Física Contemporánea

Dr. Víctor H. Cárdenas
Instituto de Física y Astronomía
Universidad de Valparaíso

Esta clase

- Difracción de Fraunhoffer
  - Por una rendija
  - Resolución
  - Doble rendija
  - Por N rendijas

3. Difracción

Difracción de Fraunhoffer

Por una rendija

Cada porción infinitesimal *dx*

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}(x) = E_0\,\mathrm{d}x\,\exp\left[\,i(\omega t - ks - \phi)\,\right],$$

El camino extra $x \sin\theta$

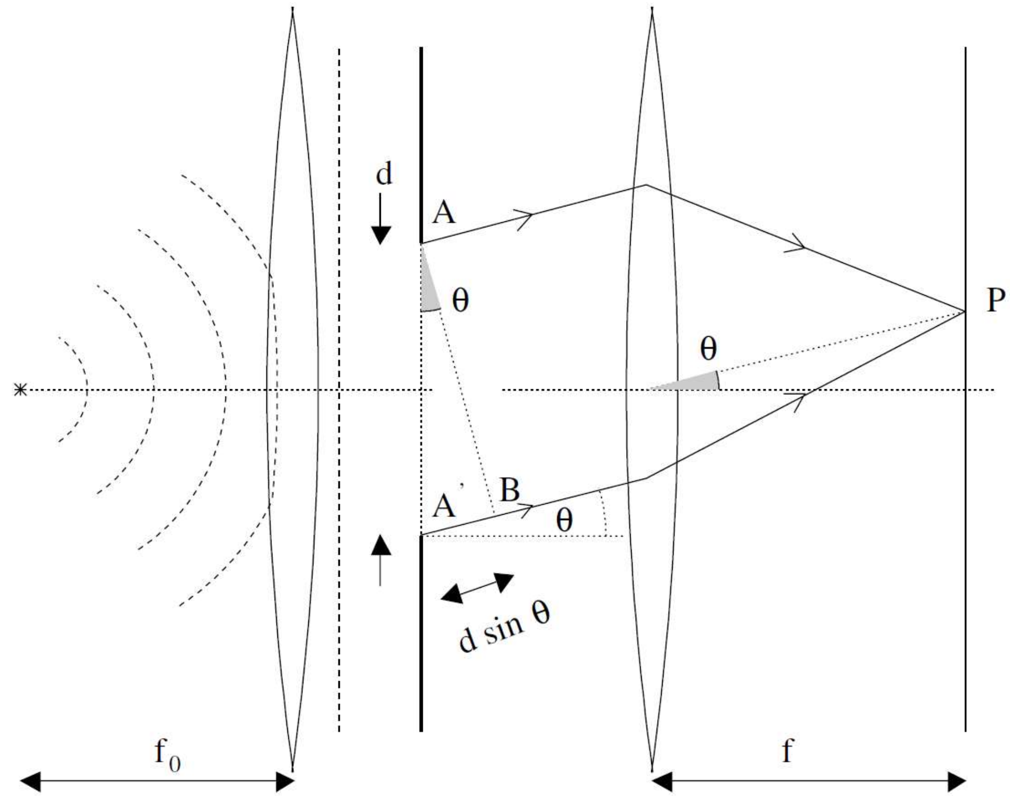
La intensidad en P

$$I(\theta) = E_{\mathrm{p}}^{*}(\theta) E_{\mathrm{p}}(\theta).$$

Los factores comunes

$\exp i(\omega t - ks)$ desaparecen, luego

$$\boxed{\mathrm{sinc}(x) = \sin x / x.}$$



$$\begin{aligned} E_{\mathrm{p}}(\theta) &= \int_0^d E_0 \exp\left(-ikx\sin\theta\right)\mathrm{d}x \\ &= E_0\left[1 - \exp\left(-ikd\sin\theta\right)\right]/(ik\sin\theta) \\ &= E_0\, d\,\mathrm{sinc}(kd\sin\theta/2) \end{aligned}$$

