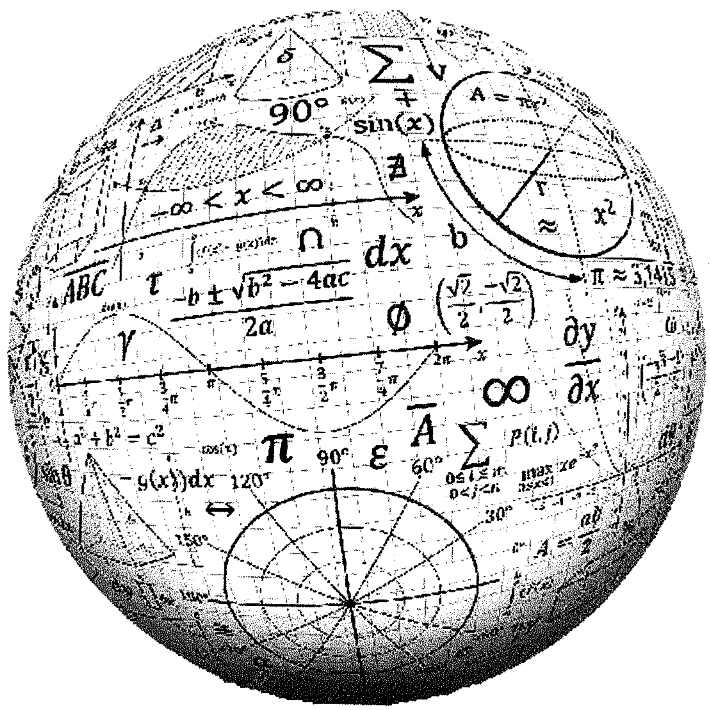
MÓDULO I
"MÉTODO DE BRACKETS"



Submódulo I : Herramientas matemáticas preliminares

Sección I - Función Gamma ☑

Sección II - Función Beta ☑

Sección III - Símbolos de Pochhammer ☑

Sección IV - Función hipergeométrica generalizada univariable

Sección V - Funciones hipergeométricas de más de una variable

(I) Función Gamma de Euler : $\Gamma(z)$

(L. Euler - 1729)

Representación integral

con $z \in \mathbb{C}$ y

$$(1) \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \ ; \ Re(z) > 0$$

$\Downarrow$

Existencia de la integral

$\Downarrow$

Valor finito y definido

Haciendo el cambio de variable $u = e^{-t}$ obtenemos otra representación a partir de Ec. (1):

$$(2) \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{z-1} du$$

TAREA I

Suponga que $z = \alpha \in \mathbb{R}$, demuestre que $\alpha > 0$ para que la integral converja.

Propiedades

(3) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ (Ec. de recurrencia)

(4) $\Gamma(n+1) = n!$ $(n \in \mathbb{N})$

(5) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$

(6) $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\dfrac{\pi}{z\operatorname{sen}(\pi z)}$

(7) $\Gamma(\tfrac{1}{2}-z)\Gamma(\tfrac{1}{2}+z) = \dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$

(8) $\Gamma(2z) = \dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})$ (Fórmula de duplicación)

TAREA II

Demuestre la Ec. (3). Utilice integración por partes en la representación integral dada en Ec. (1).

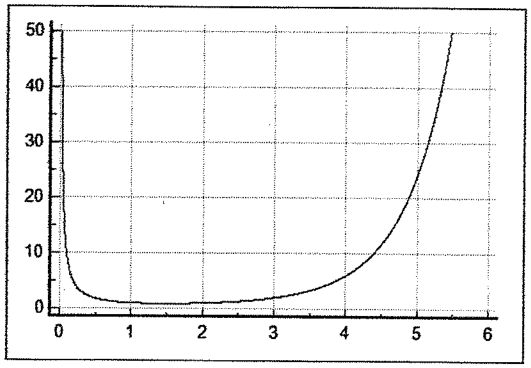
TAREA III

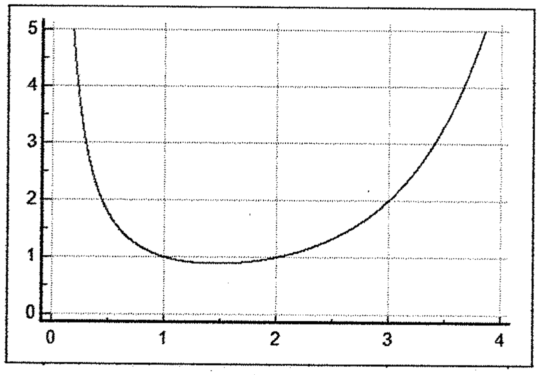
Demuestre que $\Gamma(n+1) = n!$ $(n \in \mathbb{N})$

