Solución analítica de la función de Fermi-Dirac generalizada y ecuación de estado de un gas ideal de fermiones parcialmente degenerado y semirrelativista

Sergio Bravo[a,1], Iván González[b,2]

[a]Departamento de Física, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.

[b]Instituto de Física y Astronomía, Universidad de Valparaíso, Chile.

Resumen

Se presenta la primera solución analítica de la función de Fermi-Dirac generalizada, la cual se entrega en forma de una serie infinita de polilogaritmos. Para su solución hemos utilizado una técnica nueva de integración denominada Método de Brackets y hemos aplicado este resultado al estudio analítico de modelos físicos relacionados con la termodinámica de un gas ideal de fermiones parcialmente degenerado y semirrelativista (PD-SR, Partially degenerate and Semi-relativistic).

I. Introducción

La función Fermi-Dirac generalizada [2] está definida en forma integral por la siguiente fórmula:

$$F_{k,m}(\eta,\beta)=\int_0^\infty \frac{x^k\left(1+\frac{1}{2}\beta x\right)^m}{e^{x-\eta}+1}dx, \qquad (1)$$

Donde los parámetros $\{\eta,\beta\}\in\mathbb{R}$ y los índices $\{k,m\}$ son cantidades semienteras. Esta es una extensión de la función de Fermi-Dirac conocida, la cual está caracterizada por $m=\frac{1}{2}$ [1]. El objetivo de este trabajo es obtener una solución libre de integrales para esta función, en particular, hallamos una expresión que corresponde a una suma infinita de polilogaritmos y que además es muy útil para estudiar las diferentes propiedades matemáticas de esta función. Aplicaremos este resultado al estudio termodinámico de fenómenos astrofísicos en donde la solución analítica de dicha función se vuelve imprescindible, en particular, nuestro interés se centra en hallar una expresión exacta para la ecuación de estado de un gas ideal de fermiones en un medio estelar bajo un régimen semirrelativista y parcialmente degenerado. Una de las ventajas más importantes en este estudio es que dicha solución permite realizar aproximaciones analíticas a cualquier orden deseado dado cierto régimen de velocidades.

En el cálculo de esta integral hemos utilizado una técnica de integración de carácter heurístico, novedosa, denominada **Método de Brackets** (**MoB**, por su sigla en inglés), la cual, mediante un procedimiento sistemático, permite reemplazar la integral por una serie equivalente denominada **serie de brackets**. La solución final se obtiene a partir de las reglas de MoB aplicadas a esta serie en particular. Respecto a esta técnica, su notación, sus reglas y aplicaciones, pueden ser estudiadas en Refs. [3],[4].

II. Desarrrollo

El proceso de cálculo de la integral en Ec. (1) se puede ilustrar a grandes rasgos de la siguiente forma. En primer lugar transformamos la integral usando las reglas básicas de MoB y hallamos la serie de brackets equivalente:

$$\begin{aligned}F_{k,m}(\eta,\beta) &= \sum_{n_1,n_2}\phi_{1,2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n_2}\frac{\langle -m+n_1+n_2\rangle}{\Gamma(-m)}\int\limits_0^\infty\frac{x^{k+n_2}}{\exp(x-\eta)+1}dx\\ &= \sum_{n_1,\ldots,n_4}\phi_{1,2,3,4}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n_2} n_3^{n_5}e^{-\eta n_3}\\ &\times\frac{\langle -m+n_1+n_2\rangle\langle 1+n_3+n_4\rangle\langle k+1+n_2+n_5\rangle}{\Gamma(-m)},\end{aligned} \qquad (2)$$

luego utilizamos los brackets para generar varias soluciones y considerando la compatibilidad de estas con las restricciones dadas en la definición de la Ec. (1), nos permite determinar la correcta solución a este problema:

$$\begin{aligned}&F_{k,m}(\eta,\beta)=\frac{1}{\Gamma(-m)}\\ &\times\sum_{n_1\geq 0}^{\infty}\sum_{n_2\geq 0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1+n_1)\Gamma(-m+n_1)}{\Gamma(n_1+1)(1+n_2)^{k+1+n_1}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n_1}[-e^{\eta}]^{n_{2+1}}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Una pequeña manipulación algebraica nos permite reescribir la ecuación anterior tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}F_{k,m}(\eta,\beta) &= \sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1+n_1)\Gamma(-m+n_1)}{\Gamma(-m)\Gamma(n_1+1)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n_1}\\ &\times\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{[-e^{\eta}]^{n_{2+1}}}{(1+n_2)^{k+1+n_1}}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Es posible reconocer que la suma interna corresponde a la definición de la función trascendental Polilogaritmo, esto es:

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{[-e^{\eta}]^{n_{2+1}}}{(1+n_2)^{k+1+n_1}}=\mathbf{Li}_{k+1+n_1}(-e^{\eta}). \qquad (5)$$

Finalmente se ha determinado la solución de la función de Fermi-Dirac generalizada:

$$\boxed{F_{k,m}(\eta,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1+n)\Gamma(-m+n)}{\Gamma(-m)n!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n_1}\mathbf{Li}_{k+1+n_1}(-e^{\eta})} \qquad (6)$$

Esta solución es válida para η arbitrario y para el parámetro $\beta<2$.

III. Aplicaciones

La función de Fermi-Dirac generalizada aparece formalmente dentro de la rama de la mecánica estadística, siendo su campo de aplicación más extendido la astrofísica estelar [1], donde se utiliza ampliamente para establecer modelos de interiores de estrellas, que posean condiciones de alta degenerancia y que tomen en cuenta los efectos relativistas del gas ideal de fermiones componente, como por ejemplo en modelos solares [5], modelos de estrellas de neutrones [6], entre otros. Más específicamente, la función de Fermi-Dirac generalizada es relevante debido a que todas las cantidades termodinámicas que caracterizan el gas se pueden formular en función de ella, dando una estructura compacta y unificada a todos los parámetros físicos del modelo que se estudia. En cuanto a lo anterior, podemos ejemplificar expresando tres de las cantidades más importantes en el estudio termodinámico del gas parcialmente degenerado y semirrelativista (PD-SR), como son la presión P, la densidad de número de partículas n y la energía interna E, las cuales se formulan en la literatura de la siguiente manera [2],[7]:

$$P=\frac{16\sqrt{2}\pi M^4c^5}{3h^3}\beta^{\frac{5}{2}}F_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\eta,\beta), \qquad (7)$$

$$n=\frac{8\sqrt{2}\pi M^3c^3}{h^3}\beta^{\frac{3}{2}}\left[F_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\eta,\beta)+\beta F_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(\eta,\beta)\right], \qquad (8)$$

$$E=\frac{8\sqrt{2}\pi M^4c^5}{h^3}\beta^{\frac{5}{2}}\left[F_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(\eta,\beta)+\beta F_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}(\eta,\beta)\right]. \qquad (9)$$

En este caso los parámetros η y β corresponden a las siguientes cantidades físicas:

$$\eta=\frac{\mu}{k_BT},\ \beta=\frac{v}{c}. \qquad (10)$$

Aquí se ve claramente que el comportamiento del gas PD-SR , depende de manera explícita de la forma que tenga cada variable termodinámica en los parámetros fisicos η y β, los cuales caracterizan el nivel de degenerancia y el régimen relativista del gas respectivamente [1].

En este trabajo el uso de la generalización de la función de Fermi-Dirac (1) [2], nos permitió hallar una nueva fórmula para la ecuación de estado de un gas PD-SR:

$$\frac{P}{nk_BT}=\frac{2}{3}\frac{F_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\eta,\beta)}{\left[F_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\eta,\beta)+\beta F_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(\eta,\beta)\right]}, \qquad (11)$$

la cual es posible simplificar si hacemos uso de la relaciones de recurrencia para $F_{k,m}(\eta,\beta)$ [2]. Lo anterior permite hallar una expresión más compacta para la ecuación de estado:

$$\frac{nk_BT}{P}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\log F_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\eta,\beta)\right]. \qquad (12)$$