Difracción de Fraunhoffer

$$\boxed{\mathrm{sinc}(x) = \sin x/x.}$$

La intensidad

$$I(\theta) = (E_0 d)^2\, \mathrm{sinc}^2(kd \sin\theta/2).$$

El máximo central $I(0) = (E_0\, d)^2.$

Y los mínimos laterales en

$kd \sin\theta = 2n\pi,$ o bien $\boxed{d \sin\theta = n\lambda}$

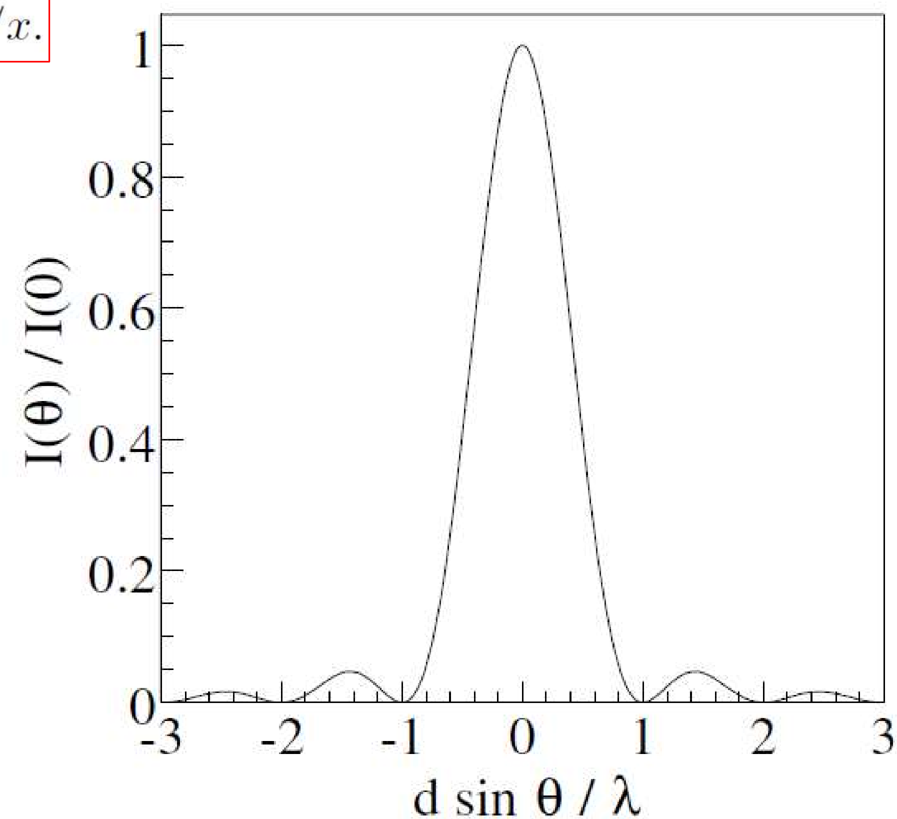
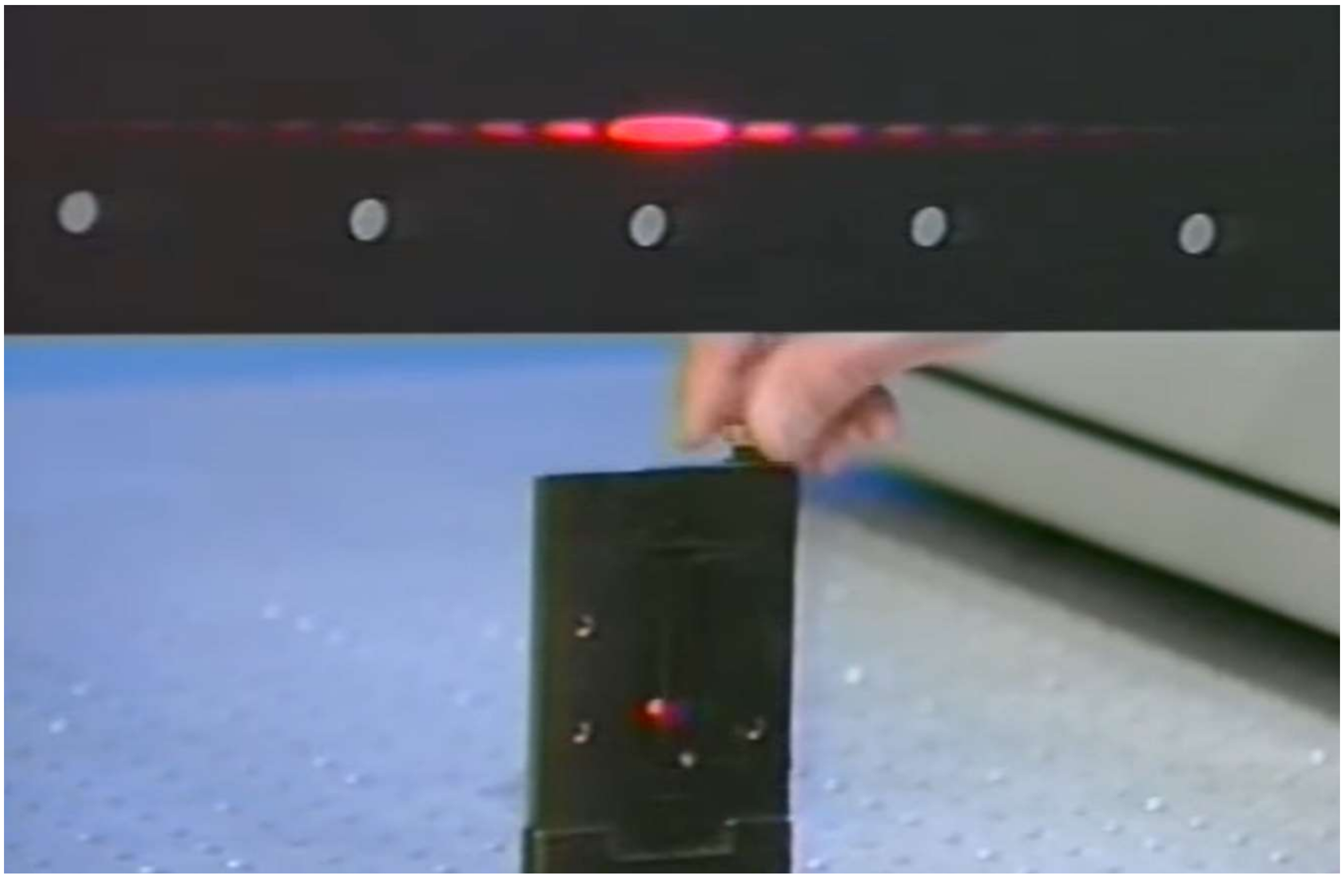


