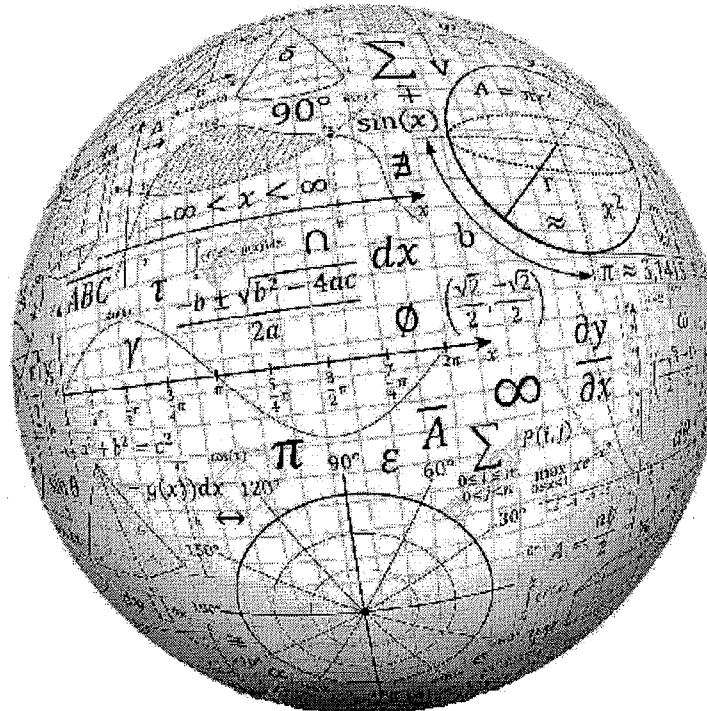


MÓDULO I

"MÉTODO DE BRACKETS"



Submódulo I : Herramientas matemáticas preliminares

Sección I - Función Gamma

Sección II - Función Beta

Sección III - Símbolos de Pochhammer

Sección IV - Función hipergeométrica generalizada univariable

Sección V - Funciones hipergeométricas de más de una variable

(I) Función Gamma de Euler: $\Gamma(z)$

(L. Euler-1729)

Representación integral

con $z \in \mathbb{C}$ y

$$(1) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt ; \operatorname{Re}(z) > 0$$

↓
Existencia de la
integral

↓
Valor finito y
definido

Haciendo el cambio de variable $u = e^{-t}$ obtenemos
otra representación a partir de Ec. (1):

$$(2) \quad \Gamma(z) = \int_0^1 [\log(\frac{1}{u})]^{z-1} du$$

TAREA

Suponga que $z = \alpha \in \mathbb{R}$, demuestre que $\alpha > 0$
para que la integral converja.

Propiedades

$$(3) \quad \Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (\text{Ec. de recurrencia})$$

$$(4) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(5) \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$(6) \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

$$(7) \Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

$$(8) \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \quad (\text{fórmula de duplicación})$$

TAREA II

Demuestre la Ec. (3). Utilice integración por partes en la representación integral dada en Ec. (1).

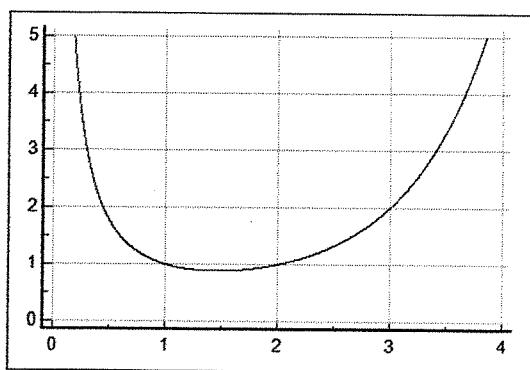
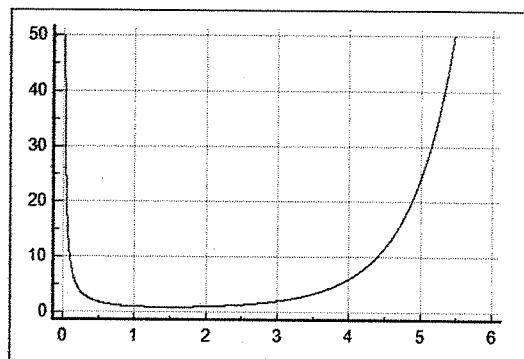
TAREA III

