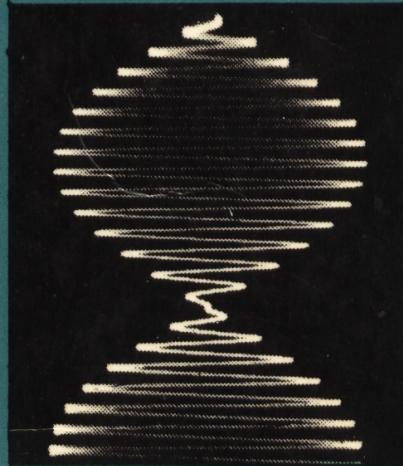


# VIBRACIONES Y ONDAS

A. P. FRENCH

una publicación del **MIT**  
(Massachusetts Institute of Technology)



editorial reverté, s.a.

<i>Elasticidad y módulo de Young</i> 52 <i>Objetos flotantes</i> 56 <i>Péndulos</i> 59 <i>Agua en un tubo en U</i> 61 <i>Oscilaciones por torsión</i> 62 <i>«El muelle de aire»</i> 65 <i>Oscilaciones de muelles cuya masa es grande</i> 69 <i>Amortiguamiento de las oscilaciones libres</i> 72 <i>Efectos que produce un amortiguamiento muy grande</i> 79 <i>PROBLEMAS</i> 80	8
<b>4 Vibraciones forzadas y resonancia</b>  - <i>Oscilador no amortiguado con impulsión armónica</i> 90 - <i>El método del exponente complejo en el caso de oscilaciones forzadas</i> 94 ✓ <i>Oscilaciones forzadas con amortiguamiento</i> 96 <i>Influencia de la variación del término resistivo</i> 102 <i>Fenómenos transitorios</i> 104 - <i>Potencia absorbida por un oscilador impulsado</i> 111 <i>Ejemplos de resonancia</i> 116 <i>Resonancia eléctrica</i> 117 <i>Resonancia óptica</i> 120 <i>Resonancia nuclear</i> 123 <i>Resonancia magnética nuclear</i> 125 <i>Osciladores anarmónicos</i> 127 <i>PROBLEMAS</i> 128	13
<b>5 Osciladores acoplados y modos normales</b>  - <i>Dos péndulos acoplados</i> 139 <i>Consideraciones de simetría</i> 141 <i>Superposición de modos normales</i> 142 <i>Otros empleos de osciladores acoplados</i> 146 <i>Frecuencias normales: método analítico general</i> 148 <i>Vibración forzada y resonancia para dos osciladores acoplados</i> 151 <i>N osciladores acoplados</i> 156 <i>Cálculo de modos normales para N osciladores acoplados</i> 158 <i>Propiedades de los modos normales para N osciladores acoplados</i> 161 <i>Osciladores longitudinales</i> 166 <i>N muy grande</i> 168 <i>Modos normales de una red cristalina</i> 172 <i>PROBLEMAS</i> 174	13

6 Modos normales de sistemas continuos. Análisis de Fourier	183
<i>Vibraciones libres de cuerdas alargadas</i> 184	
<i>Superposición de modos sobre una cuerda</i> 189	
<i>Vibración armónica forzada de una cuerda tensa</i> 191	
<i>Vibraciones longitudinales de una varilla</i> 193	
• <i>Vibraciones de columnas de aire</i> 197	
• <i>Elasticidad de un gas</i> 199	
• <i>Espectro completo de modos normales</i> 202	
<i>Modos normales de un sistema bidimensional</i> 205	
<i>Modos normales de un sistema tridimensional</i> 213	
• <i>Ánálisis de Fourier</i> 214	
• <i>Análisis de Fourier en acción</i> 216	
<i>Modos normales y funciones ortogonales</i> 221	
<i>PROBLEMAS</i> 222	
7 Ondas progresivas	227
<i>¿Qué es una onda?</i> 227	
<i>Modos normales y ondas en movimiento</i> 228	
<i>Ondas progresivas en una dirección</i> 233	
<i>Velocidades de las ondas en medios específicos</i> 236	
<i>Superposición</i> 240	
• <i>Pulsos de ondas</i> 242	
<i>Movimiento de pulsos de onda de forma constante</i> 251	
<i>Superposición de pulsos de ondas</i> 257	
• <i>Dispersión: Velocidad de fase y de grupo</i> 259	
<i>El fenómeno de corte</i> 263	
• <i>La energía de una onda mecánica</i> 267	
• <i>Transporte de energía mediante una onda</i> 271	
<i>Flujo de cantidad de movimiento y presión de radiación mecánica</i> 273	
<i>Ondas en dos y tres dimensiones</i> 274	
<i>PROBLEMAS</i> 276	
8 Efectos debidos a los límites e interferencias	285
<i>Reflexión de pulsos de ondas</i> 285	
<i>Impedancia: Terminaciones no reflectoras</i> 293	
<i>Ondas longitudinales en contraposición con las ondas transversales: Polarización</i> 297	
<i>Ondas en dos dimensiones</i> 298	
<i>Principios de Huygens-Fresnel</i> 300	
<i>Reflexión y refracción de ondas planas</i> 303	
<i>Efectos Doppler y fenómenos relacionados</i> 308	

XII Indice analítico

- Interferencias producidas por una doble rendija* 314
- Interferencias por rendijas múltiples  
(redes de difracción)* 320
- Difracción por una sola rendija* 324
- Diafragmas de interferencias de sistemas  
de rendijas reales* 331
- PROBLEMAS** 335
- Bibliografía* 341
- Soluciones a los problemas* 348
- Indice alfabético* 353

# Vibraciones y ondas

*Éstos son los fenómenos de los muelles y cuerpos elásticos, los cuales, hasta ahora, que yo sepa, nadie ha reducido a reglas, de modo que todos los intentos para explicar la razón de su fuerza y elasticidad en general, han sido totalmente insuficientes.*

ROBERT HOOKE, *De Potentia Restitutiva* (1678)

# Movimientos periódicos

LAS VIBRACIONES u oscilaciones de los sistemas mecánicos constituyen uno de los campos de estudio más importantes de toda la física. Virtualmente todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes. En general, las vibraciones naturales predominantes de objetos pequeños suelen ser rápidas, mientras que las de objetos más grandes suelen ser lentas. Las alas de un mosquito, por ejemplo, vibran centenares de veces por segundo y producen una nota audible. La Tierra completa, después de haber sido sacudida por un terremoto, puede continuar vibrando a un ritmo de una oscilación por hora aproximadamente. El mismo cuerpo humano es un fabuloso recipiente de fenómenos vibratorios; como se ha escrito:<sup>1</sup>

Después de todo, nuestros corazones laten, nuestros pulmones oscilan, tiritamos cuando tenemos frío, a veces roncamos, podemos oír y hablar gracias a que vibran nuestros tímpanos y laringes. Las ondas luminosas que nos permiten ver son ocasionadas por vibraciones. Nos movemos porque hacemos oscilar las piernas. Ni siquiera podremos decir correctamente “vibración” sin que oscile la punta de nuestra lengua... Incluso los átomos que componen nuestro cuerpo vibran.

La característica común de todos estos fenómenos es su *periodicidad*. Existe un esquema de movimiento o desplazamiento que se repite una y otra

<sup>1</sup> Según R. E. D. Bishop, en *Vibration*, Cambridge University Press, N. Y. 1965. Una descripción general viva y fascinante de las vibraciones con referencia especial a los problemas técnicos.

vez. Este esquema puede ser sencillo o complicado. La figura 1-1 muestra un ejemplo de los dos casos —el ciclo más bien complicado de variaciones de presión dentro del corazón de un gato y la curva sinusoidal casi pura de las vibraciones de un diapasón. En ambos casos el eje horizontal representa el avance continuo del tiempo y puede identificarse la duración del tiempo, el período  $T$ , dentro del cual se realiza un ciclo completo de vibración.

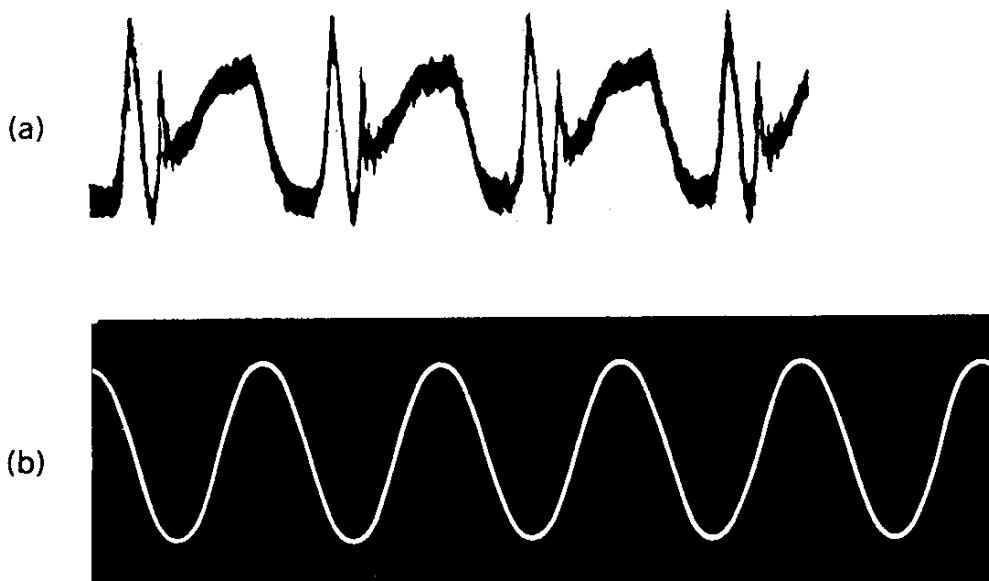


Fig. 1-1. (a) Variaciones de presión dentro del corazón de un gato. (Según Straub en el libro de E. H. Starling, Elements of Human Physiology, Churchill, London, 1907.) (b) Vibraciones de un diapasón.

En este libro estudiaremos cierto número de aspectos de los movimientos periódicos, y con estas bases discutiremos los fenómenos de ondas progresivas que están estrechamente ligadas. Empezaremos con una breve descripción puramente cinemática de las vibraciones. Después pasaremos a analizar algunas de las propiedades dinámicas de los sistemas en vibración, aquellas características dinámicas que nos permiten considerar el movimiento vibratorio como un problema físico real y no sólo como un ejercicio matemático.

## VIBRACIONES SINUSOIDALES

Concentraremos preferentemente nuestra atención sobre las vibraciones sinusoidales del tipo indicado en la figura 1-1 (b). Para ello podemos dar dos razones —una física y otra matemática, ambas básicas para nuestro objetivo.

La razón física consiste en que realmente se presentan vibraciones puramente sinusoidales en una gran variedad de sistemas mecánicos, siendo originadas por fuerzas restauradoras que son proporcionales a los desplazamientos respecto al equilibrio. Este tipo de movimiento es posible casi siempre si el desplazamiento es suficientemente pequeño. Si, por ejemplo, tenemos un cuerpo sujeto a un muelle, la fuerza ejercida sobre el mismo cuando el desplazamiento respecto al equilibrio es  $x$  puede describirse en la forma

$$F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots)$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , etc., son una serie de constantes, y siempre podremos encontrar un margen de valores de  $x$  dentro del cual sea despreciable la suma de términos correspondientes a  $x^2$ ,  $x^3$ , etc., de acuerdo con cierto criterio previo (por ejemplo, hasta 1 parte en  $10^3$  o 1 parte en  $10^6$ ) en comparación con el término  $-k_1x$ , a no ser que el mismo  $k_1$  sea nulo. Si el cuerpo tiene masa  $m$  y la masa del muelle es despreciable, la ecuación del movimiento del cuerpo se reduce entonces a

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x$$

que, como puede comprobarse fácilmente, queda satisfecha por una ecuación de la forma

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad (1-1)$$

en donde  $\omega = (k_1/m)^{1/2}$ . Esta breve discusión nos servirá para recordar que la vibración sinusoidal —movimiento armónico simple— es una posibilidad muy a tener en cuenta en las vibraciones pequeñas, pero también para que no olvidemos que es sólo una aproximación (aunque quizás muy buena) del movimiento real.

La segunda razón —matemática— de la profunda importancia de las vibraciones sinusoidales puras se debe a un famoso teorema propuesto por el matemático francés J. B. Fourier en 1807. De acuerdo con el teorema de Fourier, *cualquier* perturbación que se repita regularmente con un período  $T$  puede formarse mediante (o es analizable en) un conjunto de vibraciones sinusoidales de períodos  $T$ ,  $T/2$ ,  $T/3$ , etc., con amplitudes seleccionadas de modo adecuado, es decir mediante una serie formada por (para utilizar una terminología musical) una frecuencia fundamental, y todos sus armónicos. Insistiremos en este punto más adelante, pero llamamos ahora la atención sobre

este teorema para que quede claro que no limitamos el objetivo o posibilidad de aplicación de nuestro estudio al concentrarnos en el movimiento armónico simple. Por el contrario, una total familiaridad con las vibraciones sinusoidales nos abrirá la puerta a todos los problemas imaginables en que intervengan fenómenos periódicos.

## DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento del tipo descrito en la ecuación (1-1), movimiento armónico simple (MAS),<sup>1</sup> se representa en un gráfico  $x - t$  de la forma indicada en la figura 1-2. Destaquemos las características más importantes de esta perturbación sinusoidal:

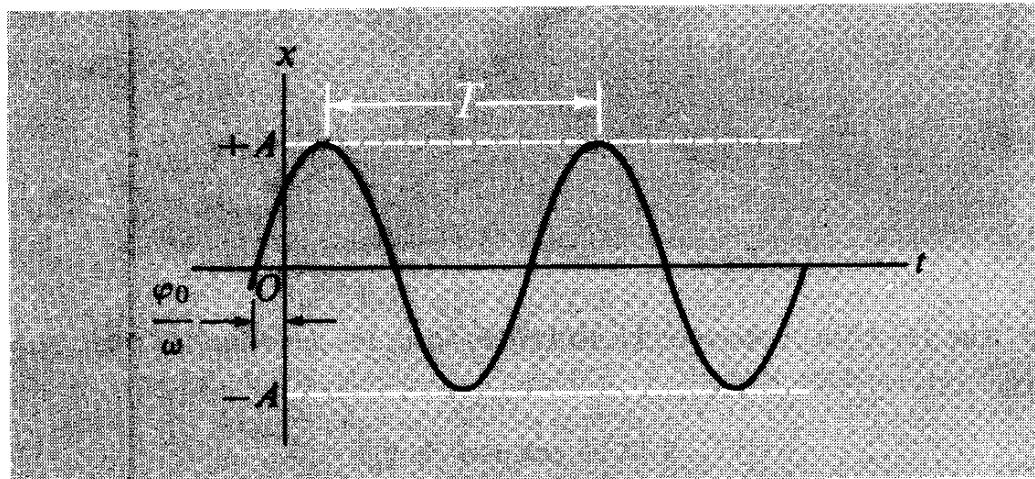


Fig. 1-2. Movimiento armónico simple de periodo  $T$  y amplitud  $A$ .

1. Está confinada dentro de los límites  $x = \pm A$ . La magnitud positiva  $A$  se denomina *amplitud* del movimiento.
2. El movimiento tiene un período  $T$  igual al tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos o más generalmente entre dos momentos sucesivos en que se repitan tanto el desplazamiento  $x$  como la velocidad  $dx/dt$ . Dada la ecuación básica (1-1),

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

<sup>1</sup> Emplearemos con frecuencia esta abreviatura.

el período debe corresponder a un aumento de  $2\pi$  en el argumento de la función sinusoidal. Así pues, se tiene

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi$$

de aquí que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-2)$$

La situación en  $t = 0$  (o en cualquier otro instante señalado) queda completamente especificada si se establecen los valores de  $x$  y  $dx/dt$  en dicho momento. En el instante particular  $t = 0$ , llamaremos a estas magnitudes  $x_0$  y  $v_0$ , respectivamente. Entonces se tienen las identidades siguientes:

$$x_0 = A \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$v_0 = \omega A \operatorname{cos} \varphi_0$$

Si se sabe que el movimiento viene descrito por una ecuación de la forma (1-1), pueden utilizarse estas dos relaciones para calcular la amplitud  $A$  y el ángulo  $\varphi_0$  (ángulo de fase inicial del movimiento):

$$A = \left[ x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}^{-1} \left( \frac{\omega x_0}{v_0} \right)$$

El valor de la frecuencia angular  $\omega$  del movimiento se supone conocido por otros medios.

\*La ecuación (1-1) tal y como se ha escrito define una variación sinusoidal de  $x$  con  $t$  para todos los valores de  $t$ , considerada como una variable puramente matemática, o sea de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Como todas las vibraciones reales tienen un principio y un final, no puede ser descrita solo por la ecuación (1-1) aunque sea sinusoidal pura mientras dure. Si, por ejemplo, se iniciase un movimiento armónico simple en  $t = t_1$  y se parase en  $t = t_2$ , su descripción completa en términos matemáticos exigiría un total de tres ecuaciones:

$$-\infty < t < t_1 \quad x = 0$$

$$t_1 \leq t \leq t_2 \quad x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$t_2 < t < \infty \quad x = 0$$

Esta limitación de la validez de la ecuación (1-1) como descripción completa de una vibración armónica simple real deberá recordarse siempre. No es una sutileza matemática. A juicio de un criterio *físico* estricto, una vibración

no resulta ser efectivamente sinusoidal pura, a no ser que continúe un gran número de períodos. Por ejemplo, si el oído pudiese recibir un ciclo completo del sonido producido por un diapasón, vibrando como en la figura 1-1 (b), la impresión aural no sería en absoluto la de un tono puro con la frecuencia característica del diapasón, sino más bien una discordancia de tonos.<sup>1</sup> Sería prematuro, y en cierto modo sin interés, estudiar el fenómeno con más detalle en este punto; el problema afecta de nuevo al análisis de Fourier. Lo que importa en este momento es darse cuenta de que las vibraciones armónicas simples de un sistema físico real deben continuar durante largo tiempo, deben representar lo que suele denominarse un estado estacionario de vibración, para que la ecuación (1-1) pueda utilizarse por sí misma como una descripción adecuada de las mismas.

## REPRESENTACIÓN MEDIANTE UN VECTOR ROTATORIO

Uno de los procedimientos más útiles para describir el movimiento armónico simple se obtiene considerándolo como la proyección de un movimiento circular uniforme. Imaginemos, por ejemplo, que se hace girar un disco de radio  $A$  alrededor de un eje vertical con una velocidad de  $\omega$  rad/seg. Supóngase que se sujeta un taquito al borde del disco y que un haz horizontal de luz paralela proyecta la sombra del taco sobre una pantalla vertical, como se indica en la figura 1-3 (a). Entonces esta sombra realiza un movimiento armónico simple con período  $2\pi/\omega$  y amplitud  $A$  a lo largo de una recta horizontal en la pantalla.

De modo más abstracto, podemos imaginar el MAS como la proyección geométrica de un movimiento circular uniforme. (Por proyección *geométrica* entendemos simplemente el proceso de trazar una perpendicular a una recta dada desde la posición instantánea del punto  $P$ .) En la figura 1-3 (b) se indica cómo puede proyectarse el extremo del vector rotatorio  $OP$  sobre un diámetro de la circunferencia. En particular escogemos el eje horizontal  $Ox$  como recta base sobre la cual tiene lugar la oscilación real. La posición instantánea del punto  $P$  se define entonces mediante la longitud constante  $A$  y el

<sup>1</sup> La complejidad del sonido puede probarse de modo más convincente utilizando un analizador automático de ondas, pues se sabe que lo que oímos no es una réplica exacta de la onda sonora incidente —el oído produce distorsiones. Véase, por ejemplo, M. A. Van Bergeijk, J. R. Pierce y E. A. David, *Waves and the Ear*, Doubleday (Anchor Book), Nueva York, 1960.

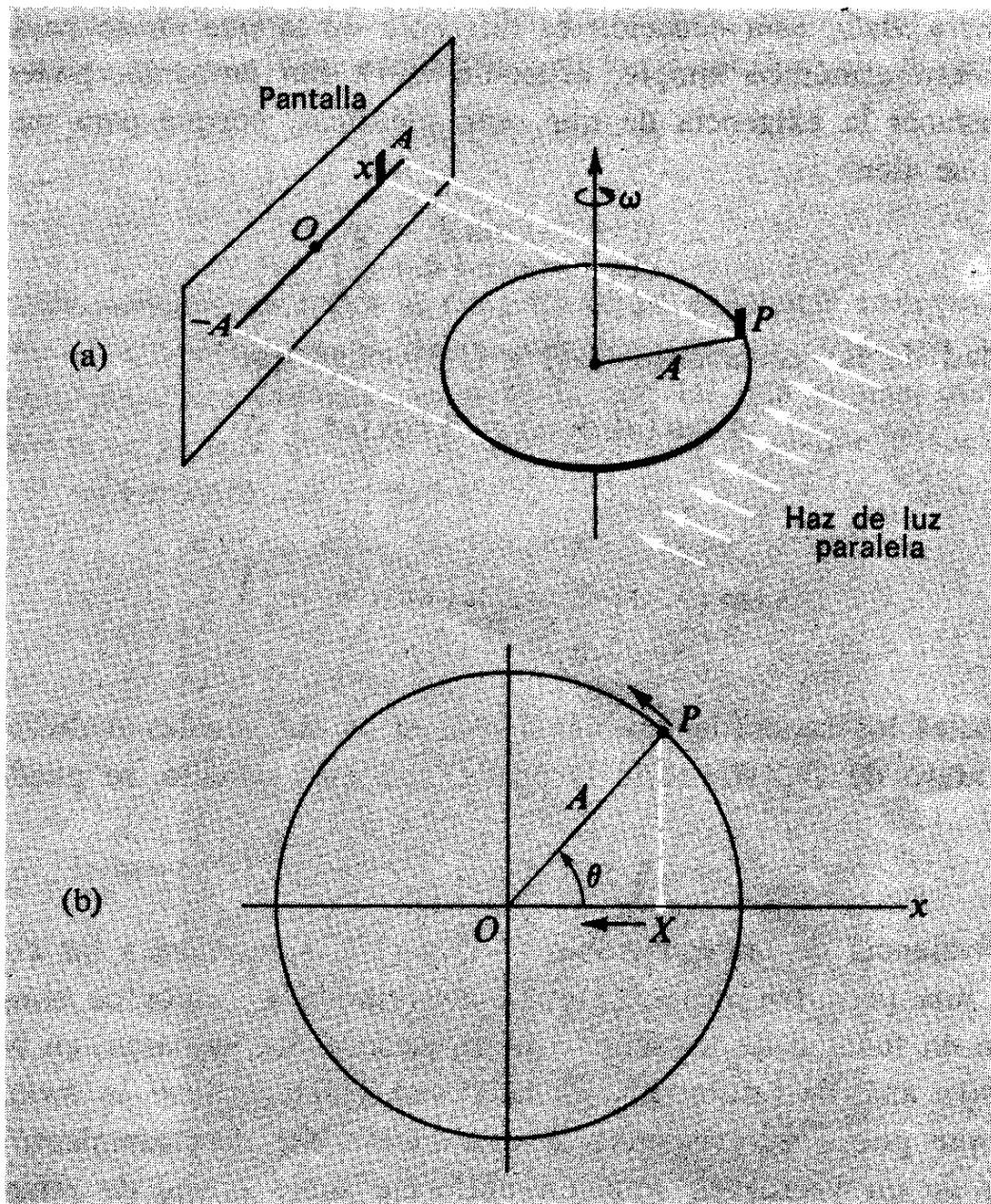


Fig. 1-3. Movimiento armónico simple como proyección en su propio plano de un movimiento circular uniforme.

ángulo variable  $\theta$ . Coincidirá con el convenio normal de las coordenadas polares si escogemos el sentido contrario a las agujas del reloj como positivo; el valor real de  $\theta$  puede escribirse entonces

$$\theta = \omega t + \alpha$$

en donde  $\alpha$  es el valor de  $\theta$  para  $t = 0$ .

Como se especificó anteriormente, el desplazamiento  $x$  del movimiento real viene dado por

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (1-3)$$

A primera vista, esta ecuación es diferente de la que sirvió para describir el movimiento armónico simple, ecuación (1-1). Sin embargo, podemos fácilmente satisfacer la exigencia de que sean idénticas, porque para un ángulo  $\theta$  cualquiera se tiene

$$\cos \theta = \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

La identidad de las ecuaciones (1-1) y (1-3) exige que

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

es decir,

$$\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Son iguales los senos de dos ángulos si éstos son iguales o difieren en un múltiplo entero de  $2\pi$ . Tomando la posibilidad más sencilla, se puede escribir

$$\varphi_0 = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad (1-4)$$

La equivalencia de las ecuaciones (1-1) y (1-3) sometidas a las condiciones anteriores nos permiten describir cualquier vibración armónica simple igualmente bien en función de un seno o de un coseno. Sin embargo, en buena parte de nuestro análisis futuro, resulta más aconsejable utilizar la forma coseno, de modo que pueda aprovecharse la descripción del desplazamiento como la proyección de un vector en rotación uniforme sobre el eje de referencia del plano polar de coordenadas. El empleo de este método en toda su riqueza reposa en algunas ideas matemáticas que consideraremos en las secciones siguientes.

## VECTORES ROTATORIOS Y NÚMEROS COMPLEJOS

El empleo de un movimiento circular uniforme como fundamento puramente geométrico para describir el MAS tiene más importancia de lo que parece. Este movimiento circular, una vez establecido, define el MAS de amplitud  $A$  y frecuencia angular  $\omega$  sobre cualquier recta contenida en el plano del círculo. En particular, si imaginamos un eje  $y$  perpendicular al eje físico real  $Ox$  del

movimiento real, el vector rotatorio  $OP$  nos define, además de la verdadera oscilación sobre el eje  $x$ , otra oscilación ortogonal sobre el eje  $y$ , de modo que

$$x = A \cos (\omega t + \alpha) \quad (1-5)$$

$$y = A \sin (\omega t + \alpha)$$

y aunque este movimiento sobre el eje  $y$  no tenga existencia real, podemos proceder *como si* nos ocupásemos del movimiento de un punto en dos dimensiones, según describen las ecuaciones (1-5), con tal que al final aislemos sólo el componente  $x$ , ya que únicamente este resultado es el que posee significado físico en el movimiento así descrito.

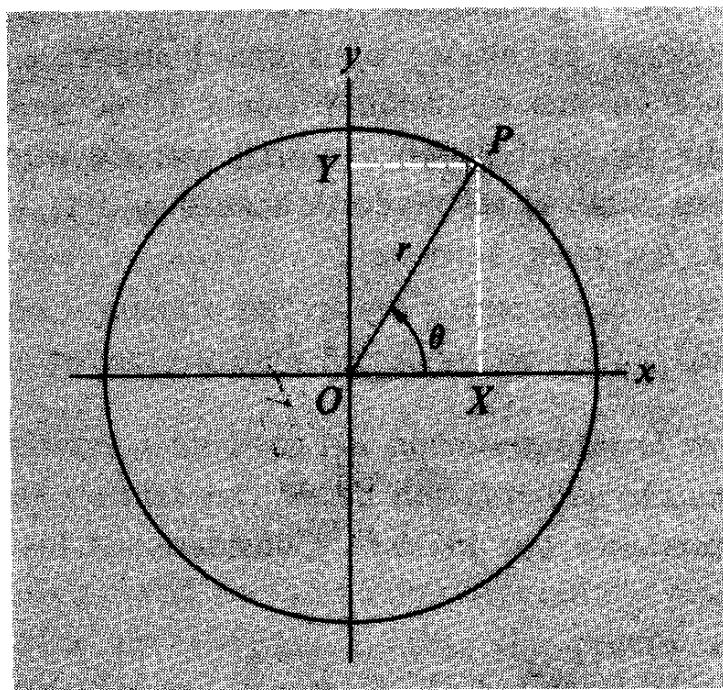


Fig. 1-4. Representaciones cartesianas y polares de un vector rotatorio.

Existe un modo carente de ambigüedad para establecer y mantener la diferencia existente entre las componentes físicamente reales y no reales del movimiento. Supóngase que un vector  $OP$  (fig. 1-4) tiene las coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Las componentes  $(x, y)$  rectangulares (cartesianas) vienen dadas, como es natural, por las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

El vector completo  $\mathbf{r}$  puede expresarse entonces como el vector suma de estos dos componentes ortogonales. Si preferimos emplear la notación acostumbrada del análisis vectorial, utilicemos el vector unitario  $\mathbf{i}$  para designar

los desplazamientos a lo largo de  $x$ , y el vector unitario  $\mathbf{j}$  para designar los desplazamientos a lo largo del eje  $y$ . Pondremos entonces

$$\mathbf{r} = ix + jy$$

Pero sin sacrificar ninguna información, se puede definir el vector mediante la ecuación siguiente:

$$\mathbf{r} = x + jy \quad (1-6)$$

Todo lo que se requiere es un convenio inicial, mediante el cual se admite que la ecuación (1-6) encierra las siguientes consecuencias :

1. Un desplazamiento, como  $x$ , sin ningún factor que lo califique, ha de realizarse en una dirección paralela al eje  $x$ .
2. El término  $jy$  ha de leerse como una instrucción para hacer que el desplazamiento  $y$  sea en una dirección paralela al eje  $y$ . De hecho, suele ser costumbre prescindir del simbolismo vectorial introduciendo una magnitud  $z$ , que ha de entenderse como el resultado de sumar  $jy$  o  $x$ , es decir, es idéntica a la definición de  $\mathbf{r}$ . Así pues, se tiene

$$z = x + jy \quad (1-7)$$

*Ampliemos ahora la interpretación del símbolo  $j$ , considerándolo como una instrucción para realizar una rotación de  $90^\circ$  en sentido contrario a las agujas del reloj al desplazamiento que precede.* Consideremos los siguientes ejemplos específicos :

a. Para obtener la magnitud  $jb$ , se marca una distancia  $b$  sobre el eje  $x$  y luego se hace girar  $90^\circ$  de modo que termine hacia arriba equivaliendo a un desplazamiento  $b$  a lo largo del eje  $y$ .

b. Para formar la magnitud  $j^2b$  primero se obtiene  $jb$ , como anteriormente, y luego se le aplica otra rotación de  $90^\circ$ , es decir, identificamos  $j^2b$  como  $j(jb)$ . Pero esto nos lleva a su vez a una identidad importante. Dos rotaciones sucesivas de  $90^\circ$  en el mismo sentido convierten al desplazamiento  $b$  (en el sentido positivo de  $x$ ) en el desplazamiento  $-b$ . De aquí que podemos escribir la identidad algebraica

$$j^2 = -1 \quad (1-8)$$

La magnitud  $j$  puede considerarse así, hablando algebraicamente, como la raíz cuadrada de  $-1$ . ( $\sqrt{-1}$  es otra raíz cuadrada que también satisface la ecuación anterior.)<sup>1</sup>

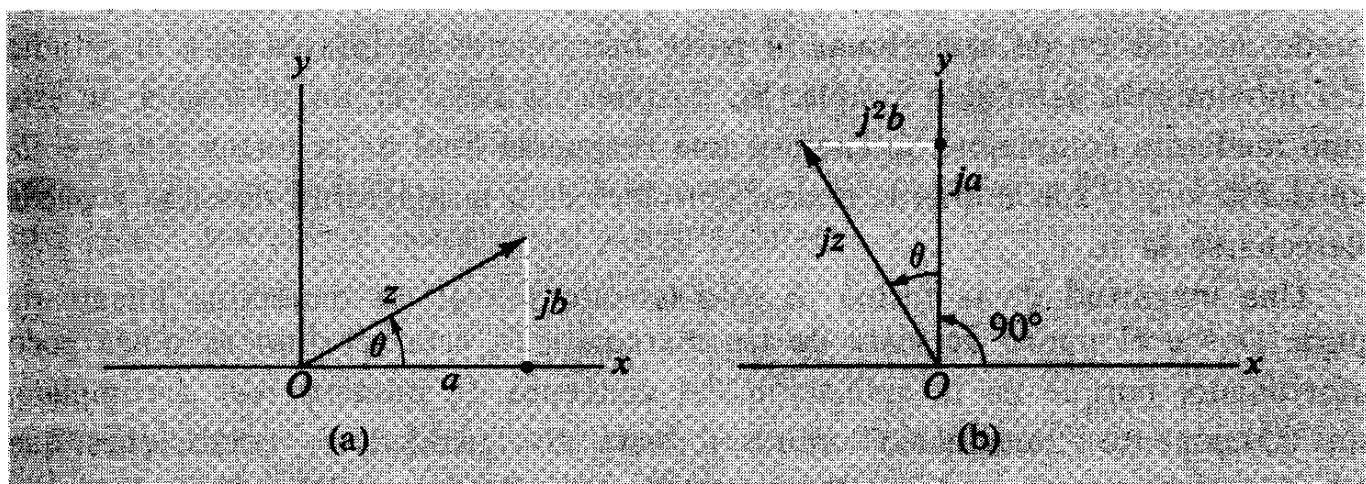


Fig. 1-5. (a) Representación de un vector en el plano complejo. (b) La multiplicación de  $z$  por  $j$  equivale a una rotación de  $90^\circ$ .

- c. Supóngase que tomamos un vector  $z$  que tiene una componente  $x$  de longitud  $a$  y otra componente  $y$  de longitud  $b$  (fig. 1-5). ¿Qué es  $jk$ ? Se tiene

$$\begin{aligned} z &= a + jb \\ jz &= ja + j^2b \\ &= ja + (-b) \end{aligned}$$

La suma de los dos nuevos vectores componentes del segundo miembro de esta ecuación se indica en la figura 1-5 (b). ¡La receta es consistente! El vector resultante  $jk$  se obtiene a partir del vector original  $z$  aplicándole una rotación de  $90^\circ$ .

Aunque el lector no haya estudiado previamente estos conceptos, se dará cuenta fácilmente de que estamos moviéndonos en la línea divisoria (o más adecuadamente sobre un puente) entre la geometría y el álgebra. Si las magnitudes  $a$  y  $b$  son números reales, como hemos supuesto en el ejemplo c, entonces la combinación  $z = a + jb$  es lo que se conoce como *número complejo*.

<sup>1</sup> El empleo del símbolo  $j$  por  $\sqrt{-1}$  ha surgido espontáneamente debido a nuestro enfoque cuasigeométrico. Sin embargo, se halla frecuentemente en textos de matemáticas el símbolo  $i$ . Los físicos e ingenieros tienden a preferir la notación  $j$ , y reservan el símbolo  $i$  para la corriente eléctrica, consideración importante, ya que las técnicas matemáticas desarrolladas aquí tienen una de sus aplicaciones más importantes en conexión con los problemas de circuitos eléctricos.

Pero en términos geométricos puede considerarse como un desplazamiento sobre cierto eje que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , de modo que  $\operatorname{tg} \theta = b/a$ , como se ve claramente en la figura 1-5 (a).

En esta representación de un vector por un número complejo, tenemos un modo automático de seleccionar la parte físicamente de interés para el estudio del movimiento armónico simple. Si, después de resolver un problema de este tipo mediante complejos, obtenemos una respuesta final de la forma  $z = a + jb$ , en donde  $a$  y  $b$  son números reales, entonces es  $a$  la magnitud deseada y puede desecharse la  $b$ .

Una magnitud de la forma  $jb$  sólo (siendo  $b$  real) se denomina imaginaria pura. Desde el punto de vista de las matemáticas, este término es quizá poco afortunado, porque en la aplicación del concepto de número real a complejo, un componente "imaginario" como  $jb$  está en igualdad de condiciones que un componente real como  $a$ . Pero cuando se aplica al análisis de oscilaciones monodimensionales, esta terminología se ajusta perfectamente, como ya hemos visto, a las partes físicamente reales y no reales de un movimiento bidimensional imaginado.

## INTRODUCCIÓN AL EXPONENTE COMPLEJO

El estudio anterior puede parecer que no ha añadido gran cosa al análisis inicial. Pero ya estamos preparados para nuestro objetivo fundamental, que es la obtención de una función matemática hacia la que hemos dirigido este desarrollo. Dicha función es la exponencial compleja, o para ser más concretos, la función exponencial en el caso en que el exponente es el sentido matemático mencionado al final de la última sección. La introducción de dicha función recompensa ampliamente nuestros esfuerzos por la facilidad que supone en el manejo de los problemas de oscilaciones. No todos los beneficios de este método se verán inmediatamente, sino que serán cada vez más evidentes cuando profundicemos en el tema.

Empecemos considerando los desarrollos en serie de las funciones seno y coseno:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \quad (1-9)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots \quad (1-10)$$

Si no son familiares estos desarrollos, pueden obtenerse fácilmente en ayuda del teorema de Taylor.<sup>1</sup>

Formemos la siguiente combinación:

$$\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (1-11)$$

Hemos visto que  $-1$  puede expresarse como  $j^2$ , de modo que la ecuación anterior puede volverse a escribir del modo siguiente:

$$\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(j\theta)^n}{n!} + \dots \quad (1-12)$$

Sin embargo, el segundo miembro de esta ecuación tiene precisamente la forma del desarrollo de la función exponencial, haciendo el exponente igual a  $j\theta$ . Así pues, se puede escribir la identidad siguiente:

$$\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta = e^{j\theta} \quad (1-13)$$

Este resultado es muy importante, hablando matemáticamente, porque proporciona una conexión clara entre la geometría plana (representada por las funciones trigonométricas) y el álgebra (representada por la función exponencial).

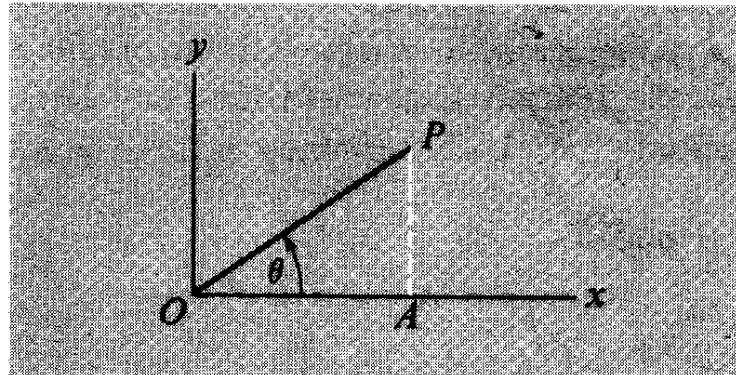


Fig. 1-6. Interpretación geométrica de la relación de Euler,  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$ .

<sup>1</sup> Según el teorema de Taylor,  $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots$   
Por tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} 0 + \theta \cos 0 + \frac{\theta^2}{2!} (-\operatorname{sen} 0) + \frac{\theta^3}{3!} (\cos 0) \dots$$

$$\cos \theta = \cos 0 + \theta(-\operatorname{sen} 0) + \frac{\theta^2}{2!} (-\cos 0) + \frac{\theta^3}{3!} (\operatorname{sen} 0) \dots$$

R. P. Feynman la consideraba “como joya asombrosa ... la fórmula matemática más notable”.<sup>1</sup> Fue establecida por Leonhard Euler en 1748.

Expongamos el carácter geométrico del resultado. Utilizando los ejes “real” e “imaginario”  $Ox$  y  $Oy$  (fig. 1-6), dibujemos  $OA$  de longitud igual a  $\cos \theta$  y  $AP$  de longitud igual a  $\sin \theta$ . El vector suma de ambos es  $OP$ ; tiene evidentemente *longitud unidad* y forma el ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ . Con mayor generalidad, la multiplicación de cualquier número complejo  $z$  por  $e^{i\theta}$  puede describirse, en términos geométricos, como una rotación positiva de valor  $\theta$  del vector representado por  $z$ , sin ninguna alteración en su longitud. (*Ejercicio:* Comprobarlo.)

## EMPLEO DEL EXPONENTE COMPLEJO

¿Por qué constituye una contribución tan importante al análisis de las vibraciones la introducción de la ecuación (1-13)? La principal razón consiste en la propiedad especial de la función exponencial de volver a aparecer después de cada operación de derivación o integración, ya que los problemas en que estamos interesados son aquellos en los que intervienen desplazamientos periódicos y las derivadas respecto al tiempo de los mismos. Si, como suele ocurrir, la ecuación básica del movimiento contiene términos proporcionales a la velocidad y a la aceleración, lo mismo que al propio desplazamiento, entonces el empleo de cada función trigonométrica para describir el movimiento conduce a una complicada mezcla de términos en seno y coseno. Por ejemplo:

Si

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

entonces

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha)$$

<sup>1</sup> R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. L. Sands, *Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.

Por otra parte, si trabajamos con la combinación  $x + jy$ , viendo dados  $x$  e  $y$  por las ecuaciones (1-5), se tiene:

$$z = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha)$$

es decir,

$$z = Ae^{j(\omega t + \alpha)}$$

con

$$x = \text{parte real de } z^1$$

Entonces

$$\frac{dz}{dt} = j\omega Ae^{j(\omega t + \alpha)} = j\omega z$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (j\omega)^2 Ae^{j(\omega t + \alpha)} = -\omega^2 z$$

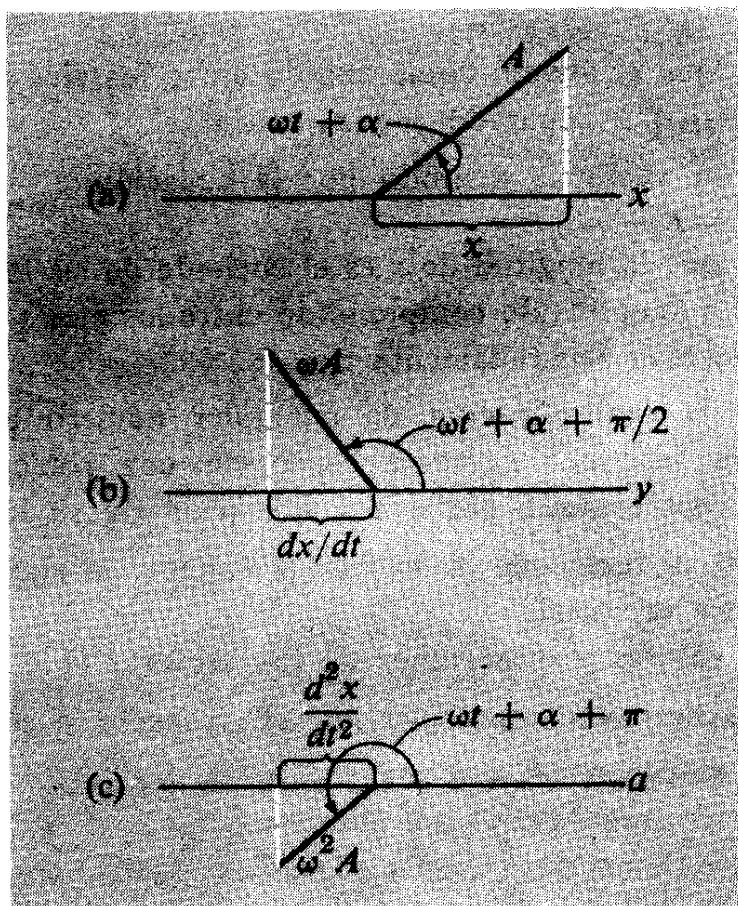


Fig. 1-7. (a) Vector desplazamiento  $z$  y su proyección real  $x$ . (b) Vector velocidad  $dz/dt$  y su proyección real  $dx/dt$ . (c) Vector aceleración  $d^2z/dt^2$  y su proyección real  $d^2x/dt^2$ .

<sup>1</sup> Abreviatura frecuente:  $\text{Re}(z)$ .

Estos tres vectores se indican en la figura 1-7 (utilizando tres diagramas separados, porque son magnitudes de tres clases físicamente diferentes : desplazamiento, velocidad y aceleración). En cada caso se aprecia que la componente de importancia física es la componente real del vector en cuestión y la relación entre fases se observa a simple vista (dado que cada factor  $j$  ha de entenderse como un avance en el ángulo de fase de  $\pi/2$ ). Éste es un ejemplo muy sencillo, que no muestra realmente la potencia del método, pero pronto veremos otras aplicaciones más interesantes.

## PROBLEMAS

1-1 Consideremos un vector  $z$  definido por la ecuación  $z = z_1 z_2$ , siendo  $z_1 = a + jb$  y  $z_2 = c + jd$ .

(a) Demostrar que la longitud de  $z$  es igual al producto de las longitudes de  $z_1$  y  $z_2$ .

(b) Demostrar que el ángulo comprendido entre los ejes  $z$  y  $x$  es la suma de los ángulos que forman por separado  $z_1$  y  $z_2$  con  $x$ .

1-2 Consideremos un vector  $z$  definido por la ecuación  $z = z_1/z_2$  ( $z_2 \neq 0$ ), siendo  $z_1 = a + jb$  y  $z_2 = c + jd$ .

(a) Demostrar que la longitud de  $z$  es el cociente de las longitudes de  $z_1$  y  $z_2$ .

(b) Demostrar que el ángulo comprendido entre los ejes  $z$  y  $x$  es la diferencia de los ángulos que forman separadamente  $z_1$  y  $z_2$ .

1-3 Demostrar que la multiplicación de cualquier número complejo  $z$  por  $e^{j\theta}$  puede describirse, en términos geométricos, como una rotación positiva en el ángulo  $\theta$  del vector representado por  $z$  sin alteración de su longitud.

1-4 (a) Si  $z = Ae^{j\theta}$ , deducir que  $dz = jzd\theta$  y explicar el significado de esta relación en un diagrama vectorial.

(b) Hallar los valores y direcciones de los vectores  $(2 + j\sqrt{3})$  y  $(2 - j\sqrt{3})^2$ .

1-5 Para tomar las derivadas sucesivas de  $e^{j\theta}$  respecto a  $\theta$ , basta multiplicar por  $j$ :

$$\frac{d}{d\theta} (Ae^{j\theta}) = jAe^{j\theta}$$

Demostrar que esta propiedad sigue siendo válida si se utiliza la representación sinusoidal  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$ .

1-6 Dada la relación de Euler  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$ , hallar

(a) La representación geométrica de  $e^{-j\theta}$ .

- (b) La representación exponencial de  $\cos \theta$ .
- (c) La representación exponencial de  $\sin \theta$ .

**1-7** (a) Justificar las fórmulas  $\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$  y  $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$ , utilizando los desarrollos en serie correspondientes.

(b) Describir geométricamente las relaciones anteriores mediante diagramas vectoriales en el plano  $xy$ .

**1-8** Utilizando las representaciones vectoriales de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , comprobar las siguientes identidades trigonométricas:

- (a)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ .
- (b)  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ .
- (c)  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ .

**1-9** ¿Se puede pagar 20 céntimos de un objeto valorado por un matemático con  $j$  pesetas? (Recuérdese que  $\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$ .)

**1-10** Comprobar que la ecuación diferencial  $d^2y/dx^2 = -ky$  tiene por solución  $y = A \cos(kx) + B \sin(kx)$

siendo  $A$  y  $B$  constantes arbitrarias. Demostrar también que esta solución puede escribirse en la forma

$$y = C \cos(kx + \alpha) = C \operatorname{Re}[e^{j(kx + \alpha)}] = \operatorname{Re}[(Ce^{j\alpha})e^{jkx}]$$

y expresar  $C$  y  $\alpha$  en función de  $A$  y  $B$ .

**1-11** Una masa al extremo de un muelle oscila con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 1 Hz (ciclos por segundo). Para  $t = 0$ , la masa está en su posición de equilibrio ( $x = 0$ ).

(a) Hallar las ecuaciones posibles que describen la posición de la masa en función del tiempo, en la forma  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ , dando los valores numéricos de  $A$ ,  $\omega$  y  $\alpha$ .

(b) ¿Cuáles son los valores de  $x$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  para  $t = 8/3$  seg?

**1-12** Un punto se mueve en una circunferencia con una celeridad constante de 50 cm/seg. El período de una vuelta completa es 6 seg. Para  $t = 0$  la recta que va del punto al centro de la circunferencia forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $x$ .

(a) Obtener la ecuación de la coordenada  $x$  del punto en función del tiempo, en la forma  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ , conocidos los valores numéricos de  $A$ ,  $\omega$  y  $\alpha$ .

(b) Hallar los valores de  $x$ ,  $dx/dt$  y  $d^2x/dt^2$  para  $t = 2$  seg.

*“...Esa ondulación, libre de tomar cualquier camino. Me atrae.”*

MICHAEL BARSLEY (1937), *On his Julia, walking*

(Según Robert Herrick)

# Superposición de movimientos

## VIBRACIONES SUPERPUESTAS EN UNA DIMENSIÓN

EN MUCHOS fenómenos físicos interviene la aplicación simultánea de dos o más vibraciones armónicas sobre el mismo sistema. En acústica se presentan ejemplos de este tipo con gran frecuencia. La aguja de un fonógrafo, el diafragma de un microscopio o el tímpano se ven en general sometidos a una combinación complicada de estas vibraciones, dando como resultado cierto desplazamiento resultante en función del tiempo. Consideremos algunos casos específicos de este proceso de combinación, sometidos siempre a la siguiente hipótesis fundamental:

*La resultante de dos o más vibraciones armónicas es simplemente la suma de las vibraciones aisladas.* En el estudio presente trataremos este punto como un problema puramente matemático. Sin embargo, al final se traduce en una cuestión física: ¿Es igual el desplazamiento producido por dos perturbaciones, actuando conjuntamente, a la superposición directa de los desplazamientos que se observan cuando ambas actúan separadamente? La respuesta a esta cuestión puede ser afirmativa o negativa según que el desplazamiento sea o no estrictamente proporcional a la fuerza que lo produce. Si es válida la adición simple, el sistema se dice que es *lineal*, y la mayoría de nuestras discusiones se limitarán a estos sistemas. Sin embargo, como acabamos de decir, por el momento nos limitaremos al problema puramente matemático de sumar dos (o más) desplazamientos, que son funciones sinusoidales del tiempo; la aplicación física de los resultados no se considerará ahora.

## SUPERPOSICIÓN DE DOS VIBRACIONES DE IGUAL FRECUENCIA

Supóngase que tenemos dos MAS descritos por las ecuaciones siguientes:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

Su combinación tiene entonces la forma siguiente:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \quad (2-1)$$

Es posible expresar este desplazamiento como una vibración armónica simple:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

La descripción del MAS mediante el vector rotatorio proporciona un modo muy elegante de obtener este resultado geométricamente. En la figura 2-1 (a) sea  $OP_1$  el vector rotatorio de longitud  $A_1$ , que forma el ángulo  $(\omega t + \alpha_1)$  con el eje  $x$  en el instante  $t$ . Sea  $OP_2$  el vector rotatorio de longitud  $A_2$  con el ángulo  $(\omega t + \alpha_2)$ . Su suma es, por tanto, el vector  $OP$  definido por la ley del paralelogramo. Como  $OP_1$  y  $OP_2$  giran con la misma velocidad angular  $\omega$ , puede considerarse que el paralelogramo  $OP_1PP_2$  es una figura rígida que gira en bloque con esta misma velocidad. El vector  $OP$  puede obtenerse como el vector suma de  $OP_1$  y  $P_1P$  (este último igual a  $OP_2$ ). Como  $\angle N_1OP_1 =$

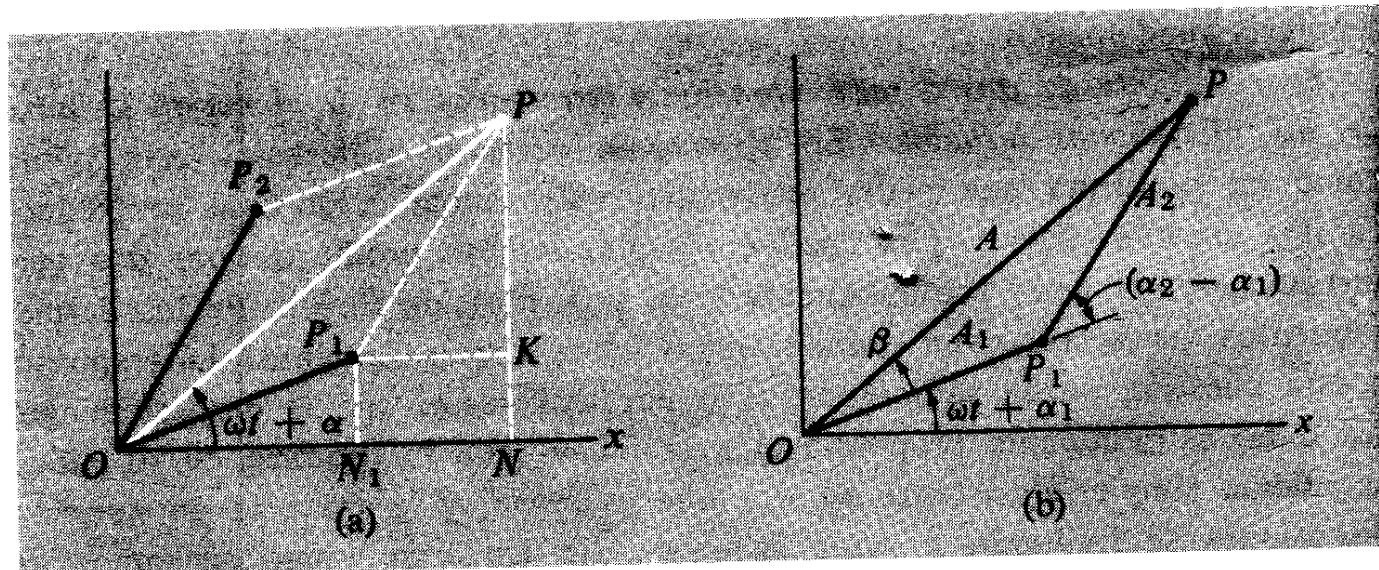


Fig. 2-1. (a) Superposición de dos vectores rotatorios del mismo periodo. (b) Triángulo vectorial para la construcción del vector rotatorio resultante.

$\omega t + \alpha_1$  y  $\omega t + \alpha_2$ , el ángulo formado por  $OP_1$  y  $P_1P$  es precisamente  $\alpha_2 - \alpha_1$ . Por tanto, resulta

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

El vector  $OP$  forma un ángulo  $\beta$  [véase fig. 2-1 (b)] con el vector  $OP_1$ , tal que

$$A \sin \beta = A_2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1)$$

y la fase constante  $\alpha$  de la vibración viene dada directamente por

$$\alpha = \alpha_1 + \beta$$

El empleo del formalismo del exponente complejo nos llevará muy directamente a estos mismos resultados. Los vectores rotatorios  $OP_1$  y  $OP_2$  se describen mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)} \\ z_2 &= A_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)} \end{aligned}$$

De aquí que la resultante venga dada por

$$z = z_1 + z_2 = A_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)}$$

Obsérvese la ventaja de utilizar la forma exponencial que nos permite separar el factor común  $\exp j(\omega t + \alpha_1)$ :

$$z = e^{j(\omega t + \alpha_1)} [A_1 + A_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)}] \quad (2-2)$$

Recordando que  $e^{j\theta}$  es precisamente la instrucción necesaria para aplicar una rotación positiva  $\theta$ , vemos que la combinación de los términos entre corchetes especifica que ha de sumarse un vector de longitud  $A_2$  a otro de longitud  $A_1$ , existiendo entre ambos el ángulo  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  y el primer factor  $\exp [j(\omega t + \alpha_1)]$  nos dice que el diagrama entero ha de girarse hasta la orientación indicada en la figura 2-1 (b). Si no nos aprovechásemos de estas técnicas geométricas, la tarea de combinar los dos términos separados de la ecuación (2-1) sería fatigosa y mucho menos informativa.

En general no pueden simplificarse los valores de  $A$  y  $\alpha$  correspondientes a la perturbación resultante, pero conviene señalar el caso especial en que son iguales las amplitudes que se combinan. Si llamamos  $\delta$  a la *diferencia de fase* ( $\alpha_2 - \alpha_1$ ) entre ambas vibraciones, a partir de la geometría del triángulo

vectorial de la figura 2-1 (b) se puede obtener, por simple inspección, los resultados siguientes:

$$\beta = \frac{\delta}{2}$$

$$A = 2A_1 \cos \beta = 2A_1 \cos \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (2-3)$$

Se obtiene una combinación muy parecida a este tipo si se hacen funcionar dos altavoces idénticos por el mismo generador de señales sinusoidales y las vibraciones sonoras se recogen con un micrófono en un punto bastante alejado, como se indica en la figura 2-2. Si el micrófono se mueve sobre la recta  $OB$ , la diferencia de fase  $\delta$  aumenta constantemente desde un valor inicial cero en el punto  $O$ . Si la longitud de onda del sonido es mucho más corta que la distancia que separa los altavoces, puede observarse que la amplitud resultante se hace cero en varios puntos entre  $O$  y  $B$  y se eleva hasta su valor máximo posible de  $2A_1$  en otros puntos intermedios entre los ceros. (En el capítulo 8 estudiaremos con más detalle estos casos.)

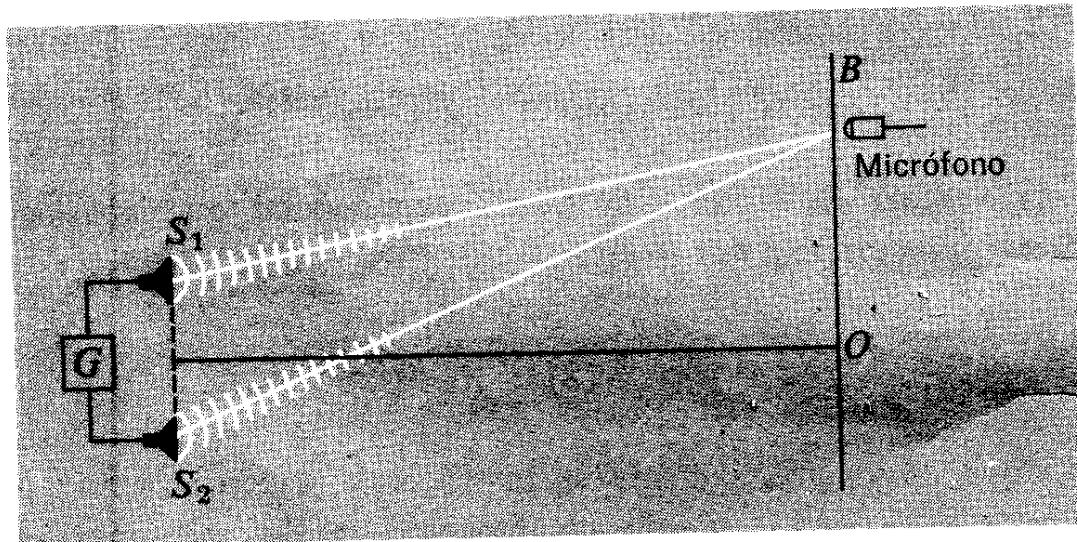


Fig. 2-2. Montaje para detectar la diferencia de fase en función de la posición del micrófono en la superposición de señales procedentes de dos altavoces.

## SUPERPOSICIÓN DE VIBRACIONES DE FRECUENCIAS DIFERENTES; PULSACIONES

Imaginemos que tenemos dos vibraciones de amplitudes diferentes  $A_1$ ,  $A_2$  y de frecuencias también diferentes  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Evidentemente, en contraste con

en el ejemplo precedente, la diferencia de fase entre las vibraciones está cambiando continuamente. La especificación de alguna diferencia de fase inicial no nula carece de significado apreciable en este caso. Para simplificar el aspecto matemático supongamos, por tanto, que ambas vibraciones tienen una fase inicial cero, y, por ello, pueden escribirse del modo siguiente:

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$$

En un instante arbitrario cualquiera el desplazamiento combinado será entonces como el indicado en la figura 2-3 ( $OX$ ). Evidentemente la longitud  $OP$  del vector combinado debe estar comprendida siempre entre la suma y la diferencia de  $A_1$  y  $A_2$ ; el valor del propio desplazamiento  $OX$  puede estar comprendido entre cero y  $A_1 + A_2$ .

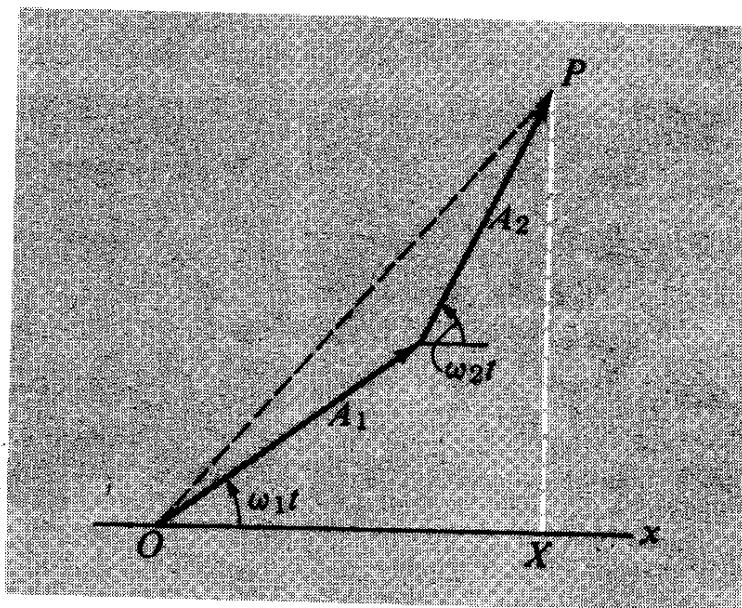


Fig. 2-3. Superposición de vectores rotatorios de períodos diferentes.

A menos que exista alguna relación simple entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , el desplazamiento resultante será una función complicada del tiempo, quizás sin que llegue a repetirse nunca. La condición precisa para obtener una periodicidad en el movimiento combinado es que sean commensurables, es decir, que existan dos números enteros  $n_1$  y  $n_2$  tales que

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 \quad (2-4)$$

en el ejemplo precedente, la diferencia de fase entre las vibraciones está cambiando continuamente. La especificación de alguna diferencia de fase inicial no nula carece de significado apreciable en este caso. Para simplificar el aspecto matemático supongamos, por tanto, que ambas vibraciones tienen una fase inicial cero, y, por ello, pueden escribirse del modo siguiente:

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$$

En un instante arbitrario cualquiera el desplazamiento combinado será entonces como el indicado en la figura 2-3 ( $OX$ ). Evidentemente la longitud  $OP$  del vector combinado debe estar comprendida siempre entre la suma y la diferencia de  $A_1$  y  $A_2$ ; el valor del propio desplazamiento  $OX$  puede estar comprendido entre cero y  $A_1 + A_2$ .

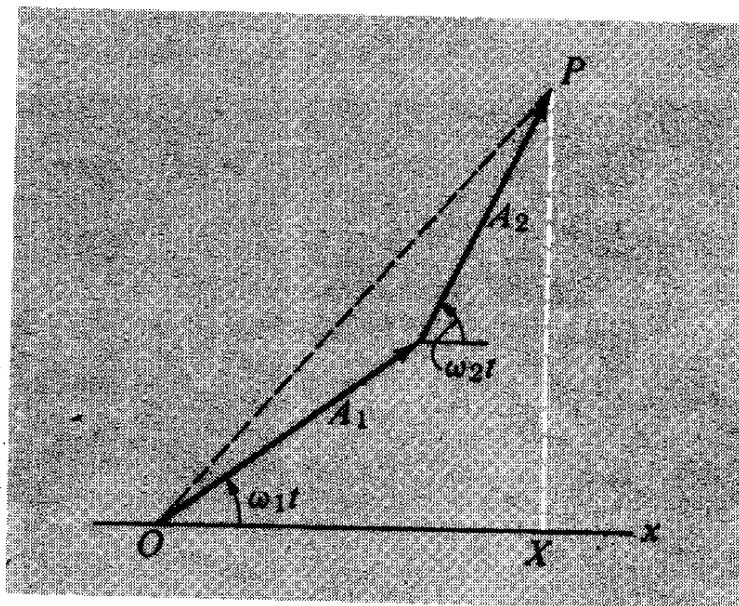


Fig. 2-3. Superposición de vectores rotatorios de períodos diferentes.

A menos que exista alguna relación simple entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , el desplazamiento resultante será una función complicada del tiempo, quizás sin que llegue a repetirse nunca. La condición precisa para obtener una periodicidad en el movimiento combinado es que sean commensurables, es decir, que existan dos números enteros  $n_1$  y  $n_2$  tales que

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 \quad (2-4)$$

El período del movimiento combinado es entonces el valor de  $T$  obtenido como decíamos anteriormente pero utilizando los valores enteros más pequeños de  $n_1$  y  $n_2$  que satisfagan dicha relación.<sup>1</sup>

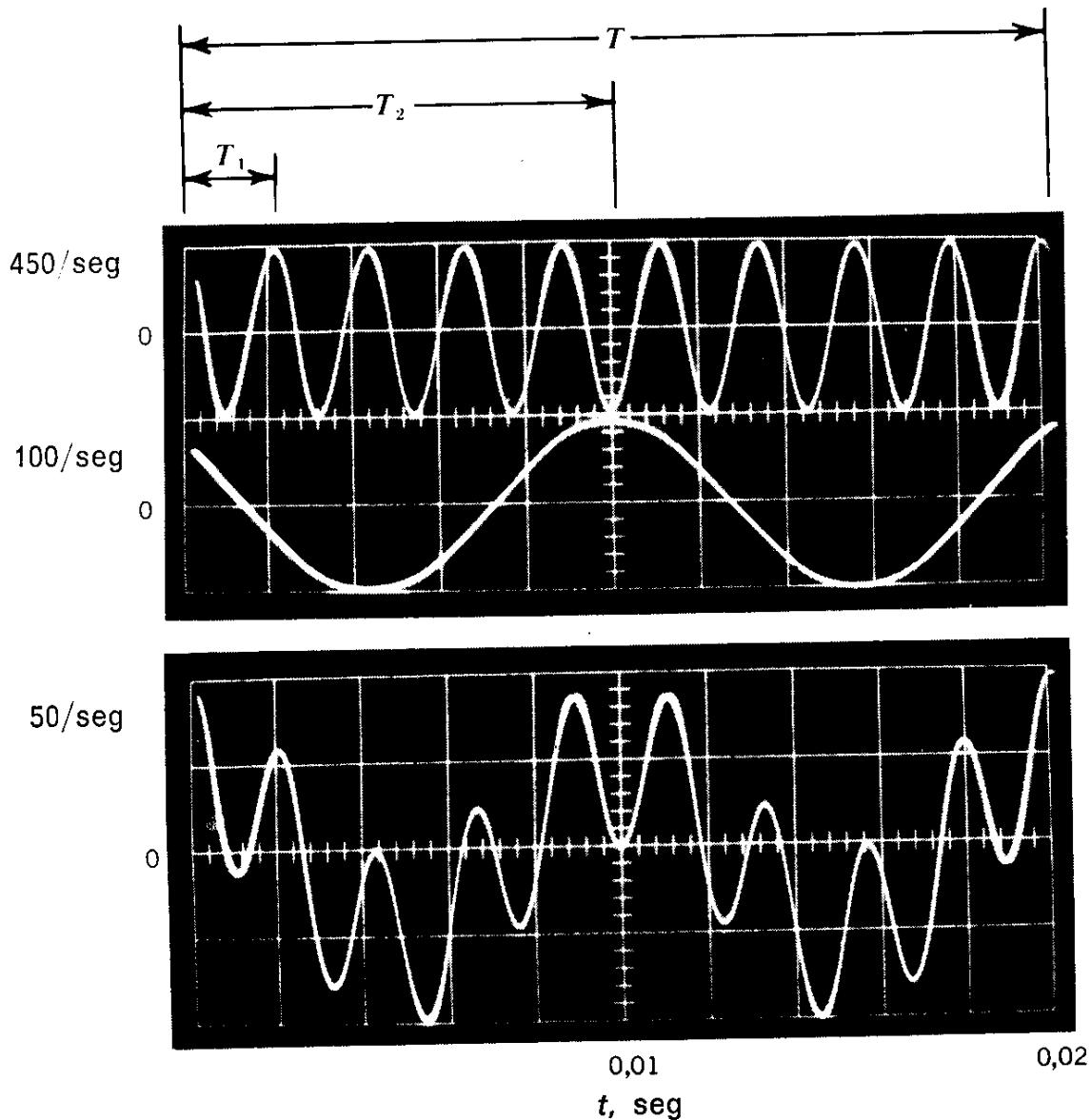


Fig. 2-4. Superposición de dos sinusoides de períodos commensurables ( $T_1 = 1/450$  seg,  $T_2 = 1/100$  seg). (Fotografía de Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

Aunque los períodos o frecuencias sean expresables como un cociente de dos enteros bastante pequeños, el aspecto general del movimiento no suele ser sencillo. La figura 2-4 muestra la composición de dos vibraciones sinusoidales.

<sup>1</sup> Por ejemplo, si el cociente  $\omega_1/\omega_2$  fuese irracional (como  $\sqrt{2}$ ) y no existiera ningú momento, por largo que se considerase el tiempo, en que se repitiese la figura anterior formada por el desplazamiento.

dales de 450 y 100 Hz, respectivamente. El período de repetición es 0,02 seg, como puede deducirse de la condición

$$T = \frac{n_1}{450} = \frac{n_2}{100}$$

que exige que  $n_1 = 9$  y  $n_2 = 2$ , de acuerdo con la ecuación (2-4).

En aquellos casos en que se forma una vibración a partir de otras dos de períodos commensurables, el aspecto de la resultante puede depender marcadamente de la fase inicial relativa de las vibraciones que se combinan. Este efecto se ilustra en las figuras 2-5 (a) y (b), en las que se han combinado

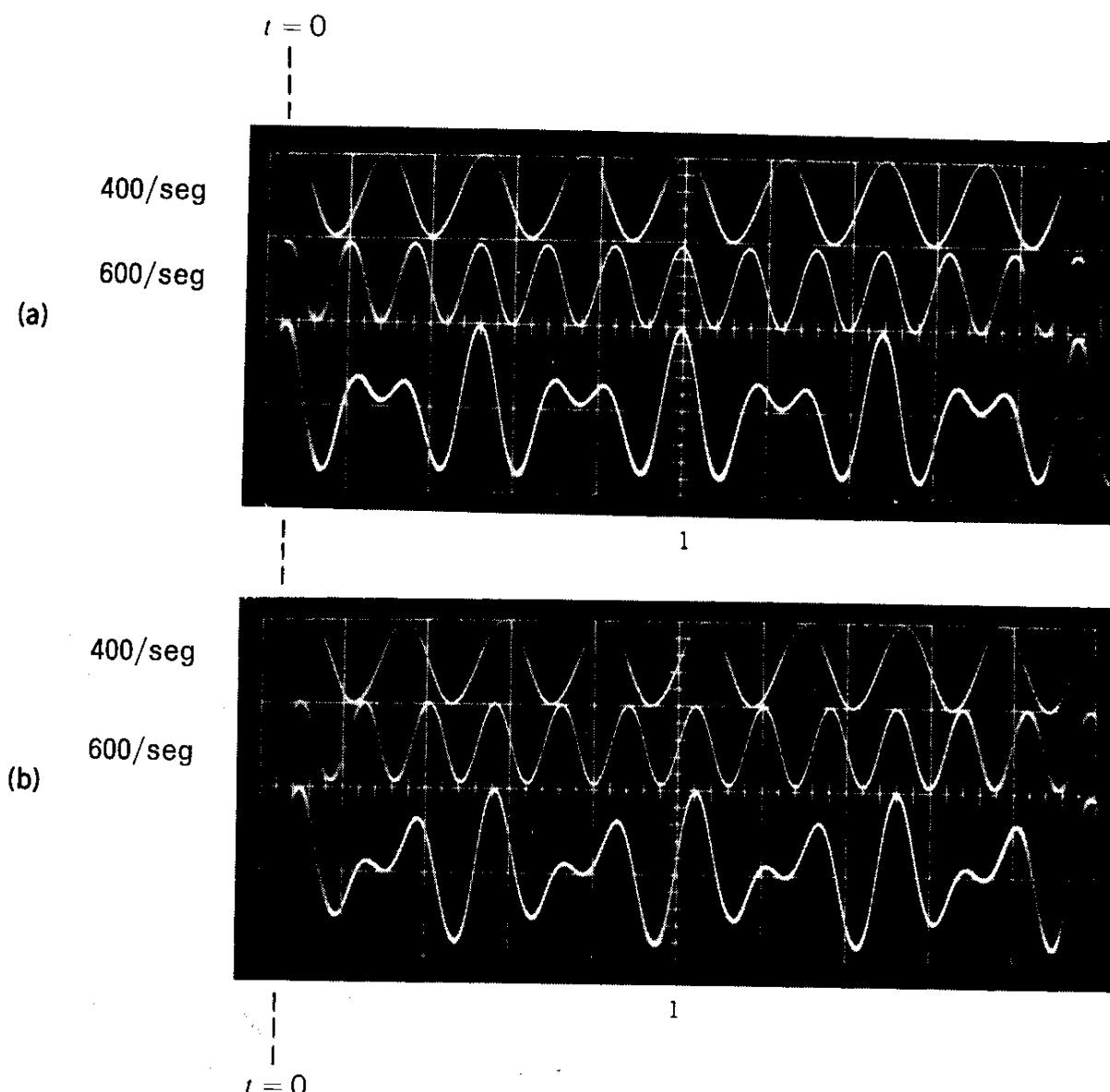


Fig. 2-5. Superposición de dos sinusoides commensurables de frecuencias  $400\text{ seg}^{-1}$  y  $600\text{ seg}^{-1}$ , cuyos máximos coinciden para  $t = 0$ . (b) Superposición de las mismas sinusoides si sus ceros coinciden cuando  $t = 0$ . (Fotografía de Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

de la manera indicada dos vibraciones con valores dados de la amplitud y frecuencia. Ambos casos difieren sólo en la relación de fases. Es interesante indicar que si las dos fueran vibraciones de aire incidiendo sobre el tímpano, los efectos auditivos de ambas combinaciones serían casi indistinguibles. Parece ser que el oído humano es casi insensible a la fase en la mezcla de vibraciones armónicas; las amplitudes y frecuencias dominan la situación, aunque pueden producirse efectos auditivos notablemente diferentes si la diferencia de fase conduce a unas formas de onda drásticamente diferentes, como puede ocurrir si se combinan con una relación de fase determinada muchas vibraciones en lugar de dos solamente.

Si dos MAS tienen frecuencias muy parecidas, la perturbación combinada presenta lo que se denomina *pulsación* o *batido*. Este fenómeno puede describirse como aquel en que la vibración combinada es básicamente una perturbación con una frecuencia igual a la media de las dos frecuencias que se combinan, pero con una amplitud que varía periódicamente con el tiempo, pero de modo que un ciclo de esta variación incluye muchos ciclos de la vibración básica.

El efecto de la pulsación se analiza más fácilmente si consideramos la suma de dos MAS de igual amplitud:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t$$

Entonces por adición se tiene<sup>1</sup>

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (2-5)$$

<sup>1</sup> Puede ser conveniente recordar los siguientes resultados de trigonometría:

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

Por lo tanto,

$$\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) = 2 \cos \theta \cos \varphi$$

En esta identidad, sea  $\theta + \varphi = \alpha$  y  $\theta - \varphi = \beta$ . Entonces

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

En nuestro caso, basta poner  $\alpha = \omega_1 t$  y  $\beta = \omega_2 t$ .

Evidentemente, esta suma, como resultado puramente matemático, puede realizarse para *cualquier* valor de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Pero su descripción como una pulsación sólo tiene significado físico si  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ ; es decir, si en un número apreciable de ciclos, la vibración se approxima a la sinusoidal con amplitud constante y con frecuencia angular  $(\omega_1 + \omega_2)/2$ .

La figura 2-6 desarrolla gráficamente el resultado de combinar dos vibraciones con una relación de frecuencia de 7:6. Ésta es quizá la mayor relación que puede tenerse si aún queremos referirnos a la combinación como un batido. Puede verse que el desplazamiento combinado puede ajustarse dentro de una envolvente definida por el par de ecuaciones

$$x = \pm 2A \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad (2-6)$$

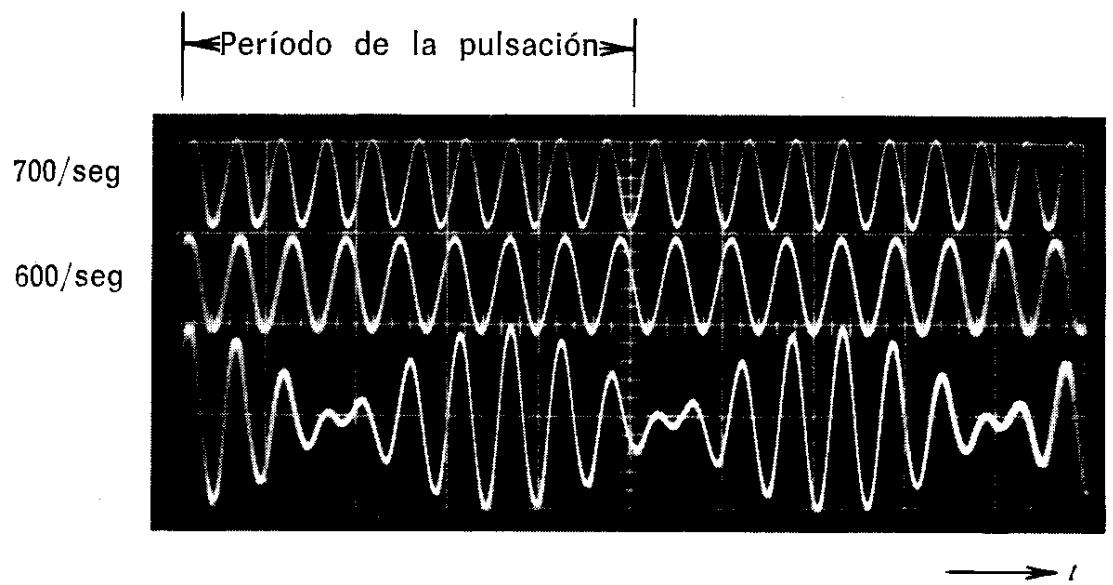


Fig. 2-6. Superposición de sinusoides de frecuencias semejantes ( $600 \text{ seg}^{-1}$  y  $700 \text{ seg}^{-1}$ ) con objeto de obtener pulsaciones. (Fotografía de Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

porque el factor rápidamente oscilante de la ecuación (2-5), es decir,  $\cos(\omega_1 + \omega_2)t/2$ , siempre está comprendido entre los límites  $\pm 1$  y la ecuación (2-6) describe una modulación relativamente lenta de la amplitud de esta oscilación. Si nos referimos a la figura 2-6, se ve que el tiempo transcurrido entre ceros sucesivos de la perturbación moduladora es un *semiperíodo* del factor modulador como describe la ecuación (2-6), es decir, un tiempo igual a  $2\pi/(|\omega_1 - \omega_2|)$ . Esto tiene como consecuencia que la *frecuencia de la pulsación*, según se percibe con el oído, por ejemplo, con dos diapa-

sones, es simplemente la diferencia de sus frecuencias individuales y no su mitad, como podría sugerir una primera impresión de la ecuación (2-5). Así pues, considerando un caso específico, si están vibrando juntos dos dia pasones a 255 y 257 vibraciones por segundo, su efecto combinado será el de la mitad del total de vibraciones (256 vibraciones por segundo) pasando por un máximo de intensidad dos veces cada segundo.