Grafico:

- El ancho de los máximos laterales son la mitad de anchos que el central
- Sus máximos son 0,047 y 0,017 de la intensidad central

Difracción de Fraunhoffer



Difracción de Fraunhoffer

Por apertura rectangular

Si la apertura tiene largo finito.

Si la apertura tiene área *dxdy*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

La contribución de cada elemento en P es

$$\begin{aligned} dE(\mathbf{k}) &= E_0 \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= E_0\left[\exp(-ik_x x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\exp(-ik_y y)\,\mathrm{d}y\right]. \end{aligned}$$

en la dirección

$$\mathbf{k} = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z$$

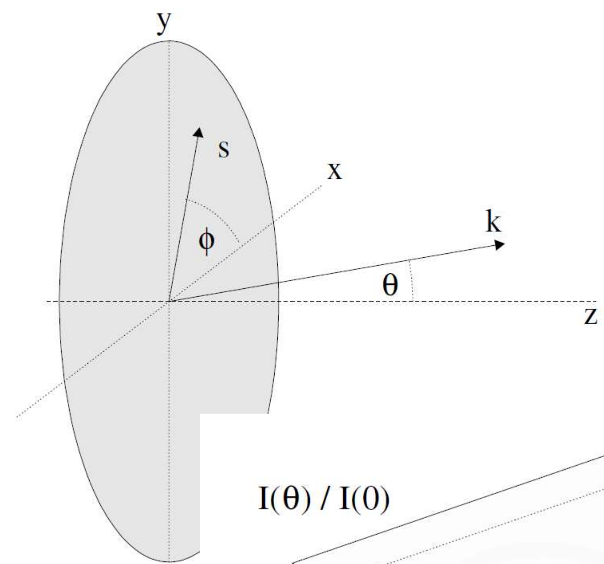
luego

$$\boxed{I(\mathbf{k}) = I(0)\mathrm{sinc}^2(k_x d_x/2)\mathrm{sinc}^2(k_y d_y/2),}$$

Por una apertura dos veces mas alta que ancha

Difracción de Fraunhoffer

<u>Por una apertura circular</u>



$$\mathbf{s} = s\cos\phi\,\mathbf{e}_x + s\sin\phi\,\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{k} = k\cos\theta\,\mathbf{e}_z + k\sin\theta\,\mathbf{e}_x,$$

luego

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{s} = ks\ \sin\theta\cos\phi,$$

