Clase 14   181021   1

Integrales elípticas.

La integral

$$I = \int R\left[t, \sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4}\right] dt \quad (1)$$

es llamada integral elíptica si la ecuación $a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 = 0$, con a_0 y a_1 distintos de cero simultáneamente, no tiene raíces múltiples, y R es una función racional de t y de la raíz cuadrada $\sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4}$.

Los tres formas canónicas de una integral elíptica:

Siempre es posible expresar (1) linealmente en términos de funciones elementales y de las siguientes integrales fundamentales:

* **Integral elíptica normal de primera especie**

$$\int_0^{y} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}} =$$

$$= \int_0^{u_1} du = u_1 \equiv \mathrm{sn}^{-1}(Y, k) \equiv F(\varphi, k)$$

* Integral elíptica normal de segunda especie

$$\int_0^Y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{u_1} \mathrm{dn}^2 u\, du$$

$$= E(u_1) \equiv E(\mathrm{am}\, u_1, k) \equiv E(\varphi, k)$$

* Integral elíptica normal de tercera especie

$$\int_0^Y \frac{dt}{(1-\alpha^2t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1-\alpha^2\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$= \int_0^{u_1} \frac{du}{1-\alpha^2\mathrm{sn}^2 u} = \Pi(u_1, \alpha^2) \equiv \Pi(\mathrm{am}\, u_1, \alpha^2, k^2)$$

$$\equiv \Pi(\varphi, \alpha^2, k)$$

$$-\infty < \alpha^2 < \infty$$

donde

$Y = \sin\varphi$; $\varphi = \mathrm{am}\, u_1$

amplitud de u_1

El módulo: El número k es el llamado módulo de la función elíptica. Desde el punto de vista analítico, k puede tomar cualquier valor real ó imaginario. Sin embargo, en aplicaciones físicas y astrofísicas generalmente $0 < k < 1$

El módulo complementario k'

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

Integrales elípticas completas: cuando $y = 1$ (ó $\varphi = \pi/2$), las integrales son llamadas completas

- $$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^K du = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K$$
- $$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^K \mathrm{dn}^2 u\, du = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E$$
- $$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-\alpha^2\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^K \frac{du}{1-\alpha^2 \mathrm{sn}^2 u} = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, k\right)$$
$$= \Pi(\alpha^2, k) \;;\; \alpha^2 \neq 1$$

Funciones elípticas de Jacobi

Tenemos que

$$u(y_1,k) \equiv u = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\varphi,k)$$

este problema de inversión fue estudiado por Abel y Jacobi.

Las funciones inversas se pueden definir por

$$y_1 = \sin\varphi \equiv \mathrm{sn}(u,k)$$

$$\varphi = \mathrm{am}(u,k)$$

ó más brevemente:

$y_1 = \mathrm{sn}(u)$: Seno elíptico

$\varphi = \mathrm{am}(u)$: Amplitud u

$\mathrm{sn}(u)$: es una función impar de orden 2. Posee polo simple de residuo $1/k$ en cada punto congruente a $iK' \equiv iK(k')$ y un polo simple de residuo $-1/k$ en puntos congruentes a $2K + iK'$

También podemos definir

$cn(u,k) = \sqrt{1-Y_1^2} = \cos\varphi$: coseno elíptico

$dn(u,k) = \sqrt{1-k^2 Y_1^2} = \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$:

delta elíptica.

El cociente y los recíprocos de $sn(u)$ $cn(u)$ y $dn(u)$ pueden ser escritos en la forma de Gleisher :

$ns(u) = \dfrac{1}{sn(u)}$; $Tn(u) = sc(u) = \dfrac{sn(u)}{cn(u)}$; $sd(u) = \dfrac{sn(u)}{dn(u)}$

$nc(u) = \dfrac{1}{cn(u)}$; $cs(u) = \dfrac{cn(u)}{sn(u)}$; $cd(u) = \dfrac{cn(u)}{dn(u)}$

$nd(u) = \dfrac{1}{dn(u)}$; $ds(u) = \dfrac{dn(u)}{sn(u)}$; $dc(u) = \dfrac{dn(u)}{cn(u)}$

→ Tenemos 12 funciones elípticas ~~extras~~ de Jacobi extras

Algunas relaciones importantes:

* $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$; * $k^2 sn^2(u) + dn^2(u) = 1$
* $dn^2(u) - k^2 cn^2(u) = k'^2$ * $k'^2 sn^2(u) + cn^2(u) = dn^2(u)$

$sn(u,0) = \sin(u)$ $\qquad$ $sn(u,1) = \tanh(u)$

$cn(u,0) = \cos(u)$ $\qquad$ $cn(u,1) = \mathrm{sech}(u)$

$dn(u,0) = 1$ $\qquad$ $dn(u,1) = \mathrm{sech}(u)$

$Tn(u,0) = \tan(u)$ $\qquad$ $Tn(u,1) = \sinh(u)$