Métodos Matemáticos para la Física I (LFIS 222)

Licenciatura en Física

Profesor: Graeme Candlish   Semestre II 2023

Tarea 3

---

1. Explique por qué la función $f(z) = 2z^2 - 3 - ze^z + e^{-z}$ es completa (entera).

   Solución: Una respuesta rápida es que esta función es una composición de funciones enteras: polinomios y exponenciales. También se puede demostrar el resultado derivando cada función componente y mostrando que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen y las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{C}$.

2. Muestre que $\text{Log}(i^3) \neq 3\text{Log}i$

   Solución: La rama principal del logaritmo es

   $$\text{Log}z = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi) \tag{1}$$

   Entonces, $i^3 = -i$:

   $$\text{Log}(i^3) = \text{Log}(-i) = \ln 1 + i(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{i\pi}{2} \tag{2}$$

   Pero

   $$3\text{Log}(i) = 3(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2})) = \frac{i3\pi}{2} \tag{3}$$

3. Muestre que una rama

   $$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi) \tag{4}$$

   de la función logarítmica se puede escribir como

   $$\log z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

   en coordenadas rectangulares. Usando el teorema de la sección 23 (condiciones suficientes para diferenciabilidad), muestre que la rama dada es analítica en su dominio de definición y que

   $$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z} \tag{6}$$

   allí.

Solución: El módulo de z está dado por $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Ya que $\ln r$ en la definición del logaritmo complejo es simplemente el logaritmo natural de $(x^2 + y^2)^{1/2}$ podemos usar la propiedad de logaritmos naturales para escribir

$$\ln r = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2). \tag{7}$$

Podemos usar la definición del arcotangente que vimos en la clase:

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}. \tag{8}$$

Para el número z ponemos y/x:

$$\frac{i + \frac{y}{x}}{i - \frac{y}{x}} = \frac{i + \frac{y}{x}}{i - \frac{y}{x}} \cdot \frac{-i - \frac{y}{x}}{-i - \frac{y}{x}} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}^2}{|\bar{z}|^2} \tag{9}$$

Escribiendo $\bar{z} = e^{-i\theta}$ (donde $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$) tenemos

$$\frac{\bar{z}^2}{|\bar{z}|^2} = e^{-i2\theta} \tag{10}$$

Entonces

$$\frac{i}{2}\log\frac{\bar{z}^2}{|\bar{z}|^2} = \frac{i}{2}(-i2\theta) = \theta, \tag{11}$$

confirmando la parte imaginaria de la expresión en la pregunta.

Para mostrar que la función es analítica, primero determinamos las derivadas parciales de primer orden de las funciones componentes u y v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{13}$$

y así vemos que las derivadas parciales existen y son continuas en el dominio especificado (i.e. con $r > 0$). Ademas las derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto la función es analítica en el dominio. Podemos obtener su derivada compleja usando el teorema:

$$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \tag{14}$$

4. Muestre que si $z \neq 0$ y a es un número real, entonces $|z^a| = \exp(a \ln|z|) = |z|^a$, donde usamos el valor principal de $|z|^a$.

Solución: Por definición del exponente complejo tenemos

$$z^a = \exp(a \log z) \tag{15}$$

El módulo de un número complejo es $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ donde elegimos la raiz positiva. Entonces, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
|z^a| &= \left[\exp(a\log z)\overline{\exp(a\log z)}\right]^{1/2} \\
&= [\exp(a\log z)\exp(a\log \bar{z})]^{1/2} \\
&= [\exp(a\log z + a\log \bar{z})]^{1/2} \\
&= [\exp(a\log(z\bar{z}))]^{1/2} \\
&= \left[\exp(a\log |z|^2)\right]^{1/2} \\
&= \exp(a\ln|z|) = |z|^a
\end{aligned} \tag{16}
$$

donde hemos usado $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ para cualquier $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ en la tercera línea, y el hecho de que $\log z_1 + \log z_2 = \log z_1 z_2$ al nivel de conjuntos en la cuarta línea. Finalmente, $\log|z|^2 = \ln|z|^2 + i\theta$ donde $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Eligiendo el valor principal tenemos $\log|z|^2 = 2\ln|z|$ y el exponente es real.

