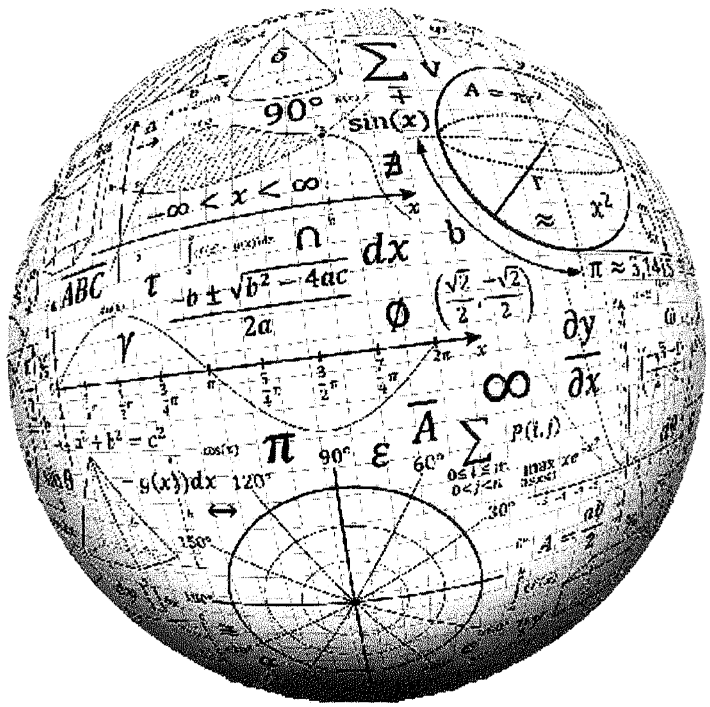
MÓDULO I
"MÉTODO DE BRACKETS"



Submódulo I : Herramientas matemáticas preliminares

Sección I - Función Gamma

Sección II - Función Beta

Sección III - Símbolos de Pochhammer

Sección IV - Función hipergeométrica generalizada univariable ☑

Sección V - Funciones hipergeométricas de más de una variable

(IV) Función hipergeométrica generalizada

ⓐ La función hipergeométrica está definida mediante la siguiente serie de potencias:

$$(19)\quad f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

Una notación de uso convencional es la siguiente:

$$(20)\quad f(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \middle| x\right)$$

, es esta notación la que adoptaremos en este curso. Muchas de las funciones conocidas fundamentales y especiales pueden expresarse como una serie o función hipergeométrica. A continuación listamos ejemplos de lo dicho anteriormente:

$$(21)\quad e^x = {}_0F_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| x\right)$$

$$(22)\quad (1+x)^a = {}_1F_0\left(\begin{matrix}-a\\ -\end{matrix}\,\middle|\, -x\right)$$

$$(23)\quad \cos(x) = {}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\ 1/2\end{matrix}\,\middle|\, -\tfrac{1}{4}x^2\right)$$

$$(24)\quad \operatorname{sen}(x) = x\ {}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\ 3/2\end{matrix}\,\middle|\, -\tfrac{1}{4}x^2\right)$$

$$(25)\quad \operatorname{Log}(1+x) = x\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,\ 1\\ 2\end{matrix}\,\middle|\, -x\right)$$

$$(26)\quad \operatorname{arsin}(x) = x\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,\ 1/2\\ 3/2\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right)$$

$$(27)\quad \arctan(x) = x\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,\ 1\\ 3/2\end{matrix}\,\middle|\, -x^2\right)$$

$$(28)\quad \operatorname{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,\ 1\\ 3/2\end{matrix}\,\middle|\, x^2\right)$$

Los polinomios de grado n también pueden ser descritos como series infinitas (hipergeométricas), algunos ejemplos:

$$(29)\quad P_n(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ n+1\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, \tfrac{1}{2}(1-x)\right)$$ Polinomio de Legendre

(30) $H_n(x) = (2x)^n \, {}_2F_0\left(\begin{matrix} -n/2 \, , \, \frac{(1-n)}{2} \\ - \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{1}{x^2}\right)$

También muchas funciones especiales

(31) $J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \, {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 1+\alpha \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{1}{4}x^2\right)$ Función de Bessel de orden α

(32) $\mathrm{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, -x^2\right)$ Función Error

etc.