## SUPERPOSICIÓN DE MUCHAS VIBRACIONES DE LA MISMA FRECUENCIA<sup>1</sup>

Los métodos que acabamos de describir pueden ampliarse fácilmente a un número arbitrariamente grande de vibraciones que se combinan. El caso general no tiene gran importancia, pero existe un caso particular que es de gran interés y tiene mucha aplicación. Es aquel caso en que se tiene una superposición de varios MAS, todos con la misma frecuencia y amplitud y con una diferencia de fase constante entre cada dos de ellos. Este problema tiene particular importancia para el análisis de los efectos de interferencias con focos múltiples en óptica y en otros procesos ondulatorios.

Este fenómeno está representado en la figura 2-7. Supongamos que existen  $N$  vibraciones combinándose con amplitud  $A_0$  y una diferencia de fase entre dos sucesivas dada por el ángulo  $\delta$ . Admitamos que la primera vibración viene descrita, para mayor sencillez, por la ecuación

$$x = A_0 \cos \omega t$$

La perturbación resultante vendrá dada por la ecuación

$$X = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Como indica geométricamente la figura 2-7, los vectores forman los lados sucesivos de un polígono regular (incompleto). Un polígono como éste puede considerarse inscrito en una circunferencia de radio  $R$  y con centro  $C$ . Todos los vértices (como, por ejemplo, los puntos  $K$  y  $L$ ) caen sobre la circunferencia y el ángulo subtendido en  $C$  por cada amplitud aislada  $A_0$  (por ejemplo,  $KL$ ) es igual al ángulo  $\delta$  entre vectores adyacentes. De aquí que el ángulo

<sup>1</sup> Esta sección puede omitirse sin pérdida de la continuidad.

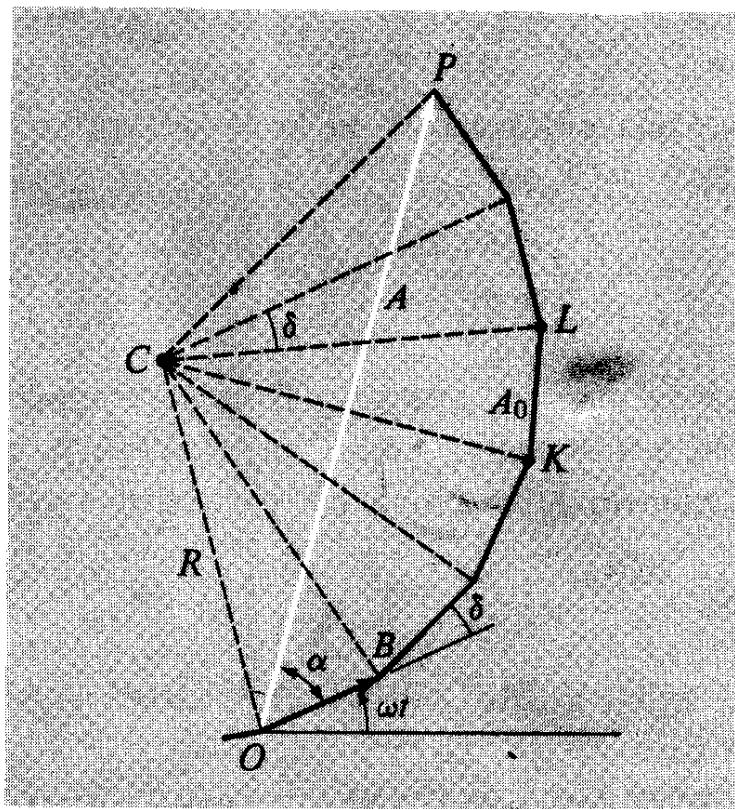


Fig. 2-7. Superposición de varios vectores rotatorios del mismo periodo y diferencias de fase con incremento constante.

total  $OCP$ , subtendido en  $C$  por el vector resultante  $A$ , sea igual a  $N\delta$ . Por tanto, se pueden escribir las siguientes ecuaciones geométricas:

$$A = 2R \sin(N\delta/2)$$

$$A_0 = 2R \sin(\delta/2)$$

Y en consecuencia,

$$A = A_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \quad (2-7)$$

Además, para el ángulo  $\alpha$  formado por la resultante  $A$  y el primer vector componente, se tiene

$$\alpha = \angle COB - \angle COP$$

con

$$\angle COB = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$$

$$\angle COP = 90^\circ - \left( \frac{N\delta}{2} \right)$$

Por consiguiente,

$$\alpha = \frac{(N - 1)\delta}{2} \quad (2-8)$$

De aquí que la vibración resultante a lo largo del eje  $x$  venga descrita por la ecuación siguiente:

$$X = A_0 \frac{\operatorname{sen}(N\delta/2)}{\operatorname{sen}(\delta/2)} \cos \left[ \omega t + \frac{(N - 1)\delta}{2} \right] \quad (2-9)$$

Esta ecuación es básica para el análisis del comportamiento de una red de difracción, que actúa precisamente como un dispositivo que obtiene de un solo haz de luz un número muy grande de perturbaciones iguales con iguales diferencias de fase.

## COMBINACIÓN DE DOS VIBRACIONES PERPENDICULARES

Todo lo que hemos visto hasta ahora se refería a movimientos armónicos sobre una sola dimensión, aunque para su análisis hayamos introducido el útil concepto de vector rotatorio en un plano, de modo que la proyección del vector sobre una determinada dirección representaría el movimiento real. Estudiaremos ahora el problema *esencialmente diferente* de combinar dos vibraciones armónicas reales que tienen lugar sobre direcciones perpendiculares, de modo que el movimiento real resultante es un movimiento verdaderamente bidimensional. Este problema tiene un considerable interés físico y su estudio aquí es adecuado porque su análisis se apoya en las mismas técnicas utilizadas anteriormente en este capítulo. El tipo de movimiento que vamos a considerar puede ampliarse fácilmente a oscilaciones tridimensionales, cuya posibilidad debemos, en general, admitir, como, por ejemplo, en el caso de un átomo ligado elásticamente dentro de la estructura esencialmente tridimensional de una red cristalina.

Supongamos ahora, por tanto, que un punto sufre simultáneamente los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ y &= A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (2-10)$$

Este movimiento puede conseguirse mediante una doble aplicación de la técnica del vector rotatorio, según se explica en la figura 2-8. Empecemos dibujando dos circunferencias de radios  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. La prime-

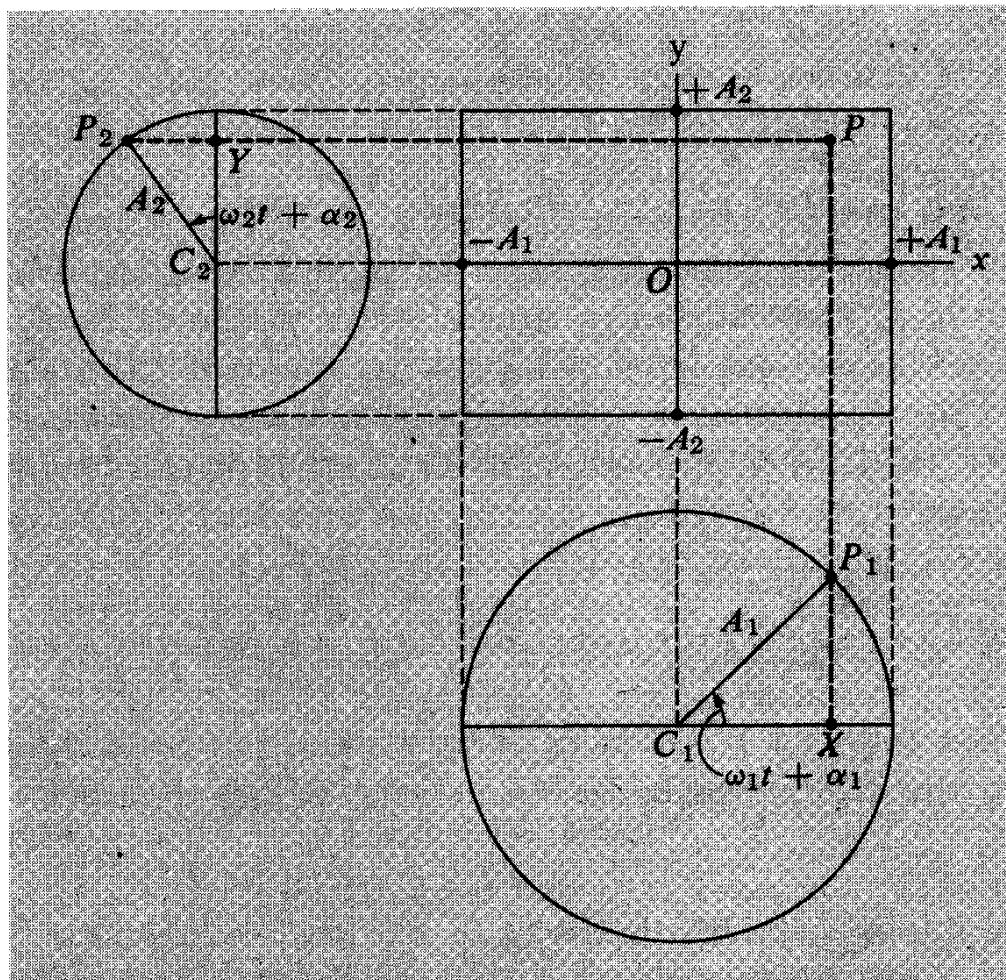


Fig. 2-8. Representación geométrica de la superposición de vibraciones armónicas simples y perpendiculares.

ra se utiliza para definir el desplazamiento  $x$  del punto  $P_1$ ,  $C_1X$ . La segunda se emplea para definir el desplazamiento  $y$  del punto  $P_2$ ,  $C_2Y$ . Ambos desplazamientos describen conjuntamente la posición instantánea del punto  $P$  respecto a un origen  $O$  que está situado en el centro de un rectángulo de lados  $2A_1$  y  $2A_2$ .

Una propiedad resalta inmediatamente. Cualquiera que sea la relación entre las frecuencias y las fases de los movimientos que se combinan, el movimiento del punto  $P$  está siempre confinado dentro del rectángulo, y además los lados de este rectángulo son tangentes a la trayectoria en todos los puntos de contacto con la misma<sup>1</sup>. Apenas puede decirse algo más que esto, sin especificar algo más concreto sobre las frecuencias y las fases, excepto un comentario general sobre lo que ocurre si no son comensurables  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . En

<sup>1</sup> Excepto, quizás, en el caso en que el movimiento resultante pasa por las esquinas del rectángulo, en cuyo caso las condiciones geométricas en las mismas no están claramente definidas.

tal caso, la posición de  $P$  nunca volverá a repetirse y la trayectoria, si continuase durante tiempo suficiente, tendería, desde un punto de vista físico aunque no estrictamente matemático, a llenar la totalidad del interior del rectángulo límite.

Los ejemplos más interesantes de estos movimientos combinados son aquellos en los que las frecuencias están en cierta relación numérica sencilla y la diferencia de fases iniciales es alguna fracción simple de  $2\pi$ . Se tiene entonces un movimiento que forma una curva cerrada de dos dimensiones, con un período que es el mínimo común múltiplo de los períodos aislados. El problema se estudia más fácilmente sobre ejemplos específicos, como veremos en seguida.

## MOVIMIENTOS PERPENDICULARES DE FRECUENCIAS IGUALES

Mediante una selección adecuada de lo que consideraremos  $t = 0$ , podemos escribir las vibraciones combinadas de la forma sencilla siguiente:

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

siendo  $\delta$  la diferencia de fase inicial (y en este caso, la diferencia de fase en cualquier momento) entre ambos movimientos. Particularizando aún más los valores de  $\delta$  podemos obtener rápidamente un cuadro cualitativo de todos los movimientos posibles en el caso de que sean iguales las frecuencias que se combinan:

- a.  $\delta = 0$ . En este caso,

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos \omega t$$

Por lo tanto,

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

El movimiento es rectilíneo y tiene lugar sobre una diagonal del rectángulo de modo que  $x$  e  $y$  tienen siempre el mismo signo, bien positivo o negativo. Este movimiento puede representar lo que en óptica se denomina vibración polarizada linealmente.

- b.  $\delta = \pi/2$ . Tenemos ahora

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \pi/2) = -A_2 \sin \omega t$$

Se obtiene fácilmente la forma de la trayectoria haciendo uso de la expresión  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ . Esto quiere decir que

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse cuyos ejes principales coinciden con los ejes  $x$  e  $y$ .

Obsérvese, sin embargo, que las ecuaciones nos expresan algo más. Estamos estudiando cinemática, no geometría, y la elipse se describe en un sentido definido. Cuando  $t$  empieza a crecer desde cero,  $x$  empieza a disminuir desde su máximo valor positivo e  $y$  empieza inmediatamente a ser negativo partiendo desde cero. Esto significa que la trayectoria elíptica tiene lugar en *sentido de las agujas del reloj*.

c.  $\delta = \pi$ . Se tiene ahora

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \pi) = -A_2 \cos \omega t$$

Por lo tanto,

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$

Este movimiento es como el del caso a, pero se produce sobre la otra diagonal del rectángulo.

d.  $\delta = 3\pi/2$ . Entonces resulta

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = +A_2 \sin \omega t$$

Tenemos una elipse como en el caso b, pero el movimiento es ahora en *sentido contrario al de las agujas del reloj*.

e.  $\delta = \pi/4$ . Obsérvese que hemos vuelto aquí al caso de una diferencia de fase entre 0 y  $\pi/2$ , es decir, intermedia entre los casos a y b. Es un caso menos evidente que los acabados de ver, y nos lleva a la construcción gráfica de la figura 2-8. En la figura 2-9 se muestra la aplicación del método a este particular. Las posiciones de los puntos  $P_1$  y  $P_2$  sobre las dos circunferencias de referencia se han indicado en cierto número de instantes separados por un octavo período (es decir,  $\pi/4\omega$ ). Los puntos se numeran consecutivamente, empezando con  $t = 0$ , cuando  $C_1 P_1$  (véase fig. 2-8) es paralelo

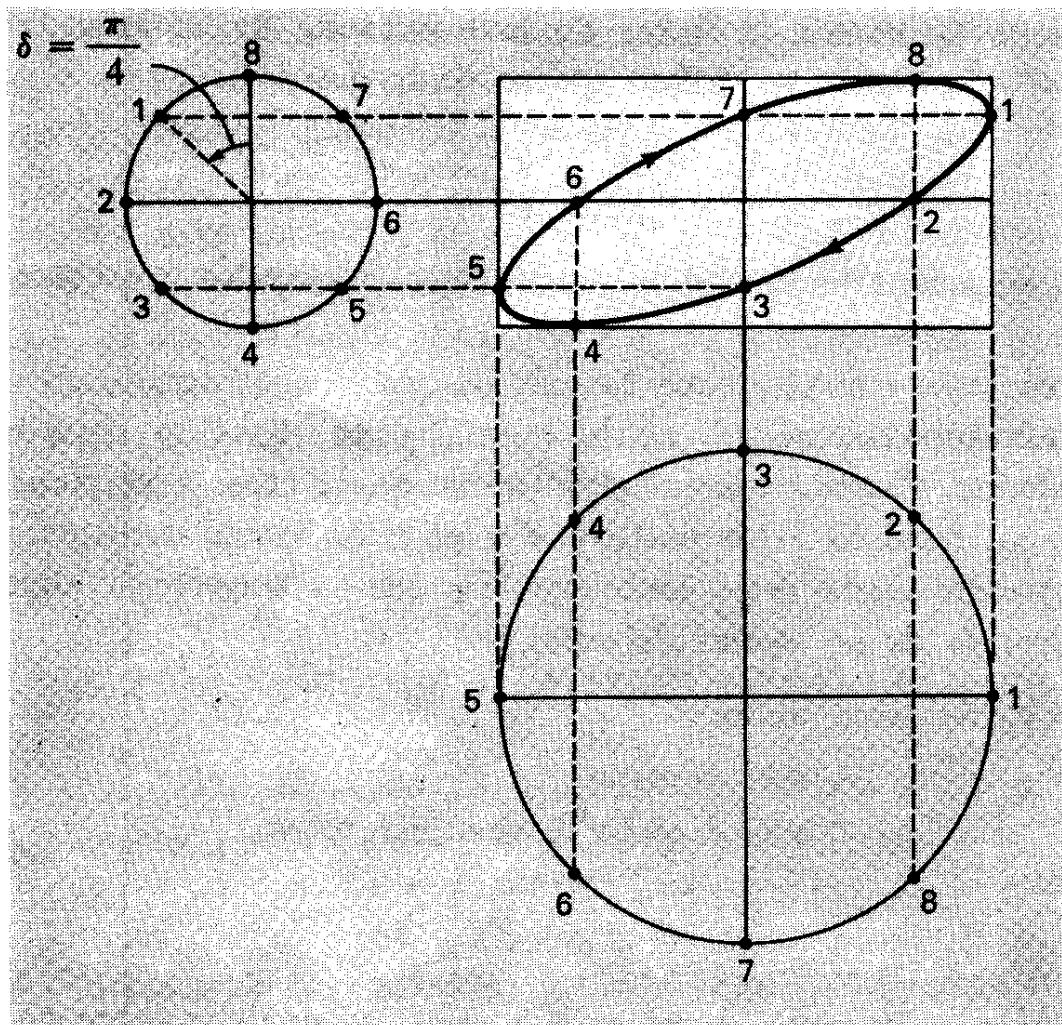


Fig. 2-9. Superposición de vibraciones armónicas simples perpendiculares con diferencia de fase inicial de  $\pi/4$ .

al eje  $x$  y  $C_2P_2$  forma el ángulo  $\delta$ , es decir,  $45^\circ$ , medido desde el eje  $y$  positivo en sentido antihorario. Las proyecciones de estas dos posiciones correspondientes de  $P_1$  y  $P_2$  nos da una serie de puntos de intersección, como se ven en la figura 2-9, que representan las posiciones instantáneas del punto  $P$  cuando se mueve dentro del rectángulo. El lugar geométrico definido por estos puntos es una elipse con ejes inclinados, descrita en *sentido horario*. La ecuación analítica de esta elipse puede hallarse, si se quiere, eliminando  $t$  de las ecuaciones que definen  $x$  e  $y$ :

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos (\omega t + \pi/4) = \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos \omega t - \frac{A_2}{\sqrt{2}} \sin \omega t$$

Con ayuda de este último ejemplo, podemos ver cómo se desarrolla el diagrama de este movimiento combinado cuando imaginamos que la dife-

rencia de fase  $\delta$  aumenta de cero a  $2\pi$ . Partiendo del movimiento diagonal lineal para  $\delta = 0$ , el movimiento se transforma en elíptico en sentido horario, llegando a tener una anchura máxima cuando  $\delta = \pi/2$ , y luego se va cerrando hasta que para  $\delta = \pi$  pasamos por una secuencia semejante de movimiento elíptico (de sentido contrario ahora), hasta que para  $\delta = 2\pi$  volvamos a una situación que no se diferencia en nada de la correspondiente a  $\delta = 0$ . Esta secuencia de movimientos se ilustra en la figura 2-10.

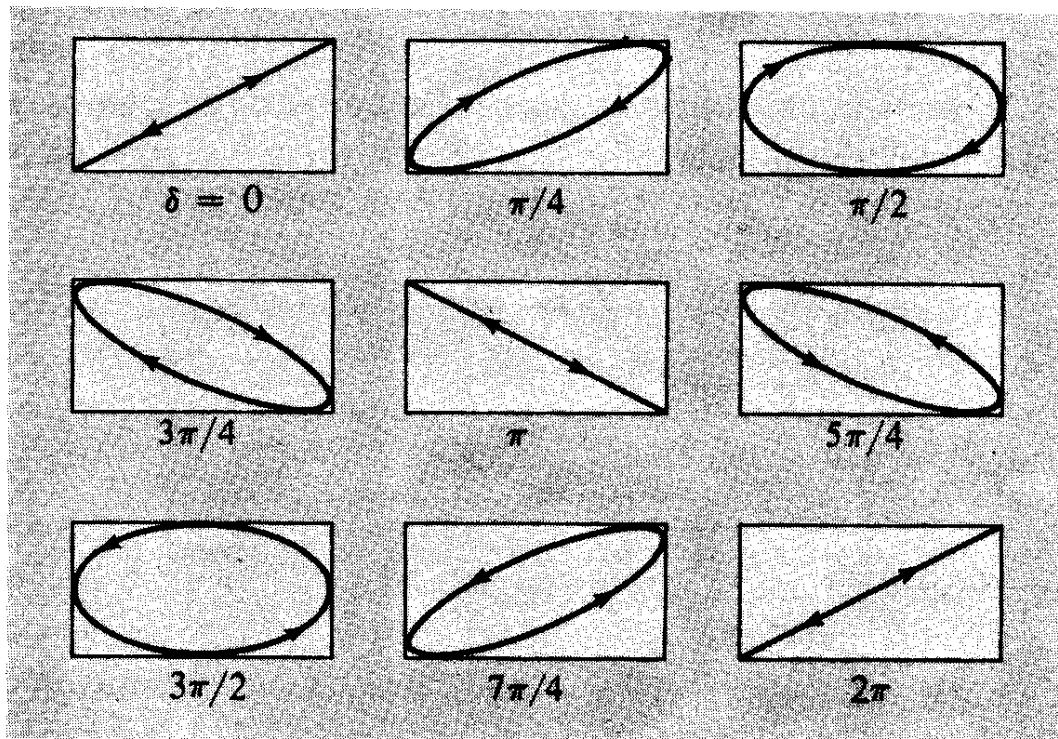


Fig 2-10. Superposición de dos movimientos armónicos simples perpendiculares de la misma frecuencia para diversas diferencias de fase iniciales.

En todos estos problemas se puede construir el movimiento resultante muy fácilmente mediante el método gráfico. Como en el último ejemplo, el procedimiento consiste en señalar sobre la circunferencia de referencia una serie de puntos correspondientes a sucesivos incrementos de tiempo iguales, y en particular a submúltiplos convenientes del período, como octavos, doceavos o dieciseisavos. Una vez familiarizados con el proceso en cuestión, se puede hacer un diagrama más compacto tomando el rectángulo límite y construyendo solamente una semicircunferencia sobre dos lados consecutivos. Para aclarar esto, tomemos de nuevo el caso en que  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\delta = \pi/4$ . Dividiendo las circunferencias de referencia en submúltiplos pares de  $2\pi$ , siempre hay dos puntos sobre la circunferencia que al proyectarse dan el mismo valor del desplazamiento. Así pues, dibujando una sola semicircunferencia, se puede obtener tanta información como con la circunferencia completa, sólo que ha-

brá que considerar dos veces la mayoría de los puntos, como se indica en la figura 2-11. Una vez numerados los puntos sobre la circunferencia de acuerdo con la secuencia temporal correcta se obtienen exactamente, igual que antes, las intersecciones que definen las coordenadas del movimiento real. (Para evitar confusiones en esta versión condensada del diagrama hemos utilizado letras en lugar de números para identificar dichas intersecciones,  $a = 1$ ,  $b = 2$ , etc.)

Aunque los instantes escogidos *no* correspondiesen a submúltiplos pares del período total (o ni siquiera a submúltiplos *iguales*) todavía podríamos indicar sobre la semicircunferencia la secuencia correcta de puntos correspondientes a una vuelta completa alrededor de la circunferencia de referencia.

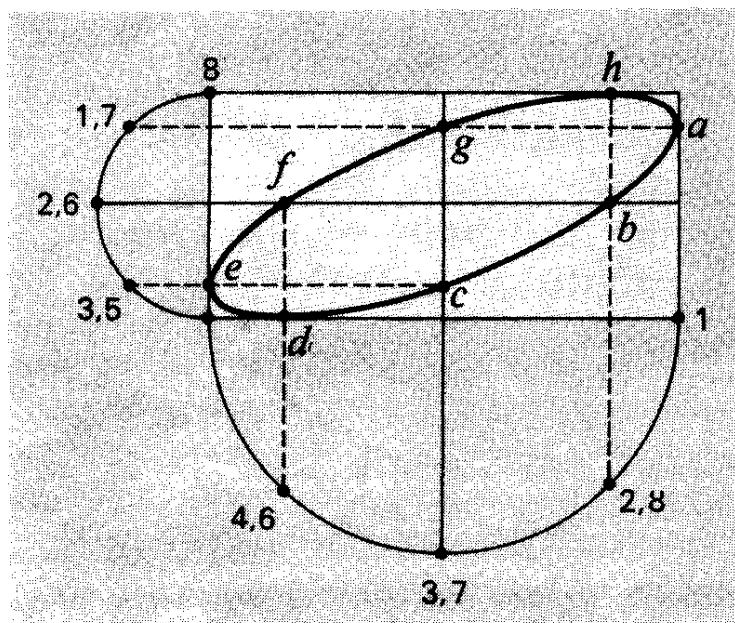


Fig. 2-11. Construcción abreviada para la superposición de vibraciones perpendiculares.

Basta imaginar que la circunferencia se ha plegado sobre su diámetro principal, es decir, sobre el diámetro paralelo al componente del movimiento que esta circunferencia describe. Pero resulta más simple emparejar los puntos que acabamos de indicar.

## MOVIMIENTOS PERPENDICULARES CON FRECUENCIAS DIFERENTES; FIGURAS DE LISSAJOUS

Es un ejercicio sencillo y bastante entretenido ampliar el análisis anterior a movimientos con frecuencias diferentes. Daremos algunos ejemplos para ilustrar la clase de resultados obtenidos.

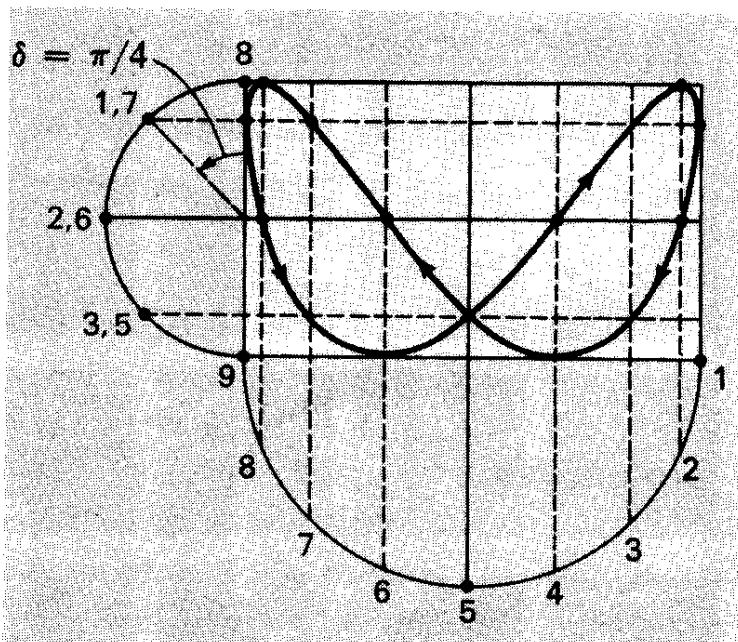


Fig. 2-12. Construcción de una figura de Lissajous.

En la figura 2-12 se ve la construcción que puede hacerse si  $\omega_2 = 2\omega_1$  y  $\delta = \pi/4$ . Hemos escogido dividir la circunferencia de referencia para el movimiento de frecuencia  $\omega_2$  en ocho intervalos de tiempo iguales, es decir, en arcos que subtienden  $45^\circ$ . Durante un ciclo completo de  $\omega_2$ , se recorre medio ciclo solamente de  $\omega_1$ , y los puntos situados sobre las circunferencias de referencia se marcan de acuerdo con ello, teniendo en cuenta la diferencia de fase inicial de  $45^\circ$ . Para obtener un período completo del movimiento combinado es necesario, como es lógico, que se verifique un ciclo completo de  $\omega_1$ ; esto exige que, después de alcanzar el punto marcado “9”, volvamos a repetir las etapas a lo largo de la semicircunferencia inferior y pasemos por segunda vez por todos los puntos correspondientes a una vuelta completa alrededor de la circunferencia  $\omega_2$ . De este modo terminamos con una trayectoria cerrada que se cruza a sí misma en un punto y que se repetiría indefinidamente. Esta curva se conoce con el nombre de *figura de Lissajous*, en honor de J. A. Lissajous (1822-1880), que hizo un amplio estudio de estos movimientos. Si se introduce una ligera disminución de la amplitud con el tiempo el diagrama resulta aún más sorprendente. En la figura 2-13 se muestra un conjunto de figuras de Lissajous con  $\omega_2 = 2\omega_1$ , pero con diferencias de fase iniciales distintas.

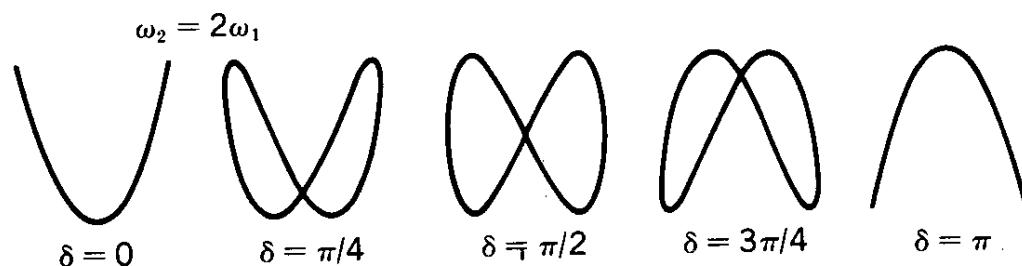


Fig. 2-13. Figuras de Lissajous para  $\omega_2 = 2\omega_1$  con diversas diferencias de fase iniciales.

Cuando se pasa a una relación de frecuencias aún más complicadas, las curvas resultantes son cada vez más variables, y en la figura 2-14 se dan algunos ejemplos. Estas figuras se generan fácilmente si se tiene un control flexible sobre las frecuencias, amplitudes y fases si se aplican tensiones sinusoidales diferentes a las placas deflectoras  $x$  e  $y$  de un osciloscopio de rayos catódicos. Excepto en aquellos casos en que la figura de Lissajous pasa por el vértice exacto del rectángulo límite, puede hallarse la relación de las frecuencias que se combinan mediante inspección de la misma; viene dada por el cociente entre el número de puntos de tangencia que la figura tiene con dos lados adyacentes de la figura. El lector puede buscar la justificación teórica de este resultado y comprobar su exactitud en las diversas curvas de la figura 2-14.

## COMPARACIÓN ENTRE LA SUPERPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS PARALELOS Y PERPENDICULARES

Resulta quizás instructivo hacer una comparación directa entre la superposición de dos vibraciones armónicas sobre la misma recta y la superposición ortogonal de las mismas que origina las figuras de Lissajous. Hemos procurado representar esta relación en la figura 2-15 para el caso sencillo de dos vibraciones de frecuencias y amplitudes iguales. La figura muestra dos vibraciones sinusoidales combinadas para diversas diferencias de fase entre cero y  $\pi$ . Las dos curvas inferiores de cada grupo muestran el desplazamiento original individual en forma de desviaciones en sentido  $y$  en un osciloscopio de doble haz con una base de tiempo lineal. Encima de este par de curvas se obtiene la sinusode que resulta de la suma directa de estas dos desviaciones  $y$ . Finalmente, se muestran las figuras de Lissajous obtenidas suprimiendo

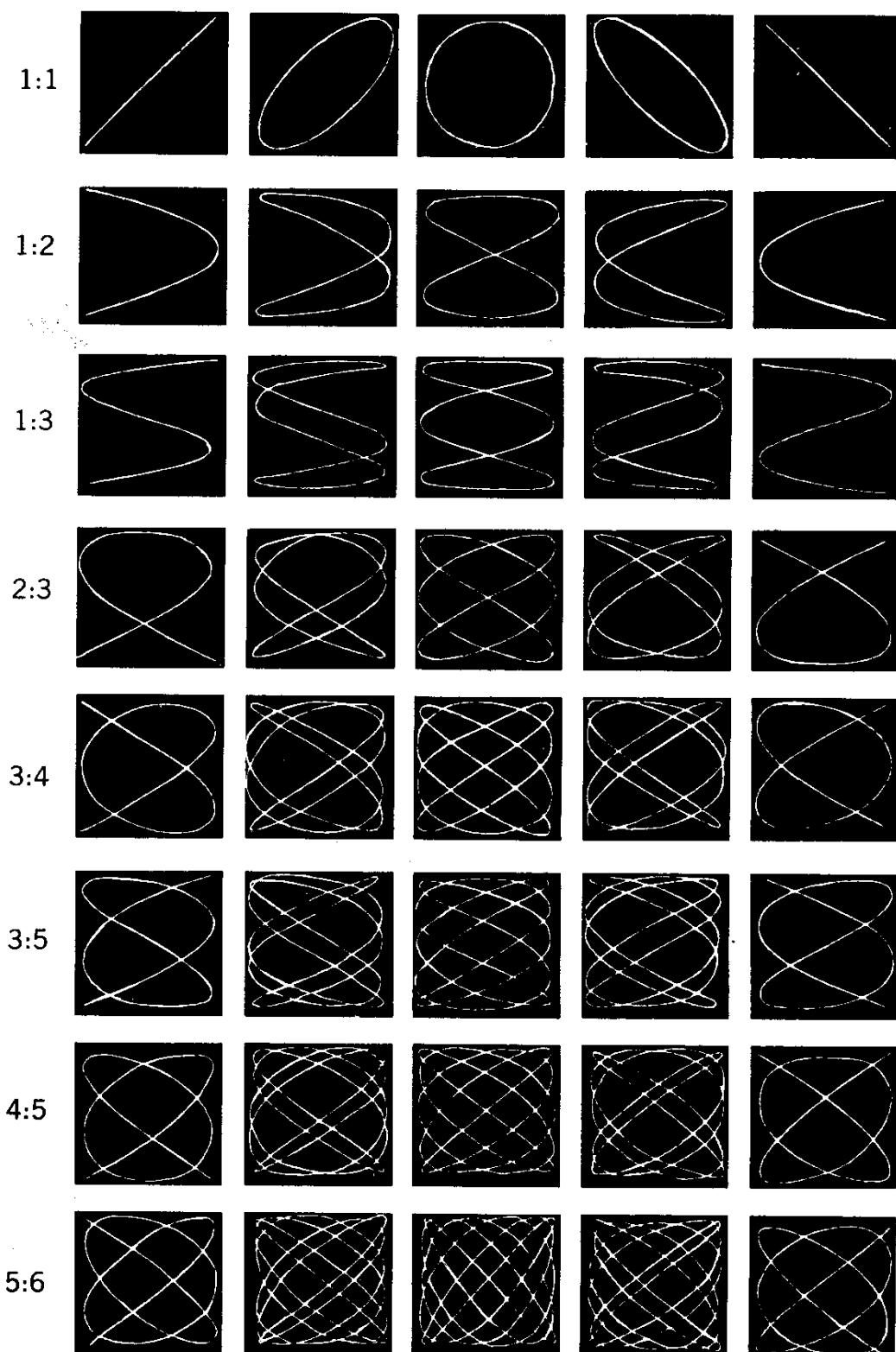


Fig. 2-14. Figuras de Lissajous: diversas razones de frecuencia con distintas diferencias de fase. (Según J. H. Poynting, J. J. Thomson y W. S. Tucker, Sound, Griffin, London, 1949.)

la base de tiempo del osciloscopio y aplicando las dos señales sinusoidales primarias a las placas  $x$  e  $y$ .

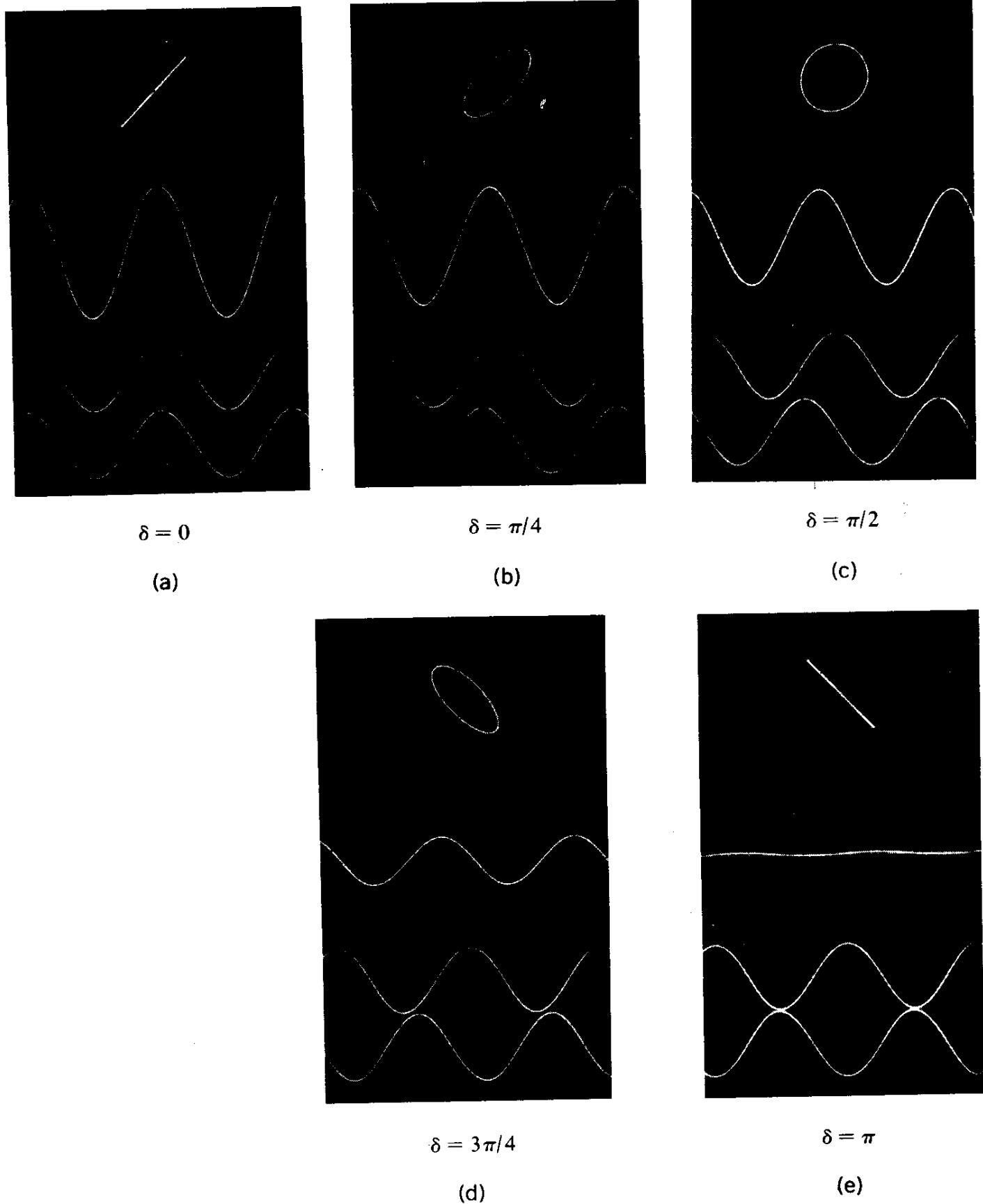


Fig. 2-15. Comparación de los resultados de sumar dos vibraciones armónicas (a) sobre la misma recta; (b) perpendiculares formando figuras de Lissajous. (Fotografías de Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

Si las dos señales primarias vienen dadas por  $A \cos \omega t$  y  $A \cos(\omega t + \delta)$  se tienen los resultados siguientes:

### *Superposición paralela*

$$\begin{aligned}y_1 &= A \cos \omega t \\y_2 &= A \cos(\omega t + \delta) \\y = y_1 + y_2 &= \left(2A \cos \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)\end{aligned}$$

[Obsérvese la suave disminución de amplitud proporcional a  $\cos(\delta/2)$  cuando  $\delta$  aumenta de cero a  $\pi$ .]

### *Superposición perpendicular*

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega t \\y &= A \cos(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

Eliminando la dependencia explícita con el tiempo, se tiene

$$x^2 - 2xy \cos \delta + y^2 = A^2 \sin^2 \delta$$

que define una elipse que degenera en una recta para  $\delta = \pi/2$ , como se ve en las fotografías.

## PROBLEMAS

**2-1** Escribir las expresiones siguientes en la forma  $z = \operatorname{Re}[A e^{j(\omega t + \alpha)}]$

- (a)  $z = \sin \omega t + \cos \omega t$ .
- (b)  $z = \cos(\omega t - \pi/3) - \cos \omega t$ .
- (c)  $z = 2 \sin \omega t + 3 \cos \omega t$ .
- (d)  $z = \sin \omega t - 2 \cos(\omega t - \pi/4) + \cos \omega t$ .

**2-2** Una partícula está sometida simultáneamente a tres movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y en dirección  $x$ . Si las amplitudes son 0,25, 0,20 y 0,15 mm, respectivamente, y la diferencia de fase entre el primero y segundo es  $45^\circ$ , y entre el segundo y tercero es  $30^\circ$ , hallar la amplitud del desplazamiento resultante y su fase relativa respecto al primer componente (de amplitud 0,25 mm).

**2-3** Dos vibraciones sobre la misma recta vienen descritas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}y_1 &= A \cos 10\pi t \\y_2 &= A \cos 12\pi t\end{aligned}$$

#### 44 Superposición de movimientos

Hallar el período de batido y dibujar un esquema cuidadoso de la perturbación resultante durante un período de la pulsación.

2-4 Hallar la frecuencia del movimiento combinado en cada una de las siguientes vibraciones:

- (a)  $\sin(2\pi t - \sqrt{2}) + \cos(2\pi t)$ .
- (b)  $\sin(12\pi t) + \cos(13\pi t - \pi/4)$ .
- (c)  $\sin(3t) - \cos(\pi t)$ .

2-5 Dos vibraciones perpendiculares vienen descritas por las ecuaciones

$$x = 10 \cos(5\pi t)$$
$$y = 10 \cos(10\pi t + \pi/3)$$

Construir la figura de Lissajous del movimiento combinado.

2-6 Construir las figuras de Lissajous de los movimientos siguientes:

- (a)  $x = \cos 2\omega t, y = \sin 2\omega t$ .
- (b)  $x = \cos 2\omega t, y = \cos(2\omega t - \pi/4)$ .
- (c)  $x = \cos 2\omega t, y = \cos \omega t$ .

*Es totalmente evidente que la Regla o Ley de la Naturaleza de todos los cuerpos elásticos expresa que la fuerza que tiende a restaurarles a su posición natural es siempre proporcional a la distancia o espacio de donde se ha desplazado, bien por enraecimiento, o sea, por separación entre sí de sus diversas partes, o bien por condensación, es decir, por acumulación de las mismas acercándose mutuamente. Y esto es observable, no sólo en los cuerpos que actúan como muelles sino en cualquier otro, sea metal, madera, piedra, tierra cocida, pelo, cuerno, seda, hueso, tendones, vidrio, etc. En cada caso hay que estudiar las figuras particulares de los cuerpos deformados y los modos ventajosos o desventajosos de deformación.*

ROBERT HOOKE, *De Potentia Restitutiva* (1678)

# Vibraciones libres de los sistemas físicos

AL HACER LA AFIRMACIÓN que acabamos de citar sobre las propiedades elásticas de los objetos, Robert Hooke más bien simplificó en exceso la situación. Las fuerzas restauradoras de cualquier sistema físico son sólo *aproximadamente* funciones lineales del desplazamiento, como se indicó al principio del capítulo 1. Sin embargo, es notable que una gran diversidad de deformaciones de los sistemas físicos, entre los que podemos incluir alargamientos, acortamientos, flexión y torsión (o combinaciones de los mismos) dan como resultado fuerzas restauradoras proporcionales al desplazamiento y por ello originan vibraciones armónicas simples (o una superposición de vibraciones armónicas). En este capítulo consideraremos cierto número de ejemplos de estos movimientos, resaltando particularmente el modo en que pueden relacionarse las características cinemáticas del movimiento con las propiedades que pueden calcularse normalmente mediante medidas estáticas. Empezaremos con un detenido examen de un sistema que constituye un prototipo para muchos problemas de oscilaciones ; una masa que sufre oscilaciones monodimensionales sometida a una fuerza restauradora del tipo postulado por Hooke. Probablemente buena parte del estudio de la sección siguiente será familiar, pero es importante estar seguro de ello antes de pasar adelante.

## PROBLEMA BÁSICO MASA-MUELLE

En nuestra primera referencia a este tipo de sistemas dada en el capítulo 1, considerábamos que estaba compuesto por un solo objeto de masa  $m$  sujeto a un muelle [fig. 3-1 (a)] o a otro dispositivo equivalente, por ejemplo, un

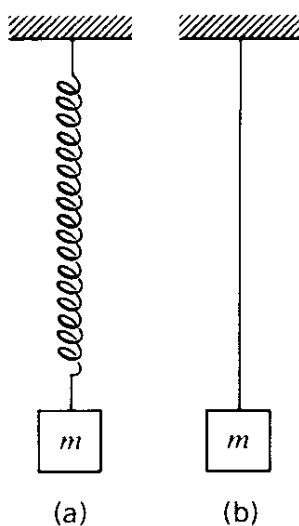


Fig. 3-1. (a) Sistema masa-muelle. (b) Sistema masa-alambre.

alambre delgado [fig. 3-1 (b)], que proporciona una fuerza restauradora igual al producto de cierta constante  $k$  por el desplazamiento respecto al equilibrio. Esto sirve para identificar, en función de un sistema de un tipo particularmente sencillo, las dos características que son esenciales en el establecimiento de movimientos oscilantes:

1. Una componente inercial, capaz de transportar energía cinética.
2. Una componente elástica, capaz de almacenar energía potencial elástica.

Admitiendo que la ley de Hooke es válida, se obtiene una energía potencial proporcional al cuadrado del desplazamiento del cuerpo respecto al equilibrio. Admitiendo que toda la inercia del sistema está localizada en la masa al final del muelle, se obtiene una energía cinética que es precisamente igual a  $\frac{1}{2}mv^2$ , siendo  $v$  la velocidad del objeto. Debe señalarse que ambas hipótesis son particularizaciones de las condiciones generales 1 y 2 y que habrá muchos sistemas oscilantes en que no se apliquen estas condiciones especiales. Sin embargo, si un sistema *puede* considerarse compuesto efectivamente por una masa concentrada al final de un muelle lineal ("lineal" se refiere a su propiedad elástica y no a su forma geométrica), entonces podemos escribir su ecuación del movimiento mediante uno de estos dos procedimientos:

1. Mediante la ley de Newton ( $F = ma$ ),

$$-kx = ma$$

2. Por conservación de la energía mecánica total ( $E$ ),

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

La segunda expresión es, naturalmente, el resultado de integrar la primera respecto al desplazamiento  $x$ , pero ambas son *ecuaciones diferenciales* del movimiento del sistema. Es importante poder reconocer la presencia de estas ecuaciones diferenciales siempre que surjan en el análisis de un sistema físico. En forma diferencial explícita pueden escribirse del modo siguiente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (3-1)$$

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (3-2)$$

Cuando se vea una ecuación análoga a éstas se puede llegar a la conclusión de que el desplazamiento  $x$  es una función del tiempo de la forma

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (3-3)$$

en donde  $\omega^2$  es el cociente ( $k/m$ ) entre la constante  $k$  del muelle y la masa  $m$ . Esta solución seguirá siendo válida, dadas las ecuaciones (3-1) o (3-2), aunque el sistema no sea un objeto aislado sujeto a un muelle carente de masa.

Ha de señalarse que en la ecuación (3-3) la constante  $\omega$  queda definida en todos los casos por los valores que posean  $m$  y  $k$ . La ecuación contiene otras dos constantes, la amplitud  $A$  y la fase inicial  $\alpha$ , que proporcionan entre las dos una especificación completa del estado de movimiento del sistema para  $t = 0$  (u otro tiempo señalado) en cualquier caso particular. El enunciado inicial de la ley de Newton de la ecuación (3-1) *no* contiene constantes a determinar. La ecuación (3-2), que suele denominarse "integral primera" de la ecuación (3-1), es matemáticamente intermedia entre las ecuaciones (3-1) y (3-3) y contiene *una* constante a determinar (la energía total  $E$ , que es igual a  $kA^2/2$ ). La introducción de una constante más en cada etapa de integración de la ecuación diferencial original (ley de Newton) es siempre necesaria, aunque en algún caso particular la constante puede ser nula. Se puede imaginar este proceso como el inverso de aquel que, mediante derivación, hace desaparecer un término constante.

## RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL OSCILADOR ARMÓNICO UTILIZANDO EXPONENTES COMPLEJOS

Como modelo para cálculos futuros, consideremos la ecuación diferencial básica, ecuación (3-1), y obtengamos la solución familiar dada en la ecuación (3-3),

mediante el empleo del exponente complejo. Como en la solución no intervienen de modo esencial los valores aislados de  $k$  y  $m$ , sino sólo su cociente  $k/m$ , empecemos por volver a escribir la ecuación (3-1) de la forma más compacta siguiente :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (3-4)$$

en la que se afirma que la combinación lineal de  $x$  y su segunda derivada respecto al tiempo es nula, o lo que es equivalente, que  $d^2x/dt^2$  es múltiplo de  $x$ . Sabemos que la función exponencial tiene esta última propiedad; así pues, se puede escribir:

$$x = Ce^{pt} \quad (3-5)$$

en donde (para que la ecuación sea dimensionalmente correcta) se ha incluido un coeficiente  $C$  con dimensiones de una distancia y un coeficiente  $p$  de modo que  $pt$  sea adimensional, es decir,  $p$  tiene dimensiones de (tiempo) $^{-1}$ . Sustituyendo en la ecuación (3-4) resulta :

$$p^2 Ce^{pt} + \omega^2 Ce^{pt} = 0$$

que puede satisfacerse para cualquiera  $t$  y  $C$ , siempre que

$$p^2 + \omega^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p^2 &= -\omega^2 \\ p &= \pm j\omega \end{aligned} \quad (3-6)$$

Ambos valores de  $p$  satisfacen la ecuación original. Como no tenemos ninguna razón para eliminar alguno de ellos, hemos de aceptar ambos con su propio valor de  $C$ . Así pues, la ecuación (3-5) se convierte en

$$x = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} \quad (3-7)$$

Interpretemos la ecuación (3-7) en función de la descripción mediante un vector rotativo del MAS. El primer término de la derecha corresponde a un vector  $C_1$  que gira en sentido antihorario con velocidad angular  $\omega$ , y el segundo a un vector  $C_2$  que gira en sentido horario con la misma velocidad. Ambos se combinan para dar una oscilación armónica sobre el eje  $x$ , como se ve en la figura 3-2(a), si son iguales las longitudes de  $C_1$  y  $C_2$ . Pero  $C_1$  y  $C_2$ , según aparecen en la ecuación (3-7), no tienen por qué ser reales. Puede satisfacerse la ecuación (3-7) igualmente bien si se hace girar  $C_1$  cierto ángulo  $\alpha$  respecto a la dirección definida por  $t$ , con tal que se haga girar a  $C_2$  un ángulo  $-\alpha$ .

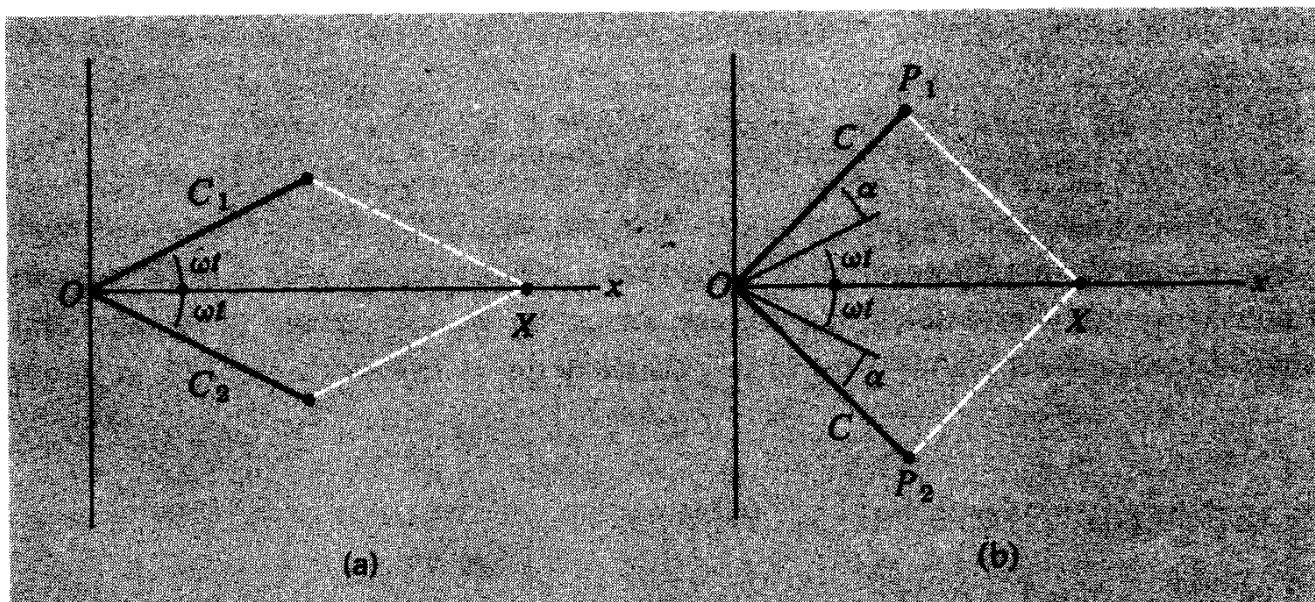


Fig. 3-2. (a) Superposición de soluciones complejas de la Ec. (3-4) con  $C_1 = C_2$ . (b) Superposición de soluciones complejas de la Ec. (3-4) para ángulo de fase inicial distinto de cero.

respecto a  $-\omega t$ , y haciendo que ambos vectores sean de nuevo iguales, como se ve en la figura 3-2 (b).<sup>1</sup> Esta condición menos restrictiva conduce entonces al resultado acostumbrado:

$$\begin{aligned} x &= Ce^{i(\omega t+\alpha)} + Ce^{-i(\omega t+\alpha)} \\ &= 2C \cos(\omega t + \alpha) \\ &\equiv A \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Las magnitudes  $C_1$  y  $C_2$  de la ecuación (3-7), o  $A$  y  $\alpha$  en la anterior, representan igualmente bien las dos constantes de integración que deben introducirse en el proceso de pasar de la ecuación diferencial de segundo orden (3-4)<sup>2</sup> a la solución final que exprese  $x$  en función de  $t$ .

El análisis anterior revela incidentalmente que puede producirse un movimiento armónico rectilíneo mediante la superposición de dos movimientos circulares reales iguales y opuestos, que es una clase de proceso inverso a la producción de una figura circular de Lissajous a partir de dos oscilaciones lineales perpendiculares iguales. (Ambos resultados tienen aplicaciones importantes en la descripción de la luz polarizada.) Habiendo llegado a la ecuación final, vemos que  $x$  puede describirse como la parte real de un vector rotatorio correspondiente precisamente al primer término de la ecuación (3-7)<sup>3</sup>. Así

<sup>1</sup> Ninguna otra relación conduce a una oscilación exclusiva a lo largo del eje  $x$ . Razonar sobre este punto.

<sup>2</sup> El *orden* de una ecuación diferencial viene definido por la más alta derivada que aparece en la ecuación.

<sup>3</sup> O el segundo término solo, si se prefiere.

pues, en muchos cálculos futuros admitiremos soluciones simples del tipo siguiente :

$$x = \text{parte real de } z, \text{ en donde } z = Ae^{i(\omega t + \alpha)} \quad (3-8)$$

Esta amplia discusión, otra vez repetida, del oscilador armónico simple, aunque considera sólo resultados muy familiares, puede ayudar a proporcionar una visión más clara del modo de funcionar de la descripción mediante vectores rotatorios del MAS y de la justificación de este método.

## ELASTICIDAD Y MÓDULO DE YOUNG

Volvamos ahora a las propiedades de la materia que controlan la frecuencia de un sistema tipo masa-muelle. Si consideramos un muelle helicoidal real, el problema es complicado. Al sujetar una carga a estos muelles, según se ve en la figura 3-3, se originan dos efectos diferentes, ninguno de los cuales es un proceso de alargamiento o deformación simple. Si imaginamos un peso  $W$  suspendido de un punto situado sobre el eje vertical de un muelle, su efecto consiste en producir un par  $WR$  alrededor de los puntos situados sobre el eje aproximadamente horizontal del alambre que forma el muelle. Un efecto de esta acción, el principal en la mayoría de los muelles, es provocar una

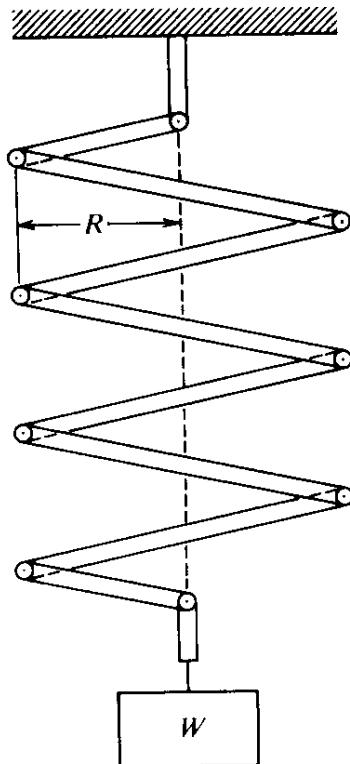


Fig. 3-3. Resorte de alambre con masa suspendida.

torsión del alambre alrededor de su propio eje, y el descenso del peso es fundamentalmente consecuencia de esta torsión. Pero existe otro efecto: Las espiras del muelle se apretarán o aflojarán ligeramente, de modo que el muelle en su totalidad sufre una torsión alrededor del eje vertical. En este proceso interviene una flexión de las espiras, es decir, una variación de su curvatura.<sup>1</sup> El resultado final es ciertamente expresable como una proporcionalidad (con constante  $k$  del muelle) entre la carga aplicada y la distancia que recorre la carga, pero para relacionar la elasticidad con las propiedades físicas básicas haremos bien en dejar de lado el muelle y pasar a problemas más directos.

El alargamiento simple de una varilla o alambre proporciona el caso más fácil de estudiar de todos. El comportamiento de este sistema en equilibrio estático puede describirse así:

1. Para un material determinado formado por unas varillas o alambres de una sección recta de área dada, el alargamiento  $\Delta l$  bajo la acción de una fuerza dada es proporcional a la longitud inicial  $l_0$ . El cociente adimensional  $\Delta l/l_0$  se denomina *deformación unitaria* o simplemente *deformación*. Este resultado puede expresarse también diciendo que en un experimento estático con una varilla determinada, el desplazamiento de los diversos puntos a lo largo de un eje son proporcionales a sus distancias respecto al extremo fijo, como se ve en la figura 3-4(a), ya que en este caso estático la fuerza  $\Delta P$  aplicada en un extremo da lugar a una tracción de valor  $\Delta P$  a lo largo de toda la varilla.

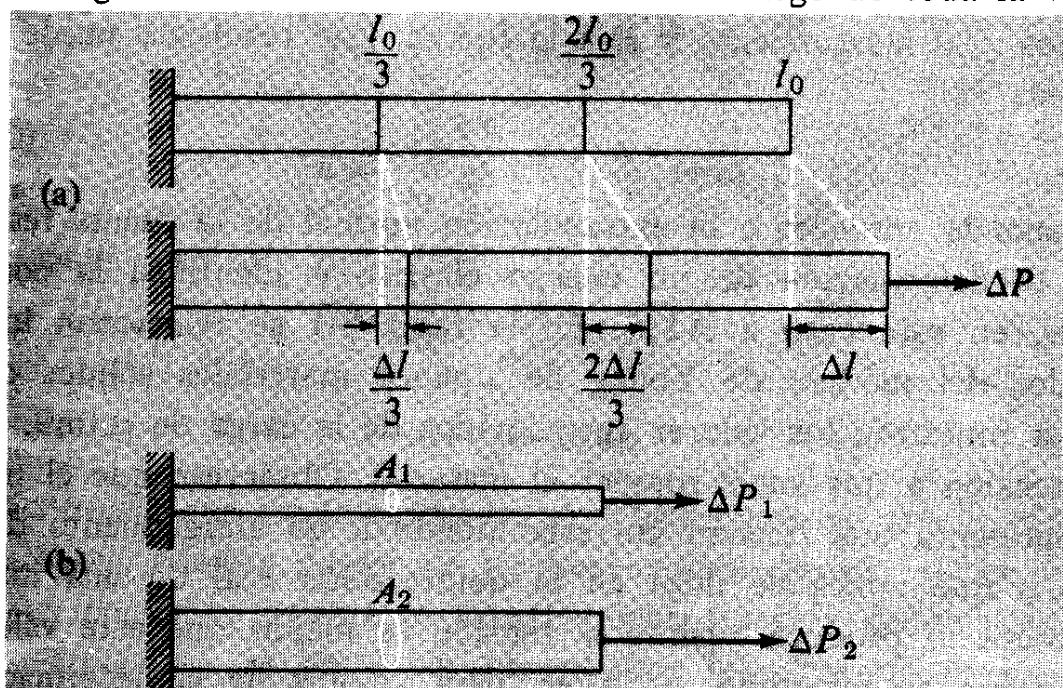


Fig. 3-4. (a) Extensión uniforme longitudinal de una barra bajo condiciones estáticas. (b) Barras de diferentes secciones  $A_1$  y  $A_2$  bajo tensiones  $\Delta P_1$  y  $\Delta P_2$ .

<sup>1</sup> Un muelle se apretará o aflojará más o menos, según el material con que esté construido.

2. También resulta que, en el caso de varillas de un material determinado, pero de secciones rectas con áreas diferentes, se obtiene la misma deformación ( $\Delta l/l_0$ ) aplicando fuerzas proporcionales a dichas áreas, como se ve en la figura 3-4(b). El cociente  $\Delta P/A$  se denomina *tensión* y tiene dimensiones de fuerza por unidad de área, coincidentes con la de la presión.

3. Con tal que la deformación sea muy pequeña, menor que un 0,1 % aproximadamente de la longitud normal  $l_0$ , la relación entre la tensión y la deformación es lineal, de acuerdo con la ley de Hooke. En este caso podemos escribir

$$\frac{\text{tensión}}{\text{deformación}} = \text{constante}$$

El valor de esta constante para cada material se denomina módulo de elasticidad de Young (en honor del mismo Thomas Young, que contribuyó a la historia de la ciencia con sus experimentos de interferencias ópticas).<sup>1</sup> Normalmente se le representa por el símbolo  $Y$ . Si llamamos  $dF$  a la fuerza ejercida por un alambre o varilla estirada o comprimida sobre otro objeto, se puede escribir

$$\frac{dF/A}{dl/l_0} = -Y$$

es decir,

$$dF = -\frac{AY}{l_0} dl \quad (3-9)$$

Si llamamos  $x$  al alargamiento y  $F$  a la fuerza, este resultado puede escribirse también así:

$$F = -\frac{AY}{l_0} x \quad (3-10)$$

que corresponde entonces a la extrapolación normal de la fuerza restauradora debida a la deformación de un cuerpo elástico e identifica la constante  $k$  del muelle, en este caso a  $AY/l_0$ . En la tabla 3-1 se relacionan los valores aproximados del módulo de Young de algunos materiales sólidos conocidos. También se muestran los valores aproximados de la carga de rotura, expresada como la tensión a que suele romper el material. Obsérvese que el módulo de Young representa una tensión correspondiente a un alargamiento del 100 %, condición a que nunca se llega en la deformación real de una muestra. El fallo o rotura se produce cuando la tensión es menor que este valor en dos o tres órdenes de magnitud, es decir, para valores de la deformación entre 0,1 y 1 %. No es posible obtener, estirando un alambre o varilla, un cambio

<sup>1</sup> También aportó importantes conocimientos para lograr el primer desciframiento de los jeroglíficos egipcios de la famosa Rosetta Stone.

relativo de longitud tan grande como el que se obtiene fácilmente en el caso de un muelle helicoidal.

TABLA 3-1: PROPIEDADES A TRACCIÓN DE CIERTOS MATERIALES

<i>Material</i>	<i>Módulo de Young, N/m<sup>2</sup></i>	<i>Carga de rotura, N/m<sup>2</sup></i>
Acero	$20 \times 10^{10}$	$11 \times 10^8$
Aluminio	$6 \times 10^{10}$	$2 \times 10^8$
Cobre	$12 \times 10^{10}$	$5 \times 10^8$
Latón	$9 \times 10^{10}$	$4 \times 10^8$
Vidrio	$6 \times 10^{10}$	$10 \times 10^8$

Si se cuelga un cuerpo de masa  $m$  del extremo de un alambre, el período de las oscilaciones de muy pequeña amplitud viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml_0}{AY}} \quad (3-11)$$

como puede verse a partir de la ley de la fuerza, ecuación (3-10). Considérese, por ejemplo, una masa de 1 kg colgada de un alambre de acero de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro. Se tiene

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Por tanto,

$$k = \frac{AY}{l_0} \approx 1,6 \times 10^5 \text{ N/m}$$

Por consiguiente,

$$T \approx \frac{2\pi}{400} \approx 1,6 \times 10^{-2} \text{ sec}$$

o sea

$$\nu = \frac{1}{T} \approx 60 \text{ Hz}$$

Se ve fácilmente que este alambre se comporta como un muelle muy rígido, y las oscilaciones, además de ser de frecuencia muy elevada, deben tener una amplitud muy pequeña, solamente una pequeña fracción de un milímetro en un alambre de 1 m, si no debe sobrepasarse la carga de rotura del material.

El resultado expresado en la ecuación (3-11) puede volverse a escribir de un modo físicamente más claro si incluimos el *aumento de longitud*  $h$  que se

produce en equilibrio *estático* cuando se cuelga primeramente el cuerpo de masa  $m$  del alambre. Según la ecuación (3-10), se tiene

$$mg = \frac{AY}{l_0} h$$

Por tanto,

$$\frac{ml_0}{AY} = \frac{h}{g}$$

De aquí que, mediante la ecuación (3-11), se tenga

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (3-12)$$

Así pues, el período es el mismo que el de un péndulo simple de longitud  $h$ . Esto constituye un modo muy directo de calcular el período basándose en una medida simple del alargamiento estático sin necesidad de un conocimiento detallado de las características del alambre o del valor de la masa suspendida.

La probabilidad elástica macroscópica que describe el módulo de Young debe ser analizable, como es lógico, en función de las interacciones microscópicas entre los átomos del material. Evidentemente, si la longitud total de un alambre aumenta en el 1 %, esto significa que los espaciados interatómicos individuales que tienen la misma dirección, aumentan también en un 1 %. Así pues, en principio, se puede relacionar el módulo elástico a las propiedades atómicas según quedan descritas por la curva de energía potencial de las fuerzas interatómicas. Sin embargo, no proseguiremos con esta línea de análisis porque estamos preocupados sólo por la descripción macroscópica. En lugar de ello, pasaremos a la discusión de algunos otros ejemplos de movimiento armónico simple.

## OBJETOS FLOTANTES

Si un objeto flotante se introduce o se saca un poco del líquido a partir de su posición normal de equilibrio, surge una fuerza restauradora igual al aumento o disminución del peso del líquido desplazado por el objeto y se inicia un movimiento periódico. El caso resulta especialmente sencillo si el cuerpo flotante tiene un área de su sección recta constante en la parte que corta a la superficie del líquido. Un hidrómetro (fig. 3-5), como los utilizados para medir el peso específico del ácido de una batería o de un anticongelante, es un ejemplo simple de este tipo de objetos.

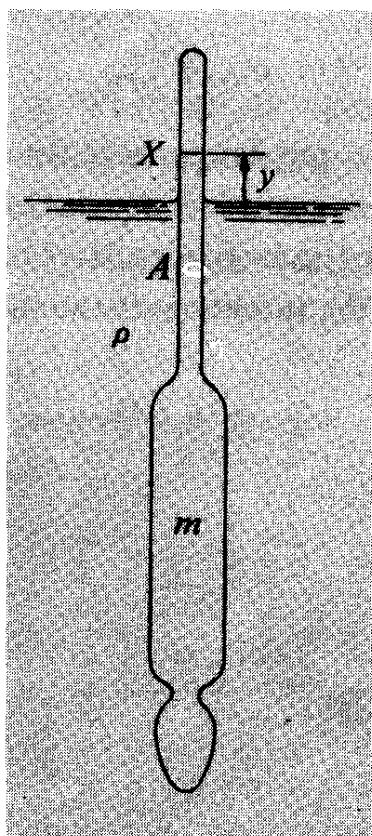


Fig. 3-5. *Densímetro simple, capaz de oscilar verticalmente cuando se desplaza de su posición de flotación normal.*

Sea  $m$  la masa de hidrógeno y su densidad  $\rho$ . Llamemos  $A$  al área de su sección recta. Entonces si el hidrómetro está a una distancia  $y$  por encima de su nivel de flotación, el volumen del líquido es  $Ay$  y la ecuación del movimiento se convierte (según la ley de Newton) en

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -g\rho Ay$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{g\rho A}{m}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g\rho A}} \quad (3-13)$$

Por ejemplo, un tipo común de hidrómetro para baterías tiene  $m \approx 10$  g y  $A \approx 0,25 \text{ cm}^2$ . Supóngase que se coloca en una batería ácido de peso específico 1,2. Entonces, utilizando el sistema MKS, se tiene

$$m \approx 10^{-2} \text{ kg}$$

$$A \approx 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$g \approx 10 \text{ m/seg}^2$$

$$\rho \approx 1,2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

dando así

$$T \approx 1 \text{ seg}$$

A escala mucho mayor se puede considerar que se produce este tipo de movimiento en un barco. Los costados de un barco grande son aproximadamente verticales y su fondo es más o menos plano, como en la figura 3-6. En este caso podemos expresar de modo conveniente la masa del barco en función de su calado,  $h$ :

$$m = \rho Ah$$

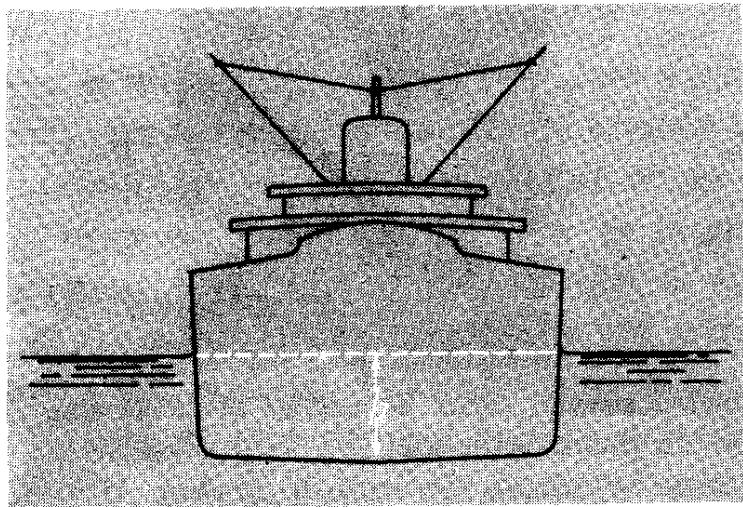


Fig. 3-6. Sección transversal de un buque flotando.

siendo  $\rho$  la densidad del agua y  $A$  el área de la sección recta horizontal del barco en la línea de flotación. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3-12) se tiene

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (3-14)$$

que es, pues, exactamente igual a la ecuación del péndulo simple que también podría haberse utilizado para las oscilaciones verticales de una masa colgada de un alambre [ecuación (3-12)]. Por ejemplo, si el calado del barco es 10 m, el período de las oscilaciones verticales deberá ser de unos 6 segundos. Este movimiento no es, sin embargo, un componente importante del esquema de oscilaciones total del barco. El cabeceo y el balanceo, en donde no interviene ninguna elevación o descenso importante de la posición del centro de masas respecto a la superficie del agua, son excitados más fácilmente por la acción de las olas.

## PÉNDULOS

El llamado “péndulo simple”, indicado en la figura 3-7 (a), representa un sistema oscilante muy familiar pero, sin embargo, bastante más complicado que las oscilaciones monodimensionales que hemos considerado hasta aquí (aunque debe admitirse que, al citar las oscilaciones verticales de objetos flotantes hemos omitido, por conveniencia, la cuestión engañosa del movimiento del líquido desplazado).

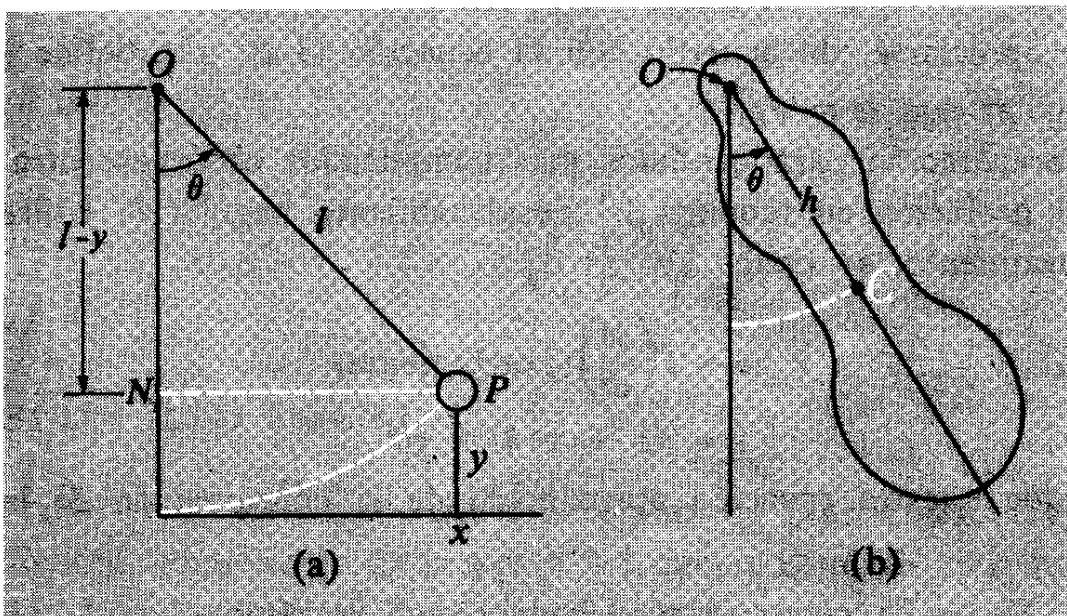


Fig. 3-7. (a) Péndulo simple. (b) Masa suspendida de forma arbitraria sobre un eje horizontal (péndulo rígido).

El problema del péndulo es esencialmente bidimensional, aunque su desplazamiento real venga especificado completamente por un solo ángulo  $\theta$ . Aunque los desplazamientos son predominantemente horizontales, el movimiento depende de modo esencial del hecho de que existe un ascenso y descenso del centro de masas con los cambios correspondientes de energía potencial gravitatoria. De hecho, el péndulo se adapta muy bien a un análisis mediante el principio de conservación de la energía y, puesto que el resultado final es bastante familiar, proporciona un buen ejemplo de este método, lo cual resulta de gran valor al analizar sistemas más complicados.

Refiriéndonos ahora a la figura 3-7 (a), se tiene que  $y \ll x$  si el ángulo  $\theta$  es pequeño, y por ello, a partir de la geometría de la figura,

$$y \approx \frac{x^2}{2l}$$

siendo  $l$  la longitud de la cuerda.<sup>1</sup> El enunciado del principio de conservación de la energía es

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E \quad \text{donde} \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Dadas las aproximaciones ya mencionadas, es suficientemente correcto escribir:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2 = E$$

que puede apreciarse, de acuerdo con la ecuación (3-2), que define un movimiento angular con  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

Como preparación para péndulos más complicados obsérvese otro planteamiento del problema en función del desplazamiento angular  $\theta$ . Utilizando dicho desplazamiento, se tiene

$$v = l\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \text{(exactamente)}$$

$$y = l(1 - \cos \theta) \approx \frac{1}{2}l\theta^2$$

de modo que nuestra ecuación aproximada de la conservación de la energía es ahora:

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E$$

Consideremos ahora un objeto arbitrario libre de oscilar en un plano vertical. Supongamos que su centro de masas  $C$  está a una distancia  $h$  del punto de suspensión, como se ve en la figura 3-7 (b). Entonces la ganancia de energía potencial para una desviación angular  $\theta$  es  $mgh\theta^2/2$ . La energía cinética es la de rotación del cuerpo como un todo alrededor de  $O$ . Como todos los puntos del cuerpo tienen velocidad angular  $d\theta/dt$ , esta energía cinética puede escribirse en la forma  $I(d\theta/dt)^2/2$ , en donde  $I$  es el momento de inercia alrededor del eje horizontal que pasa por  $O$ . De aquí se tiene que

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgh\theta^2 = E$$

<sup>1</sup> En el triángulo  $ONP$  se tiene (por el teorema de Pitágoras)  $l^2 = (l-y)^2 + x^2$ . De aquí  $x^2 = 2ly - y^2 \approx 2ly$ .

En muchos casos es conveniente introducir el momento de inercia alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masas. Si se escribe dicho momento de inercia como  $mk^2$ , siendo  $k$  el "radio de giro" del cuerpo, entonces la energía cinética de rotación *respecto al centro de masas* es  $mk^2(d\theta/dt)^2/2$ , a la cual debe añadirse la energía cinética asociada con la velocidad lineal instantánea  $h(d\theta/dt)$  del propio centro de masas. Así pues, la ecuación de conservación de la energía puede escribirse también del modo siguiente:

$$\frac{1}{2}mk^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left( h \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mgh\theta^2 = E$$

de lo cual resulta

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{gh}{h^2 + k^2} \\ T &= 2\pi \left( \frac{h^2 + k^2}{gh} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (3-15)$$

## AGUA EN UN TUBO EN U

Si en un tubo en U de sección recta constante de brazos verticales se introduce un líquido, como se ve en la figura 3-8, tenemos un sistema que recuerda al péndulo, pues, aunque el movimiento es bidimensional, puede describirse completamente, en función del desplazamiento vertical  $y$  de la superficie del líquido respecto a su posición de equilibrio.<sup>1</sup> Supóngase que la longitud total de la columna de líquido es  $l$  y que su sección recta es  $A$ . Entonces, si  $\rho$  es la

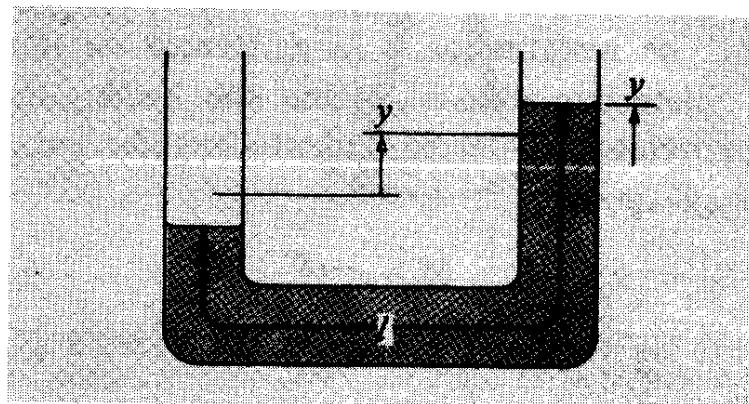


Fig. 3-8. Líquido oscilante en un tubo en U.