5. Suponiendo que $f'(z)$ existe, escribe la fórmula para la derivada de $c^{f(z)}$ donde c es un número complejo.

   Solución: Usando la definición del exponente complejo tenemos

   $$c^{f(z)} = \exp(f(z)\log c) \tag{17}$$

   Ahora aplicamos la regla de cadena:

   $$\frac{d}{dz}c^{f(z)} = \exp(f(z)\log c)\,[f'(z)\log c] \tag{18}$$

6. Usando

   $$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \tag{19}$$

   muestre que las raices de la ecuación $\cos z = 2$ son

   $$z = 2n\pi + i\cosh^{-1} 2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{20}$$

   y escribelas en la forma

   $$z = 2n\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{21}$$

   Solución: Ya que igualdad entre dos números complejos implica igualdad entre las partes real e imaginaria, tenemos

   $$\cos x \cosh y = 2 \qquad \sin x \sinh y = 0 \tag{22}$$

   Ya que $y \in \mathbb{R}$, la única raiz de $\sinh y = 0$ es $y = 0$. En este punto $\cosh y = 1$, y $|\cos x| \leq 1$ así que es imposible satisfacer la primera ecuación en este punto, y podemos descartar la posibilidad de tener $y = 0$. Así que la única forma de satisfacer la segunda ecuación es con $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Usando esto en la primera ecuación tenemos $\cos n\pi = 1$ para $n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ y $\cos n\pi = -1$ para $n = \pm 1, \pm 3, \ldots$. Ya que $\cosh y > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ tenemos que elegir $n = 0, \pm 2, \pm 4$ para tener un valor positivo de $\cos x$. Por lo tanto tenemos $x = 2n\pi$ donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En estos valores $\cos x = 1$, así que la primera ecuación queda

   $$\cosh y = 2 \quad (x = 2n\pi), \tag{23}$$

por lo tanto $y = \cosh^{-1} 2$, y tenemos

$$z = 2n\pi + i\cosh^{-1} 2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{24}$$

La definición de $\cosh^{-1} w$ es

$$\cosh^{-1} w = \log\left[w + (w^2 - 1)^{1/2}\right] \tag{25}$$

En nuestro caso $w = 2$, por lo tanto

$$\cosh^{-1} 2 = \log\left[2 + (2^2 - 1)^{1/2}\right] = \log(2 \pm \sqrt{3}) \tag{26}$$

Por la definición del logaritmo complejo tenemos

$$\log(2 + \sqrt{3}) = \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{27}$$

$$\log(2 - \sqrt{3}) = \ln(2 - \sqrt{3}) + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{28}$$

Notar que en ambos casos el argumento es un multiple de 2π ya que $2 \pm \sqrt{3} > 0$. Para simplificar la expresión escribimos

$$\ln(2 - \sqrt{3}) = \ln\left((2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = -\ln(2 + \sqrt{3}) \tag{29}$$

Por lo tanto

$$\ln(2 \pm \sqrt{3}) = \pm \ln(2 + \sqrt{3}) \tag{30}$$

Volviendo a la expresión para z tenemos

$$z = 2n\pi + i\left(\pm \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi i\right) = 2(n - k)\pi \pm i\ln(2 + \sqrt{3}) \tag{31}$$

Ya que n y k son ambos enteros (independientes) podemos combinar sus valores en un solo parámetro entero para llegar al resultado final.