Demuestre que $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \in \mathbb{N}$)

TAREA IV

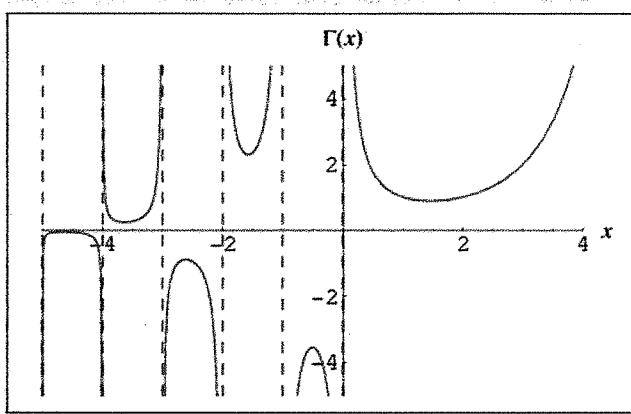
Utilice la Ec. (3) y el hecho que $\Gamma(0^+) = \infty$ para demostrar que $\Gamma(-n^+)$ ($n \in \mathbb{N}$) son divergentes. El signo (+) indica aproximación a $(-n)$ por la derecha.

Para $z = x \in \mathbb{R}$ la gráfica de $\Gamma(x)$ para $x > 0$ es la siguiente:



Haciendo uso de la Ec.(3) es posible mostrar también la gráfica para $x < 0$:

Se observa en este gráfico que $\Gamma(-n) \rightarrow \text{diverge}$ para $n \in \mathbb{N}$



TAREA V

A partir de la Ec. (5) demuestre las ecs. (6) y (7)

TAREA VI

Demuestre que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

TAREA VII

Halle una expresión para $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ ($n \in \mathbb{N}$)

TAREA VIII

Conociendo que $\int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{u+1} du = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, demuestre

que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ ($\operatorname{Re}(z) \in]0, 1[$)

(II) Función Beta : $B(m,n)$

La función Beta se define de la siguiente manera:

$$(9) \quad B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx ; \quad \operatorname{Re}(m), \operatorname{Re}(n) > 0$$

Otras representaciones integrales son las siguientes:

$$(10) \quad B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

$$(11) \quad B(m,n) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta d\theta$$

TAREA IX

Halle el cambio de variable que transforme la Ec. (9) en la integral de la Ec. (10).

TAREA X

$$\text{Demuestre que } B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

TAREA XI

Demuestre que $B(m,n)$ se puede reescribir como la expresión dada en Ec. (11)

TAREA XII

Demuestre la identidad dada en Ec. (8)

Ejercicios propuestos I

1) Evalúe

a) $\Gamma(-3/2)$
b) $\Gamma(7/2)$
c) $\frac{\Gamma(-3^+)}{\Gamma(-2^+)}$

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt ; \text{ con } s > 0$

3) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

4) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin(2x)} dx$

5) $\int_0^1 t^{x-1} (\log \frac{1}{t})^{y-1} dt ; \text{ con } y, x > 0$

Demuestre las siguientes identidades

6) $\int_0^\infty \frac{x^a}{e^x} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{(\log a)^{a+1}}$

$$7) \int_0^1 (x \log x)^4 dx = \frac{4!}{5^5}$$

$$8) \int_0^1 x^4 (1-x)^5 dx = 2 \frac{\Gamma(10)\Gamma(6)}{\Gamma(16)}$$

$$9) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot \theta} d\theta = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$10) \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$$11) \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{32}$$