<u>Obs.</u> Una lista más completa de series hiper_ geométricas asociadas a funciones cono_ cidas se puede bajar desde el portal en la carpeta de complementos.
(VER COMPLEMENTO I)

(b) A continuación estudiaremos las condiciones de convergencia de las series hipergeométricas.

Comenzaremos por conocer el criterio de convergencia de D'Alembert:

sea $\sum_{n\geq 0} A_n$ [illegible] $A_n > 0$ (Una sucesión de números positivos)

y además con la condicion $A_n \to 0$ cuando $n \to 0$, esto último condición necesaria para que la sume definida sea convergente.

DEF.

Definamos $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{A_{n+1}}{A_n}$

entonces si:

$L < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} A_n$ converge

$L > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} A_n$ diverge

$L = 1 \Rightarrow$ No entrega información respecto a la convergencia de la serie.

si A_n no necesariamente es positivo, aún más si es complejo, el criterio se enuncia como sigue:

sea $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|$.

DEF. Radio de convergencia de una serie.

Se define el radio de convergencia como

(33) $$R = \frac{1}{L}$$

¿Qué significa el radio convergencia?

Dada una función arbitraria $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$$

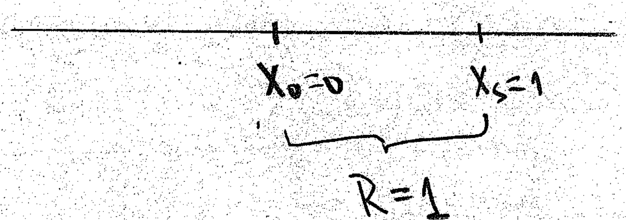
la serie Taylor de $f(x)$ en torno a x_0, donde el coeficiente a_n se define de manera usual:

(34) $$a_n = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=x_0},$$

para este caso R representa la distancia de x_0 a la singularidad de $f(x)$ (si las tiene) más cercana. Como ejemplo, sea $f(x) = \frac{1}{1-x}$, la representación en serie Taylor (en torno a $x_0=0$) está dada por la serie geométrica, esto es:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$

, la función tiene una singularidad en $x_s=1$, $\therefore$ el radio de convergencia gráficamente es el siguiente:



esto quiere decir que la serie representa a la función solo si $|x|<R$. Para el caso $|x|=R$ es necesario hacer un análisis extra. Para $|x|>R$ la serie diverge y no representa a $f(x)$.

Ahora bien, apliquemos lo anterior para estudiar la serie o función hipergeométrica.

Se tiene que:

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\dots a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix}\middle| Z\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n\dots(a_p)_n}{(b_1)_n\dots(b_q)_n}\frac{Z^n}{n!}, $$

definamos el sumando:

$$ A_n = \frac{(a_1)_n\dots(a_p)_n}{(b_1)_n\dots(b_q)_n}\frac{Z^n}{n!} $$

y

$$ A_{n+1} = \frac{(a_1)_{n+1}\dots(a_p)_{n+1}}{(b_1)_{n+1}\dots(b_q)_{n+1}}\frac{Z^{n+1}}{(n+1)!} $$

$$ \Downarrow $$

o equivalentemente:

$$ A_n = \frac{\Gamma(a_1+n)}{\Gamma(a_1)}\dots\frac{\Gamma(a_p+n)}{\Gamma(a_p)}\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1+n)}\dots\frac{\Gamma(b_q)}{\Gamma(b_q+n)}\frac{Z^n}{n!} $$

$$ A_{n+1} = \frac{\Gamma(a_1+n+1)}{\Gamma(a_1)}\dots\frac{\Gamma(a_p+n+1)}{\Gamma(a_p)}\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1+n+1)}\dots\frac{\Gamma(b_q)}{\Gamma(b_q+n+1)}\frac{Z^{n+1}}{(n+1)!} $$

luego $\displaystyle \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\Gamma(a_1+n+1)}{\Gamma(a_1+n)}\dots\frac{\Gamma(a_p+n+1)}{\Gamma(a_p+n)}\frac{\Gamma(b_1+n)}{\Gamma(b_1+n+1)}\dots\frac{\Gamma(b_q+n)}{\Gamma(b_q+n+1)}\frac{Z}{(n+1)}$

<u>Obs.</u> $\displaystyle \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)}$