Luego, conociendo la solución explícita de $F_{k,m}(\eta,\beta)$, dada en la Ec. (6), la ecuación de estado para un gas ideal de fermiones PD-SR queda determinada explícitamente tal como sigue:

$$\boxed{\frac{P}{nk_BT}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)_j\left(\frac{-3}{2}\right)_j}{j!}\left(\frac{-\beta}{2}\right)^j\mathbf{Li}_{\frac{5}{2}+j}(-e^{\eta})}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)_j\left(\frac{-3}{2}\right)_j}{j!}\left(\frac{-\beta}{2}\right)^j\mathbf{Li}_{\frac{3}{2}+j}(-e^{\eta})}} \qquad (13)$$

En donde se ha simplificado la notación introduciendo los símbolos de Pochhammer : $(a)_j=\frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}$. Esta solución es consistente con los resultados no relativistas conocidos en la literatura y es muy útil para realizar aproximaciones numéricas o analíticas al orden de precisión que se desee y en función del régimen de velocidades permitido por la solución. Los resultados numéricos concuerdan de buena manera con los encontrados por otros métodos utilizados en la literatura, por ejemplo en [8].

IV. Conclusiones

En este trabajo hemos hallado la solución de la integral de Fermi-Dirac generalizada a través de una novedosa técnica de integración (MoB), adicionalmente se han demostrado varias ecuaciones de recurrencia mediante la solución hallada, que evidentemente coinciden con las obtenidas a través de la representación integral de la función de Fermi-Dirac generalizada. Muchas de las cantidades termodinámicas relevantes pueden ser descritas desde ahora como expresiones libres de integrales. Respecto al alcance de la solución, ella está condicionada al radio de convergencia de la serie en el parámetro β, el cual es 2, límite suficiente para aplicar esta solución en la fenomenología de diversas áreas asociadas al estudio de estrellas. Por otro lado, es posible demostrar rápidamente a partir de nuestra solución la situación no relativista ($\beta\ll 1$) y sus correcciones para el caso de grado de degenerancia η arbitrario, esto es:

$$\begin{aligned}F_{k,m}(\eta,\beta) &\approx -k!\,\mathbf{Li}_{k+1}(-e^{\eta})\\ &-\frac{m(k+1)!}{2}\beta\,\mathbf{Li}_{k+2}(-e^{\eta})+O\left(\beta^2\right),\end{aligned} \qquad (14)$$

expresión que a orden cero coincide con la solución no relativista ya conocida en la literatura. La gran ventaja de la solución hallada, es que, más allá de tener una estructura simple respecto a las dependencias en β y η, ya no son necesarias aproximaciones numéricas para la función y sus derivadas, lo cual nos permite, desde el punto de vista analítico, estudiar el gas ideal de fermiones PD-SR y sus propiedades de forma simple y exacta.

Referencias

- [1] J.P.Cox, R.T.Giuli, *Principles of Stellar Structure: Applications to stars, Vol 2*, Gordon and Breach, 1968.
- [2] T.W.Edwards, Astrophysics and Space Science, Vol 7, Issue1, 1970.
- [3] I. Gonzalez and V. Moll, *Definite integrals by method of brackets. Part 1*, Advances in Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 1, 50-73, 2010. (arXiv:0812.3356).
- [4] I. Gonzalez, V. Moll and A. Straub, *The method of brackets. Part 2: examples and applications*, Contemporary Mathematics, Gems in Experimental Mathematics, Volume 517, 2010, Pages 157-171. (arXiv:1004.2062).
- [5] Z.Gong, W.Dappen, L.Zejda. *MHD equation of state with relativistic corrections.* The astrophysical Journal, 546, 2001.
- [6] W.Stolzmann, T.Bloecker. *Thermodinamical properties of stellar matter I: Equation of state for stellar interiors.* Astronomy and Astrophysics, 314, 1996.
- [7] O.Straneiro. *A tabulation of thermodinamical properties of fully ionized matter in stellar interiors.* Astronomy and Astrophysics Supplement Series,76, 1988.
- [8] B.Pichon. *Numerical calculation of the generalized Fermi-Dirac integrals.* Computer Physics Communications, Vol 55, Issue 2, 1989.

1 *bravo.castillo.sergio@gmail.com*

2 *ivan.gonzalez@uv.cl*