$$12) \int_0^\infty e^{2ax - x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{a^2}$$

$$13) \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{15}$$

TAREA I | Solución

$$* \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt + \int_\epsilon^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

con $0 < \epsilon \ll 1$

Se observa que la segunda integral del lado derecho es siempre finita independiente del valor de α . Por otro lado, en el intervalo $[0, \epsilon]$ se cumple que :

$$e^{-t} \sim 1 \text{ (con } \epsilon \text{ muy pequeño)}$$

Luego la integral resulta ser :

$$\int_0^\epsilon t^{\alpha-1} e^{-t} dt \approx \int_0^\epsilon t^{\alpha-1} dt = \frac{t^\alpha}{\alpha} \Big|_0^\epsilon$$



Se concluye que : - α no puede ser negativo, sino diverge en $t=0$.

- α debe ser no nulo, sino diverge independiente del valor de $t \in [0, \epsilon]$



En resumen $\alpha > 0$ para que la integral que representa a $\Gamma(\alpha)$ tenga un valor definido.

Esto es válido para $z \in \mathbb{C}$ con la condición $\operatorname{Re}(z) > 0$.

QED /

TAREA II | Solución

Se $\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$, utilizando integración por partes:

$$u = t^z \quad dv = e^{-t} dt \\ du = zt^{z-1} dt \quad v = -e^{-t}$$

$$\therefore \Gamma(z+1) = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t})(zt^{z-1}) dt$$

dado que $z > 0$ (condición de convergencia), el primer término del lado derecho es nulo.

Luego:

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \text{ por definición la integral es } \Gamma(z)$$

$$\text{Finalmente } \Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

Obs. Esta relación funcional (de recurrencia) al no involucrar una suma definida (integración) no condiciona los valores que puede asumir el parámetro z , por lo tanto es una fórmula que permite la continuación analítica de z a valores ubicados en el semiplano izquierdo $\Rightarrow \operatorname{Re}(z) < 0$.

Obs. Las sumas (continuas o discretas) definidas (con límites) están sujetas a condiciones de convergencia, las indefinidas no...

TAREA III | solución

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} dt ; (n \in \mathbb{N})$$

Obs. $t e^{-\alpha t} = -\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha t} = (-1)^1 \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha t}$

$$t^2 e^{-\alpha t} = \frac{d^2}{d\alpha^2} e^{-\alpha t} = (-1)^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} e^{-\alpha t}$$

$$t^3 e^{-\alpha t} = -\frac{d^3}{d\alpha^3} e^{-\alpha t} = (-1)^3 \frac{d^3}{d\alpha^3} e^{-\alpha t}$$

⋮

Generalizando

$$t^n e^{-\alpha t} = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{-\alpha t}$$

Luego

$$\Gamma(n+1) = (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \left[\frac{d^n}{d\alpha^n} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \right] \right]$$

$$= (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[\frac{1}{\alpha} \right]$$

Obs. Es fácil demostrar que

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \left[\frac{1}{\alpha} \right] = (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad (\text{Demuéstrelo U.d.})$$

Finalmente:

$$\Gamma(n+1) = (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}} = (-1)^{2n} \frac{1}{n!}$$

$$\Gamma(n+1) \stackrel{\text{QED}}{=} n! / \cancel{n!}$$

Obs. $\Gamma(n+1) = n!$ puede demostrarse utilizando la fórmula recursiva dada en Ec. (3).