<sup>1</sup> No hay necesidad, de hecho, de que los brazos laterales sean verticales, aunque sí de longitud recta; las secciones rectas no precisan ser iguales, pero sí las longitudes; y las conexiones de los tubos pueden ser también de diferente sección transversal, siempre que la apropiada escala geométrica de los factores sea empleada para expresar el desplazamiento a velocidad de alguna parte del líquido, en términos de aquélla, en ambos brazos laterales.

densidad del líquido, su masa total es  $\rho Al$ . Admitiremos que todas las porciones del líquido se mueven con la misma velocidad,  $dy/dt$ . El aumento de energía potencial gravitatoria en la situación indicada en la figura 3-8 corresponde a tomar una columna de líquido de longitud  $y$ , del tubo de la izquierda, elevándolo a la altura  $y$  y colocándola en la parte superior de la columna de la derecha. Así pues, puede ponerse

$$U = \rho A y^2$$

La conservación de la energía mecánica nos da así la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}\rho Al \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + g\rho A y^2 = E$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2g}{l} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}} \end{aligned} \quad (3-16)$$

Obsérvese la semejanza con la ecuación del péndulo simple, pero también una pequeña diferencia: una columna de líquido en estas circunstancias tiene el mismo período que un péndulo simple de longitud  $l/2$ .

## OSCILACIONES POR TORSIÓN

El desarrollo de un *par* restaurador y la existencia de una energía potencial almacenada en un objeto sometido a torsión son hechos mecánicos familiares. Si el par  $M$  es proporcional al desplazamiento angular entre los dos extremos de un objeto, se puede poner

$$M = -c\theta \quad (3-17)$$

siendo  $c$  la constante de torsión del sistema. La energía potencial almacenada viene dada así por

$$U = - \int M d\theta = \frac{1}{2}c\theta^2$$

Si la desviación angular  $\theta$  se ha aplicado a un cuerpo de momento inercial  $I$  sujeto a un extremo del sistema sometido a torsión (y si es despreciable la

propia inercia del sistema), podemos poner el principio de conservación de la energía en la forma

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}c\theta^2 = E$$

y de aquí

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{c}{I} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}\end{aligned}\quad (3-18)$$

La relación existente entre la constante de torsión y las propiedades elásticas básicas del material es menos directa que la relación existente entre la constante de rigidez y el módulo de Young en el caso de un alambre o varilla estirados. El proceso esencial se denomina deformación de *corte* o *cizalladura* del material. Supóngase que se tiene firmemente pegado por su base a una mesa un bloque rectangular de cierto material, y que su cara superior se pega también a una tabla plana [figura 3-9 (a)]. Entonces, al aplicar una fuerza horizontal  $P$  a la tabla, en dirección paralela a dos de las aristas de la cara superior del bloque, se producirá una deformación como la indicada.<sup>1</sup> Dos de las caras laterales dejan de ser rectángulos transformándose en paralelogramos. Así pues, la deformación puede caracterizarse mediante el *ángulo de corte* o *ciza-*

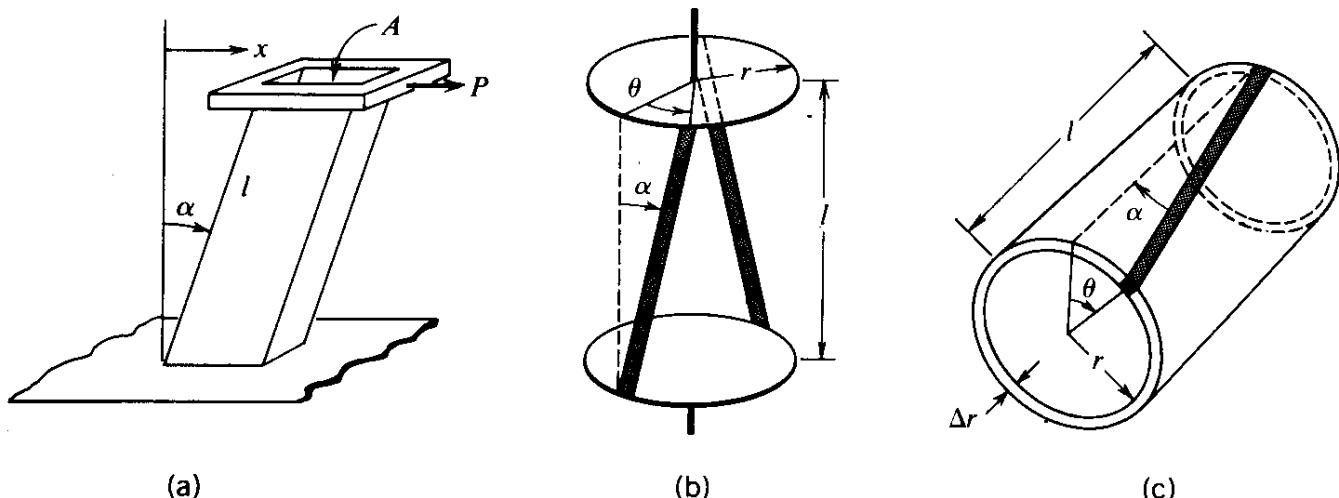


Fig. 3-9. (a) Deformación por cizalladura de un bloque rectangular. (b) Par actuando sobre barras rectangulares durante la deformación por cizalladura. (c) Un tubo retorcido puede considerarse como una gran colección de barras semejantes a las indicadas en (b).

<sup>1</sup> La tabla, para mantenerse en equilibrio, debe suministrar una fuerza horizontal  $-P$  y, también, un par de sentido contrario al del movimiento de las agujas de un reloj. De esta manera el bloque no estará sometido a ninguna fuerza resultante de translación ni a ningún par resultante.

*zalla,  $\alpha$ .* En función del desplazamiento transversal real  $x$  del extremo superior de un bloque de altura  $l$ , se tiene (aproximadamente)

$$\alpha = \frac{x}{l}$$

Resulta que el ángulo de corte es proporcional al cociente entre la fuerza transversal aplicada y el área  $A$  de la superficie superior del bloque. La proporcionalidad de la *tensión de corte*  $P/A$  al ángulo de corte  $x/l$  se expresa por el *módulo de cizallamiento* o *módulo de rigidez*, normalmente designado con  $n$ . Si llamamos  $F (= -P)$  a la fuerza ejercida sobre el tablero por el material sometido a cizalladura, podemos escribir:

$$n = \frac{-F/A}{\alpha}$$

o bien

$$dF = -nA d\alpha = \frac{-nA}{l} dx \quad (3-19)$$

Estas relaciones son, pues, del mismo tipo que las que obtuvimos en el caso de deformaciones longitudinales , ecuaciones (3-9) y (3-10), y el módulo de rigidez tiene las mismas dimensiones físicas que el módulo de Young. Para la mayoría de los materiales estos dos módulos son del mismo orden de magnitud, aunque lo normal es que  $n$  sea significativamente menor que  $Y$ . La tabla 3-2 muestra los valores de ambos para la misma serie de materiales que en la tabla 3-1. También contiene un tercer módulo , el denominado *módulo de compresibilidad*,  $k$ , que expresa la resistencia que presenta una sustancia al cambiar de volumen.

TABLA 3-2: VALORES DE LOS MÓDULOS ELÁSTICOS

Material	$Y, N/m^2$	$n, N/m^2$	$K, N/m^2$
Acero	$10 \times 10^{10}$	$8 \times 10^{10}$	$16 \times 10^{10}$
Aluminio	$6 \times 10^{10}$	$3 \times 10^{10}$	$7 \times 10^{10}$
Cobre	$12 \times 10^{10}$	$4,5 \times 10^{10}$	$13 \times 10^{10}$
Latón	$9 \times 10^{10}$	$3,5 \times 10^{10}$	$6 \times 10^{10}$
Vidrio	$6 \times 10^{10}$	$2,5 \times 10^{10}$	$4 \times 10^{10}$

Para iniciar el cálculo de los momentos o pares restauradores procedentes de los procesos de cizalladura, consideremos el caso indicado en la figura 3-9 (b).

Mediante dos tiras rectangulares del material en cuestión se conectan dos discos de radio  $r$  montados sobre un eje. Cuando uno de los discos se hace girar un ángulo pequeño  $\theta$ , el extremo de cada tira se mueve transversalmente una distancia  $r\theta$ . Así pues, el ángulo de cizalladura viene dado por

$$\alpha = \frac{r\theta}{l}$$

Si cada tira tiene un área de su sección recta  $A$ , proporciona una fuerza restauradora, tangencial al disco, dada por

$$F = -nA \frac{r\theta}{l}$$

Esta fuerza equivale a un *par*, de valor  $rF$ , que es ejercido sobre el eje de giro por cada una de las tiras.

Supóngase ahora que se tiene un tubo de paredes delgadas de radio medio  $r$  y espesor de pared  $\Delta r$ , como se ve en la figura 3-9(c). El tubo puede considerarse compuesto por una serie completa de tiras delgadas paralelas al eje del cilindro, de modo que todas ellas contribuyen a formar el par restaurador sobre este eje. Así pues, el par  $\Delta M$  que proporciona el tubo cuando se da a sus extremos un giro relativo  $\theta$  viene dado por

$$\Delta M = -\frac{nAr^2\theta}{l}$$

en donde

$$A = 2\pi r \Delta r$$

De aquí que

$$\Delta M = -\frac{2\pi nr^3 \Delta r}{l} \theta$$

Finalmente si, como sucede en la mayor parte de los casos, el objeto sometido a torsión es una varilla cilíndrica maciza, un alambre o una fibra, se obtiene el par total sumando o integrando el resultado anterior. Así se tiene

$$M = -\frac{\pi nr^4}{2l} \theta \text{ (cilindro macizo)} \quad (3-20)$$

## •EL MUELLE DE AIRE•

Uno de los temas más importantes que trataremos en este libro consistirá en el análisis de las vibraciones de las columnas de aire y la producción de sonidos musicales. Como base útil para ello consideremos una columna de gas

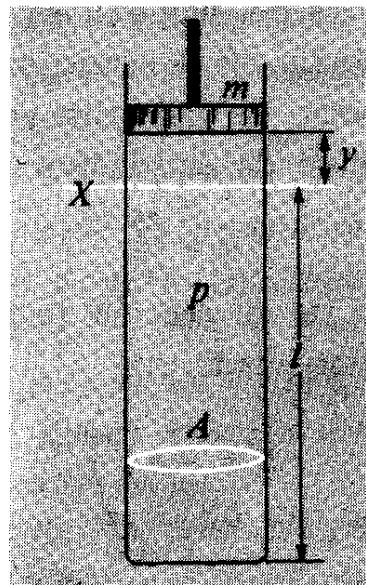


Fig. 3-10. Pistón en una columna vertical de aire.

encerrada en un recipiente como algo muy parecido a un muelle. Robert Boyle se imaginó de esta manera la elasticidad de un gas y el título de esta sección procede del título del libro que escribió sobre este tema.<sup>1</sup> (La palabra “muelle”, en el sentido utilizado por Boyle, equivale realmente a la *cualidad* de elástico.)

Para relacionar lo más posible nuestro estudio al análisis previo del sistema masa-muelle, supóngase que tenemos un tubo cilíndrico, cerrado en un extremo, con un pistón de masa  $m$  bien ajustado, pero con libertad de movimiento, como se ve en la figura 3-10. La columna de aire encerrada actúa como un muelle muy fuerte, muy resistente frente a una compresión o tracción repentina; este efecto se comprueba claramente si se cierra el agujero de salida de una bomba de bicicleta con un dedo y se intenta mover el pistón de la misma.

El pistón tiene cierta posición de equilibrio que variará según esté el tubo horizontal o vertical. Si el tubo está vertical, como se ve en la figura, la presión  $p$  del gas contenido en el tubo debe estar por encima de la atmósfera lo preciso para soportar el peso del pistón, de modo semejante al alargamiento inicial de un muelle. Pero ahora, si el pistón se mueve una longitud  $y$ , alargándose la columna de aire, la presión interna desciende y como resultado se

<sup>1</sup> Robert Boyle, *New Experiments Physico-Mechanical Touching [es decir, concerniente] the Spring of Air and Its Effects, Made for the Most Part in a New Pneumatical Engine*, Oxford, 1660.

obtiene una fuerza restauradora sobre  $m$ . De hecho, puede escribirse una ecuación de la forma

$$F = A \Delta p$$

siendo  $\Delta p$  la variación de presión.

¿Cuánto vale la variación de presión? Una primera idea puede obtenerse calculándola a partir de la ley de Boyle:

$$pV = \text{const.}$$

que nos dará

$$p \Delta V + V \Delta p = 0 \quad (3-21)$$

Ahora bien,

$$\Delta V = Ay$$

$$V = Al$$

de modo que se tendrá

$$\Delta p = - \frac{py}{l}$$

y, por consiguiente,

$$F = - \frac{Ap}{l} y \quad (3-22)$$

Comparemos esta expresión con la ecuación (3-10) correspondiente al alargamiento o acortamiento de una varilla maciza. Así se ve que en la ecuación (3-22) la presión  $p$  juega un papel análogo exactamente al de un módulo de elasticidad. Realmente, dada la hipótesis de que es aplicable la ley de Boyle, se trata del módulo elástico del aire. Sin embargo, no es el módulo de Young, pues éste se define únicamente para una muestra sólida con sus propios límites naturales. (En las condiciones en que hemos definido y medido el módulo de Young, la columna de aire puede contraerse con libertad lateralmente cuando se estira y dilatarse lateralmente cuando se comprime, mientras que a un gas hay que proporcionarle un recipiente con paredes esencialmente rígidas.) El módulo adecuado es el que corresponde a cambios del *volumen* total de la muestra asociados con una tensión uniforme constituida por un cambio de presión en toda su superficie. Éste es el *módulo de compresibilidad*,  $K$ , al que nos referimos anteriormente; se define en general mediante la ecuación

$$\begin{aligned} K &= - \frac{dp}{dV/V} \\ &= - V \frac{dp}{dV} \end{aligned} \quad (3-23)$$

Recordemos que la ley de Boyle describe la relación entre la presión y el volumen en el caso de un gas a temperatura constante. Así pues, la ecuación (3-21) conduce a una definición del módulo de compresibilidad *isoterma* de un gas:

$$K_{\text{isoterma}} = p \quad (3-24)$$

En el caso de un gas a presión atmosférica este módulo es del orden de  $10^5 \text{ N/m}^2$ , es decir, cinco o seis órdenes de magnitud menor que en el caso de los materiales sólidos que nos son familiares (véase tabla 3-2).

Una cuestión importante es conocer si la constante de rigidez de una columna de aire debe definirse ciertamente mediante la elasticidad isoterma. En general, no es éste el caso. Cuando se comprime repentinamente un gas se calienta como resultado del trabajo realizado sobre el mismo; en otras palabras, las partículas que lo componen se mueven más rápidamente en valor medio. Hemos ignorado este efecto al utilizar la ley de Boyle para calcular la variación de presión (y por tanto la fuerza restauradora) correspondiente a una variación determinada de la longitud de la columna de aire. Como, de acuerdo con la teoría cinética de los gases, la presión es proporcional a la velocidad cuadrática media de las moléculas, este calentamiento da como resultado una fuerza restauradora mayor que la que obtendríamos en otro caso, y el módulo elástico de la columna de gas es, pues, mayor que el valor  $p$ , predicho por la ecuación (3-24). La experiencia confirma esta conclusión. La presión varía en un factor más grande que el inverso del cociente de los volúmenes. En condiciones completamente adiabáticas (ningún flujo de calor que entre o salga del gas) la relación presión-volumen resulta ser la siguiente:<sup>1</sup>

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (\text{adiabática}) \quad (3-25)$$

A partir de la cual se tiene

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{const.}$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dV} + \frac{\gamma}{V} = 0$$

$$K_{\text{adiabática}} = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p \quad (3-26)$$

El valor de la constante  $\gamma$  es cercano a 1,67 en el caso de gases monoatómicos, 1,40 si son diatómicos y menor que 1,40 para todos los demás gases.

<sup>1</sup> El fundamento exacto de la Ecuación (3-25) lo consideraremos cuando estudiemos la velocidad del sonido en un gas.

(a temperatura ambiente). Esta elasticidad incrementada en condiciones adiabáticas hace aumentar la frecuencia de todas las vibraciones en que intervienen volúmenes cerrados de gases.

## OSCILACIONES DE MUELLES CUYA MASA ES GRANDE

Hasta aquí hemos estudiado los muelles como si no tuvieran inercia y actuasen como almacenes puros de energía potencial elástica. Esto, naturalmente, es sólo una aproximación en el mejor de los casos, y en ciertos casos la inercia del propio muelle puede jugar un papel predominante. Como procedimiento de atacar esta cuestión, consideremos el problema, favorito de los autores de textos de física, de un cuerpo de masa  $m$  sujeto a un muelle uniforme de masa total  $M$  y cuya constante es  $k$ .<sup>1</sup> ¿En qué difiere el período de oscilación del que se tendría si el muelle careciese de masa? Incluso sin hacer ningún cálculo se puede predecir que el período se alargaría. Pero, ¿en cuánto?

Un método de estudio sencillo (y aparentemente razonable) consiste en suponer que las diversas partes del muelle sufren desplazamientos proporcionales a sus distancias al extremo fijo, como se indica en la figura 3-11 (e igual que en el caso de la extensión estática, como se ve en la fig. 3-4). Es posible,

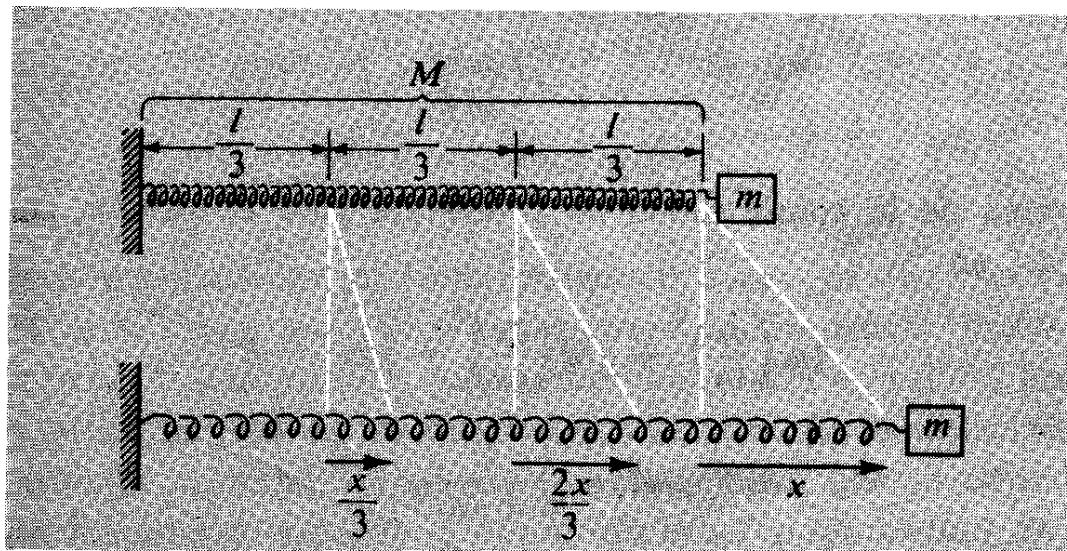


Fig. 3-11. Extensión uniforme de un muelle con masa.

<sup>1</sup> Como se verá más adelante, en esta sección, este problema tiene un verdadero interés si se lo considera en su contenido real.

entonces, calcular la energía cinética total del muelle en un instante cualquiera cuando el alargamiento de su extremo más delgado es  $x$ .

Supongamos que la longitud normal del muelle es  $l$ , y sea  $s$  una distancia cualquiera a partir del extremo fijo ( $0 \leq s \leq l$ ). Consideremos un elemento del muelle comprendido entre  $s$  y  $s + ds$ . Su masa viene dada por

$$dM = \frac{M}{l} ds$$

y su desplazamiento es la fracción  $s/l$  de  $x$ . Así pues, la energía cinética de este pequeño elemento viene dada por

$$\begin{aligned} dK &= \frac{1}{2} \left( \frac{M}{l} ds \right) \left( \frac{s}{l} \frac{dx}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{M}{2l^3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 s^2 ds \end{aligned}$$

En un instante dado cualquiera la energía cinética total del muelle se obtiene integrando la expresión anterior y considerando a  $dx/dt$  como factor constante. De aquí resulta

$$\begin{aligned} K_{\text{muelle}} &= \frac{M}{2l^3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \int_0^l s^2 ds \\ &= \frac{1}{6} M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

El teorema de la conservación de la energía para el sistema completo se convierte así en

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{6} M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E$$

dando

$$\omega^2 = \frac{k}{m + M/3}$$

Esto equivale a tomar un muelle sin masa y sumarle  $M/3$  a la masa sujetada a su extremo.

Pero, ¿es cierto esto? Supongamos, por ejemplo, que consideramos un caso extremo en el que suprimimos la masa  $m$ , quedándonos con un sistema en que el muelle propiamente sea el depositario de toda la energía cinética lo mismo que de toda la energía potencial elástica. ¿Vendrá dada la frecuencia

de sus vibraciones libres por  $\omega = \sqrt{3k/M}$ ? ¡La respuesta es *no!* El cálculo anterior supone la condición de alargamiento *estático* de un muelle uniforme —alargamiento proporcional a la distancia del extremo fijo. Pero esto es cierto solamente si la fuerza deformadora es la misma en todos los puntos a lo largo del muelle. Y si existe una distribución de masas a lo largo del muelle sufriendo aceleraciones, esta condición posiblemente no podrá aplicarse. Debe existir una variación de la fuerza deformadora con la posición a lo largo del muelle. Nuestra ecuación para  $\omega$  es sólo una aproximación; está justificado, sin embargo, si  $M \ll m$ , en cuyo caso la fuerza a lo largo del muelle es aproximadamente constante (mientras que, para  $m = 0$ , la fuerza restauradora debe disminuir hasta anularse en el extremo libre, existiendo en dicho punto una aceleración, pero no masa).

El ejemplo anterior, aunque tratado aquí imperfectamente, proporciona un enlace importante entre el sistema simple masa-muelle y las vibraciones libres de un objeto alargado. Porque, naturalmente, una varilla vibrando libremente o una columna de aire se comporta *precisamente* como un muelle dotado de masa sin ninguna otra sujetada en su extremo. Será de importancia central para nosotros el análisis más exacto del comportamiento de un sistema así, lo cual haremos en el capítulo 6. Sin embargo, de momento, podemos utilizar el estudio aproximado anterior para prever el *tipo* de resultado que dará un tratamiento exacto ; que la frecuencia  $v (= \omega/2\pi)$  de una oscilación libre de un muelle uniforme de masa  $M$  y constante  $k$  tiene que tener la forma esencial

$$\nu = \text{const.} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (3-27)$$

(en donde la constante es un factor numérico puro), ya que esta combinación de  $k$  y  $M$  es la única que tiene dimensiones de frecuencia. Incluso podemos dar un paso más. Garantizado que la ecuación (3-27) es válida, podemos sustituir  $k$  y  $M$  en función de las dimensiones lineales, de la densidad y del módulo elástico del material. Supongamos, por ejemplo, que se tiene una varilla maciza de longitud  $l$ , sección recta  $A$ , densidad  $\rho$  y módulo de Young  $Y$ . Entonces tendremos

$$\begin{aligned} M &= Al \\ k &= \frac{AY}{l} \quad [\text{Ec. (3-10)}] \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\nu = \text{const.} \sqrt{\frac{Y}{\rho l}} \quad (3-28)$$

Es de esperar que una ecuación como ésta describa las vibraciones longitudinales de una varilla, aunque la constante numérica siga estando indeterminada.

## AMORTIGUAMIENTO DE LAS OSCILACIONES LIBRES

Las vibraciones libres de un sistema físico real cualquiera desaparecen siempre al cabo del tiempo. Todo sistema de éstos tiene, inevitablemente, ciertas características disipativas mediante las cuales se va perdiendo la energía mecánica de vibración. Nuestro conocimiento concreto de la existencia de un sistema vibrante exige implicar una pérdida de energía por su parte, como, por ejemplo, cuando oímos un diapasón como resultado de la energía comunicada al aire y luego, a través del aire, a nuestros oídos. Así pues, nunca puede ser estrictamente correcto describir matemáticamente estas vibraciones libres mediante una variación sinusoidal de amplitud constante. Consideraremos ahora cómo se ve modificada la ecuación de las vibraciones libres al incluir fuerzas disipativas.

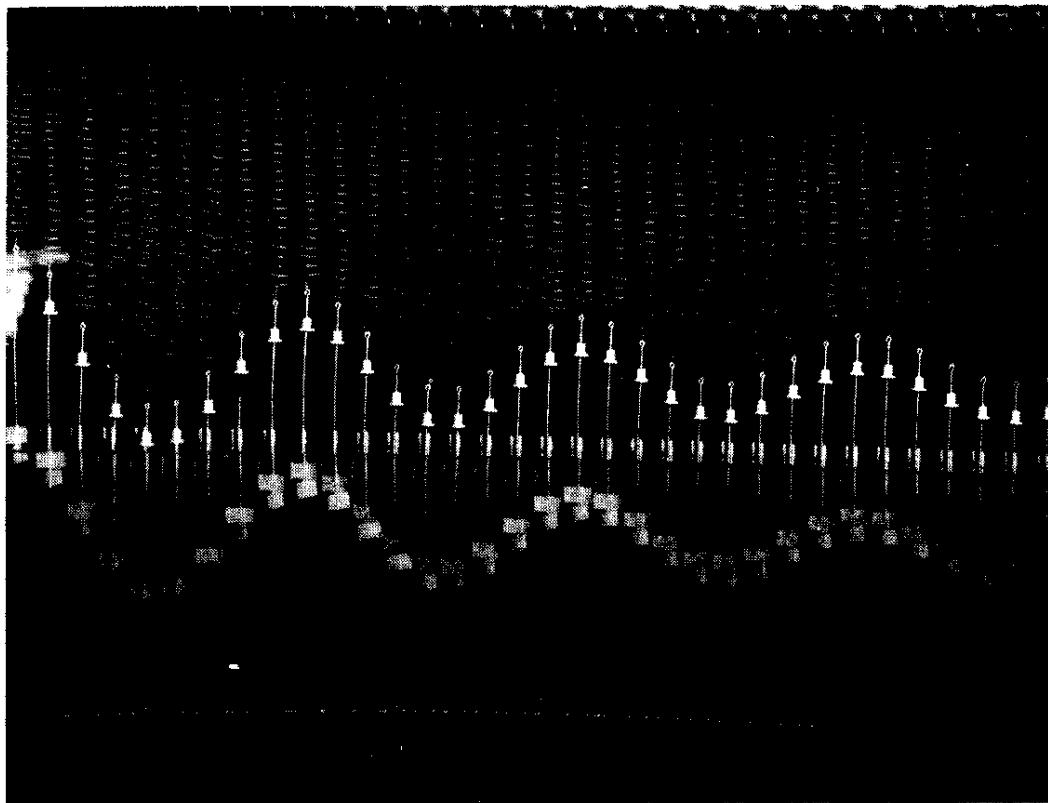
Concretaremos de nuevo nuestro estudio al sistema básico masa-muelle. La figura 3-12 muestra un ejemplo real de la disminución paulatina de las oscilaciones de este sistema. Para acentuar el amortiguamiento, se sujetó un indicador a la masa móvil que estaba introducida en un cilindro lleno de líquido; la fotografía por destello múltiple de la figura 3-12(a) describe claramente el curso del movimiento. La figura 3-12(b) es un gráfico basado directamente sobre medidas hechas en dicha fotografía.

La fuerza resistente que ejerce un fluido frente a un objeto móvil es una función de la velocidad del objeto; su valor queda bien representado por la ecuación

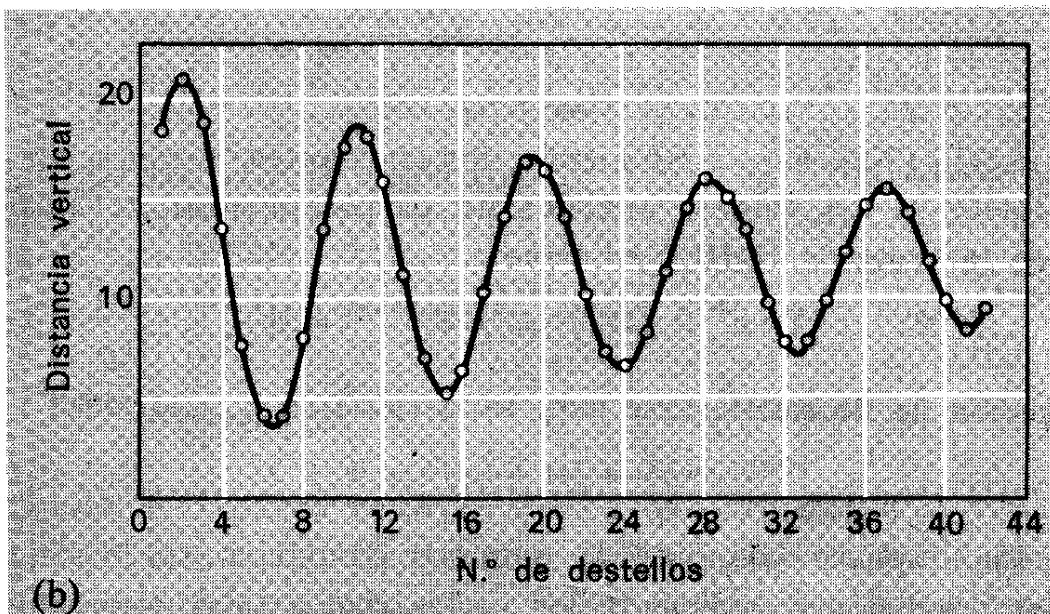
$$R(v) = b_1v + b_2v^2$$

siendo  $v$  el módulo  $|\mathbf{v}|$  de la velocidad. Esta fuerza resistente se ejerce en sentido opuesto al de la propia velocidad. Siempre que  $v$  sea pequeña comparada con el cociente  $b_1/b_2$ , podemos considerar que la fuerza resistente viene dada por un solo término lineal. En este caso el enunciado de la ley de Newton para la masa móvil puede escribirse en la forma

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv$$



(a)



(b)

Fig. 3-12. (a) Fotografía con destellos múltiples de oscilaciones libres con amortiguamiento. La cámara fue desplazada lateralmente para separar las imágenes sucesivas. (Foto de Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.) (b) Gráfica de una oscilación amortiguada obtenida midiendo una fotografía de este modo.

es decir,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3-29)$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

en donde

$$\gamma = \frac{b}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3-30)$$

Como puede verse, el amortiguamiento queda caracterizado por la magnitud  $\gamma$ , que tiene dimensiones de frecuencia, y la constante  $\omega_0$  representa la frecuencia angular del sistema en el caso de que estuviese ausente el amortiguamiento.

Busquemos ahora una solución de la ecuación (3-30). Haremos esto mediante el método exponencial complejo, admitiendo que  $x$  es la parte real de un vector rotatorio  $z$ , en donde  $z$  satisface a una ecuación como la ecuación (3-30), es decir,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad (3-30a)$$

Admitamos una solución de la forma

$$z = Ae^{j(pt+\alpha)} \quad (3-31)$$

como la ecuación (3-8), pero conteniendo dos constantes,  $A$  y  $\alpha$ , a fin de ajustar nuestra solución a los valores iniciales de desplazamiento y velocidad. Sustituyendo en la ecuación (3-30 a) se tiene

$$(-p^2 + jp\gamma + \omega_0^2)Ae^{j(pt+\alpha)} = 0$$

Si esta ecuación ha de satisfacerse para todo valor de  $t$ , tendremos

$$-p^2 + jp\gamma + \omega_0^2 = 0 \quad (3-32)$$

Esta condición implica el empleo de números complejos; es decir, realmente contiene dos condiciones, aplicando las partes real e imaginaria separadamente. No puede ser satisfecha si la magnitud  $p$  es real pura, ya que el término  $jp\gamma$  sería entonces una magnitud imaginaria pura sin que existiera otra expresión que la contrarrestara. Pongamos, por tanto,

$$p = n + js$$

donde  $n$  y  $s$  son ambos reales. Por tanto,

$$p^2 = n^2 + 2jns - s^2$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3-32) se tiene:

$$-n^2 - 2jns + s^2 + jn\gamma - s\gamma + \omega_0^2 = 0$$

Así obtenemos dos ecuaciones separadas:

$$\text{Partes reales: } -n^2 + s^2 - s\gamma + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{Partes imaginarias: } -2ns + n\gamma = 0$$

A partir de la segunda se tiene

$$s = \frac{\gamma}{2}$$

Sustituyendo  $s = \gamma/2$  en la primera ecuación se tiene entonces

$$n^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

Volvamos ahora a la ecuación (3-31). Escribiendo  $p$  en forma compleja  $n + js$ , resulta

$$\begin{aligned} z &= Ae^{i(nt+ist+\alpha)} \\ &= Ae^{-st}e^{i(nt+\alpha)} \end{aligned}$$

y de aquí

$$x = Ae^{-st} \cos(nt + \alpha)$$

Sustituyendo los valores explícitos de  $n$  y  $s$  se halla así la solución siguiente:

$$x = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (3-33)$$

donde

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} \quad (3-34)$$

En la figura 3-13 puede verse la gráfica que representa la ecuación (3-33) en el caso particular  $\alpha = 0$ . También se indica en la misma la envolvente de la curva oscilante amortiguada.<sup>1</sup> Los ceros de la curva están igualmente espaciados con una separación de  $\omega \Delta t = \pi$ , y lo mismo sucede con los máximos y mínimos sucesivos, pero éstos están sólo aproximadamente en el punto medio entre los ceros. Evidentemente,  $\omega$  puede identificarse como la frecuencia angular natural del oscilador amortiguado.

<sup>1</sup> Ha sido ligeramente modificada la notación, escribiendo  $A_0$  en lugar de  $A$  para denotar la amplitud del movimiento para  $t = 0$ .

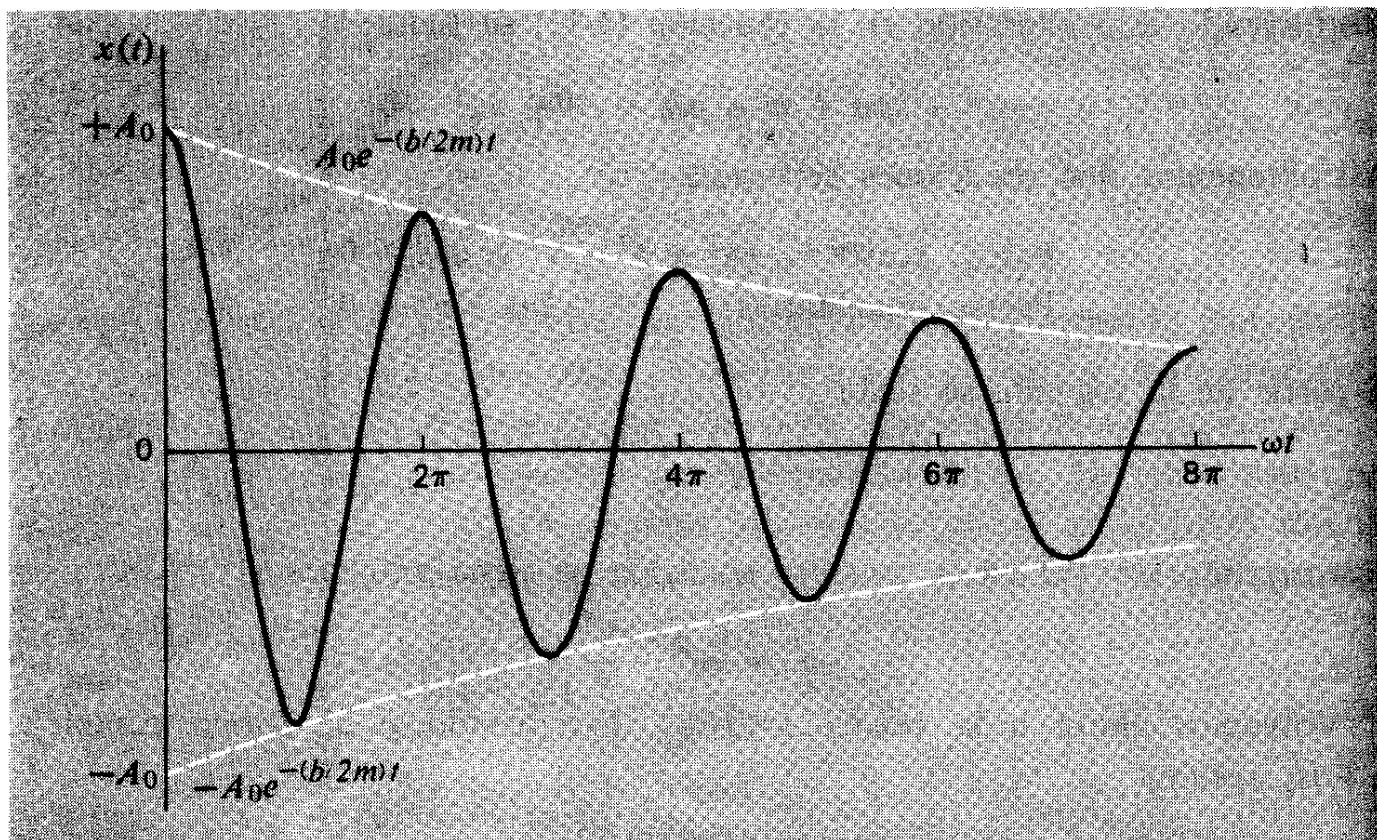


Fig. 3-13. Oscilaciones armónicas rápidamente amortiguadas.

La curva de la figura 3-13 se ha dibujado para un caso en que es rápida la disminución de las vibraciones. Sin embargo, si el amortiguamiento es pequeño, el movimiento se aproxima a un MAS de amplitud constante durante un cierto número de ciclos. En estas condiciones se puede expresar el efecto que produce el amortiguamiento en función de una disminución exponencial de la energía mecánica total  $E$ . En efecto, si  $\gamma \ll \omega$ , podemos decir que durante un tiempo  $t$  las oscilaciones quedan bien definidas durante varios ciclos por un MAS de amplitud constante  $A$ , tal que

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t/2} \quad (3-35)$$

Ahora bien, la energía mecánica total de un oscilador armónico simple viene dada por

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

De aquí que, utilizando el valor anterior de  $A$ , se tenga

$$E(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\gamma t}$$

es decir,

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} \quad (3-36)$$

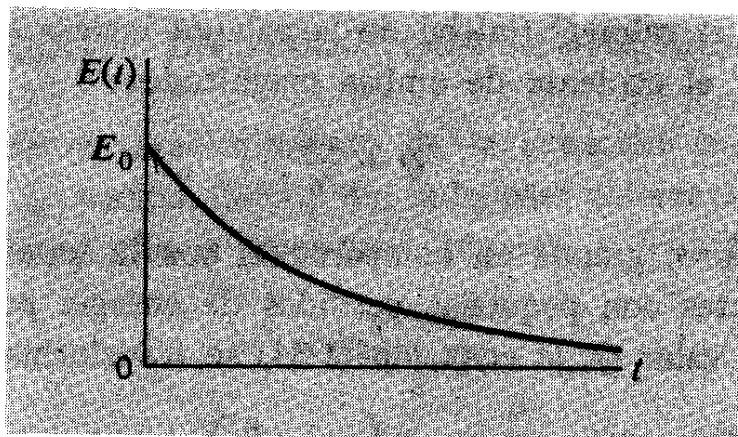


Fig. 3-14. Disminución exponencial de la energía total durante el amortiguamiento de las oscilaciones armónicas.

En la figura 3-14 puede verse esta disminución de la energía total.

Se recordará que este análisis completo del proceso de amortiguamiento se ha basado en la hipótesis de que la disipación se debe a una fuerza resistente proporcional a la velocidad. El caso sería muy diferente (y bastante más difícil de estudiar) si se aplicase alguna otra ley de resistencia, por ejemplo,  $R(v) \sim v^2$ . Sin embargo, es interesante señalar que la disminución exponencial de la energía, según expresa la ecuación (3-35), puede deberse, y de hecho así sucede, a muchos tipos diferentes de procesos disipativos. Por ejemplo, en un circuito eléctrico oscilante la disipación de energía por unidad de tiempo en una resistencia es proporcional al cuadrado de la intensidad de corriente, pero también sucede lo mismo con la energía eléctrica y magnética del circuito. La situación es, de hecho, estrechamente análoga al oscilador mecánico con amortiguamiento viscoso.

En física atómica y nuclear existen también muchas interacciones que dan lugar a un descenso exponencial de la energía de un sistema y que hace que el comportamiento de estos sistemas sea análogo al de un oscilador mecánico simple con amortiguamiento viscoso. En consecuencia, el análisis de este oscilador mecánico proporciona cierta idea de lo que sucede en todos los fenómenos semejantes, aunque sea un caso especial.

A partir del análisis anterior, es evidente que el oscilador amortiguado está caracterizado por dos parámetros,  $\omega_0$  y  $\gamma (= b/m)$ . La constante  $\omega_0$  es la frecuencia angular de las oscilaciones no amortiguadas y  $\gamma$  es el inverso del tiempo que se necesita para que la energía disminuya a  $1/e$  de su valor inicial. Así pues,  $\omega_0$  y  $\gamma$  son magnitudes con las mismas dimensiones. Para mejor aplicar nuestros resultados a diversas clases de sistemas físicos, definiremos un

parámetro llamado el valor  $Q$  (inicial de la palabra inglesa *quality*) del sistema oscilante, dado por el cociente de ambas magnitudes:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (3-37)$$

$Q$  es un número puro, grande en comparación con la unidad cuando se trata de sistemas oscilantes con pequeñas pérdidas de energía por unidad de tiempo. En función del valor  $Q$ , la ecuación (3-34) se transforma en

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{4Q^2} \right) \quad (3-38)$$

Si  $Q$  es grande en comparación con la unidad, caso del que nos ocuparemos principalmente, la ecuación (3-38) da  $\omega \approx \omega_0$  y el movimiento del oscilador [ecuación (3-33)] viene dado con mucha aproximación por

$$x = A_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3-39)$$

Puede señalarse que  $Q$  está estrechamente relacionado con el número de ciclos de oscilación durante los cuales la amplitud de la oscilación disminuye en un factor  $e$ . Porque de acuerdo con la ecuación (3-39) se tiene

$$A(t) = A_0 e^{-\omega_0 t/2Q}$$

Midamos el tiempo  $t$  en función del número de ciclos completos de oscilación,  $n$ . Entonces, dada la aproximación  $\omega \approx \omega_0$ , podemos poner  $t \approx 2\pi n/\omega_0$ . En función del número de ciclos transcurridos se puede escribir, por tanto,

$$A(n) \approx A_0 e^{-n\pi/Q} \quad (3-40)$$

de modo que la amplitud disminuye en un factor  $e$  en unos  $Q/\pi$  ciclos de oscilaciones libres.

En función de  $\omega_0$  y  $Q$ , podemos volver a escribir la ecuación (3-30) en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3-41)$$

Esta forma de escribir la ecuación diferencial básica de las oscilaciones libres, incluyendo el amortiguamiento, de una gran variedad de sistemas físicos, tanto mecánicos como no mecánicos, será en muchos casos muy conveniente.

EFFECTOS QUE PRODUCE UN AMORTIGUAMIENTO MUY GRANDE<sup>1</sup>

Se habrá notado que el establecimiento de la ecuación para las oscilaciones amortiguadas libres [ecuación (3-33)] depende esencialmente de nuestra habilidad para introducir en ella la frecuencia angular  $\omega$  definida por la ecuación

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

Pero, ¿qué ocurre si  $\omega_0 [= (k/m)^{1/2}]$  es menor que  $\gamma/2 (= b/2m)$ ? En este caso el movimiento deja de ser oscilante. Podemos conseguir una idea de la forma que tendrá la solución al problema refiriéndonos al análisis que precede a la ecuación (3-33). Así se halla que la ecuación diferencial del movimiento [ecuación (3-30)] queda satisfecha por una solución de la forma

$$x = \operatorname{Re} [Ae^{-\gamma t/2} e^{j(n t + \alpha)}]$$

en donde

$$n^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

Supóngase ahora que  $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ . Entonces podemos poner

$$n^2 = -(\gamma^2/4 - \omega_0^2)$$

y si extraemos la raíz cuadrada de  $n$  se tendrá

$$n = \pm j(\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2} = \pm j\beta,$$

Así pues, tenemos que  $e^{int} = e^{\mp \beta t}$ , lo cual define una disminución exponencial de  $x$  con  $t$ , de acuerdo con uno de estos dos exponentes posibles:

$$e^{-(\gamma/2 + \beta)t} \quad \text{o} \quad e^{-(\gamma/2 - \beta)t}$$

Un análisis riguroso muestra que, en general, son necesarios ambos exponentiales y que la variación completa de  $x$  con  $t$  viene dada por la siguiente ecuación:

$$x = A_1 e^{-(\gamma/2 + \beta)t} + A_2 e^{-(\gamma/2 - \beta)t}$$

en donde

$$\beta = \left( \frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 \right)^{1/2} \quad (3-42)$$

<sup>1</sup> No estrictamente necesario para los problemas oscilatorios pero íntimamente conectado con ellos y añadido para completar su estudio.

Las dos constantes ajustables  $A_1$  y  $A_2$  (que pueden tener cualquier signo) permiten que la solución se ajuste a cualquier valor dado de  $x$  y  $dx/dt$  en un instante dado, por ejemplo, para  $t = 0$ .

Una última cuestión puede plantearse en conexión con este movimiento fuertemente amortiguado. ¿Qué ocurre si  $\omega_0$  y  $\gamma/2$  son *exactamente iguales*? En este caso el segundo miembro de la ecuación (3-42) se reduciría a dos términos del mismo tipo y sólo quedaría una constante ajustable. Sin embargo, esta solución no es satisfactoria en absoluto; seguimos necesitando dos constantes ajustables. Resulta que la forma apropiada que toma en este caso la solución es

$$x = (A + Bt)e^{-\gamma t/2} \quad (3-43)$$

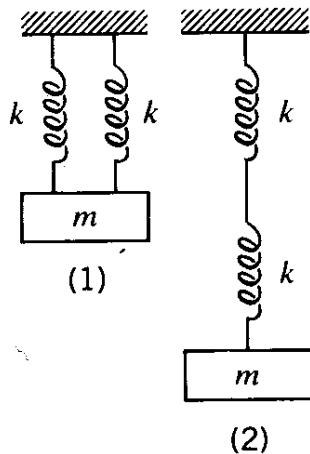
Puede comprobarse por sustitución que esta expresión satisface la ecuación básica del movimiento, ecuación (3-30), si  $\omega_0 = \gamma/2$  o  $\gamma = 2\omega_0$  exactamente. Esta condición especial corresponde a lo que se denomina *amortiguamiento crítico*. En los sistemas mecánicos reales suele ajustarse deliberadamente el valor de la constante de amortiguamiento  $\gamma$  para que satisfaga esta condición porque, en condiciones de amortiguamiento crítico, si se aplica bruscamente al sistema (previamente en reposo) una fuerza constante será seguida de una suave aproximación a una nueva posición de equilibrio, desplazada respecto a la anterior, sin oscilaciones. Este comportamiento es ventajoso en grado sumo en las piezas móviles de aparatos de medida eléctricos y otros semejantes, en donde se desea tomar una lectura estable tan pronto como sea posible después de haber conectado el aparato de medida o cerrado un interruptor.

## PROBLEMAS

3-1 Se cuelga de un muelle un objeto de 1 g de masa y se le deja oscilar. Para  $t = 0$ , el desplazamiento era 43,785 cm y la aceleración — 1,7514 cm/seg<sup>2</sup>. ¿Cuál es la constante del muelle?

3-2 Una masa  $m$  cuelga de un muelle uniforme de constante  $k$ .

- (a) ¿Cuál es el período de las oscilaciones del sistema?
- (b) ¿Cuál sería el período si la masa  $m$  se colgase de modo que:
  - (1) Estuviese sujetada a dos muelles idénticos situados uno junto al otro?
  - (2) Estuviese sujetada al extremo inferior de dos muelles idénticos conectados uno a continuación del otro? (Véase figura.)



3-3 Una plataforma está realizando un movimiento armónico simple en dirección vertical con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de  $10/\pi$  vibraciones por segundo. En el punto más bajo de su trayectoria se coloca un cuerpo sobre la plataforma.

(a) ¿En qué punto se separará el cuerpo de la plataforma?

(b) ¿A qué altura ascenderá el cuerpo por encima del punto más alto alcanzado por la plataforma?

3-4 Un cilindro de diámetro  $d$  flota manteniendo la parte  $l$  de su longitud sumergida. La altura total es  $L$ . Admítase que no hay amortiguamiento. En el instante  $t = 0$  se empuja el cilindro hacia abajo una distancia  $B$  y se suelta.

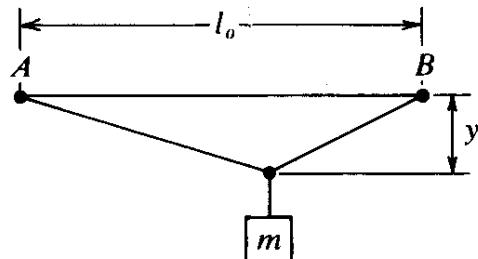
(a) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación?

(b) Dibujar un gráfico de la velocidad en función del tiempo desde  $t = 0$  a  $t = 1$  período. Deberá incluirse la amplitud y fase correctas.

3-5 Una varilla uniforme de longitud  $L$  se sujetó por un clavo a un poste de modo que dos tercios de su longitud están por debajo del clavo. ¿Cuál es el período de las oscilaciones pequeñas de la varilla?

3-6 Un arco circular de diámetro  $d$  se cuelga de un clavo. ¿Cuál es el período de sus oscilaciones cuando las amplitudes son pequeñas?

3-7 Un alambre de longitud  $l_0$  se alarga en  $10^{-3} l_0$ , cuando se cuelga de su extremo inferior una cierta masa. Si se conecta este mismo alambre entre dos puntos  $A$  y  $B$ , alejados  $l_0$  y situados en el mismo plano horizontal y de su punto medio se cuelga la misma masa, como se ve en la figura, ¿cuál es la depresión  $y$  en dicho punto y cuál es la tensión del alambre?



3-8 (a) Un objeto de 0,5 kg de masa se cuelga del extremo de un alambre de acero de 2 m de longitud y 0,5 mm de diámetro (módulo de Young =  $2 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>). ¿Cuál es el alargamiento del alambre?

(b) El objeto se levanta en una distancia  $h$  (de modo que el alambre deja de estar tirante) y luego se deja caer de modo que el alambre recibe un tirón súbito. La carga de rotura del acero es de  $1,1 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>. ¿Cuál es el valor posible de  $h$ , que resiste el alambre sin romperse?

3-9 (a) Se cuelga una bola de acero maciza del extremo de un alambre de acero de 2 m de longitud y radio 1 mm. La carga de rotura del acero es  $1,1 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>. ¿Cuáles son el radio y la masa de la bola de mayor tamaño que puede soportar el alambre?

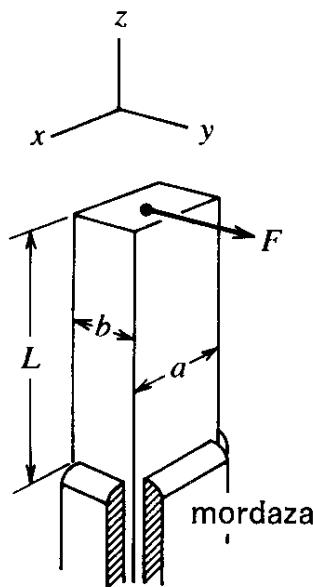
(b) ¿Cuál es el período de las oscilaciones de torsión de este sistema? (Módelo de cizalladura del acero =  $8 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Momento de inercia de la esfera respecto a un eje que pasa por centro =  $2MR^2/5$ .)

3-10 Una varilla metálica de 0,5 m de larga tiene una sección recta rectangular de 2 mm<sup>2</sup> de área.

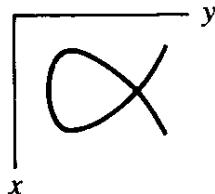
(a) Puesta vertical la varilla y teniendo colgada una masa de 60 kg en su extremo inferior, se produce un alargamiento de 0,25 mm. ¿Cuál es el módulo de Young (N/m<sup>2</sup>) del material de la varilla?

(b) Se sujetta firmemente la varilla por su parte inferior, como se indica en el esquema, y en su parte superior se aplica una fuerza  $F$  en dirección  $y$ , como está indicado (paralela a la arista de longitud  $b$ ). El resultado es una flexión elástica, dada por

$$y = \frac{4L^3}{Yab^3} F$$



Si se suprime la fuerza  $F$  y se sujet a la parte superior de la varilla una masa  $m$ , mucho mayor que la masa de la varilla, ¿cuál es el cociente de las frecuencias de vibración en las direcciones  $y$  y  $x$  (es decir, paralelas a las aristas de longitud  $b$  y  $a$ )?



(c) Se empuja la masa lateralmente en una determinada dirección transversal y luego se suelta, con lo que describe una trayectoria como la de la figura. ¿Cuál es el cociente entre  $a$  y  $b$ ?

3-11 (a) Hallar la frecuencia de vibración en condiciones adiabáticas de una columna de gas encerrada en un tubo cilíndrico, cerrado por un extremo y con un pistón de masa  $m$  bien ajustado pero que puede moverse libremente.

(b) Una bola de acero de 2 cm de diámetro oscila verticalmente en un tubo de vidrio con un orificio de precisión montado sobre un frasco de vidrio de 12 litros que contiene aire a la presión atmosférica. Comprobar que el período de oscilación deberá ser de 1 seg aproximadamente. (Admitir que las variaciones de presión son adiabáticas, con  $\gamma = 1,4$ . Densidad del acero =  $7600 \text{ kg/m}^3$ .)

3-12 El movimiento de un oscilador lineal puede representarse mediante un gráfico en el que se muestra  $x$  en abscisas y  $dx/dt$  en ordenadas. La historia del oscilador resulta ser entonces una curva.

(a) Demostrar que esta curva es una elipse en el caso de un oscilador no amortiguado.

(b) Demostrar (cualitativamente al menos) que si se incluye un término de amortiguamiento se obtiene una curva en espiral hacia el origen.

3-13 Comprobar que  $x = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$  es una posible solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

y hallar  $\alpha$  y  $\omega$  en función de  $\gamma$  y  $\omega_0$ .

3-14 Se cuelga un objeto de masa 0,2 kg de un muelle cuya constante es 80 N/m. Se somete el objeto a una fuerza resistente dada por  $-bv$ , siendo  $v$  su velocidad en m/seg.

(a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema.

(b) Si la frecuencia con amortiguamiento es  $\sqrt{3}/2$  de la frecuencia sin amortiguamiento, ¿cuál es el valor de la constante  $b$ ?

(c) ¿Cuál es el valor  $Q$  del sistema, y en qué factor se reducirá la amplitud del sistema después de 10 ciclos completos?

**3-15** Muchos sistemas oscilantes, aunque el mecanismo de pérdida o disipación no sea análogo al amortiguamiento viscoso, muestran una disminución exponencial con el tiempo de su energía almacenada media,  $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-\gamma t}$ . Puede definirse una  $Q$  para ellos utilizando la definición  $Q = \omega_0/\gamma$ , siendo  $\omega_0$  la frecuencia angular natural.

(a) Cuando se pulsa en el piano la nota "do", su energía de oscilación disminuye a la mitad de su valor inicial en 1 seg aproximadamente. La frecuencia de dicha nota es 256 Hz. ¿Cuál es la  $Q$  del sistema?

(b) Si la nota correspondiente a una octava más alta (512 Hz) emplea aproximadamente el mismo tiempo para perder su energía, ¿cuál es su  $Q$ ?

(c) Un oscilador armónico libre y amortiguado, compuesto por una masa  $m = 0,1$  kg, que se mueve en un líquido viscoso de coeficiente de amortiguamiento  $b$  ( $F_{\text{viscosa}} = -bv$ ), sujetado a un muelle de constante  $k = 0,9$  N/m, realiza un movimiento oscilante amortiguado. Su energía media disminuye a  $1/e$  de su valor inicial en 4 seg. ¿Cuál es la  $Q$  del oscilador? ¿Cuál es el valor de  $b$ ?

**3-16** De acuerdo con la teoría electromagnética clásica, un electrón acelerado radia energía en la proporción  $Ke^2a^2/c^3$ , siendo  $K = 6 \times 10^9$  N · m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>,  $e$  = carga del electrón (C),  $a$  = aceleración instantánea (m/seg<sup>2</sup>) y  $c$  = velocidad de la luz (m/seg).

(a) Si un electrón estuviese oscilando a lo largo de una recta con frecuencia  $v$  (Hz) y amplitud  $A$ , ¿cuánta energía emitirá durante 1 ciclo? (Suponer que el movimiento queda adecuadamente descrito por  $x = A \sen 2\pi v t$  durante un ciclo cualquiera.)

(b) ¿Cuál es la  $Q$  de este oscilador?

(c) ¿Cuántos períodos de oscilación deberían transcurrir antes de que la energía del movimiento disminuyese a la mitad de su valor inicial?

(d) Sustituyendo  $v$  por una frecuencia óptica típica (es decir, luz visible) estimar numéricamente la  $Q$  aproximada y la "vida mitad" del sistema radiante.

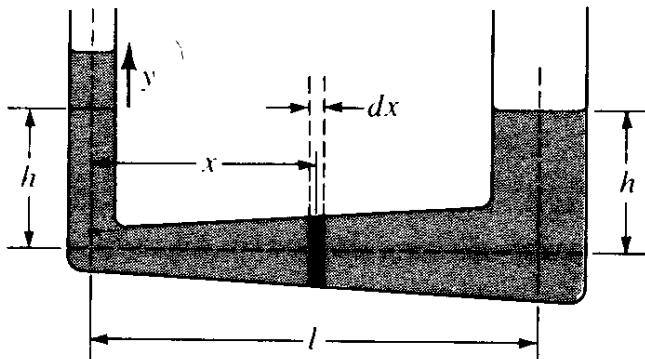
**3-17** Un tubo en U tiene brazos verticales de radio  $r$  y  $2r$ , unidos por un tubo horizontal de longitud  $l$  cuyo radio aumenta linealmente de  $r$  a  $2r$ . El tubo en U contiene líquido hasta una altura  $h$  en cada brazo. Se pone a oscilar el líquido; en un momento dado el líquido en el brazo más estrecho está a una altura  $y$  sobre el nivel de equilibrio.

(a) Demostrar que la energía potencial del líquido viene dada por  $U = \frac{5}{8}g\rho\pi r^2y^2$ .

(b) Demostrar que la energía cinética de una pequeña porción cilíndrica de líquido en el brazo horizontal (véase diagrama) viene dada por

$$dK = \frac{1}{2}\rho \frac{\pi r^2 dx}{(1 + x/l)^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

[Obsérvese que si el líquido no se acumula en ninguna parte, el producto (velocidad  $\times$  sección recta) deberá tener el mismo valor en todo punto del tubo.]



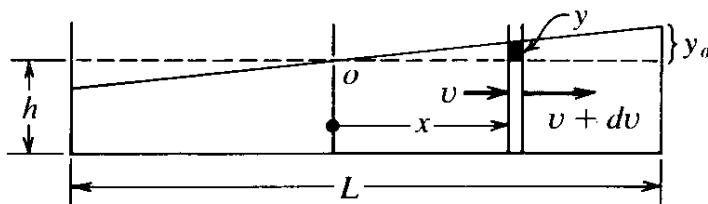
(c) Utilizando el resultado de la parte (b), demostrar que la energía cinética total de todo el líquido móvil viene dada por

$$K = \frac{1}{4}\rho\pi r^2(l + \frac{5}{2}h)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

(Despreciar cualquier efecto debido a los codos.)

(d) A partir de (a) y (c), calcular el período de oscilación si  $l = 5h/2$ .

3-18 Este problema es mucho más ambicioso que los problemas normales en el sentido de que exige reunir mayor número de partes. No obstante, si se resuelven las diversas partes como se sugiere, se verá que aisladamente no poseen ninguna dificultad especial y que el problema completo sirve de ejemplo de la potencia del método de la conservación de la energía para el análisis de problemas de oscilaciones.



Sin duda se está familiarizado con el fenómeno de oscilaciones del agua en una bañera. El movimiento más sencillo es, con cierta aproximación, aquel en que la superficie del agua está inclinada como se ve en la figura, pero está más o menos lisa. Un fenómeno semejante se presenta en los lagos. Imaginemos un lago de sección recta rectangular, como se indica, de longitud  $L$  y con una profundidad del agua  $h (\ll L)$ . El problema recuerda al de un péndulo simple, en el

que la energía cinética se debe casi por completo a un flujo horizontal del agua, mientras que la energía *potencial* depende de variaciones de nivel del agua muy pequeñas. El programa para calcular, *aproximadamente*, el período de las oscilaciones es éste:

- (a) Imaginar que en un instante dado el nivel del agua en los extremos es  $\pm y_0$  respecto al nivel normal. Demostrar que la energía potencial gravitatoria de la masa de agua completa viene dada por

$$U = \frac{1}{6} b \rho g L y_0^2$$

siendo  $b$  la anchura del lago. Para obtener este resultado basta con hallar el incremento de energía potencial de un elemento situado a una distancia  $x$  del centro e integrar.

- (b) Admitiendo que el flujo del agua es predominantemente horizontal, su velocidad  $v$  debe variar con  $x$ , siendo mayor para  $x = 0$  y cero para  $x = \pm L/2$ . Como el agua es incompresible (más o menos) podemos relacionar la diferencia de velocidades de flujo en  $x$  y  $x + dx$  con el cambio por unidad de tiempo  $dy/dt$  de la altura de la superficie del agua en  $x$ . Esto es una condición de *continuidad*. El agua fluye hacia  $x$  a una velocidad  $vhb$  y hacia  $x + dx$  a una velocidad  $(v + dv)hb$ . (Estamos admitiendo que  $y_0 \ll h$ .) La diferencia debe ser igual a  $(bdx)(dy/dt)$ , que representa el aumento por unidad de tiempo del volumen de agua contenido entre  $x$  y  $x + dx$ . Utilizando esta condición demostrar que

$$v(x) = v(0) - \frac{1}{hL} x^2 \frac{dy_0}{dt}$$

en donde

$$v(0) = \frac{L}{4h} \frac{dy_0}{dt}$$

- (c) A partir de aquí demostrar que en un instante cualquiera la energía cinética total asociada con el movimiento horizontal del agua viene expresada por

$$K = \frac{1}{60} \frac{b \rho L^3}{h} \left( \frac{dy_0}{dt} \right)^2$$

Para obtener este resultado, se debe calcular la energía cinética del elemento de agua comprendido entre  $x$  y  $x + dx$  (con volumen igual a  $bhdx$ ) que se mueve con velocidad  $v(x)$  e integrar entre los límites  $x = \pm L/2$ .

- (d) Escribir ahora

$$K + U = \text{const.}$$

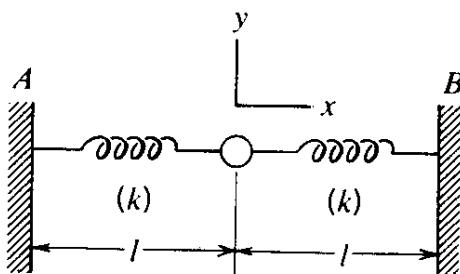
que es una ecuación de la forma

$$A \left( \frac{dy_0}{dt} \right)^2 + B y_0^2 = \text{const.}$$

y define un MAS de un período determinado. Puede verse que este período depende sólo de la longitud  $L$ , de la profundidad  $h$  y de  $g$ . [Nota: Esta teoría no es realmente correcta. La superficie del agua es realmente una porción de onda sinusoidal y no plana. Pero nuestra fórmula da un error inferior al 1 %. (La respuesta correcta es  $T = 2L/\sqrt{gh}$ .)]

(e) El lago de Ginebra puede considerarse aproximadamente como un depósito rectangular de agua de unos 70 km de longitud y una profundidad media de 150 m. El período de sus oscilaciones se observa que vale 73 minutos aproximadamente. Comparar este resultado con la fórmula obtenida.

3-19 Una masa  $m$  descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento y está unida a unos soportes rígidos mediante dos muelles idénticos de longitud sin deformar  $l_0$  y constante  $k$  (véase figura). *Ambos muelles se estiran una longitud  $l$  considerablemente mayor que  $l_0$ .* Los desplazamientos horizontales de  $m$  respecto a su posición de equilibrio se denominarán  $x$  (sobre  $AB$ ) e  $y$  (perpendicular a  $AB$ ).



(a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento (es decir, la ley de Newton) que rige las oscilaciones pequeñas en dirección  $x$ .

(b) Escribir la ecuación diferencial del movimiento que rige las oscilaciones pequeñas en dirección  $y$  (admitir que  $y \ll l$ ).

(c) Calcular el cociente entre los períodos de oscilaciones sobre  $x$  e  $y$  en función de  $l$  y  $l_0$ .

(d) Si para  $t = 0$  se deja libre la masa  $m$  desde el punto  $x = y = A_0$  con velocidad nula, ¿cuáles son sus coordenadas  $x$  e  $y$  en un instante posterior  $t$ ?

(e) Dibujar un gráfico de la trayectoria de  $m$  resultante bajo las condiciones de la parte (d) si  $l = 9 l_0/5$ .

*Si un gallo introduce su cabeza en un recipiente vacío de vidrio y allí cacarea hasta romper el recipiente, todo el costo será pagado.*

*El Talmud (Baba Kamma, Capítulo 2)*

# Vibraciones

## forzadas y resonancia

EL CAPÍTULO ANTERIOR se refirió enteramente a las vibraciones libres de diversos tipos de sistemas físicos. Volvamos ahora a ciertos fenómenos notables, de profunda importancia en toda la física, que se presentan cuando un sistema de este tipo, es decir, un oscilador físico, se somete a una fuerza impulsora periódica mediante un agente externo.

La palabra clave es “resonancia”. Todo el mundo por lo menos está familiarizado cualitativamente con este fenómeno, y probablemente la característica más chocante de un oscilador impulsado exteriormente es el modo con que una fuerza periódica de un valor fijo produce diferentes resultados dependientes de su frecuencia. En particular, si la frecuencia impulsora se hace muy próxima a la frecuencia natural, entonces (como sabe cualquiera que ha empujado un columpio) suele hacerse la amplitud de oscilación muy grande mediante aplicaciones repetidas de una fuerza muy pequeña. Este fenómeno se denomina *resonancia*. Una fuerza del mismo valor aproximadamente, a frecuencia bastante por encima o por debajo de la frecuencia de resonancia es mucho menos eficaz; la amplitud producida sigue siendo pequeña. A juzgar por la cita mencionada al principio de este capítulo, el fenómeno ha sido conocido desde hace mucho tiempo.<sup>1</sup> Es típico de este tipo de movimiento el que el sistema impulsado se vea obligado a aceptar cualquier frecuencia de re-

<sup>1</sup> Como Alexander Woods hace notar en su libro *Acoustics* (Blackie and Son, Londres, 1940): “Parece difícil creer que se proyectó dicha legislación para cubrir un caso que nunca habría de presentarse.” Sin embargo, el ejemplo parece más bien extraño y H. Bouasse, el físico francés que llamó la atención sobre este precepto del Talmud, señalaba que él mismo había criado gran número de gallos, ¡y ninguno había adquirido el hábito de meter su cabeza dentro de recipientes de vidrio!

petición que tenga la fuerza impulsora; al principio puede ponerse en evidencia su tendencia a vibrar con su frecuencia natural propia, pero finalmente da paso a la influencia externa.

Para obtener cierto conocimiento inicial en la descripción teórica del fenómeno de resonancia, sin demasiadas complicaciones en detalles analíticos, empezaremos considerando el caso sencillo aunque físicamente no real, de un oscilador en el que sea totalmente despreciable el efecto amortiguador.

## OSCILADOR NO AMORTIGUADO CON IMPULSIÓN ARMÓNICA

Consideremos que nuestro sistema está formado por la masa  $m$  situada sobre un muelle de constante  $k$  e imaginemos la aplicación de una fuerza impulsora sinusoidal  $F = F_0 \cos \omega t$ . El valor de  $\sqrt{k/m}$ , que representa la frecuencia angular natural del sistema, se designará por  $\omega_0$ . Entonces la ecuación del movimiento, en la forma  $ma = \text{fuerza neta}$ , es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos \omega t$$

o bien

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4-1)$$

Antes de estudiar con detalle esta ecuación diferencial del movimiento consideremos cualitativamente la situación. Si el oscilador se ve impulsado a partir de la posición de equilibrio y se le deja oscilar por sí mismo, oscilará con su frecuencia natural  $\omega_0$ . Una fuerza impulsora periódica, sin embargo, intentará imponer su propia frecuencia<sup>1</sup>  $\omega$  al oscilador. Por lo tanto, es de esperar que el movimiento real, en este caso, se deba a la superposición de oscilaciones correspondientes a las dos frecuencias  $\omega$  y  $\omega_0$ . La solución matemática completa de la ecuación (4-1) es realmente una suma simple de ambos movimientos. Pero debido a la inevitable presencia de fuerzas disipativas en cualquier sistema real, las oscilaciones libres acabarán desapareciendo. La etapa inicial, en que los dos tipos de movimiento son importantes, se denomina *transitoria*. Sin embargo, después de un tiempo suficientemente largo el único movimiento

<sup>1</sup> Para evitar molestas repeticiones, nos referiremos a  $\omega$  simplemente como "frecuencia" en lugar de "frecuencia angular" en textos donde no haya peligro de ambigüedad.

presente de hecho es la oscilación forzada, que continuará sin disminuir con la frecuencia  $\omega$ . Cuando se alcanza esta condición tenemos lo que se denomina movimiento estacionario del oscilador impulsado.

Posteriormente analizaremos los efectos transitorios, pero de momento enfocaremos nuestra atención exclusivamente al estado estacionario de la oscilación forzada. En un oscilador no amortiguado ideal el efecto de las vibraciones naturales nunca desaparecería, pero temporalmente ignoraremos por sencillez este molesto efecto que la ausencia de amortiguamiento origina en el problema del movimiento forzado.

La característica más importante del movimiento será su gran respuesta en las proximidades de  $\omega = \omega_0$ , pero antes de comprometernos totalmente a la resolución de la ecuación (4-1) señalemos algunas características del movimiento en los casos extremos de valores muy altos o muy bajos de la frecuencia impulsora  $\omega$ . Si la fuerza impulsora es de frecuencia muy baja respecto a la frecuencia natural de las oscilaciones libres, es lógico que la partícula se mueva esencialmente en fase con la fuerza impulsora con una amplitud no muy diferente de  $F_0/k (= F_0/m\omega_0^2)$ , desplazamiento que produciría una fuerza constante  $F_0$ . Esto es equivalente a afirmar que el término  $m(d^2x/dt^2)$  en la ecuación (4-1) juega un papel relativamente pequeño comparado con el término  $kx$  a frecuencias muy bajas, o en otras palabras, que la respuesta está controlada por la rigidez del muelle. Por otra parte, cuando las frecuencias de la fuerza impulsora son muy grandes comparadas con la frecuencia natural de la oscilación libre, se presenta el caso opuesto. El término  $kx$  resulta pequeño comparado con  $m(d^2x/dt^2)$  debido a la gran aceleración asociada con frecuencias altas, de modo que la respuesta queda controlada por la inercia. En este caso es evidente una amplitud relativamente pequeña de oscilación de fase opuesta a la fuerza impulsora, ya que la aceleración de una partícula en el movimiento armónico está desplazada en fase  $180^\circ$  con su desplazamiento. A partir de estas consideraciones no parece lógico que la amplitud de resonancia exceda mucho de la que se tiene con frecuencias bajas o altas, pero esto lo justificaremos a continuación.

Para obtener la solución estacionaria de la ecuación (4-1) podemos escribir

$$x = C \cos \omega t \quad (4-2)$$

En otras palabras, estamos admitiendo que el movimiento es armónico, de la misma frecuencia y fase que la fuerza impulsora, y que no están presentes las oscilaciones naturales del sistema. No debe olvidarse que la hipótesis de

la ecuación (4-2) es simplemente de tanteo y debemos estar preparados para rechazarla si no acertamos a encontrar un valor de la constante  $C$ , hasta ahora indeterminada, tal que se satisfaga la ecuación (4-1) para valores arbitrarios de  $\omega$  y  $t$ . Derivando la ecuación (4-2) dos veces respecto a  $t$  se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 C \cos \omega t$$

Sustituyendo en la ecuación (4-1) tenemos así

$$-m\omega^2 C \cos \omega t + kC \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

y de aquí

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4-3)$$

La ecuación (4-3) define satisfactoriamente a  $C$  de tal modo que la ecuación (4-1) se satisface siempre. Así pues, podemos considerar que el movimiento forzado está ciertamente descrito por la ecuación (4-2), con  $C$  dependiente de  $\omega$  de acuerdo con la ecuación (4-3). Esta dependencia se muestra gráficamente en la figura 4-1. Obsérvese cómo  $C$  varía abruptamente de valores positivos grandes a valores negativos grandes cuando  $\omega$  pasa por el valor  $\omega_0$ . El fenómeno de resonancia por sí mismo está representado por el hecho de que el valor de  $C$ , sin tener en cuenta el signo, resulta infinitamente grande cuando se cumple exactamente que  $\omega = \omega_0$ .

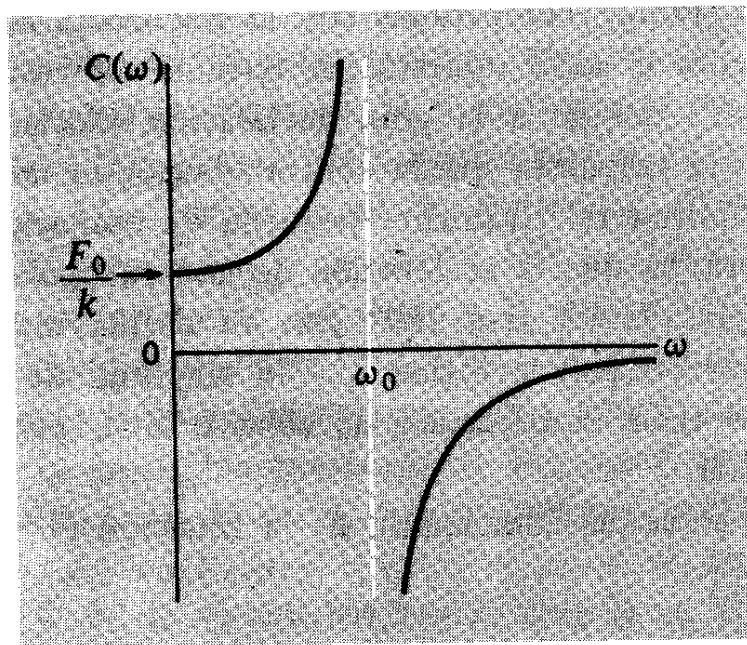


Fig. 4-1. Amplitud de las vibraciones forzadas en función de la frecuencia impulsora (admitiendo un amortiguamiento nulo). El signo negativo de la amplitud para  $\omega > \omega_0$  corresponde a un retraso de fase igual a  $\pi$  del desplazamiento respecto a la fuerza impulsora.

Aunque entre las ecuaciones (4-2) y (4-3) se describe de un modo totalmente adecuado la solución de este problema dinámico, existe otro procedimiento mejor de llegar al resultado, más de acuerdo con nuestra descripción general de los movimientos armónicos. Este método consiste en expresar  $x$  en función de una vibración sinusoidal que tenga una amplitud  $A$ , mediante la definición de una magnitud *positiva*  $y$  una fase  $\alpha$  para  $t = 0$ .

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (4-4)$$

No es difícil ver que esto implica la condición  $A = |C|$  y que se dé a  $\alpha$  uno u otro de los dos siguientes valores, según la frecuencia impulsora  $\omega$  sea menor o mayor que  $\omega_0$ :

$$\omega < \omega_0: \alpha = 0$$

$$\omega > \omega_0: \alpha = \pi$$

La respuesta del sistema en todo el intervalo de  $\omega$  viene entonces representada por curvas separadas para la amplitud  $A$  y para la fase  $\alpha$ , como se ve en la figura 4-2. El valor infinito de  $A$  para  $\omega = \omega_0$ , y el salto discontinuo de

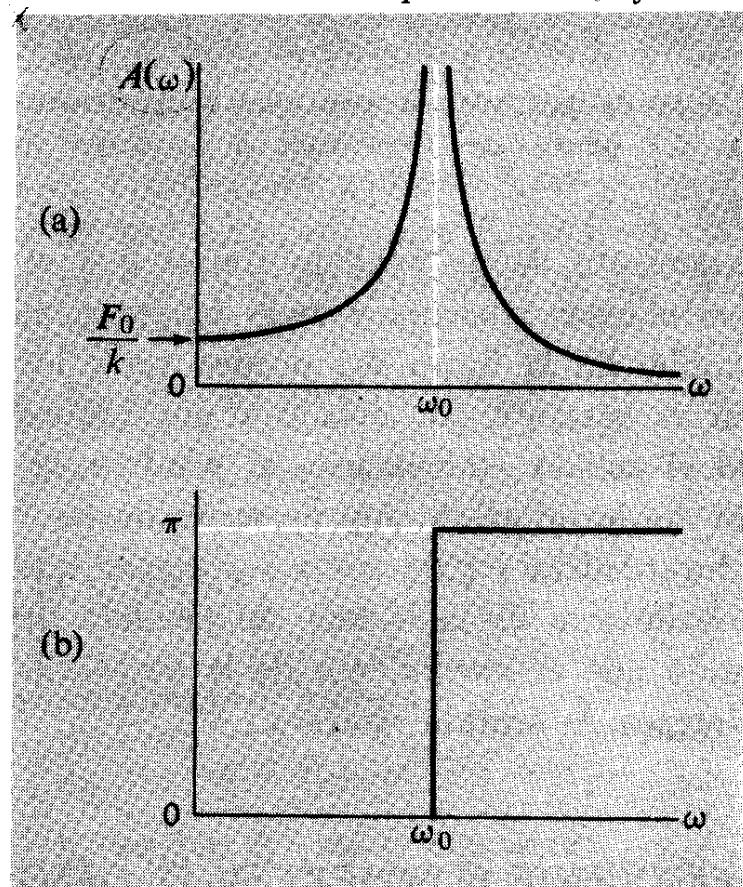


Fig. 4-2. (a) Amplitud de absorción de las oscilaciones forzadas en función de la fuerza impulsora, en el caso de amortiguamiento nulo. (b) Retraso de fase del desplazamiento respecto a la fuerza impulsora en función de la frecuencia.

cero a  $\pi$  del valor de  $\alpha$  cuando se pasa por  $\omega_0$ , carece de significado físico, pero, como veremos, representa un caso límite (matemáticamente) de lo que realmente ocurre en sistemas con amortiguamiento no nulo.