Obs. $\dfrac{\Gamma(a_i+n+1)}{\Gamma(a_i+n)} = (a_i+n) \quad (i=1,\dots,p)$

Obs. $\dfrac{\Gamma(b_i+n)}{\Gamma(b_i+n+1)} = \dfrac{1}{(b_i+n)} \quad (i=1,\dots,q)$

$\therefore$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(a_1+n)\dots(a_p+n)}{(b_1+n)\dots(b_q+n)}\,\frac{z}{(n+1)}$$

Finalmente:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a_1+n)\dots(a_p+n)}{(b_1+n)\dots(b_q+n)}\,\frac{z}{(n+1)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^p}{n^q}\,\frac{z}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|n^{p-q-1}\,z\right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} n^{p-q-1}\,|z|$$

Se concluye entonces que:

i) si $(p-q-1)>0 \Rightarrow$ La serie hipergeométrica diverge independiente del valor de z.

ii) si $(p-q-1)<0 \Rightarrow$ La serie hipergeométrica converge independiente del valor de z.

iii) Si $p-q-1=0$ entonces:

$L=|z| \implies$ Si $|z|<1$ la serie converge
Si $|z|>1$ la serie diverge.

El caso $|z|=1$ será descrito posteriormente.

DEF. El radio de convergencia R se define como:

$$R=\frac{1}{L}$$

$\therefore$ si $(p-q-1)>0 \Rightarrow R=0 \Rightarrow$ La serie representa a la función solo para $z=0$.

si $(p-q-1)<0 \Rightarrow R\to\infty \Rightarrow$ La serie converge $\forall z$.

si $(p-q-1)=0 \Rightarrow R=1$

Ejemplos:

i) ${}_2F_0\left(\begin{matrix}a_1, a_2\\ -\end{matrix}\middle| z\right)$ converge solo para $z=0$

ii) ${}_1F_1\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\middle| z\right)$ converge para todo z

iii) ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1 \end{matrix}\middle| z\right)$ converge para $|z|<1$

La convergencia para el caso $p=q+1$ y $|z|=1$ requiere condiciones extras, esta es que $\mathrm{Re}(w)>0$, donde w es denominado exceso paramétrico y está dado por:

$$w = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{q+1} a_j$$

Ej. ${}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \end{matrix}\middle| 1\right)$ diverge

Ej. ${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \\ 1 \end{matrix}\middle| 1\right)$ converge

TAREA I

Sea $I = \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \displaystyle\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt$

con $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0 \wedge |\mathrm{Arg}(1-z)|<\pi$, demostrar que

$$I = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right)$$

Hint: Puede utilizar el resultado del problema VII (pág. 23).

TAREA II

Halle $\frac{d^n}{dz^n}\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\middle| z\right)\right]$ para $n \in \mathbb{N}$,

generalice este resultado para ${}_pF_q\left(\cdots \middle| z\right)$.

TAREA III

Halle la integral indefinida:

$$I = \int x^{\alpha-1}\, {}_pF_q\left(\begin{matrix}\{a\}\\ \{b\}\end{matrix}\middle| x\right) dx$$

donde $\{a\} = a_1, \dots, a_p \;\wedge\; \{b\} = b_1, \dots, b_q$

TAREA IV

Demuestre que ${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1, \dots, -k, \dots, a_p\\ b_1, \dots, b_q\end{matrix}\middle| z\right)$

es un polinomio de grado k si $k \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA I / Solución

Del problema VII (pág. 23) podemos escribir lo siguiente:

$$(1-tz)^{-a} = \sum_{n\geq 0} (a)_n \frac{(tz)^n}{n!}$$

luego:

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(\sum_{n\geq 0}(a)_n \frac{(tz)^n}{n!}\right) dt$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n\geq 0} (a)_n \frac{z^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}\, dt}_{B(b+n,\, c-b)}$$

función Beta, ver Ec. (9)

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n\geq 0} (a)_n B(b+n, c-b) \frac{z^n}{n!}$$

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\cancel{\Gamma(c-b)}} \sum_{n\geq 0} (a)_n \frac{\Gamma(b+n)\cancel{\Gamma(c-b)}}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

<u>Obs.</u> $\Gamma(b+n) = \Gamma(b)(b)_n$

$\Gamma(c+n) = \Gamma(c)(c)_n$

Finalmente:

$$I = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$$

QED.