TAREA IV

Utilice la Ec. (3) y el hecho que $\Gamma(0^+) = \infty$ para demostrar que $\Gamma(-n^+)$ $(n \in \mathbb{N})$ son divergentes. El signo (+) indica aproximación a $(-n)$ por la derecha.

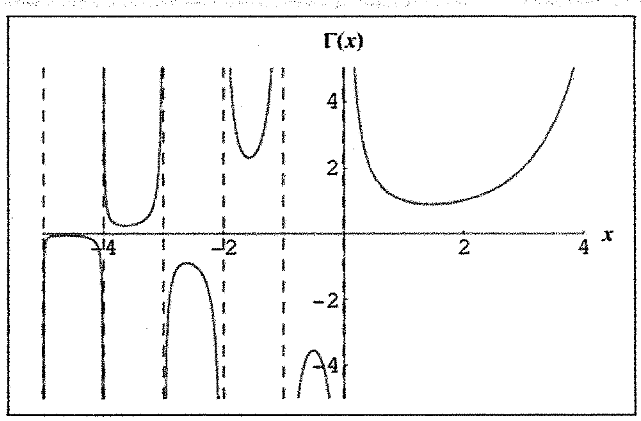
Para $z=x\in\mathbb{R}$ la gráfica de $\Gamma(x)$ para $x>0$ es la siguiente:





haciendo uso de la Ec.(3) es posible mostrar también la gráfica para $x<0$:

Se observa en este gráfico que $\Gamma(-n)\to$ diverge para $n\in\mathbb{N}$



TAREA $\overline{\underline{V}}$

A partir de le Ec. (5) demuestre las ecs. (6) y (7)

TAREA $\overline{\underline{VI}}$

Demuestre que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

TAREA $\overline{\underline{VII}}$

Halle una expresión para $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$

TAREA $\overline{\underline{VIII}}$

Conociendo que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{u+1}\,du = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$, demuestre

que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ $\left(\operatorname{Re}(z) \in \,]0,1[\right)$

(II) Función Beta : $B(m,n)$

La función Beta se define de la siguiente manera:

$$(9) \quad B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \quad ; \quad \operatorname{Re}(m), \operatorname{Re}(n) > 0$$

Otras representaciones integrales son las siguientes:

(10) $$B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy$$

(11) $$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \ \text{sen}^{2n-1}\theta \, d\theta$$

TAREA $\overline{\text{IX}}$

Halle el cambio de variable que transforme la Ec. (9) en la integral de la Ec. (10).

TAREA $\overline{\text{X}}$

Demuestre que $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

TAREA $\overline{\text{XI}}$

Demuestre que $B(m,n)$ se puede reescribir como la expresión dada en Ec. (11)

TAREA $\overline{\text{XII}}$

Demuestre la identidad dada en Ec. (8)

Ejercicios propuestos I

1) Evalúe

a) $\Gamma(-3/2)$

b) $\Gamma(7/2)$

c) $\dfrac{\Gamma(-3^{+})}{\Gamma(-2^{+})}$

2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt$; con $s>0$

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}(2x)}\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{y-1} dt$; con $y, x>0$

Demuestre las siguientes identidades

6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{a^x}\,dx = \frac{\Gamma(a+1)}{(\log a)^{a+1}}$

7) $\int_0^1 (x \log x)^4 \, dx = \frac{4!}{5^5}$

8) $\int_0^1 x^4 (1-\sqrt{x})^5 \, dx = 2 \frac{\Gamma(10)\Gamma(6)}{\Gamma(16)}$

9) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{ctg} \theta} \, d\theta = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

10) $\int_0^\infty \sqrt{x} \, e^{-x^3} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$

11) $\int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \, d\theta = \frac{5\pi}{32}$

12) $\int_0^\infty e^{2ax - x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{a^2}$

13) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{2}{15}$

TAREA I / Solución

$$* \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\epsilon t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt + \int_\epsilon^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

con $0 < \epsilon << 1$

Se observa que la segunda integral del lado derecho es siempre finita independiente del valor de α. Por otro lado, en el intervalo $[0, \epsilon]$ se cumple que:

$e^{-t} \sim 1$ (con ϵ muy pequeño)

Luego la integral resulta ser:

$$\int_0^\epsilon t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \approx \int_0^\epsilon t^{\alpha-1}\, dt = \left. \frac{t^\alpha}{\alpha} \right|_0^\epsilon$$

$$\Downarrow$$

Se concluye que: - α no puede ser negativo, sino diverge en $t=0$.