Puede verse la inversión real de la fase del desplazamiento respecto a la fuerza impulsora (es decir, desde permanecer en fase hasta desfasarse  $180^\circ$ )

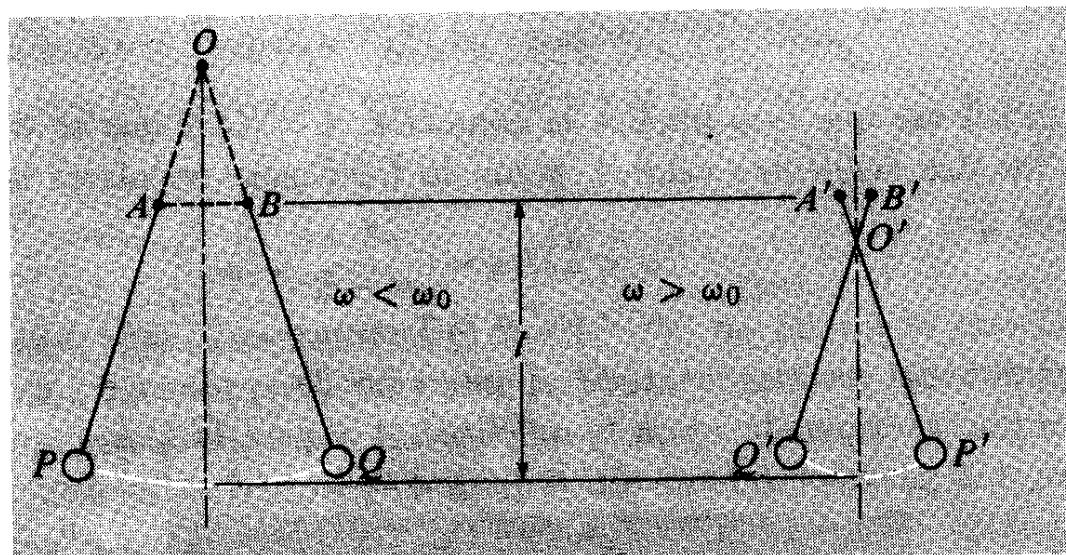


Fig. 4-3. Movimiento de péndulos simples que se obtienen de la oscilación armónica forzada del punto de suspensión a lo largo de la línea  $AB$ . (a)  $\omega < \omega_0$ . (b)  $\omega > \omega_0$ .

mediante el comportamiento de un péndulo simple que se acciona moviendo su punto de suspensión hacia adelante y atrás horizontalmente con un movimiento armónico simple. En la figura 4-3 pueden verse los casos que se presentan para frecuencias bastante por debajo y por encima de la resonancia. Una vez establecido el estado estacionario, el péndulo se comporta como si estuviera suspendido desde un punto fijo correspondiente a una longitud mayor que su longitud verdadera  $l$  para  $\omega < \omega_0$ , y menor que  $l$  para  $\omega > \omega_0$ . En el primer caso el movimiento de la lenteja del péndulo lleva siempre la misma dirección y sentido que el movimiento de la suspensión, mientras que en el último caso es siempre de sentido opuesto.

#### EL MÉTODO DEL EXPONENTE COMPLEJO EN EL CASO DE OSCILACIONES FORZADAS

Habiendo estudiado este ejemplo simple de problemas de vibración forzada en función de ondas sinusoidales, volvamos a repetirlo utilizando el método

del exponente complejo. Esto no tiene ningún mérito especial en lo que se refiere al problema presente, pero su técnica, que ponemos aquí como ejemplo en términos elementales, mostrará ser muy ventajosa cuando la consideremos en el caso del oscilador amortiguado. Nuestro programa es el siguiente:

1. Empezaremos con la ecuación física del movimiento dada por la ecuación (4-1):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t$$

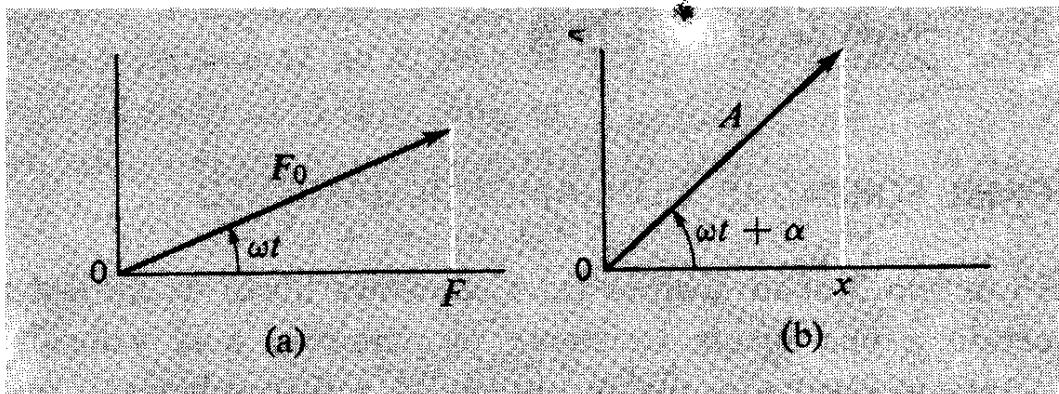


Fig. 4-4. (a) Representación compleja de la fuerza impulsora sinusoidal.  
(b) Representación compleja del vector desplazamiento en la oscilación forzada.

2. Imaginemos que la fuerza impulsora  $F_0 \cos \omega t$  se obtiene como proyección sobre el eje  $x$  de un vector rotatorio  $F_0 \exp(j\omega t)$ , como se ve en la figura 4-4 (a), e imaginemos que  $x$  es la proyección de un vector  $z$  que gira con la misma frecuencia  $\omega$  [fig. 4-4 (b)].

3. Escribamos ahora la ecuación diferencial que rige el comportamiento de  $z$ :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + kz = F_0 e^{j\omega t} \quad (4-5)$$

4. Ensayemos la solución

$$z = A e^{j(\omega t + \alpha)}$$

Sustituyendo en la ecuación (4-5) resulta

$$(-m\omega^2 A + kA)e^{j(\omega t + \alpha)} = F_0 e^{j\omega t}$$

que puede volverse a escribir del modo siguiente:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)A &= \frac{F_0}{m} e^{-j\alpha} \\ &= \frac{F_0}{m} \cos \alpha - j \frac{F_0}{m} \sin \alpha \end{aligned} \quad (4-6)$$

Esta expresión se desdobra en dos condiciones, que corresponden a la parte imaginaria y real de ambos miembros de la ecuación:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = \frac{F_0}{m} \cos \alpha$$

$$0 = -\frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \alpha$$

Claramente estos valores conducen a la vez a las soluciones representadas mediante los dos gráficos de la figura (4-2).

## OSCILACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO

Al final del capítulo 3 analizábamos las vibraciones libres de un sistema masa-muelle sometido a una fuerza resistente proporcional a la velocidad. Consideraremos ahora el resultado que se obtiene al actuar sobre este sistema una fuerza como la que acabamos de considerar en la sección anterior. El enunciado de la ley de Newton se convierte ahora en

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Haciendo  $k/m = \omega_0^2$ ,  $b/m = \gamma$ , esta expresión puede escribirse

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4-7)$$

Busquemos ahora una solución estacionaria a esta ecuación.

Volvamos de nuevo al método del exponente complejo; nuestra ecuación básica se convierte en la siguiente:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \quad (4-8)$$

Supongamos ahora la solución siguiente:

$$z = A e^{j(\omega t - \delta)} \quad (4-9)$$

con

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

Obsérvese que hemos admitido una ecuación ligeramente diferente para  $z$  respecto a lo supuesto en la sección anterior; hemos escrito la fase inicial de  $z$  como  $-\delta$  en lugar de  $+\alpha$ . ¿Por qué hicimos esto? La clave se encuentra en la ecuación (4-6). El segundo miembro de la ecuación puede leerse en términos geométricos como la instrucción necesaria para tomar un vector de longitud  $F_0/m$  y hacerlo girar el ángulo  $-\alpha$  respecto al eje real. Volveremos a obtener una ecuación muy semejante ahora y conseguiremos simplificar el problema si definimos nuestro ángulo, por lo menos formalmente, como representando una rotación positiva (en sentido contrario a las agujas del reloj). Es decir,  $\delta$  es formalmente un ángulo de fase positiva mediante el cual la fuerza impulsora adelanta al desplazamiento.

Sustituyendo (4-9) en la ecuación (4-8) se obtiene

$$(-\omega^2 A + j\gamma\omega A + \omega_0^2 A)e^{j(\omega t - \delta)} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

Por lo tanto,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + j\gamma\omega A = \frac{F_0}{m} e^{j\delta} \quad (4-10)$$

Ahora veremos realmente la elegancia del método del exponente complejo. Podemos considerar la ecuación (4-10) como una condición geométrica. El primer miembro nos dice que dibujemos un vector de longitud  $(\omega_0^2 - \omega^2)A$ , y que luego perpendicularmente a él dibujemos otro vector de longitud  $j\gamma\omega A$ . El segundo miembro nos dice que dibujemos un vector de longitud  $F_0/m$  formando un ángulo  $\delta$  con el eje real. La ecuación exige que estas dos operaciones nos lleven al mismo punto, de modo que los vectores formen un triángulo cerrado, como se ve en la figura 4-5 (a).<sup>1</sup> Evidentemente, se tiene

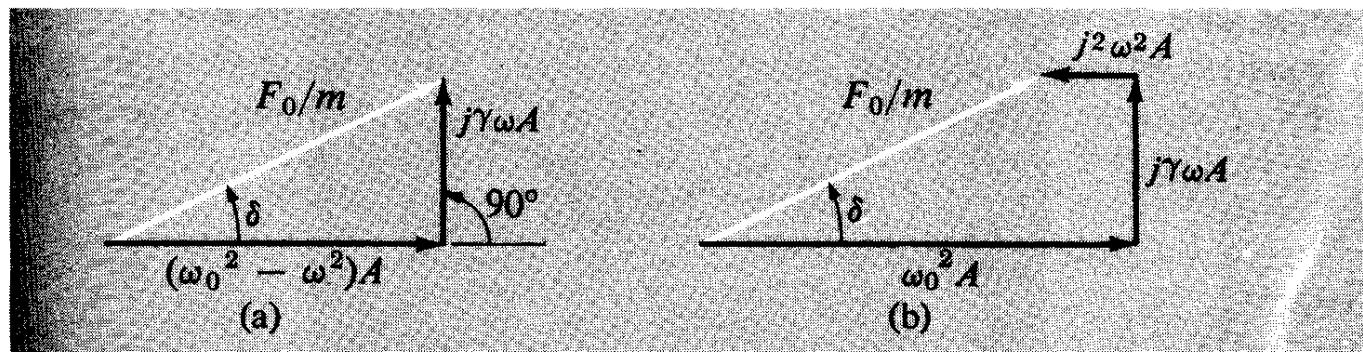


Fig. 4-5. Representación geométrica de la Ec. (4-10).

<sup>1</sup> Puede preferirse leer el miembro de la izquierda de la Ecuación (4-10), considerándolo literalmente como una suma de tres vectores,

$$\omega_0^2 A + j\gamma\omega A + (j)^2 \omega^2 A$$

como se indica en la figura 4-5 (b)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = \frac{F_0}{m} \cos \delta$$

$$\gamma\omega A = \frac{F_0}{m} \sin \delta$$

Por lo tanto,

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}} \quad (4-11)$$

$$\operatorname{tg} \delta(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Naturalmente estos resultados pueden obtenerse también sin introducir el exponente complejo. Simplemente se supone una solución de la forma

$$x = A \cos(\omega t - \delta) \quad (4-12)$$

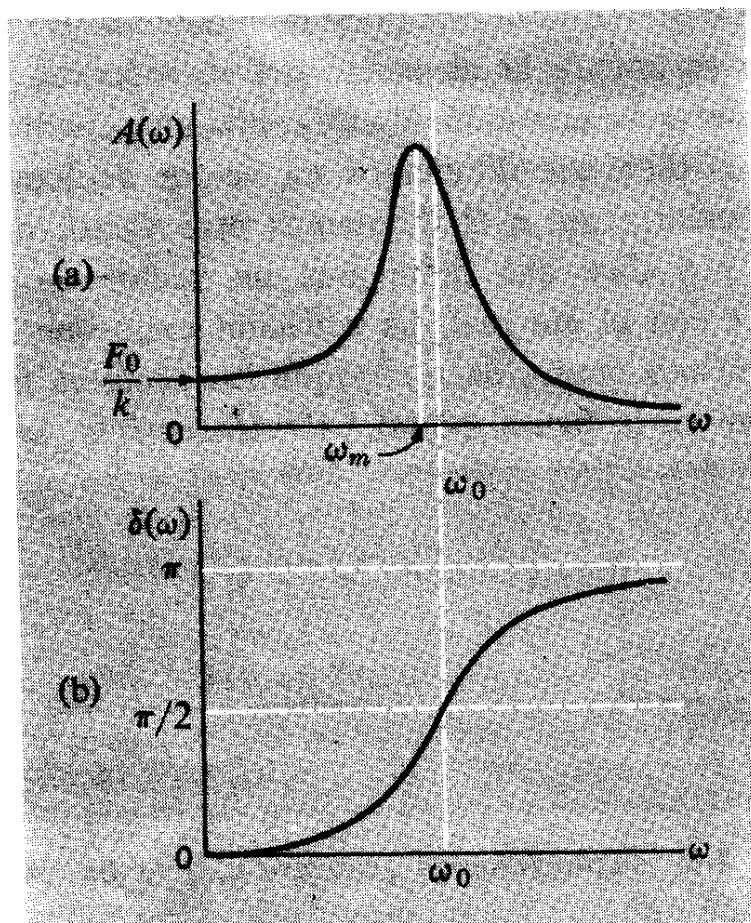


Fig. 4-6. (a) Relación entre la amplitud y la frecuencia impulsora en el caso de oscilaciones forzadas con amortiguamiento. (b) Fase del desplazamiento respecto a la fuerza impulsora en función de la frecuencia impulsora.

y se sustituye en la ecuación (4-7), lo cual nos conduce a la ecuación

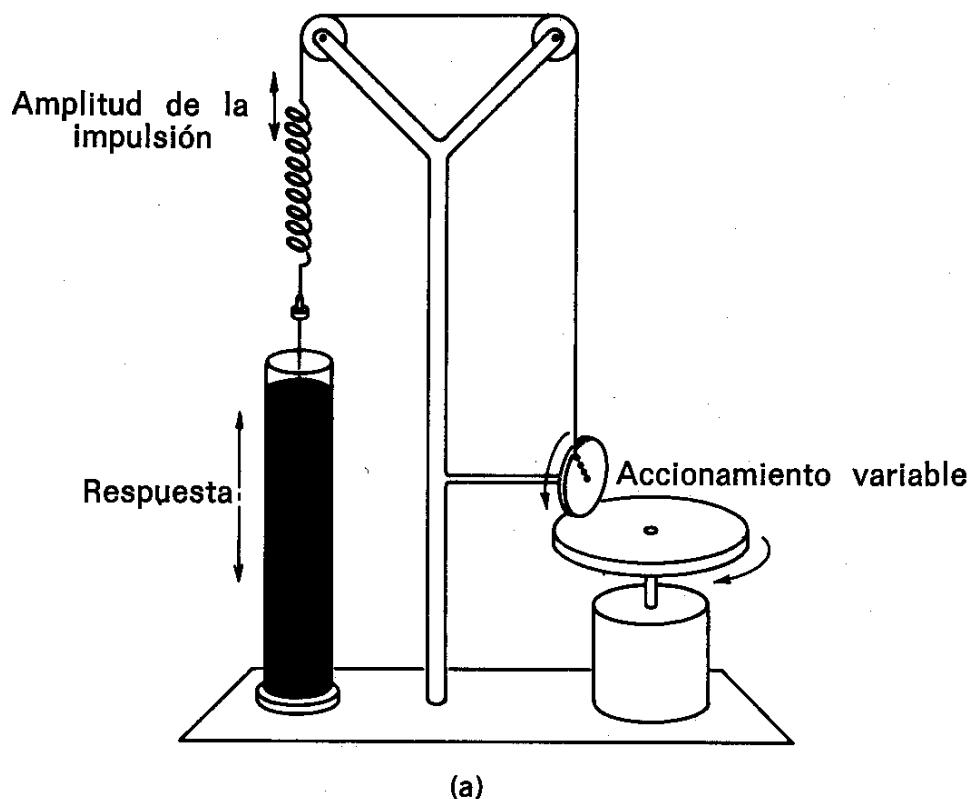
$$(\omega_0^2 - \omega^2)A \cos(\omega t - \delta) - \gamma\omega A \operatorname{sen}(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Esta ecuación deberá resolverse entonces como una identidad trigonométrica cierta para todo valor de  $t$ . El análisis, ciertamente, no es difícil, pero es menos transparente e instructivo que el otro.

En la figura 4-6 se indica la relación que existe entre la amplitud  $A$  y el ángulo de fase  $\delta$  respecto a la frecuencia  $\omega$  en el caso de un valor admitido constante de  $F_0$ . (Recuérdese que es el ángulo que la fuerza impulsora adelanta al desplazamiento o bien el ángulo que el desplazamiento está retrasado respecto a la fuerza impulsora.) Estas curvas tienen un aspecto general claro muy parecido al de la figura 4-2 para el caso del oscilador no amortiguado. Como puede verse, a partir de la expresión que nos da la tangente de  $\delta$  en las ecuaciones (4-11), el retraso de fase aumenta continuamente desde cero (para  $\omega = 0$ ) hasta  $180^\circ$  (en el límite  $\omega \rightarrow \infty$ ); pasa por  $90^\circ$  precisamente cuando la frecuencia es  $\omega_0$ . Menos evidente resulta el hecho de que la amplitud máxima se alcanza a una frecuencia  $\omega_m$  un poco menor que  $\omega_0$ ; sin embargo, en la mayor parte de los casos de cierto interés práctico la diferencia entre  $\omega_m$  y  $\omega_0$  es despreciablemente pequeña.

Éstas son algunas de las características calculadas para un oscilador amortiguado forzado. ¿Cuánto se aproxima a las que presentan los sistemas físicos reales? La figura 4-7 nos proporciona una respuesta en la forma de los resultados experimentales obtenidos con el tipo de sistema físico que hemos estado discutiendo. No es un sistema natural, evidentemente, sino un sistema artificial, ideado específicamente para mostrar más claramente estas características. Sin embargo, produce satisfacción el ver que el esquema de comportamiento descrito por nuestros análisis matemáticos (que después de todo podría no tener ninguna relación con la realidad) corresponde muy bien al comportamiento del sistema compuesto por un muelle real y un agente amortiguador viscoso también real. Este sistema es el mismo para el que mostramos la disminución de las oscilaciones libres en la figura 3-12.

Las características de la figura 4-6 pueden también exhibirse de un modo sencillo aplicando una fuerza impulsora de cierta frecuencia fija a una colección



(a)

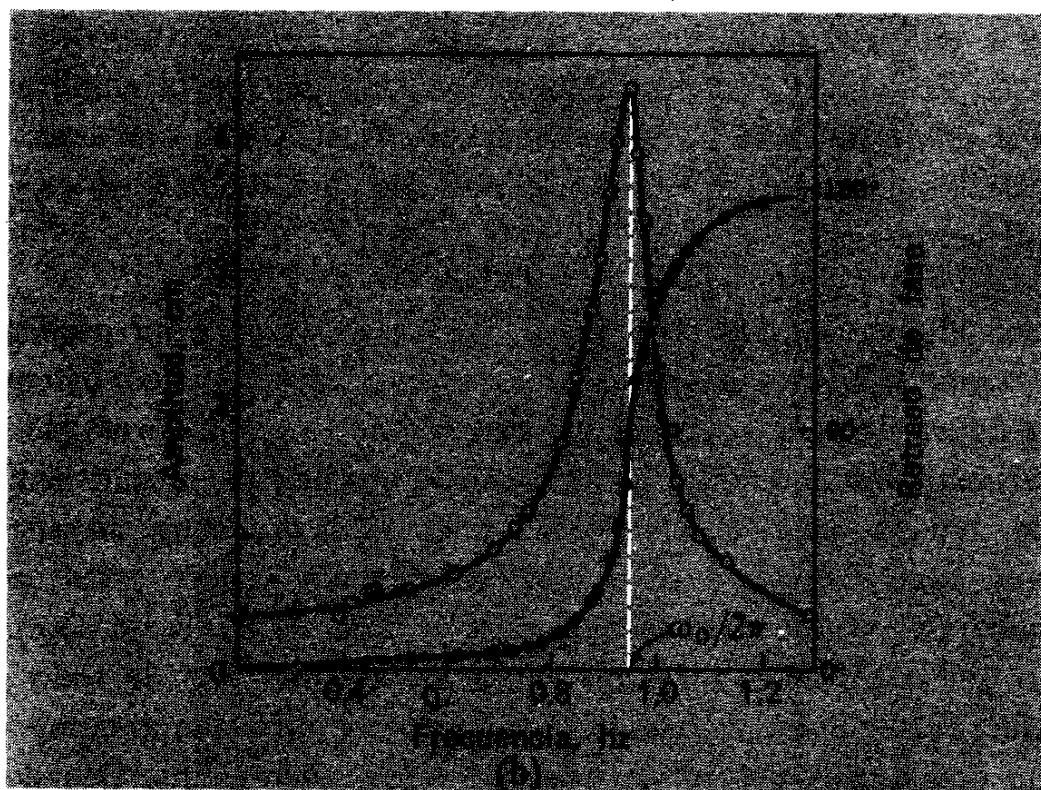


Fig. 4-7. (a) Esquema de la "Torre de Texas", aparato de resonancia mecánica desarrollado por J. G. King en el Educational Research Center, M.I.T. (b) Curvas experimentales de resonancia de la amplitud y del retraso de fase obtenidas con este aparato. (Medidas realizadas por G. J. Churinoff, M.I.T., clase de 1967.)

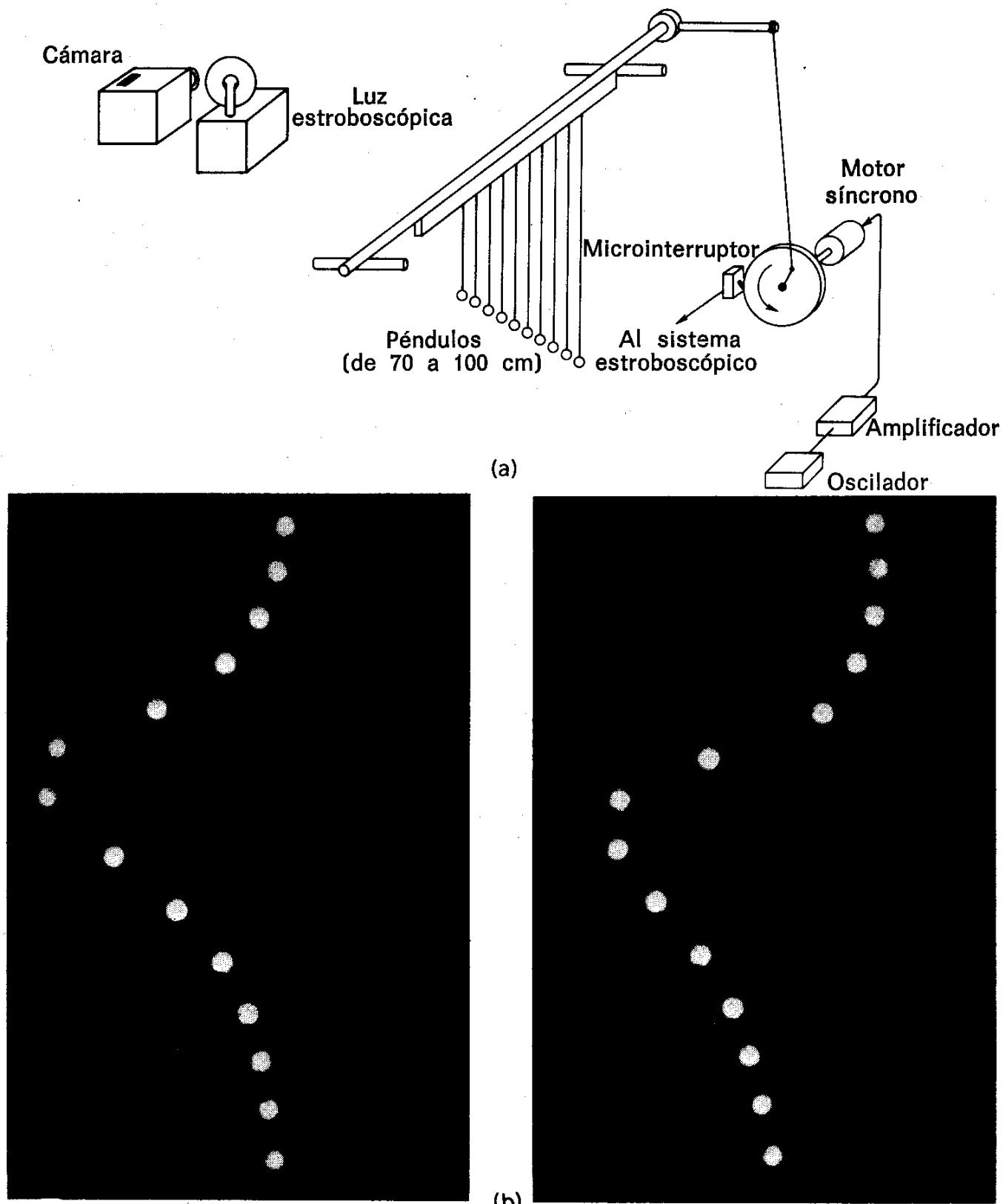


Fig. 4-8. Versión moderna del experimento del péndulo de Barton. (a) Esquema general del dispositivo. La luz estroboscópica emite un destello por oscilación en un punto controlable del ciclo. (b) Desplazamientos de los péndulos cuando la fuerza impulsora está pasando por cero (izquierda) y un momento después (derecha). En la última fotografía, obsérvese que los péndulos más cortos se han movido en el mismo sentido que el accionamiento y los más largos en sentido contrario, correspondiendo a  $\delta < 90^\circ$  y  $\delta > 90^\circ$ , respectivamente. (Fotos por Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

completa de osciladores de frecuencia naturales diferentes. Esto se hace fácilmente mediante una modificación de un dispositivo debido a E. H. Barton (1918) en el que se cuelgan cierto número de péndulos ligeros de longitudes diferentes de una barra horizontal que se hace oscilar a la frecuencia de resonancia del péndulo situado en su mitad, como se ve en la figura 4-8 (a). Cuando se fotografián lateralmente los movimientos de los péndulos ligeros todos se mueven con la misma frecuencia y están separados cualitativamente al menos en las relaciones de fase que eran de esperar. Esto está indicado en la figura 4-8 (b), que muestra los desplazamientos de los péndulos pequeños en el instante en que la barra accionadora pasaba de la izquierda a la derecha a través de posición de equilibrio y luego un instante ligeramente posterior. Los péndulos cortos (para los cuales  $\omega_0 > \omega$ ) tenían un  $\delta < 90^\circ$ , los más largos (en los cuales  $\omega_0 < \omega$ ) tenían un  $\delta > 90^\circ$ , y así se movían en sentido contrario al sistema accionador, y el péndulo en resonancia exacta se retrasaba  $90^\circ$ , teniendo un desplazamiento negativo máximo cuando el sistema accionador pasaba por cero.

## INFLUENCIA DE LA VARIACIÓN DEL TÉRMINO RESISTIVO

Al estudiar la disminución de las vibraciones libres al final del capítulo 3, introdujimos el factor de calidad  $Q$ , un número puro igual al cociente  $\omega_0/\gamma$ . Cuanto mayor es el valor de  $Q$ , menor es el efecto disipativo y mayor el número de ciclos de oscilaciones libres para una disminución dada de amplitud. Indicaremos ahora cómo cambia el comportamiento del sistema resonante cuando se hace variar la  $Q$  del sistema permaneciendo igual los demás parámetros.

Dispongamos la ecuación (4-11) (para  $A$  y  $\operatorname{tg} \delta$ ) en forma más conveniente para este objetivo. Sustituyendo primeramente  $\gamma = \omega_0/Q$  nos dará

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2]^{1/2}} \quad (4-13)$$

$$\operatorname{tg} \delta(\omega) = \frac{\omega\omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Además, resultará conveniente en muchas ocasiones utilizar  $\omega/\omega_0$  como variable en lugar de  $\omega$ . Teniendo esto en cuenta volveremos a escribir las ecuaciones (4-13) de la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0/\omega}{\left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \\ A &= \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0/\omega}{\left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{1/Q}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

y

o bien

y

En la figura 4-9 vemos varias curvas calculadas a partir de las ecuaciones (4-14) que muestran las relaciones que existen entre la frecuencia y la amplitud  $A$  y el retraso de fase  $\delta$  para valores diferentes de  $Q$ . La mayor parte de la variación de  $\delta$  se produce en un intervalo de frecuencias que va aproximadamente desde  $\omega_0(1 - 1/Q)$  hasta  $\omega_0(1 + 1/Q)$ , es decir, en una banda de anchura  $2\omega_0/Q$  centrada en  $\omega_0$ . En el límite  $Q \rightarrow \infty$  el retraso de fase salta bruscamente desde cero a  $\pi$  en cuanto se pasa a través de  $\omega_0$ . Evidentemente la frecuencia  $\omega_0$  es una propiedad importante del sistema resonante, aunque no sea (excepto en el caso de amortiguamiento nulo) la frecuencia con la cual el sistema debería oscilar cuando se le dejase en libertad.

La amplitud  $A$  pasa por un máximo para cualquier valor de  $Q$  mayor que  $1/\sqrt{2}$ , es decir, para todos los sistemas excepto los amortiguados con mayor intensidad. Esta amplitud máxima  $A_m$  se presenta, como indicamos anteriormente, a una frecuencia  $\omega_m$  que es menor que  $\omega_0$ . Si llamamos  $A_0$  a la amplitud  $F_0/k$  obtenida para  $\omega \rightarrow 0$ , puede demostrarse fácilmente que se obtienen los siguientes resultados :

$$\begin{aligned} \omega_m &= \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^{1/2} \\ A_m &= A_0 \frac{Q}{\left( 1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4-15)$$

En la tabla 4-1 relacionamos algunos valores de  $\omega_m/\omega_0$  y de  $A_m/A_0$  para valores particulares de  $Q$ . Obsérvese que en la mayoría de los casos ( $Q \geq 5$ ) el pico de amplitud es casi igual a  $Q$  veces el desplazamiento estático para la

misma  $F_0$ , y se produce a una frecuencia muy próxima a  $\omega_0$ . Para la misma frecuencia  $\omega_0$  la amplitud es precisamente  $QA_0$ .

TABLA 4-1: PARÁMETROS DE RESONANCIA DE LOS SISTEMAS AMORTIGUADOS

$Q$	$\omega_m/\omega_0$	$A_m/A_0$
$1/\sqrt{2}$	0	1
1	$1/\sqrt{2} = 0.707$	$2/\sqrt{3} = 1.15$
2	$\sqrt{\frac{7}{8}} = 0.935$	$8/\sqrt{14} = 2.06$
3	$\sqrt{\frac{17}{16}} = 0.973$	$18/\sqrt{35} = 3.04$
5	$\sqrt{\frac{49}{50}} = 0.990$	$50/\sqrt{99} = 5.03$
$\gg 1$	$1 - 1/4Q^2$	$Q[1 + 1/(8Q^2)]$

La figura 4-9 nos indica cómo varía con  $Q$  la nitidez del ajuste de un sistema resonante. Para exponer el fenómeno puede utilizarse el dispositivo formado por una colección de péndulos como el de la figura 4-8 (a). Puede aumentarse el valor de  $Q$ , sin variar  $\omega_0$ , haciendo que las lentejas de los péndulos tengan mayor masa. La figura 4-10 muestra las fotografías realizadas con una exposición larga de los péndulos primero descargados y luego con dos cargas diferentes. En ella se revela claramente la mejora en la nitidez del ajuste, aunque no sean estrictamente comparables las amplitudes absolutas de oscilación en las tres fotografías. En cada una de estas fotografías se ha sobrepuerto una fotografía mediante un destello instantáneo que muestra la relación de fase entre los distintos péndulos para diferentes  $Q$ , que se corresponde en todo con la figura 4-9 (b).

## FENÓMENOS TRANSITORIOS

Hasta aquí nuestro estudio ha considerado el estado estacionario como completamente establecido, es decir, como si la fuerza impulsora  $F_0 \cos \omega t$  hubiese estado actuando desde siempre en el pasado, de modo que se ha desvanecido toda traza de cualquier vibración natural del sistema impulsado. Pero, como es natural, en cualquier caso real la fuerza impulsora se pone en acción en un instante determinado, que si no hay ninguna razón para lo contrario lo denominaremos  $t = 0$ , y sólo algún tiempo después se obtienen nuestras condiciones de estado estacionario. Esta etapa transitoria puede ocupar realmente un tiempo muy largo si el amortiguamiento de las oscilaciones libres es extre-

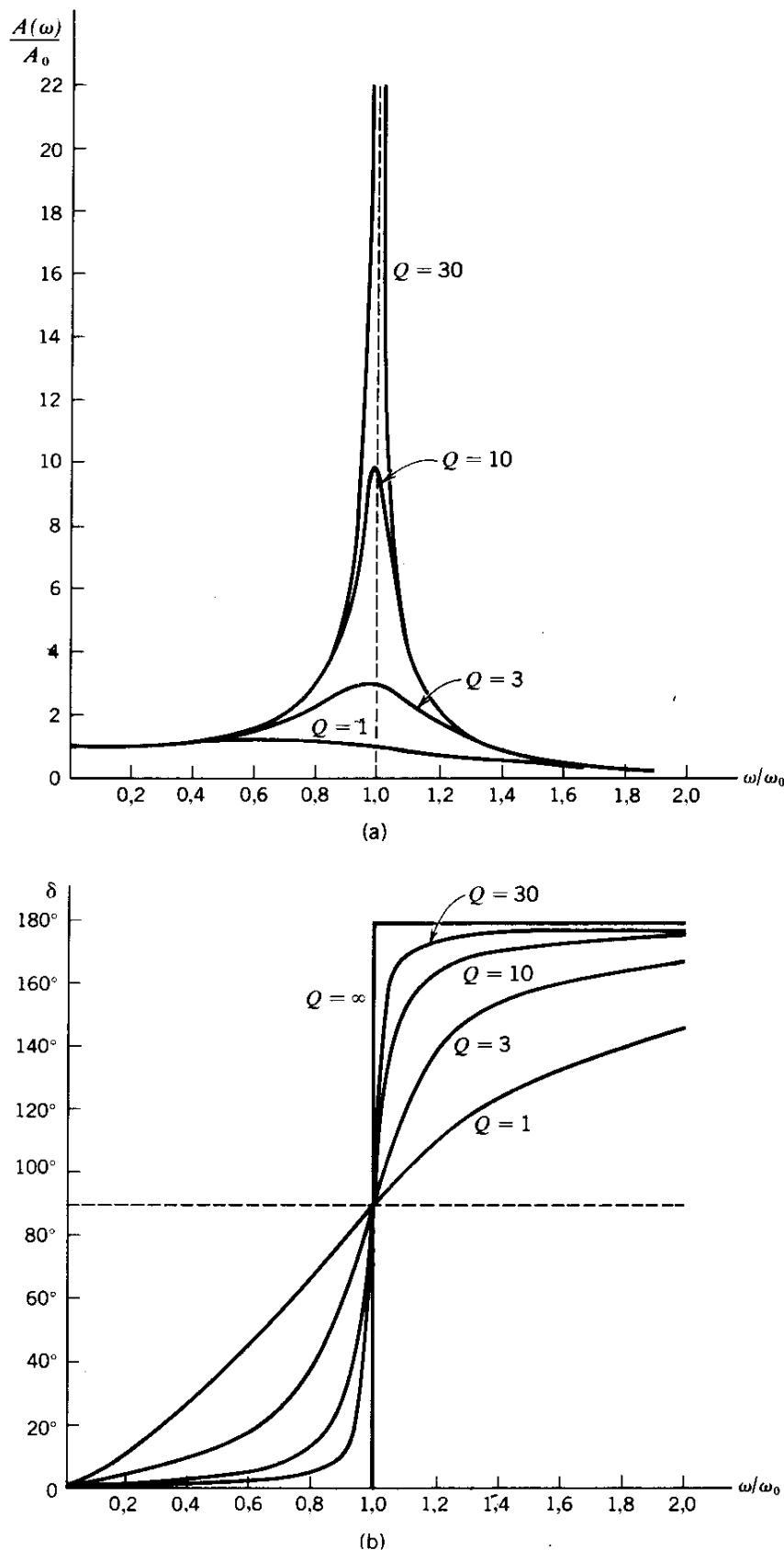


Fig. 4-9. (a) Amplitud en función de la frecuencia impulsora para diferentes valores de  $Q$ , admitiendo que la fuerza impulsora tiene valor constante y frecuencia variable. (b) Diferencia de fase en función de la frecuencia impulsora para varios valores de  $Q$ .

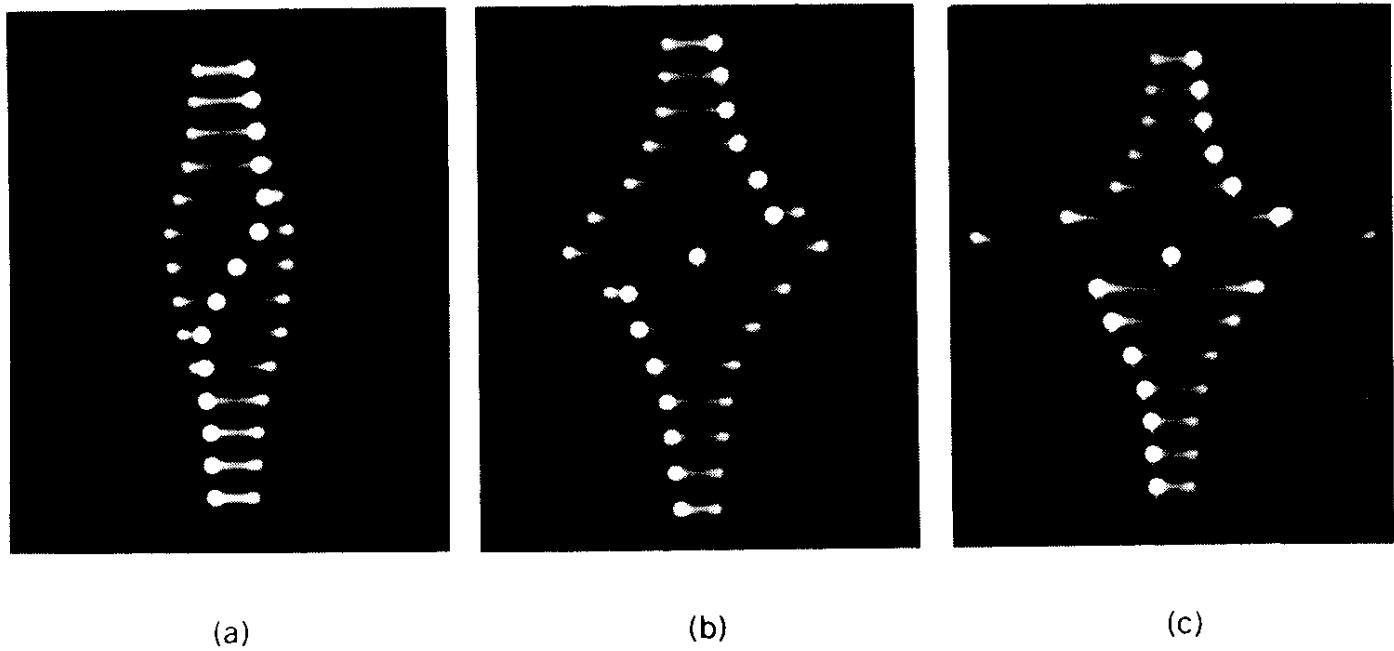


Fig. 4-10. Fotografía con la exposición de los péndulos de Barton (ej. figura 4-8) mostrando las propiedades de la resonancia. Las lentejas del péndulo eran esferas de estirofoam de poco peso (procedentes del Kit de electrostática del PSSC). (a) Péndulos descargados y, por tanto, con gran amortiguamiento, mostrando una resonancia poco selectiva. (b) Las lentejas poseían una carga ligera (con una chincheta), obteniéndose un amortiguamiento moderado y una resonancia más selectiva. (c) Lentejas con carga alta (una chincheta + una arandela), obteniéndose un pequeño amortiguamiento y un  $Q$  bastante elevado. (Fotos por Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.) En los tres casos se ha superpuesto un destello instantáneo para mostrar las reacciones de fase entre los péndulos.

madamente pequeño. Empezaremos otra vez (debido de nuevo a su sencillez matemática) con el caso en que el amortiguamiento es efectivamente nulo.

Para hacer el problema más explícito, supongamos que tenemos un sistema masa-muelle que está en reposo hasta el instante  $t = 0$ . En este momento se pone en funcionamiento la fuerza impulsora y a partir de entonces el movimiento queda regido por la ecuación (4-1), que presentamos al principio de este capítulo :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4-16)$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4-17)$$

Ahora ya hemos visto cómo conduce esta ecuación diferencial del movimiento forzado a la siguiente ecuación en  $x$ :

$$x = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

Sin embargo, esta ecuación no contiene constantes ajustables de integración; la solución queda especificada completamente por los valores de  $m$ ,  $\omega_0$ ,  $F_0$  y  $\omega$ . Después de nuestras notas en el capítulo 3 sobre la necesidad de introducir dos constantes de integración al resolver una ecuación diferencial de segundo orden, puede el lector preguntarse qué pasó con ellas en este caso. Más específicamente, y como allí más empíricamente, busquemos lo que nos dará la ecuación (4-17) en el instante  $t = 0$ , en el cual, de acuerdo con nuestra hipótesis presente, la fuerza impulsora se ha puesto en funcionamiento. ¡El resultado es imposible! Por ejemplo, si suponemos  $\omega < \omega_0$ , el desplazamiento para  $t = 0$  adquiere inmediatamente un valor positivo. Pero ningún sistema con inercia no nula, sometido a fuerza finita, puede desplazarse una distancia no nula en tiempo cero. Y si suponemos  $\omega > \omega_0$ , el resultado es un absurdo aún mayor, la masa debería moverse repentinamente con un desplazamiento negativo bajo la acción de una fuerza positiva. Evidentemente, la ecuación (4-17) no nos cuenta toda la historia y la parte transitoria es la que nos resuelve el problema.

Matemáticamente, la situación es ésta. Supóngase que hemos encontrado una solución, denominada  $x_1$ , a la ecuación (4-16), de modo que

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Y supongamos ahora que hemos hallado también una solución, denominada  $x_2$ , a la ecuación de la vibración libre, de modo que

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 = 0$$

Por simple suma de estas dos ecuaciones tenemos

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \omega_0^2(x_1 + x_2) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Así pues, la combinación  $x_1 + x_2$  equivale a la solución de la ecuación del movimiento forzado como si estuviese  $x_1$  solamente. No tenemos ninguna razón matemática para excluir la contribución debida a  $x_2$ ; por el contrario, nos vemos obligados absolutamente a incluirla si hemos de tener en cuenta las condiciones que se presentan cuando  $t = 0$ . Podemos decir prácticamente lo mismo, aunque con menos precisión, desde un punto de vista puramente físico. Las oscilaciones que se obtienen de un impulso breve dado al sistema para  $t = 0$  poseerán ciertamente la frecuencia natural  $\omega_0$ . Sólo si se aplica

una fuerza periódica durante muchos ciclos aprenderá el sistema que debe oscilar con alguna frecuencia diferente  $\omega$ . Así pues, es lógico que el movimiento, al menos en sus etapas iniciales, contenga contribuciones debidas a ambas frecuencias.

Volviendo ahora a las ecuaciones precisas, la ecuación de la vibración libre de frecuencia  $\omega_0$  contiene dos constantes ajustables, una amplitud y una fase inicial. Llamémoslas  $B$  y  $\beta$  porque estamos utilizándolas para ajustar las condiciones del principio del movimiento forzado. Entonces, de acuerdo con las ideas resumidas anteriormente, proponemos que la solución completa de la ecuación del movimiento forzado sea del modo siguiente:

$$x = B \cos(\omega_0 t + \beta) + C \cos \omega t \quad (4-18)$$

siendo

$$C = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Podemos ahora adaptar la ecuación (4-18) de modo que se ajuste a las condiciones iniciales (en este caso), que son  $x = 0$  y  $dx/dt = 0$  para  $t = 0$ . Para la condición respecto a  $x$  misma tenemos

$$0 = B \cos \beta + C$$

Además, derivando la ecuación (4-18), se tiene

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 B \sin(\omega_0 t + \beta) - \omega C \sin \omega t$$

De aquí que, para  $t = 0$ , resulte

$$0 = -\omega_0 B \sin \beta$$

La segunda condición exige que  $\beta = 0$  o  $\pi$ . Tomando la primera (el resultado final es el mismo en ambos casos) se tiene que  $B = -C$ , de modo que la ecuación (4-18) resulta:

$$x = C(\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (4-19)$$

lo cual es un ejemplo típico de batido o pulsación, como se ve en la figura 4-11(a). En ausencia completa de amortiguamiento estas pulsaciones continuarian indefinidamente; no se alcanzaría nunca un estado estacionario correspondiente a la ecuación (4-17) sola. Quizá sea interesante hacer notar que

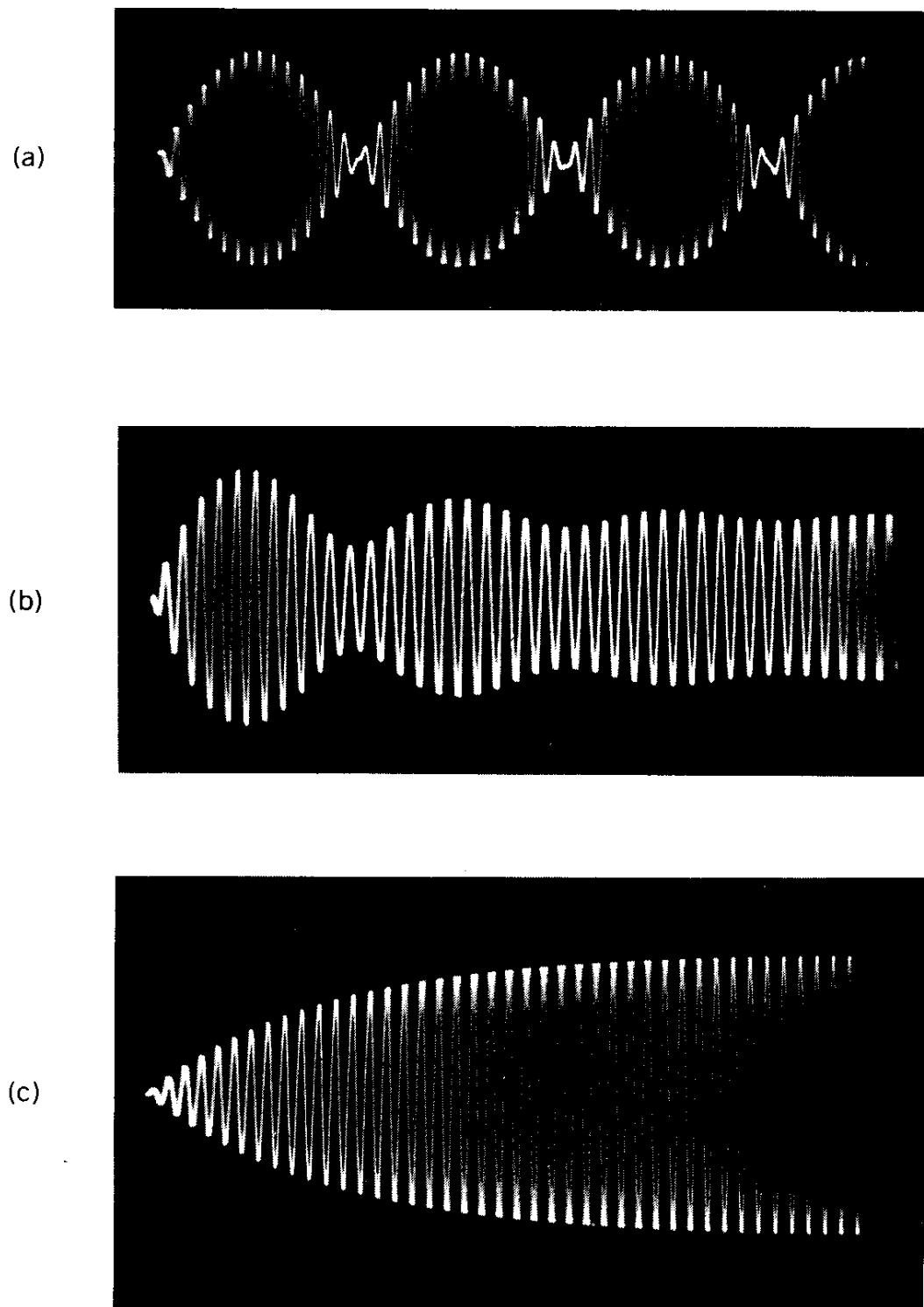


Fig. 4-11. (a) Respuesta de un oscilador armónico no amortiguado frente a una fuerza impulsora periódica, como la descrita por la Ec. (4-19). Estas pulsaciones continuarian indefinidamente. (b) Comportamiento transitorio de un oscilador amortiguado con una fuerza impulsora periódica lejos de la resonancia. (c) Comportamiento transitorio a frecuencia de resonancia exacta, mostrando el crecimiento suave hasta alcanzar una amplitud estacionaria. (Fotos de Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

las condiciones un instante después de  $t = 0$  tienen ahora un sentido perfectamente claro. Si  $\omega t, \omega_0 t \ll 1$ , podemos poner

$$\cos \omega t \approx 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}$$

$$\cos \omega_0 t \approx 1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2}$$

Por lo tanto,

$$x \approx \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)t^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2$$

Así pues, precisamente como es lógico, antes de que las fuerzas restauradoras tengan que intervenir en el juego la masa arranca en el sentido de la fuerza aplicada con una aceleración  $F_0/m$ .

Podemos preguntarnos si, dado que la ecuación (4-18) se justifica como una posible solución de la ecuación del movimiento forzado, es, en consecuencia, la verdadera solución. Diremos solamente que existe un teorema de unicidad para estas ecuaciones diferenciales y si hemos encontrado una solución cualquiera con el número exigido de constantes ajustables, es ciertamente la única y verdadera solución del problema.<sup>1</sup>

Volviendo ahora al caso más real en que se admite que está presente el amortiguamiento, podemos, sin más, postular la combinación siguiente de movimientos libres y en estado estacionario:

$$x = Be^{-\gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \beta) + A \cos(\omega t - \delta) \quad (4-20)$$

en donde

$$\omega_1 = \left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^{1/2}$$

y  $A$  y  $\delta$  vienen dadas por la ecuación (4-11).

No intentaremos aquí descender a los detalles puramente matemáticos para ajustar los valores de  $B$  y  $\beta$  a los valores de  $x$  y  $dx/dt$  para  $t = 0$ . Es semejante a una versión más complicada de lo que hicimos antes para el caso de los osciladores no amortiguados. Sin embargo, en la figura 4-11 (b), mostraremos el tipo de movimiento que se produce, en general semejante a un intento de pulsaciones, seguido de un movimiento de amplitud constante a la

<sup>1</sup> Para un estudio más completo ver, por ejemplo, a W. T. Martin y E. Reissner, *Elementary Differential Equations*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 2.<sup>a</sup> ed., 1961.

frecuencia impulsora  $\omega$ . La figura 4-11(c) muestra el efecto transitorio mucho más sencillo que se presenta cuando el oscilador amortiguado se ve impulsado a su propia frecuencia natural.

## POTENCIA ABSORBIDA POR UN OSCILADOR IMPULSADO

Con frecuencia tendrá importancia e interés conocer a qué ritmo debe alimentarse la energía en un oscilador impulsado para mantener sus oscilaciones a una amplitud fija. Como en cualquier otro fenómeno dinámico, podemos calcular la potencia instantánea  $P$  en función del producto de la fuerza impulsora por la velocidad:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv$$

De nuevo consideremos el oscilador amortiguado, para el cual (debido a que no existen efectos disipativos) la inyección de potencia media debe resultar nula. Utilizando las ecuaciones ya desarrolladas y admitiendo la solución de estado estacionario, se tiene

$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$x = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = C \cos \omega t$$

Por lo tanto,

$$v = -\omega C \sin \omega t$$

$$P = -\omega C F_0 \sin \omega t \cos \omega t$$

Esta potencia de entrada, proporcional a  $\sin 2\omega t$ , es positiva la mitad del tiempo y negativa la otra mitad, de manera que su promedio es cero en un número entero cualquiera de semiperíodos de oscilación. Es decir, la energía se suministra al sistema durante un cuarto de ciclo y se extrae de nuevo durante el siguiente cuarto de ciclo.

Volviendo ahora al oscilador forzado con amortiguamiento, se tiene

$$x = A \cos(\omega t - \delta)$$

Por lo tanto,

$$v = -\omega A \sin(\omega t - \delta)$$

Esto se puede escribir en la forma

$$v = -v_0 \sin(\omega t - \delta)$$

en donde  $v_0$  es el valor máximo de  $v$  para valores cualesquiera de  $F_0$  y  $\omega$ . Tomando el valor de  $A$  de la ecuación (4-14) se tiene

$$v_0(\omega) = \frac{F_0\omega_0/k}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\right]^{1/2}} \quad (4-21)$$

El valor de  $v_0$  pasa por un máximo para  $\omega = \omega_0$  exactamente, fenómeno que podemos denominar resonancia de velocidad.

Consideremos ahora el trabajo y la potencia necesaria para mantener las oscilaciones forzadas. Se tiene

$$\begin{aligned} P &= -F_0 v_0 \cos \omega t \sin (\omega t - \delta) \\ &= -F_0 v_0 \cos \omega t (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) \end{aligned}$$

Es decir,

$$P = -(F_0 v_0 \cos \delta) \sin \omega t \cos \omega t + (F_0 v_0 \sin \delta) \cos^2 \omega t \quad (4-22)$$

Si promediamos la potencia de entrada en un número cualquiera entero de ciclos el primer término de la ecuación (4-22) resulta cero. El promedio de  $\cos^2 \omega t$ , sin embargo, es  $\frac{1}{2}$ ,<sup>1</sup> de modo que la potencia de entrada media viene dada por

$$\bar{P} = \frac{1}{2} F_0 v_0 \sin \delta = \frac{1}{2} \omega A F_0 \sin \delta$$

Con la ayuda de las ecuaciones (4-14) y (4-21), resulta ser

$$\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2 \omega_0}{2kQ} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}} \quad (4-23)$$

Esta potencia, como la velocidad, pasa por un máximo para el valor  $\omega = \omega_0$  precisamente cualquiera que sea el valor de  $Q$ . La potencia máxima viene dada por

$$P_m = \frac{F_0^2 \omega_0 Q}{2k} = \frac{Q F_0^2}{2m\omega_0} \quad (4-24)$$

En la figura 4-12(a) se muestra la relación existente entre  $\bar{P}$  y  $\omega$  para diversos valores de  $Q$ . Puede señalarse que la potencia de entrada tiende hacia cero para frecuencias muy bajas y muy altas, y que excepto para valores ba-

<sup>1</sup> Recuérdese, por ejemplo, que  $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$  y que  $(\cos 2\omega t)_{\text{medio}} = 0$  en un ciclo completo.

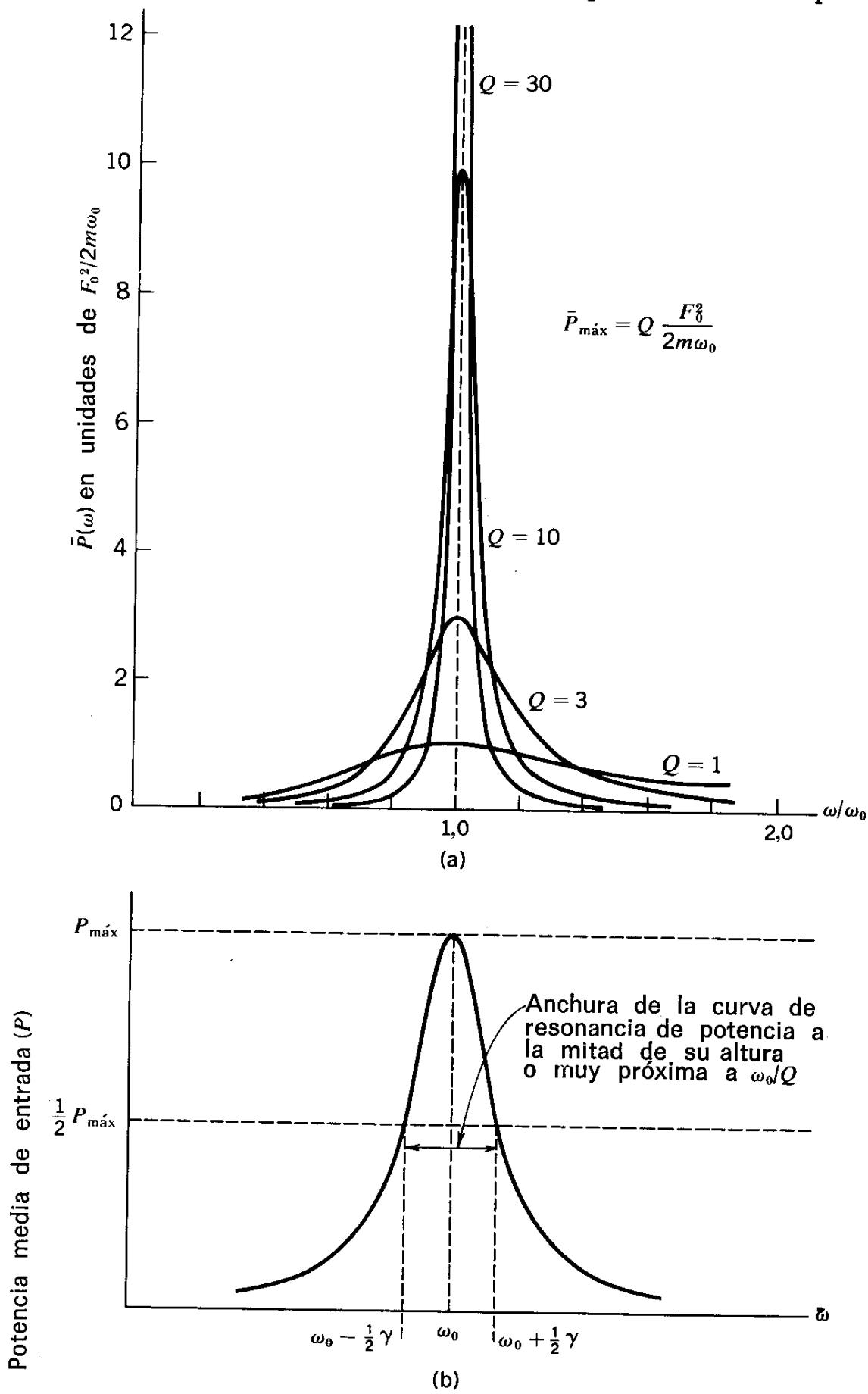


Fig. 4-12. (a) Potencia media absorbida por un oscilador forzado en función de la frecuencia para diversos valores de  $Q$ . (b) "Agudeza" de la curva de resonancia determinada en función de la curva de potencia.

jos de  $Q$  las curvas son casi simétricas alrededor del máximo. Es conveniente definir una anchura para estas curvas de resonancia de potencia tomando la diferencia entre aquellos valores de  $\omega$  para los cuales la potencia de entrada es la mitad del valor máximo. Esto puede hacerse de un modo particularmente claro y útil si  $Q$  es grande (como sucede en la mayoría de los casos de interés). Esto significa que la resonancia está efectivamente contenida dentro de una banda estrecha de frecuencias próximas a  $\omega_0$ . Entonces es posible escribir una forma aproximada de la ecuación para  $\bar{P}(\omega)$  basada en el siguiente cálculo elemental:

$$\begin{aligned}\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega\omega_0} \\ &= \frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{\omega\omega_0}\end{aligned}$$

De aquí que, si  $\omega \approx \omega_0$ , podemos poner

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{2\omega_0(\omega_0 - \omega)}{\omega_0^2} = \frac{2(\omega_0 - \omega)}{\omega_0}$$

Sustituyendo este valor en el denominador de la ecuación (4-23) se tiene

$$\begin{aligned}\bar{P}(\omega) &= \frac{F_0^2\omega_0}{2kQ} \frac{1}{\frac{4(\omega_0 - \omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q^2}} \\ &= \frac{F_0^2(\omega_0/Q)}{2(k/\omega_0^2)} \frac{1}{4(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0/Q)^2}\end{aligned}$$

Ahora nos hemos encontrado como antes la magnitud  $\omega_0/Q$ . Es la constante de amortiguamiento  $\gamma (= b/m)$  la que caracteriza la velocidad con que disminuye la energía de un oscilador amortiguado en ausencia de una fuerza impulsora:

$$E = E_0 e^{-(\omega_0/Q)t} = E_0 e^{-\gamma t} \quad (4-25)$$

[Véase ecuación (3-36).] Así pues, la ecuación anterior para  $\bar{P}$  puede escribirse (recordando también que  $k = m\omega_0^2$ ) en la siguiente forma simplificada:

$$(aproximada) \quad \bar{P}(\omega) = \frac{\gamma F_0^2}{2m} \frac{1}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (4-26)$$

Las frecuencias  $\omega_0 \pm \Delta\omega$ , para las cuales  $\bar{P}(\omega)$  desciende a la mitad del valor máximo  $\bar{P}(\omega_0)$ , se definen así por

$$4(\Delta\omega)^2 = \gamma^2$$

Es decir,

$$2\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q} \quad (4-27)$$

Así pues, la anchura de la curva de resonancia para el oscilador impulsado, medida por la potencia de entrada [figura 4-12(b)], es igual al recíproco del tiempo necesario para que las oscilaciones *libres* disminuyan a  $1/e$  de su energía inicial. Podemos predecir que si un sistema tiene una respuesta de resonancia muy estrecha (medida bien por la amplitud o por la absorción de potencia) la disminución de sus oscilaciones libres serán muy lentas. E inversamente, como es natural, si las oscilaciones libres disminuyen rápida o lentamente la respuesta del oscilador amortiguado es respectivamente ancha o estrecha. ¿Cuál es nuestro criterio para "lento" o "rápido", "ancho" o "estrecho"? Las ecuaciones (4-26) y (4-27) nos dan las respuestas. Podemos decir que la resonancia es estrecha si la anchura es solamente una pequeña fracción de la frecuencia de resonancia, es decir,

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (4-28a)$$

Y podemos decir que la disminución de las oscilaciones libres es lenta si el oscilador pierde sólo una pequeña fracción de su energía en un período de oscilación. Ahora bien, a partir de la ecuación (4-25) tenemos

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\gamma \Delta t$$

Si para  $\Delta t$  ponemos el tiempo  $2\pi/\omega_0$ , que es aproximadamente igual al período de la oscilación amortiguada libre [ecuación (3-40)], tenemos

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{2\pi\gamma}{\omega_0}$$

Así pues, una disminución lenta significa que

$$\frac{2\pi\gamma}{\omega_0} \ll 1 \quad (4-28b)$$

Como  $\gamma = 2\Delta\omega = \omega_0/Q$ , las condiciones descritas por las ecuaciones (4-28 a) y (4-28 b) pueden expresarse a la vez diciendo que la magnitud sin dimensiones  $Q$  debe ser grande.

Esta relación entre la anchura de resonancia de la oscilación forzada y el decremento de las oscilaciones libres es característica de una gran variedad de sistemas físicos oscilantes y no sólo del oscilador mecánico que estamos utilizando aquí como ejemplo. De hecho, siempre que un sistema físico, en oscilación libre, muestre una pérdida exponencial de energía con el tiempo, mostrará también una respuesta a la acción impulsora con característica de resonancia.

## EJEMPLOS DE RESONANCIA

En el curso de nuestros estudios hemos hecho varias referencias de pasada al hecho de que muchos sistemas que, superficialmente al menos, tienen muy poco en común con una masa situada sobre un muelle, presentan, sin embargo, un comportamiento de resonancia semejante. No obstante, al concentrarnos sobre el comportamiento de un sistema mecánico simple, nuestro análisis resultó mucho más detallado y concreto. Ahora ampliaremos nuestro punto de vista otra vez y diremos algo sobre la resonancia en varios sistemas muy diferentes.

Si tuviéramos que ampliar nuestras ideas de este modo, necesitaríamos poder decir en términos más bien generales lo que entendemos por resonancia, y podríamos empezar preguntándonos a nosotros mismos: ¿Cuál es la esencia real del comportamiento del sistema de masa y muelle? Dejando de lado las matemáticas podríamos contestar esto: El sistema es accionado mediante un agente externo, al que se hace variar uno de sus parámetros (la frecuencia). La respuesta del sistema, medida por su amplitud y fase, o por la potencia absorbida, sufre variaciones rápidas en cuanto la frecuencia pasa a través de un cierto valor. La forma de la respuesta está descrita mediante dos magnitudes, una frecuencia  $\omega_0$  y una anchura  $\gamma (= \omega_0/Q)$ , que caracterizan las propiedades distintivas del sistema impulsor. La resonancia es el fenómeno que hace actuar el sistema bajo unas condiciones tales que la interacción entre el agente impulsor y el sistema se ven ampliados a un máximo. Sea cualquiera el criterio particular aplicado, se puede decir que la interacción tiene su máximo en  $\omega_0$  o cerca de este valor y que sus cambios más marcados se presentan en un margen de  $\pm \gamma$  aproximadamente respecto al máximo. Cuando traslademos estas ideas al comportamiento resonante de otros sistemas físicos veremos que las magnitudes que caracterizan una resonancia no

son siempre la frecuencia del poder absorbido y la amplitud. Esto se verá claro en algunos de los ejemplos que discutiremos ahora.

## RESONANCIA ELÉCTRICA

Uno de los sistemas resonantes más familiares e importantes es el sistema eléctrico compuesto por un condensador y una bobina, como se ve en la figura 4-13. El análisis de este sistema tiene una semejanza notable con los sistemas

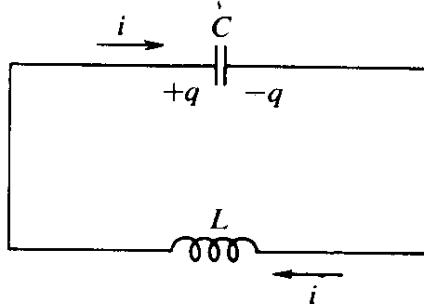


Fig. 4-13. Condensador y autoinducción en serie: sistema eléctrico básico de resonancia.

mecánicos que nos han estado ocupando hasta ahora. Consideremos primero las oscilaciones libres, ignorando de momento cualquier proceso disipativo asociado con la resistencia eléctrica. Para empezar, describiremos brevemente el comportamiento eléctrico esencial de los componentes individuales.

El condensador es un aparato que sirve para almacenar carga eléctrica y la energía potencial electrostática asociada a ella. Su capacidad  $C$  se define como la medida de la carga  $q$  aplicada a las placas del condensador dividida por el valor de la diferencia de tensión que esta carga produce:

$$C = \frac{q}{V_C}$$

Por lo tanto,

$$V_C = \frac{q}{C}$$

La acción de la bobina exige una descripción un poco más detallada. Cuando la corriente es continua la bobina no ofrece oposición al flujo de corriente, pero si ésta varía con el tiempo, resulta que la bobina (que desde ahora en adelante llamaremos autoinducción) actúa oponiéndose a dicho cambio (ley de Lenz). En estas circunstancias existe una diferencia de tensión  $V_L$  entre los extremos de la autoinducción, y esta tensión es proporcional al cambio por

unidad de tiempo de la corriente  $i$ . La autoinducción  $L$  viene definida por la relación

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

Esta ecuación expresa que para obtener una variación de corriente por unidad de tiempo,  $di/dt$ , debe aplicarse entre los extremos de la autoinducción una tensión  $V_L$ .

En un circuito compuesto sólo por estos dos componentes, la suma de  $V_C$  y  $V_L$  debe ser cero, ya que siguiendo un trayecto imaginario a través del condensador de la autoinducción llegaríamos de nuevo al mismo punto del circuito. Así pues, se tiene

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (4-29)$$

Ahora bien, existe una conexión íntima entre  $q$  e  $i$ , debido a que la corriente en el circuito es precisamente la variación de la carga por unidad de tiempo que pasa por un punto cualquiera del mismo. Una corriente  $i$  que fluye durante un tiempo  $dt$  por el conductor unido a una placa del condensador aumentará la carga de dicha placa en la cantidad  $dq = i dt$ , de modo que se tiene

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

De aquí que la ecuación (4-29) puede escribirse

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (4-30)$$

Pero esta expresión es totalmente semejante a la ecuación diferencial básica del movimiento armónico simple para un sistema masa-muelle, en donde  $q$  desempeña el papel de  $x$ , apareciendo  $L$  en lugar de  $m$ , y reemplazando la constante  $k$  por  $1/C$ . Podemos así admitir con confianza la existencia de oscilaciones eléctricas libres tales que

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

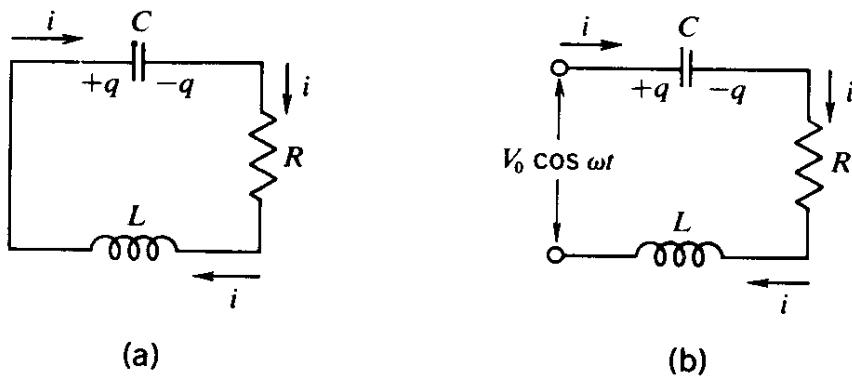


Fig. 4-14. (a) Condensador, autoinducción y resistencia en serie. (b) Condensador, autoinducción y resistencia en serie impulsados por una tensión sinusoidal.

Consideremos ahora la perturbación que produce la introducción de una resistencia de valor  $R$ , como en la figura 4-14(a). Para mantener una tensión  $V_R (= iR)$  aplicada entre los extremos de la resistencia se necesita una corriente  $i$ . Así pues, la condición de caída de tensión neta nula en una vuelta completa del circuito se transforma del siguiente modo:

$$\frac{q}{C} + iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

Es decir,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

o bien

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (4-31)$$

En esta ecuación,  $R/L$  juega exactamente el papel de la constante de amortiguamiento  $\gamma$ , y en dicho circuito la carga sobre las placas del condensador (y la tensión  $V_C$ ) sufrirá unas oscilaciones armónicas exponencialmente amortiguadas.

Finalmente, si el circuito se ve impulsado por una tensión aplicada alterna, tendremos una ecuación típica del oscilador forzado:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{V_0}{L} \cos \omega t \quad (4-32)$$

**Comparar:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4-33)$$

La relación entre las ecuaciones (4-32) y (4-33) resulta incluso más íntima si se considera la energía del sistema. Del mismo modo que  $Fdx$  es el trabajo

realizado por la fuerza impulsora  $F$  en un desplazamiento  $dx$ , así resulta que  $Vdq$  es el trabajo realizado por la tensión impulsora  $V$  cuando pasa a través del circuito una cantidad de carga  $dq$ . Se puede considerar que en la oscilación interviene la transferencia periódica de energía entre el condensador y la autoinducción con una disipación continua de energía en la resistencia. La comparación de las ecuaciones mecánicas y eléctricas sugiere la clasificación de magnitudes análogas, como se ve en la tabla 4-2.

TABLA 4-2: PARÁMETROS DE RESONANCIA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

<i>Sistema mecánico</i>	<i>Sistema eléctrico</i>
Desplazamiento $x$	Carga $q$
Fuerza impulsora $F$	Tensión impulsora $V$
Masa $m$	Autoinducción $L$
Constante de fuerza viscosa $b$	Resistencia $R$
Constante de muelle $k$	Inversa de la capacidad $1/C$
Frecuencia de resonancia $\sqrt{k/m}$	Frecuencia de resonancia $1/\sqrt{LC}$
Anchura de resonancia $\gamma = b/m$	Anchura de resonancia $\gamma = R/L$
Energía potencial $\frac{1}{2}kx^2$	Energía de la carga estática $\frac{1}{2}q^2/C$
Energía cinética $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2 = \frac{1}{2}mv^2$	Energía electromagnética de la carga móvil $\frac{1}{2}L(dq/dt)^2 = \frac{1}{2}Li^2$
Potencia absorbida en la resonancia $F_0^2/2b$	Potencia absorbida en la resonancia $V_0^2/2R$

Hemos estudiado este fenómeno de la resonancia eléctrica con cierta extensión debido a su gran semejanza con la resonancia mecánica. Existen otros ejemplos que, aunque de gran importancia física, no estarán incluidos de modo tan completo en este esquema, y hablaremos de ellos más brevemente.

## RESONANCIA ÓPTICA

Existe una gran cantidad de pruebas de que los átomos se comportan como osciladores con sintonía muy precisa en los procesos de emisión y absorción de luz. Siempre que se produce la emisión de luz en condiciones tales que los átomos radiactivos se ven aislados efectivamente entre sí, como en un gas a baja presión, el espectro está compuesto de líneas o rayas discretas y muy estrechas; es decir, la energía radiada se concentra en unas longitudes de ondas particulares. Un sólido incandescente, por ejemplo el filamento de una lámpara de incandescencia, emite un espectro continuo, pero aquí la situación

es muy diferente, porque todos los átomos de un sólido están estrechamente ligados a sus vecinos, produciendo un cambio drástico en el estado dinámico de los electrones que son responsables principalmente de la radiación visible o próxima a la visible.

Hasta ahora hemos hablado de átomos como osciladores que emiten sus frecuencias características. Pero, ¿cómo se ajusta esta descripción con la de la radiación mediante fotones y con el esquema del proceso radiactivo al admitir que el átomo sufre un salto de tipo cuántico? La respuesta no es obvia. Antes del advenimiento de la teoría cuántica, se podría considerar que un electrón describía una órbita circular dentro de un átomo y que emitía luz a una frecuencia igual a su propia frecuencia orbital. Pero ahora sólo podemos decir que la frecuencia de la luz está definida (mediante  $E = h\nu$ ) por la diferencia de energía entre dos estados del átomo; no podemos seguir identificando la frecuencia por una vibración del propio átomo. Sin embargo, el concepto del átomo como oscilador sigue sobreviviendo en ciertos aspectos. Si se analiza la luz emitida mediante un interferómetro se ve que está compuesta por trenes de ondas de longitud finita. La longitud de los trenes de ondas, dividida por  $c$ , define un tiempo  $\tau$  que corresponde a la vida media de los átomos radiantes en su estado excitado, y el exceso de energía de una serie de átomos excitados disminuye exponencialmente según la ley  $e^{-t/\tau} (= e^{-\gamma t})$  según se va radiando la energía. Ni la descripción mediante fotones ni la descripción mediante ondas solamente nos dice la historia, pero el modelo del átomo como un oscilador amortiguado proporciona una descripción aceptable de algunos aspectos importantes del proceso radiactivo.

Como hemos visto, la concomitancia de una frecuencia natural de oscilación libre es una resonancia de absorción a cierta frecuencia aproximadamente igual. En el caso de la luz visible las frecuencias son demasiado elevadas ( $\approx 10^{15}$  Hz) para poder medirse, pero podemos describir tanto la emisión como la absorción en función de las longitudes de onda características. Probablemente el ejemplo más famoso de absorción por resonancia de la luz lo proporcionan las líneas de Fraunhofer. Estas líneas son aquellas rayas oscuras que se observan en un análisispectral del Sol; se llaman así en honor de Joseph von Fraunhofer, quien dibujó 576 de ellas en 1814 mediante un cuidadoso estudio. La figura 4-15(a) muestra una parte del espectro solar; las líneas de Fraunhofer más señaladas a 5890 y 5896 Å se deben al sodio. La figura 4-15(b) muestra cualitativamente el aspecto que tendría una representación de la intensidad en función de la longitud de onda; la intensidad cae

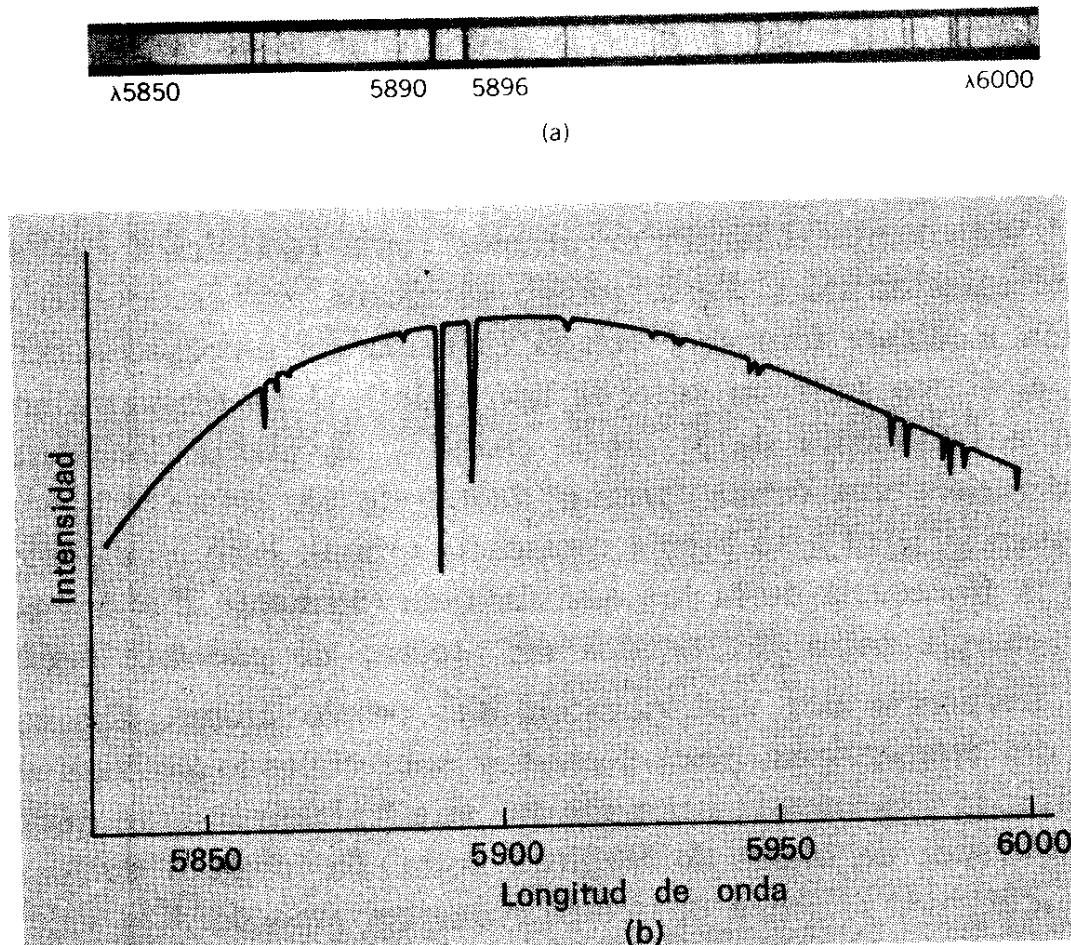


Fig. 4-15. (a) Porción del espectro solar, mostrando las famosas líneas D del sodio en 5890 y 5896 Å. (Según F. A. Jenkins y H. E. White, Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, New York, 1957.) (b) Representación cualitativa de la intensidad del espectro solar en función de la longitud de onda, en el intervalo indicado en (a).

bruscamente cuando se alcanza el valor de la longitud de ondas de las líneas de Fraunhofer, pero no es nula. (No fue Fraunhofer quien observó en primer lugar las líneas de absorción,<sup>1</sup> pero sí fue el que primero se dio cuenta de que la longitud de ondas de algunas de ellas coincidían con las rayas de emisión brillantes producidas por las fuentes o focos de laboratorio. Sin embargo, fueron Kirchhoff y Bunsen en 1861 quienes hicieron una comparación detallada del espectro solar con los espectros de arco y chispa de los elementos puros.)