Obs. Se obtiene el mismo resultado a partir de las integrales siguientes:

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty t^{-b+c-1}(1+t)^{a-c}(1+t-z)^{-a}\,dt$$

$$\left(Re(c) > Re(b) > 0 \wedge |Arg(1-z)| < \pi\right)$$

$$I = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{b-1}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| tz\right) dt$$

$$\left(Re(b) > 0 \right)$$

PROBLEMA II | Solución

Sea $\quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

$J_1 = \frac{d}{dz}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n}\, n \frac{z^{n-1}}{n!}$, hacemos $m = n-1$

$$\Downarrow$$

$$= \sum_{m\geq 0} \frac{(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{(c)_{m+1}} (m+1) \frac{z^m}{(m+1)!}$$

Obs. $(a)_{m+1} = \frac{\Gamma(a+m+1)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a+1)(a+1)_m}{\Gamma(a)} = a(a+1)_m$

análogamente

$(b)_{m+1} = b(b+1)_m \quad$ y $\quad (c)_{m+1} = c(c+1)_m$

también se cumple que $\frac{m+1}{(m+1)!} = \frac{(m+1)}{\Gamma(m+1+1)} = \frac{1}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{m!}$

$\therefore$

$$(*)\quad \frac{d}{dz}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|z\right) = \frac{ab}{c}\sum_{m\geq 0}\frac{(a+1)_m\,(b+1)_m}{(c+1)_m}\,\frac{z^m}{m!}$$

$$J_1 = \frac{ab}{c}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,\ b+1\\c+1\end{matrix}\middle|z\right)$$

Ahora evaluemos

$$J_2 = \frac{d^2}{dz^2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|z\right)$$

esto es:

$$J_2 = \frac{ab}{c}\,\frac{d}{dz}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a',b'\\c'\end{matrix}\middle|z\right)\quad \text{con}\quad \begin{matrix}a'=a+1\\b'=b+1\\c'=c+1\end{matrix}$$

utilizando el resultado en (*):

$$J_2 = \frac{ab}{c}\,\frac{a'b'}{c'}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a'+1,b'+1\\c'+1\end{matrix}\middle|z\right)$$

$$J_2 = \frac{a(a+1)\;b(b+1)}{c(c+1)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+2,b+2\\c+2\end{matrix}\middle|z\right)$$

Se puede generalizar este resultado para J_n, la n-ésima derivada de ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|z\right)$:

$$J_n = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)\;\;b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)}$$

$$\times\;{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+n,b+n\\c+n\end{matrix}\middle|z\right)$$

Usando la fórmula en Ec. (13) se tiene que:

$$a(a+1)\ldots(a+n-1) = (a)_n$$
$$b(b+1)\ldots(b+n-1) = (b)_n$$
$$c(c+1)\ldots(c+n-1) = (c)_n$$

Finalmente:

$$J_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} a+n, b+n \\ c+n \end{matrix}\right| z\right)$$

Este resultado se puede generalizar:

$$\frac{d^n}{dz^n} \, {}_pF_q\left(\left.\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right| z\right) = \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n}$$
$$\times \, {}_pF_q\left(\left.\begin{matrix} a_1+n, \ldots, a_p+n \\ b_1+n, \ldots, b_q+n \end{matrix}\right| z\right)$$

PROBLEMA III | Solución

$$I = \int x^{\alpha-1} \, {}_pF_q\left(\left.\begin{matrix} \{a\} \\ \{b\} \end{matrix}\right| x\right) dx$$

$$= \int x^{\alpha-1} \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_n}{\prod_{j=1}^{q} (b_j)_n} \frac{x^n}{n!} \, dx$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_n}{\prod_{j=1}^{q} (b_j)_n} \frac{1}{n!} \underbrace{\int x^{\alpha+n-1} dx}_{\frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n}}$$

Luego

$$I = X^{\alpha} \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_n}{\prod_{j=1}^{q}(b_j)_n} \frac{X^n}{n!} \frac{1}{\alpha+n}$$

Obs. $\Gamma(\beta+1) = \beta\,\Gamma(\beta)$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} \implies \alpha+n = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

Obs. $\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha)_n} = \alpha \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha)_n} = \alpha+n$

entonces:

$$I = \frac{X^{\alpha}}{\alpha} \underbrace{\sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha+1)_n} \frac{X^n}{n!}}_{{}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p,\alpha \\ b_1,\dots,b_q,\alpha+1\end{matrix}\middle| X\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{X^{\alpha}}{\alpha}\, {}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p,\alpha \\ b_1,\dots,b_q,\alpha+1\end{matrix}\middle| X\right) + C$$

cte. de integración

PROBLEMA IV | Solución

Analizaremos un caso simple: ${}_2F_1\left(\begin{matrix}-k, a\\ b\end{matrix}\middle| x\right)$

a partir de esto generalizamos para una función hipergeométrica arbitraria.