TAREA IV | Solución

Se conoce que $\Gamma(0^+) = \infty$, utilizando la Ec. (3) se cumple que:

$$p|z=-1 \longrightarrow \Gamma(0) = -1 \Gamma(-1) \Rightarrow \Gamma(-1^+) = -\Gamma(0^+) //$$

$$p|z=-2 \longrightarrow \Gamma(-1) = -2 \Gamma(-2) \Rightarrow \Gamma(-2^+) = -\frac{1}{2} \Gamma(-1^+) //$$

$$\downarrow$$
$$p|z=-3 \longrightarrow \Gamma(-2) = -3 \Gamma(-3) \Rightarrow \Gamma(-3^+) = -\frac{1}{3} \Gamma(-2) //$$

$$\downarrow$$
$$\Gamma(-3^+) = -\frac{1}{2 \cdot 3} \Gamma(0^+) //$$

generalizando:

$$p|z=-n \Rightarrow \Gamma(-n^+) = \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(0^+)$$



$$\Gamma(-n^+) = (-1)^n \infty$$

Este resultado se refleja en la gráfica de la página 3 del apunte.

TAREA V | Solución

Demostremos en primer lugar la Ec. (6):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\Gamma(1-z) = (-z)\Gamma(-z) = -z\Gamma(z)$$

∴

$$\Gamma(z) [-z\Gamma(-z)] = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

QED

Ahora para la Ec. (7) hacemos $z = \frac{1}{2} + z'$
en la identidad en Ec. (5), esto es:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z'\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{2} - z'\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} + z'\right)\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z'\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z'\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi z'\right)} = \frac{\pi}{\cos(\pi z')}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \quad \text{QED}$$

TAREA VI | Solución

FORMA ABREVIADA:

se tiene que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, si hacemos $z = \frac{1}{2}$



$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)}$$



$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

(QED)

FORMA EXTENSA:

se cumple que $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

con el cambio de variable

$$t = x^2 \rightarrow dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

se tiene:

$$I = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (*)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} I &= [I \cdot I]^{1/2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

↑ Una integral de superficie

haciendo transformación de Coordenadas



CARTESIANAS \rightarrow POLAR

entonces $r^2 = x^2 + y^2$

$$r dr d\theta = dx dy$$

$$\begin{aligned}\therefore I &= \left[\int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r e^{-r^2} dr d\theta \right]^{1/2} \\&= \left[2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \right]^{1/2}; \quad r dr = \frac{1}{2} d(r^2) \\&= \left[\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) \right]^{1/2} \\&= \left[\pi \int_0^{\infty} e^{-u} du \right]^{1/2} = \sqrt{\pi} \quad (**)\end{aligned}$$

Por comparacion de (*) y (**) se concluye que:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

TAREA VII | Solución

Analicemos $\Gamma(n+1/2)$ conociendo $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$p|n=0 \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$p|n=1 \quad \Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$p|n=2 \quad \Gamma(2+\frac{1}{2}) = \Gamma(1+1+\frac{1}{2}) = (1+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\pi}$$

$$p|n=3 \quad \Gamma(3+\frac{1}{2}) = (2+\frac{1}{2})\Gamma(2+\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\Gamma(2+\frac{1}{2}) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{\pi}$$

Generalizando para un n arbitrario:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{(2n-1)}{2} \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

TAREA VIII | Solución

Se tiene que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z)$ donde

$$B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{(1+y)^{z+(1-z)}} dy = \int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\therefore \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ QED}$$

Obs. La obtención del resultado de la integral en términos de $\sin(\pi z)$ se realiza a través de integración de contorno.

TAREA IX / Solución

Sea $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$; haciendo el cambio de variable:

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$$



$$dx = \frac{1}{(1+y)^2} dy$$

$$\int_0^\infty \dots dx \rightarrow \int_0^\infty \dots dy$$

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{n-1} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{n-1} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

QED.