Podemos estar seguros de que las líneas o rayas de Fraunhofer son el resultado de procesos de absorción por resonancia. Podemos describir este proceso diciendo que la radiación continua procedente de la materia caliente

<sup>1</sup> Fueron observadas inicialmente por W. H. Wollaston en 1802. Un estudio clásico realizado en 1895 por el físico americano H. A. Rowland dio como resultado la clasificación de 1100 rayas. Hoy se han catalogado alrededor de 26 000 rayas entre 3000 y 13 000 Å.

y relativamente densa próxima a la superficie del Sol se ve filtrada selectivamente cuando pasa a través de los átomos existentes en los vapores más tenues de la atmósfera solar. Esto sería más satisfactorio si se pudiese dibujar la forma detallada de una línea de absorción óptica y relacionar su anchura con el tiempo característico ( $= 1/\gamma$ ) correspondiente a la disminución de la emisión espontánea. Sin embargo, esto es extremadamente difícil de hacer. La principal dificultad radica en el efecto Doppler. Existen pruebas directas e indirectas que muestran que el período de vida típico de un átomo excitado que emite luz visible es de  $10^{-8}$  segundos aproximadamente, de modo que  $\gamma$  es próximo a  $10^8$  segundos $^{-1}$ . La frecuencia angular de la luz emitida, definida mediante  $2\pi c/\lambda$ , es aproximadamente igual a  $4 \times 10^{15}$  segundos $^{-1}$ . Así pues, podemos calcular la anchura de línea  $\delta\lambda$  como sigue:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\gamma}{\omega_0} \approx \frac{10^8}{4 \times 10^{15}} \approx 2 \times 10^{-8}$$

(De aquí que  $\delta\lambda = 10^{-4}$  Å para  $\lambda = 5000$  Å.) Pero, a no ser que se tomen especiales precauciones, los átomos emisores tienen movimientos térmicos aleatorios de varios centenares de metros por segundo y así se puede estimar un ensanchamiento por efecto Doppler de las líneas espectrales:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \approx 10^{-6}$$

El efecto Doppler es, pues, aproximadamente, 100 veces mayor que cualquier efecto debido al período de vida verdadero del átomo radiactivo. Los choques interatómicos también perturban la situación, de modo que las formas de la resonancia de las líneas espectrales son más bien materia de interferencia que de observación espectroscópica directa.

## RESONANCIA NUCLEAR

La bibliografía de la física nuclear contiene innumerables ejemplos de resonancias nucleares; la figura 4-16 muestra una de ellas. Este proceso de resonancia nuclear difiere fundamentalmente de las otras resonancias que hemos discutido hasta aquí. El tema de la figura 4-16 es una reacción nuclear; el gráfico muestra la producción relativa de rayos gamma cuando un blanco de flúor se ve bombardeado con protones de energías diferentes próximas a 875 keV. Pero ¿cuál es el sistema resonante? No es el flúor bombardeado sino

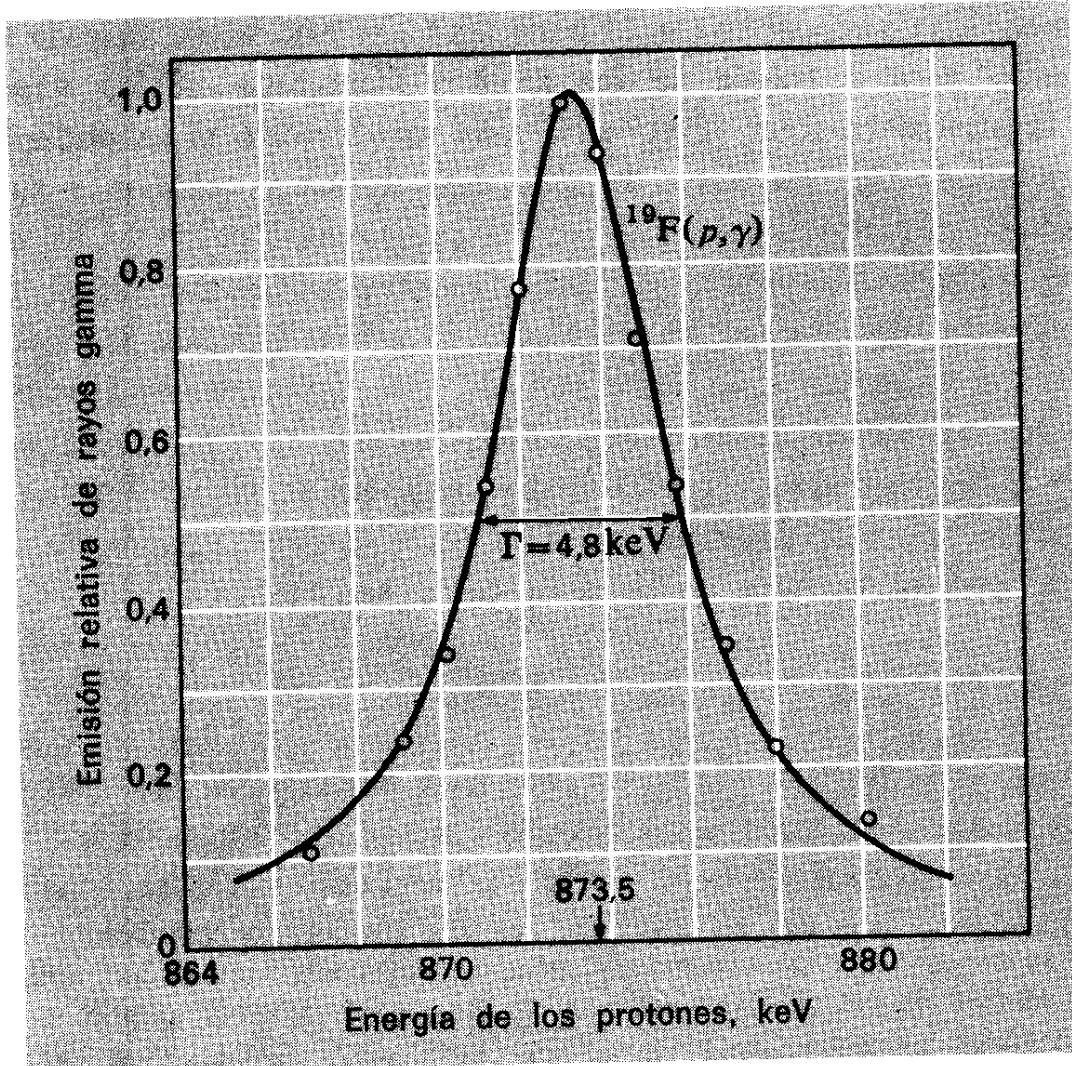
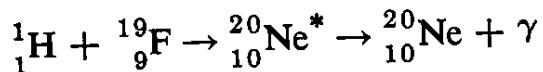


Fig. 4-16. Emisión relativa de rayos gamma en función de la energía de los protones de bombardeo en la reacción  $p + {}^{19}\text{F} \rightarrow {}^{20}\text{Ne} + \gamma$ . [Según datos de R. G. Herb, S. C. Snowden y O. Sala, Phys. Rev. 75, 246 (1949).]

el núcleo compuesto — ${}^{20}\text{Ne}$  en un estado excitado, llamado  ${}^{20}\text{Ne}^*$ , formado cuando un núcleo de flúor captura un protón. Este núcleo compuesto es instable, y uno de sus modos de desintegración es la emisión de rayos gamma. El proceso completo puede escribirse del modo siguiente:



(El subíndice muestra el número de protones que hay en un núcleo, y el índice el número total de protones más neutrones.)

El parámetro controlable, la variable independiente de la interacción, no es una frecuencia, sino la energía del protón bombardeante. Esto define una propiedad básica de resonancia: la energía total del  ${}^{20}\text{Ne}^*$  en su sistema en reposo. La respuesta del sistema se mide, no en función de la amplitud

o de la potencia absorbida, sino en función de la probabilidad de que un protón incidente origine la producción de un rayo gamma. Esta probabilidad puede describirse en función del área efectiva del blanco (o sección eficaz,  $\sigma$ ) que cada núcleo de flúor presenta al haz de protones incidentes. Finalmente, la forma detallada de la curva de resonancia es muy semejante en su forma analítica a la aproximada (para  $Q$  alto) de la curva de potencia absorbida de un oscilador mecánico [ecuación (4-26) y fig. 4-12]. Una resonancia nuclear como la de la figura 4-16 puede describirse correctamente mediante la ecuación

$$\sigma(E) = \frac{\sigma(E_0)}{4(E_0 - E)^2 + \Gamma^2} \quad (4-34)$$

La energía  $E_0$  corresponde entonces al pico de la curva de resonancia, y la anchura total de la curva a la mitad de su altura máxima viene dada por  $\Gamma$ . Definida de este modo, la anchura  $\Gamma$  de la energía es estrictamente análoga a la anchura de frecuencia  $\gamma$  de la resonancia mecánica o eléctrica. La curva a trazo lleno de la figura 4-16 se dibuja de acuerdo con la ecuación (4-34) utilizando los valores apropiados de  $E_0$  y  $\Gamma$ , y puede verse que se ajusta de modo muy aceptable a los datos obtenidos.

## RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

Como último ejemplo de resonancia en otros campos de la física, mencionaremos el proceso según el cual los núcleos atómicos, comportándose como imanes diminutos, pueden cambiar de orientación dentro de un campo magnético. Ello depende de un fenómeno cuántico: los átomos magnéticos están limitados a adoptar sólo algunas posibles orientaciones discretas respecto a un campo magnético de dirección dada. Un protón, tomando un ejemplo concreto, tiene sólo dos orientaciones posibles, una que aproximadamente corresponde con la orientación hacia el norte de una brújula normal, y la otra correspondiente al sentido opuesto. Existe una diferencia de energía bien definida entre ambas orientaciones, correspondientes al trabajo realizado contra las fuerzas magnéticas al hacer girar el imán nuclear de una posición a la otra. Esta diferencia de energía es directamente proporcional a la intensidad del campo magnético en que el propio protón se encuentra. Al iniciar fotones con la energía precisa, puede conseguirse que el protón cambie de una ori-

tación a la otra. Esto puede verificarse inyectando una radiación electromagnética con la frecuencia exactamente correcta; en el caso de protones en un campo de unos 5000 G la frecuencia de resonancia es próxima a 21 MHz. Si todos los protones contenidos en 1 cm<sup>3</sup> de agua oscilasen de este modo podrían llegar a producir (a través de la inducción electromagnética) una tensión fácilmente detectable en una bobina de prueba o testigo. Si se mantuviese constante el campo magnético, se vería esta señal como una función resonante de la frecuencia de la radiación inyectada. Sin embargo, es mucho más conveniente utilizar una radiofrecuencia constante y claramente definida y hacer variar la intensidad del campo magnético aplicado  $B$ . El valor de la señal de resonancia magnética nuclear puede expresarse entonces como una función resonante de la intensidad del campo:

$$V(B) = \frac{V_0}{\frac{4(B_0 - B)^2}{(\Delta B)^2} + 1} \quad (4-35)$$

siendo  $B_0$  la intensidad del campo en la resonancia exacta y  $\Delta B$  la anchura de la resonancia a la mitad de la altura.

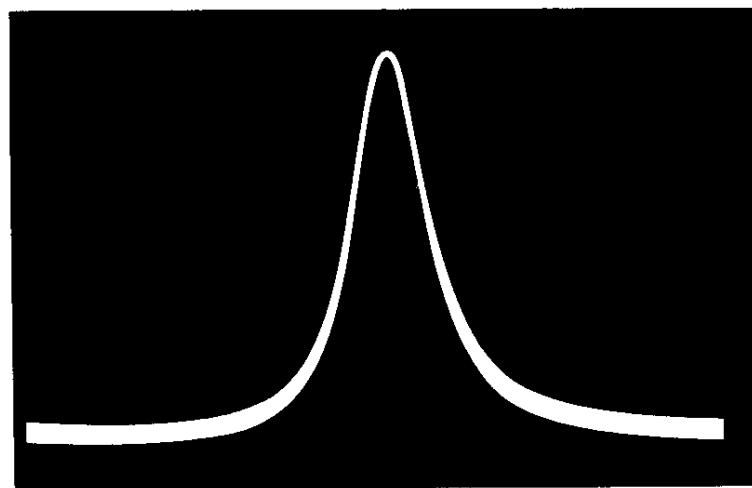


Fig. 4-17. Línea de la resonancia magnética de los protones en agua que contiene  $MnSO_4$  como catalizador paramagnético y obtenida a partir del componente de la señal de inducción nuclear que corresponde a la absorción. La fotografía corresponde a la traza de un oscilador de rayos catódicos con la deflexión vertical procedente de la señal ampliada y rectificada y la horizontal correspondiendo a valores diferentes del campo constante. Según Nobel Lectures: Physics (1942-62). Elsevier, Amsterdam, 1964.

Debido a investigaciones totalmente independientes sobre estos fenómenos, recibieron el Premio Nobel de Física, en 1952, F. Bloch y E. M. Purcell. La figura 4-17 corresponde a la exposición que Bloch hizo en aquel tiempo al recibir dicho premio.

## OSCILADORES ANARMÓNICOS

Hasta aquí en este capítulo todo lo escrito se parece mucho a una historia afortunada. Todo funciona bien. Escribimos una ecuación diferencial y en todos los casos obtenemos una solución analítica que la cumple exactamente. Hemos señalado sistemas físicos reales que aparentemente se comportan de modo perfecto con nuestro modelo matemático muy sencillo. ¿Es realmente la naturaleza tan acomodaticia? La respuesta es que, en ciertos casos, suficientemente numerosos y variados como para tener una gran importancia física, un sistema puede realmente estar representado con notable exactitud por un oscilador amortiguado con una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento y una fuerza resistente proporcional a la velocidad. Pero este caso es realmente una gran suerte y de hecho estamos trazando un camino demasiado estrecho. Para apreciar cuán especiales y favorables son las situaciones que hemos estudiado veremos brevemente la repercusión que tiene la modificación de las ecuaciones del movimiento.

Nuestra ecuación original para la oscilación libre de la masa en un muelle sin amortiguamiento fue la siguiente:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Esta es válida si el muelle obedece una relación lineal (ley de Hooke) para cualquier valor del alargamiento o de la compresión. Pero no hay ningún muelle real que se comporte de este modo. Muchos muelles necesitan utilizar una fuerza ligeramente diferente para producir un alargamiento dado o una compresión del mismo valor. La asimetría más sencilla de este tipo está representada por un término en  $F$  proporcional a  $x^3$ . También puede ocurrir que el muelle sea simétrico respecto a los desplazamientos positivos y negativos pero que no exista una estricta proporcionalidad entre  $F$  y  $x$ . El efecto simétrico más sencillo de este tipo está descrito por un término en  $F$  proporcional a  $x^2$ . Las ecuaciones del movimiento en estos casos pueden escribirse del modo siguiente:

$$\text{no lineal, asimétrico: } m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + \alpha x^3 = 0 \quad (4-36 \text{ a})$$

$$\text{no lineal, simétrico: } m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + \beta x^2 = 0 \quad (4-36 \text{ b})$$

Si buscamos una solución de la forma  $x = A \cos \omega_0 t$  en cualquiera de ambas ecuaciones anteriores encontraremos que no vale dicha solución; el movimiento deja de ser describible por una vibración armónica de una sola frecuencia  $\omega_0$ . En su lugar tenemos lo que se denomina un oscilador anarmónico. El movimiento sigue siendo periódico, en el sentido de que (admitiendo que no hay amortiguamiento) un estado dado del movimiento se vuelve a presentar a intervalos iguales  $T = 2\pi/\omega_0$ , pero en lugar de la relación  $x = A \cos \omega_0 t$  vemos que se necesita ahora una serie infinita de armónicos de  $\omega_0$  para describir el movimiento; es decir, debemos poner

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \delta_n)$$

con objeto de tener una forma de  $x$  que satisfaga la ecuación diferencial.

De modo semejante, una fuerza resistiva que varíe en la forma  $v^2$  o  $v^3$  en lugar de  $v$  hace imposible una descripción analítica clara y simple del movimiento de un oscilador amortiguado.

¿Qué ocurre si se somete un oscilador con términos no lineales (en la fuerza restauradora, en la fuerza amortiguadora o en ambas) a una fuerza impulsora sinusoidal? No intentaremos desarrollar la respuesta y en su lugar la dejaremos como un tema de consideración para el lector. Tomemos, por ejemplo, un oscilador cuyas oscilaciones libres vengan descritas por la ecuación (4-36 a) adicionándole una fuerza viscosa pura (proporcional a  $dx/dt$ ) y admitamos una fuerza impulsora  $F = F_0 \cos \omega t$ . Admitamos que  $\alpha x^2 \ll kx$ , pongamos  $k/m = \omega_0^2$ , y veamos si se puede determinar la frecuencia o frecuencias  $\omega$  para las cuales el sistema presenta un comportamiento de resonancia. Después de investigar este problema el lector se dará cuenta de que el oscilador armónico simple recibe correctamente este nombre y se apreciará por qué los físicos lo utilizan como modelo de un sistema vibrante siempre que puedan justificarse aceptablemente.

## PROBLEMAS

- 4-1 Construir una tabla, que cubra el intervalo más amplio posible, de sistemas resonantes que se presentan en la naturaleza. Indicar el orden de magnitud de (a) el tamaño físico de cada sistema, y (b) su frecuencia de resonancia.

4-2 Considerar el procedimiento de resolver el movimiento de estado estacionario de un oscilador forzado si la fuerza impulsora es de la forma  $F = F_0 \sin \omega t$  en lugar de  $F_0 \cos \omega t$ .

4-3 Un objeto de masa 0,2 kg se cuelga de un muelle cuya constante es 80 N/m. El cuerpo se somete a una fuerza resistente dada por  $-bv$ , siendo  $v$  su velocidad (m/seg) y  $b = 4 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \text{ seg}$ .

(a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema y hallar su período.

(b) Se somete el objeto a una fuerza impulsora sinusoidal dada por  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ , siendo  $F_0 = 2N$  y  $\omega = 30 \text{ seg}^{-1}$ . En estado estacionario, ¿cuál es la amplitud de la oscilación forzada?

4-4 Se conecta un bloque de masa  $m$  a un muelle cuyo otro extremo se mantiene fijo. Existe también un mecanismo de amortiguamiento viscoso. Sobre este sistema se han realizado las siguientes observaciones:

(1) Si se empuja horizontalmente el bloque con una fuerza igual a  $mg$ , la compresión estática del muelle es igual a  $h$ .

(2) La fuerza resistente viscosa es igual a  $mg$  si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida  $u$ .

(a) Para este sistema completo (en el que se incluye tanto el muelle como el amortiguador) escribir la ecuación diferencial que rige las oscilaciones horizontales de la masa en función de  $m$ ,  $g$ ,  $h$  y  $u$ .

Responder a las siguientes cuestiones en el caso de que  $u = 3\sqrt{gh}$ :

(b) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas?

(c) ¿Qué tiempo ha de transcurrir, expresado en forma de un múltiplo de  $\sqrt{h/g}$ , para que la *energía* descienda en un factor  $1/e$ ?

(d) ¿Cuál es el valor  $Q$  de este oscilador?

(e) Este oscilador, inicialmente en su posición de reposo, se pone en movimiento repentinamente cuando  $t = 0$  mediante un proyectil de masa despreciable, pero cantidad de movimiento no nula, que se mueve en sentido positivo de las  $x$ . Hallar el valor del ángulo de fase  $\delta$  en la ecuación  $x = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega t - \delta)$  que describe el movimiento subsiguiente, y representar  $x$  en función de  $t$  para los primeros ciclos.

(f) Si el oscilador se impulsa con una fuerza  $mg \cos \omega t$ , siendo  $\omega = \sqrt{2g/h}$ , ¿cuál es la amplitud de la respuesta del estado estacionario?

4-5 Un péndulo simple tiene una longitud ( $l$ ) de un metro. En vibración libre la amplitud de su oscilador disminuye en un factor  $e$  en 50 oscilaciones. El péndulo se coloca en vibración forzada moviendo su punto de suspensión horizontalmente con un movimiento armónico simple de amplitud un milímetro.

(a) Demostrar que si el desplazamiento horizontal de la lenteja del péndulo es  $x$ , y el desplazamiento horizontal del soporte es  $\xi$ , la ecuación del movimiento de dicha lenteja en el caso de oscilaciones pequeñas es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} x = \frac{g}{l} \xi$$

Resolver esta ecuación para el caso de movimientos estacionarios si  $\xi = \xi_0 \cos \omega t$  (poner  $\omega_0^2 = g/l$ ).

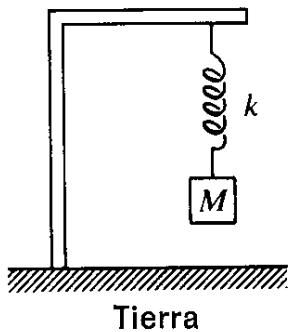
(b) En la resonancia exacta, ¿cuál es la amplitud del movimiento de la lenteja? (En primer lugar utilizar la información dada para hallar  $Q$ .)

(c) ¿Para qué frecuencias angulares es la amplitud la mitad de su valor de resonancia?

**4-6** Imaginemos un sismógrafo sencillo compuesto por una masa  $M$  colgada mediante un muelle de un montaje rígido sujeto a la Tierra, tal como se indica. La fuerza del muelle y la fuerza amortiguadora dependen del desplazamiento y de la velocidad relativa de la masa respecto a la superficie de la Tierra, pero la aceleración que tiene significado dinámico es la aceleración de  $M$  relativa a las estrellas fijas.

(a) Utilizando  $y$  para denominar el desplazamiento de  $M$  respecto a la Tierra y  $\eta$  para designar el desplazamiento de la propia Tierra, demostrar que la ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = - \frac{d^2\eta}{dt^2}$$



(b) Hallar el valor de  $y$  (vibración de estado estacionario) si  $\eta = C \cos \omega t$ .  
 (c) Dibujar un esquema de la amplitud  $A$  del desplazamiento  $y$  en función de  $\omega$  (suponiendo que  $C$  es el mismo para todos los valores de  $\omega$ ).

(d) Un sismógrafo típico de período largo tiene un período de unos 30 seg y un  $Q$  de 2 aproximadamente. Como resultado de un terremoto violento la superficie de la Tierra puede oscilar con un período de unos 20 minutos y con

una amplitud tal que la aceleración máxima sea aproximadamente  $10^{-9}$  m/seg<sup>2</sup>. ¿Cuál será el menor valor de  $A$  que sea observable si ha de ser detectado por el sismógrafo?

4-7 Consideremos un sistema con una fuerza amortiguadora que sufre unas oscilaciones forzadas con frecuencia angular  $\omega$ .

(a) ¿Cuál es la energía cinética instantánea del sistema?

(b) ¿Cuál es la energía potencial instantánea del sistema?

(c) ¿Cuál es el cociente entre la energía cinética media y la energía potencial media? Expresar la respuesta en función del cociente  $\omega/\omega_0$ .

(d) ¿Para qué valor o valores de  $\omega$  son iguales la energía cinética media y la energía potencial media? ¿Cuál es la energía total del sistema en estas condiciones?

(e) ¿Cómo varía la energía total del sistema con el tiempo para un valor arbitrario de  $\omega$ ? ¿Para qué valor o valores de  $\omega$  es constante la energía total en el tiempo?

4-8 Se somete una masa  $m$  a una fuerza resistente  $-bv$  que no es una fuerza restauradora como las que ejercen los muelles.

(a) Demostrar que la forma de su desplazamiento en función del tiempo es

$$x = C - \frac{v_0}{\gamma} e^{-\gamma t}$$

en donde  $\gamma = b/m$ .

(b) Para  $t = 0$  la masa está en reposo en la posición  $x = 0$ . En ese instante se pone en funcionamiento una fuerza impulsora  $F = F_0 \cos \omega t$ . Hallar los valores de  $A$  y de  $\delta$  en la solución de estado estacionario  $x = A \cos(\omega t - \delta)$ .

(c) Escribir la solución general [suma de las partes (a) y (b)] y hallar los valores de  $C$  y de  $v_0$  mediante las condiciones  $x = 0$  y  $dx/dt = 0$  para  $t = 0$ . Hacer un esquema de  $x$  en función de  $t$ .

4-9 (a) Un oscilador amortiguado forzado de masa  $m$  tiene un desplazamiento variable con el tiempo dado por  $x = A \sin \omega t$ . La fuerza resistente es  $-bv$ . A partir de esta información calcular cuánto trabajo se realiza contra la fuerza resistente durante un ciclo de oscilación.

(b) En el caso de una frecuencia impulsora  $\omega$  menor que la frecuencia natural  $\omega_0$ , dibujar los gráficos correspondientes de la energía potencial, la energía cinética y la energía total del oscilador en un ciclo completo. Cuidar que se señalen los puntos e intersecciones importantes con los valores de su energía y tiempo.

4-10 La potencia de entrada para mantener las vibraciones forzadas puede calcularse observando que esta potencia es la velocidad media con que se hace el trabajo contra la fuerza resistente  $-bv$ .

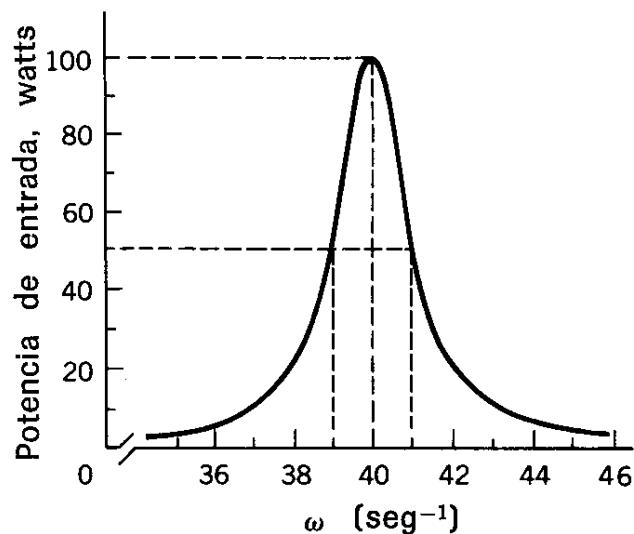
- (a) Comprobar por sí mismo que la velocidad instantánea de realización de trabajo contra esta fuerza es igual a  $bv^2$ .
- (b) Utilizando la ecuación  $x = A \cos(\omega t - \delta)$ , demostrar que la velocidad media con que se realiza el trabajo es  $b\omega^2 A^2/2$ .
- (c) Sustituir el valor de  $A$  para cualquier frecuencia arbitraria y a partir de aquí obtener la expresión de  $\bar{P}$  según se desprende de la Ec. (4-23).

**4-11** Consideremos un oscilador amortiguado con  $m = 0,2$  kg,  $b = 4$  N·m<sup>-1</sup> seg y  $k = 80$  N/m. Supóngase que este oscilador se ve impulsado por una fuerza  $F = F_0 \cos \omega t$ , siendo  $F_0 = 2$  N y  $\omega = 30$  seg<sup>-1</sup>.

- (a) ¿Cuáles son los valores  $A$  y  $\delta$  de la respuesta de estado estacionario descrita por  $x = A \cos(\omega t - \delta)$ ?
- (b) ¿Cuánta energía se ve disipada contra la fuerza resistente en un ciclo?
- (c) ¿Cuál es la potencia media de entrada?

**4-12** Un objeto de masa 2 kg cuelga de un muelle de masa despreciable. El muelle se alarga en 2,5 cm cuando se le sujeta dicho objeto. El extremo superior del muelle se hace oscilar hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple de amplitud 1 mm. La  $Q$  del sistema es 15.

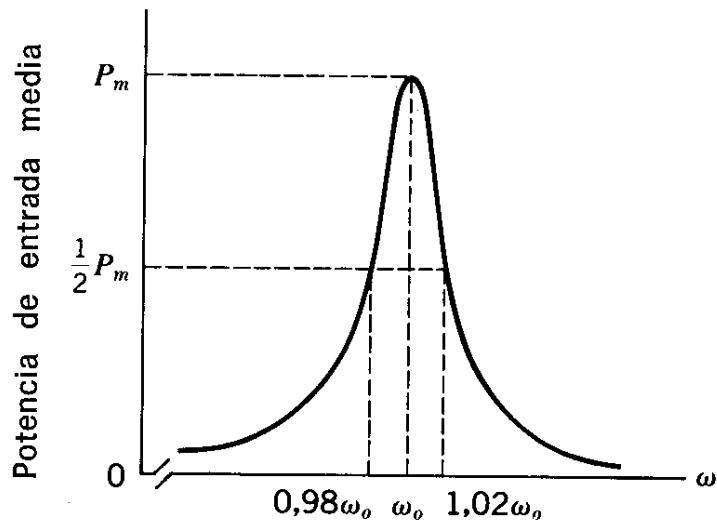
- (a) ¿Cuál es  $\omega_0$  para este sistema?
- (b) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación formada para  $\omega = \omega_0$ ?
- (c) ¿Cuál es la potencia media de entrada para mantener la oscilación formada a una frecuencia 2 % mayor que  $\omega_0$ ? [Está justificado el empleo de la fórmula aproximada Ec. (4-26).]



**4-13** El gráfico muestra la curva de resonancia de potencia de un determinado sistema mecánico cuando se ve accionado por una fuerza  $F_0 \sin \omega t$ , en donde  $F_0 = \text{constante}$  y  $\omega$  es variable.

- (a) Hallar los valores numéricos de  $\omega_0$  y  $Q$  para este sistema.  
 (b) Se suprime la fuerza impulsora. ¿Después de cuántos ciclos de oscilación libre ha descendido la energía del sistema a  $1/e^5$  de su valor inicial? ( $e = 2,718$ .) (Con buena aproximación, el período de la oscilación libre puede hacerse igual a  $2\pi/\omega_0$ .)

4-14 La figura muestra la potencia media de entrada  $\bar{P}$  en función de la frecuencia impulsora en el caso de una masa situada sobre un muelle con amortiguamiento. (Fuerza impulsora =  $F_0 \operatorname{sen} \omega t$ , siendo  $F_0$  constante y  $\omega$  variable.) La  $Q$  es suficientemente elevada para que la potencia media de entrada, que es máxima para  $\omega_0$ , disminuya hasta la mitad del máximo para las frecuencias  $0,98 \omega_0$  y  $1,02 \omega_0$ .



- (a) ¿Cuál es el valor numérico de  $Q$ ?  
 (b) Si se suprime la fuerza impulsora, la energía disminuye de acuerdo con la ecuación

$$E = E_0 e^{-\gamma t}$$

¿Cuál es el valor de  $\gamma$ ?

- (c) Si se elimina la fuerza impulsora, ¿qué fracción de energías se pierde por ciclo?

Se construye un sistema nuevo en el que se duplica la constante del muelle, pero se mantiene sin variar la masa y el medio viscoso, y se aplica la misma fuerza impulsora  $F_0 \operatorname{sen} \omega t$ . En función de las magnitudes correspondientes del sistema original hallar los siguientes valores:

- (d) La nueva frecuencia de resonancia  $\omega'_0$ .  
 (e) El nuevo factor de calidad  $Q'$ .  
 (f) La potencia de entrada media máxima  $\bar{P}'_{máx}$ .  
 (g) La energía total del sistema en la resonancia,  $E'_0$ .

4-15 Se observa que las oscilaciones libres de un sistema mecánico tienen una cierta frecuencia angular  $\omega_1$ . El mismo sistema, cuando se ve accionado por

una fuerza  $F_0 \cos \omega t$  (en donde  $F_0 = \text{constante}$  y  $\omega$  es variable), tienen una curva de resonancia de potencia cuya anchura de la frecuencia angular a potencia mitad del máximo es  $\omega_1/5$ .

(a) ¿Para qué frecuencia angular se produce la máxima potencia de entrada?

(b) ¿Cuál es el valor  $Q$  del sistema?

(c) El sistema se compone de una masa  $m$  sobre un muelle de constante  $k$ . En función de  $m$  y  $k$ , ¿cuál es el valor de la constante  $b$  en el término resistivo —  $bv$ ?

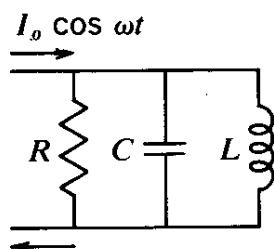
(d) Dibujar la curva de respuesta de la amplitud, marcando algunos puntos característicos sobre la misma.

**4-16** En el caso del sistema eléctrico de la figura, hallar

(a) La frecuencia de resonancia,  $\omega_0$ .

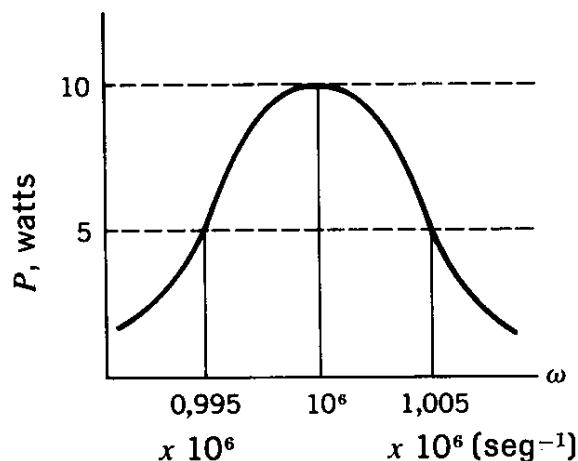
(b) La anchura de resonancia,  $\gamma$ .

(c) La potencia absorbida en la resonancia.



**4-17** El gráfico indica la potencia media absorbida por un oscilador cuando se ve impulsada por una fuerza de valor constante, y frecuencia angular variable  $\omega$ .

(a) En la resonancia justa, ¿cuánto trabajo por ciclo se efectúa contra la fuerza resistente? (Período =  $2\pi/\omega$ .)



(b) A la resonancia justa, ¿cuál es la energía mecánica total  $E_0$  del oscilador?

(c) Si se elimina la fuerza impulsora, ¿cuántos segundos transcurren antes de que la energía disminuya a un valor  $E = E_0 e^{-1}$ ?

*La vibración de las partículas interconectadas constituye un problema importante y peculiarmente interesante... ha de tener muchas aplicaciones*

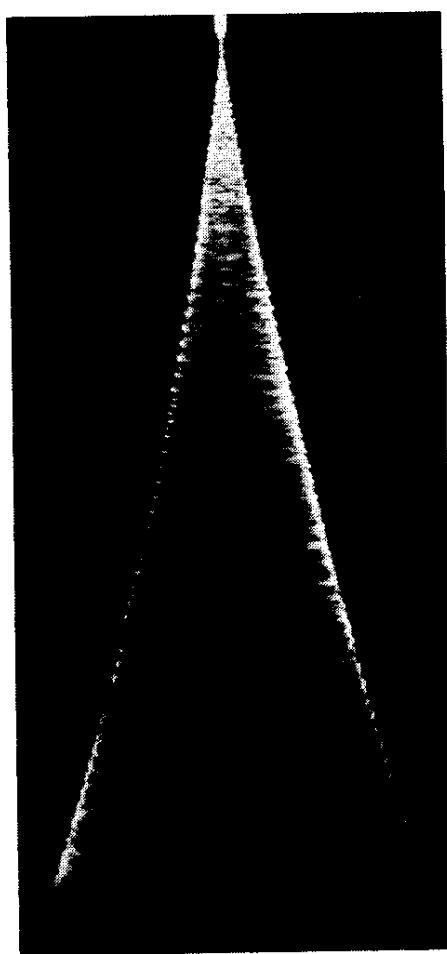
LORD KELVIN, *Baltimore Lectures* (1884)

# Osciladores acoplados y modos normales<sup>1</sup>

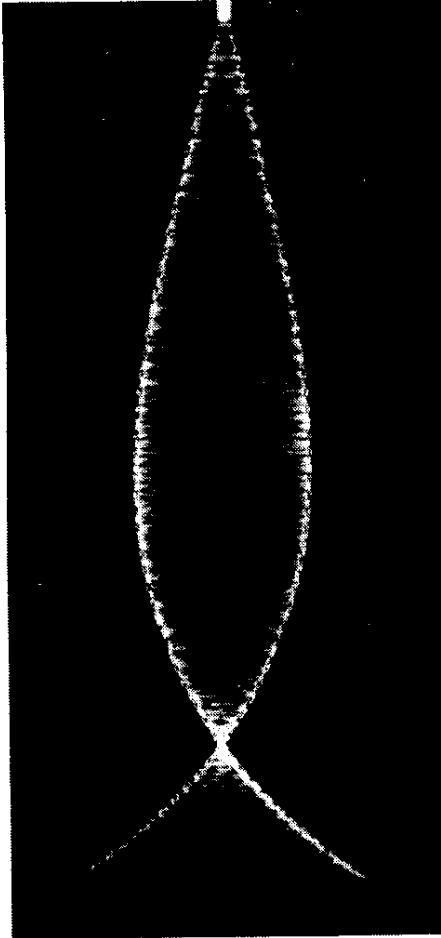
A TRAVÉS DE LOS DOS CAPÍTULOS PRECEDENTES hemos limitado nuestro análisis a sistemas que tienen un tipo solo de vibración libre y que están caracterizados por una sola frecuencia natural. Sin embargo, un sistema físico real es normalmente capaz de vibrar de muchos modos diferentes y puede resonar a muchas frecuencias distintas, como si fuese un piano grande. Denominamos a estas diversas vibraciones características *modos* o, por razones que serán claras más adelante, *modos normales* del sistema. Un ejemplo sencillo es una cadena flexible suspendida de uno de sus extremos. Resulta que existe una completa sucesión de frecuencias para las que cada punto de la cadena vibra con movimientos vibratorios armónicos de la misma frecuencia, de modo que la forma de la cadena permanece constante en el sentido de que los desplazamientos de sus diversas partes siempre están entre sí en razones fijas. Los tres modos primeros (en orden ascendente de frecuencia) para una cadena de este tipo se pueden ver en la figura 5-1. De hecho, este objeto es sólo monodimensional y la diversidad de modos naturales de oscilaciones para objetos bi y tridimensionales es aún mayor.

¿Cómo podremos contar todos estos numerosos modos y calcular sus frecuencias? La clave de esta cuestión radica en el hecho de que un objeto alargado puede considerarse como un gran número de osciladores sencillos aco-

<sup>1</sup> Este capítulo puede saltarse entero si se prefiere pasar directamente al estudio de las vibraciones y de las ondas en medios continuos. Por otra parte, una familiaridad con el contenido del capítulo presente, incluso en términos más bien generales, puede ayudar a apreciar la secuencia, porque el sistema de muchas partículas proporciona el enlace natural entre el oscilador sencillo y el continuo. Y además no es tan formidable matemáticamente como puede parecer a primera vista.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5-1. Los tres primeros modos normales de una cadena vertical con un extremo superior fijo. (La tensión en cada punto la proporciona el peso de la cadena que hay debajo de dicho punto y por ello aumenta linealmente con la distancia al extremo inferior.)

plados juntamente. Por ejemplo, un cuerpo sólido está compuesto de muchos átomos o moléculas. Cada átomo puede comportarse como un oscilador, vibrando alrededor de una posición de equilibrio. Pero el movimiento de cada átomo influye en sus vecinos de modo que, de hecho, todos los átomos del sólido están acoplados entre sí. La cuestión resulta ser entonces: ¿Cómo influye el acoplamiento sobre el comportamiento de los osciladores individuales?

Empezaremos discutiendo con cierto detalle las propiedades de un sistema formado por sólo dos osciladores acoplados. El cambio de uno o dos osciladores puede parecer más bien trivial, pero este nuevo sistema tiene algunas características nuevas y sorprendentes. Más aún, al analizar su comportamiento desarrollaremos esencialmente todas las herramientas teóricas que necesitaremos para manejar el problema de un número arbitrariamente grande de

osciladores acoplados, que es, en último término, lo que nos preocupa. Y esto significa que, a partir de principios muy sencillos, podemos terminar con una apreciación significativa de las propiedades dinámicas de algo tan complicado como es una red cristalina. Éste no es un logro pequeño y saldremos ganando con la pequeña cantidad extra de esfuerzo matemático que necesitará nuestra discusión.

## DOS PÉNDULOS ACOPLADOS

Empecemos con un ejemplo muy sencillo. Tomemos dos péndulos idénticos,  $A$  y  $B$ , y conectémoslos con un muelle cuya longitud libre sea exactamente igual a la distancia entre los péndulos, según se ve en la figura 5-2. Movamos el péndulo  $A$  lateralmente mientras se mantiene  $B$  fijo y luego dejemos ambos en libertad. ¿Qué ocurre?

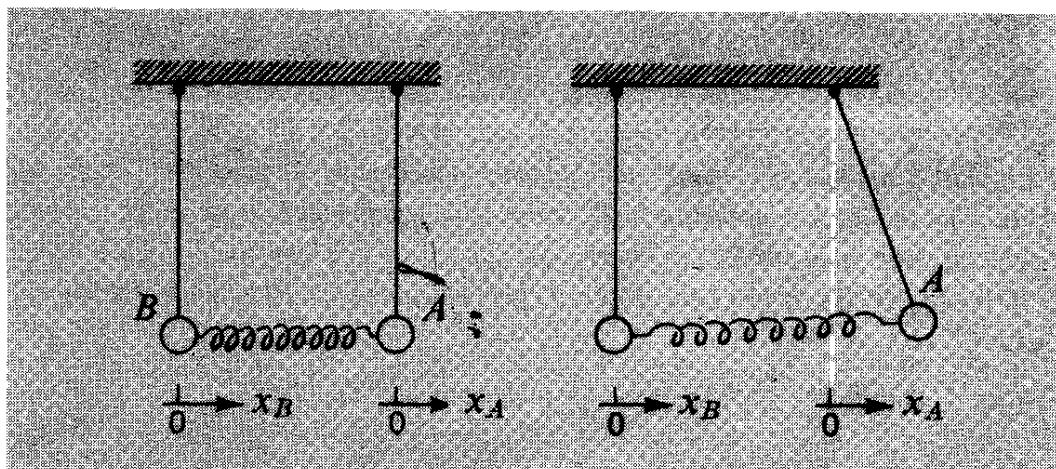


Fig. 5-2. (a) Péndulos acoplados en la posición de equilibrio. (b) Péndulos acoplados, uno de ellos desplazado.

El péndulo  $A$  oscila de lado a lado, pero su amplitud de oscilación disminuye continuamente. El péndulo  $B$ , inicialmente sin desplazar, empieza a oscilar gradualmente y su amplitud crece de modo continuo. Pronto  $A$  y  $B$  tienen amplitudes iguales. Puede pensarse que a partir de ahora ya no existirá ningún cambio adicional. Pero no es así, el proceso continúa. La amplitud de  $A$  continúa disminuyendo y la de  $B$  aumentando hasta que finalmente el desplazamiento de  $B$  es igual (o casi igual) al que se dio originalmente a  $A$ , y el desplazamiento de  $A$  disminuye hacia cero. La condición de partida casi se ha invertido. Ahora ya es fácil predecir lo que sigue. El movimiento de  $B$  se transfiere de nuevo hacia  $A$ , y así continúa. La energía, originalmente dada a  $A$

(y al muelle), no queda confinada a la oscilación de *A*, sino que se transfiere gradualmente a *B* y continúa pasando sucesivamente entre *A* y *B*. La figura 5-3 muestra un registro de movimientos reales de tales sistemas acoplados. Los péndulos, cuyas lentejas eran pilas secas con lamparitas sujetas a ellas, se suspendieron del techo y se fotografiaron desde abajo por una cámara fotográfica que se movía con velocidad constante a lo largo del suelo.

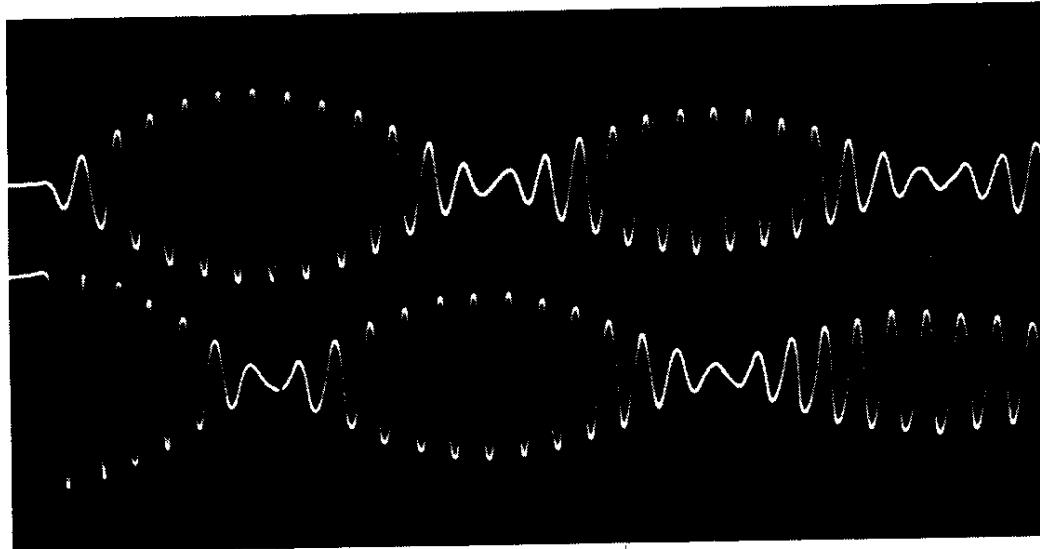


Fig. 5-3. Movimiento de dos osciladores idénticos acoplados (péndulos con lamparitas sujetas a las lentejas). El péndulo número 1 estaba inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. Se observa fácilmente el amortiguamiento del sistema. (Foto por Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

Naturalmente, el responsable del comportamiento que se observa es el muelle de acople. Cuando *A* oscila, el muelle tira y empuja sobre *B*. Proporciona una fuerza impulsora que trabaja sobre *B* y lo pone en movimiento. Al mismo tiempo, el muelle tira y empuja sobre *A*, a veces ayudando y a veces impidiendo su movimiento. Pero cuando *B* empieza a moverse, la acción del muelle sobre *A* más bien impide que ayuda. El trabajo neto realizado sobre *A* durante una oscilación es negativo y la amplitud de *A* disminuye.

Cada uno de los movimientos registrados en la figura 5-3, se parece al caso de las pulsaciones entre dos movimientos armónicos simples de la misma amplitud pero frecuencia diferente. Y esto es precisamente lo que son. Sin embargo, no es sencillo explicarlo con detalle; nuestra apreciación de los fenómenos físicos nos ayudará aquí sólo de modo cualitativo. Pero el problema resulta ser muy sencillo si alteramos un poco las condiciones de partida.

## CONSIDERACIONES DE SIMETRÍA

Supóngase que separamos  $A$  y  $B$  lateralmente en cantidades iguales [fig. 5-4 (a)] y luego los dejamos en libertad. La distancia entre ellos es igual a la longitud del muelle de acoplamiento y, por lo tanto, el muelle no ejerce ninguna fuerza sobre ninguno de los péndulos.  $A$  y  $B$  oscilarán en fase y con amplitudes iguales, manteniendo siempre la misma separación. Cada péndulo podría, igualmente, ser libre (sin acoplar). Cada uno de ellos oscila con su frecuencia natural libre  $\omega_0$  ( $= \sqrt{g/l}$ ). Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned}x_A &= C \cos \omega_0 t \\x_B &= C \cos \omega_0 t\end{aligned}\quad (5-1)$$

siendo  $x_A$  y  $x_B$  los desplazamientos de cada péndulo a partir de su posición de equilibrio. Esto representa un *modo normal* del sistema acoplado. Ambas masas vibran a la misma frecuencia y cada una de ellas tiene una amplitud constante (la misma para ambos).

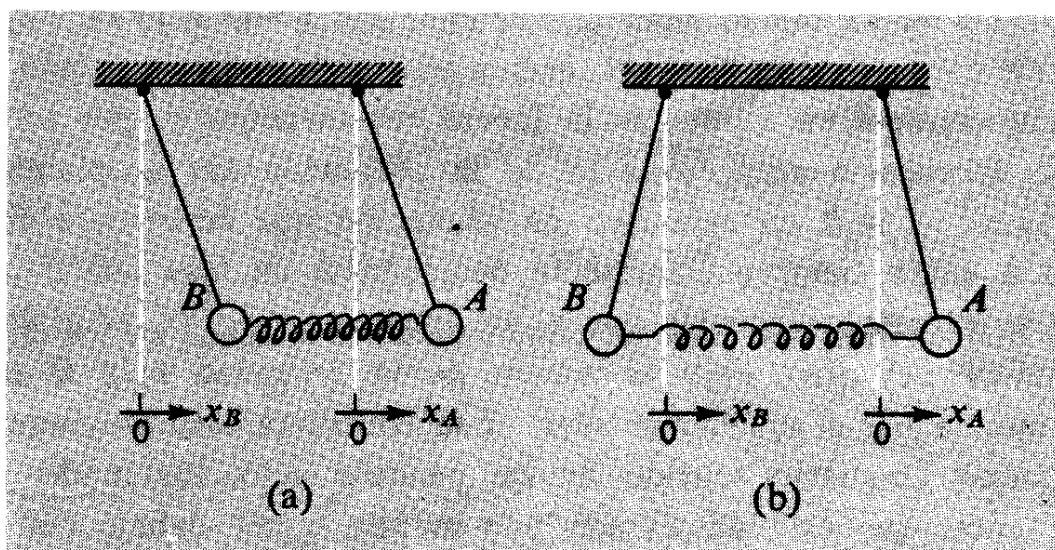


Fig. 5-4. (a) Modo normal inferior de dos péndulos acoplados. (b) Modo normal superior de dos péndulos acoplados.

¿Cuántos modos normales podemos hallar? Existe solamente otro. Desplazemos  $A$  y  $B$  lateralmente en cantidades iguales pero en sentidos opuestos [fig. 5-4 (b)] y dejémoslos luego libres. Ahora, el muelle de acoplamiento está deformado; un semiciclo después se verá comprimido y ejercerá esfuerzos. La simetría del dispositivo nos dice que los movimientos de  $A$  y  $B$  serán las imágenes especulares uno del otro.

Si los péndulos fuesen libres y cualquiera de ellos se desplazara una distancia pequeña  $x$ , la fuerza restauradora sería  $m\omega_0^2 x$ . Pero en el caso presente

el muelle de acoplamiento está estirado (o comprimido) una distancia  $2x$  y ejerce una fuerza restauradora de  $2kx$ , siendo  $k$  la constante del muelle. Así pues, la ecuación del movimiento para  $A$  es:

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + 2kx_A = 0$$

o bien:

$$\frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)x_A = 0$$

en donde hemos puesto  $\omega_c^2 = k/m$ . Ésta es una ecuación para el movimiento armónico simple de frecuencia  $\omega'$  dada por

$$\omega' = (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)^{1/2} = \left( \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)^{1/2}$$

En las condiciones iniciales dadas, su solución es:

$$x_A = D \cos \omega' t \quad (5-2a)$$

El movimiento de  $B$  es la imagen especular de  $A$  y, por consiguiente:

$$x_B = -D \cos \omega' t \quad (5-2b)$$

Cada péndulo oscila con movimiento armónico simple, pero la acción del muelle de acople consiste en aumentar la fuerza restauradora y, por lo tanto, en aumentar la frecuencia respecto a la de la oscilación sin acoplamiento. Los movimientos de  $A$  y  $B$  en este tipo de oscilación que constituye el segundo modo normal, están siempre claramente desplazados en fase  $180^\circ$ .

Quizá sea interesante señalar que si se sujetan uno de los péndulos, la frecuencia angular del otro, bajo la acción de la gravedad más el muelle de acople, es igual a  $(\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$ . Así pues, si se considera este movimiento como el característico en cierto sentido de un péndulo sólo, los modos normales tienen frecuencia que está desplazada por encima o por debajo del valor correspondiente al péndulo aislado.

## SUPERPOSICIÓN DE MODOS NORMALES

En los dos casos anteriores, una vez que empieza el movimiento, y en ausencia de fuerzas de amortiguamiento, continuará sin ningún cambio. No se producirá ninguna transferencia de energía desde un modo de oscilación al otro. Una razón importante para la introducción de estos dos casos fácilmente resueltos es que cualquier movimiento de los péndulos, en que cada uno de

ellos parte del reposo, puede describirse como una combinación de estos dos. Veamos cómo puede hacerse esto.

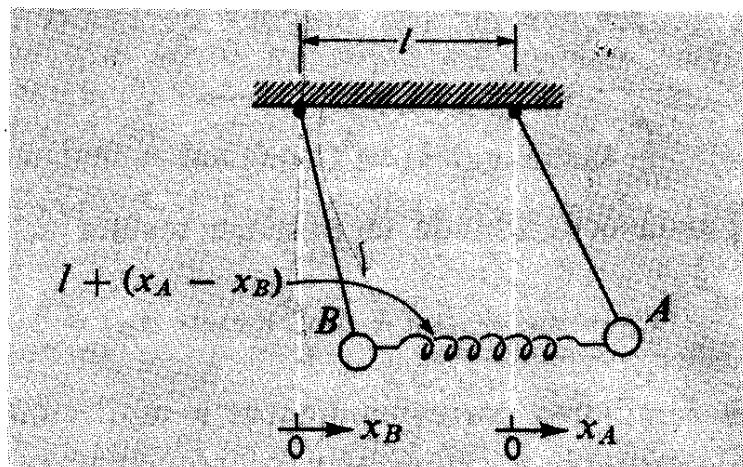


Fig. 5-5. Péndulos acoplados en una configuración arbitraria.

Consideremos un instante arbitrario cuando el péndulo  $A$  esté en  $x_A$  y el péndulo  $B$  en  $x_B$  (fig. 5-5). El muelle está alargado una cantidad  $x_A - x_B$  y, por lo tanto, tira de  $A$  y de  $B$  con una fuerza cuya magnitud es  $k(x_A - x_B)$ . Así pues, la magnitud de la fuerza restauradora sobre  $A$  es:

$$m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B)$$

y sobre  $B$  es:

$$m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B)$$

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento de  $A$  y  $B$  son:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B) &= 0 \\ m \frac{d^2 x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B) &= 0 \end{aligned} \quad (5-3)$$

Poniendo de nuevo  $\omega_c^2 = k/m$ , podemos escribir ambas ecuaciones del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B &= 0 \\ \frac{d^2 x_B}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A &= 0 \end{aligned} \quad (5-4)$$

La primera ecuación, que describe la aceleración de  $A$ , contiene un término en  $x_B$ . Y la segunda ecuación contiene un término en  $x_A$ . Estas dos ecuaciones diferenciales no pueden resolverse independientemente sino que deben

resolverse simultáneamente. Un movimiento dado a  $A$  no permanece confinado en él, sino que influye en  $B$ , y viceversa.

Realmente, estas ecuaciones no son difíciles de resolver. Si las sumamos se tiene :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A + x_B) + \omega_0^2(x_A + x_B) = 0$$

y si restamos la segunda ecuación de la primera resulta

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A - x_B) + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)(x_A - x_B) = 0$$

Éstas son ecuaciones familiares correspondientes a oscilaciones armónicas simples. En la primera la variable es  $x_A + x_B$  y la frecuencia es  $\omega_0$ . En la segunda variable es  $x_A - x_B$  y la frecuencia es  $\omega' = (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)^{1/2}$ . Estas dos frecuencias coinciden precisamente con las correspondientes a los dos modos normales que hemos identificado previamente. Si ponemos  $x_A + x_B = q_1$  y  $x_A - x_B = q_2$ , tenemos dos ecuaciones independientes en  $q_1$  y  $q_2$ :

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = 0$$

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + \omega'^2 q_2 = 0$$

Soluciones posibles (aunque no las más generales) son:

$$\begin{aligned} & \text{(caso especial)} \quad q_1 = C \cos \omega_0 t \\ & \quad q_2 = D \cos \omega' t \end{aligned} \tag{5-5}$$

siendo  $C$  y  $D$  constantes que dependen de las condiciones iniciales. [Puede reconocerse la carencia de generalidad de las ecuaciones (5-5) por el hecho de que hemos impuesto que las fases iniciales sean igual a cero.]

Aquí tenemos dos oscilaciones independientes. Representan otra descripción de los modos normales representadas por las oscilaciones de las variables  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente, y estas variables se llaman, en consecuencia, *coordenadas normales*. Las variaciones en el valor de  $q_1$  se presentan con independencia de las variaciones de  $q_2$  y viceversa.

En función de las coordenadas originales  $x_A$  y  $x_B$ , las soluciones son:

$$\begin{aligned} & \text{(caso especial)} \quad x_A = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}C \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}D \cos \omega' t \\ & \quad x_B = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = \frac{1}{2}C \cos \omega_0 t - \frac{1}{2}D \cos \omega' t \end{aligned} \tag{5-6}$$

Si  $C = 0$ , ambos péndulos oscilan con la frecuencia  $\omega'$ , y si  $D = 0$ , con la frecuencia  $\omega_0$ . Éstas son las frecuencias de los modos normales individuales y se denominan *frecuencias normales*. Vemos que una característica de una frecuencia normal es que tanto  $x_A$  como  $x_B$  pueden oscilar con dicha frecuencia.

Aplicemos ahora las ecuaciones (5-6) al análisis del movimiento acoplado indicado en la figura 5-3. Las condiciones iniciales (para  $t = 0$ ) son las siguientes:

$$x_A = A_0 \quad \frac{dx_A}{dt} = 0 \quad x_B = 0 \quad \frac{dx_B}{dt} = 0$$

Puede señalarse que las condiciones referentes a las velocidades iniciales son cumplidas automáticamente por las ecuaciones (5-6), ya que la derivación respecto a  $t$  nos da términos en  $\sin \omega_0 t$  y  $\sin \omega' t$  solamente, que son cero para  $t = 0$ . A partir de las condiciones referentes a los desplazamientos iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} x_A &= A_0 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D \\ x_B &= 0 = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C = A_0 \quad D = A_0$$

De aquí que con estas condiciones iniciales particulares obtengamos los siguientes resultados, volviendo a sustituir en las ecuaciones (5-6):

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2}A_0(\cos \omega_0 t + \cos \omega' t) \\ x_B &= \frac{1}{2}A_0(\cos \omega_0 t - \cos \omega' t) \end{aligned}$$

las cuales pueden volverse a escribir del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_A &= A_0 \cos\left(\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega' + \omega_0}{2}t\right) \\ x_B &= A_0 \sin\left(\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega' + \omega_0}{2}t\right) \end{aligned} \quad (5-7)$$

Cada una de ellas es una oscilación sinusoidal de frecuencia angular  $(\omega' + \omega_0)/2$ , modulada en amplitud del modo discutido en el capítulo 2. La amplitud asociada con cada uno de los péndulos es cero en el instante en que la amplitud asociada con el otro es un máximo, aunque el *desplazamiento* real del último en un instante cualquiera después dependa del valor instantáneo de  $(\omega' + \omega_0)t/2$ .

## OTROS EJEMPLOS DE OSCILADORES ACOPLADOS

Existen muchos modos diferentes de acoplar dos péndulos u otros osciladores; consideremos algunos de ellos.

En la figura 5-6 mostramos cómo pueden acoplarse dos péndulos a través de una masa auxiliar,  $m \ll M$ , conectada por cuerdas a los alambres de suspensión principales. A partir de la simetría del dispositivo, puede admitirse que los modos normales serán los movimientos para los cuales  $x_B = \pm x_A$ . Si  $x_A = +x_B = q_1$ , la masa  $m$  se eleva y desciende con las masas principales  $M$ , pero si  $x_A = -x_B = q_2$ , la masa  $m$  estará a mayor altura cuando las masas  $M$  tengan su mayor separación, y habrá descendido cuando las masas se aproximen entre sí. Así pues, existen dos frecuencias de modos normales diferentes, ninguna de las cuales (en general) es igual a la de un solo péndulo aislado.

En la figura 5-7 se indican otros cuatro sistemas acoplados mecánicamente. El primer diagrama representa dos péndulos que están montados sobre barras rígidas, cuyos extremos superiores están sujetos a un cable. Los péndulos oscilan en planos perpendiculares al alambre. A menos que los péndulos oscilen en fase, con amplitudes iguales, el alambre de conexión se somete a torsión y proporciona un par de acoplamiento que es proporcional a la diferencia de los desplazamientos angulares.

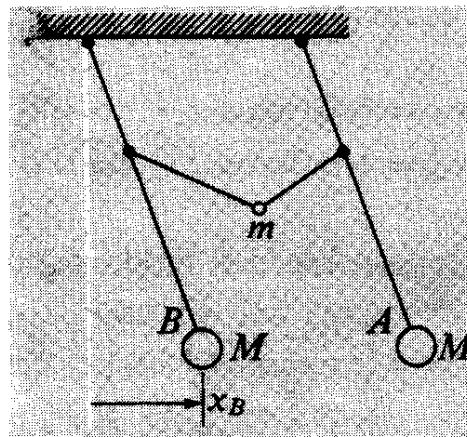


Fig. 5-6. Péndulos acoplados por una masa.

En la figura 5-7 (b) mostramos otro sistema en el cual se suministra o se proporciona el acoplamiento mediante fuerzas restauradoras elásticas. Se montan dos masas pequeñas en los extremos de una hoja de sierra (u otra tira de un metal elástico) que se sujeta en su centro a un soporte. Si una de las masas se empuja hacia un lado, como está indicado, y luego se deja en libertad, el movimiento se transfiere rápidamente a la otra masa a través de una superposición típica de modos normales.

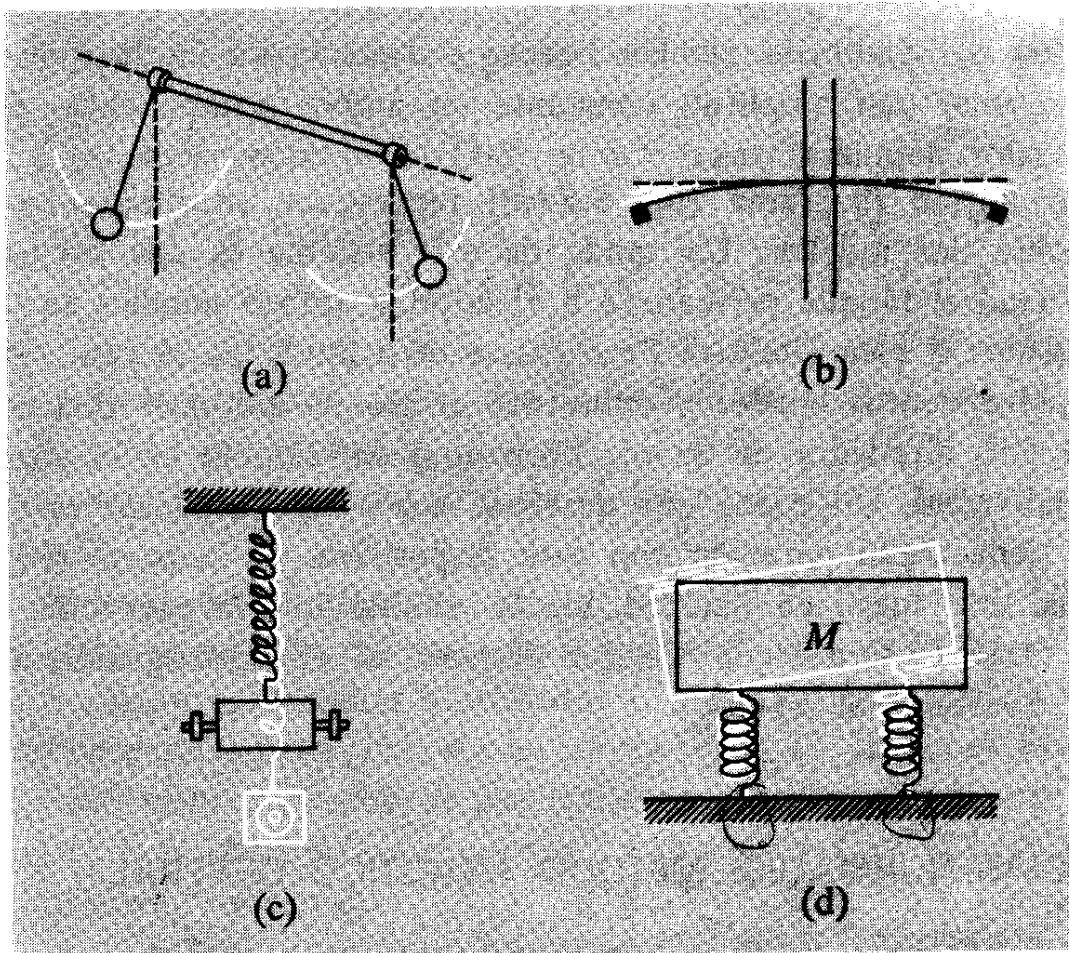


Fig. 5-7. (a) Péndulos rígidamente acoplados mediante una barra de torsión horizontal. (b) Masas en los extremos de una cinta metálica. (c) Péndulo de Wilberforce. (d) Bloque rectangular sobre muelles.

La figura 5-7 (c) muestra un dispositivo curioso conocido como el péndulo de Wilberforce.<sup>1</sup> Una masa con tornillos exteriores ajustables est  suspendida de un muelle espiral. Si la masa se estira hacia abajo y se deja en libertad, el movimiento es al principio una oscilación vertical simple, pero según transcurre el tiempo se amortigua esta oscilación y queda reemplazada por una oscilación rotacional vigorosa de la masa (alrededor de un eje vertical). Entonces la oscilación lineal vertical se inicia de nuevo cuando la oscilación de rotación empieza a debilitarse. Es importante para el funcionamiento de este juguete que los períodos de ambos tipos de movimiento sean casi iguales; los tornillos ajustables son los que permiten conseguir dicha igualdad. El acoplamiento entre los movimientos lineal y angular procede del hecho de que, como se mencionó en el capítulo 3, cuando un muelle espiral se alarga, sus extremos se tuercen un poco, o inversamente si se somete a torsión tiende a alargarse o acortarse. Tirando de la masa hacia abajo y torci ndola a través

<sup>1</sup> Recibe este nombre en honor a L. R. Wilberforce, Profesor inglés de Física, que p blic  un estudio detallado de dicho aparato en 1894.

de un ángulo apropiado, es posible liberar el sistema de modo que oscile en un modo normal con amplitud constante en ambos componentes del movimiento (lineal y angular).

Nuestro último diagrama [fig. 5-7 (d)] representa un bloque rectangular apoyado sobre dos muelles. Un modo de este sistema es una oscilación vertical en la cual el bloque permanece horizontal y ambos muelles se ven igualmente alargados o comprimidos. Pero existe otro modo en el cual los muelles sufren desplazamientos iguales y opuestos; el bloque entonces realiza una oscilación de giro alrededor de un eje horizontal sin cambio en la altura de su centro de gravedad. Un coche que descance sobre sus suspensiones delanteras y traseras tiene algún parecido con este dispositivo. Si la parte delantera se levanta y se deja luego en libertad, puede resultar que la oscilación se transfiera a la parte trasera algún tiempo después, si el amortiguamiento no ha llevado ya el sistema al reposo.

## FRECUENCIAS NORMALES: MÉTODO ANALÍTICO GENERAL

Supóngase que no fuese fácil descubrir los modos normales a partir de consideraciones de simetría o que no fueran fáciles de resolver las ecuaciones diferenciales simultáneas. ¿Cómo podríamos entonces encontrar una solución? Hagamos uso de la característica que hemos estudiado en conexión con las ecuaciones (5-6). Tanto  $x_A$  como  $x_B$  pueden oscilar con una de las frecuencias normales. Tomamos, por tanto,

$$\begin{aligned}x_A &= C \cos \omega t \\x_B &= C' \cos \omega t\end{aligned}\tag{5-8}$$

y veamos si existen valores de  $\omega$  y  $C$  y  $C'$  para las cuales estas expresiones sean soluciones de las ecuaciones (5-4):

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B &= 0 \\ \frac{d^2 x_B}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A &= 0\end{aligned}\tag{5-4}$$

Si existen algunos valores adecuados de  $\omega$ , existirán entonces frecuencias normales. Naturalmente, ya hemos visto que  $C$  y  $C'$  deben tener la misma longitud, pero en nuestro enfoque presente al problema actuaremos como si no conociésemos esto todavía. Además, la igualdad de  $C$  y  $C'$  es cierta única-

mente en el caso muy especial que hemos considerado y no en otros casos más generales.

Sustituyendo las ecuaciones (5-8) en las ecuaciones (5-4), se tiene

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C - \omega_c^2 C' &= 0 \\ -\omega_c^2 C + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C' &= 0 \end{aligned}$$

Para un valor arbitrario de  $\omega$ , éstas constituyen dos ecuaciones simultáneas para las amplitudes desconocidas  $C$  y  $C'$ . Si son ecuaciones independientes, existe solamente una solución  $-C = 0, C' = 0$ , lo cual significa simplemente que para un valor arbitrario de  $\omega$ , las ecuaciones (5-8) no son solución del problema.

Pero si estas dos ecuaciones no son independientes, es decir, si la segunda es simplemente un múltiplo de la primera, entonces tenemos de hecho sólo una ecuación para ambas amplitudes  $C$  y  $C'$ . En este caso,  $C$  puede tener un valor cualquiera. Pero una vez se ha escogido  $C$ , entonces resulta fijo  $C'$ .

¿Para qué valor de  $\omega$  son ambas ecuaciones no independientes y, por tanto, nos permiten obtener soluciones no nulas para  $C$  y  $C'$ ? A partir de la primera ecuación, se tiene:

$$\frac{C}{C'} = \frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2} \quad (5-9a)$$

y, a partir de la segunda:

$$\frac{C}{C'} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2}{\omega_c^2} \quad (5-9b)$$

Si  $C$  y  $C'$  no son ambas cero, los segundos miembros de estas ecuaciones deben ser iguales. Así pues,

$$\frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2}{\omega_c^2}$$

o bien

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)^2 = (\omega_c^2)^2$$

De aquí que

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 &= \pm \omega_c^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \omega_c^2 \pm \omega_c^2 \end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones para  $\omega$ ; llamémoslas  $\omega'$  y  $\omega''$ :

$$\omega'^2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2$$

$$\omega''^2 = \omega_0^2$$

Las raíces cuadradas positivas de estas expresiones son las dos frecuencias normales del sistema; de nuevo hemos llegado otra vez a resultados que no nos resultan familiares.

Podemos obtener ahora la relación entre  $C$  y  $C'$  para cada uno de los modos normales a partir de las ecuaciones (5-9). Para  $\omega = \omega'$ ,

$$\frac{C}{C'} = -1$$

y, para  $\omega = \omega''$ ,

$$\frac{C}{C'} = +1$$

Así pues, hemos llegado a dos formas específicas de las ecuaciones (5-8) que son soluciones de las ecuaciones diferenciales acopladas del movimiento [ecuaciones (5-4)]:

$$\begin{array}{ll} x_A = C \cos \omega_0 t & x_A = D \cos \omega' t \\ x_B = C \cos \omega_0 t & y \quad x_B = -D \cos \omega' t \end{array} \quad (5-10)$$

Como la magnitud de la amplitud es arbitraria y está determinada sólo por las condiciones iniciales, hemos utilizado dos símbolos diferentes (es decir,  $C$  y  $D$ ) para designar las amplitudes asociadas con los modos normales separados. Las ecuaciones diferenciales son lineales (sólo aparecen las primeras potencias de  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $d^2x_A/dt^2$ , y  $d^2x_B/dt^2$ ) y, por lo tanto, la suma de ambas soluciones es también una solución:

$$\begin{array}{ll} (caso especial) & x_A = C \cos \omega_0 t + D \cos \omega' t \\ & x_B = C \cos \omega_0 t - D \cos \omega' t \end{array} \quad (5-11)$$

Otra vez de nuevo hemos obtenido las soluciones previamente dadas por las ecuaciones (5-6).<sup>1</sup> Pero esta vez nuestro método de enfoque ha sido puramente analítico y general, sin acudir previamente a la simetría del sistema.

Completemos esta discusión dando la solución general a las ecuaciones de la oscilación libre de este sistema acoplado. Puede verse fácilmente que las ecuaciones diferenciales (5-4) se cumplen igualmente admitiendo soluciones con fases iniciales no nulas, aunque existe una relación de fase sistemática

<sup>1</sup> Existe un factor 2 que falta en las ecuaciones (5-10) cuando se comparan con las ecuaciones (5-6), pero esto no constituye ninguna diferencia cuando uno fija los valores de los coeficientes mediante los valores iniciales de  $x_A$  y  $x_B$ .

entre  $x_A$  y  $x_B$  en un modo particular. Específicamente, en lugar de las ecuaciones (5-10) podemos, en general, tener las siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{modo inferior: } & x_A = C \cos(\omega_0 t + \alpha) \\ & x_B = C \cos(\omega_0 t + \alpha) \\ \text{modo superior: } & x_A = D \cos(\omega' t + \beta) \\ & x_B = -D \cos(\omega' t + \beta) \end{array} \quad (5-12)$$

La existencia de cuatro constantes ajustables nos permite entonces adaptar estas soluciones a valores arbitrarios de los desplazamientos y velocidades iniciales de ambos péndulos. Esto elimina la restricción de velocidad inicial cero que necesitábamos para considerar que nuestras soluciones anteriores eran casos especiales.

## VIBRACIÓN FORZADA Y RESONANCIA PARA DOS OSCILADORES ACOPLADOS

Hasta aquí hemos considerado meramente las vibraciones *libres* de un sistema de dos osciladores acoplados, descubriendo, por lo tanto, las frecuencias naturales características (sólo dos de ellas) para las cuales el sistema es capaz de vibrar como una unidad. ¿Pero qué ocurre si el sistema se ve impulsado por un agente externo con una frecuencia arbitraria? Nuestra intuición, apoyada por la experiencia real, nos dice que se producen grandes amplitudes de oscilación cuando la frecuencia impulsora es próxima a una de las frecuencias naturales, mientras que a frecuencias alejadas de éstas la respuesta del sistema impulsado es relativamente pequeña. Consideraremos con detalle cómo se presenta este fenómeno a partir de las ecuaciones del movimiento en el caso más sencillo posible, dos péndulos idénticos acoplados con amortiguamiento despreciable, para los cuales ya hemos identificado los modos normales.

Nuestro estudio irá paralelo al análisis del oscilador aislado forzado del capítulo 4. Como en aquel caso, admitiremos que los efectos amortiguadores son lo suficientemente pequeños como para ser ignorados en la ecuación del movimiento, pero que, sin embargo, quizás después de un número muy grande de ciclos de oscilación, los efectos transitorios han desaparecido de modo que el movimiento de cada péndulo se verifica a amplitud constante para la frecuencia de la fuerza impulsora.

