Clase 28 201221 1

Formalismo de Hamilton para rayos de luz en un plasma sobre el espacio-tiempo de Kerr.

Para fotones moviéndose en un plasma, el Hamiltoniano es

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}(x)\, p_\mu p_\nu + \hbar^2 \omega_e^2(x) \right]$$

$\hookrightarrow \hbar = 1$

$c \neq 1 \wedge G \neq 1$

En particular

$$\omega_e(x) = \frac{4\pi e^2}{m_e} N_e(x)$$

Kerr:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 +$$

$$\sin\theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2\theta}{\rho^2} \right) d\phi^2 - \frac{4mra\sin^2\theta\, d\phi\, dt}{\rho^2}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr \quad ; \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad ;; \quad a = \frac{J}{Mc} \rightarrow \text{asumimos que } a^2 < m^2$$

Nos restringimos a la ergoregión

$$r > m + \sqrt{m^2 - a^2}$$

De esta manera, el Hamiltoniano es

el 28 ②

$$H = \frac{1}{2\rho^2}\left[-\frac{1}{\Delta}\left(a p_\phi + (r^2+a^2)\frac{p_t}{c}\right)^2 + \left(\frac{p_\phi}{\sin\theta} + a\sin\theta \frac{p_t}{c}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + p_\theta^2 + \Delta p_r^2 + \rho^2 \omega_e^2 \right]$$

Asumimos que $\omega_e = \omega_e(r,\theta)$. De esta manera vemos que

$$H = H(r, \theta, p_t, p_r, p_\theta, p_\phi)$$

cantidades conservadas.

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad ;$$

$$p_t = c\,\omega_0$$

$$\omega(x) = \frac{p_t}{\sqrt{-g_{tt}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{2mr}{\rho^2}}}$$

frecuencia observada en infinito.

$$* \quad 1 - \frac{2mr}{\rho^2} > 0 \quad \longrightarrow \quad \rho^2 > 2mr$$

$$\underline{r^2 + a^2\cos^2\theta > 2mr}$$

Válido para toda la ergoregión.

Investigamos las ecs. de movimiento vía las ecuaciones de Hamilton-Jacobi:

Para fotones

$$0 = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)$$

$$\therefore\ 0 = -\frac{1}{\Delta}\left(a\frac{\partial S}{\partial \phi} + (r^2+a^2)\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial S}{\partial \phi} + \frac{a\sin\theta}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \Delta\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \rho^2 \omega_e^2$$

Nos damos el ansatz

$$S(t,r,\theta,\phi) = c\omega_0 t + p_\phi \phi + S_r(r) + S_\theta(r)$$

$$0 = -\frac{1}{\Delta}\left(a p_\phi + (r^2+a^2)\omega_0\right)^2 + \left(\frac{p_\phi}{\sin\theta} + a\sin\theta\,\omega_0\right)^2 +$$

$$+ S_\theta'^2(\theta) + \Delta S_r'^2(r) + \omega_e^2 \cdot (r^2 + a^2\cos^2\theta)$$

Para que podamos separar variables escribamos

$$\omega_e^2 = \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{\rho^2}$$

con $S_\theta' = p_\theta \ \wedge \ S_r' = p_r$, tenemos

$$\frac{1}{\Delta}\left(a p_\phi + (r^2+a^2)\omega_0\right)^2 - \Delta p_r^2 - f_r = \left(\frac{p_\phi}{\sin\theta} + a\sin\theta\,\omega_0\right)^2 +$$

$$+ p_\theta^2 + f_\theta$$

Para que se cumpla la igualdad, cada lado debe ser igual a una constante, que llamaremos K:

$$\therefore \boxed{p_\theta^2 = K - \left(\frac{p_\phi}{\sin\theta} + a\sin\theta\,\omega_0\right)^2 - f_\theta}$$

$$\boxed{\Delta p_r^2 = -K + \frac{1}{\Delta}\left(a p_\phi + (r^2+a^2)\omega_0\right)^2 - f_r}$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu},$$

las cuales son

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = K - \left(\frac{p_\phi}{\sin\theta} + a\sin\theta\,\omega_0\right)^2 - f_\theta$$

$$\rho^4 \dot{r}^2 = -K\cdot\Delta + \left(a p_\phi + (r^2+a^2)\omega_0\right)^2 - f_r$$

$$\rho^2\dot{\phi} = \frac{-2mra\sin^2\theta\,\omega_0 + (\rho^2-2mr)p_\phi}{\Delta\cdot\sin^2\theta}$$

$$\rho^2\dot{t} = \frac{-\left((r^2+a^2)\rho^2 + 2mra^2\sin^2\theta\right)\omega_0 - 2mra\,p_\phi}{c\cdot\Delta}$$

Estas ecs. determinan completamente el movimiento de la luz sobre el plasma

En términos de índice de refracción

$$n^2(x,\omega(x)) = 1 - \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{\omega^2(x)\cdot\rho^2}$$

Para un plasma homogéneo

$\omega_e = \omega_c$: constante.

$$\omega_e^2 = \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}$$

$$\omega_e^2 \cdot r^2 + \omega_c^2 a^2 \cos^2\theta = f_r(r) + f_\theta(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f_r(r) &= \omega_e^2 r^2 \\ f_\theta(\theta) &= \omega_c^2 a^2 \cos^2\theta \end{aligned}}$$