Obs. $(-k)_n = \dfrac{\Gamma(-k+n)}{\Gamma(-k)}$, donde $\Gamma(-k)$ diverge para $k \in \mathbb{N}$.

Es fácil darse cuenta que para $n > k$

$\dfrac{\Gamma(-k+n)}{\Gamma(-k)} = 0$ dado que $\Gamma(-k+n) =$ Valor finito.

y para $n \leq k$ $(-k)_n =$ Valor finito no nulo.

Ver TAREA V en pág. 26

luego

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-k, a\\ b\end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-k)_n (a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!} $$

$$ = 1 + \frac{(-k)_1 (a)_1}{(b)_1} \frac{x}{1!} + \frac{(-k)_2 (a)_2}{(b)_2} \frac{x^2}{2!} + \cdots $$

$$ + \frac{(-k)_k (a)_k}{(b)_k} \frac{x^k}{k!} + \text{TÉRMINOS NULOS} $$

$\Downarrow$

el cual es un polinomio de grado k. El mismo análisis es válido para ${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1, \ldots, -k, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\middle| x\right)$.

(c) La ecuación diferencial hipergeométrica

Sea

$$(35) \qquad f(z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix}\middle| z\right),$$

dicha función es una de las soluciones de la ecuación diferencial lineal a continuación:

$$(36) \quad \left[\hat{D}(\hat{D}+b_1-1)\dots(\hat{D}+b_q-1)\right]f(z) = \left[z(\hat{D}+a_1)\dots(\hat{D}+a_p)\right]f(z)$$

donde hemos definido el operador diferencial:

$$(37) \qquad \hat{D} = z\frac{d}{dz}$$

Ejemplo: la función ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right)$ es solución de la EDO:

$$(38) \qquad \hat{D}(\hat{D}+c-1)f(z) = z(\hat{D}-a)(\hat{D}-b)f(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\left[z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+c-1\right) - z\left(z\frac{d}{dz}-a\right)\left(z\frac{d}{dz}-b\right)\right]f(z) = 0$$

o escrita de forma "canónico":

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}f(z) + \left[c-(a+b-1)z\right]\frac{d}{dz}f(z) - abf(z) = 0$$

TAREA I

A partir de la representación integral para la función ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$ dada en la TAREA I (pág. 39) demuestre que para $z=1$ se cumple que:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} $$

TAREA II

Evalúe la integral:

$$ I = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{b-1}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| tz\right) dt $$

con $\mathrm{Re}(b) > 0$ para asegurar existencia de la integral.

TAREA III

Utilice las series hipergeométricas pera determinar la convergencia de las siguientes sumas infinitas:

a) $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}$

b) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)}{n^2-\alpha^2} 3^n$; $\alpha \notin \mathbb{N}$

c) $\sum_{n\geq 1}' \frac{z^n}{n^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS II

1) Demuestre que la EDO:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x \frac{d}{dx} f(x) + (x^2-\alpha^2) f(x) = 0 \; ; \; \alpha \in \mathbb{C}$$

da origen a la función de Bessel $J_\alpha(x)$.

Ayuda: Observe la representación hipergeometrica de $J_\alpha(x)$ en COMPLEMENTO I y reescriba está ecuación de la forma mostrado en Ec. (36)

2) Demuestre que:

$$
{}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q \end{matrix}\middle| z\right) = \frac{\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_p)\Gamma(b_q-a_p)}
$$

$$
\times \int_0^1 t^{a_p-1}(1-t)^{b_q-a_p-1}\; {}_{p-1}F_{q-1}\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_{p-1} \\ b_1,\dots,b_{q-1} \end{matrix}\middle| zt\right) dt
$$

3) Utilizando el resultado del problema (2), escriba la función:

$$
f(z) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} a_1,a_2,a_3 \\ b_1,b_2 \end{matrix}\middle| z\right)
$$

como una integral doble.