- α debe ser no nulo, sino diverge independiente del valor de $t \in [0, \epsilon]$

$$\Downarrow$$

En resumen $\alpha > 0$ para que la integral que representa a $\Gamma(\alpha)$ tenga un valor definido.

Esto es válido, para $z \in \mathbb{C}$ con la condición $Re(z) > 0$.

QED/

TAREA II | Solución

Sea $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt$, utilizando integración por partes:

$$u = t^z \qquad dv = e^{-t}\,dt$$
$$du = z t^{z-1}\,dt \qquad v = -e^{-t}$$

$$\therefore \quad \Gamma(z+1) = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-t})(z t^{z-1})\,dt$$

dado que $z>0$ (condición de convergencia), el primer término del lado derecho es nulo.

Luego:

$$\Gamma(z+1) = z\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

, por definición la integral es $\Gamma(z)$

Finalmente $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

Obs. Esta relación funcional (de recurrencia) al no involucrar una suma definida (integración) no condiciona los valores que puede asumir el parámetro z, por lo tanto es una fórmula que permite la continuación analítica de z a valores ubicados en el semiplano izquierdo $\Rightarrow Re(z) < 0$.

Obs. Las sumas (continuas o discretas) definidas (c/ límites) están sujetas a condiciones de convergencia, las indefinidas no...

TAREA III | SOLUCIÓN

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = \lim_{\alpha\to 1} \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t}\,dt \quad ; (n \in \mathbb{N})$$

Obs. $$t\,e^{-\alpha t} = -\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha t} = (-1)^1 \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha t}$$

$$t^2 e^{-\alpha t} = \frac{d^2}{d\alpha^2} e^{-\alpha t} = (-1)^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} e^{-\alpha t}$$

$$t^3 e^{-\alpha t} = -\frac{d^3}{d\alpha^3} e^{-\alpha t} = (-1)^3 \frac{d^3}{d\alpha^3} e^{-\alpha t}$$

$$\vdots$$

Generalizando

$$t^n e^{-\alpha t} = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{-\alpha t}$$

Luego

$$\Gamma(n+1) = (-1)^n \lim_{\alpha\to 1} \left[\frac{d^n}{d\alpha^n} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt}_{\frac{1}{\alpha}} \right]$$

$$= (-1)^n \lim_{\alpha\to 1} \frac{d^n}{d\alpha^n}\left[\frac{1}{\alpha}\right]$$

Obs. Es fácil demostrar que

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\left[\frac{1}{\alpha}\right] = (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$ (Demuéstrelo Ud.)

Finalmente:

$$\Gamma(n+1) = (-1)^n \lim_{\alpha\to 1} (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}} = \cancel{(-1)^{2n}}^{\,1}\, n!$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{QED}$$

Obs. $\Gamma(n+1)=n!$ puede demostrarse utilizando la fórmula recursiva dada en Ec. (3).

TAREA $\overline{\text{IV}}$ | Solución

Se conoce que $\Gamma(0^+)=\infty$, utilizando la Ec. (3) se cumple que:

p/ $z=-1$ $\longrightarrow$ $\Gamma(0)=-1\,\Gamma(-1)$ $\Rightarrow$ $\Gamma(-1^+)=-\Gamma(0^+)$ //

p/ $z=-2$ $\longrightarrow$ $\Gamma(-1)=-2\,\Gamma(-2)$ $\Rightarrow$ $\Gamma(-2^+)=-\frac{1}{2}\Gamma(-1^+)$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(-2^+)=\frac{1}{2}\Gamma(0^+) \;//$$

p/ $z=-3$ $\longrightarrow$ $\Gamma(-2)=-3\,\Gamma(-3)$ $\Rightarrow$ $\Gamma(-3^+)=-\frac{1}{3}\Gamma(-2)$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(-3^+)=-\frac{1}{2.3}\Gamma(0^+) \;//$$

generalizando:

p/ $z=-n$ $\Longrightarrow$ $\Gamma(-n^+)=\dfrac{(-1)^n}{n!}\Gamma(0^+)$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(-n^+)=(-1)^n\,\infty$$

Este resultado se refleja en la gráfica de la página 3 del apunte.

