PROBLEMA GUÍA II | #11

I) $$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = z_0 \hat{\mathbb{1}} + z_1 \hat{\sigma}_1 + z_2 \hat{\sigma}_2 + z_3 \hat{\sigma}_3$$

$$= \begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iz_2 \\ iz_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3 & 0 \\ 0 & -z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{11} = z_0 + z_3 \quad (1)$$
$$a_{12} = z_1 - iz_2 \quad (2)$$
$$a_{21} = z_1 + iz_2 \quad (3)$$
$$a_{22} = z_0 - z_3 \quad (4)$$

Haciendo $(1)+(4) \Longrightarrow \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2} = z_0$

Haciendo $(1)-(4) \Longrightarrow \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2} = z_3$

Haciendo $(2)+(3) \Longrightarrow \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2} = z_1$

Haciendo $(3)-(2) \Longrightarrow \dfrac{a_{21}-a_{12}}{2i} = z_2$

Luego

$$\hat{A} = \left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)\hat{\mathbb{1}} + \left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\right)\hat{\sigma}_1 + \left(\frac{a_{21}-a_{12}}{2i}\right)\hat{\sigma}_2 + \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)\hat{\sigma}_3$$

<u>Obs.</u> Los matrices $\{\hat{\mathbb{1}}, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}$ son linealmente independientes, $\therefore$ pueden constituir una base para escribir cualquier matriz 2x2 como una combinación lineal de ellas.

<u>II</u>)
a)

$$\hat{\sigma}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{1}}$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{1}}$$

análogamente para $\hat{\sigma}_3^2$.

b) Ahora $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

por otro lado

$$\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\therefore \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = -\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 \text{ ; etc.}$$

<u>Obs.</u> Las matrices de Pauli anticonmutan $\Rightarrow \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = -\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i$

c) Del resultado anterior, si bien es un caso particular (Ud. puede ver los casos restantes), se observa que:

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\,\hat{\sigma}_3$$

En gral. haciendo todos los calculos restantes se obtiene la siguiente regla general:

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_k$$

d) $$(c_1\hat{\sigma}_1 + c_2\hat{\sigma}_2 + c_3\hat{\sigma}_3)^2 = c_1^2\hat{\sigma}_1^2 + \cancel{c_1c_2\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2} + \cancel{c_1c_3\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3}$$

$$+ \cancel{c_2c_1\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1} + c_2^2\hat{\sigma}_2^2 + \cancel{c_2c_3\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3}$$

$$+ \cancel{c_3c_1\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1} + \cancel{c_3c_2\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_2} + c_3^2\hat{\sigma}_3^2$$

$$= c_1^2\overset{\hat{\mathbb{1}}}{\cancel{\hat{\sigma}_1^2}} + c_2^2\overset{\hat{\mathbb{1}}}{\cancel{\hat{\sigma}_2^2}} + c_3^2\overset{\hat{\mathbb{1}}}{\cancel{\hat{\sigma}_3^2}}$$

$$= (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\,\hat{\mathbb{1}}$$