TAREA X | Solución

Obs. $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-At} dt = \frac{\Gamma(z)}{A^z}$ (Demuéstrelo) (*)

Luego en la integral:

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

el denominador del

integrandos lo reescribimos como:

$$\frac{1}{(1+y)^{m+n}} = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty t^{m+n-1} e^{-(1+y)t} dt$$

$$\therefore B(m, n) = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty \int_0^\infty y^{m-1} t^{m+n-1} e^{-(1+y)t} dy dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty t^{m+n-1} e^{-t} \left[\int_0^\infty y^{m-1} e^{-yt} dy \right] dt$$

$\underbrace{\quad}_{\frac{\Gamma(m)}{t^m}}$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty t^{m+n-1} e^{-t} \frac{\Gamma(m)}{t^m} dt$$

$$= \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

$\underbrace{\quad}_{\Gamma(n)}$

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

QED

TAREA XI / Solución

$$\text{Veamos: } \Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} e^{-(x+y)} dx dy$$

haciendo el cambio de variables:

$$x = y^2 \quad y = \gamma^2 \Rightarrow \Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+\gamma^2)} dx dy$$

haciendo el cambio de coordenadas



cartesianas a polares



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

$$\therefore \Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^{2m+2n-2} e^{-r^2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta r dr d\theta \\ = 4 \int_0^\infty r^{2m+2n-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \\ = 4 \int_0^\infty (r^2)^{m+n-1} e^{-r^2} \frac{1}{2} d(r^2) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \\ = 4 \int_0^\infty u^{m+n-1} e^{-u} \frac{du}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \\ = 2 \Gamma(m+n) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta$$

Finalmente

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta$$

QED

TAREA XII | Solución

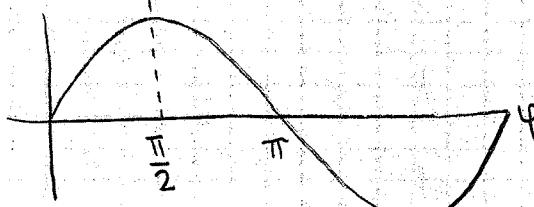
$$\text{Se tiene que } B(z, z) = \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2z-1} \theta \sin^{2z-1} \theta d\theta$$

$$\text{donde } \cos^{2z-1} \theta \sin^{2z-1} \theta = (\cos \theta \sin \theta)^{2z-1} = \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^{2z-1}$$

$$\therefore \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2 \cdot 2^{-2z+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1}(2\theta) d\theta ; \text{ sea } \varphi = 2\theta$$

$$= 2^{1-2z} \int_0^{\pi} \sin^{2z-1} \varphi d\varphi$$

Obs.



$\sin \varphi$ es simétrico respecto
a $\varphi = \pi/2$.

$$\therefore \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1} \varphi d\varphi = 2^{1-2z} B(z, 1/2)$$

$B(z, 1/2)$

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \frac{\cancel{\Gamma(z)} \cancel{\Gamma(1/2)}}{\Gamma(z + 1/2)} \stackrel{\downarrow}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma(z + 1/2)$$

QED

(III) Símbolos de Pochhammer

Los símbolos de Pochhammer se definen de la siguiente manera:

$$(12) \quad (z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

O equivalentemente:

$$(13) \quad (z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1).$$

La Ec.(13) es evidente con los siguientes ejemplos:

$$(z)_0 = \frac{\Gamma(z+0)}{\Gamma(z)} = 1$$

$$(z)_1 = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{z\Gamma(z)}{\Gamma(z)} = z$$

$$\begin{aligned} (z)_2 &= \frac{\Gamma(z+2)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(z+1+1)}{\Gamma(z)} = \frac{(z+1)\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{(z+1)z\Gamma(z)}{\Gamma(z)} \\ &= z(z+1) \end{aligned}$$

$$(z)_3 = z(z+1)(z+2)$$

etc.