TAREA V | Solución

Demostremos en primer lugar la Ec. (6):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

$$\downarrow$$

$$\Gamma(1-z) = (-z)\Gamma(-z) = -z\Gamma(-z)$$

$\therefore$

$$\Gamma(z)\left[-z\Gamma(-z)\right] = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\operatorname{sen}(\pi z)}$$

QED

Ahora para la Ec. (7) hacemos $z = \frac{1}{2} + z'$ en la identidad en Ec. (5), esto es:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+z'\right)\Gamma\left(1-\tfrac{1}{2}-z'\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\pi\left(\frac{1}{2}+z'\right)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+z'\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-z'\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\pi z'\right)} = \frac{\pi}{\cos(\pi z')}$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

QED

TAREA VI | Solución

FORMA ABREVIADA:

se tiene que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$, si hacemos $z = \dfrac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/2)}$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(1/2)^2 = \pi \implies \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

QED

FORMA EXTENSA:

se cumple que $\quad I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

con el cambio de variable

$$t = x^2 \longrightarrow dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

se tiene:

$$I = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t}\,dt = \Gamma(1/2) \qquad (*)$$

Por otro lado:

$$I = [I.I]^{1/2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right]^{1/2}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\right]^{1/2}.$$

Una integral de superficie

haciendo transformación de coordenadas

$$\Downarrow$$

CARTESIANAS $\longrightarrow$ POLAR

entonces $\quad r^2 = x^2 + y^2$

$$r\,dr\,d\theta = dx\,dy$$

$$\therefore\ I = \left[\int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r\, e^{-r^2}\, dr\, d\theta \right]^{1/2}$$

$$= \left[2\pi \int_0^{\infty} r\, e^{-r^2}\, dr \right]^{1/2} \quad ; \quad r\,dr = \frac{1}{2} d(r^2)$$

$$= \left[\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, d(r^2) \right]^{1/2}$$

$$= \left[\pi \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-u}\, du}_{1} \right]^{1/2} = \sqrt{\pi} \quad (**)$$

Por comperación de (*) y (**) se concluye que:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

TAREA VII | Solución

Analicemos $\Gamma(n+1/2)$ conociendo $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

p/ $n=0$ $\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

p/ $n=1$ $\quad \Gamma(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

p/ $n=2$ $\quad \Gamma(2+\frac{1}{2})=\Gamma(1+1+\frac{1}{2})=(1+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2})=(1+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$$

p/ $n=3$ $\quad \Gamma(3+\frac{1}{2})=(2+\frac{1}{2})\Gamma(2+\frac{1}{2})=\frac{5}{2}\Gamma(2+\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\vdots$$

Generalizando para un n arbitrario:

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2}\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

TAREA VIII | Solución

Se tiene que $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=B(z,1-z)$ donde

$$B(z,1-z)=\int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{(1+y)^{z+(1-z)}}dy=\int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y}dy=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

$$\therefore\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\quad \text{QED.}$$

Obs. La obtención del resultado de le integral en términos de $\operatorname{sen}(\pi z)$ se realiza a través de integración de contorno.

TAREA IX / Solución

Sea $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$; haciendo el cambio de variable:

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

$$\Downarrow$$

$$dx = \frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

$$\int_0^1 \ldots dx \to \int_0^\infty \ldots dy$$

$\therefore$

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1}\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{n-1}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m-1}}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{n-1}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

QED

TAREA X | Solución

Obs. $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-At} dt = \frac{\Gamma(z)}{A^z}$ (Demuéstrelo) (*)

luego en la integral:

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}$$ el denominador del

integrando lo reescribimos como:

$$\frac{1}{(1+y)^{m+n}} = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty t^{m+n-1} e^{-(1+y)t} dt$$

$$\therefore \quad B(m,n) = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty \int_0^\infty y^{m-1} t^{m+n-1} e^{-(1+y)t} dy\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty t^{m+n-1} e^{-t} \Big[\underbrace{\int_0^\infty y^{m-1} e^{-yt} dy}_{\frac{\Gamma(m)}{t^m}} \Big] dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty t^{m+n-1} e^{-t} \frac{\Gamma(m)}{t^m} dt$$

$$= \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \underbrace{\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(n)}$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \text{QED}$$

