(z)}{\partial z} = f_{\nu-1}(z)$

$$= \frac{2}{\lambda^3 z} f_{3/2}(z) \left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_V$$

$$\frac{N}{V} = \frac{g\, f_{3/2}(z)}{\lambda^3} \quad ; \quad g=2 \qquad \text{derivo en } \left.\frac{\partial}{\partial T}\right|_V$$

$$V = \frac{N\lambda^3}{2 f_{3/2}(z)} \qquad \lambda = \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \qquad -\frac{3}{2}-1$$

$$V = a T^{-3/2}\left[f_{3/2}(z)\right]^{-1} \Big/ \left.\frac{\partial}{\partial T}\right|_V \qquad a = \frac{N}{2}\frac{h^3}{(2\pi m k)^{3/2}}$$

$$0 = -\frac{3}{2} a T^{-5/2}\left[f_{3/2}(z)\right]^{-1} - a T^{-3/2}\left[\frac{\partial f_{3/2}(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial T}\right]^{-1}$$

$$-\frac{3}{2} a T^{-5/2} \left[f_{3/2}(z) \right]^{-1} = -a T^{-3/2} \left| \frac{f_{1/2}(z)}{z} \right|^{-1} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_V^{-1}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_V = \frac{-\alpha T^{-3/2}}{-\frac{3}{2}\alpha T^{-5/2} \left[f_{3/2}(z) \right]^{-1}} \left| \frac{f_{1/2}(z)}{z} \right|^{-1}$$

$$\frac{1}{z} \left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_V = \frac{2}{3T} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)}$$

Por lo tanto

$$U = kT^2 \frac{2}{z\lambda^3} f_{3/2}(z) \cdot \frac{2}{3T} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)}$$

$$U = \frac{kT\,4}{z\lambda^3} f_{1/2}(z) \qquad b = \frac{k(2\pi m k)^{3/2}\,4}{z}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{5}{2} b T^{3/2} f_{1/2}(z) + b T^{5/2} \frac{\partial f_{1/2}}{\partial z} \left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_V$$

$$C_V = \frac{5}{2} b T^{3/2} f_{1/2}(z) + b T^{5/2} \frac{f_{-1/2}(z)}{z} \frac{2}{3T} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)}$$

A $T \to 0 \longrightarrow z \gg 1$

$0 \leq z < \infty$

se puede resolver con valores asintóticos de la expresión d Sommerfeld-Lemma, pero ya no se como seguir :(

0,3

1. En teoría cuántica, son las funciones de onda la que describen al sistema, y al hacer uso del operador permutacion se obtienen 2 tipos de funciones de onda: simétricas y antisimétricas. Para N partículas indistinguibles, es imposible contar microestados sin considerar esta naturaleza de la función de onda, por ello se divide la mecánica estadística cuántica en la estadística de Bose-Einstein para estudiar sistemas con funciones de onda simétricas (ej. spin entero) y en estadística de Fermi-Dirac para ~~sist.~~ con f. de onda antimétrica (ej. spin semi-entero).

0,95

2. La capacidad calorífica es la capacidad que tiene el sistema para aumentar su temperatura. Al aumentar T, aumentan los niveles de energía de ocupación. A $T \to 0$, los Bosones están todos en el fundamental y los fermiones tienen todos los niveles llenos hasta ε_F. La descripción clásica falla en considerar que se requiere energía extra para aumentar la temperatura y "sacar" a las partículas de su nivel límite a T bajas (por eso el aumento drástico de T hasta llegar al valor clásico y mantenerse). Un modelo que arregle esto debe considerar la energía, la frecuencia en sólidos y la temperatura, todo en el límite clásico-cuántico.

I.1 - 0,6
I.2 - 0,7
II.1 - 0,95
II.2 - 0,3

2,55/4,5 $\Rightarrow$ $\boxed{4,4}$