TAREA I | Solución

De la pág. (39) se observa que:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt $$

para $z=1$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1}\,dt $$

La integral resultante tiene la conocida estructura de la función Beta:

$$ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1}\,dt = B(b, c-a-b) $$

$$ = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} $$

$$ \therefore \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)}{\cancel{\Gamma(b)}\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(b)}\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} $$

$$ = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} $$

QED

TAREA II | Solución

$$I = \int_0^\infty e^{-t} t^{b-1} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| tz\right) dt$$

veamos:

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| tz\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{(tz)^n}{n!}$$

$$\Downarrow$$

reemplazando esta expresión en la integral e intercambiando el orden de las sumas $\Sigma \rightleftarrows \int$, tenemos entonces

$$I = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \underbrace{\int_0^\infty t^{b+n-1} e^{-t} \, dt}_{\Gamma(b+n)}$$

Luego

$$I = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \Gamma(b+n)$$

pero $\Gamma(b+n) = \Gamma(b) (b)_n$

$$\therefore \quad I = \Gamma(b) \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

$$\Downarrow$$

$$I = \Gamma(b) \, {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$$

TAREA III | Solución

a) $$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n\geq 0} n!\,\frac{(1/2)^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\Gamma(n+1)\,\frac{(1/2)^n}{n!}$$

luego $\Gamma(1+n)=\cancelto{1}{\Gamma(1)}\,(1)_n$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n\geq 0}(1/2)^n={}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix}\,\Big|\,\frac{1}{2}\right)\implies$$ El radio de convergencia de esta serie es 1 y el argumento es $1/2$, ∴ la serie original converge.

b) $$\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)}{(n^2-\alpha^2)}3^n=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)}{(n+\alpha)(n-\alpha)}3^n$$

Obs. $\Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta)\implies\beta=\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}\implies$

$$(n+2)=\frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n+2)}$$
$$(n+\alpha)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}$$
$$(n-\alpha)=\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)}$$

entonces:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)}{(n^2-\alpha^2)}3^n=\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n+2)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+1)}\,3^n$$

Obs. $\Gamma(n+\beta)=\Gamma(\beta)\,(\beta)_n$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)}{(n^2-\alpha^2)}3^n=\frac{\Gamma(3)\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(2)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha+1)}\sum_{n\geq 0}\frac{(3)_n(\alpha)_n(-\alpha)_n\,3^n}{(2)_n(1+\alpha)_n(1-\alpha)_n}$$

o de manera equivalente:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)}{(n^2-\alpha^2)} 3^n = -\frac{2}{\alpha^2} \sum_{n\geq 0} \frac{(3)_n (\alpha)_n (-\alpha)_n}{(2)_n (1+\alpha)_n (1-\alpha)_n} \frac{(1)_n}{n!} 3^n$$

<u>Obs.</u> $(1)_n = n!$

Finalmente:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)}{(n^2-\alpha^2)} 3^n = -\frac{2}{\alpha^2}\, {}_4F_3\left(\begin{matrix} 3, \alpha, -\alpha, 1 \\ 2, 1+\alpha, 1-\alpha \end{matrix} \middle| 3\right)$$

$\therefore$ la serie diverge dado que es de la forma ${}_qF_{q-1}(\cdots)$ que tiene radio de convergencia 1 pero el argumento en este caso es 3.

c) $$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2} = z \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{n^2} \quad ; \text{ sea } \quad m = n-1$$

$$= z \sum_{m\geq 0} \frac{z^m}{(m+1)^2} = z \sum_{m\geq 0} \frac{m!}{(m+1)(m+1)} \frac{z^m}{m!}$$

$$= z \sum_{m\geq 0} \frac{\Gamma(1+m)\Gamma(1+m)\Gamma(1+m)}{\Gamma(2+m)\Gamma(2+m)} \frac{z^m}{m!}$$

$$= z \sum_{m\geq 0} \frac{(1)_m (1)_m (1)_m}{(2)_m (2)_m} \frac{z^m}{m!} = z\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 2, 2 \end{matrix} \middle| z\right)$$

Esta serie tiene radio de convergencia 1, luego la convergencia se da si se cumple que $|z| < 1$.