TAREA XI / Solución

Veamos: $\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty \xi^{m-1} e^{-\xi} d\xi \int_0^\infty \eta^{n-1} e^{-\eta} d\eta$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} e^{-(x+y)} dx dy$$

haciendo el cambio de variables:

$$\xi = x^2 \text{ y } \eta = y^2 \Rightarrow \Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

haciendo el cambio de coordenadas

$\Downarrow$

cartesianas a polares

$\Downarrow$

$x^2 + y^2 = r^2$

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\theta$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\therefore \Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^{2m+2n-2} e^{-r^2} \cos^{2m-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta \, r\,dr\,d\theta$$

$$= 4 \int_0^\infty r^{2m+2n-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta \, d\theta$$

$$= 4 \int_0^\infty (r^2)^{m+n-1} e^{-r^2} \frac{1}{2} d(r^2) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta \, d\theta$$

$$= 4 \int_0^\infty u^{m+n-1} e^{-u} \frac{du}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta \, d\theta$$

$$= 2\,\Gamma(m+n) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta \, d\theta$$

$\Downarrow$

Finalmente

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m,n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta \, d\theta$$

QED

P-18

TAREA XII / Solución

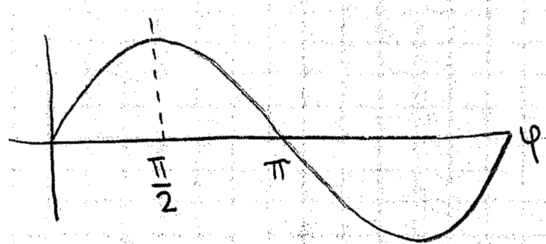
Se tiene que $B(z,z) = \dfrac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2z-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2z-1}\theta \, d\theta$

donde $\cos^{2z-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2z-1}\theta = (\cos\theta \,\mathrm{sen}\theta)^{2z-1} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\, 2\theta\right)^{2z-1}$

$$\therefore \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2 \cdot 2^{-2z+1} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{2z-1}(2\theta)\, d\theta \quad ; \text{ sea } \varphi = 2\theta$$

$$= 2^{1-2z} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{2z-1}\varphi \, d\varphi$$

Obs.



$\mathrm{sen}\,\varphi$ es simétrico respecto a $\varphi = \pi/2$.

$$\therefore \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \cdot \underbrace{2\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{2z-1}\varphi\, d\varphi}_{B(z,1/2)} = 2^{1-2z} B(z,1/2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Gamma(z)^{\cancel{2}}}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \frac{\cancel{\Gamma(z)}\,\Gamma(\cancel{1/2})^{\sqrt{\pi}}}{\Gamma(z+1/2)}$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

QED

(III) Símbolos de Pochhammer

Los símbolos de Pochhammer se definen de la siguiente manera:

$$(12) \qquad (z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

o equivalentemente:

$$(13) \qquad (z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1).$$

La Ec.(13) es evidente con los siguientes ejemplos:

$$(z)_0 = \frac{\Gamma(z+0)}{\Gamma(z)} = 1$$

$$(z)_1 = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{z\cancel{\Gamma(z)}}{\cancel{\Gamma(z)}} = z$$

$$(z)_2 = \frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(z+1+1)}{\Gamma(z)} = \frac{(z+1)\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{(z+1)z\cancel{\Gamma(z)}}{\cancel{\Gamma(z)}}$$

$$= z(z+1)$$

$$(z)_3 = z(z+1)(z+2)$$

etc.

