Universidad de Valparaíso
CHILE

Prueba I
Métodos Matemáticos
Licenciatura en Física - 2016
IPGG

(I) Ecuación indicial (25%)

Dado un vector no nulo arbitrario U_k, $k = 1, 2, 3$, el cual define la matriz cuyos elementos son $a_{ij} = \epsilon_{ijk} U_k$, donde ϵ_{ijk}
es el símbolo de permutación o tensor de Levi-Civita. Determine:

- (10%) Si a_{ij} es simétrico o antisimétrico. Halle su matriz correspondiente si el vector $\mathbf{U}$ es conocido.
- (15%) Si los elementos a_{ij} son conocidos, determine el vector $\mathbf{U}$ en términos de a_{ij}.

(II)Tensor inercia (20%)

La ecuación que relaciona las componentes del momentum angular y la velocidad angular está dada por la siguiente fórmula:

$$L_i = I_{ij}\omega_j$$

donde I_{ij} es el tensor momento de inercia. Para una masa puntual ubicada en $\mathbf{r}$ (dado un sistema de referencia arbitrario) de manera explícita se tiene que:

$$I_{ij} = m\left(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j\right) \qquad \text{(Tensor simétrico)}$$

- **(10%)** Evalúe el producto $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}$ a partir de la expresión anterior y compárelo con $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$.
- **(10%)** Demuestre que en general $\boldsymbol{\omega}$ no es paralelo a $\mathbf{L}$.

(III) Rotor y dipolo puntual (30%)

El potencial eléctrico de un dipolo puntual situado en el origen y cuyo momento dipolar es $\mathbf{p}$ está dado por la siguiente expresión:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}.$$

Evalúe $\nabla \times \nabla\phi(\mathbf{r})$.

(IV) Determinante y Levi-Civita (25%)

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}$$

siendo t un parámetro variable. El determinante $|A|$ puede evaluarse a partir de la siguiente expresión:

$$|A| = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

- (5%) Demuestre que el determinante cambia de signo cuando dos columnas se intercambian.
- (10%) Demuestre que el determinante cambia de signo cuando dos filas se intercambian.
- (10%) Escriba explícitamente $\frac{d|A|}{dt}$ como la suma de tres determinantes.

PROBL. I)

$$a_{ij} = \epsilon_{ijk} U_k$$

* para $i=j \Rightarrow a_{ij}=0 \Rightarrow a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$.

* $a_{ij} = -a_{ji}$ (Por antisimetría de ϵ_{ijk} ante intercambio de índices)

Matricialmente la matriz $\{a_{ij}\}$ es dada por:

$$\left.\begin{array}{l} a_{12} = \epsilon_{123} U_3 = U_3 \\ a_{13} = \epsilon_{132} U_2 = -U_2 \\ a_{23} = \epsilon_{231} U_1 = U_1 \end{array}\right. \Rightarrow \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & U_3 & -U_2 \\ U_3 & 0 & U_1 \\ U_2 & -U_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = a_{23} \\ U_2 = -a_{13} \\ U_3 = a_{12} \end{array}\right\}$$

Se deduce de esto que

$$U_i = \epsilon_{ijk} a_{jk}$$

II.1

II) a) $\vec{r}\cdot\vec{L} = X_i L_i = X_i I_{ij} w_j$

$= X_i m(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) w_j$

$= X_j m r^2 w_j - m x_i x_i X_j w_j$

$= m r^2 \vec{r}\cdot\vec{w} - m r^2 \vec{r}\cdot\vec{w}$

$= 0.$

//

Otra forma

$\vec{r}\cdot\vec{L} = \vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = X_i(\vec{r}\times\vec{p})_i$

$= X_i \epsilon_{ijk} X_j p_k$

$= \epsilon_{ijk} X_i X_j p_k$

$= p_k \epsilon_{kij} X_i X_j$

$= p_k \cancel{(\vec{r}\times\vec{r})_k}^{\,0} = 0$ //

b) forme 1

$L_i = I_{ij} w_j = m(r^2 \delta_{ij} - X_i X_j) w_j$

$$L_i = m r^2 \delta_{ij} \omega_j - m X_i X_j \omega_j$$

$\Downarrow$

En notación vectorial

$$\vec{L} = m r^2 \vec{\omega} - m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

Este término evita que $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

forma 2

Evaluemos $\vec{\omega} \times \vec{L}$, si el resultado es nulo $\Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

$$(\vec{\omega} \times \vec{L})_i = \epsilon_{ijk} \omega_j L_k = \epsilon_{ijk} \omega_j I_{kl} \omega_l$$

$$= \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_l m (r^2 \delta_{kl} - X_k X_l)$$

$$= m r^2 \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_l \delta_{kl}$$

$$- m \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_l X_k X_l$$

$$= mr^2 \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k - m \omega_l x_l \epsilon_{ijk} \omega_j x_k$$

$$= mr^2 (\cancel{\vec{\omega} \times \vec{\omega}})_i - m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{r})_i$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{L})_i = -m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{r})_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L} = -m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{r}) \neq \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$ en grál.