PROPIEDADES

$$(14) \quad (z)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(15) \quad (z)_{2n} = 4^n \left(\frac{z}{2}\right)_n \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)_n$$

$$(16) \quad (z)_{2n+1} = 2^{2n+1} \left(\frac{z}{2}\right)_{n+1} \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)_n$$

$$(17) \quad (2z)_n = \begin{cases} 2^n (z)_{\frac{n}{2}} (z + \frac{1}{2})_{\frac{n}{2}} & ; n = \text{PAR} \\ 2^n (z)_{\frac{(n+1)}{2}} (z + \frac{1}{2})_{\frac{n-1}{2}} & ; n = \text{IMPAR} \end{cases}$$

$$(18) \quad \frac{(z)_n}{(z)_m} = \begin{cases} (z+m)_{n-m} & ; n \geq m \\ \frac{1}{(z+n)_{m-n}} & ; m \geq n \end{cases}$$

TAREA I
~~~~~

Demuestre la identidad en Ec. (14)

TAREA II  
~~~~~

Demuestre la identidad en Ec. (15)

TAREA III
~~~~~

Demuestre que  $(1)_n = n!$   $(n \in \mathbb{N})$

TAREA IV

Demuestre la siguiente identidad:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

Donde se utiliza el doble factorial el cual está definido como:

$$n!! = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2k) = n(n-2)(n-4)\dots 4 \cdot 2$$

Si  $n = \text{PAR}$  y

$$n!! = \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (2k-1) = n(n-2)(n-4)\dots 3 \cdot 1$$

Si  $n = \text{IMPAR}$

TAREA V

Demuestre que para  $n, m \in \mathbb{N}$  se cumple que:

$$(-m)_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n m!}{(m-n)!} & ; 0 \leq n \leq m \\ 0 & ; n > m \end{cases}$$

TAREA VI

La expansión en serie de Taylor en torno a  $x=0$  para la función  $\cos x$  está dada por la expresión:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

Demuestre que es posible reescribirlo como:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (1/2)_n} \frac{x^{2n}}{n!}$$

TAREA VII

Repita el proceso del problema VI y demuestre que

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-a)_n \frac{x^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{C})$$

Demuestre además que si  $a=m \in \mathbb{N}$ , la serie se trunca dando origen a un polinomio de grado  $m$ , determine dicho polinomio.

## TAREA I | Solución

Se tiene que  $\Gamma(z) = \Gamma(z-1+1) = (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)\Gamma(z-2+1)$   
 $= (z-1)(z-2)\Gamma(z-2)$   
 $= (z-1)(z-2)(z-3)\dots(z-n)\Gamma(z-n)$

Luego  $\frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} = \underbrace{[(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{-1}}_{n \text{ factores}}$

$$\frac{\Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{(z-1)\dots(z-n)}$$

$$(z)_{-n} = (-1)^n \frac{1}{(1-z)\dots(n-z)} \quad (*)$$

Por otro lado se tiene que:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$$

si hacemos  $a = 1-z$  entonces se cumple que:

$$(1-z)_n = (1-z)(2-z)\dots(n-z) \quad \text{reemplazando en (*),}$$

obtenemos que:

$$(z)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n} \quad \text{QED}$$

## TAREA II | SOLUCIÓN

A partir de la identidad:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) (*)$$

Veamos:

$$(z)_{2n} = \frac{\Gamma(z+2n)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(2(z|_2+n))}{\Gamma(z)}$$

Ahora:

$$\Gamma(2(z|_2+n)) = \Gamma(2z) ; z = \frac{z}{2} + n$$

$$\text{de } (*) \Rightarrow \Gamma(2(z|_2+n)) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2^{z+2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z|_2+n) \Gamma(z|_2+n+\frac{1}{2})$$

Usando la fórmula