PROPIEDADES

(14) $(z)_{-n} = \dfrac{(-1)^n}{(1-z)_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$

(15) $(z)_{2n} = 4^n \left(\frac{z}{2}\right)_n \left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$

(16) $(z)_{2n+1} = 2^{2n+1} \left(\frac{z}{2}\right)_{n+1} \left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$

(17) $(2z)_n = \begin{cases} 2^n (z)_{\frac{n}{2}} \left(z+\frac{1}{2}\right)_{\frac{n}{2}} & ; n = \text{PAR} \\ 2^n (z)_{\frac{(n+1)}{2}} \left(z+\frac{1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}} & ; n = \text{IMPAR} \end{cases}$

(18) $\dfrac{(z)_n}{(z)_m} = \begin{cases} (z+m)_{n-m} & ; n \geqslant m \\ \dfrac{1}{(z+n)_{m-n}} & ; m \geqslant n \end{cases}$

TAREA I

Demuestre la identidad en Ec. (14)

TAREA II

Demuestre la identidad en Ec. (15)

TAREA III

Demuestre que $(1)_n = n!$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

TAREA IV

Demuestre la siguiente identidad:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

donde se utiliza el doble factorial el cual está definido como:

$$n!! = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2k) = n(n-2)(n-4)\ldots 4.2$$

si $n = \text{PAR}$ y

$$n!! = \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (2k-1) = n(n-2)(n-4)\ldots 3.1$$

si $n = \text{IMPAR}$

TAREA V

Demuestre que para $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$(-m)_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n\, m!}{(m-n)!} & ;\ 0 \leq n \leq m \\ 0 & ;\ n > m \end{cases}$$

TAREA $\overline{\underline{\text{VI}}}$

La expansión en serie de Taylor en torno a $X=0$ pera la función $\cos x$ está dada por la expresión:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

demuestre que es posible reescribirle como:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (1/2)_n} \frac{x^{2n}}{n!}$$

TAREA $\overline{\underline{\text{VII}}}$

Repita el proceso del problema $\overline{\underline{\text{VI}}}$ y demuestre que

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-a)_n \frac{x^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{C})$$

Demuestre además que si $a = m \in \mathbb{N}$, la serie se trunca dando origen a un polinomio de grado m, determine dicho polinomio.

TAREA I | SOLUCIÓN

Se tiene que $\Gamma(z) = \Gamma(z-1+1) = (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)\Gamma(z-2+1)$

$$= (z-1)(z-2)\Gamma(z-2)$$

$$= (z-1)(z-2)(z-3)\dots(z-n)\Gamma(z-n)$$

luego $\dfrac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} = [\underbrace{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}_{n \text{ factores}}]^{-1}$

$$\downarrow$$

$$\frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{(z-1)\dots(z-n)}$$

$$\therefore \quad (z)_{-n} = (-1)^n \frac{1}{(1-z)\dots(n-z)} \qquad (*)$$

Por otro lado se tiene que:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$$

si hacemos $a = 1-z$ entonces se cumple que:

$(1-z)_n = (1-z)(2-z)\dots(n-z)$, reemplazando en $(*)$

obtenemos que:

$$(z)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n} \quad \text{QED}$$

TAREA II | SOLUCIÓN

A partir de la identidad:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \quad (*)$$

Veamos:

$$(\mathfrak{z})_{2n} = \frac{\Gamma(\mathfrak{z}+2n)}{\Gamma(\mathfrak{z})} = \frac{\Gamma(2(\mathfrak{z}/2+n))}{\Gamma(\mathfrak{z})}$$

Ahora:

$$\Gamma(2(\mathfrak{z}/2+n)) = \Gamma(2z) \quad ; \quad z = \frac{\mathfrak{z}}{2}+n$$

de $(*)$ $\Rightarrow$

$$\Gamma(2(\mathfrak{z}/2+n)) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

$$= \frac{2^{\mathfrak{z}+2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\mathfrak{z}/2+n)\Gamma(\mathfrak{z}/2+n+1/2)$$

usando la fórmula

$\Gamma(a+n) = \Gamma(a)(a)_n$ obtenemos:

$$\Gamma(\mathfrak{z}+2n) = \frac{2^{\mathfrak{z}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\mathfrak{z}/2)(\mathfrak{z}/2)_n \Gamma(\mathfrak{z}/2+1/2)(\mathfrak{z}/2+1/2)_n$$

$$= \underbrace{\frac{2^{\mathfrak{z}-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\mathfrak{z}/2)\Gamma(\mathfrak{z}/2+1/2)}_{\Gamma(\mathfrak{z})\ !!!} (\mathfrak{z}/2)_n (\mathfrak{z}/2+1/2)_n 2^{2n}$$

Finalmente

$$\frac{\Gamma(\mathfrak{z}-2n)}{\Gamma(\mathfrak{z})} = (\mathfrak{z})_{2n} = 2^{2n}(\mathfrak{z}/2)_n(\mathfrak{z}/2+1/2)_n$$

QED.

