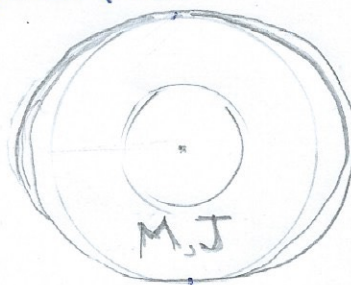
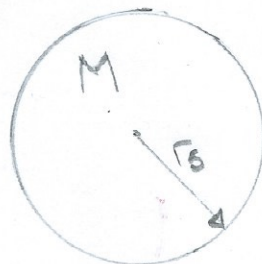


Agujero Negro de Kerr:

Generaliza al agujero negro de Schwarzschild en el sentido que incluye la rotación de la fuente.



Los parámetros relevantes son la masa, M, y el momentum angular, J.

Trabajando en unidades geometrizadas, es útil definir la cantidad

$$a = \frac{J}{M}, \quad \dim(a)_{\text{geom}} = L : \text{longitud.}$$

la métrica de Kerr:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

donde

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

- La métrica de Kerr posee simetría axial, pero no esférica.

Veamos que para r y t constantes

$$dS_2^2 = g^2 d\theta^2 + \frac{(R^2 + a^2) - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{g^2} \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$a=0 \rightarrow dS_2^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- $a=0 \Rightarrow$ Kerr $\xrightarrow{J=0}$ Schwarzschild.

- En general: $dS^2 = -g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi$

Para una métrica axial: La diferencia está en el término

$$g_{t\phi} = -a \cdot \frac{2Mr \sin^2 \theta}{g^2}$$

$g_{t\phi}$ introduce nuevos efectos sobre la trayectoria de las partículas.

Ya que $g_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}(\phi)$, $\forall (\alpha, \beta)$,
el momento canónico conjugado
de ϕ , p_ϕ , es conservado.

$$p_\phi = g^{\phi\alpha} p_\alpha = g^{\phi t} p_t + \underbrace{g^{\phi r} p_r}_{=0} + \underbrace{g^{\phi\theta} p_\theta}_{=0} + g^{\phi\phi} p_\phi$$

$$p_\phi = g^{\phi t} p_t + g^{\phi\phi} p_\phi$$

Si consideramos ~~partículas~~ radiales,
 $L = 0 \Rightarrow p_\phi = 0$.

$$\therefore p^t = m \frac{dt}{d\tau} ; p^\phi = m \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} \equiv \omega(r, \theta)$$

ω representa la velocidad angular
de una partícula con momentum
angular cero.

d 24

④

- El espacio-tiempo de Kerr posee dos horizontes: Estos se encuentran en los puntos donde $\Delta = 0$, i.e. $g_{rr} \rightarrow \infty$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \big|_{r=r_h} = 0$$

$$r_h = \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 - 4a^2}}{2} = \frac{2(M \pm \sqrt{M^2 - a^2})}{2}$$

$$r_h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_+ = r_h = M + \sqrt{M^2 - a^2} & : \text{Horizonte de eventos} \\ r_- = r_h = M - \sqrt{M^2 - a^2} & : \text{Horizonte de Cauchy.} \end{aligned}}$$

Ergoregión : Pensemos en fotones emitidos en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, por algún r .

Si inicialmente se mueve en dirección $\pm \hat{\phi}$, es decir tangente al círculo $r = \text{const}$, y ya que $ds^2 = 0$ para fotones

$$0 = -g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2$$

$$g_{\phi\phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + 2g_{t\phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) - g_{tt} = 0$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + 2 \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} = 0$$

Q 24

⑤

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{-2 \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{4 \left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 + 4 \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}}{2}$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 + \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}$$

* Si $g_{tt} = 0$

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_1 = 0 \quad \wedge \quad \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_2 = -\frac{2g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

$$g_{tt} = 0 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{r^2} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta = a^2}$$

en whatever otro plano θ :

$$\Delta - a^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$r^2 - 2Mr + a^2 - a^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

Ergoes for $r = r_0$

$$\boxed{r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}}$$

cl 24

⑥

El área de la superficie delimitada por el horizonte de eventos:

$$A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{g_{\phi\phi} \cdot g_{\theta\theta}} \Big|_{r=r_+} \sin \theta$$

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \sqrt{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \Big|_{r=r_+}$$

$$A = 4\pi (r^2 + a^2)$$