PROB. III) TODO PASO A PASO, EN GRAL

$$\nabla \times \nabla \phi(\vec{r}) = \vec{0}$$

p/ cualquier $\phi(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Luego la componente i-ésima de $\nabla \times \nabla\phi(\vec{r})$ es:

$$[\nabla \times \nabla \phi(\vec{r})]_i = \epsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_\ell x_\ell}{r^3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_\ell\, \epsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \left(\frac{x_\ell}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_\ell\, \epsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \left[x_\ell r^{-3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_\ell\, \epsilon_{ijk}\, \partial_j \left[(\partial_k x_\ell) r^{-3} + x_\ell \partial_k (r^{-3})\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_\ell\, \epsilon_{ijk}\, \partial_j \left[\frac{\delta_{k\ell}}{r^3} + x_\ell \partial_k (x_n x_n)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_\ell\, \epsilon_{ijk}\, \partial_j \left[\frac{\delta_{k\ell}}{r^3} - \frac{3}{2} x_\ell (x_n x_n)^{-5/2} \partial_k (x_n x_n)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_e \epsilon_{ijk} \partial_j \left[\frac{\delta_{kl}}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{X_e}{r^5} 2 X_n \delta_{nk} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_e \epsilon_{ijk} \partial_j \left[\frac{\delta_{kl}}{r^3} - 3 \frac{X_e X_k}{r^5} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_e \epsilon_{ijk} \left[\delta_{kl} \partial_j (r^{-3}) - 3 \partial_j (X_e X_k r^{-5}) \right]$$

Por separado

$$* \quad \partial_j (r^{-3}) = \partial_j (X_n X_n)^{-3/2} = -\frac{3}{2} (X_n X_n)^{-5/2} \partial_j (X_n X_n)$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{1}{r^5} \cdot 2 X_n \delta_{jn}$$

$$= -\frac{3}{r^5} X_j$$

$$** \quad \partial_j (X_e X_k r^{-5}) = (\partial_j X_e) X_k r^{-5} + X_e (\partial_j X_k) r^{-5} + X_e X_k \partial_j (r^{-5})$$

$$= \delta_{je} \frac{X_k}{r^5} + \delta_{jk} \frac{X_e}{r^5} + X_e X_k \partial_j (X_n X_n)^{-5/2}$$

$$= \delta_{je} \frac{X_k}{r^5} + \delta_{jk} \frac{X_e}{r^5} + X_e X_k \left(\frac{-5}{2}\right) (X_n X_n)^{-7/2} \cdot 2 X_n \delta_{jn}$$

$$= \delta_{jl}\frac{X_k}{r^5} + \delta_{jk}\frac{X_l}{r^5} - 5\,\frac{X_l X_k X_j}{r^7}$$

luego

$$[\nabla\times\nabla\phi(\vec{r})]_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p_l \epsilon_{ijk}\left[-\frac{3\delta_{kl}}{r^5}X_j - 3\left(\delta_{jl}\frac{X_k}{r^5} + \delta_{jk}\frac{X_l}{r^5} - 5\frac{X_l X_k X_j}{r^7}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{r^5}\epsilon_{ijk}\, p_l \delta_{kl} X_j - \frac{3}{r^5}\epsilon_{ijk}\, p_l \delta_{jl} X_k\right.$$

$$\left. - \frac{3}{r^5}\epsilon_{ijk}\, p_l \delta_{jk} X_l + \frac{15}{r^7}\epsilon_{ijk}\, p_l X_l X_k X_j\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{r^5}\epsilon_{ijk} X_j p_k - \frac{3}{r^5}\epsilon_{ijk} p_j X_k\right.$$

$$\left. - \frac{3}{r^5}\overset{0}{\cancel{\epsilon_{ijj}}}(\vec{p}\cdot\vec{r}) + \frac{15}{r^7}(\vec{p}\cdot\vec{r})\overset{0}{\cancel{(\vec{r}\times\vec{r})_i}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{r^5}(\vec{r}\times p)_i - \frac{3}{r^5}(\vec{p}\times\vec{r})_i\right] = 0$$

PROBL. IV)

a) $|A| = \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}$

i, j, k hacen referencia a columnas.
↑ en coef. $a_{\ell m}$

luego si cambiamos columna i por j:

$$\epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} = \epsilon_{ijk}\, a_{1j}\, a_{2i}\, a_{3k}.$$

para leer lo anterior como determinante se cambia $\epsilon_{ijk} \longrightarrow -\epsilon_{jik}$. (Reordena)

$$\Gamma\ -\epsilon_{jik}\, a_{1j}\, a_{2i}\, a_{3k} = -|A|$$

b) Obs.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \qquad\qquad \epsilon_{ijk}\, a_{i1}\, a_{j2}\, a_{k3}$$

luego tb. se tiene que

$$|A| = \epsilon_{ijk}\, a_{i1}\, a_{j2}\, a_{k3}$$

i, j, k ahora hacen referencia a filas.

∴ haciendo $i \leftrightarrow j$ en coef. a_{em} y reordenando $\epsilon_{ijk} \longrightarrow -\epsilon_{jik}$.

se tiene que

$$\epsilon_{ijk}\, a_{j1}\, a_{i2}\, a_{k3} = -\epsilon_{jik}\, a_{j1}\, a_{i2}\, a_{k3}$$

$$= -|A|$$

c) $|A| = \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}$

$\Downarrow$

$$\frac{d|A|}{dt} = \epsilon_{ijk}\left[\dot{a}_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} + a_{1i}\, \dot{a}_{2j}\, a_{3k} + a_{1i}\, a_{2j}\, \dot{a}_{3k}\right]$$

$$\therefore \frac{d|A|}{dt} = \epsilon_{ijk}\, \dot{a}_{1i} a_{2j} a_{3k} + \epsilon_{ijk}\, a_{1i} \dot{a}_{2j} a_{3k} + \epsilon_{ijk}\, a_{1i} a_{2j} \dot{a}_{3k}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \frac{da_{13}}{dt} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \frac{da_{23}}{dt} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{da_{31}}{dt} & \frac{da_{32}}{dt} & \frac{da_{33}}{dt} \end{vmatrix}$$