Y la onda en P

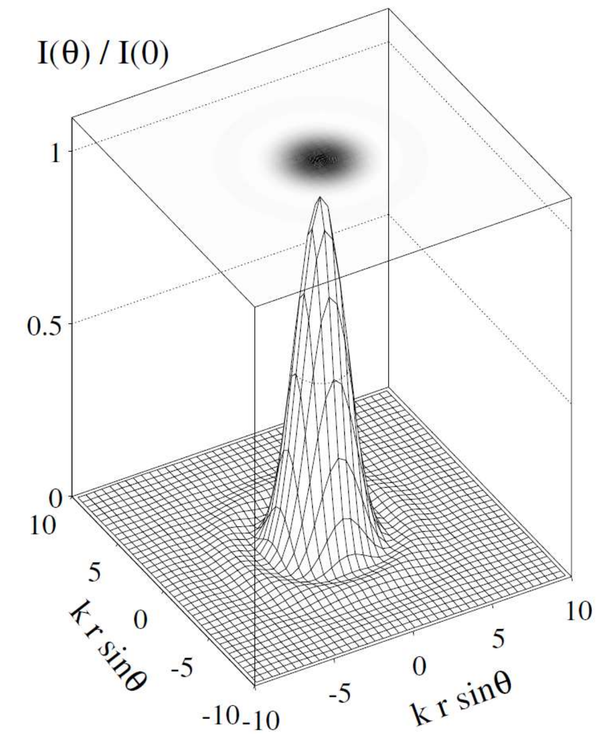
$$E = E_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} \exp\left(iks\sin\theta\cos\phi\right)s\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}s,$$

$$E = 2\pi E_0 \int_0^r J_0(ks\sin\theta)s\mathrm{d}s,$$

Integrando en *s:* $E = 2\pi r^2 E_0 J_1(kr\sin\theta)/(kr\sin\theta).$

Finalmente la intensidad en P

$$\boxed{I(\theta) = 4\pi^2 r^4 E_0^2[J_1(kr\sin\theta)/(kr\sin\theta)]^2.}$$



Difracción de Fraunhoffer

Por una apertura circular

Disco de Airy

En la parte central, la intensidad es $\pi^2 r^4 E_0^2,$

$$I(\theta) = I(0) \left[\frac{2J_1(kr\sin\theta)}{(kr\sin\theta)} \right]^2 .$$

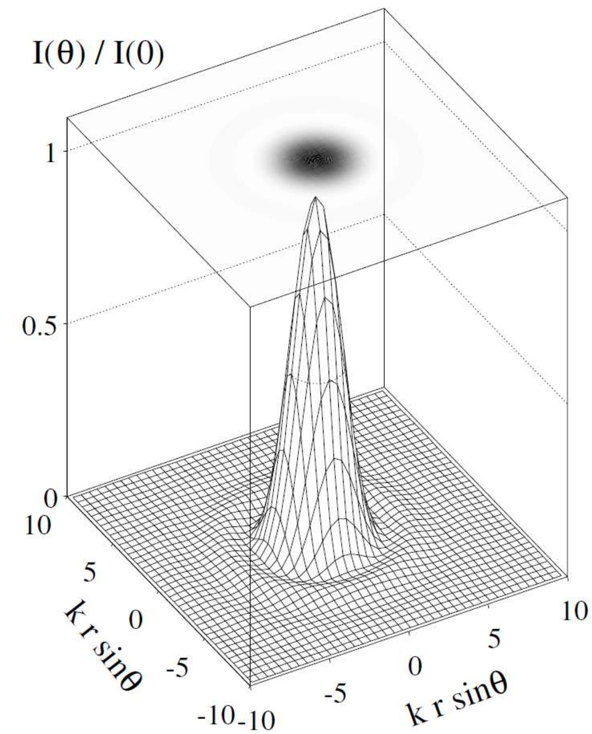
El 84% de la luz esta en el disco de Airy

Su radio angular es

$$\sin\theta = 0.61\lambda/r = 1.22\lambda/D,$$

donde *D* es el diametro del agujero.

Define (criterio Rayleigh) el limite de resolución.



Al usar un sistema óptico cuya entrada es D, dos objetos Puntuales se pueden resolver si su separación angular excede

$$\boxed{1.22\lambda/D}$$

Difracción de Fraunhoffer

<u>Difracción por múltiples rendijas</u>

N rendijas de ancho d separadas por a.