Supongamos, entonces, que se aplica al péndulo *A* una fuerza impulsora armónica  $F_0 \cos \omega t$  (por ejemplo, moviendo su punto de suspensión hacia ade-

lante y hacia atrás sinusoidalmente), controlándose el movimiento del péndulo  $B$  solamente por su propia fuerza restauradora y el muelle de acoplamiento. El enunciado de la ley de Newton para el péndulo  $B$  es precisamente el mismo que teníamos al considerar las vibraciones libres, y la ecuación para  $A$  se modifica sólo en que hay que añadirle el término  $F_0 \cos \omega t$ , aunque esta adición representa, naturalmente, un cambio fundamental de la situación física. Nuestras dos ecuaciones del movimiento resultan ser así las siguientes [véanse ecuaciones (5-3) para las ecuaciones de vibración libres]:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B) &= F_0 \cos \omega t \\ m \frac{d^2 x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B) &= 0 \quad \left( \omega_0^2 = \frac{g}{l} \right) \end{aligned}$$

las cuales, dividiéndolas por  $m$ , resultan:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_A}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B &= \frac{F_0}{m} \cos \omega t \\ \frac{d^2 x_B}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A &= 0 \quad \left( \omega_c^2 = \frac{k}{m} \right) \end{aligned}$$

En vez de ocuparnos de  $x_A$  y  $x_B$  separadamente, procederemos introduciendo de una vez las coordenadas normales  $q_1 (= x_A + x_B)$  y  $q_2 (= x_A - x_B)$ , las cuales, como hemos visto, pueden utilizarse para caracterizar el movimiento del sistema como un todo. Añadiendo las ecuaciones diferenciales anteriores se tiene:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (5-13a)$$

Restándolas, se tiene

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega'^2 q_2 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (5-13b)$$

en donde

$$\omega'^2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2$$

La simplificación del problema es notable. Es precisamente como si tuviésemos dos osciladores armónicos de frecuencias naturales  $\omega$  y  $\omega'$ . Podemos claramente describir las soluciones de estado estacionario mediante las ecuaciones

$$q_1 = C \cos \omega t, \text{ en donde } C = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$q_2 = D \cos \omega t, \text{ en donde } D = \frac{F_0/m}{\omega'^2 - \omega^2}$$

Las amplitudes  $C$  y  $D$  presentan exactamente el tipo de comportamiento de resonancia que se ha indicado para un oscilador sencillo en la figura 4-1. Ha-

biéndolo obtenido, podemos extraer la dependencia con la frecuencia de las amplitudes individuales  $A$  y  $B$  de ambos péndulos, para los que tenemos

$$x_A = A \cos \omega t \text{ en donde } A = \frac{1}{2}(C + D)$$

$$x_B = B \cos \omega t \text{ en donde } B = \frac{1}{2}(C - D)$$

Éstas nos dan los siguientes resultados :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 + \omega_c^2) - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega^2)} \quad (5-15)$$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_c^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega^2)}$$

Las variaciones de estas magnitudes con  $\omega$  se indican en la figura 5-8. En la región de frecuencias dominadas por la resonancia inferior, los desplaza-

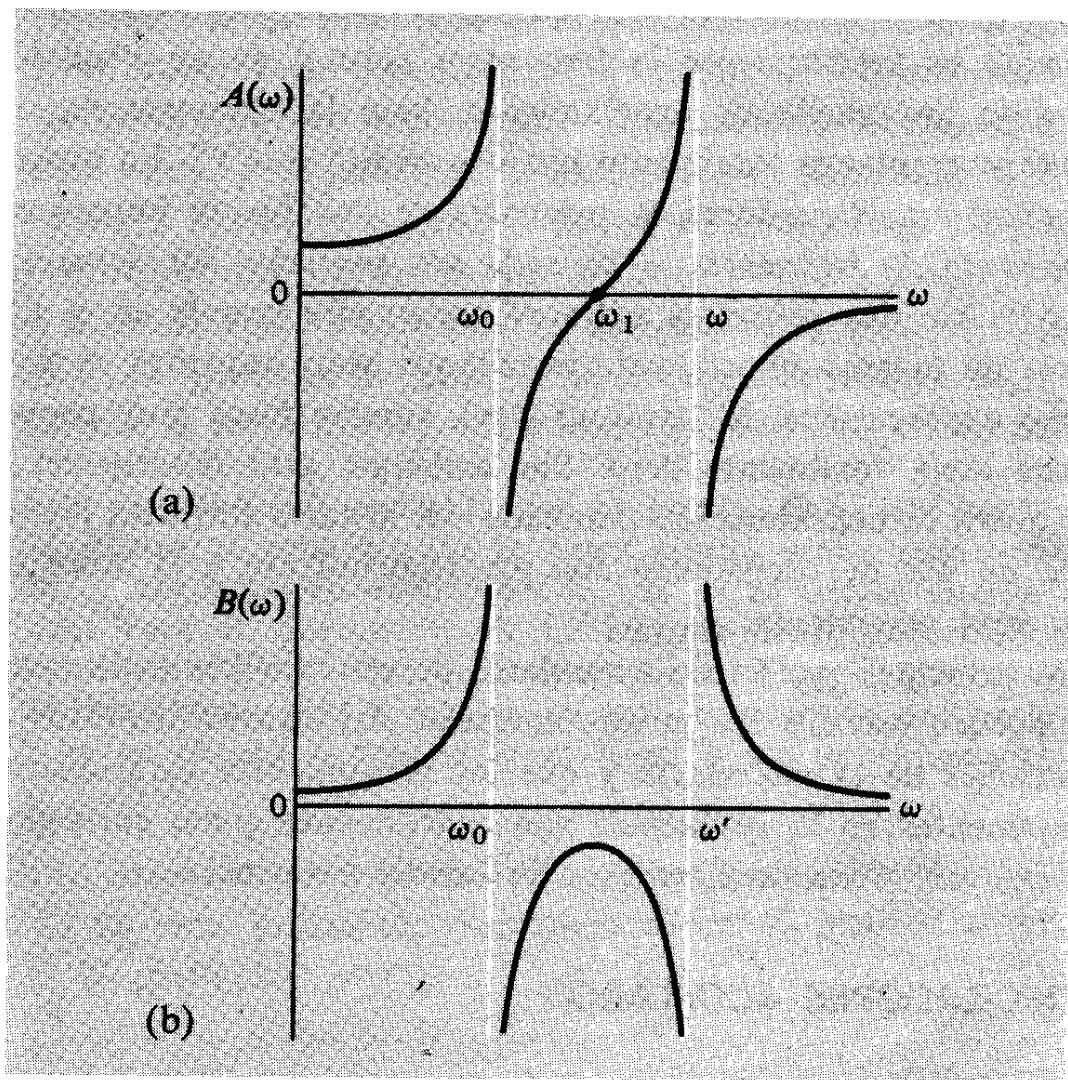


Fig. 5-8. Respuesta forzada de dos péndulos acoplados con amortiguamiento despreciable. Los modos normales tienen frecuencias  $\omega_0$  y  $\omega'$ . (a) Amplitud del primer péndulo en función de la frecuencia impulsora [ $\omega_1 = (\omega_0^2 + \omega'^2)^{1/2}$ ] (b) Amplitud del segundo péndulo en función de la frecuencia impulsora.

mientos de  $A$  y  $B$  son siempre del mismo signo, es decir, están en fase entre sí. En la región de frecuencias dominadas por la resonancia superior, los desplazamientos son de signo opuesto y por tanto están desfasados en  $180^\circ$ . La introducción de un amortiguamiento no nulo conduciría, como con el caso del oscilador sencillo impulsado, a una variación suave de fase con la frecuencia al pasar a través de la resonancia.

Podría comentarse una característica particular de la figura 5-8, porque parece (y es) físicamente imposible. Ésta consiste en el hecho de que a una cierta frecuencia  $\omega_1$  entre las resonancias, tenemos que  $A = 0$  y  $B$  no es cero. A partir de las condiciones admitidas del problema es evidente que la impulsión forzada periódica del péndulo  $B$  depende del movimiento del péndulo  $A$ . En cualquier sistema real sería esencial la presencia de una pequeña oscilación del péndulo  $A$ . La frecuencia  $\omega_1$  a la que se presenta esta situación aparentemente anómala es precisamente la frecuencia natural de un péndulo aislado, teniendo sujeto un muelle de acoplamiento, bajo la circunstancia de que el otro péndulo se mantenga totalmente fijo — $\omega_1 = (\omega_0^2 + \omega_0^2)^{1/2}$ . En ausencia completa de fuerzas amortiguadoras, la presencia de una fuerza impulsora arbitrariamente pequeña de frecuencia  $\omega_1$  causada por pequeñas vibraciones del péndulo  $A$ , produciría una respuesta extraordinariamente grande en el péndulo  $B$ . La existencia de fuerzas amortiguadoras, aunque sean pequeñas, destruiría este caso y, como consecuencia, la amplitud  $A(\omega)$ , aunque fuese muy pequeña cerca de  $\omega_1$ , nunca sería totalmente cero. Sin embargo, esta descripción completa necesitaría ahora la consideración detallada del sistema formado por una combinación de un par de osciladores con amortiguamiento y la complejidad del análisis se vería aumentada.

El punto principal que ha de aprenderse de este análisis es la confirmación de que se pueden escribir los modos normales del sistema acoplado mediante las observaciones de la resonancia y que los movimientos estacionarios de las partes componentes en la resonancia son exactamente como correspondería al mismo sistema en vibración libre para la misma frecuencia.

## VARIOS OSCILADORES ACOPLADOS

Cualquier cuerpo macroscópico real, como un trozo de material sólido, contiene muchas partículas y no dos solamente; éste es el motivo más fuerte que tenemos para considerar el problema de un número arbitrario de osciladores semejantes acoplados juntos. El trabajo de las secciones previas nos ha prepa-

rado el camino. Nuestra investigación de este sistema nos puede llevar a una descripción de las oscilaciones de un medio continuo, y de aquí, mediante una transición sencilla, al análisis de los movimientos ondulatorios.

Sería posible para nosotros pasar directamente desde la ley de Newton a una mecánica del continuo.<sup>1</sup> Pero el camino que hemos escogido, vía de los modos de oscilación de los sistemas acoplados, es más rico y, en esencia, es más correcto, porque no existe ninguna cosa semejante a un medio realmente continuo. Más aún, el lector puede estar interesado en saber que nuestro camino presente es el que tomaron precisamente Newton y sus sucesores. Quizá por ello se merece una digresión introductoria.

No mucho tiempo después que Newton, dos miembros de la notable familia Bernoulli (Jean Bernoulli y su hijo Daniel) emprendieron un estudio detallado de la dinámica de una línea de masas conectadas. Demostraron que un sistema de  $N$  masas tiene exactamente  $N$  modos de vibraciones independientes (para el movimiento en una dimensión solamente). Entonces, en 1753, Daniel Bernoulli enunció el principio de superposición para dicho sistema —estableciendo que el movimiento general de un sistema vibrante puede escribirse como una superposición de sus modos normales. (Se recordará que anteriormente, en este capítulo, desarrollamos este resultado para el sistema de dos osciladores.) Con palabras de León Brillouin, que ha tenido una contribución fundamental en la teoría de las vibraciones de las redes cristalinas :<sup>2</sup>

Esta investigación realizada por la familia Bernoulli puede decirse que constituye el principio de la física teórica como constituyente distinto de la mecánica, en el sentido de que es el primer intento de formular leyes para el movimiento de un sistema de partículas en lugar de las correspondientes a una partícula aislada. El principio de superposición es importante, puesto que es un caso especial de una serie de Fourier, y en su tiempo se amplió hasta llegar a ser un enunciado del teorema de Fourier.

(Veremos unas nociones del análisis de Fourier en el capítulo 6.)

Después de este preámbulo volvamos ahora al análisis detallado de un sistema de  $N$  partículas.

<sup>1</sup> Como se mencionó en la nota a pie de página del principio de este capítulo, puede hacerse esto pasando directamente al capítulo 6.

<sup>2</sup> L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*, Dover, Nueva York, 1953.

## N OSCILADORES ACOPLADOS

En nuestro estudio del movimiento de un sistema de dos osciladores, concentraremos nuestra atención a las oscilaciones que pueden expresarse en forma longitudinal. Los movimientos de las lentejas de los péndulos se produjeron a lo largo de la línea que los unía. El tratamiento es muy semejante, como veremos pronto, en el caso de oscilaciones transversales en donde las partículas oscilan en una dirección perpendicular a las líneas que las une. Y como las oscilaciones transversales son más sencillas de visualizar y de mostrar que las oscilaciones longitudinales, analizaremos las oscilaciones transversales de un sistema prototípico de muchas partículas.

Consideremos una cuerda elástica flexible a la que se sujetan  $N$  partículas idénticas, cada una de masa  $m$ , igualmente distanciada una longitud  $l$ . Mantengamos fija la cuerda en dos puntos, uno de ellos a una distancia  $l$  a la izquierda de la primera partícula y el otro a una distancia  $l$  a la derecha de la partícula  $N$  (fig. 5-9).

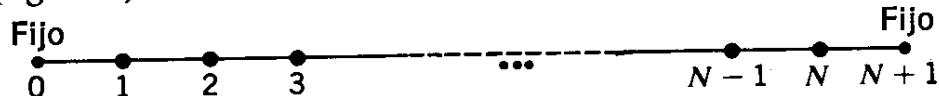


Fig. 5-9. *N partículas equidistantes a lo largo de una cuerda sin masa.*

Las partículas se señalan de 1 a  $N$  o de 0 a  $N + 1$  si incluimos los dos extremos fijos y los consideramos como si fueran partículas con desplazamiento nulo. Si la tensión inicial de la cuerda es  $T$  y si nos limitamos nosotros mismos a desplazamientos transversales pequeños de las partículas, entonces podemos ignorar cualquier aumento de la tensión de la cuerda cuando las partículas oscilan. Supóngase, por ejemplo, que la partícula 1 se desplaza a  $y_1$  y la partícula 2 a  $y_2$  (fig. 5-10); entonces la longitud de la cuerda entre ellas resulta ser  $l' = l/\cos \alpha_1$ . Para  $\alpha_1 \ll 1$  rad,  $\cos \alpha_1 \approx 1 - \alpha_1^2/2$  y  $l' \approx l(1 + \alpha_1^2/2)$ . El aumento en longitud es  $l\alpha_1^2/2$ , y cualquier incremento de tensión que sea proporcional a este valor puede ignorarse en comparación con los términos proporcionales a la primera potencia de  $\alpha_1$ .

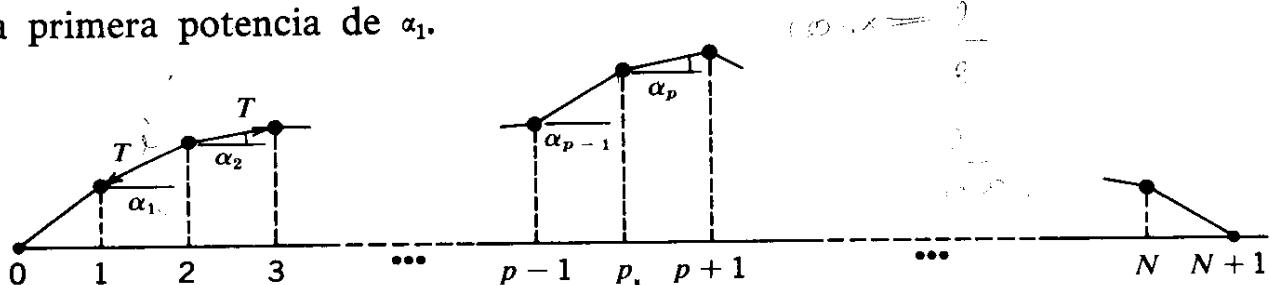


Fig. 5-10. *Diagrama de fuerzas para las masas en una cuerda larga desplazadas transversalmente.*

En la configuración que se muestra en la figura la componente  $x$  resultante de fuerza sobre la partícula 2 es  $-T \cos \alpha_1 + T \cos \alpha_2 = \frac{1}{2}T(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$ , que es una diferencia entre dos potencias de segundo orden en  $\alpha$ . Para valores pequeños de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es muy pequeña y no prestaremos atención sobre dicha diferencia en lo que sigue.

La figura 5-10 muestra una configuración de las partículas en un cierto instante de tiempo durante su movimiento transversal. Nos restringiremos a desplazamientos  $y$  pequeños comparados con  $l$ . La componente  $y$  de la fuerza resultante sobre una partícula típica, por ejemplo la partícula  $p$ , es

$$F_p = -T \sin \alpha_{p-1} + T \sin \alpha_p$$

Los valores aproximados de los senos son:

$$\sin \alpha_{p-1} = \frac{y_p - y_{p-1}}{l}$$

$$\sin \alpha_p = \frac{y_{p+1} - y_p}{l}$$

Por lo tanto,

$$F_p = -\frac{T}{l}(y_p - y_{p-1}) + \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p)$$

y esto debe ser igual a la masa  $m$  multiplicada por la aceleración transversal de la partícula  $p$ . Así pues,

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_p - \omega_0^2(y_{p+1} + y_{p-1}) = 0 \quad (5-16)$$

en donde hemos puesto

$$\frac{T}{ml} = \omega_0^2$$

Podemos escribir una ecuación semejante para cada una de las  $N$  partículas. Así pues, tenemos un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales, una para cada valor de  $p$  de 1 a  $N$ . Recuérdese que  $y_0 = 0$  e  $y_{N+1} = 0$ .

Puede ser interesante considerar los casos especiales sencillos de las ecuaciones (5-16) para  $N = 1$  y  $N = 2$ . Si  $N = 1$ , se tiene

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_1 = 0$$

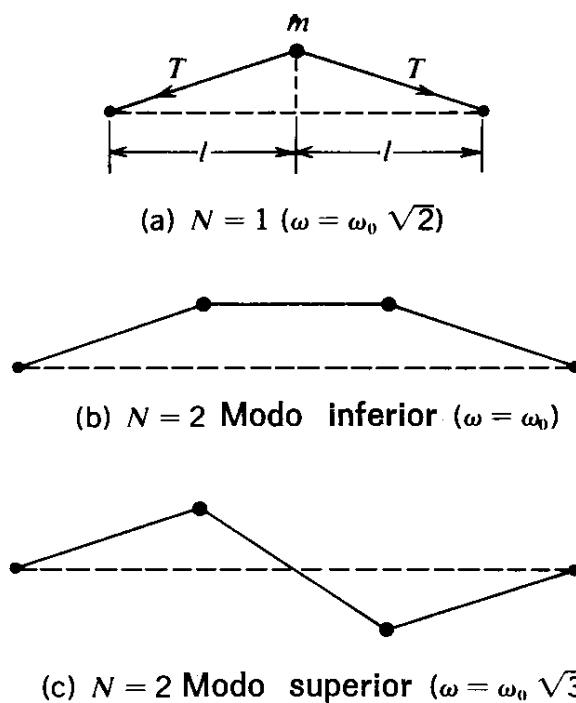


Fig. 5-11. Modos normales de los dos sistemas más sencillos de cuerdas cargadas. (a)  $N = 1$ , en un modo solamente. (b)  $N = 2$ , modo inferior. (c)  $N = 2$ , modo superior.

que es un movimiento armónico transversal de frecuencia angular  $\omega_0\sqrt{2} = (2T/ml)^{1/2}$ , como se puede ver directamente al considerar la figura 5-11 (a). Si  $N = 2$ , se tiene

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\omega_0^2y_1 - \omega_0^2y_2 = 0 \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + 2\omega_0^2y_2 - \omega_0^2y_1 = 0$$

Estas ecuaciones son semejantes a las ecuaciones (5-4) para dos péndulos acoplados, pero ahora tenemos la simplificación de que  $\omega_0 = \omega_c$ , de modo que  $\omega_0^2 + \omega_c^2$  en las ecuaciones (5-4) corresponden a  $2\omega_0^2$ , y  $\omega_c^2$  resulta ser  $\omega_0^2$  aquí. Las frecuencias angulares de los modos normales en este caso están en una relación numérica definida; sus valores reales son  $\omega_0$  y  $\omega_0\sqrt{3}$ . Los modos para  $N = 2$  pueden verse en las figuras 5-11 (b) y (c). La configuración real de las cuerdas hace casi evidente por sí misma la relación entre las frecuencias naturales en este caso, pero en cuanto pasemos a números mayores de partículas los resultados son bastante menos evidentes y debemos recurrir a un tipo más general de análisis.

## CÁLCULO DE MODOS NORMALES PARA $N$ OSCILADORES ACOPLADOS

Aplicaremos básicamente la misma técnica analítica a las  $N$  ecuaciones diferenciales que previamente utilizábamos para dos ecuaciones sólo. Buscamos los

modos normales; es decir, buscamos soluciones sinusoidales de modo que cada partícula oscile con la misma frecuencia. Pongamos:

$$y_p = A_p \cos \omega t \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (5-17)$$

donde  $A_p$  y  $\omega$  son la amplitud y la frecuencia de vibración de la partícula  $p$ . Si podemos encontrar valores de  $A_p$  y  $\omega$  para las que las ecuaciones (5-17) satisfagan las  $N$  ecuaciones diferenciales (5-16), habremos satisfecho nuestro objetivo. Obsérvese que la velocidad de cualquier partícula puede obtenerse a partir de las ecuaciones (5-17) y que vale

$$\frac{dy_p}{dt} = -\omega A_p \operatorname{sen} \omega t \quad (p = 1, 2, \dots, N)$$

Así pues, escogiendo las ecuaciones (5-17) como una solución de tanteo, estamos restringiéndonos automáticamente a la condición límite adicional de que cada partícula tenga una velocidad cero para  $t = 0$ ; es decir, cada partícula parte del reposo.

Sustituyendo las ecuaciones (5-17) en las ecuaciones diferenciales (5-16), tenemos:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_1 - \omega_0^2(A_2 + A_0) &= 0 \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_2 - \omega_0^2(A_3 + A_1) &= 0 \\ &\vdots \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_p - \omega_0^2(A_{p+1} + A_{p-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_N - \omega_0^2(A_{N+1} - A_{N-1}) &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de aspecto formidable de  $N$  ecuaciones simultáneas puede escribirse de modo más compacto como sigue:

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_p - \omega_0^2(A_{p-1} + A_{p+1}) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (5-18)$$

Nuestra condición límite inicial, que exige que los extremos han de mantenerse fijos equivale a decir que  $A_0 = 0$  y  $A_N + 1 = 0$ .

La cuestión que nos estamos preguntando es si las  $N$  ecuaciones pueden satisfacerse utilizando el mismo valor de  $\omega^2$  en cada una de ellas. Vimos anteriormente cómo enfrentarnos con este problema cuando sólo intervenían dos osciladores acoplados. La hipótesis de que existía una solución (distinta de la trivial consistente en que todas las amplitudes fueran igual a cero) conducía a

ciertas restricciones sobre los cocientes de las amplitudes [según expresaban las ecuaciones (5-9)]. Aquí tenemos la misma situación en este problema más complejo. Si volvemos a escribir las ecuaciones (5-18) de la siguiente forma

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (5-19)$$

vemos que, para cualquier valor particular de  $\omega$ , el segundo miembro es constante y, por lo tanto, el cociente de la izquierda debe ser una constante independiente del valor de  $p$ . ¿Qué valores pueden asignarse a los coeficientes  $A_p$  de modo que esta condición sea satisfecha y que al mismo tiempo den  $A_0 = 0$  y  $A_N + 1 = 0$ ?

No pretendemos resolver la ecuación (5-19), sino simplemente fijar la atención en un resultado notable que da la clave del problema. Supóngase que la amplitud de la partícula  $p$  puede expresarse en la forma

$$A_p = C \sin p\theta \quad (5-20)$$

siendo  $\theta$  un cierto ángulo. Si se utiliza una ecuación semejante para definir las amplitudes de las partículas adyacentes  $p - 1$  y  $p + 1$ , tendremos:

$$\begin{aligned} A_{p-1} + A_{p+1} &= C[\sin(p-1)\theta + \sin(p+1)\theta] \\ &= 2C \sin p\theta \cos \theta \end{aligned}$$

Pero  $C \sin p\theta$  es precisamente  $A_p$ , de modo que tenemos

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2 \cos \theta \quad (5-21)$$

Esto significa que la receta representada por la ecuación (5-20) es acertada. El segundo miembro de la ecuación (5-21) es una constante independiente de  $p$ , que es precisamente lo que necesitamos aquí para tener una condición equivalente a la ecuación (5-19). Puede utilizarse para satisfacer todas las  $N$  ecuaciones (5-18) de que partimos. Todo lo que queda es encontrar el valor de  $\theta$ . Esto puede hacerse imponiendo el requisito de que  $A_p = 0$  para  $p = 0$  y  $p = N + 1$ . La primera condición se satisface automáticamente; la última será satisfactoria si  $(N + 1)\theta$  se hace igual a cualquier múltiplo entero de  $\pi$ . Así pues, podemos escribir

$$\begin{aligned} (N + 1)\theta &= n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \theta &= \frac{n\pi}{N + 1} \end{aligned} \quad (5-22)$$

Sustituyendo el valor de  $\theta$  en la ecuación (5-20) se tiene

$$A_p = C \operatorname{sen} \left( \frac{pn\pi}{N+1} \right) \quad (5-23)$$

También se determinan las frecuencias permitidas de los modos normales, ya que a partir de las ecuaciones (5-19) a (5-22) se tiene

$$\frac{A_{p+1} + A_{p-1}}{A_p} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2 \cos \left( \frac{n\pi}{N+1} \right)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 2\omega_0^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi}{N+1} \right) \right] \\ &= 4\omega_0^2 \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \end{aligned}$$

Hallando la raíz cuadrada de esta expresión, resulta

$$\omega = 2\omega_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \quad (5-24)$$

## PROPIEDADES DE LOS MODOS NORMALES PARA $N$ OSCILADORES ACOPLADOS

Habiendo obtenido las soluciones matemáticas de este problema de  $N$  osciladores acoplados, examinemos más de cerca los movimientos que las ecuaciones describen.

Primero observemos que, de acuerdo con la ecuación (5-24), los diferentes valores del número entero  $n$  definen distintas frecuencias de modo normal. Por consiguiente, es apropiado señalar cada modo, y su frecuencia distintiva, por el valor de  $n$ . Así pues, pondremos:

$$\omega_n = 2\omega_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \quad (5-25)$$

Ahora debemos darnos cuenta de que el movimiento de una partícula dada (u oscilador) depende del número que tiene a lo largo de la recta ( $p$ ) y del número que designa su modo ( $n$ ). La amplitud de su movimiento puede así escribirse del modo siguiente:

$$A_{pn} = C_n \operatorname{sen} \left( \frac{pn\pi}{N+1} \right) \quad (5-26)$$

en donde  $C_n$  define la amplitud con la que está excitado el modo particular  $n$ . El desplazamiento real de la partícula  $p$  cuando la colección entera de partículas está oscilando en el modo  $n$  se obtiene, por tanto, mediante

$$y_{pn}(t) = A_{pn} \cos \omega_n t \quad (5-27)$$

en donde  $\omega_n$  y  $A_{pn}$  vienen dadas por las ecuaciones (5-25) y (5-26), respectivamente. La ecuación anterior implica que cada partícula está en reposo en el instante  $t = 0$ , pero como en el caso de dos osciladores podemos satisfacer condiciones iniciales arbitrarias poniendo

$$y_{pn}(t) = A_{pn} \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (5-27a)$$

en donde a cada modo diferente puede asignársele su propia fase  $\delta_n$ .

¿Cuántos modos normales existen? Vimos que con dos osciladores acoplados existen precisamente dos modos normales. Si la intuición del lector le dice que con  $N$  oscilaciones deben existir sólo  $N$  modos independientes, estará en lo correcto.<sup>1</sup> Sin embargo, este hecho aparece un poco oscurecido en las ecuaciones (5-25) y (5-26), porque los valores de  $\omega_n$  y  $A_{pn}$  están definidos por cada valor entero de  $n$ . El punto a señalar es, sin embargo, que más allá de  $n = N$  las ecuaciones no describen ninguna situación físicamente nueva.

Podemos hacer esto más claro, en cuanto a lo que se refiere a las frecuencias de los modos, con la ayuda de la figura 5-12, que es un gráfico de la ecuación (5-25), modificada de modo que se define  $\omega$  como siempre positiva. Al pasar de  $n = 1$  a  $n = N$  encontramos  $N$  diferentes frecuencias características. Para  $n = N + 1$ , que corresponde a  $\pi/2$  en abscisas, se alcanza una frecuencia máxima  $\omega_{\max}$  ( $= 2\omega_0$ ), pero no corresponde a ningún posible movimiento porque,

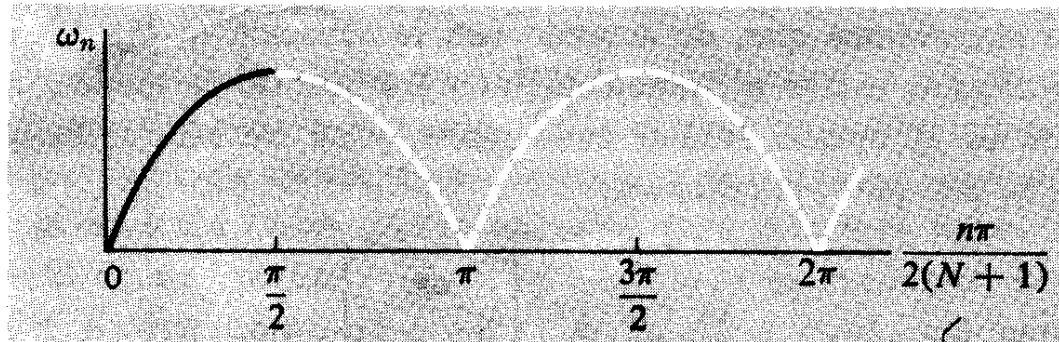


Fig. 5-12. Gráfico de la frecuencia de los modos en función de su número. Es conveniente representar  $\omega_n$  en función de  $n\pi/2(N+1)$  y no en función de  $n$ .

<sup>1</sup> Éste es el caso de un sistema monodimensional. Dos dimensiones dan  $2N$ , tres dimensiones dan  $3N$ .

como muestra la ecuación (5-26), todas las amplitudes  $A_{pn}$  son cero para este valor de  $n$ . Para  $n = N + 2$  se tiene

$$\begin{aligned}\omega_{N+2} &= 2\omega_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{(N+2)\pi}{2(N+1)} \right] \\ &= 2\omega_0 \operatorname{sen} \left[ \pi - \frac{N\pi}{2(N+1)} \right] \\ &= 2\omega_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{N\pi}{2(N+1)} \right]\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\omega_{N+2} = \omega_N$$

Análogamente,  $\omega_{N+3} = \omega_{N-1}$ , y así sucesivamente. Y se obtiene una duplicación semejante en todo el intervalo siguiente de  $N + 1$  valores de  $n$ .

Es muy sencillo ver que las amplitudes relativas de las partículas en un modo normal se repiten también ellas mismas. Así, por ejemplo, se tiene, según la ecuación (5-26),

$$\begin{aligned}A_{p,N+2} &= C_{N+2} \operatorname{sen} \left[ \frac{p(N+2)\pi}{N+1} \right] \\ &= C_{N+2} \operatorname{sen} \left[ 2p\pi - \frac{pN\pi}{N+1} \right] \\ &= -C_{N+2} \operatorname{sen} \left( \frac{pN\pi}{N+1} \right) \\ &\sim A_{p,N}\end{aligned}$$

y es fácil demostrar que se produce una propiedad semejante para todo valor de  $n > N + 1$ .

Veamos el aspecto que tienen los diversos modos normales. El primer modo normal viene dado por  $n = 1$ . Los desplazamientos de la partícula son:

$$y_{p1} = C_1 \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi}{N+1} \right) \cos \omega_1 t \quad (p = 1, 2, \dots, N)$$

En un instante dado de tiempo, el factor  $C_1 \cos \omega_1 t$  es el mismo para todas las partículas. Solamente el factor  $\operatorname{sen} [p\pi/(N+1)]$  distingue los desplazamientos de las distintas partículas. La curva pintada de blanco en la figura 5-13 (a) es una representación del  $\operatorname{sen} [p\pi/(N+1)]$  en función de  $p$ , cuando  $p$  varía continuamente de 0 a  $N + 1$ . Sin embargo, las partículas reales están situadas en los valores discretos de  $p = 1, 2, \dots, N$ . La curva sinusoidal es, por consi-

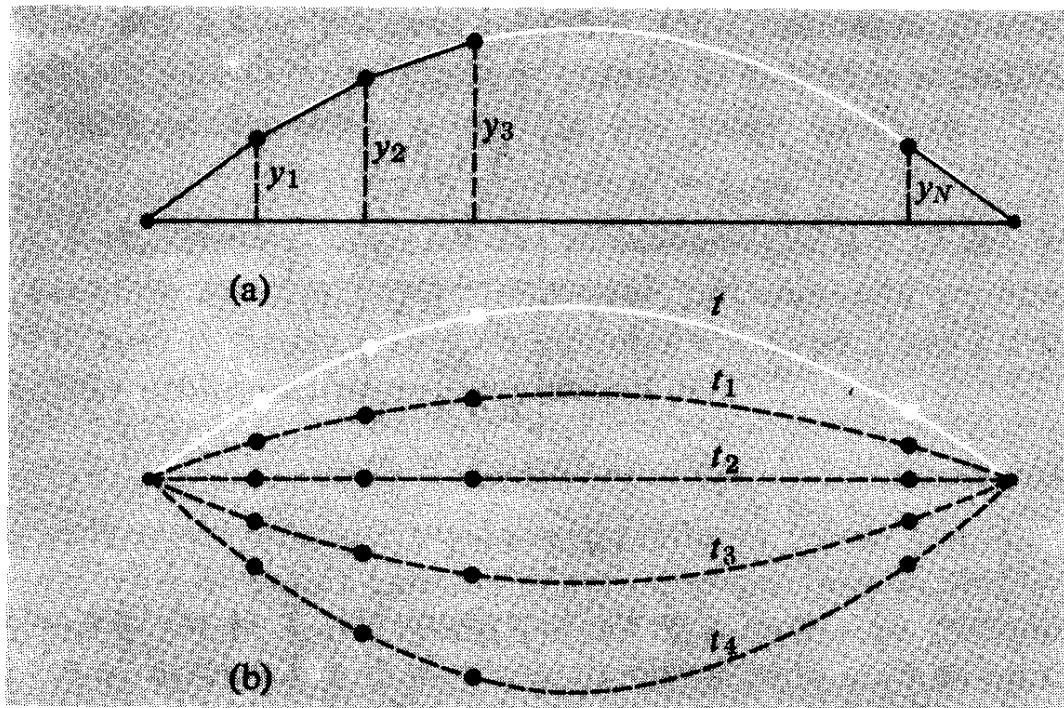


Fig. 5-13. (a) Representación de  $\text{sen}[p\pi/(N+1)]$  en función de  $p$ . Las partículas están en las posiciones definidas por los valores enteros de  $p$  y están unidas por segmentos rectilíneos de la cuerda. (b) Posiciones de las partículas en diversos instantes para el modo inferior.

guiente, sólo una guía para situar a las partículas, y la cuerda se compone de segmentos rectilíneos que conectan las partículas.

Cuando  $t$  aumenta todas las partículas oscilan en la dirección  $y$  con frecuencia  $\omega_1$ . En la figura 5-13 (b) se muestra un conjunto completo de curvas sinusoidales para diferentes valores de  $p$  y las correspondientes situaciones de las partículas. Para el segundo modo,  $n = 2$  y

$$y_{p2} = C_2 \text{sen}\left(\frac{p2\pi}{N+1}\right) \cos \omega_2 t \quad (p = 1, 2, \dots, N)$$

Los desplazamientos de las partículas en diferentes instantes de tiempo se indican en la figura 5-14. Si resultase que el número de partículas fuese impar, existiría una partícula en el centro de la línea y en este modo debería permanecer en reposo, como se indica en la figura 5-14. Recuérdese que  $\omega_2$  difiere de  $\omega_1$  y, por consiguiente, este diagrama oscila con una frecuencia diferente que el anterior, casi el doble de grande, de hecho.

En la figura 5-15 vemos un conjunto de diagramas de modos normales para una serie de cuatro partículas situadas sobre una cuerda tirante. Así se ve de modo muy elegante cómo el diagrama de los desplazamientos vuelve a trazar sus trayectorias después de alcanzar  $n = 5$ , aunque las curvas sinusoidales que

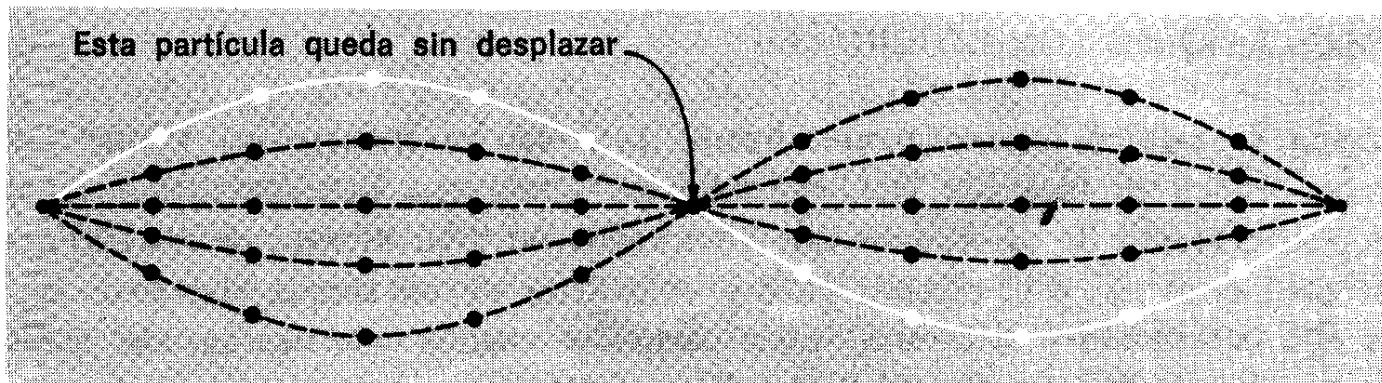


Fig. 5-14. Posiciones de las partículas en diversos instantes para el segundo modo ( $n = 2$ ).

determinan las diferentes  $A_{pn}$  son todas distintas. Estos esquemas para un valor pequeño de  $N$  nos permiten también apreciar el hecho notable de que los desplazamientos de todas las partículas en cada modo para este tipo de sistema estén situados sobre una curva sinusoidal, aunque la cuerda que los conecta pueda seguir una trayectoria totalmente diferente.

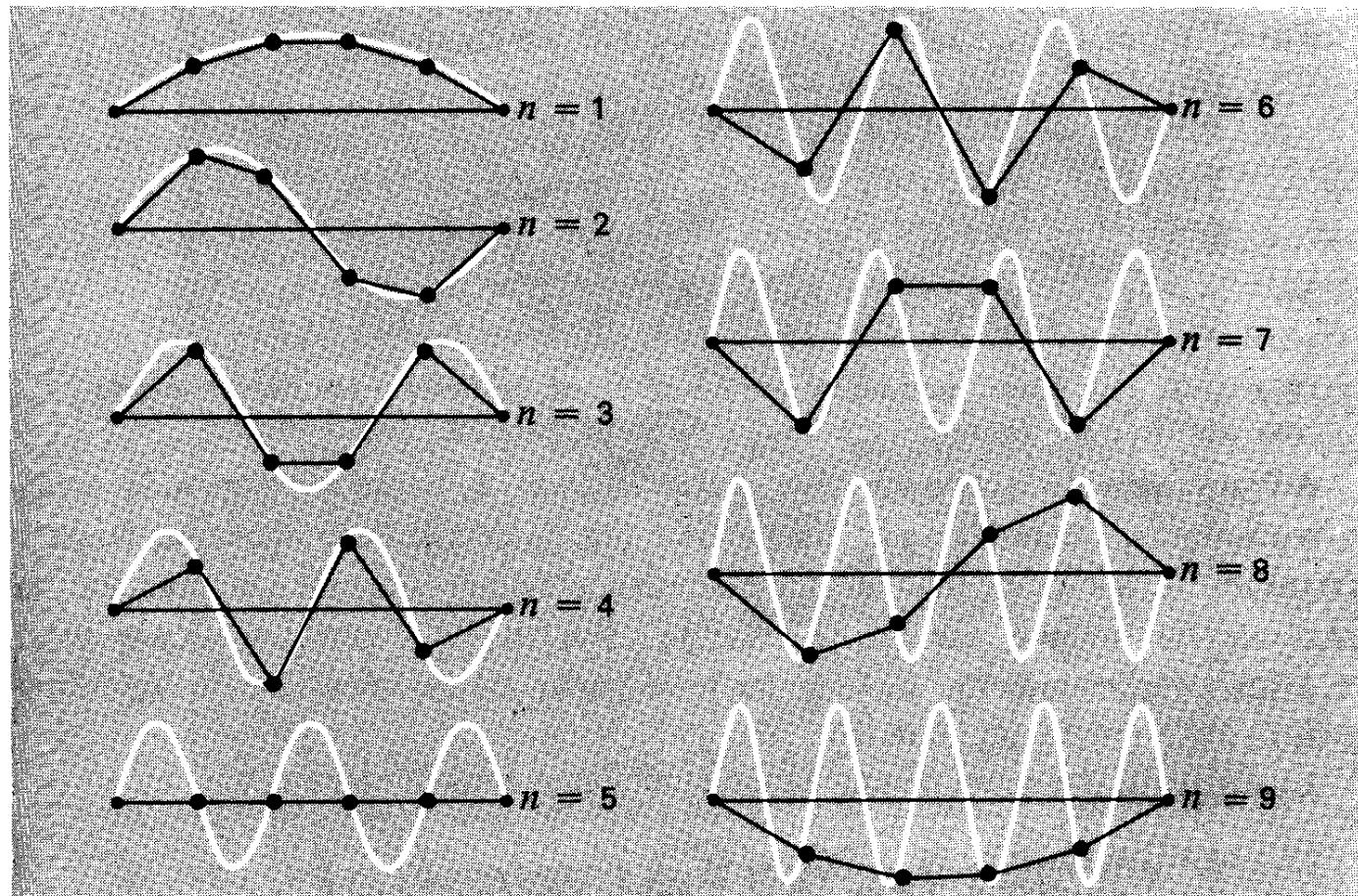


Fig. 5-15. Modos de una cuerda vibrante con pesos,  $N = 4$ . Obsérvese que  $n = 6, 7, 8$  y  $9$  repite las curvas de  $n = 4, 3, 2$  y  $1$  con signo opuesto. (Adaptado de J. C. Slater y N. H. Frank, Mechanics, McGraw-Hill, Nueva York, 1947.)

## OSCILACIONES LONGITUDINALES

Como se explicó anteriormente, hemos preferido considerar las vibraciones transversales en lugar de las longitudinales, como una base para analizar el comportamiento de un sistema que comprende un gran número de osciladores acoplados. El ojo y el cerebro pueden considerar de un simple vistazo lo que le está ocurriendo a cada una de las partículas cuando una cuerda con masas se pone a oscilar transversalmente. Pero ahora vamos a ver cómo se aplica el mismo tipo de análisis de un sistema de partículas conectados por muelles a lo largo de una línea recta, y limitados a movimientos sobre dicha recta. Esto puede parecer un sistema muy artificial, pero una línea de átomos en un cristal está sorprendentemente bien representada por dicho modelo y lo mismo ocurre también, aunque en extensión menor, en una columna de gas.

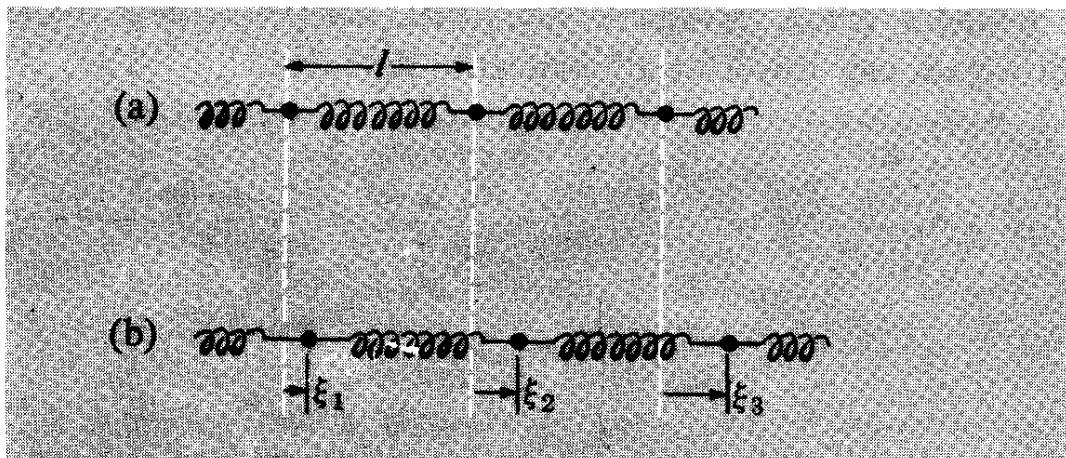


Fig. 5-16. (a) *Masas acopladas por muelles, en equilibrio.* (b) *Masas acopladas por muelles después de un pequeño desplazamiento longitudinal.*

Admitiremos de nuevo que las partículas son de masa  $m$  y cuando están en reposo están separadas por distancias  $l$  [fig. 5-16 (a)]. Pero ahora las fuerzas restauradoras las suministra el alargamiento o compresión de los muelles; la constante del muelle para cada uno de ellos puede describirse como  $m\omega_0^2$ . Sean los desplazamientos de las masas a partir de su posición de equilibrio  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ <sup>1</sup> [véase fig. 5-16 (b)].

La ecuación del movimiento de la partícula  $p$  será la siguiente:

$$m \frac{d^2 \xi_p}{dt^2} = m\omega_0^2(\xi_{p+1} - \xi_p) - m\omega_0^2(\xi_p - \xi_{p-1})$$

<sup>1</sup> Utilizamos la letra griega  $\xi$  a fin de reservar  $x$  para la distancia total desde un extremo.

es decir,

$$\frac{d^2\xi_p}{dt^2} + 2\omega_0^2\xi_p - \omega_0^2(\xi_{p+1} + \xi_{p-1}) = 0 \quad (5-28)$$

Esta expresión tiene precisamente la misma forma que la ecuación (5-16); así sabemos ya que matemáticamente todas las características que hemos descubierto para las vibraciones transversales de la cuerda cargada tienen su contrapartida en este nuevo sistema. Es decir, el movimiento de la partícula  $p$  en el modo normal  $n$  viene dada por

$$\xi_{pn}(t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \cos \omega_n t$$

en donde

$$\omega_n = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \quad (5-29)$$

Ahora resulta posible un estudio cuantitativo muy elegante de estos sistemas mediante el empleo de suspensiones gaseosas, en las cuales se obtiene un flujo de aire (a presiones ligeramente superiores a la atmósfera) que sale de orificios situados en una superficie soporte con objeto de proporcionar un apoyo

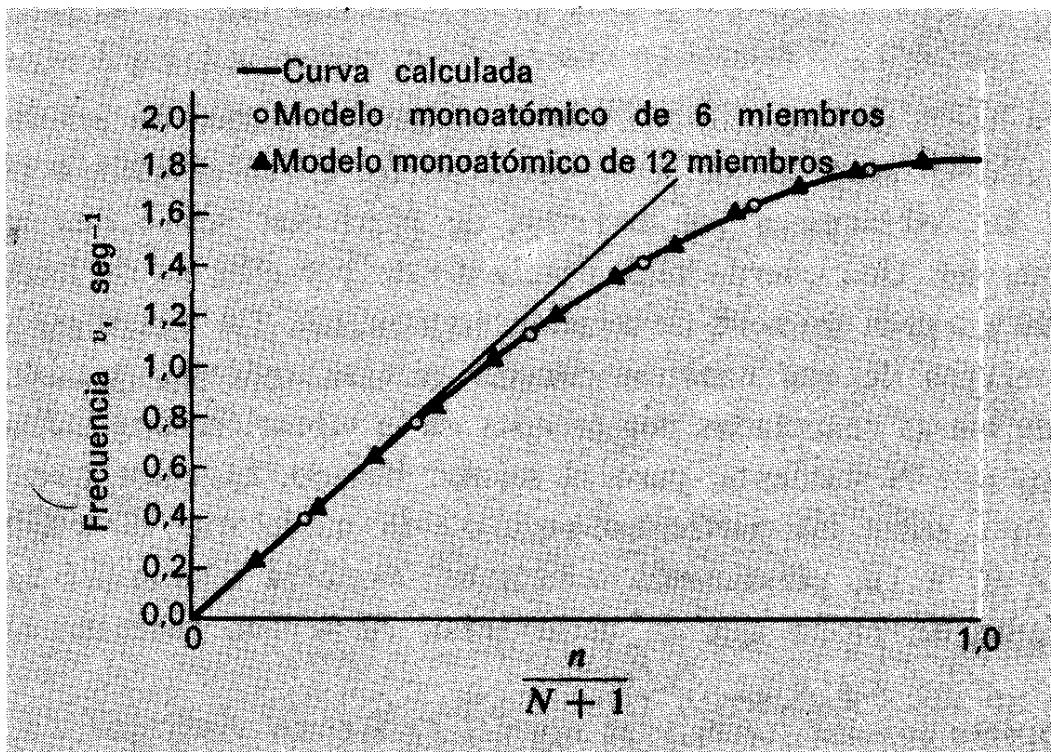


Fig. 5-17. Valores experimentales de la frecuencia de un modo  $v_n$ , representada en función del número del modo para una línea de masas acopladas por muelles idénticos. [Obsérvese que la abscisa es  $n/(N+1)$  en lugar de  $n$ ; éste permite que se ajusten a la misma curva teórica los datos correspondientes a dos valores diferentes de  $N$  ( $N = 6$  y  $N = 12$ ).] [Según R. B. Runk, J. L. Stull y O. L. Anderson, Am. J. Phys., 31, 915 (1963).]

casi completamente libre de rozamiento para los objetos que se deslizan sobre su superficie. La figura 5-17 muestra el resultado de medidas hechas con uno de estos aparatos.<sup>1</sup> Las masas en cada uno de ellos fueron alrededor de 0,15 kg, y las constantes del muelle eran tales que la frecuencia  $\omega_0$  valía 5,68 seg<sup>-1</sup>.

La figura muestra las frecuencias observadas  $\nu_n (= \omega_n/2\pi)$  de los diversos modos normales representadas en función de la variable  $n/(N + 1)$ . El gráfico contiene medidas hechas con un sistema de seis masas (y siete muelles) y con otro sistema, más largo, pero por lo demás totalmente semejante, de 12 masas (y 13 muelles). Como  $\omega_0$  valía lo mismo para ambos, el resultado de los dos sistemas deberá adaptarse a la curva:

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{N+1} \frac{\pi}{2}\right)$$

Puede verse que los valores experimentales se ajustan extremadamente bien a los teóricos.

## *N MUY GRANDE*

Supongamos ahora que permitimos que el número de masas en un sistema acoplado llegue a ser muy grande. Para ser explícito en su estudio, consideremos el caso de las vibraciones transversales de partículas sobre una cuerda sometida a tensión. Una cuerda real, precisamente por ello, es de hecho ya una colección de un gran número de átomos muy juntos. De nuevo podemos otra vez estar seguros de que nuestras conclusiones se aplicarán igualmente bien a la línea de masas conectadas por muelles en la vibración longitudinal.

Hagamos que  $N$  aumente, pero al mismo tiempo, hagamos que disminuya el espaciado  $l$  entre las partículas vecinas, de modo que la longitud de la cuerda,  $L = (N + 1)l$ , permanezca constante. También disminuirá la masa de cada partícula de modo que la masa total,  $M = Nm$ , permanezca también constante.

¿Qué ocurre con las frecuencias normales? Hemos visto que

$$\omega_n = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

<sup>1</sup> R. B. Runk, J. L. Stull y O. L. Anderson, *Am. J. Phys.*, **31**, 915 (1963).

en donde  $\omega_0 = (T/ml)^{1/2}$ . Consideremos primero los modos normales para los que el número de modo  $n$  es pequeño. Entonces cuando  $N$  se hace muy grande, podemos poner

$$\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \approx \frac{n\pi}{2(N+1)}$$

Por consiguiente,

$$\omega_n \approx 2\left(\frac{T}{ml}\right)^{1/2} \frac{n\pi}{2(N+1)} = \left(\frac{T}{m/l}\right)^{1/2} \frac{n\pi}{(N+1)l}$$

pero  $(N+1)l = L$ , longitud total de la cuerda, y  $m/l$  es la masa por unidad de longitud (densidad lineal) que llamaremos  $\mu$ . Así pues, aproximadamente,

$$\omega_n = n \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5-30)$$

En particular,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

y entonces  $\omega_n = n\omega_1$ . Las frecuencias normales son múltiplos enteros de la frecuencia inferior  $\omega_1$ . Sin embargo, recuérdese que esto es sólo una aproximación, si bien para  $n$  mucho menor que  $N$  es una aproximación excelente.

¿Qué se puede decir sobre el desplazamiento de las partículas? Previamen- te hemos visto que en el modo  $n$  el desplazamiento de la partícula  $p$  es

$$y_{pn} = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \cos \omega_n t$$

En lugar de llamar la partícula por su valor  $p$ , podemos especificar su distancia  $x$  desde el extremo fijo de la cuerda. Ahora bien,

$$x = pl$$

De aquí que

$$\frac{pn\pi}{N+1} = \frac{pln\pi}{(N+1)l} = \frac{n\pi x}{L}$$

En lugar de  $y_{pn}$ , podremos escribir  $y_n(x, t)$ , con lo cual queremos significar el desplazamiento  $y$  en el instante  $t$  de la partícula situada en  $x$ , cuando la cuerda está vibrando en el modo  $n$ . Así pues,

$$y_n(x, t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5-31)$$

Cuando  $N$  se hace muy grande, los valores de  $x$ , que sitúan a las partículas, están cada vez situados más cerca unos de otros y  $x$  puede considerarse como

una variable continua que va de 0 a  $L$ . Las curvas sinusoidales de blanco de las figuras 5-13, 5-14 y 5-15 son ahora las configuraciones reales de la cuerda en sus diferentes modos. No hay que emplear mucha imaginación para conectar dichos movimientos con la posibilidad de perturbaciones ondulatorias que se mueven a lo largo de la cuerda, pero no seguiremos sobre este tema de momento.

Consideremos ahora el modo posible más alto,  $n = N$ . Si  $N$  es muy grande, tenemos:

$$\omega_{\max} = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left[\frac{N\pi}{2(N+1)}\right] \approx 2\omega_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\omega_0 \quad (5-32)$$

En este modo (como veremos en seguida), cada partícula tiene en todo instante un desplazamiento que es de signo opuesto a los desplazamientos de sus vecinos más próximos y —excepto para aquellas partículas cerca de uno y otro extremo de los extremos fijos— estos desplazamientos son de valor casi igual. Así pues, para el caso de las oscilaciones longitudinales el caso es un poco parecido al indicado en la figura 5-18 (a), y para el caso más fácil de ver de las oscilaciones transversales se parece a la figura 5-18 (b).

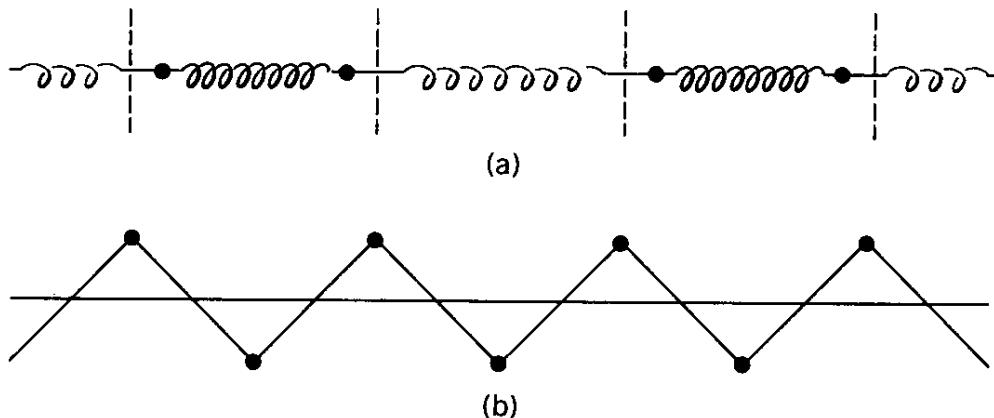


Fig. 5-18. (a) Vibraciones longitudinales en el modo superior de una línea de masas acopladas por muelles. (b) Vibraciones transversales en el modo superior de una línea de masas sobre una cuerda sometida a tensión.

Esta relación entre los desplazamientos adyacentes puede deducirse con ayuda de la ecuación (5-26):

$$A_{pn} = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)$$

Haciendo  $n = N$ , se tiene

$$A_{p,N} = C_N \operatorname{sen}\left(\frac{pN\pi}{N+1}\right)$$

que puede escribirse como

$$A_{p,N} = C_N \operatorname{sen}(p\pi - \alpha_p)$$

en donde

$$\alpha_p = \frac{p\pi}{N+1}$$

Primero, obsérvese que al pasar de  $p$  a  $p + 1$ , se invierte el signo de la amplitud, debido a que el ángulo  $p\pi$  cambia de un múltiplo impar a otro par de  $\pi$  (o viceversa) y el ángulo  $\alpha_p$  es menor que  $\pi$  para todo valor de  $p$  (puesto que  $p \leq N$ ). Esto hace que los valores sucesivos de  $(p\pi - \alpha_p)$  estén en cuadrantes opuestos. Así pues, podremos escribir

$$(modo supremo, n = N) \quad \frac{A_p}{A_{p+1}} = - \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{p\pi}{N+1}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{(p+1)\pi}{N+1}\right]} \quad (5-33)$$

Obsérvese ahora que, aparte de la alternancia del signo, la ecuación (5-33) describe una distribución de amplitudes que se ajustan sobre una curva equivalente a media sinusoide dibujada entre los dos extremos fijos, como se ve en la figura 5-19 para el caso de vibraciones transversales de una línea de masas.<sup>1</sup> Así pues, en la mayor parte de la región central de la línea los desplazamientos son casi iguales y opuestos. Consideremos, por ejemplo, una línea de 1000 masas. Entonces para  $100 \leq p \leq 900$  las amplitudes sucesivas difieren en menos del 1 %. Es sólo hacia los extremos de la línea cuando el aspecto difiere marcadamente de la figura 5-18 (b). Es entonces fácil de ver por qué la frecuencia debe ser casi igual a  $2\omega_0$ . Consideremos la partícula  $p$  de la figura 5-19. Si

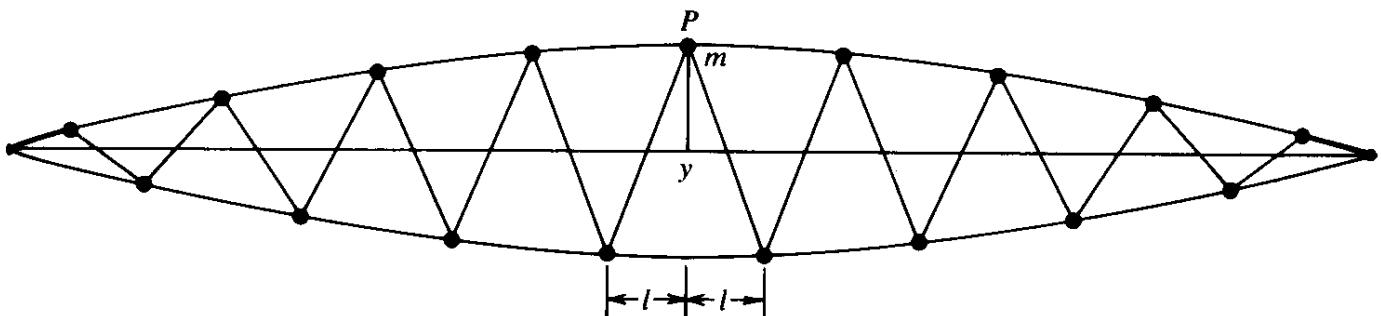


Fig. 5-19. Amplitudes de una línea completa de partículas en el modo superior para una cuerda fija por ambos extremos.

<sup>1</sup> Obsérvese que este resultado es válido para el modo más alto incluso para valores pequeños de  $N$ , véase, por ejemplo, el cuarto diagrama de la figura 5-15.

su desplazamiento en cierto instante es  $y$ , el desplazamiento de sus vecinos es aproximadamente  $-y$  en ambos casos. Así pues, si la tensión en las cuerdas que la conectan es  $T$ , la componente transversal de la fuerza debida a cada una de ellas es aproximadamente  $(2y/l)T$ , y la ecuación del movimiento de  $P$  viene dada por

$$m \frac{d^2y}{dt^2} \approx -2T \frac{2y}{l}$$

o bien

$$\frac{d^2y}{dt^2} \approx -\frac{4T}{ml}y = -4\omega_0^2y$$

(Recuérdese que los valores de los desplazamientos transversales se han exagerado grandemente en los diagramas; realmente estamos suponiendo que  $y \ll l$ , como es normal.) La ecuación anterior define así un movimiento armónico simple de frecuencia angular aproximadamente  $2\omega_0$  y una pequeña consideración adicional nos convencerá de que la frecuencia exacta es ligeramente menor que  $2\omega_0$ , tal como exige la ecuación (5-32).

En toda nuestra discusión de los modos normales hasta ahora hemos recalado fundamentalmente, con buenas razones, las condiciones iniciales que se aplican como, por ejemplo, que los extremos de una línea de masas están fijos o libres. Sin embargo, el lector habrá apreciado durante esta última discusión que las propiedades de los modos muy altos de una línea de muchas partículas depende relativamente poco sobre las condiciones límites precisas, aunque los modos inferiores dependen críticamente de ellos. Así pues, el cálculo anterior de la frecuencia de los modos más elevados del sistema exige sólo apreciar que los desplazamientos de partículas sucesivas son aproximadamente iguales y opuestos. Habríamos llegado al mismo valor aproximado de las frecuencias del modo más elevado si hubiésemos admitido que un extremo de la línea estaba fijo y el otro extremo libre. Sin embargo, hay que darse cuenta de que esto es sólo aproximadamente cierto y en principio debe considerarse la influencia de las condiciones límites precisas.

## MODOS NORMALES DE UNA RED CRISTALINA

No haremos más que tocar este tema, el cual, de hecho, exigiría un libro entero para hacerle justicia. Sin embargo, el análisis de la sección anterior soporta los fundamentos de la descripción de los modos vibratorios de los sólidos. Esto no es demasiado sorprendente, porque, como ya se ha señalado, la inter-

acción entre átomos adyacentes es, en cuanto a lo que se refiere a los pequeños desplazamientos, notablemente parecida a la de un muelle. Y la estructura de un sólido es una red de mayor o menor regularidad, justificando la comparación frecuente utilizada de una red cristalina a un sistema de muelles tridimensionales respecto a su comportamiento vibratorio.

Si intentamos aplicar las ecuaciones (5-29) y (5-30) a un sólido, podemos pensar en una línea de átomos a lo largo de una de las direcciones principales de la red, de modo que  $\mu$  es la masa total de todos los átomos por unidad de longitud, o sea, la masa de un átomo dividida por la separación interatómica  $l$ . ¿Pero cuál es la tensión  $T$ ? En el capítulo 3 introdujimos una indicación clara necesaria para el cálculo de la constante del muelle debida a las fuerzas elásticas internas. Dimensionalmente, el cociente  $T/\mu$  es el mismo que el cociente  $Y/\rho$  del módulo de Young dividido por la densidad. El empleo de esta relación se sugiere incluso con más intensidad cuando pensamos en los muelles alargados que se indican en la figura 5-16. Así pues, consideraremos la posibilidad de describir las frecuencias de vibración del cristal  $\nu (= \omega/2\pi)$  a través de la siguiente relación:

$$\nu_n = 2\nu_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right] \text{ siendo } \nu_0 = \frac{1}{2l} \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{1/2} \quad (5-34)$$

Como hemos visto (véase tabla 3-1), en el caso de los sólidos los valores de  $Y$  son del orden de  $10^{11} \text{ N/m}^2$ , de modo que como las densidades son del orden de  $10^4 \text{ kg/m}^3$ , el cociente  $Y/\rho$  es del orden de  $10^7 \text{ m}^2/\text{seg}^2$ . La distancia interatómica  $l$  es del orden de  $10^{-10} \text{ m}$ . Así pues, tendremos:

$$\nu_0 \approx 10^{13} \text{ seg}^{-1}$$

Ésta es la frecuencia más elevada que la red puede soportar. Los modos más bajos vienen bien descritos por los análogos de la ecuación (5-30):

$$\nu_n = \frac{1}{2L} \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{1/2}$$

siendo  $L$  el espesor del cristal. Así pues, la frecuencia más baja de vibración de un cristal de un cm a través del mismo será del orden de  $10^5 \text{ Hz}$ .

Volviendo al modo más alto posible, resulta que en él los átomos adyacentes se ven desplazados en sentidos opuestos el uno al otro (véase fig. 5-18). Dicho movimiento puede estimularse con gran eficacia haciendo incidir la luz sobre un cristal iónico tal como el cloruro de sodio, en el cual los iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  serán siempre impulsados en sentidos opuestos por el campo eléctrico.

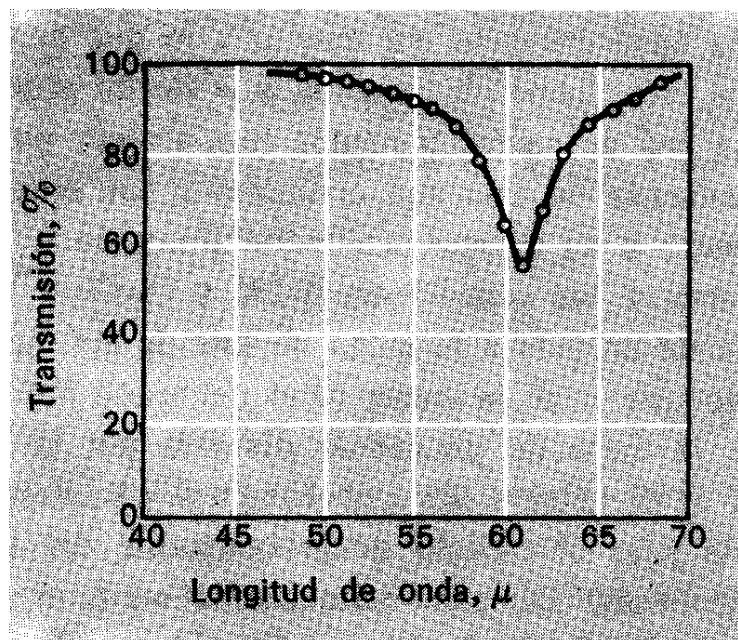
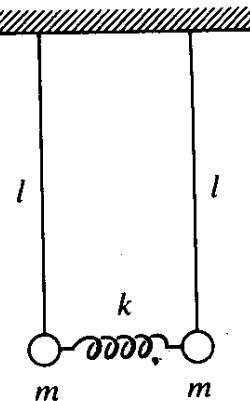
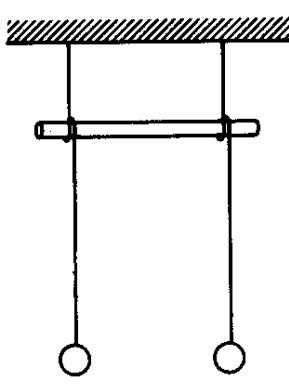


Fig. 5-20. Transmisión de radiación infrarroja a través de una película delgada de cloruro de sodio ( $0,17\mu$ ). [Según R. B. Barnes, Z. Physik, 75, 723 (1932).]

trico de la onda luminosa. Según nuestro cálculo aproximado, es posible que se presente una condición de resonancia entre la luz y la red a una frecuencia del orden de  $10^{13}$  Hz, que corresponde a una longitud de onda del orden de  $3 \times 10^{-5}$  m, o sea  $30\mu$ . Esto corresponde al infrarrojo. La figura 5-20 muestra un elegante ejemplo de dicho tipo de resonancia, que da como resultado una absorción incrementada de la luz por el cristal a longitudes de ondas en las proximidades de  $60\mu$ . Se observó utilizando una lámina extremadamente delgada de cloruro sódico de un espesor de sólo  $10^{-7}$  m aproximadamente.

## PROBLEMAS

- 5-1 El mejor modo de familiarizarse con el comportamiento de los sistemas oscilatorios acoplados consiste en construirse uno mismo y experimentar con él en diversas condiciones. Inténtese preparar un par de péndulos idénticos, unidos por una pajita que puede adaptarse a diversas distancias a lo largo de los hilos (véase esquema). Estudiar los movimientos de las oscilaciones tanto en el plano de los péndulos (cuando se mueve uno hacia el otro o alejándose del otro) y los movimientos perpendiculares a este plano. Procúrese medir los períodos del modo normal y también el período de transferencia del movimiento de uno al otro y viceversa. ¿Los resultados se ajustan a lo que se describe en el texto?



5-2 Se unen dos péndulos idénticos mediante un muelle de acoplamiento ligero. Cada péndulo tiene una longitud de 0,4 m y están situados en un lugar en donde  $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$ . Estando conectado el muelle de acople, se sujeta uno de los péndulos y se encuentra que el período del otro es de 1,25 seg exactamente.

(a) Si ninguno de los péndulos está sujeto, ¿cuáles son los períodos de los dos modos normales?

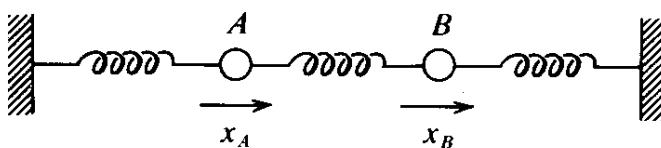
(b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre dos amplitudes posibles máximas sucesivas de un péndulo después que uno de ellos se retira lateralmente y luego se deja en libertad?

5-3 Una masa  $m$  cuelga de un muelle de constante  $k$ . En la posición de equilibrio estático la longitud del muelle es  $l$ . Si se retira lateralmente y luego se deja en libertad, el movimiento subsiguiente será una combinación de (a) oscilaciones pendulares y (b) alargamiento y compresión del muelle. Sin utilizar apenas las matemáticas, considérese el comportamiento de este dispositivo como un sistema acoplado.

5-4 Dos osciladores armónicos  $A$  y  $B$ , de masa  $m$  y constantes  $k_A$  y  $k_B$ , respectivamente, se acoplan juntos mediante un muelle de constante  $k_C$ . Hallar las frecuencias normales  $\omega'$  y  $\omega''$  y describir los modos normales de oscilación si  $k_C^2 = k_A k_B$ .

5-5 Se acoplan dos osciladores idénticos sin amortiguar  $A$  y  $B$ , cada uno de ellos de masa  $m$  y frecuencia natural (angular)  $\omega_0$ , de tal modo que la fuerza de acople ejercida sobre  $A$  es  $\alpha m(d^2x_B/dt^2)$ , y la fuerza de acople ejercida sobre  $B$  es  $\alpha m(d^2x_A/dt^2)$ , siendo  $\alpha$  una constante de acople de magnitud menor que 1. Describir los modos normales del sistema acoplado y hallar sus frecuencias.

5-6 Dos masas iguales situadas sobre una vía horizontal de aire sin ningún rozamiento, se mantienen entre soportes rígidos mediante tres muelles idénticos, como se indica en la figura. Los desplazamientos a partir del equilibrio sobre la línea de los muelles están descritos mediante las coordenadas  $x_A$  y  $x_B$ . Si una de las masas se sujeta, el período  $T (= 2\pi/\omega)$  correspondiente a una vibración completa del otro es 3 seg.

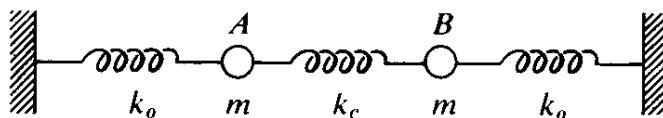


(a) Si ambas masas están libres, ¿cuáles son los *periodos* de los dos modos normales del sistema? Dibujar gráficos de  $x_A$  y  $x_B$  en función de  $t$  en cada modo. Para  $t = 0$ , la masa  $A$  está en su posición de reposo normal y la masa  $B$  se ve empujada lateralmente a una distancia de 5 cm. Las masas se dejan en libertad estando en reposo en ese instante.

(b) Escribir una ecuación para el desplazamiento subsiguiente de cada masa en función del tiempo.

(c) ¿Qué duración (en segundos) caracteriza la transferencia periódica del movimiento de  $B$  a  $A$  y vuelta de nuevo a  $B$ ? Después de un ciclo, ¿se reproduce exactamente la situación que teníamos para  $t = 0$ ? Explicar.

/5-7 Se conectan dos objetos,  $A$  y  $B$ , cada uno de ellos de masa  $m$ , mediante muelles, según se ve en la figura. El muelle de acople tiene una constante  $k_c$ , y los otros dos tienen una constante  $k_0$ . Si se sujetá  $B$ ,  $A$  vibra a una frecuencia de  $1,81 \text{ seg}^{-1}$ . La frecuencia  $\nu_1$  del modo normal inferior es  $1,14 \text{ seg}^{-1}$ .



(a) Comprobar personalmente que las ecuaciones del movimiento de  $A$  y  $B$  son:

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -k_0 x_A - k_c(x_A - x_B)$$

$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -k_0 x_B - k_c(x_B - x_A)$$

(b) Poniendo  $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$ , demostrar que las frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de los modos normales vienen dadas por:

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = [\omega_0^2 + (2k_c/m)]^{1/2},$$

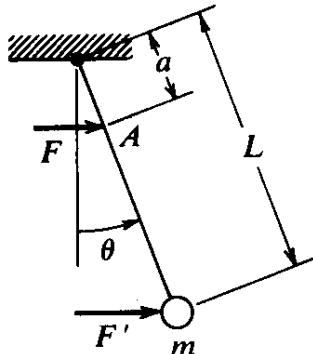
y que la frecuencia angular de  $A$  cuando se sujetá  $B$  ( $x_B = 0$  siempre) viene dada por

$$\omega_A = [\omega_0^2 + (k_c/m)]^{1/2}$$

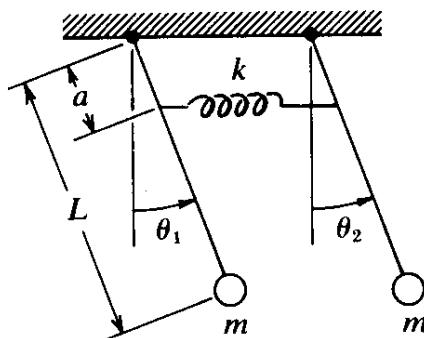
(c) Utilizando los datos numéricos anteriores, calcular la frecuencia esperada ( $\nu_2$ ) del modo normal más alto. (El valor observado fue  $2,27 \text{ seg}^{-1}$ .)

(d) A partir de estos mismos datos calcular el cociente  $k_c/k_0$  de las dos constantes de los muelles.

- 5-8 (a) Se aplica una fuerza  $F$  en el punto  $A$  de un péndulo, según está indicado. ¿Para qué ángulo  $\theta$  ( $\ll 1$  radian) se presenta la nueva posición de equilibrio? ¿Qué fuerza  $F'$ , aplicada a  $m$ , produciría el mismo resultado?



(a)



(b)

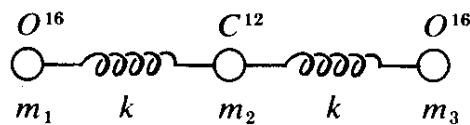
Dos péndulos idénticos compuestos de masas iguales montados sobre varillas rígidas y sin peso se disponen del modo indicado. El acoplamiento lo proporciona un muelle ligero (no deformado cuando ambas varillas son verticales y colocado en la situación indicada).

- (b) Escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento para oscilaciones de *pequeña amplitud* en función de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . (Despreciar el amortiguamiento.)  
 (c) Describir el movimiento de los péndulos en cada uno de los modos normales.

(d) Calcular las frecuencias de los modos normales del sistema.

[*Indicación:* Puede explotarse la simetría del sistema con ventaja, particularmente en las partes (c) y (d), en tanto que las respuestas obtenidas de este modo sean comprobadas en las ecuaciones.]

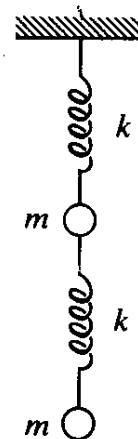
- 5-9 La molécula de CO<sub>2</sub> puede asemejarse a un sistema constituido por una masa central  $m_2$  unida por muelles iguales de constante  $k$  a dos masas  $m_1$  y  $m_3$  (siendo  $m_3 = m_1$ ).



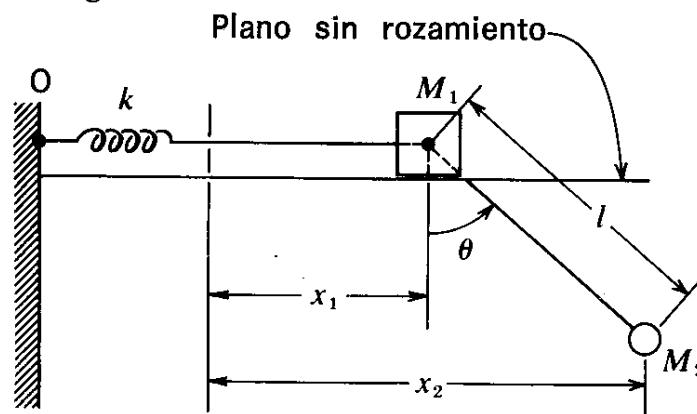
- (a) Plantear y resolver las ecuaciones para los dos modos normales en los cuales las masas oscilan a lo largo de la recta que une sus centros. [La ecuación del movimiento para  $m_3$  es  $m_3(d^2x_3/dt^2) = -k(x_3 - x_2)$  y pueden escribirse ecuaciones semejantes para  $m_1$  y  $m_2$ .]

- (b) Haciendo  $m_1 = m_3 = 16$  unidades, y  $m_2 = 12$  unidades, ¿cuál será el cociente de las frecuencias de ambos modos, admitiendo que fuese aplicable esta descripción clásica?

**5-10** Se unen dos masas iguales según se indica mediante dos muelles de constante  $k$ . Considerando sólo el movimiento vertical, demostrar que las frecuencias angulares de los dos modos normales viene dada por  $\omega^2 = (3 \pm \sqrt{5})k/2m$  y que, por tanto, el cociente entre las frecuencias de los modos normales vale  $(\sqrt{5} + 1)/(\sqrt{5} - 1)$ . Hallar el cociente de amplitudes de las dos masas en cada modo separado. (Nota: No es necesario considerar las fuerzas gravitatorias que actúan sobre las masas, porque son independientes de los desplazamientos y, por tanto, no contribuyen a las fuerzas restauradoras que causan las oscilaciones. Las fuerzas gravitatorias simplemente originan un desplazamiento de las posiciones de equilibrio de las masas y no hay que hallar cuál es el valor de dicho desplazamiento.)



**5-11** El esquema muestra una masa  $M_1$  sobre un plano sin rozamiento unida a un soporte  $O$  mediante un muelle de rigidez  $k$ . La masa  $M_2$  está sujeta a la  $M_1$  mediante una cuerda de longitud  $l$ .



(a) Utilizando la aproximación de oscilaciones pequeñas,

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x_2 - x_1}{l}$$

y partiendo de  $F = ma$ , deducir la ecuación del movimiento de  $M_1$  y  $M_2$ :

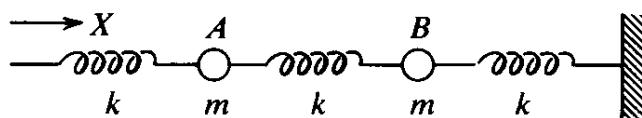
$$M_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 + M_2 \frac{g}{l} (x_2 - x_1)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -\frac{M_2 g}{l} (x_2 - x_1)$$

(b) Para  $M_1 = M_2 = M$ , utilizar las ecuaciones para obtener las frecuencias normales del sistema.

(c) ¿Cuáles son los movimientos de modo normal para  $M_1 = M_2 = M$  y  $gl \gg k/M$ ?

5-12 Se unen dos masas iguales  $m$  a tres muelles idénticos (constante del muelle  $k$ ) sobre una superficie horizontal sin rozamiento (véase figura). Un extremo del sistema está fijo; el otro se impulsa hacia adelante y hacia atrás con un desplazamiento  $X = X_0 \cos \omega t$ . Hallar y dibujar esquemáticamente gráficos de los desplazamientos resultantes de ambas masas.

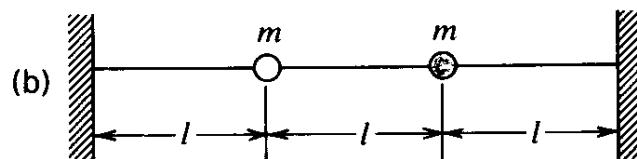
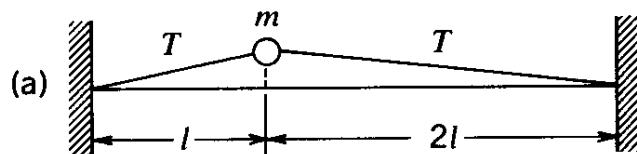


5-13 Se sujeta por sus extremos a dos soportes fijos una cuerda de longitud  $3l$  y masa despreciable. La tensión en la cuerda es  $T$ .