$$\downarrow \quad \Gamma(a+n) = \Gamma(a)(a)_n \quad \text{obtenemos:}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(z+2n) &= \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z|_2) (z|_2)_n \Gamma(z|_2 + \frac{1}{2}) (z|_2 + \frac{1}{2})_n \\ &= \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\Gamma(z|_2) \Gamma(z|_2 + \frac{1}{2})}_{\Gamma(z)} (z|_2)_n (z|_2 + \frac{1}{2})_n 2^{2n} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{\Gamma(z-2n)}{\Gamma(z)} = (z)_{2n} = 2^{2n} (z|_2)_n (z|_2 + \frac{1}{2})_n$$

QED.

### TAREA III | Solución

$$(1)_n = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} = n!.$$

QED

### TAREA IV | Solución

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}}$$

del resultado obtenido en TAREA VII (P-15) :

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2)} = (1/2)_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

QED.

### TAREA V | SOLUCIÓN

- Para el caso  $n > m \Rightarrow (-m)_n = \frac{\Gamma(-m+n)}{\Gamma(-m)}$ , donde  
que  $n-m > 0 \rightarrow \Gamma(n-m)$  finito  
y  $\Gamma(-m) \rightarrow$  divergente, entonces:  $(-m)_n = 0$

- Para el caso  $m > n$

$$(-m)_n = \frac{\Gamma(-(m-n))}{\Gamma(-m)}$$

veremos:

para  $n=0$ :  $(-m)_0 = 1$

$$\text{para } n=1 : (-m)_1 = \frac{\Gamma(-m+1)}{\Gamma(-m)} = -\frac{m}{\Gamma(-m)} = (-1)^1 m$$

$$\text{para } n=2 : (-m)_2 = \frac{\Gamma(-m+2)}{\Gamma(-m)} = \frac{\Gamma(-m+1+1)}{\Gamma(-m)} = \frac{(-m+1)\Gamma(-m+1)}{\Gamma(-m)}$$

$$= (-m+1)(-m) = (-1)^2 m(m-1)$$

$$\text{para } n=3 : (-m)_3 = \frac{\Gamma(-m+3)}{\Gamma(-m)} = (-1)^3 m(m-1)(m-2)$$

Generalizando:

$$(-m)_n = (-1)^n m(m-1) \dots (m-n+1)$$

o equivalentemente:

$$(-m)_n = \frac{(-1)^n m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n)(m-n-1) \dots 1}{(m-n)(m-n-1) \dots 1}$$

$$\text{donde } (m-n)(m-n-1) \dots 1 = (m-n)!$$

$$\text{y } m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n) \dots 1 = m!$$

$$(-m)_n = (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!}$$

QED

## TAREA VI | Solución

Se tiene que  $\cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

donde  $(2n)! = \Gamma(2n+1)$ , en términos de símbolos de Pochhammer se cumple que:

$$\Gamma(2n+1) = \Gamma(1)(1)_{2n}^1 = (1)_{2n}$$

de la fórmula dada en Ec. (15) finalmente se cumple que:

$$(2n)! = 4^n (\tfrac{1}{2})_n (1)_n \quad \text{donde } (1)_n = n! \quad (\text{de Ec. (13)})$$

o  $\cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (\tfrac{1}{2})_n n!} x^{2n}$  QED

## TAREA VII | Solución

Recordando que  $f(x)$  arbitraria, la serie de potencias en torno a  $x=0$  está dada por la fórmula:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{donde } a_n = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0}$$

Entonces se cumple que:

$$a_0 = \left. (1+x)^a \right|_{x=0} = 1$$

$$a_1 = \left. \frac{d}{dx} (1+x)^a \right|_{x=0} = a \left. (1+x)^{a-1} \right|_{x=0} = a$$

$$a_2 = \frac{d^2}{dx^2} (1+x)^a \Big|_{x=0} = a(a-1)$$

$$a_3 = \frac{d^3}{dx^3} (1+x)^a \Big|_{x=0} = a(a-1)(a-2)$$

: Generalizar

$$a_n = \frac{d^n}{dx^n} (1+x)^a \Big|_{x=0} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)$$

$$= a[-(1-a)][-(2-a)]\dots[-(n-1-a)]$$

$$= a(-1)^{n-1} (-a+1)(-a+2)\dots(-a+n-1)$$

$$= (-1)^n \underbrace{(-a)(-a+1)(-a+2)\dots(-a+n-1)}_{(-a)_n}$$

(De acuerdo a E.c.(13))

$$= (-1)^n (-a)_n$$

Finalmente

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-a)_n \frac{x^n}{n!}$$

QED