La diferencia de fase de la ondas en P es

$$\beta = ka\sin\theta.$$

La contribución de la m-ésima rendija es

$$E_{\mathrm{p}}(\theta)\exp\left[-i(m-1)ka\sin\theta\right],$$

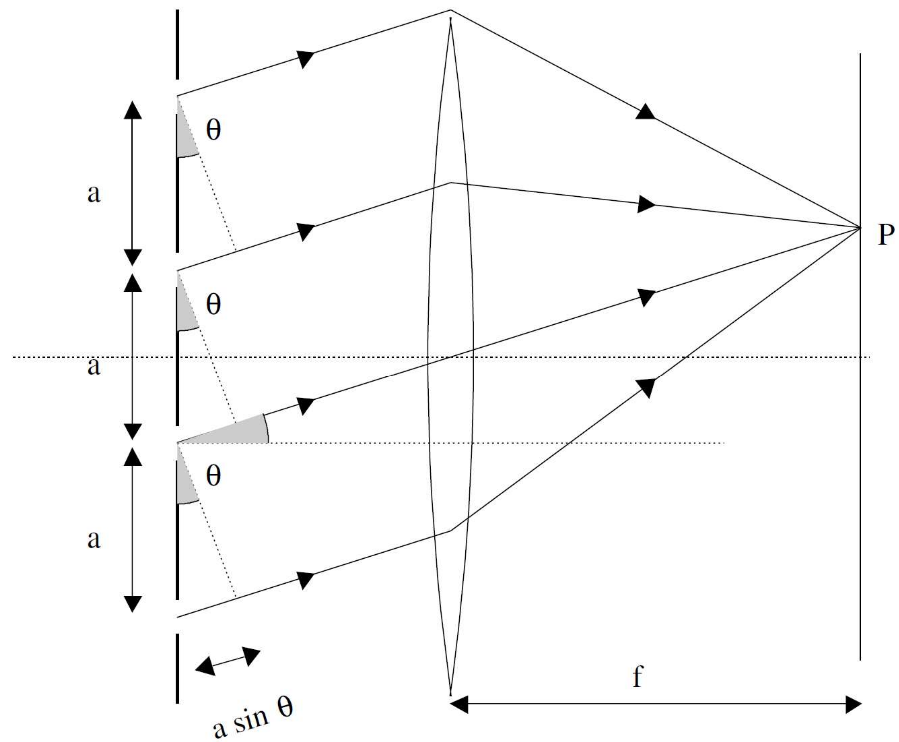
La intensidad debida a N rendijas

$$I_N(\theta) = (E_0 d)^2 \mathrm{sinc}^2(kd\sin\theta/2) X_N^* X_N,$$

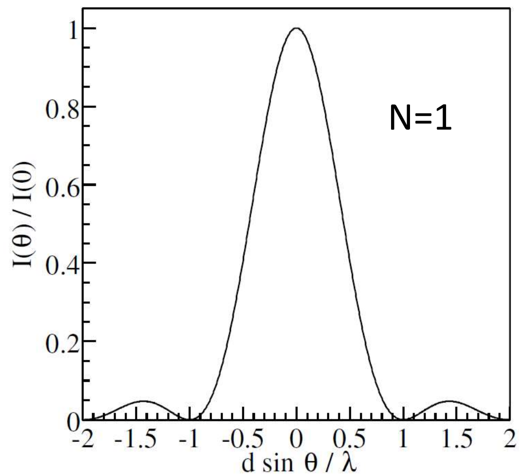
donde

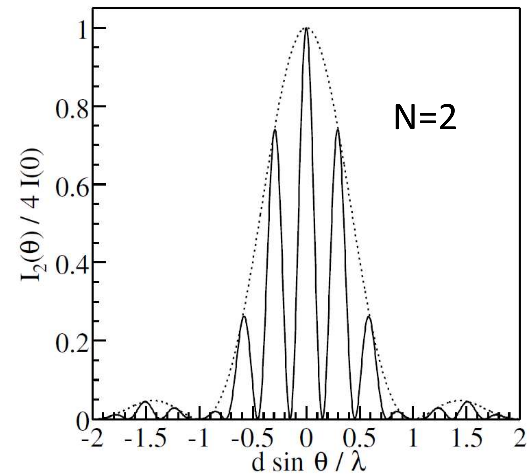
$$X_N = \sum_{m=1}^{N} \exp\left[-i(m-1)ka\sin\theta\right] = \frac{1-\exp(-iNka\sin\theta)}{1-\exp(-ika\sin\theta)}$$

$$= \exp\left[-i(N-1)ka\sin\theta/2\right]\left[\frac{\sin(Nka\sin\theta/2)}{\sin(ka\sin\theta/2)}\right],$$