TAREA III | Solución

$$(1)_n = \frac{\Gamma(1+n)}{\cancel{\Gamma(1)}_{1}} = \Gamma(n+1) = n!$$

QED

TAREA IV | Solución

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}}$$

del resultado obtenido en TAREA VII (P-15) :

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2)} = (1/2)_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

QED.

TAREA V | SOLUCIÓN

- Para el caso $n > m \Rightarrow (-m)_n = \dfrac{\Gamma(-m+n)}{\Gamma(-m)}$, dado que $n-m>0$, $\Gamma(n-m)$ finito y $\Gamma(-m) \to$ divergente, entonces: $(-m)_n = 0$

- Para el caso $m > n$

$$(-m)_n = \frac{\Gamma(-(m-n))}{\Gamma(-m)}$$

veamos :

para $n=0$: $\quad (-m)_0 = 1$.

para $n=1$: $(-m)_1 = \dfrac{\Gamma(-m+1)}{\Gamma(-m)} = -\dfrac{m\,\cancel{\Gamma(-m)}}{\cancel{\Gamma(-m)}} = (-1)^1\, m$

para $n=2$: $(-m)_2 = \dfrac{\Gamma(-m+2)}{\Gamma(-m)} = \dfrac{\Gamma(-m+1+1)}{\Gamma(-m)} = \dfrac{(-m+1)\,\Gamma(-m+1)}{\Gamma(-m)}$

$$= (-m+1)(-m) = (-1)^2\, m\,(m-1)$$

para $n=3$: $(-m)_3 = \dfrac{\Gamma(-m+3)}{\Gamma(-m)} = (-1)^3\, m(m-1)(m-2)$

Generalizando

$$\vdots$$

$$(-m)_n = (-1)^n\, m\,(m-1)\ldots(m-n+1)$$

o equivalentemente:

$$(-m)_n = (-1)^n\, \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)\,(m-n)(m-n-1)\ldots 1}{(m-n)(m-n-1)\ldots 1}$$

donde $(m-n)(m-n-1)\ldots 1 = (m-n)!$

y $m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots 1 = m!$

$$\therefore \quad (-m)_n = (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!}$$

QED

TAREA VI | Solución

Se tiene que $\cos(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

donde $(2n)! = \Gamma(2n+1)$, en términos de símbolos de Pochhammer se cumple que:

$$\Gamma(2n+1) = \cancel{\Gamma(1)}^{1}\,(1)_{2n} = (1)_{2n}$$

de la fórmula ~~dada~~ en Ec. (15) finalmente se cumple que:

$(2n)! = 4^n (1/2)_n (1)_n$ donde $(1)_n = n!$ (de Ec. (13))

$\therefore \cos(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{4^n (1/2)_n} \dfrac{x^{2n}}{n!}$ QED

TAREA VII | Solución

Recordando que $f(x)$ arbitraria, la serie de potencias en torno a $x=0$ está dada por la fórmula:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad \text{donde } a_n = \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=0}$$

Entonces se cumple que:

$$a_0 = (1+x)^a\Big|_{x=0} = 1$$

$$a_1 = \frac{d}{dx}(1+x)^a\Big|_{x=0} = a(1+x)^{a-1}\Big|_{x=0} = a$$

$$a_2 = \frac{d^2}{dx^2}(1+x)^a\Big|_{x=0} = a(a-1)$$

$$a_3 = \frac{d^3}{dx^2}(1+x)^a\Big|_{x=0} = a(a-1)(a-2)$$

$\vdots$ Generalizando

$$a_n = \frac{d^n}{dx^n}(1+x)^a\Big|_{x=0} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$$

$$= a\left[-(1-a)\right]\left[-(2-a)\right]\cdots\left[-(n-1-a)\right]$$

$$= a(-1)^{n-1}(-a+1)(-a+2)\cdots(-a+n-1)$$

$$= (-1)^n \underbrace{(-a)(-a+1)(-a+2)\cdots(-a+n-1)}_{(-a)_n}$$

(De acuerdo a Ec. (13))

$$= (-1)^n(-a)_n$$

Finalmente

$$(1+x)^a = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(-a)_n\frac{x^n}{n!}$$

QED