(a) ✓ Se sujeta una partícula de masa  $m$  a una distancia  $l$  de un extremo de la cuerda, como está indicado. Escribir la ecuación para las oscilaciones transversales pequeñas de  $m$  y hallar el período.

(b) Se une una partícula adicional de masa  $m$  a la cuerda como se ve en la figura, dividiéndola en tres segmentos iguales cada uno de ellos con tensión  $T$ . Dibujar el aspecto de la cuerda y la posición de las masas en los dos modos normales separados de las oscilaciones transversales.

(c) Calcular  $\omega$  para aquel modo normal que tenga mayor frecuencia.

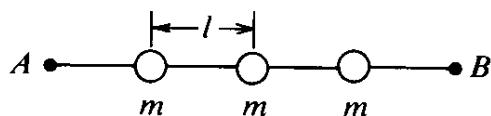


$$A_{pn} = C_n \sin$$

5-14 Para adquirir cierta familiaridad con la ecuación

$$A_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)$$

[Ec. (5-26) del texto], que describe las amplitudes de las partículas unidas en los diversos modos normales, tomar el caso  $N = 3$  y tabular, en un esquema  $3 \times 3$ , los valores numéricos relativos de las amplitudes de las partículas ( $p = 1, 2, 3$ ) en cada uno de los modos normales ( $n = 1, 2, 3$ ).



5-15 Se sujeta a puntos fijos  $A$  y  $B$ , separados una distancia  $4l$ , una cuerda elástica de masa despreciable, estirada hasta tener una tensión  $T$ , la cual lleva tres partículas de masa  $m$  igualmente espaciadas, según se indica.

(a) Suponer que las partículas tienen desplazamientos transversales pequeños  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ , respectivamente, en un instante dado. Escribir la ecuación diferencial del movimiento de cada masa.

(b) El aspecto de los modos normales puede hallarse dibujando las curvas sinusoidales que pasan por  $A$  y  $B$ . Dibujar estas curvas de modo que sirvan para hallar los valores relativos y los signos de  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  en cada uno de los posibles modos del sistema.

(c) Poniendo  $y_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega t$ ,  $y_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega t$  en las ecuaciones (a), utilizar los cocientes  $A_1:A_2:A_3$  de la parte (b) para hallar las frecuencias angulares de los modos separados.

5-16 Considerando un sistema de  $N$  osciladores acoplados asociados a una frecuencia  $\omega < 2\omega_0$  (es decir,  $y_0 = 0$ ,  $y_{N+1} = h \cos \omega t$ ). Hallar las amplitudes resultantes de los  $N$  osciladores. [Indicación: Las ecuaciones diferenciales del movimiento son las mismas que en el caso sin impulsar (sólo son diferentes las condiciones límites). De aquí que pueda ensayarse  $A_p = C \operatorname{sen} \alpha p$ , y determinar así los valores necesarios de  $\alpha$  y  $C$ . (Nota: Si  $\omega < 2\omega_0$ ,  $\alpha$  es complejo y las ondas se amortiguan exponencialmente en el espacio.)]

5-17 Se demuestra en el texto que la frecuencia del modo normal elevada de una línea de masas puede hallarse considerando una partícula cerca de la mitad de la línea, rodeada por partículas que tienen desplazamientos casi iguales y de sentido opuesto que el de la propia partícula. Demostrar que puede calcularse la misma frecuencia considerando la *primera* partícula de la línea, sometida a la tensión en los segmentos de la cuerda que lo unen al extremo fijo y a la partícula 2 (véase la figura 5-19 y el estudio relacionado con ella).

*Ahora nos vamos a ocupar de una de las ramas más antiguas de las Matemáticas, la teoría de la cuerda vibrante, que tiene sus raíces en las ideas del matemático griego Pitágoras.*

NORBERT WIENER, *I Am a Mathematician* (1956)

# Modos normales de sistemas continuos.

## Análisis de Fourier

NUESTRAS DISCUSIONES en este capítulo no se limitarán a las cuerdas vibrantes. Si fuese así se podría preguntar cuál es su importancia real. Después de todo, ¿quién, fuera de una cierta parte de la comunidad de los músicos, depende de las cuerdas tensas como medio de vida? Sin embargo, a través de un análisis completo de este sistema físico casi absurdamente elemental, a través de la comprensión de su dinámica, de sus vibraciones naturales y de sus respuestas a frecuencias diferentes, estamos introduciendo unos resultados y conceptos que tienen contrapartida en todo el reino de la física, incluyendo la teoría electromagnética, la mecánica cuántica y todo lo demás. No estamos interesados fundamentalmente en el estudio de la cuerda por sí mismo, sino porque proporciona un punto de partida casi ideal. En particular, en cuanto a lo que a la mecánica se refiere, podemos pasar desde el análisis de la cuerda al comportamiento vibratorio de casi cualquier sistema que pueda considerarse con estructura continua. Finalmente, a una escala microscópica suficientemente pequeña este análisis debe fallar; como sabemos, tenemos que volver de nuevo a la descripción de cualquier parte de material como compuesta por un gran número de partículas discretas, con una interacción muy intensa entre sí. Éste fue el tema del capítulo 5. Pero cualquier elemento no material, suficientemente grande como para ser visto o tocado, es prácticamente homogéneo y continuo, de modo que es aconsejable, y en la mayor parte de los casos justificable, hacer un análisis sencillo de su comportamiento desde este punto de vista macroscópico. Dicho análisis, entonces, será la base de todo lo que hagamos en el presente capítulo.

## VIBRACIONES LIBRES DE CUERDAS ALARGADAS

Como decía la cita del principio de este capítulo, el estudio de las cuerdas vibrantes tiene una larga historia. Naturalmente, la razón consiste en el empleo musical, desde tiempo inmemorial, de cuerdas tensas. Se dice que Pitágoras había observado cómo la división de una cuerda tensa en dos segmentos daba sonidos agradables si la longitud de dichos segmentos estaban en una razón simple. Nos interesan aquí, sin embargo, no los efectos musicales sino el hecho mecánico básico de que una cuerda, con ambos extremos fijos, tiene un número de estados de vibración natural bien definidos, como se ve en la figura 6-1. Dichos estados se denominan *vibraciones estacionarias*, en el sentido de que cada punto de la cuerda vibra transversalmente con un movimiento armónico.

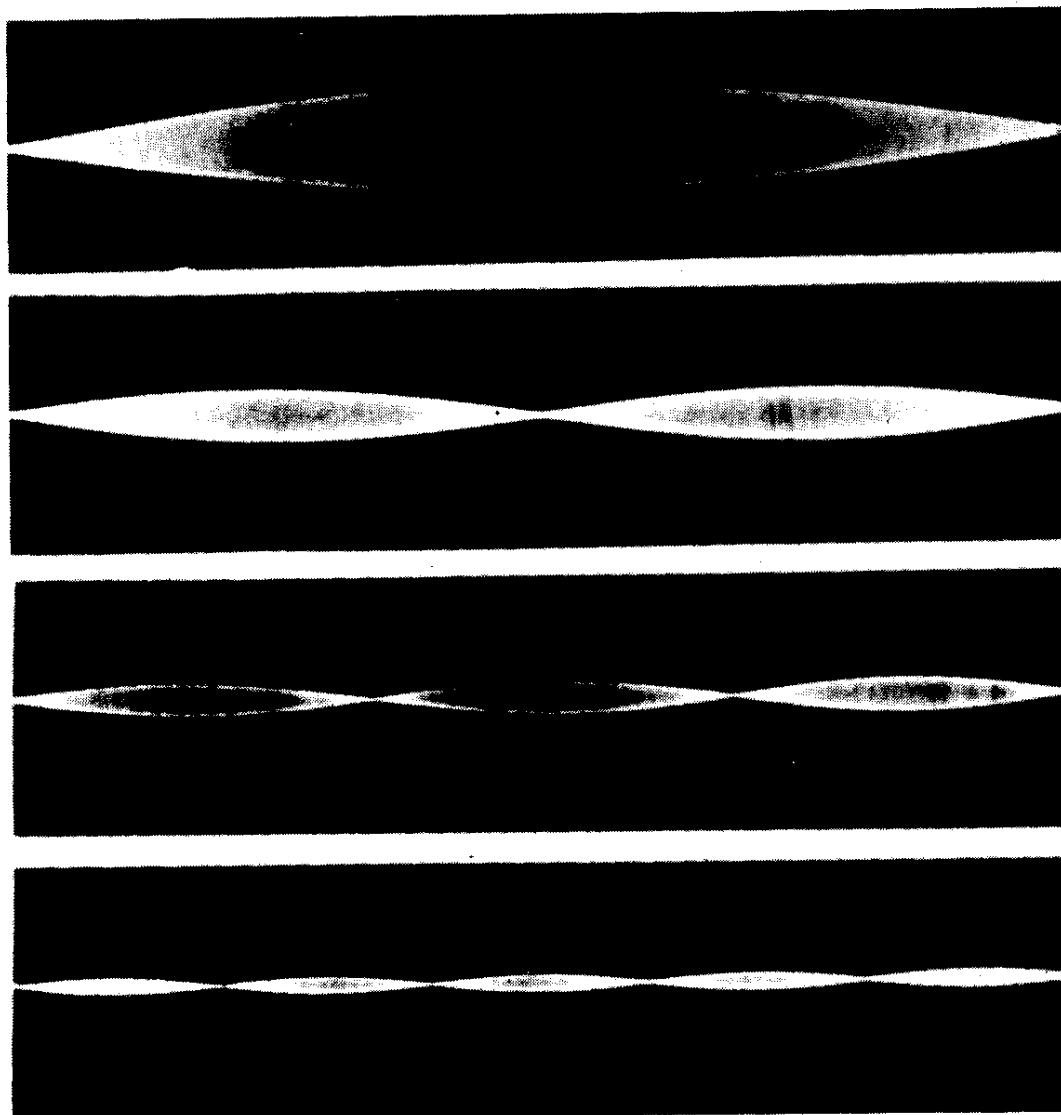


Fig. 6-1. Vibraciones de una cuerda en diversos modos simples ( $n = 1, 2, 3, 5$ ). (Según D. C. Miller, The Science of Musical Sounds, Macmillan, Nueva York, 1922.)

simple de amplitud constante, cuya frecuencia de vibración es la misma para todas las partes de la cuerda. Dichas vibraciones estacionarias representan lo que se denominan *modos normales* de la cuerda. En todos ellos, excepto en el inferior, existen puntos en que los desplazamientos permanecen nulos en todo instante. Éstos son los *nodos*; las posiciones de amplitud máxima se denominan *antinodos*. Uno puede pensar así que estos estados básicos de vibración son estacionarios en el sentido adicional de que los nodos permanecen en puntos fijos sobre la cuerda. Esto se ve de modo especialmente claro en la figura 6-1, debido a que las fotografías se han tomado con exposición.

Consideremos ahora la dinámica de dichas vibraciones. Supondremos que la cuerda tiene una longitud  $L$ , con sus extremos fijos en los puntos  $x = 0$ ,  $x = L$ . Supondremos además que la cuerda posee una densidad lineal uniforme (masa por unidad longitud) igual a  $\mu$  y que está sometida a una tensión  $T$ .<sup>1</sup> Supongamos que en algún instante la configuración de cierta parte de la cuerda sea como la indicada en la figura 6-2. En el capítulo 5 consideramos el problema equivalente para partículas puntuales unidas por una cuerda sin masa y demostramos entonces que, con una buena aproximación, la tensión permanece invariable cuando el sistema se deforma desde su configuración de equilibrio. Así pues, para el caso de un segmento corto de la cuerda de longitud  $\Delta x$ , la fuerza neta que actúa sobre él viene dada por

$$F_y = T \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - T \operatorname{sen}\theta$$

$$F_x = T \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos\theta$$

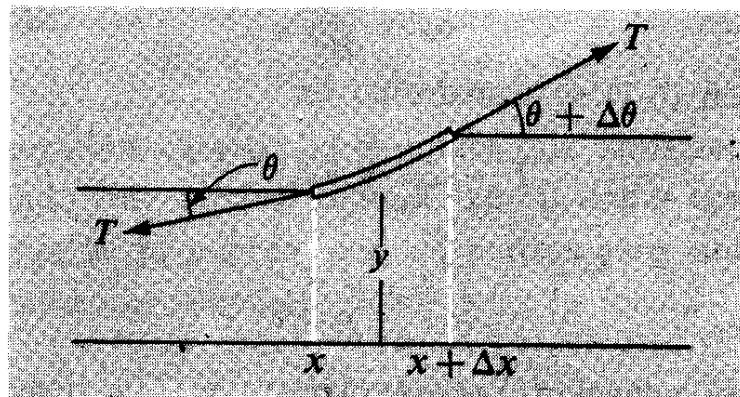


Fig. 6-2. Diagrama de fuerzas de las vibraciones transversales de un segmento corto de una cuerda con masa.

<sup>1</sup> En este capítulo el símbolo  $T$  no se empleará para designar el período de una vibración.

siendo  $\theta$ ,  $\theta + \Delta\theta$  las direcciones de las tangentes a la cuerda en los extremos del segmento, es decir, en  $x$  y  $x + \Delta x$ .

Estamos admitiendo que el desplazamiento transversal  $y$  es pequeño, de modo que  $\theta$  y  $\theta + \Delta\theta$  son ángulos pequeños. En este caso tenemos:

$$F_y \approx T\Delta\theta$$

$$F_x \approx 0$$

La ecuación que rige el movimiento transversal del segmento es, pues (muy aproximadamente)

$$T\Delta\theta = (\mu\Delta x)a_y \quad (6-1)$$

Ahora bien,  $\theta$  encierra la variación de  $y$  con  $x$  para un valor dado del tiempo  $t$ , y  $a_y$  implica la variación de  $y$  con  $t$  para un cierto valor de  $x$ . Por ello, al escribir la ecuación (6-1) en función de  $x$ ,  $y$ ,  $t$  hemos de utilizar derivadas parciales, resultando así la relación siguiente:

$$\tan \theta = -\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\sec^2 \theta \Delta\theta = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

Pero  $\sec \theta \approx 1$ , y así

$$\Delta\theta \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

También

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Así pues, la ecuación (6-1) se transforma en

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (6-2)$$

A partir de esta ecuación resulta claro que  $T/\mu$  tiene la dimensión del cuadrado de una velocidad y ésta resultará ser la velocidad con que las ondas progresivas recorren una cuerda larga que tengan estos valores de  $\mu$  y de  $T$ . Sin embargo, no consideraremos este aspecto de las cosas hasta el capítulo 7. Por el momento, definiremos simplemente la velocidad  $v$  mediante la ecuación

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \quad (6-3)$$

y volvemos a escribir entonces las ecuaciones (6-2) en la forma siguiente más compacta :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (6-4)$$

Buscaremos ahora la solución de esta ecuación correspondiente al tipo de situación representado físicamente mediante una vibración estacionaria. Esto significa que todos los puntos de la cuerda están moviéndose con una dependencia temporal de la forma  $\cos \omega t$ , pero que la amplitud de este movimiento es una función de la distancia  $x$  de este punto al extremo de la cuerda. (Nuestra dependencia temporal admitida exigirá que cada punta de la cuerda sea estacionaria instantáneamente para  $t = 0$ . Si esto no fuese así cabría introducir un ángulo de fase inicial.)

Así pues, admitamos

$$y(x, t) = f(x) \cos \omega t \quad (6-5)$$

Esto nos da entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 f(x) \cos \omega t \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{d^2 f}{dx^2} \cos \omega t \end{aligned}$$

(Obsérvese que, como  $f$  es, por definición, una función solamente de  $x$ , podemos escribir  $d^2f/dx^2$ , en lugar de una derivada parcial.) Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (6-4) nos da entonces :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f$$

Pero ésta es la ecuación diferencial familiar que satisface una función seno o coseno. Recordando que hemos definido  $x = 0$  como correspondiente a uno de los extremos fijos de la cuerda, con desplazamiento nulo en todo instante, sabemos que una solución aceptable debe tener la forma

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega x}{v}\right) \quad (6-6)$$

Pero tenemos la condición límite adicional de que el desplazamiento es siempre cero para  $x = L$ . Por tanto, se cumplirá también

$$A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega L}{v}\right) = 0$$

Por tanto,

$$\frac{\omega L}{v} = n\pi \quad (6-7)$$

siendo  $n$  un número entero positivo cualquiera.

Es conveniente introducir el número de ciclos por unidad de tiempo,  $v$ , igual a  $\omega/2\pi$ . Las frecuencias de las vibraciones estacionarias permitidas vienen dadas así por

$$\nu_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L} \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \quad (6-8)$$

donde  $n$ , de acuerdo con este cálculo, puede ser 1, 2, 3, ... hasta infinito.<sup>1</sup>

Un modo muy expresivo de describir la forma de la cuerda en cualquier instante y en cualquier modo particular  $n$ , se obtiene teniendo en cuenta que la longitud total de la cuerda debe acomodarse exactamente a un número entero de curvas mitad de una sinusoides, según indica la ecuación (6-7). Por lo tanto, podemos definir una *longitud de onda*,  $\lambda_n$ , asociada con el modo  $n$ , tal que

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (6-9)$$

Entonces podemos poner

$$\frac{\omega}{v} = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

Por tanto, teniendo en cuenta la ecuación (6-6), la forma de la cuerda en el modo  $n$  está caracterizada por la ecuación siguiente:

$$f_n(x) = A_n \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda_n} \right) = A_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (6-10)$$

y la descripción completa del movimiento de la cuerda es, pues, la siguiente:

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda_n} \cos \omega_n t \quad (6-11)$$

en donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} = n\omega_1$$

Como todas las frecuencias posibles de una cuerda dada tensa son, de acuerdo con el análisis anterior, simplemente múltiplos enteros de la frecuencia más baja posible,  $\omega_1$ , se tiene un interés particular en este modo básico, el *fundamental*. La frecuencia de este modo fundamental es la que define lo que conocemos como tono característico de una cuerda vibrante y, por lo

<sup>1</sup> La forma esencial de esta dependencia funcional de  $v$  con  $L$ ,  $T$  y  $\mu$  fue descubierta por Galileo.

tanto, la que define para nosotros la tensión necesaria para obtener una nota determinada de una cuerda con masa y longitud dada.

*Ejemplo.* La cuerda E de un violín ha de ajustarse a una frecuencia de 640 Hz. Su longitud y masa (desde el puente a su extremo) son 33 cm y 0,125 g, respectivamente. ¿Qué tensión se necesita?

A partir de la ecuación (6-8) tenemos

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

y pondremos  $\mu$  igual a  $m/L$ , siendo  $m$  la masa total. Esto nos da entonces

$$\begin{aligned} T &= 4mLv_1^2 \\ &= 4(1.25 \times 10^{-4})(0.33)(6.4 \times 10^2)^2 \quad (\text{MKS}) \\ &\approx 68 \text{ N} \end{aligned}$$

Esto es, por tanto, una tensión de 15 lb.<sup>1</sup>, aproximadamente.

La tensión total de las cuatro cuerdas de un violín es de alrededor de 250 newtons.

## SUPERPOSICIÓN DE MODOS SOBRE UNA CUERDA

En un instrumento de cuerda como un piano, la cuerda se golpea una vez en cierto punto escogido. En el momento del impacto y durante un breve instante posterior, la cuerda se ve bruscamente empujada hacia un lado de dicho punto y su forma no se parece a una cuerda sinusoidal. Un poco después, sin embargo, se establece un movimiento que es una superposición sencilla del modo fundamental y algunos de sus armónicos inferiores. Es un hecho físicamente muy importante que estas relaciones pueden presentarse simultáneamente y, para todos los efectos, independientemente las unas de las otras. Esto puede suceder debido a que las propiedades del sistema son tales que la ecuación dinámica básica (6-2) es *lineal*, es decir, solamente se presentan las primeras potencias del desplazamiento  $y$  en todos los puntos de la misma. Si llamamos  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , etc., a las diversas soluciones individuales de esta ecuación, correspondientes a los diversos armónicos individuales, entonces su suma satisface también la ecuación básica y, por lo tanto, el movimiento descrito puede considerarse como resoluble en estas componentes individuales. La fi-

<sup>1</sup> Diez newtons  $\approx$  2,2 lb.



Fig. 6-3. Vibraciones compuestas de una cuerda formada por combinaciones de modos simples. (Según D. C. Miller, The Science of Musical Sounds, Macmillan, Nueva York, 1922.)

Figura 6-3 muestra algunos ejemplos de dichas vibraciones compuestas o superpuestas. Puede mostrarse su independencia mutua deteniendo rápidamente el movimiento transversal de la cuerda en un punto que sea un nodo para algunos armónicos pero no para otros. Aquellas vibraciones componentes para las que el punto es un nodo continuarán sin verse afectadas; las otras se apagarán. Así pues, por ejemplo, si una cuerda de piano se hace sonar fuertemente pulsando la tecla y ésta se mantiene pulsada, si luego la cuerda se toca en un tercio de su longitud, todas las vibraciones componentes se detienen excepto los múltiplos tercero, sexto, etc., de las frecuencias fundamentales.

Este principio de independencia y superposición para diversos modos normales del sistema vibrante tiene una importancia fundamental para el análisis de perturbaciones complicadas; realmente, es el fundamento del análisis de Fourier. El fenómeno tal y como se manifiesta en una cuerda vibrante fue estudiado claramente por primera vez por Daniel Bernouilli en 1753. Debido a que una cuerda real no se ve en la práctica perfectamente descrita mediante nuestras ecuaciones idealizadas, la independencia de los modos separados no será realmente completa, aunque en alguna circunstancia puede suceder así.

## VIBRACIÓN ARMÓNICA FORZADA DE UNA CUERDA TENSA

Como hemos visto anteriormente, las vibraciones libres de una cuerda con ambos extremos rígidamente fijos están limitadas estrictamente a la frecuencia fundamental y a sus múltiplos enteros. Pero ahora, como hicimos en el capítulo 4 para el caso de un oscilador armónico simple, consideraremos la respuesta de la cuerda a una fuerza impulsora periódica. A fin de tener una discusión simple y bien definida, imaginemos que el extremo de la cuerda  $x = L$  permanece fijo firmemente, pero que el extremo en  $x = 0$  está vibrando transversalmente con una cierta frecuencia angular arbitraria y con una amplitud  $B$ .

Como en la ecuación (6-5), supondremos una solución estacionaria de la forma

$$y(x, t) = f(x) \cos \omega t$$

pero sometida ahora a las condiciones siguientes:

$$y(0, t) = B \cos \omega t$$

$$y(L, t) = 0$$

La ecuación básica del movimiento es todavía la ecuación (6-4), de modo que  $f(x)$  debe ser una función sinusoidal de  $x$ . Escribiremos, por tanto,

$$f(x) = A \sin(Kx + \alpha)$$

De la ecuación (6-4) resulta  $K = \omega/v$ , de modo que

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{v} + \alpha\right)$$

Esto se parece a la ecuación (6-6) excepto en que tiene un parámetro ajustable  $\alpha$ . A partir de la condición límite en  $x = L$ , tendremos entonces

$$\sin\left(\frac{\omega L}{v} + \alpha\right) = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\omega L}{v} + \alpha = p\pi$$

siendo  $p$  un entero. A partir de la condición límite para  $x = 0$ , se tiene

$$B = A \sin \alpha$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{B}{\sin\left(p\pi - \frac{\omega L}{v}\right)} \quad (6-12)$$

Lo que implica este resultado es que, para una amplitud dada del desplazamiento forzado en el extremo terminal, la respuesta de la cuerda como un todo será muy grande siempre que la frecuencia impulsora esté cerca de una de las frecuencias naturales definidas por la ecuación (6-8). Realmente, de acuerdo con la ecuación (6-12), la amplitud impulsora resultará infinitamente grande a las frecuencias naturales exactas, y la situación a frecuencias próximas será poco más o menos como la indicada en la figura 6-4. Sin embargo, sabemos que la existencia de las fuerzas amortiguadoras eliminarán estos infinitos no reales y que el comportamiento real simplemente será que  $A/B \gg 1$  para  $\omega \approx \omega_n$ .

La característica más importante del resultado anterior es que puede obtenerse una gran respuesta forzada con una pequeña amplitud impulsora haciendo que la fuerza impulsora actúe en un punto que esté próximo a un *nodo* de una de las vibraciones naturales. Sin embargo, como es evidente, no puede ser exactamente un nodo, porque por definición no se puede imponer ningún movimiento allí. Además, en cualquier sistema real, el tipo de respuesta de gran amplitud indicada en la figura 6-4 se produce sólo después de una ampliación de la fuerza impulsora periódica pequeña en varios períodos de vibración. No existe ningún procedimiento mágico de alimentar instantáneamente en el sistema la gran energía representada por la amplitud resonante de la vibración. Se parece mucho más al crecimiento lento de una oscilación forzada y amortiguada durante la etapa transitoria, como indicábamos en la figura 4-11 (c).

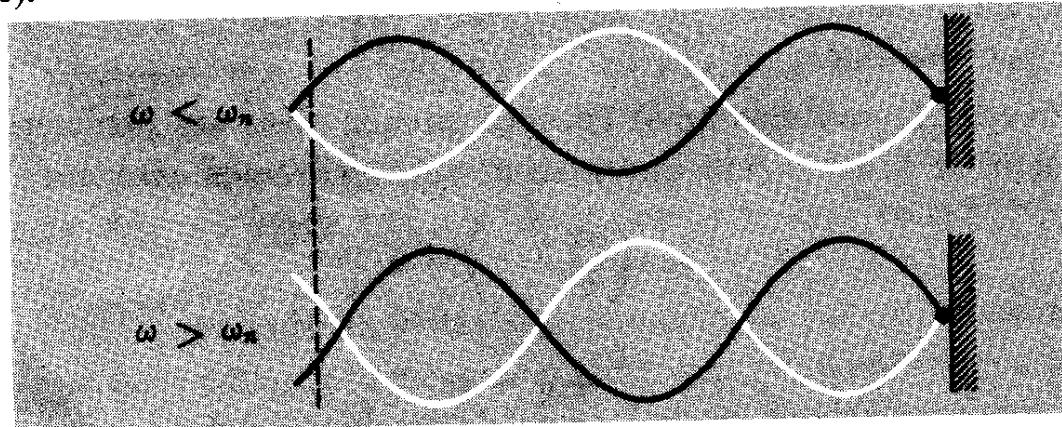


Fig. 6-4. Configuraciones de una cuerda que se hace vibrar un poco por debajo y por encima de la frecuencia natural de un modo normal de vibración.

[Cualquiera que lea esto y que esté familiarizado también con el diseño de pianos puede estar un poco confundido por este modo de accionar o impulsar una cuerda en un nodo o próximo a él para obtener una respuesta de

resonancia. Porque en la práctica los martillos del piano golpean en la cuerda a una distancia que es aproximadamente un séptimo de su total longitud. Y el objeto y el efecto conseguido consiste en *suprimir* el armónico séptimo cuyo sonido no es agradable, y no para resaltarlo, como el análisis anterior podría implicar. El punto interesante consiste en que cualquier desplazamiento no nulo en un punto que sea precisamente el nodo de un armónico determinado no representa, cuando se aplica energía mediante un impulso simple (como término opuesto a un impulso periódico), un medio de excitar dicha vibración particular natural del sistema.]

Habiendo visto alguna vez las características básicas de las vibraciones libres y forzadas de una cuerda, volvamos ahora a algunos otros sistemas que presentan el mismo tiempo de comportamiento.

## VIBRACIONES LONGITUDINALES DE UNA VARILLA

Cuando se golpea el extremo de una varilla metálica, se producen vibraciones de frecuencias muy altas pero audibles. Si la varilla está adecuadamente sujetada, por ejemplo, mediante una mordaza delgada en su punto medio, las vibraciones persisten durante bastante tiempo. La  $Q$  del sistema, especialmente en el caso de la más baja de las frecuencias naturales posibles, es bastante alta y pueden, en algunos casos, dar como resultado un tono sorprendentemente puro.

En el capítulo 3 vimos brevemente las propiedades de este tipo de sistema en conexión con el problema de un cuerpo unido a un muelle de gran masa. Allí comprobamos que la frecuencia natural de vibración debe ser proporcional a  $\sqrt{Y/\rho}$ , siendo  $Y$  el módulo de Young y  $\rho$  la densidad. Ahora consideraremos el caso con más cuidado.

El problema es realmente mucho más parecido al de la cuerda tensa, pero como veremos es bastante difícil de visualizar debido a que el desplazamiento es en la misma dirección que  $x$  y no transversal a  $x$ . Utilizaremos el símbolo  $\xi$  para designar el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio de cada partícula de la variable que estaba inicialmente a una distancia  $x$  de cierta sección que se supone fija (o permanentemente desacelerada). Consideraremos entonces la ecuación del movimiento de esta fina lámina de la varilla contenida entre  $x$  y  $x + \Delta x$ , que está en el estado no perturbado [véase figura 6-5 (a)].

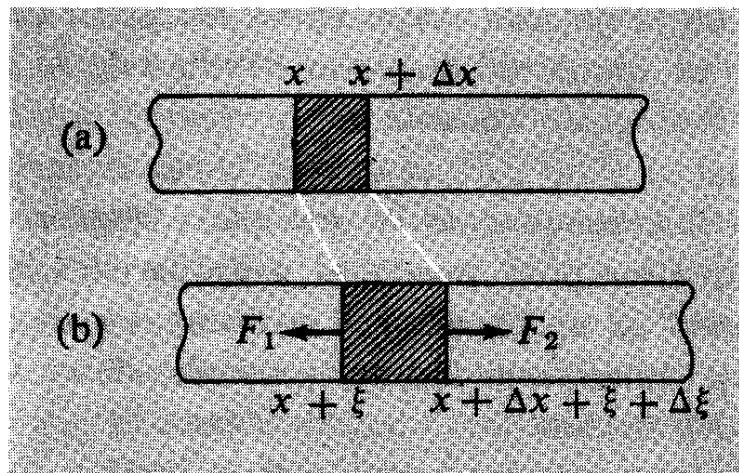


Fig. 6-5. (a) Varilla de masa apreciable. (b) La misma varilla después de un desplazamiento longitudinal bajo condiciones no estáticas. La sección sombreada contiene la misma cantidad de materiales que la parte sombreada de (a).

Entonces, como se indica en la figura 6-5 (b) (en la cual, naturalmente, los desplazamientos están muy exagerados), el material que se muestra sombreado es primeramente comprimido y luego estirado. Se ve empujado en sentidos opuestos por las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . Ahora bien, el valor de  $F_1$  depende de la variación relativa de las separaciones interatómicas en  $x$ . Análogamente, este valor depende de la variación fraccionaria o relativa de separación en  $x + \Delta x$ . Estas fuerzas serán en general ligeramente diferentes. Como resultado de la deformación, sin embargo, todo el material de nuestra lámina está en un estado de tensión y podemos definir un valor medio de esta tensión en función de la deformación total. La longitud de la lámina (originalmente  $\Delta x$ ) ha aumentado en  $\Delta\xi$ . Por lo tanto,

$$\text{deformación media} = \frac{\Delta\xi}{\Delta x}$$

$$\text{tensión media} = Y \frac{\Delta\xi}{\Delta x}$$

Ahora nos daremos cuenta de que podemos definir la tensión *en un valor particular de x* como el valor de  $Y(\partial\xi/\partial x)$  en dicho punto.<sup>1</sup> Y entonces, para un punto  $\Delta x$  bastante alejado, tendremos:

$$(\text{tensión en } x + \Delta x) = (\text{tensión en } x) + \frac{\partial(\text{tensión})}{\partial x} \Delta x$$

<sup>1</sup> Obsérvese la derivada parcial, debido a que la tensión en un punto  $x$  dado varía también con  $t$ .

Así pues, si el área de la sección recta de la varilla es  $\alpha$ , tenemos

$$F_1 = \alpha Y \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$F_2 = \alpha Y \frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x$$

y así

$$F_2 - F_1 = \alpha Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x$$

Esto termina la parte conceptualmente difícil del cálculo.

Aplicaremos ahora la ley de Newton al material comprendido entre  $x$  y  $x + \Delta x$ . Si la densidad es  $\rho$ , su masa es  $\rho \alpha \Delta x$ . Su aceleración es la segunda derivada respecto al tiempo del desplazamiento, que coincide con  $\ddot{\xi}$  en el límite de valores muy pequeños de  $\Delta x$  [véase figura 6-5 (b)]. De aquí resulta

$$\alpha Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x = \rho \alpha \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

o sea

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (6-13)$$

con  $v = (Y/\rho)^{1/2}$ . Esto es realmente semejante a la ecuación (6-2) para la cuerda tensa y podemos empezar a buscar soluciones del tipo

$$\xi(x, t) = f(x) \cos \omega t \quad (6-14)$$

Sin embargo, existe una importante diferencia de condiciones límites. En la mayoría de las circunstancias no tendremos ambos extremos de la varilla fijos. Esto puede disponerse así, pero normalmente la varilla estará fija bien por un extremo, dejando el otro extremo libre, o en el centro, en cuyo caso ambos extremos están libres.

Consideremos ahora el caso en que un extremo está fijo. Este caso casi coincide con nuestra consideración anterior y primitiva de la oscilación de un muelle con masa (capítulo 3). Supongamos que el extremo fijo coincide con  $x = 0$ , y el extremo libre corresponde a  $x = L$ . Sabemos que la ecuación (6-13) implica una variación sinusoidal de  $\xi$  con  $x$  en cualquier instante, y así se puede escribir

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega x}{v}\right) \quad (6-15)$$

como en la ecuación (6-6).

La condición  $x = L$  debe expresar el hecho de que éste es un extremo libre. En términos físicos esto significa que la tensión en ese punto es cero.

Ningún material adyacente está tirando del extremo de la varilla en dicho punto, e inversamente tampoco existe ningún material adyacente que haya de ser acelerado. De aquí que, para  $x = L$ , resulte

$$F = \alpha Y \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Según las ecuaciones (6-14) y (6-15), esto significa

$$\cos\left(\frac{\omega L}{v}\right) = 0$$

o bien,

$$\frac{\omega L}{v} = (n - \frac{1}{2})\pi \quad (6-16)$$

siendo  $n$  un entero positivo.<sup>1</sup> Las frecuencias naturales de la varilla vienen dadas así por

$$\nu_n = \frac{(n - \frac{1}{2})v}{2L} = \frac{n - \frac{1}{2}}{2L} \left(\frac{Y}{\rho}\right)^{1/2} \quad (6-17)$$

Utilizando la condición dada por la ecuación (6-16), se puede ver que la longitud de la varilla debe acomodar un número entero de cuartos de longitud de onda de curvas sinusoidales. Los tres modos inferiores se muestran esquemáticamente en la figura 6-6, pero hay que recordar que los desplazamientos son realmente longitudinales y no transversales.

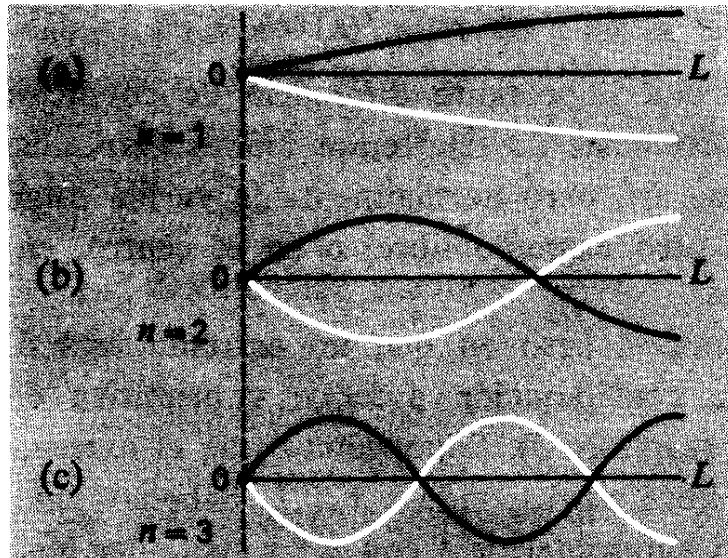


Fig. 6-6. Modos normales longitudinales de una varilla con masa apreciable sujeta en un extremo. Para mayor claridad se han representado los desplazamientos longitudinales como si fuesen transversales.

<sup>1</sup> El empleo de  $(n - \frac{1}{2})\pi$  en lugar de  $(n + \frac{1}{2})\pi$  en la Ec. (6-16) nos permite numerar los modos 1, 2, 3, etc.

El modo inferior de una varilla de este tipo, fija por un extremo, tiene una frecuencia que viene dada por

$$\nu_1 = \frac{1}{4L} \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{1/2} \quad (6-18)$$

Supóngase, por ejemplo, que tenemos una varilla de aluminio de 1 m de larga. Tendríamos, en este caso,

$$Y \approx 6 \times 10^{10} \text{ kg/m/seg}^2$$

$$\rho \approx 2,7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

lo que daría

$$\nu_1 \approx 1200 \text{ Hz}$$

Es interesante comparar nuestro resultado exacto, ecuación (6-18), con el que obtuvimos en el capítulo 3 (véase su discusión en pág. 61). Admitiendo (erróneamente) que la tensión y la deformación en cualquier instante durante la vibración tienen los mismos valores a lo largo de toda la longitud de la varilla, se encuentra la fórmula siguiente para la frecuencia de una varilla fija por un extremo:

$$(\text{erróneo}) \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{3k}{M} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi L} \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{1/2}$$

En lugar del coeficiente  $\frac{1}{4}$  de la ecuación (6-18), deberíamos tener  $\sqrt{3}/2\pi = 1/3,6$ , lo que nos originaría un valor de las frecuencias sobreestimado en un 10 % aproximadamente.

## VIBRACIONES DE COLUMNAS DE AIRE

Es evidente que una columna de aire, o cualquier otro gas, representa un sistema casi equivalente a una varilla sólida. Cada uno de ellos tiene su elasticidad interna y la comparación con que empezamos en el capítulo 3 puede continuarse a la luz de nuestro estudio presente.

Con una columna de aire es interesante considerar todos los modos que pueden obtenerse teniendo un solo extremo abierto o bien los dos. Un extremo abierto representa (aproximadamente, a cualquier frecuencia) una condición de variación de presión nula durante la oscilación y un lugar de máximo movimiento del aire. Por otra parte, un extremo cerrado es un lugar donde el

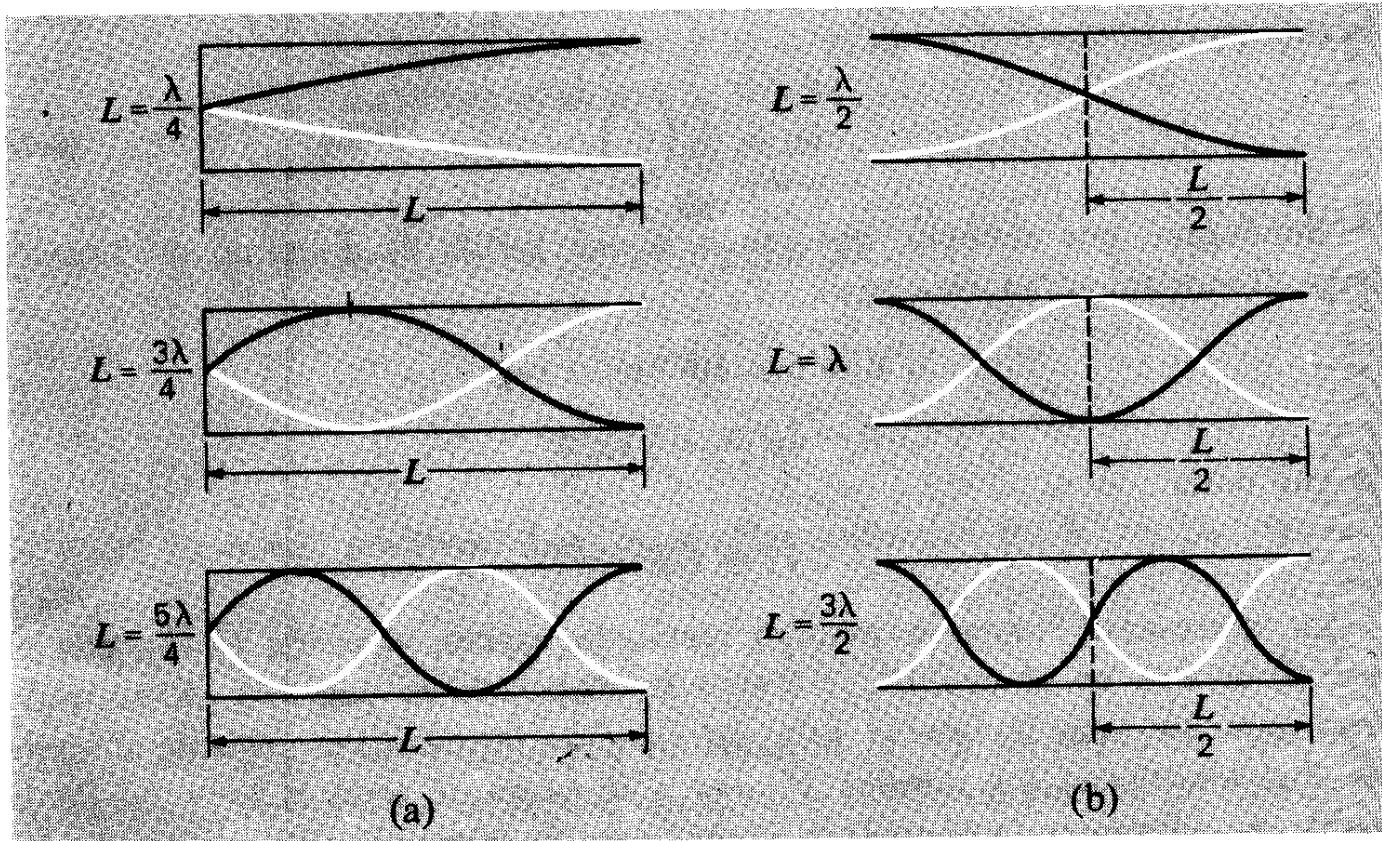


Fig. 6-7. (a) Los tres primeros modos normales de un tubo abierto sólo por un extremo. (b) Los tres primeros modos normales de un tubo abierto por ambos extremos.

movimiento es nulo y máxima la variación de presión. Si el aire está contenido en un tubo con un extremo cerrado y el otro abierto, el modo de vibración y la frecuencia asociada viene definido por uno de los casos representados en la figura 6-7 (a), en los que todos tienen un nodo en un extremo y un antinodo en el otro. Pero es posible, como se ve en la figura 6-7 (b), obtener otras series de vibraciones dejando ambos extremos del tubo abiertos, obteniendo, por tanto, un antinodo de desplazamiento en cada extremo. En el caso de un tubo con una longitud dada, las frecuencias posibles son entonces todos los múltiplos enteros de la frecuencia del modo inferior con un extremo cerrado, primer diagrama de la figura 6-7. Los múltiplos impares pertenecen todos al caso del tubo cerrado y los múltiplos pares al del tubo abierto. Puede señalarse que los modos alternados en la secuencia del extremo abierto (aquellos que tienen un nodo en el centro) corresponden a los modos de extremos cerrados de una columna de longitud  $L/2$ . Puede señalarse también que un tubo con ambos extremos cerrados tiene la misma serie de frecuencias naturales

que uno con ambos extremos abiertos, aunque difiere de él por el intercambio de posiciones entre los nodos y antinodos.<sup>1</sup>

## ELASTICIDAD DE UN GAS

La descripción precedente nos permite numerar las frecuencias relativas en una columna de aire, pero consideraremos ahora la frecuencia absoluta para una columna de gas de una longitud dada. Nos interesa esencialmente la evaluación correcta de la velocidad  $v$  que aparece en la ecuación diferencial básica, semejante a la de la ecuación (6-13). Y esto significa que debemos utilizar un módulo de Young,  $Y$ . En el capítulo 3 señalamos que el módulo de un gas estaba definido por la ecuación

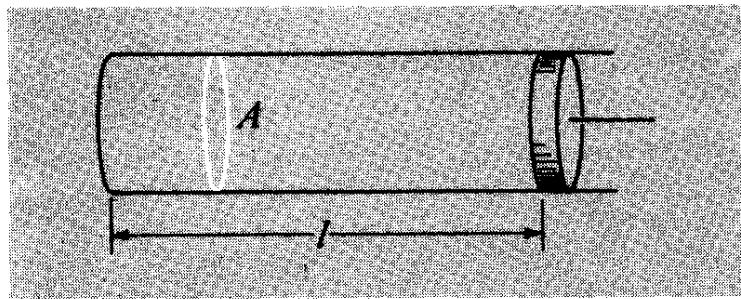
$$K = -V \frac{dp}{dV}$$

y que para las oscilaciones de un gas las variaciones de  $p$  y  $V$  tenían lugar en condiciones adiabáticas, condiciones en las que no hay transferencia de calor, lo cual significa que la temperatura se eleva y desciende y que, por tanto, la ley de Boyle no describe la relación entre  $p$  y  $V$ . Ahora haremos un cálculo explícito.

Supóngase que un tubo de área de sección recta  $A$  y longitud  $l$ , cerrado por un pistón, contiene gas a una presión  $p$  y cuya densidad es  $\rho$  (fig. 6-8). De acuerdo con la teoría cinética de un gas ideal, la presión viene dada por

$$p = \frac{1}{3} \rho v_{\text{cm}}^2 \quad (6-19)$$

<sup>1</sup> Las vibraciones de las columnas de aire en los instrumentos musicales reales encierran muchas sutilidades que no hemos indicado en esta explicación. Los tipos básicos de los modos son, sin embargo, muy parecidos a los enumerados aquí. Un tubo de órgano normal siempre tiene un antinodo en su boca (en el extremo inferior) y puede estar cerrado o abierto en la parte superior. Una flauta es esencialmente semejante a un tubo de órgano abierto, pero los instrumentos con lengüeta o boquilla (incluyendo los tubos de órgano de boquilla y los instrumentos de metal en los que los labios actúan como lengüetas), el extremo en el que está dicha lengüeta es aproximadamente un extremo cerrado; el otro extremo naturalmente abierto. La lengüeta actúa como un agente impulsor a la frecuencia de resonancia de la columna de aire. Alimenta de energía en un punto aproximándose a un nodo de desplazamiento, muy parecido al caso de la cuerda que está impulsada por un extremo. Si se desea más información sobre estos puntos y otros temas fascinantes de la física de la música, pueden recomendarse los siguientes libros como punto de partida: Arthur Benade, *Horns, Strings and Harmony*, Doubleday (Science Study Series), Nueva York, 1960; Sir James Jeans, *Science and Music*, Cambridge University Press, Nueva York, 1961; Jess J. Josephs, *The Physics of Musical Sound*, Van Nostrand (Momentum Books), Princeton, N.J., 1967; John Backus, *The Acoustical Foundations of Music*, W. W. Norton, Nueva York, 1969.

Fig. 6-8. *Tubo con un pistón.*

en donde  $v_{\text{cm}}^2$  es la velocidad cuadrática media de las moléculas.<sup>1</sup> Si la masa total del gas en el tubo es  $m$ , podemos volver a escribir la ecuación (6-19) del modo siguiente:

$$p = \frac{m}{3Al} v_{\text{cm}}^2$$

Y esto puede escribirse de un modo más sencillo si introducimos la energía cinética total de traslación,  $E_k$ , de todas las partículas:

$$E_k = \frac{1}{2} mv_{\text{cm}}^2$$

Sustituyendo este valor, encontramos

$$p = \frac{2}{3A} \frac{E_k}{l} \quad (6-20)$$

Consideremos ahora un movimiento del pistón que produzca un cambio de presión en toda la columna de gas, de tal modo que el trabajo realizado sobre el gas por el pistón se almacena dentro del gas, representando así una variación de su energía interna. La fuerza necesaria para producir una compresión es esencialmente igual a  $pA$ , de modo que el trabajo realizado sobre el gas, como consecuencia de una variación de longitud,  $\Delta l$ , de la columna de gas, viene dada por

$$\Delta W = -pA \Delta l$$

y así es positiva si  $\Delta l$  es negativa. Si admitimos que este trabajo se emplea exclusivamente en aumentar la energía cinética de traslación de las moléculas,

$$\Delta E_k = -pA \Delta l \quad (6-21)$$

<sup>1</sup> El sufijo cm significa raíz cuadrática media.

Sin embargo, la variación de longitud  $\Delta l$  viene acompañada por variaciones de  $p$  lo mismo que de  $E_k$ ; a partir de la ecuación (6-20) tenemos, diferenciando,

$$\Delta p = \frac{2}{3A} \left( \frac{1}{l} \Delta E_k - \frac{\Delta l}{l^2} E_k \right)$$

Por lo tanto,

$$\Delta p = \frac{2}{3Al} \Delta E_k - \frac{\Delta l}{l} \left( \frac{2}{3A} \frac{E_k}{l} \right)$$

Pero, con la ayuda de las ecuaciones (6-20) y (6-21), esto se transforma en

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{2}{3Al} (-pA \Delta l) - \frac{\Delta l}{l} (p) \\ &= -\frac{5}{3} p \frac{\Delta l}{l} \end{aligned}$$

Como el área de la sección recta de la columna de gas se supone que permanece sin variar, el valor de  $\Delta l/l$  puede igualarse al cambio relativo de volumen  $\Delta V/V$ . De aquí que resulta

$$K_{\text{adiabática}} = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{5}{3} p \quad (6-22)$$

Este valor puede compararse con el módulo elástico isotermo, que coincide con  $p$  (véase capítulo 3). La velocidad  $v$  definida por este valor adiabático de  $K$  viene dada, pues, por

$$v = \left( \frac{1,667 p}{\rho} \right)^{1/2}$$

Realmente esta expresión es válida para algunos gases, pero no para todos, y no para el aire mismo. ¿Cuáles son las hipótesis que hemos hecho para obtenerla? En primer lugar, que el trabajo realizado sobre el gas en la compresión se utiliza completamente para aumentar la energía del gas, en lugar de producir pérdidas en forma de calor hacia el material que lo rodea; en segundo lugar, que esta energía retenida dentro del gas pasa enteramente a elevar la energía cinética de translación de las moléculas, en lugar de utilizarse en parte para aumentar la energía de sus movimientos internos.

La primera condición parece que se satisface en las vibraciones acústicas de todos los gases. Sin embargo, la segunda condición es válida sólo para moléculas que realmente se comportan como bolas de billar macizas, lo cual se concreta en particular a los gases monoatómicos He, Ne, A, etc. Para otros gases, incluyendo el aire, parte del trabajo realizado sobre (o por) el gas da como resultado variaciones en las rotaciones o vibraciones internas de las

moléculas. De aquí que para una variación dada de volumen, la variación de la energía cinética de traslación, que determina la presión de acuerdo con la ecuación (6-20), es menor que lo que implicaría nuestro cálculo, y así, como dijimos en el capítulo 3, la elasticidad de un gas en la vibración adiabática puede expresarse en la forma

$$K_{\text{adiabática}} = \gamma p \quad (6-23)$$

en donde  $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$ .

En el caso del aire el valor de  $\gamma$  resulta ser próximo a 1,40, y en este caso a la temperatura ambiente y presión

$$\begin{aligned} p &\approx 1,0 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ \rho &\approx 1,2 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Así pues, por ejemplo, si tenemos un tubo de 1 m de largo, cerrado en un extremo, su modo más bajo tendría, por analogía con la ecuación (6-18), una frecuencia dada por

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{4L} \left( \frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} \\ &\approx 84 \text{ Hz} \end{aligned}$$

## ESPECTRO COMPLETO DE MODOS NORMALES

En las secciones anteriores hemos estudiado las vibraciones naturales, llamadas también modos normales, de diversos tipos de sistemas físicos. Dejando a un lado la diferencia de detalle, los sistemas se supusieron que tenían las siguientes características en común:

1. Todo sistema se consideró que era monodimensional y de longitud limitada.
2. Todo sistema se consideró que tenía una estructura continua y uniforme.
3. Todo sistema se sometía a condiciones límíticas en sus extremos.
4. Todo sistema venía controlado por fuerzas restauradoras proporcionales a la separación del equilibrio.

Se dedujo a partir de estas condiciones que cada sistema poseía una serie completa de modos distintos de vibración, estando cada modo caracterizado

por un número modal  $n$ , una frecuencia  $\nu_n$  y una longitud de onda  $\lambda_n$ , estando esta última relacionada simplemente con la longitud  $L$  del sistema y con el número modal. También se vio que las frecuencias características variaban linealmente con  $n$  para cualquier sistema dado. Hagamos ahora algunas preguntas sobre dichos resultados.

Primero: ¿Cuántos modos diferentes puede tener un sistema dado? Si se acepta nuestro estudio del problema, el número de modos distintos es infinito, aunque discreto. ¿Es esto cierto? No del todo. Si se ha seguido la discusión del último capítulo se habrá aprendido que una línea de  $N$  partículas interaccionantes tienen un total de  $N$  modos normales diferentes de vibración de un tipo dado (por ejemplo, transversales puros o longitudinales puros). Por ejemplo, una varilla de 1 m de largo deberá considerarse como constituida por líneas de átomos separados unos de otros en distancia del orden de 1 Å. Así pues, se tendría sólo unos  $10^{10}$  modos normales y no un número infinito. Pero naturalmente  $10^{10}$  es un número elevadísimo, casi infinito para la mayoría de las consideraciones físicas. Sin embargo, el punto principal consiste en que podemos obtener un conjunto o *serie completa*, o *espectro*, de todos los modos normales posibles de un sistema dado y podemos asegurar que, permitiendo que el número de modos  $n$  tome todos sus valores posibles desde 1 hasta  $N$  o desde 1 hasta infinito, habremos enumerado todos ellos.

Segundo: ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas de las vibraciones estacionarias sobre un sistema uniforme monodimensional de longitud dada  $L$ ? Esto depende de las condiciones límites. Hemos estado prestando una atención especial al caso en que el desplazamiento es cero en ambos extremos. En este caso, como hemos visto, la longitud de onda  $\lambda_n$  viene dada por la relación particularmente sencilla, ecuación (6-9):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Este resultado es puramente geométrico, en el sentido de que depende sólo de la *forma* de las ecuaciones de movimientos, y que no tiene nada que ver con magnitudes tales como la elasticidad y densidad del medio. Es válido para cualquier valor de  $n$ .

En tercer lugar, ¿qué podemos decir sobre las frecuencias de los modos normales? ¿Se mantiene la linealidad de  $\nu_n$  en función de  $n$  para modos muy elevados, del mismo modo que parece mantenerse con gran exactitud para aquellas primeras docenas de armónicos que sólo son de importancia en los

fenómenos acústicos? Deberá recordarse que, para un sistema con ambos extremos fijos teníamos el resultado especialmente sencillo ecuación (6-8):

$$\nu_n = \frac{nv}{2L}$$

donde  $v$  es una velocidad que aparece como únicamente definida por las propiedades de inercia y restauradoras del medio. Pero esta proporcionalidad sencilla de  $\nu_n$  con  $n$  no es en general cierta. Para un sistema sencillo monodimensional, la frecuencia aumenta menos rápidamente cada vez con el número modal hasta que se alcanza una frecuencia límite correspondiente al número nodal más elevado posible,  $N$ , como se ve en la figura 6-9.<sup>1</sup> El sistema no es capaz de vibración a ninguna frecuencia más elevada que ésta. En el tipo de sistema monodimensional que hemos descrito, este fenómeno está ligado muy directamente al hecho de que el número de partículas que participa en el movimiento no es infinitamente grande. Sin embargo, la proporcionalidad de  $\nu_n$  con  $n$  es un resultado más bien especial y cesa de aplicarse con toda generalidad cuando pasamos a sistemas bi y tridimensionales.<sup>2</sup> Sin embargo, sigue siendo válida la característica importante de que un sistema dado monodimensional, con condiciones específicas límites, posee un conjunto numerable (aunque infinito) de modos naturales característicos de vibración.

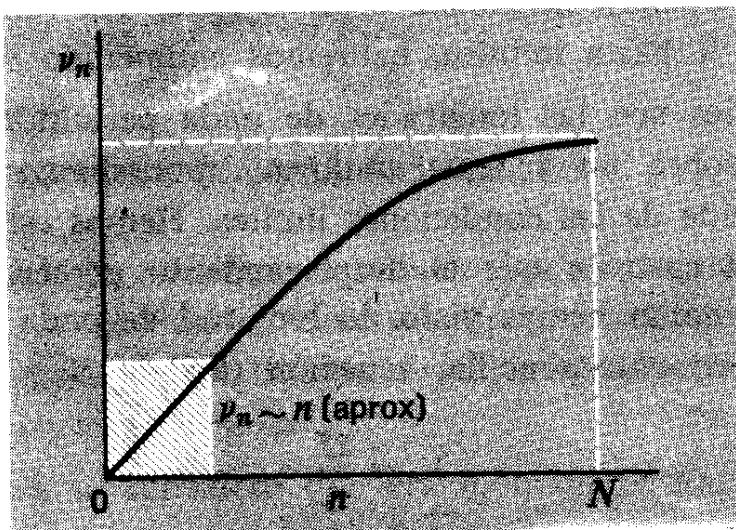


Fig. 6-9. Variación de la frecuencia modal con el número de modos hasta la frecuencia máxima posible en el caso de un sistema monodimensional. En la zona sombreada la relación entre  $\nu_n$  y  $n$  es casi lineal.

<sup>1</sup> Para otra discusión, refiérase al capítulo 5.

<sup>2</sup> Incluso en un sistema monodimensional que se considera como continuo en estructura, la relación entre las frecuencias modales resulta ser muy diferente si el sistema es no uniforme, por ejemplo, una cuerda tensa cuyo espesor aumenta continuamente desde un extremo al otro, o (como se indica en la fig. 5-1) una cadena uniforme que cuelga verticalmente, en la que la tensión disminuye de un modo continuo desde la parte superior hacia la parte inferior.

Terminemos esta discusión general de los modos normales dirigiendo nuestra atención a dos características a las que ya nos hemos referido, que son de gran importancia:

1. Las *condiciones límites*, como se aplica en este caso a los dos extremos del sistema monodimensional, juegan un papel decisivo en la determinación del carácter de los modos normales.
2. Dada la *linealidad* de nuestras ecuaciones básicas del movimiento, algunos, o todos, de los modos normales de vibración pueden coexistir con valores relativos arbitrarios de amplitud y fase.

## MODOS NORMALES DE UN SISTEMA BIDIMENSIONAL

Volvamos ahora nuestra atención a una consideración breve de los modos normales de los sistemas que son esencialmente bidimensionales, tales como una hoja elástica o una placa metálica delgada tensa. Como en el caso de los sistemas monodimensionales, la especificación de las condiciones límites, ahora, principalmente sobre los bordes, limita los movimientos permisibles a algunos casos particulares: los modos normales que son consistentes con las condiciones límites establecidas. El carácter preciso de los modos normales puede ser un indicativo muy adecuado de las simetrías que un sistema físico dado posee.

El caso más sencillo a considerar es el de una membrana vibrante rectangular. Por analogía con el caso monodimensional de una cuerda vibrante, una membrana rectangular con un límite exterior fijo tiene modos normales que pueden describirse mediante senos y cosenos del modo siguiente:

$$z(x, y, t) = C_{n_1 n_2} \left( \frac{n_1 \pi x}{L_x} \right) \left( \frac{n_2 \pi y}{L_y} \right) \cos \omega_{12} t \quad \left. \right\} \quad (6-24)$$

en donde las frecuencias de modo normal son:

$$\omega_{12} = \left( \frac{S}{\sigma} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{n_1 \pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n_2 \pi}{L_y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Aquí

$S$  = fuerza/unidad longitud (tensión superficial)

$\sigma$  = masa/unidad de área

$n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$

$L_x, L_y$  = longitudes de los lados de la membrana.

Esta ecuación puede parecer bastante compleja, pero su estructura puede claramente reconocerse si se compara con la ecuación para los modos normales de una cuerda tensa:

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t$$

en donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

El producto de las funciones seno en la ecuación (6-24) garantiza que los desplazamientos  $z$  sean siempre cero a lo largo de los límites, y el valor de  $\omega$  está caracterizado por dos enteros en lugar de uno. Si se desea, podemos imaginar la membrana completa como una serie completa de cuerdas tensas paralelas unas a las otras a lo largo (por ejemplo) de la dirección  $x$ , en la que todas han de satisfacer a dicha dirección. Pero estas cuerdas deben considerarse también como conectadas lateralmente a lo largo de líneas paralelas a la dirección  $y$  satisfaciendo alguna otra condición de longitud de onda entre  $y = 0$  e  $y = L_y$ .

La dinámica real puede construirse considerando un trozo rectangular pequeño de la membrana en ciertos puntos arbitrarios  $x$  e  $y$  [véase fig. 6-10 (a)]. La tensión superficial  $S$  actúa como una cierta fuerza por unidad longitudinal ejercida en la superficie y perpendicular a cualquier línea considerada. Así pues, si nuestro trozo tiene bordes de longitud  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , la fuerza en el plano  $xz$  en cada extremo es  $S\Delta y$ , y la fuerza en el plano  $yz$  es  $S\Delta x$ . La masa del trozo es  $\sigma \Delta x \Delta y$ . Considerando ahora la vista lateral en el plano  $xz$ , como

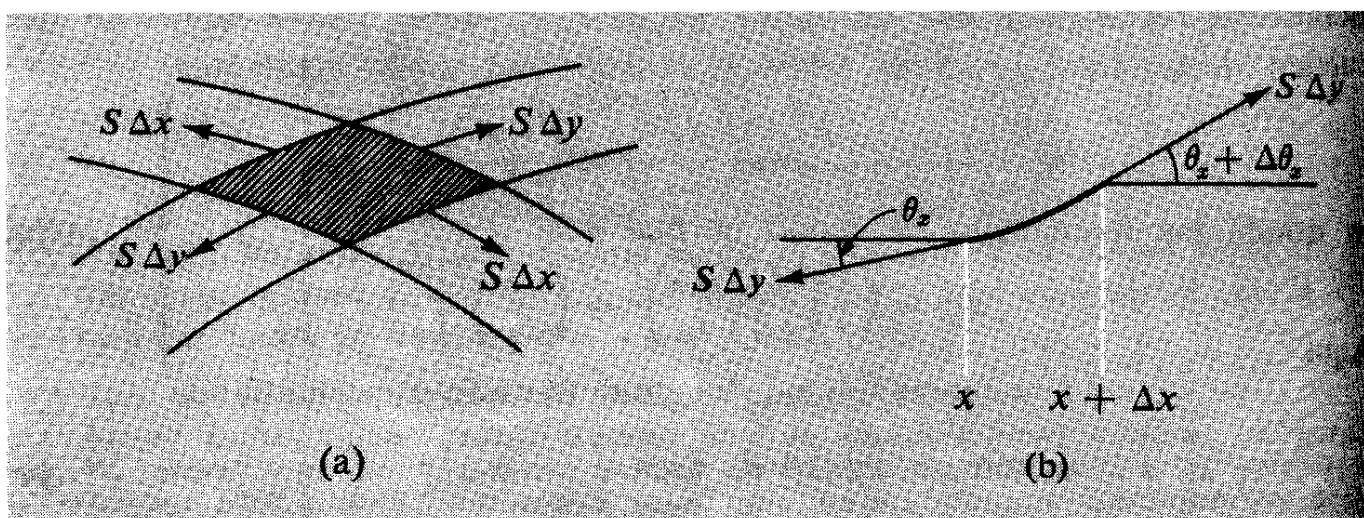


Fig. 6-10. (a) Diagrama de fuerzas para un área pequeña  $\Delta x \Delta y$  de una membrana elástica. (b) Sección recta del diagrama de fuerzas en el plano  $xz$ .

se ve en la figura 6-10 (b), la situación es parecida a la que se ve en la figura 6-2. La fuerza transversal debida a la curvatura de la membrana en el plano  $xz$  viene dada por

$$S \Delta y \Delta \theta_x = S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x \Delta y$$

Pero la membrana está curvada en el plano  $yz$  también y la fuerza, debido a esto, viene dada por

$$S \Delta x \Delta \theta_y = S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta x \Delta y$$

La fuerza total es la suma de ambas, y la masa que se ve acelerada es  $\sigma \Delta x \Delta y$ . De aquí que la ecuación del movimiento ( $ma = F$ ) se convierta en

$$\sigma \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = S \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Delta x \Delta y$$

o bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{S} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (6-25)$$

Esta ecuación del movimiento es una ampliación directa de la ecuación (6-2). Reconociendo que pueden existir vibraciones estacionarias de la forma

$$z(x, y, t) = f(x)g(y) \cos \omega t$$

llegamos de modo muy directo a las expresiones exactas para  $f$ ,  $g$  y  $\omega$  que se dan en la ecuación (6-24).

Como dijimos en la última sección, las frecuencias modales para un sistema bidimensional no presentan, en general, relaciones numéricas sencillas, ni incluso en el caso de la geometría más sencilla posible, un cuadrado. Por otra parte, los puntos de desplazamiento cero para todos los valores de  $t$  están unidos por líneas nodales, rectas paralelas a los lados del rectángulo que corresponden de un modo muy sencillo a las condiciones geométricas, impuestas en los límites.

En la figura 6-11 mostramos los modos inferiores de un rectángulo que es casi un cuadrado. Sus lados se tomaron con longitudes  $1,05 L$  y  $0,95 L$ , dando así un área casi exactamente igual a  $L^2$ . Es conveniente expresar las frecuencias posibles como múltiplos de la frecuencia  $\omega_1$  definida por

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \left( \frac{S}{\sigma} \right)^{1/2} \quad \left[ \nu_1 = \frac{1}{2L} \left( \frac{S}{\sigma} \right)^{1/2} \right]$$

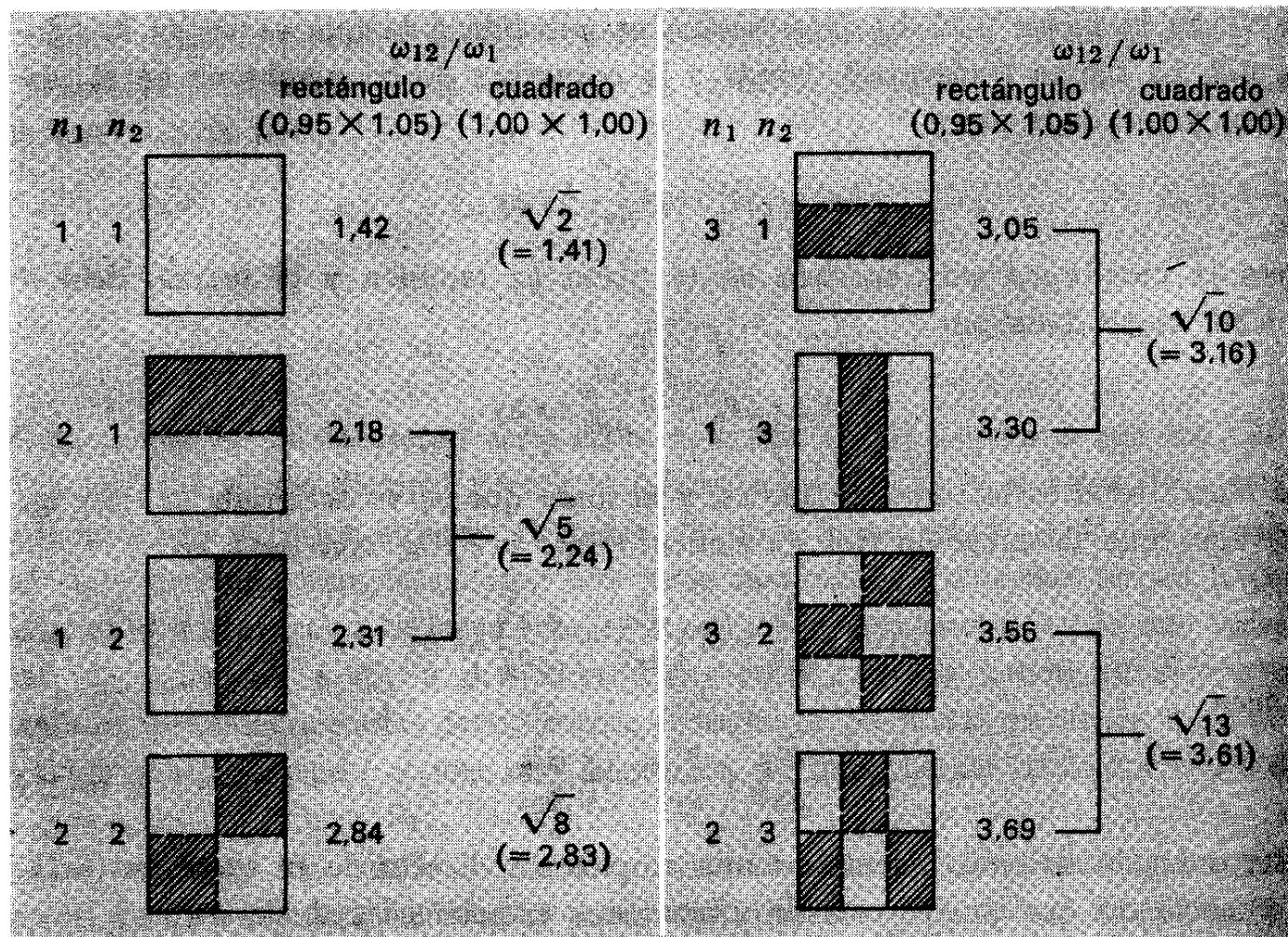


Fig. 6-11. Modos normales de una superficie rectangular plana comparados con los de un cuadrado de la misma área. Las zonas sombreadas y sin sombrear tienen desplazamientos opuestos perpendiculares al plano del diagrama y que pasan por cero en las líneas nodales.

Ésta es la frecuencia más baja con la que podría vibrar una membrana cuadrada de lado  $L$  si estuviera fija a lo largo de dos aristas opuestas y estuviese libre en las otras dos. A partir de la ecuación (6-24), las frecuencias de modos normales de nuestro rectángulo vienen dadas por

$$\omega_{12} = \omega_1 \left[ \left( \frac{n_1}{1.05} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{0.95} \right)^2 \right]^{1/2}$$

En la figura 6-11 pueden verse las líneas nodales (rayadas) con unos sombreados que muestran las porciones de la membrana que tienen desplazamientos en la misma dirección para cualquier instante dado.

Las frecuencias de modos normales para una membrana perfectamente cuadrada serán  $\sqrt{2}\omega_1$ ,  $\sqrt{5}\omega_1$ ,  $\sqrt{8}\omega_1$ , etc. Hemos escogido deliberadamente una membrana que no es exactamente un cuadrado para dirigir nuestra atención a una

característica interesante e importante. Obsérvese la tendencia de los modos de nuestro rectángulo para clasificarse ellos mismos en parejas en las que los valores  $n_1$  y  $n_2$  (si son diferentes) están intercambiados. Las frecuencias de estos modos emparejados son muy similares y comprenden a la frecuencia que ambos modos tendrían en el caso de ser una membrana perfectamente

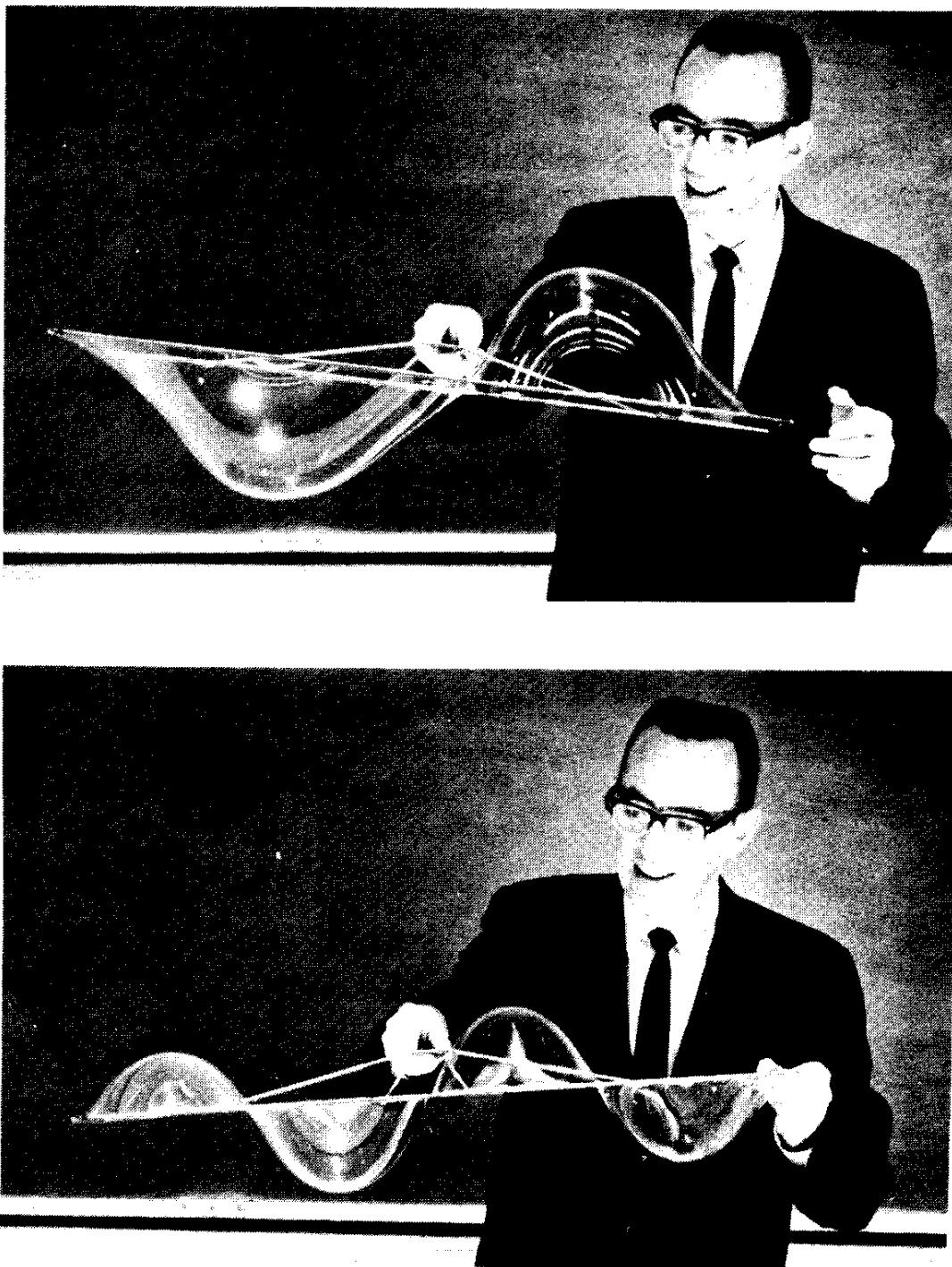


Fig. 6-12. Modos normales de una película jabonosa. (Demostración realizada por el Prof. A. M. Hudson utilizando una película jabonosa especialmente resistente compuesta de una disolución de detergente, glicerina y un poco de azúcar.)

cuadrada. El caso límite, el cuadrado perfecto, es lo que se denomina *degenerado*; una frecuencia sola puede corresponder a dos diagramas de vibración distintos geométricamente y el número de modos normales sería mayor que el número de frecuencias diferentes. Existen otras circunstancias también en las que las vibraciones de una membrana rectangular pueden ser degeneradas. Por ejemplo, si el cociente  $L_x/L_y$  es expresable como una razón de enteros, pueden encontrarse por lo menos dos series diferentes de los números ( $n_1, n_2$ ) que conduzcan al mismo valor de la frecuencia. Este fenómeno de degeneración es importante, no solamente en la mecánica clásica sino también en los sistemas atómicos y nucleares. Como ejemplo, en el modelo original de tipo Kepler del átomo de hidrógeno, desarrollado por Bohr y Sommerfeld, se describe el electrón como viajando alrededor del protón en ciertas órbitas "permitidas", no solamente las circulares que propuso originalmente Bohr, sino en una diversidad de elipses que corresponden a diferentes valores del momento cinético orbital. Muchas de estas órbitas diferentes corresponden en la forma más sencilla de la teoría a la misma energía total del electrón, pero el hecho de que son todas diferentes es importante cuando hay que contar el número de estados distinguibles que dispone un electrón en un átomo.

Las vibraciones de películas de jabón, formadas sobre un marco de alambre que define un límite rígido, proporciona una demostración muy expresiva

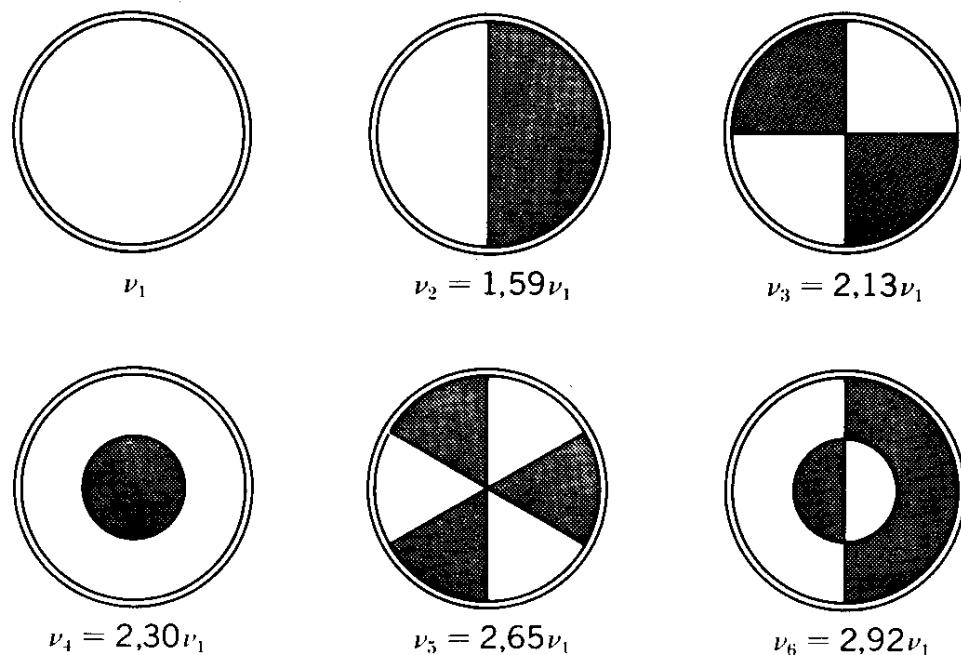


Fig. 6-13. Modos normales de un disco. Las zonas sombreadas y sin sombrear tienen desplazamientos de sentidos opuestos que pasan por cero en las líneas nodales.

de los modos normales. La figura 6-12 muestra dos de los modos de una membrana rectangular obtenida de este modo. Otra clase muy importante de vibraciones en sistemas bidimensionales se obtiene cuando el límite es circular. Si tomamos de nuevo este límite como fijo, los modos normales expresan la simetría del dispositivo mediante círculos concéntricos y líneas diamatrales. Es posible una gran variedad de vibraciones; la figura 6-13 ilustra los seis modos inferiores de dicho sistema.

En una película de jabón pueden excitarse modos más complejos de sistemas rectangulares y circulares haciendoles accionar mediante un altavoz próximo que está emitiendo la frecuencia apropiada. La figura 6-14 muestra algunos ejemplos. En esta fotografía las líneas blancas son reflexiones de los puntos en donde los desplazamientos son máximos, no las líneas nodales.