Difracción de Fraunhoffer





Entonces

$$X_N^* X_N = \left[\frac{\sin\left(Nka\sin\theta/2\right)}{\sin\left(ka\sin\theta/2\right)} \right]^2$$

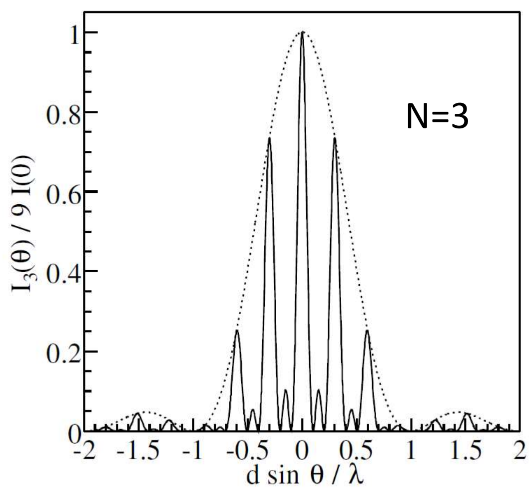
finalmente

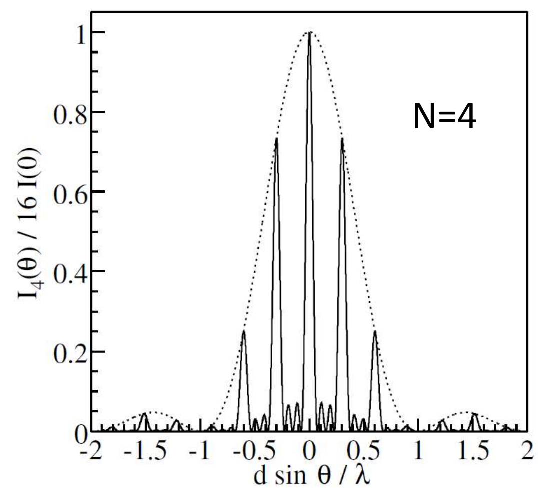
$$I_N(\theta) = (E_0 d)^2\,\mathrm{sinc}^2(kd\sin\theta/2)\,\left[\frac{\sin\left(Nka\sin\theta/2\right)}{\sin\left(ka\sin\theta/2\right)} \right]^2$$

O bien

$$I_N(\theta) = I(0)\,\mathrm{sinc}^2(\alpha/2)\left[\frac{\sin\left(N\beta/2\right)}{\sin\left(\beta/2\right)} \right]^2$$

donde $\alpha = kd\sin\theta; \quad \beta = ka\sin\theta,$



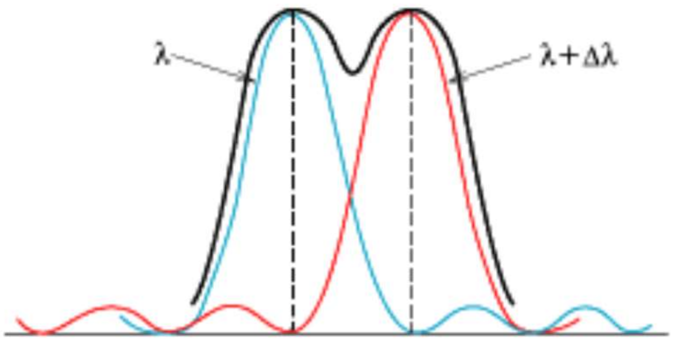


Difracción de Fraunhoffer

<u>Redes de difracción</u>

Para N muy grande, el máximo central es tan estrecho, que se pueden distinguir dos o mas longitudes de onda cercanas!!!

La potencia de resolución cromática es



$$\mathrm{CRP} = \lambda/\Delta\lambda,$$

En el caso del p-ésimo maximo $Np\lambda = Na\sin\theta,$

Y el adyacente $(Np+1)\lambda = Na\sin(\theta+\Delta\theta).$

Si este coincide con $Np(\lambda+\Delta\lambda) = Na\sin(\theta+\Delta\theta)$

entonces

$$Np\,\Delta\lambda - \lambda = 0,$$

$$\boxed{\lambda/\Delta\lambda = Np.}$$

Difracción de Fraunhoffer

Algunos experimentos:

https://www.youtube.com/watch?v=PgW7qaOZD0U

https://www.youtube.com/watch?v=rmg1XyOSAk0

https://www.youtube.com/watch?v=KlKduOOHukU

Y si tienen tiempo…como 1 hora, disfruten esta clase del MIT:

https://www.youtube.com/watch?v=sKO8n_-xtDc