7. Muestre que

   (a) $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$

   Solución:

$$\begin{aligned} \sinh(z + \pi i) &= \frac{e^{z+\pi i} - e^{-(z+\pi i)}}{2} = \frac{e^z e^{\pi i} - e^{-z} e^{-\pi i}}{2} \\ &= \frac{-e^z - (-)e^{-z}}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z \end{aligned} \tag{32}$$

   (b) $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$

   Solución:

$$\begin{aligned} \cosh(z + \pi i) &= \frac{e^{z+\pi i} + e^{-(z+\pi i)}}{2} = \frac{e^z e^{\pi i} + e^{-z} e^{-\pi i}}{2} \\ &= \frac{-e^z + (-)e^{-z}}{2} = -\frac{e^z + e^{-z}}{2} = -\cosh z \end{aligned} \tag{33}$$

(c) $\tanh(z+\pi i) = \tanh z$

Solución:

$$\begin{aligned}
\tanh(z+\pi i) &= \frac{e^{z+\pi i} - e^{-(z+\pi i)}}{e^{z+\pi i} + e^{z+\pi i}} = \frac{e^z e^{\pi i} - e^{-z} e^{-\pi i}}{e^z e^{\pi i} + e^{-z} e^{-\pi i}} \\
&= \frac{-e^z - (-)e^{-z}}{-e^z + (-)e^{-z}} = \frac{-(e^z - e^{-z})}{-(e^z + e^{-z})} = \tanh z
\end{aligned} \tag{34}$$

8. Explique por qué la función $\sinh(e^z)$ es completa (entera). Escribe su componente real como una función de x y y y explique por qué esa función debe ser armónica en todos puntos.

   Solución: La función es completa porque $\sinh z$ y e^z son completas, y una composición de dos funciones completas también es completa.

   Tenemos:

$$\begin{aligned}
\sinh(e^z) &= \frac{1}{2}\left(\exp(e^z) - \exp(-e^z)\right) = \frac{1}{2}\left(\exp(e^x[\cos y + i \sin y]) - \exp(-e^x[\cos y + i \sin y]\right) \\
&= \frac{1}{2}(\exp(e^x \cos y)\exp(ie^x \sin y) - \exp(-e^x \cos y)\exp(-ie^x \sin y)) \\
&= \frac{1}{2}(\exp(e^x \cos y)[\cos(e^x \sin y) + i\sin(e^x \sin y)] - \exp(-e^x \cos y)[\cos(e^x \sin y) - i \sin(e^x \sin y)])
\end{aligned} \tag{35}$$

   Por lo tanto la parte real es

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\exp(e^x \cos y)\cos(e^x \sin y) - \exp(-e^x \cos y)\cos(e^x \sin y)\right) \tag{36}$$

   Por el teorema de la sección 27, sabemos que si una función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D, sus funciones componentes u y v son armónicas en todo D.

9. Resuelve la ecuación $\cos z = \sqrt{2}$ para z.

   Solución: Tenemos que encontrar los valores de

$$z = \cos^{-1}\sqrt{2}. \tag{37}$$

   La definición del coseno inverso es

$$\cos^{-1} z = -i \log[z + i(1-z^2)^{1/2}] \tag{38}$$

   Entonces, con $z = \sqrt{2}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\cos^{-1}\sqrt{2} &= -i\log[\sqrt{2} + i(1-2)^{1/2}] = -i\log[\sqrt{2} + i(-1)^{1/2}] \\
&= -i\log[\sqrt{2} \pm i \cdot i] = -i \log[\sqrt{2} \mp 1]
\end{aligned} \tag{39}$$

   De la definición del logaritmo complejo:

$$\begin{aligned}
\log(\sqrt{2}-1) &= \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2}) + 2n\pi = -\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + 2n\pi \\
\log(\sqrt{2}+1) &= \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{40}$$

Por lo tanto, los valores de z son

$$z = \pm i \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{41}$$

Notar que los valores de z son puramente imaginario. Esto tiene sentido, ya que $\sqrt{2} > 1$ y el coseno de números reales está acotado en el rango $-1 \leq \cos x \leq 1$.