E. F. Chladni (1756-1827) ideó un método para hacer visibles las vibraciones de una placa metálica sujetada en un punto o apoyada en tres o más puntos. Arena fina espolvoreada sobre la placa se queda en reposo a lo largo de las líneas nodales en donde no existe movimiento. La placa puede excitarse pulsándola con un arco de violín o manteniendo un trozo pequeño de hielo seco contra la placa. Si se toca con un dedo en algún punto se impedirán todas las oscilaciones excepto aquellas para las cuales una línea nodal pasa a través del

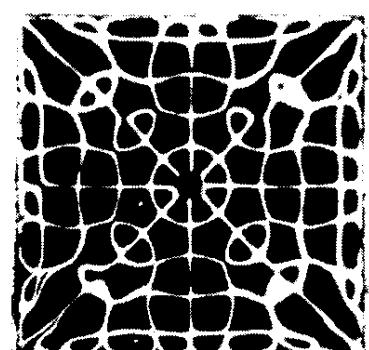
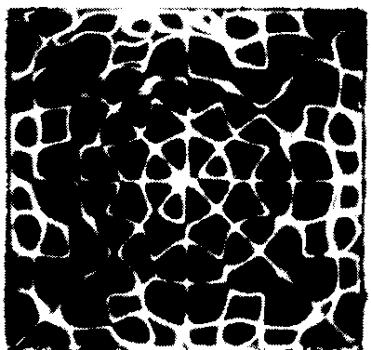
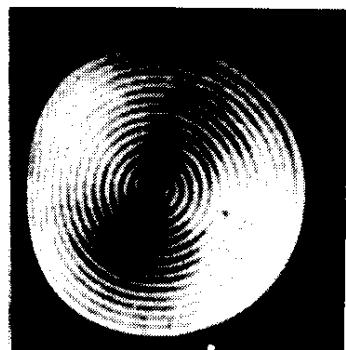
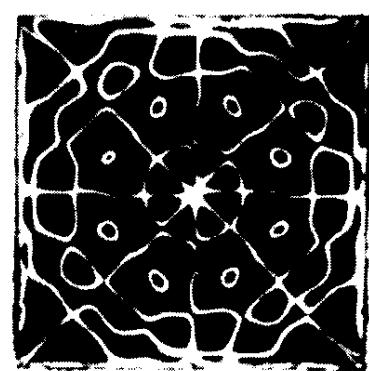
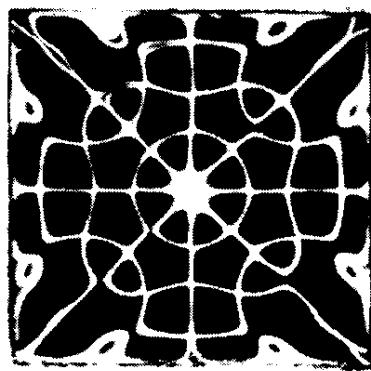
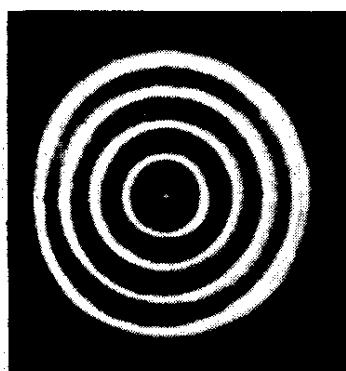


Fig. 6-14. Máximos desplazamientos de los modos de películas jabonosas. (Fotos por Ludwig Bergmann, suministradas por el Prof. U. Ingard, M.I.T.)

punto tocado. La figura 6-15 ilustra algunas figuras particularmente hermosas de Chladni obtenidas por Mary Waller.

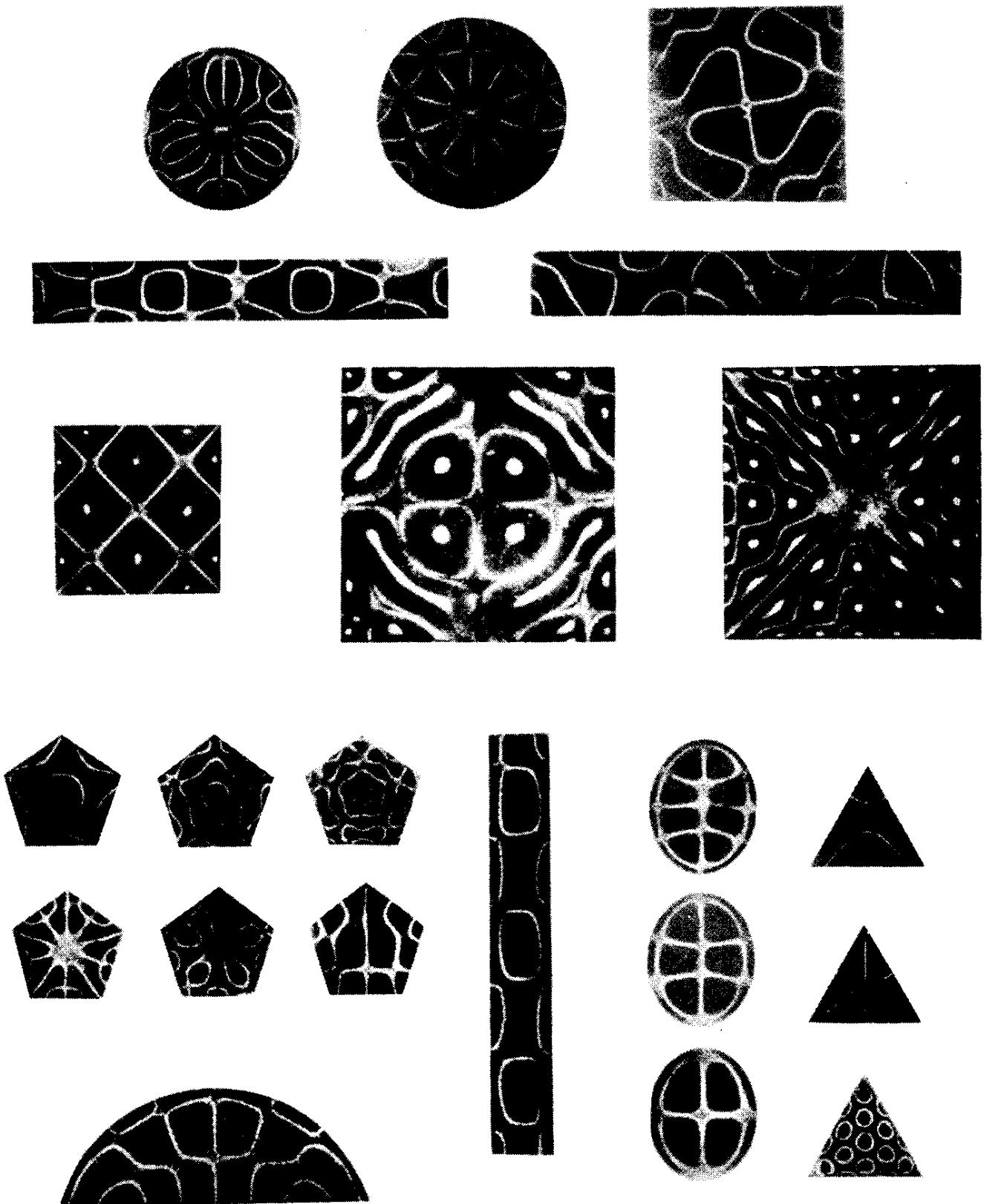


Fig. 6-15. Figuras de Chladni mostrando las líneas nodales. (Según Mary Waller, Chladni Figures: A Study in Symmetry, Bell, Londres, 1961.)

## MODOS NORMALES DE UN SISTEMA TRIDIMENSIONAL

Un trozo macizo de cualquier material tiene siempre cierto grado de elasticidad y, en consecuencia, tiene un espectro de modos normales de vibración. Esto será cierto e incluso si, como en el caso de las cuerdas y membranas que acabamos de estudiar, imaginamos que sus límites se mantienen fijos. Por ejemplo, un material como la jalea que llene completamente un recipiente más o menos rígido puede ponerse a vibrar de un modo complejo si al recipiente se le da un golpe repentino.

En el caso de sistemas monodimensionales y bidimensionales, hemos podido discutir y describir los modos característicos de la oscilación transversal de un modo bastante claro. Cuando pasamos a los sistemas tridimensionales ya no nos queda ninguna dirección de repuesto, como en el caso anterior, a lo largo de la cual podía verse que tenía lugar el desplazamiento. Por lo tanto, nos conformaremos con señalar que se puede plantear para el caso de tres dimensiones una ecuación diferencial del movimiento que tiene una analogía estricta con las ecuaciones que hemos desarrollado previamente para una o dos dimensiones. La ecuación será de la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (6-26)$$

en donde  $v$  representa cierta velocidad característica, por ejemplo, la velocidad definida por el valor de  $\sqrt{K/\rho}$ , donde  $K$  es el módulo de compresibilidad adecuado. La magnitud escalar puede entonces ser el valor de la presión en una posición y tiempo dados. Al estudiar las vibraciones normales de una varilla o de una columna de aire estábamos realmente utilizando una reducción monodimensional de esta ecuación. El medio en aquellos casos era ciertamente tridimensional pero decidimos limitar nuestra atención a las vibraciones que se podían describir en función de una coordenada de posición solamente.

Ahora nos damos cuenta que deben especificarse las condiciones límites para todas las superficies exteriores del sistema. En el caso de un bloque rectangular, fijo en todos sus límites exteriores, podemos imaginar una serie de modos normales muy parecidos a los de la membrana rectangular. Pero ahora los puntos nodales coinciden con una serie de superficies y cada vibración normal debe estar caracterizada por un conjunto de tres enteros, en lugar de dos (membrana) o de uno (cuerda). Sin embargo, no debemos intentar ir más

allá de este punto. En lugar de ello volveremos ahora al estudio de los problemas monodimensionales y de la coexistencia de un cierto número de modos normales en dicho sistema.

## ANÁLISIS DE FOURIER

Supóngase que tenemos una cuerda de longitud  $L$  fija en sus dos extremos. Entonces, como hemos visto, podría vibrar en uno cualquiera del infinito número de modos normales (sometidos a ciertas hipótesis acerca de su dinámica). Teniendo en cuenta la necesaria libertad de selección tanto de la amplitud como de la fase de un modo normal, pondremos

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (6-27)$$

Además, podemos imaginar que todos estos modos son permitidos, por el momento, de modo que el movimiento de la cuerda está especificado completamente mediante la siguiente ecuación:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad (6-28)$$

El movimiento real de la cuerda, naturalmente, puede ser muy difícil de llegar a ver, pero en tanto que estén justificadas las hipótesis físicas que conducen a la ecuación (6-27), podemos admitir que es posible una síntesis arbitraria de este tipo.

Imaginemos ahora que se hace una fotografía mediante destellos del sistema oscilante. Esto nos mostrará su configuración en cierto tiempo especificando  $t_0$ . Las magnitudes  $\cos(\omega_n t_0 - \delta_n)$  pueden considerarse entonces como una serie de números fijos, y el desplazamiento de la cuerda en cualquier valor designado  $x$  puede escribirse del modo siguiente:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6-29)$$

en donde

$$B_n = A_n \cos(\omega_n t_0 - \delta_n)$$

Hagamos ahora la siguiente afirmación: *Es posible tomar cualquier forma de perfil de la cuerda, descrita por  $y$  en función de  $x$  entre  $x = 0$  y  $x = L$  (sometidas a las condiciones  $y = 0$  para  $x = 0$  y  $x = L$ ) y analizarla en una serie infinita de funciones sinusoidales como las dadas en la ecuación (6-29).*

Puede parecer que existe una arbitrariedad grande en la afirmación anterior. Dicha arbitrariedad desaparece, sin embargo, si se considera la cuerda continua como el límite, para  $N \rightarrow \infty$ , de una fila de  $N$  partículas conectadas. Aquí es donde lo que hemos aprendido en las discusiones del capítulo 5 viene en nuestra ayuda. Podemos ver claramente que para un número finito de partículas existen precisamente  $N$  modos normales. La descripción de cada uno de estos modos hacía intervenir dos constantes ajustables, amplitud y fase. *Cualquier* movimiento de las  $N$  partículas, bajo la influencia de sus interacciones mutuas, era entonces describible en términos de una superposición de modos normales. Y la existencia de un total de  $2N$  constantes ajustables nos permitía asignar valores arbitrarios del desplazamiento y velocidad inicial a cada partícula. Nuestra afirmación presente es la consecuencia lógica de la aplicación de este resultado a un número arbitrariamente grande de partículas conectadas.

Naturalmente, no existe ningún sistema físico real donde el número de partícula sea infinito. Así pues, al pasar a este límite estamos, de hecho, trasladando nuestro problema desde el mundo de la física al mundo de las matemáticas. Y la ecuación (6-29), un enunciado notablemente simple, es la base de una de las técnicas más poderosas en toda la física matemática ; la del análisis de Fourier. El gran matemático francés Lagrange (1736-1803), que hizo de la mecánica su tema particular, desarrolló la teoría de la cuerda vibrante del modo preciso que hemos escogido para nuestro estudio, y ya en 1759 pudo enunciar el resultado expresado en la ecuación (6-29). Pero otro matemático francés, J. B. Fourier (en 1807), fue el primero en afirmar que podía describirse una función completamente arbitraria en un intervalo dado mediante una serie de este tipo. De hecho, es un resultado extraordinariamente extraño, va contra el sentido común y, sin embargo, es cierto. Consideremos brevemente un ejemplo específico de su aplicación pero primero señalemos otro resultado que está contenido en nuestra solución dinámica de un sistema vibrante.

Consideremos el movimiento transverso general de la cuerda continua, según viene dada por la ecuación (6-28). De acuerdo con nuestros cálculos originales de la cuerda continua, según se desarrolló en este mismo capítulo, las frecuencias  $\omega_n$  son múltiples enteros de una frecuencia fundamental  $\omega_1$  véase la ecuación (6-11) y el análisis precedente. Si ahora fijamos nuestra atención sobre un valor particular de  $x$ , podemos escribir  $A_n \sin(n\pi x/L)$  como un coeficiente constante  $C_n$ , y así tendremos

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t - \delta_n) \quad \text{donde } \omega_n = n\omega_1 \quad (6-30)$$

Lo que afirma *esta* expresión es que cualquier movimiento posible de un punto cualquiera de la cuerda es periódico en el tiempo  $2\pi/\omega_1$ , en donde  $\omega_1$  es la frecuencia del modo más bajo, y además que este movimiento periódico puede escribirse como una combinación, con las amplitudes y fases adecuadas, de vibraciones sinusoidales puras en las que se comprenden todos los armónicos posibles de  $\omega_1$ . Éste es entonces un análisis de Fourier en el tiempo, y no en el espacio. Puede observarse que los desarrollos expresados por las ecuaciones (6-29) y (6-30) son de una forma ligeramente diferente. No solamente uno de ellos está constituido por senos y el otro por cosenos, sino que también, si cubrimos el intervalo completo de las variables, vemos que  $n\pi x/L$  varía en un múltiplo entero de  $\pi$ , mientras que  $n\omega_1 t$  varía en un múltiplo entero de  $2\pi$ . Sin embargo, puesto que nuestro interés consiste sólo en representar la función dentro del intervalo designado y no fuera de él, la diferencia no debe preocuparnos.<sup>1</sup>

## ANÁLISIS DE FOURIER EN ACCIÓN

Para poner en práctica el análisis de Fourier, debemos determinar los coeficientes de las funciones componentes sinusoidales o cosinusoidales. El proceso de hacer esto se denomina *análisis armónico*, y las propiedades de las funciones seno y coseno hacen que el tema sea muy sencillo.

Consideremos el desarrollo de  $y(x)$ , según viene dado por la ecuación (6-29),

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

<sup>1</sup> Realmente en el intervalo  $0 < \omega_1 t < \pi$ , puede ajustarse una función arbitraria  $y(t)$  mediante expresiones incluso más sencillas que la Ec. (6-30) y en estricta analogía a la Ec. (6-29). Puede describirse en función sólo de coseno o de seno del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{coseno solamente: } y(t) &= \sum C_n \cos n\omega_1 t \\ \text{seno solamente: } y(t) &= \sum C_n \operatorname{sen} n\omega_1 t \end{aligned}$$

Como la representación en coseno es una función par de  $\omega_1 t$  y la representación seno es una función impar, ambas representaciones se comportan de manera muy diferente en el intervalo  $\pi < \omega_1 t < 2\pi$ .

Supóngase que deseamos conocer la amplitud asociada con un valor particular de  $n$ , por ejemplo  $n_1$ . Para hallarla multipliquemos ambos miembros de la ecuación por  $\sin(n_1\pi x/L)$  e integremos respecto a  $x$  en todo el intervalo de cero a  $L$ :

$$\int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx \quad (6-31)$$

En el segundo miembro aparece una serie infinita de términos. Pero consideremos ahora las propiedades de un integral cuyo integrando es un producto de senos. Dado dos ángulos cualesquiera,  $\theta$  y  $\varphi$ , tenemos

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

Por lo tanto,

$$\sin \theta \sin \varphi = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)]$$

De aquí que podemos poner

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) &= \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\frac{(n - n_1)\pi x}{L}\right] \right. \\ &\quad \left. - \cos\left[\frac{(n + n_1)\pi x}{L}\right] \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx &= \frac{L}{2\pi(n - n_1)} \sin\left[\frac{(n - n_1)\pi x}{L}\right] \\ &\quad - \frac{L}{2\pi(n + n_1)} \sin\left[\frac{(n + n_1)\pi x}{L}\right] \end{aligned}$$

Si ponemos los límites  $x = 0$ ,  $x = L$ , los valores de  $\sin((n \pm n_1)\pi x/L)$  son todos nulos. Así pues, a primera vista parece que hemos anulado por completo el segundo miembro de la ecuación (6-31). Pero observemos entonces que la magnitud  $(n - n_1)$  aparece en el denominador de una de las integrales. Así pues, si  $n = n_1$ , tenemos una integral de la forma  $0/0$ . Y resulta a su vez que aunque todos los términos sean cero, éste no lo es. Porque si  $n = n_1$ , la integral que ha de calcularse es la siguiente:

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ 1 - \cos\left(\frac{2n_1\pi x}{L}\right) \right] dx$$

El término coseno no contribuye nada entre los límites dados, pero la otra parte nos da  $L/2$ . Así pues, llegamos a la siguiente identidad:

$$\int_0^L y(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} B_n$$

es decir,

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (6-32)$$

Esta ecuación nos determina la amplitud de  $B_n$  asociada con un valor dado cualquiera de  $n$  en el análisis armónico de  $y(x)$ .

Si  $y(x)$  es una curva puramente empírica, el cálculo de los coeficientes de Fourier  $B_n$  es cuestión de calculadoras o de una integración gráfica. Pero si la forma de  $y(x)$  puede describirse mediante una función analítica exacta, podemos obtener una fórmula general para todos los valores de  $B_n$ . Para aclarar el

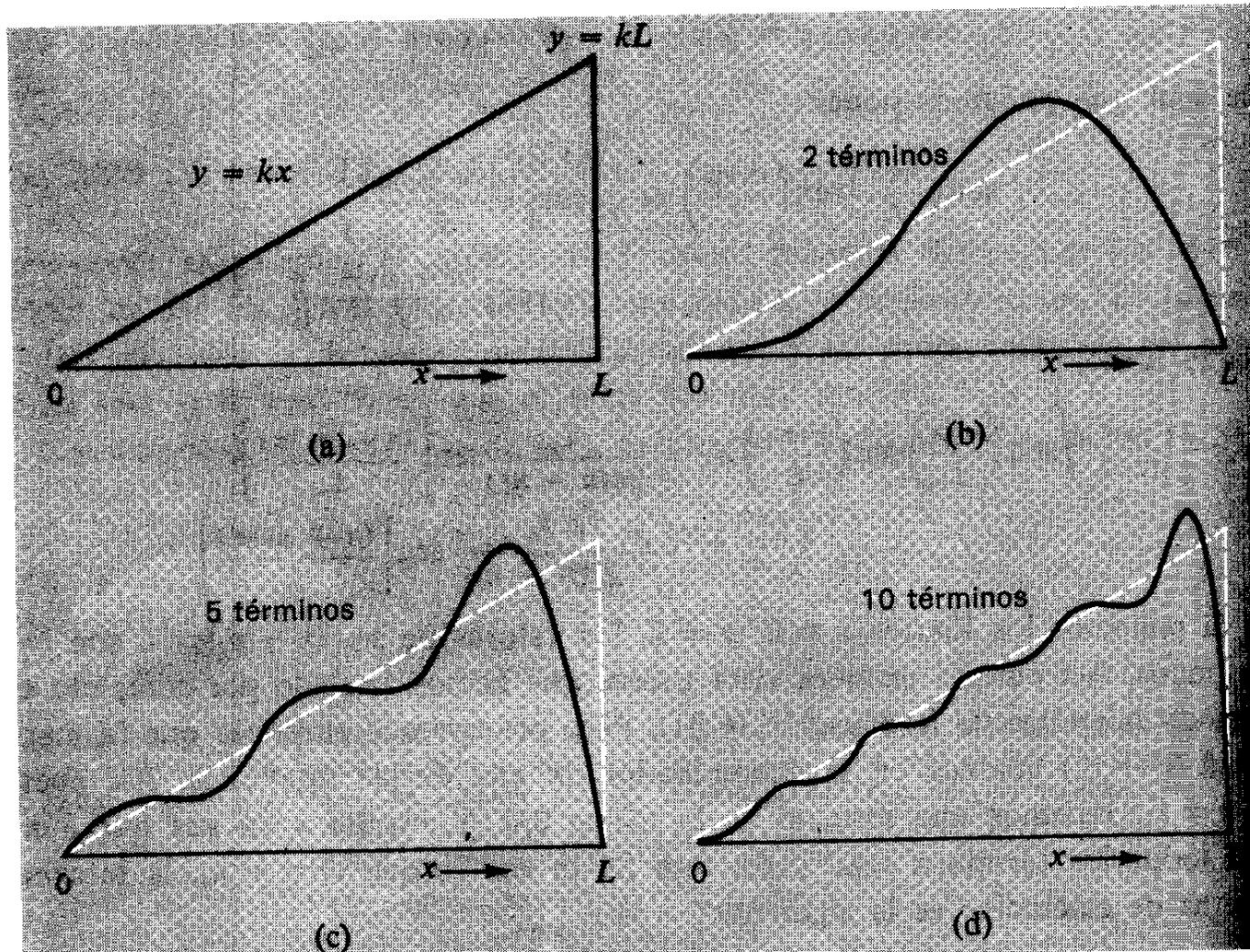


Fig. 6-16. (a) Función a analizar ; diente de sierra triangular. (b), (c), (d) Síntesis parcial de Fourier utilizando 2, 5 y 10 términos, respectivamente.

procedimiento, consideremos el perfil indicado en la figura 6-16(a). Éste es parecido a la forma de la cuerda tensa sujetada sólo por un extremo. (Naturalmente, para  $x = L$  exactamente debemos tener  $y = 0$ ; sin embargo, estamos admitiendo que nuestra ecuación para  $y$  también es válida para puntos arbitrariamente próximos al extremo.) El cálculo de  $B_n$  se desarrolla entonces del modo siguiente:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L kx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2k}{L} \left\{ -\frac{L}{n\pi} \left[ x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} \\ &= \frac{2k}{n\pi} \left\{ -\left[ x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L \right\} \\ &= -\frac{2kL}{\pi} \frac{\cos n\pi}{n} \end{aligned}$$

Se observa que los valores de  $B_n$  caen en dos categorías, según  $n$  sea par o impar, debido a que el valor del  $\cos n\pi$  alterna entre los valores  $+1$  y  $-1$ . De hecho, tenemos

$$n \text{ impar: } B_n = \frac{2kL}{n\pi}$$

$$n \text{ par: } B_n = -\frac{2kL}{n\pi}$$

Sin embargo, si se desea se pueden representar ambas series mediante la fórmula

$$B_n = (-)^{n+1} \frac{2kL}{n\pi}$$

Ahora es cosa sencilla tabular las diversas amplitudes (tabla 6-1). Así pues, nuestra descripción del perfil triangular resulta ser:

$$y(x) = \frac{2kL}{\pi} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \dots \right\}$$

En las figuras 6-16(b)-(d) se indican los resultados de sintetizar diversos números de términos, utilizando los coeficientes numéricos cuyos cinco primeros se relacionan en la tabla 6-1. Incluyendo términos adicionales podemos hacer que el ajuste sea tan bueno como queramos. Y es muy notable que, con

TABLA 6-1: VALORES DE  $B_n/kL$ 

$n$	$B_n/kL$	
1	$\frac{2}{\pi}$	= 0,636
2	$-\frac{1}{\pi}$	= -0,318
3	$\frac{2}{3\pi}$	= 0,212
4	$-\frac{1}{2\pi}$	= -0,159
5	$\frac{2}{5\pi}$	= 0,127

sólo algunos pocos términos como los que hemos utilizado, se pueda simular la tendencia general de un perfil que difiere tan radicalmente de una curva sinusoidal, especialmente una que se separa tanto del cero en uno de sus extremos.

Las curvas sinusoidales en función de las cuales se ha hecho este análisis de Fourier representan un ejemplo de lo que se denominan *funciones ortogonales*. La descripción "ortogonal" perteneció originalmente, como es natural, a la geometría. La ortogonalidad de dos funciones sinusoidales en el análisis de Fourier está descrita por el resultado

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{para } n_1 \neq n_2 \quad (6-33)$$

Esto puede, a primera vista, parecer que no tiene ninguna conexión con la conducción geométrica, pero no es así, porque si tenemos dos vectores,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , la condición de que sean ortogonales (perpendiculares) entre sí es que su producto escalar sea cero. En función de sus componentes esto puede escribirse

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \quad (6-34)$$

Ahora bien, si reemplazamos la integral continua de la ecuación (6-33) por una suma respecto a un número muy grande,  $N$ , de términos separados (como podríamos hacer si estuviésemos calculando la integral mediante métodos numéricos), y escribir un valor particular de  $x$  como  $x_p$ , en donde

$$x_p = \frac{pL}{N}$$

Así pues, la ecuación (6-33) debería ser reemplazada por la siguiente:

$$\frac{L}{N} \sum_{p=1}^N \left( \frac{n_1 \pi p}{N} \right) \left( \frac{n_2 \pi p}{N} \right) = 0 \quad \text{para } n_1 \neq n_2$$

Si escribimos la condición de ortogonalidad de dos vectores ordinarios en la forma

$$\sum_{p=1}^3 A_p B_p = 0 \quad \text{para } \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$$

vemos que en un sentido puramente formal la diferencia entre ambas afirmaciones es simplemente que en una de ellas intervienen magnitudes que están completamente descritas por sólo tres componentes, mientras que la otra necesita  $N$  componentes (y, en el límite, un gran número hasta infinito). La posibilidad de analizar una función arbitraria en función de una serie de funciones ortogonales (no necesariamente senos o cosenos) es una de las técnicas más importantes y ampliamente usadas en la física teórica y en ingeniería.

## MODOS NORMALES Y FUNCIONES ORTOGONALES

Terminaremos con algunas notas que nos hagan volver a los sistemas físicos reales. Hemos visto cómo las vibraciones características de una cuerda uniforme pueden describirse (idealmente) mediante funciones sinusoidales que son ortogonales en el sentido que acabamos de tratar. Cada modo diferente puede existir independientemente de todos los demás, y así se puede, en principio, cambiar la amplitud asociada con un modo normal sin influir sobre ninguna de las otras. En este sentido, el adjetivo normal aplicado a los modos individuales es una caracterización cierta de su independencia mutua, del todo análogo a la independencia mutua de los desplazamientos a lo largo de direcciones perpendiculares.

Esta ortogonalidad también se mantiene dinámicamente. La energía total de una cuerda vibrante en una superposición de sus modos normales es exactamente la suma de las energías correspondientes a los modos individuales. Si se escribe la expresión para la suma de las energías cinética y potencial para un segmento pequeño de la cuerda en un cierto valor arbitrario de  $x$ , se ve que se compone de dos términos: (1) términos en los que intervienen los cuadrados del seno o coseno del mismo argumento, perteneciendo a un modo simple; (2) términos en los que intervienen productos de senos o cosenos de diferentes argumentos, representando términos cruzados de modos diferentes.

Debido a la condición de ortogonalidad, ecuación (6-33), los términos del tipo 2 se hacen todos cero cuando se suma la energía para toda la longitud de la cuerda. Así pues, los modos básicos son realmente ortogonales dinámicos entre sí de un modo completo.

Nuestra discusión de esta independencia, u ortogonalidad, de los modos normales de un sistema empezó realmente con el análisis de los movimientos de dos péndulos acoplados en el capítulo 5. Podíamos haber escogido aceptar nuestra sugerencia de pasar el capítulo 5 sin estudiar en una primera lectura. Se haya hecho esto o no, puede resultar interesante volverse a referir al principio del capítulo 5 en este punto y concentrarse en seguir la línea principal del desarrollo desde allí, de modo que se siga el hilo común que corre a través de todo el tema.

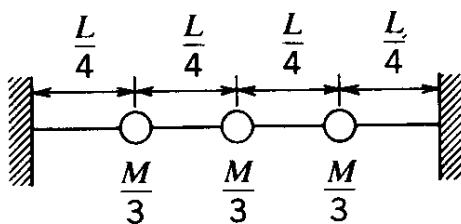
## PROBLEMAS

6-1 Una cuerda uniforme de 2,5 m de longitud y 0,01 kg de masa se somete a una tensión de 10 N.

(a) ¿Cuál es la frecuencia de su modo fundamental?

(b) Si se pulsa transversalmente la cuerda y luego se toca en un punto a 0,5 m de su extremo, ¿qué frecuencias persistirán?

6-2 Una cuerda de longitud  $L$  y masa total  $M$  se estira mediante una tensión  $T$ . ¿Cuáles son las frecuencias de los tres modos normales inferiores de oscilación de la cuerda cuando éstas son transversales? Comparar estas frecuencias con las tres frecuencias de modos normales de 3 masas cada una de ellas de valor  $M/3$  separadas a intervalos iguales sobre una cuerda sin masa sometida a una tensión  $T$  y cuya longitud total es  $L$ .



6-3 La deducción de las vibraciones libres de una cuerda tensa que se da en el texto ignora la gravedad. ¿Está justificada esta omisión? ¿Cómo se haría el análisis si hubiera que incluir los efectos gravitatorios?

6-4 Demostrar que el análisis del texto para vibraciones libres de una cuerda horizontal es también válido para una cuerda vertical si  $T \gg mg$ .

6-5 Una cuerda estirada de masa  $m$ , longitud  $L$  y tensión  $T$  se ve impulsada por dos fuentes, una en cada extremo. Ambas fuentes tienen la misma frecuencia  $\nu$  y amplitud  $A$ , pero están desfasadas exactamente  $180^\circ$  entre sí. ¿Cuál es el valor más pequeño posible de  $\omega$  consistente con las vibraciones estacionarias de la cuerda?

6-6 Se sujetó una varilla uniforme en el centro, dejando ambos extremos libres.

(a) ¿Cuáles son las frecuencias naturales de la varilla en la vibración longitudinal?

(b) ¿Cuál es la longitud de onda del modo enésimo?

(c) ¿Dónde están los nodos para el modo enésimo?

6-7 Deducir la ecuación de onda para las vibraciones de una columna de aire. El resultado final deberá ser

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

en donde  $\xi$  es el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio,  $\rho$  es la densidad máxima y  $K$  el módulo elástico.

6-8 Demostrar que para la vibración de una columna de aire:

(a) Un extremo abierto representa una condición de variaciones de presión nula durante la oscilación y de aquí un lugar en el que se presenta un movimiento máximo del aire (un antinodo).

(b) Un extremo cerrado es un lugar de movimiento cero (un nodo) y de aquí uno de variación de presión máxima.

6-9 Una habitación tiene dos paredes opuestas que están alicatadas. Las paredes restantes, el suelo y el techo están recubiertas con un material absorbente del sonido. La frecuencia más baja para la cual es acústicamente resonante la habitación es 50 Hz.

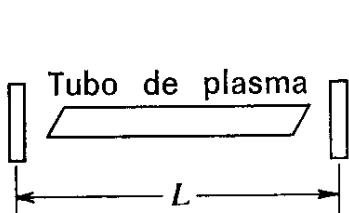
(a) Se produce un ruido complejo en la habitación que excita sólo a los dos modos inferiores, de tal modo que cada modo tiene su máxima amplitud para  $t = 0$ . Hacer un esquema del aspecto del desplazamiento para cada modo separadamente en función de  $x$  para  $t = 0$ ,  $t = 1/200$  seg y  $t = 1/100$  seg.

(b) Se observa que el desplazamiento máximo de las partículas de polvo en el aire (que no se produce necesariamente en el mismo instante en cada posición) en diversos puntos entre las paredes es la siguiente:

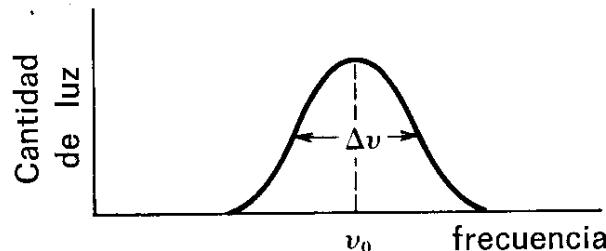
$x$	$L/4$	$L/2$	$3L/4$
$\xi_{\text{máx}}$	$+10\mu$	$+10\mu$	$-10\mu$

¿Cuáles son las amplitudes de cada uno de los dos modos separados?

6-10 Puede construirse un laser colocando un tubo de plasma en una cavidad resonante óptica formada por dos espejos planos de alta reflectividad, que actúan como paredes rígidas para las ondas luminosas (véase figura). El objeto del tubo de plasma es producir luz excitando modos normales de la cavidad.



(a)



(b)

(a) ¿Cuáles son las frecuencias normales de la cavidad resonante? (Expresar la respuesta en función de la distancia  $L$  entre los espejos y la velocidad de la luz  $c$ .)

(b) Suponer que el tubo de plasma emite luz centrada en una frecuencia  $v_0 = 5 \times 10^{14}$  Hz con un ancho espectral  $\Delta\nu$ , como se ve en el esquema. El valor de  $\Delta\nu$  es tal que todos los modos normales de la cavidad cuya frecuencia está dentro de  $\pm 1,0 \times 10^9$  Hz de  $v_0$  se verán excitados por el tubo de plasma.

(1) ¿Cuántos modos se han excitado si  $L = 1,5$  m?

(2) ¿Cuál es el mayor valor de  $L$  que sólo será excitado un modo normal (de modo que el laser tendrá solamente una frecuencia de salida)? ( $c = 3 \times 10^8$  m(seg.)

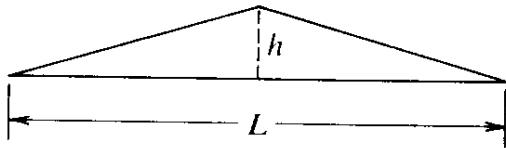
6-11 (a) Hallar la energía total de vibración de una cuerda de longitud  $L$  fija en ambos extremos, que oscila en su modo característico  $n$  con una amplitud  $A$ . La tensión de la cuerda es  $T$  y su masa total es  $M$ . (Indicación: Considérese la energía cinética integrada en el instante en que la cuerda es rectilínea de modo que no ha almacenado ninguna energía potencial respecto y por encima de la que tendría cuando no estuviese vibrando en absoluto.)

(b) Calcular la energía total de vibración de la misma cuerda, si está vibrando en la siguiente superposición de modos normales.

$$y(x, t) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos \omega_1 t + A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

(Debería comprobarse que es la suma de las energías de los dos modos tomados separadamente.)

6-12 Una cuerda de longitud  $L$  está sujetada en ambos extremos y tiene una tensión  $T$ , se empuja lateralmente a una distancia  $h$  en su centro y luego se deja libre.



(a) ¿Cuál es la energía de las oscilaciones siguientes?

(b) ¿Con qué frecuencia reaparecerá la forma indicada en la figura?

(Admitir que la tensión permanece invariable debido a un pequeño incremento de longitud causada por los desplazamientos transversales.) [Indicación: En la parte (a), considerar el trabajo realizado contra la tensión para dar a la cuerda una deformación inicial.]

**6-13** Considérese un cubo uniforme de lado  $L$  en que la velocidad de onda característica es  $v$ . Demostrar que para este sistema el número total de modos de vibración correspondientes a las frecuencias entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  es:

$$4L^3\nu^2\Delta\nu/\pi^2v^3 \quad \text{si} \quad \pi v/L \ll \Delta\nu \ll \nu.$$

[Indicación: Como  $\nu L/\pi v = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}$  considérese una red cúbica de puntos, poniendo  $x = n_1$ ,  $y = n_2$ ,  $z = n_3$ . El número de puntos en cualquier región de esta red es, por lo tanto, igual al volumen de dicha región, y los modos correspondientes a una frecuencia dada  $\nu$  corresponden a aquellos puntos situados a una distancia  $r = \nu L/\pi v$  del origen. El resultado deseado es, por tanto,  $4\pi r^2\Delta r$ . ¿Cuál sería el resultado para un cuadrado? ¿Para una varilla? ¿Cómo se vería alterada la respuesta si se considerase en lugar de un cubo un sólido ortoédrico de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ ?]

**6-14** Hallar las series de Fourier para las funciones siguientes: ( $0 \leq x \leq L$ ):

(a)  $y(x) = Ax(L - x)$ .

(b)  $y(x) = A \operatorname{sen}(\pi x/L)$ .

(c)  $y(x) = \begin{cases} A \operatorname{sen}(2\pi x/L), & 0 \leq x \leq L/2 \\ 0, & L/2 \leq x \leq L. \end{cases}$

**6-15** Hallar las series de Fourier para el movimiento de una cuerda de longitud  $L$  si

(a)  $y(x, 0) = Ax(L - x)$ ;  $(\partial y / \partial t)_{t=0} = 0$ .

(b)  $y(x, 0) = 0$ ;  $(\partial y / \partial t)_{t=0} = Bx(L - x)$ .

*¿Está compuesto el océano de agua, de olas o de ambas cosas? Alguno de mis pasajeros invitados en el Atlántico opinaban con énfasis que el océano estaba compuesto de olas; pero yo pienso que la respuesta ordinaria y sin prejuicios debería ser que está compuesto de agua.*

SIR ARTHUR EDDINGTON, *New Pathways in Science* (1935)

# Ondas progresivas

## ¿QUÉ ES UNA ONDA?

PARA MUCHA GENTE, quizá para la mayoría, la palabra "onda" trae a la mente una descripción de un océano, con las olas barriendo la playa procedentes del mar abierto. Si se ha examinado y pensado sobre este fenómeno puede que se saque la apreciación de que a pesar de toda su grandeza contiene algún elemento de contradicción. Al ver las crestas cabalgando, se adquiere un cierto sentido de asalto masivo por el agua sobre la tierra, y verdaderamente las ondas *pueden* hacer un gran daño, lo que equivale a decir que son portadoras de energía, pero, a pesar de todo, cuando las ondas u olas han roto y vuelto hacia atrás, el agua está prácticamente en el mismo sitio respecto a la playa que estaba antes. La avalancha hacia delante no significa un movimiento físico del agua. Las olas largas del mar abierto se mueven rápidamente y van muy lejos. Las olas que alcanzan la costa de California tienen sus orígenes en las tormentas del Pacífico del Sur a una distancia superior a los 15 000 km y han recorrido esta distancia a una velocidad de 60 km por hora o más aún. Evidentemente, el mismo mar no se ha movido de este modo espectacular; simplemente ha jugado el papel de agente mediante el cual se transmite un cierto efecto. Y aquí tenemos la característica esencial de lo que se denomina movimiento ondulatorio. Se transmite una propiedad de un lugar a otro por medio de un medio, pero el medio en sí mismo no se transporta. Puede relacionarse un efecto local a una causa distante y existe una diferencia de tiempo entre la causa y el efecto que depende de las propiedades del medio y encuentra su expresión en la velocidad de la onda. Todos los medios materia-

les, sólidos, líquidos y gases, pueden transportar energía e información por medio de ondas y nuestro estudio de los osciladores acoplados y de los modos normales nos ha indicado la manera de comprender este importante fenómeno.

Aunque las olas u ondas en el agua son del tipo más familiar de ondas, están también entre las más complicadas para analizar en función de los procesos físicos subyacentes. Por lo tanto, no tendremos mucho que decir sobre ellas. En lugar de esto, volveremos a nuestro punto de partida inicial, la cuerda tensa, sobre la que hemos aprendido muchas cosas que ahora pueden aplicarse a la discusión presente.

## MODOS NORMALES Y ONDAS EN MOVIMIENTO

Para provocar un modo normal concreto en una cuerda tensa, se podía hacer un molde de la misma zona exactamente de la cuerda en su amplitud máxima en este modo y ajustar la cuerda a él. Entonces, mediante la eliminación repentina de esta ligadura de la cuerda, se obtendría una vibración continua de este modo solamente.

Sin embargo, es mucho más fácil establecer el modo haciendo vibrar un extremo de la cuerda de lado a lado en un movimiento armónico simple con la frecuencia del modo deseado. ¿Pero qué sucede realmente en este caso? La vibración estacionaria no se produce inmediatamente. Lo que ocurre es que empieza a trasladarse una onda en movimiento a lo largo de la cuerda. En un instante dado cualquiera es una función sinusoidal de  $x$  [fig. 7-1 (a)]. Pero cuando la onda en su avance alcanza el extremo fijo de la cuerda ( $x = L$ ) allí se produce un proceso de reflexión (que consideraremos con más cuidado en el capítulo 8) y el movimiento de todos los puntos de la cuerda se obtiene mediante el efecto resultante de estas dos perturbaciones que viajan en sentidos opuestos [fig. 7-1 (b)]. Y después que la onda reflejada ha vuelto al extremo desde el que se produjo el impulso, desarrollará una onda estacionaria que es precisamente el modo normal deseado (si la frecuencia es la correcta en relación con la longitud, la tensión y la masa por unidad de longitud de la cuerda) [fig. 7-1 (c)]. A partir de ahora la cuerda continúa vibrando de la manera característica de un modo normal; es decir, cada punto de la misma continúa vibrando transversalmente en un movimiento armónico simple y ciertos puntos nodales permanecerán permanentemente en reposo [fig. 7-1 (d)]. Una vez que se ha establecido así el modo normal, y se mantiene el requisito

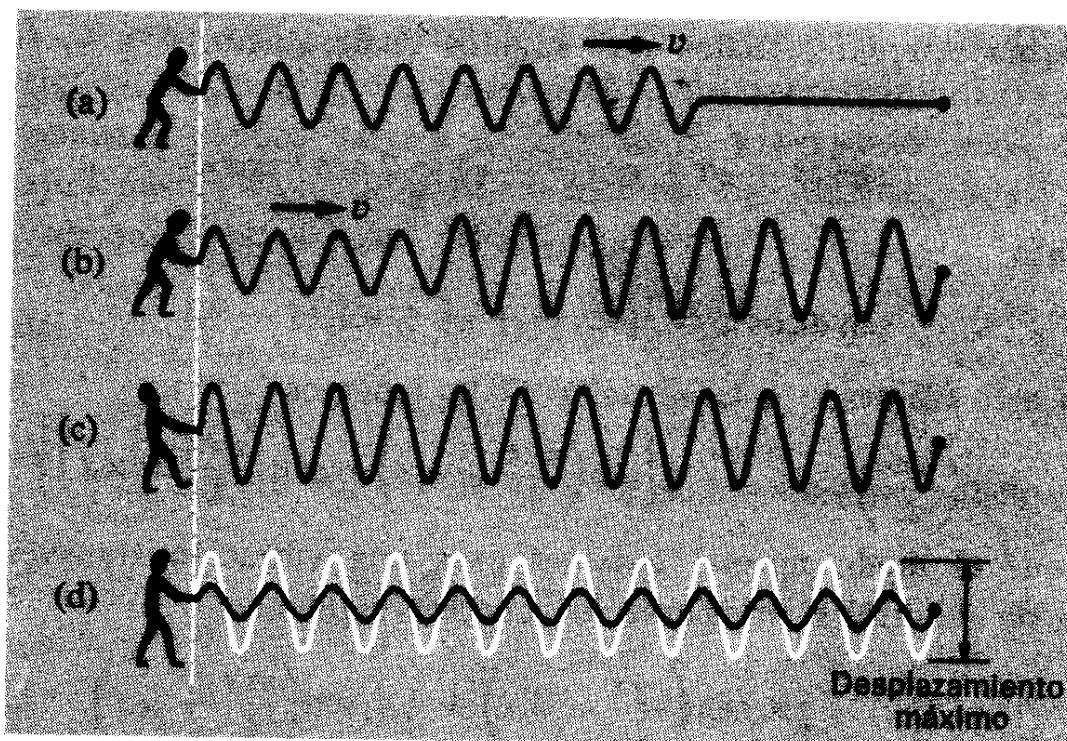


Fig. 7-1. (a) Generación de una onda móvil. (b) Onda móvil más onda reflejada. (c) Onda estacionaria resultante (modo normal) en su amplitud máxima. (d) La misma onda estacionaria que en (c), pero en un instante en que sus desplazamientos son mucho menores que los máximos.

to de alimentar de energía a la cuerda por el medio accionador, el extremo para  $x = 0$  se mantiene estacionario.

En este punto podemos introducir con mucha utilidad resultados de nuestro análisis formal de los modos normales de una cuerda tensa. Vimos que una cuerda continua de longitud  $L$ , fija en ambos extremos, podría en principio vibrar con un número infinito de modos normales. Estos modos vienen descritos por la ecuación

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t \quad (7-1)$$

en donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \quad (7-2)$$

( $T$  es la tensión de la cuerda y  $\mu$  la masa por unidad de longitud.) Se recordará que  $n$  es un entero y que si se idealiza al caso de una cuerda verdaderamente continua, entonces  $n$  puede obtener cualquier valor hasta infinito.<sup>1</sup> Hagamos uso ahora de ciertas matemáticas elementales para transformar la ecuación (7-1)

<sup>1</sup> Sin embargo, recuérdese que  $n$  tiene un límite superior finito y también que la Ec. (7-2) para  $\omega_n$  es sólo una aproximación, que falla cuando  $n$  es grande.

en una forma diferente. Dados dos ángulos cualesquiera,  $\theta$  y  $\varphi$ , tenemos la identidad:

$$\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi) = 2 \sin \theta \cos \varphi$$

Por lo tanto,

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2}[\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]$$

Aplicando este resultado a la ecuación (7-1), tenemos

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega_n t\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega_n t\right) \right]$$

De aquí que el modo normal enésimo para una vibración transversal de la cuerda puede describirse mediante la ecuación siguiente:

$$y_n(x, t) = \frac{1}{2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega_n t\right) + \frac{1}{2} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega_n t\right) \quad (7-3)$$

Si además hacemos uso de la ecuación (7-2) para  $\omega_n$ , tenemos

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= \frac{1}{2} A_n \sin\left[\frac{n\pi}{L} \left( x - \sqrt{\frac{T}{\mu}} t \right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2} A_n \sin\left[\frac{n\pi}{L} \left( x + \sqrt{\frac{T}{\mu}} t \right)\right] \end{aligned} \quad (7-4)$$

Finalmente, como vimos al estudiar los modos normales en el capítulo 6, y como es evidente en cualquier caso desde el punto de vista dimensional de la ecuación (7-4), podemos definir una velocidad característica  $v$  mediante la ecuación

$$v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \quad (7-5)$$

Procederemos ahora a comprobar que la ecuación (7-4) es una descripción matemática explícita de dos ondas móviles que van en sentidos opuestos.

Supóngase que fijamos nuestra atención sobre el primero de los dos términos del segundo miembro de la ecuación (7-4). Éste tiene la forma siguiente:

$$y(x, t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)\right] \quad (7-6)$$

en donde  $\lambda = 2L/n$ . Si imaginamos primero que el tiempo se congela en un instante particular cualquiera, el perfil de la perturbación es una onda sinusoidal con una distancia entre crestas (o entre cualquier otros dos valores sucesivos de  $x$  que tienen los mismos valores de los desplazamientos y de sus

pendientes). La magnitud  $\lambda$  es naturalmente la longitud de onda de la perturbación particular. Fijemos ahora nuestra atención sobre cualquier valor de  $y$ , qué corresponda a ciertos valores de  $x$  y de  $t$ , y preguntémonos dónde encontraremos el mismo valor de  $y$  en un instante ligeramente posterior,  $t + \Delta t$ . Si el sitio apropiado es  $x + \Delta x$ , deberíamos tener

$$y(x, t) = y(x + \Delta x, t + \Delta t)$$

Por lo tanto,

$$\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}[(x + \Delta x) - v(t + \Delta t)]\right)$$

Se deduce de esto que los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  están relacionados a través de la ecuación

$$\Delta x - v \Delta t = 0$$

es decir,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

Lo que implica esto es que, como se indica en la figura 7-2, la onda se mueve como un todo en el sentido positivo  $x$  con velocidad  $v$ .

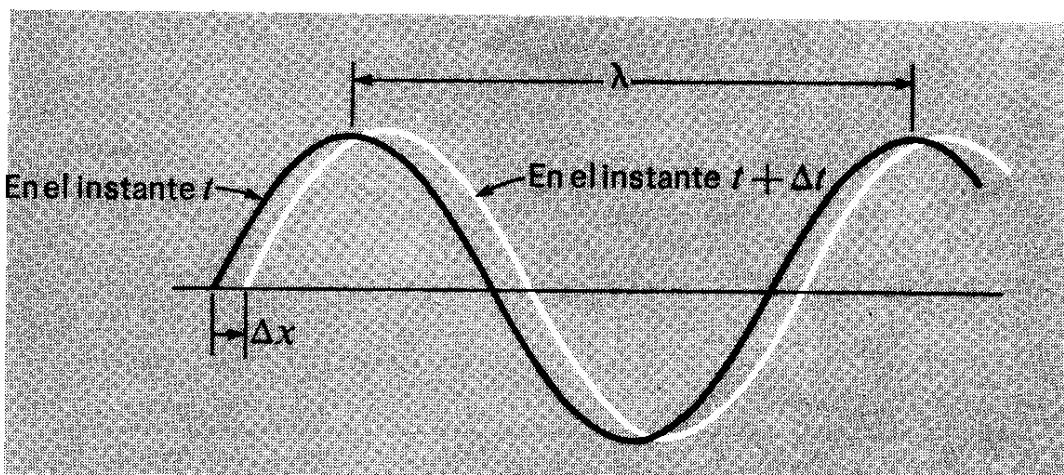


Fig. 7-2. Desplazamiento incremental de la onda que se mueve en dirección de las  $x$  positivas.

De un modo exactamente semejante, podemos ver que el segundo término de la ecuación (7-4) describe una onda de la misma longitud de onda, pero moviéndose en el sentido negativo de las  $x$  con velocidad  $v$ . La onda estacionaria parece ser precisamente equivalente desde un punto de vista matemático a la superposición de estas dos ondas de la misma longitud de onda y amplitud móviles en sentido opuesto. Sin embargo, al decir esto debemos introducir una calificación importante. La curva descrita por la ecuación (7-6) y su contrapartida con  $(x + vt)$  en el argumento de la función sinusoidal, representan ondas sinusoidales de longitud infinita, es decir, que se define auto-

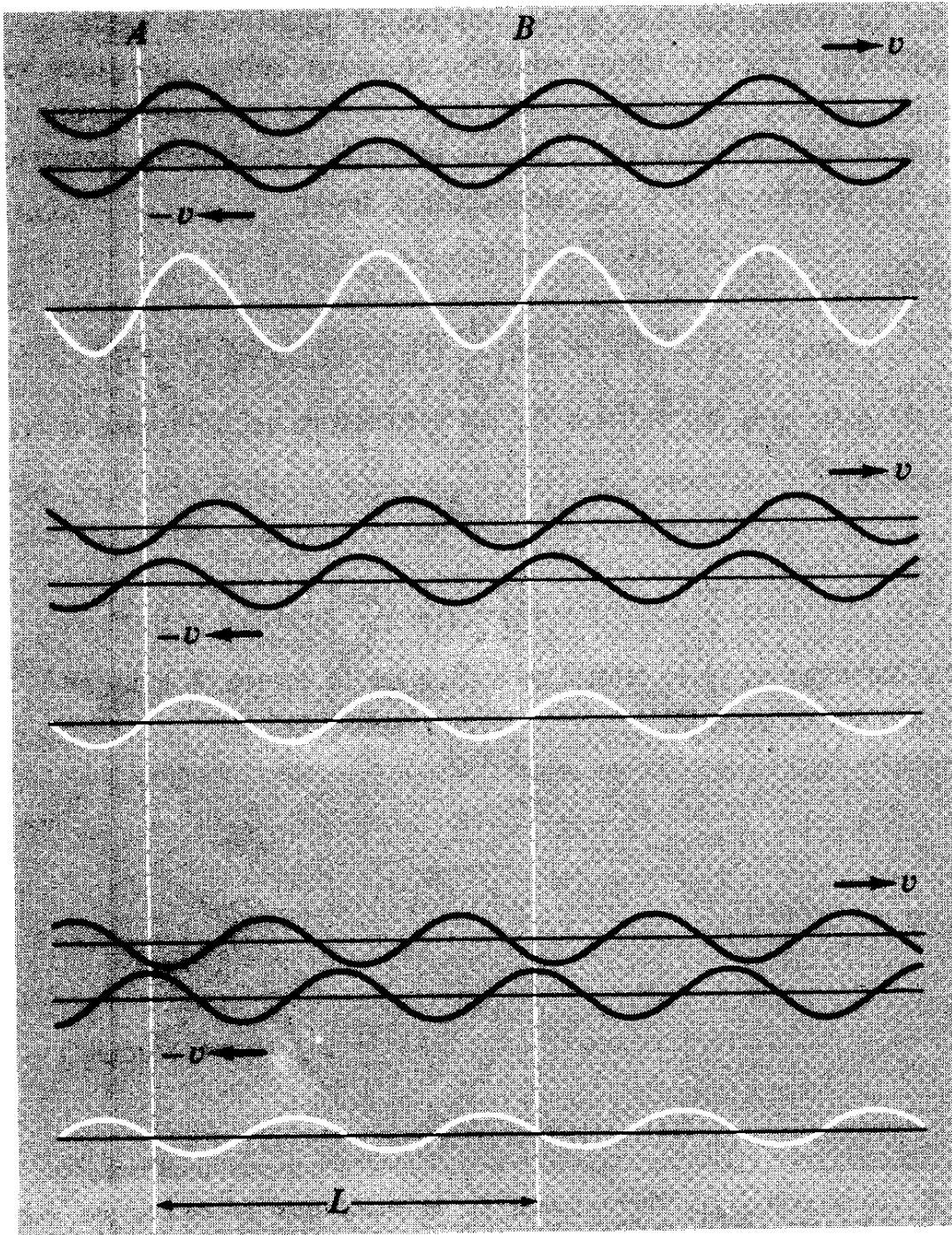


Fig. 7-3. Dos ondas sinusoidales exactamente semejantes y la onda estacionaria resultante.

máticamente que existen para todo valor de  $x$  y para todo valor de  $t$ , según dichas ecuaciones. Pero el sistema que hemos escogido como nuestro punto de partida era una cuerda de longitud finita  $L$  y no una cuerda de longitud infinita. Así pues, nuestra nueva descripción del modo normal en función de ondas móviles no es realmente correcto. Sin embargo, es fácil ver lo que hay detrás de la discrepancia encontrada. La figura 7-3 muestra varias etapas sucesivas en la marcha de dos ondas que se mueven en sentidos opuestos. Tam-

bien muestra el resultado de sumar las ordenadas de ambas de modo que se obtenga el desplazamiento resultante en función de  $x$ . En los puntos  $A$  y  $B$ , distantes  $L$ , este desplazamiento es cero en todo instante (como se requería naturalmente que fuese dado el enunciado original del problema). Los puntos intermedios varían exactamente de acuerdo con la ecuación (7-1). Se puede decir entonces que respecto a las condiciones entre  $x = 0$  y  $x = L$ , la descripción de trenes de ondas infinitas es correcta. El hecho de que no exista una perturbación fuera de estos límites es una condición física que ya se tuvo en cuenta cuando escribíamos las ecuaciones de un modo normal mediante la ecuación sencilla

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t$$

ya que, naturalmente, la función  $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$  es totalmente semejante a una función que se extiende sobre el dominio entero de las  $x$ . Pensamos que deberíamos haber sido más cuidadosos; la descripción adecuada de la cuerda vibrante en función de las funciones continuas de  $x$  debe desarrollarse del modo siguiente para tres regiones diferentes:

$$\left. \begin{array}{l} -\infty \leq x < 0: y(x, t) = 0 \\ 0 \leq x \leq L: y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega_n t \\ L < x \leq \infty: y(x, t) = 0 \end{array} \right\} \quad (7-7)$$

Era importante hacer las advertencias anteriores porque, como se señaló primero en el capítulo 1, es demasiado fácil olvidar las limitaciones que las condiciones límites reales juegan en una situación física dada. Se corre el riesgo, impensadamente, de permitir que una descripción se extienda más allá de los límites de su validez. Pero habiendo dicho esto utilicemos ahora nuestra imaginación para ampliar la aplicación de nuestras ideas.

## ONDAS PROGRESIVAS EN UNA DIRECCIÓN

En la última sección vimos cómo un modo normal de vibración de una cuerda tensa podría describirse como una combinación de dos ondas sinusoidales progresivas idénticas una a la otra excepto en el sentido del movimiento. ¿Por qué no suponer, entonces, que en una cuerda suficientemente larga podría ser posible mantener una onda sinusoidal que se moviese sólo en un sentido? La

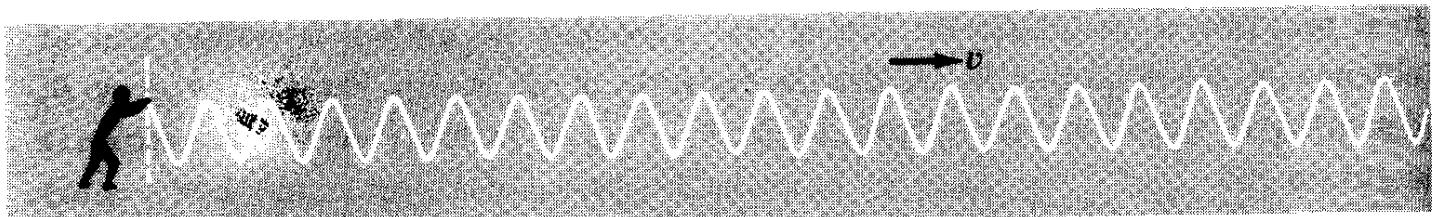


Fig. 7-4. Generación de una onda móvil sobre una cuerda larga.

La iniciación de esta onda debería llevarse a cabo exactamente como se indicó en la figura 7-1(a). Pero imaginemos ahora que el extremo fijo de la cuerda está muy alejado, es decir, que la longitud total  $L$  de la cuerda es muy grande comparada con la longitud de onda  $\lambda$ . Después de un cierto número de oscilaciones en  $x = 0$ , el extremo frontal de la perturbación se ha movido fuera del campo de visión (fig. 7-4), y la descripción de todo lo que vemos a la derecha del plano  $x = 0$  está contenido en la ecuación [ecuación (7-6)]

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

La generación de esta onda se obtiene como resultado de hacer oscilar el extremo izquierdo de la cuerda arriba y abajo en un movimiento armónico simple de amplitud  $A$  y con una frecuencia  $v$  dada por

$$v = \frac{\nu}{\lambda} \quad (\text{o } \omega = 2\pi\nu/\lambda) \quad (7-8)$$

Explícitamente, la ecuación para  $y$  en función de  $t$  para  $x = 0$  es

$$y_0(t) = -A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi\nu t}{\lambda} \right) = -A \operatorname{sen} \omega t$$

El aspecto de la *cuerda* en cualquier instante dado,  $t_0$ , viene descrito por

$$\begin{aligned} y(x, t_0) &= A \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt_0) \right] \\ &= A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \varphi_0 \right) \end{aligned}$$

en donde  $\varphi_0$  es un ángulo constante para el objetivo de esta descripción instantánea del aspecto de la onda. Si el extremo de la cuerda en  $x = 0$  estuviera en reposo hasta  $t = t_1$ , luego vibrase sinusoidalmente de  $t = t_1$  a  $t = t_2$ , y luego se mantuviese otra vez en reposo de  $t_2$  en adelante, entonces aparecería sobre la cuerda un tren de ondas sinusoidales de longitud limitada contenido en cualquier instante entre  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , como se indica en la figura 7-5. El extremo delantero de la perturbación más alejado del extremo

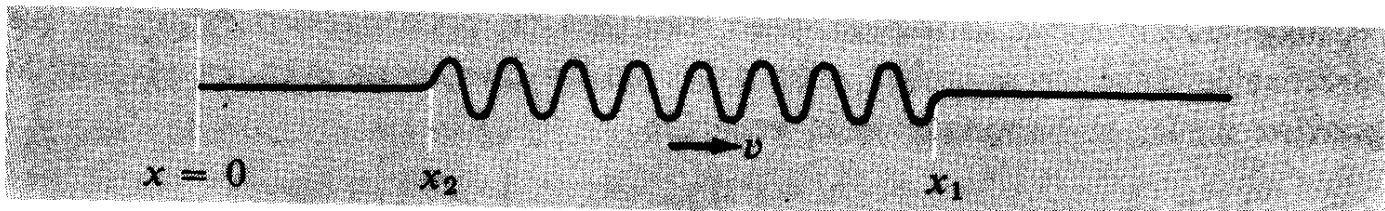


Fig. 7-5. *Tren móvil de ondas finitas.*

$x = 0$  corresponde al comienzo de la vibración para  $t = t_1$ , y el extremo trasero de su terminación a  $t = t_2$ . En efecto, tenemos

$$x_1 - x_2 = v(t_2 - t_1)$$

Esto es un ejemplo particular de un resultado muy importante:

*La propagación de la onda a lo largo de la cuerda a velocidad constante  $v$  es, de hecho, un medio de transformar la variación de desplazamiento con el tiempo en una posición fija en la variación correspondiente del desplazamiento con la posición en un tiempo cualquiera.<sup>1</sup>*

Para cualquier perturbación sinusoidal pura la velocidad de la onda  $v$  se define como el producto  $\lambda v$  [véase la ecuación (7-8)]. Y de acuerdo con la ecuación (7-5), el valor de  $v$  para las ondas en una cuerda tensa tiene el mismo valor  $\sqrt{T/\mu}$ , para todas las longitudes de ondas. Esta falta de dependencia de  $v$  con  $v$  o  $\lambda$  no es cierta generalmente para movimientos ondulatorios. De momento, sin embargo, nos limitaremos nosotros mismos a casos en los que pueda admitirse como válida.

Escribamos ahora la ecuación diferencial que gobierna la propagación de una onda monodimensional como la descrita por la ecuación (7-7). Ésta será una relación entre las derivadas parciales del desplazamiento  $y$  respecto a  $x$  y  $t$ . Tenemos así

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{2\pi v}{\lambda} A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]\end{aligned}$$

Deberíamos entonces escribir la ecuación diferencial de la onda como

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t} ?$$

<sup>1</sup> Existe una sutilidad escondida aquí. Como veremos posteriormente, no se puede tomar como cierto que una vibración sinusoidal de vibración *limitada* en el tiempo genera una onda sinusoidal pura de extensión limitada en el espacio. Pero existirá todavía una correspondencia entre lo que ocurre en el foco o fuente y lo que aparece en la cuerda.

No hay nada que nos lo impida, pero rompería un poco nuestro estilo, ya que la ecuación anterior se aplica sólo a las ondas que se mueven en el sentido *positivo* de las  $x$ . Supongamos la ecuación

$$y = A \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) \right]$$

de una onda que se mueve en el sentido negativo de las  $x$ . Entonces tendríamos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2\pi v}{\lambda} A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) \right]$$

y de aquí

$$\frac{\partial y}{\partial x} = + \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Sin embargo, obteniendo las segundas derivadas, llegamos a una relación que es cierta para las ondas sinusoidales de cualquier longitud de onda que se mueven en ambos sentidos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7-9)$$

No es ninguna sorpresa que esta ecuación sea idéntica a la del movimiento con la que iniciamos el capítulo 6 [ecuación (6-4)] y que nos condujo a los modos normales de una cuerda tensa o cualquier otro sistema monodimensional continuo sometido a fuerzas restauradoras lineales.

## VELOCIDADES DE LAS ONDAS EN MEDIOS ESPECÍFICOS

Cualquier sistema gobernado por la ecuación (7-9) es un sistema en el que pueden viajar ondas sinusoidales de cualquier longitud de onda con velocidad  $v$ . Entonces puede ser un tema de interés calcular el valor de  $v$  en cualquier caso particular. Por ejemplo, supóngase que se estira una cuerda o alambre que tiene  $\mu = 0,5$  g/m con una fuerza de 100 N. Para ondas transversales sobre dicha cuerda tendremos

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \approx 450 \text{ m/seg}$$

Por otra parte, si se estira hasta la misma tensión una cuerda o un trozo de tubería de goma con una masa por unidad de longitud de 1 kg/m, llevará ondas a una velocidad sólo de 10 m por segundo, lo cual realmente es todavía más rápido.

Hemos desarrollado la ecuación (7-9) en función de las ondas transversales solamente; pero como vimos en el capítulo 6, las vibraciones longitudinales de una columna de material elástico están regidas por una ecuación de la misma forma exactamente:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (7-10)$$

Ésta es la ecuación diferencial básica para ondas de compresión que se mueven a lo largo de una dimensión, ondas de un tipo que pueden englobarse juntas bajo el título general de *sonido*, aunque sólo es detectable por un oído humano un limitado intervalo de sus frecuencias. En este punto es adecuado considerar la velocidad de dichas ondas sonoras en materiales diferentes.

1. *Barras o varillas sólidas.* El valor de  $v$  para ondas que se mueven a lo largo de una barra o varilla viene definida por el módulo de Young y la densidad:

$$v = \left( \frac{Y}{\rho} \right)^{1/2}$$

La tabla 7-1 muestra algunos datos del módulo de Young, de la densidad y de las velocidades calculadas y observadas del sonido en diversos materiales.

TABLA 7-1: MÓDULOS DE YOUNG Y VELOCIDAD DEL SONIDO

Material	$Y, N/m^2$	$kg/m^3$	$\sqrt{Y/\rho}, m/seg$	$v, m/seg$
Aluminio	$6,0 \times 10^{10}$	$2,7 \times 10^3$	4700	5100
Granito	$5,0 \times 10^{10}$	$2,7 \times 10^3$	4300	$\sim 5000$
Níquel	$21,4 \times 10^{10}$	$8,9 \times 10^3$	4900	4970
Plata	$7,5 \times 10^{10}$	$10,4 \times 10^3$	2680	2680
Plomo	$\sim 1,6 \times 10^{10}$	$11,4 \times 10^3$	1190	1320
Pyrex	$6,1 \times 10^{10}$	$2,25 \times 10^3$	5200	5500

Como puede verse, son velocidades típicas de varios millares de m/seg, y no es demasiado malo el acuerdo existente entre los valores calculados y los observados. Es interesante recordar que el módulo de Young se basa en mediciones estáticas, mientras que la propagación del sonido depende de la respuesta del material a tensiones rápidamente alternativas, de modo que no es de esperar un acuerdo demasiado exacto. Además, el empleo del módulo de Young supone que el material puede expandirse o contraerse lateralmente (muy lige-

ramente, como es natural) cuando la onda de compresión o de expansión pasa por él. Pero el material del interior del cuerpo no posee esta propiedad; la resistencia a la deformación se ve, de hecho, aumentada y se eleva la velocidad calculada. Sin embargo, la diferencia no es enorme (es del orden del 15 %), y para el objetivo de la presente discusión no la consideraremos más.

La velocidad de estas ondas elásticas en sólidos es notablemente elevada. Una onda de compresión en granito, por ejemplo, tal como podría ser generada en un terremoto, tiene una velocidad de unos 5 km/seg y recorrerá casi una semicircunferencia completa alrededor de la Tierra en el espacio de una hora.

2. *Columnas de líquidos.* Un líquido, como un gas, está caracterizado en un comportamiento elástico por su módulo de compresibilidad,  $K$ . En general, los líquidos son bastante más compresibles que los sólidos, sin ser muchísimo menos densos; esto significa que las ondas del sonido se mueven en los líquidos más lentamente que en los sólidos. El caso más importante es el del agua. El volumen de agua disminuye en un 2,3 % por la aplicación de una presión de unas 500 atmósferas ( $1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ N/m}^2$ ). Esto da un módulo de compresibilidad de  $2,2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , y como su densidad es  $\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$ , se tiene

$$v = \left( \frac{K}{\rho} \right)^{1/2} \approx 1500 \text{ m/seg}$$

Este valor es muy próximo al real y la mayoría de los líquidos transportan ondas de compresión a una velocidad del orden de 1 km/seg.

3. *Columnas de gas.* Vimos en el capítulo 6 cómo las frecuencias de vibración de un gas dependen del módulo adiabático de elasticidad que puede diferir muy significativamente del módulo isotermo. Esta gran diferencia se produce debido a la alta compresibilidad de un gas, lo cual significa que se hacen sobre él cantidades sustanciales de trabajo, si se varía la presión. Aunque las vibraciones en un sólido o en un líquido pueden ser también adiabáticas, su mucha menos compresibilidad equivale a decir que muy poca energía puede aceptarse de este modo y los módulos elásticos isotermos y adiabáticos no son muy diferentes.

En el capítulo 6 señalábamos que el módulo de elasticidad adiabática de un gas venía dado por

$$K_{\text{adiabática}} = \gamma p \quad (1 < \gamma \leq 5/3)$$

de modo que

$$v = \left( \frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (7-11)$$

Para el aire,  $\gamma \approx 1,4$ ,  $\rho \approx 1,2 \text{ kg/m}^3$ , y esto da

$$v \approx 340 \text{ m/seg}$$

Es interesante prestar un poco más de atención a la ecuación (7-11). La ecuación general de los gases para una masa  $m$  de un gas efectivamente ideal de peso molecular  $M$  es

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

siendo  $R$  la constante de los gases y  $T$  la temperatura absoluta. Como el cociente  $m/V$  es precisamente la densidad  $\rho$ , la ecuación (7-11) nos dará

$$v = \left( \frac{\gamma RT}{M} \right)^{1/2} \quad (7-12)$$

La velocidad del sonido en un gas será, por tanto, (a) independiente de la presión o de la densidad, (b) proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta, y (c) inversamente proporcional a la raíz cuadrada del peso molecular. Los resultados (a) y (b) son correctos para cualquier gas, al menos en un amplio intervalo de  $p$  o de  $T$ , y (c) es válido si comparamos diversos gases del mismo tipo molecular (por ejemplo, todos diatópicos).

La otra característica particularmente interesante de la ecuación (7-11) viene a luz si recordamos el cálculo de la presión de un gas dado por la teoría cinética elemental. Este cálculo conduce al resultado [ecuación (6-19), página 199]:

$$p = \frac{1}{3} \rho v_{\text{cm}}^2$$

en donde  $v_{\text{cm}}$  es la raíz cuadrada de la media cuadrática de la velocidad de las moléculas. Por lo tanto, a partir de este resultado tenemos

$$v_{\text{cm}} = \left( \frac{3p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (7-13)$$

Comparando las ecuaciones (7-11) y (7-13), vemos que la velocidad del sonido en un gas, según viene dada por nuestro cálculo, es aproximadamente igual a la velocidad media de las propias moléculas. Como la información de que un extremo de una columna de gas ha experimentado un choque (por ejemplo) debe ser transportada por las propias moléculas, esta igualdad aproximada de

la velocidad del sonido y de la velocidad molecular (a unos pocos de cientos de metros por segundo) tiene una lógica adecuada.

## SUPERPOSICIÓN

Hemos visto cómo es posible que una cuerda tirante vibre en una superposición constituida por una selección arbitraria de sus modos normales. Consideremos ahora el problema estrechamente relacionado con el anterior de provocar ondas progresivas de varias longitudes de onda diferentes sobre una cuerda larga u otro medio semejante. Para empezar con ello, consideremos el caso muy sencillo de dos ondas de igual amplitud, ambas moviéndose a lo largo del sentido positivo del eje  $x$ , descrito separadamente por ecuaciones de la forma de la ecuación (7-7):

$$\begin{aligned}y_1 &= A \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda_1} (x - vt) \right] \\y_2 &= A \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda_2} (x - vt) \right]\end{aligned}\tag{7-14}$$

Según hemos aprendido sobre la superposición lineal de los desplazamientos en sistemas que obedecen a ecuaciones del tipo de la ecuación (7-9), sabemos que el desplazamiento resultante es precisamente la suma de  $y_1$  y de  $y_2$ . De aquí tenemos

$$y = y_1 + y_2 = A \left\{ \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda_1} (x - vt) \right] + \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda_2} (x - vt) \right] \right\}$$

Como ambas ondas tienen (admitimos) la misma velocidad  $v$ , la perturbación combinada se mueve con una estructura de forma invariable, del mismo modo que una onda de una sola longitud de onda es como una curva sinusoidal rígida moviéndose a lo largo del eje a velocidad  $v$ . La forma de la combinación se considera más fácilmente si hacemos  $t = 0$ ; entonces tenemos

$$y = A \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda_1} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda_2} \right) \right]$$

Tal combinación, para dos longitudes de onda que no sean muy diferentes entre sí, se indica en la figura 7-6. Recuerda precisamente el caso de las pulsaciones, que estudiamos en el capítulo 2. Realmente es un fenómeno pulsante, aunque la modulación de amplitudes es aquí una función de la posición

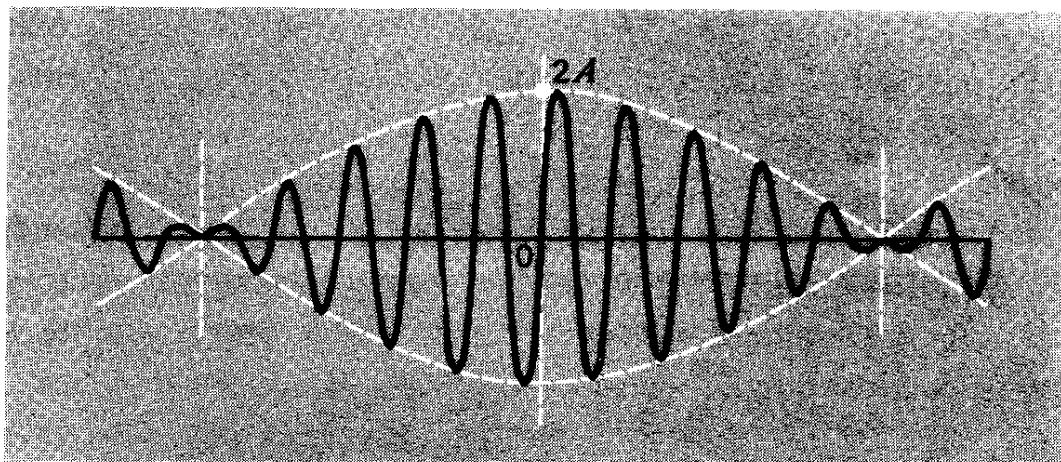


Fig. 7-6. Superposición de dos ondas móviles de longitudes de onda ligeramente diferentes.

en lugar del tiempo. Al estudiar estas ondas superpuestas (y en otras conexiones también, es extremadamente conveniente introducir el recíproco de la longitud de onda). Esta magnitud  $k (= 1/\lambda)$  se denomina *número de onda*; es el número de longitudes de onda completas por distancia unidad (y, naturalmente, no necesita ser un entero).<sup>1</sup>

En función de los números de onda, la ecuación para la onda superpuesta puede escribirse del modo siguiente:

$$y = A[\operatorname{sen} 2\pi k_1 x + \operatorname{sen} 2\pi k_2 x]$$

o bien

$$y = 2A \cos [\pi(k_1 - k_2)x] \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \quad (7-15)$$

La distancia de pico a pico del factor de modulación se define por la variación de  $x$  correspondiente a un aumento de  $\pi$  en la magnitud  $\pi(k_1 - k_2)$ . Llamando a esta distancia  $D$ , tenemos

$$D = \frac{1}{k_1 - k_2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Si las longitudes de onda son casi iguales, podemos escribirlas en la forma  $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$ , y así tenemos (aproximadamente)

$$D \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

<sup>1</sup>*Atención!* Debido que la combinación  $2\pi/\lambda$  se presenta con gran frecuencia en la descripción matemática de las ondas, ha resultado una práctica común en la física teórica utilizar el término número de onda y el símbolo  $k$  para designar esta combinación que es igual a  $2\pi k$  en nuestra notación presente.

Esto significa que un número de longitudes de onda dadas aproximadamente por  $\lambda/\Delta\lambda$  está contenido entre dos ceros sucesivos de la curva envolvente de la modulación.

La producción de estas ondas que se mueven superpuestas sobre una cuerda puede llevarse a cabo imponiendo simultáneamente dos frecuencias y amplitudes de vibraciones diferentes en un extremo de la cuerda. Esto se expresa matemáticamente considerando el caso para  $x = 0$  correspondiente a los desplazamientos definidos por las ecuaciones (7-14). Entonces tenemos

$$y_0(t) = -A \left[ \sin\left(\frac{2\pi v t}{\lambda_1}\right) + \sin\left(\frac{2\pi v t}{\lambda_2}\right) \right]$$

El cociente  $2\pi v/\lambda$  define la frecuencia angular  $\omega$  de cada vibración, y así tenemos

$$y_0(t) = -A[\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t]$$

Este es entonces un caso explícito de pulsaciones en el tiempo y vemos aquí un ejemplo particular del modo en que una perturbación dependiente del tiempo en el foco genera una perturbación dependiente del espacio en el medio.

Esta superposición de ondas se ilustra de un modo particularmente bello mediante las ondas sonoras. En la transmisión del sonido de una fuente a un receptor tenemos una aplicación dual del principio que acabamos de señalar. En la fuente o foco existe cierta variación del desplazamiento con el tiempo, como resultado del cual se produce un tren de ondas sonoras que se mueve alejándose del foco. En cierto tiempo posterior estas ondas o alguna parte de ellas caen sobre un detector produciendo en él un desplazamiento dependiente del tiempo, el cual idealmente tiene exactamente la misma forma que la que se produjo en la fuente. La figura 7-7 muestra algunos ejemplos escogidos e ilustra el modo en el que los armónicos de un instrumento dado se combinan para generar un diagrama que repite el mismo una y otra vez. Los diagramas representan la respuesta al receptor, pero podemos imaginar en cualquier instante una perturbación del aire, periódica en la distancia, a la cual corresponda la señal recibida.

## PULSOS DE ONDAS

Puede pensarse que una onda es como algo que envuelve una sucesión completa de crestas y valles, pero esto no es en absoluto necesario. Realmente, se

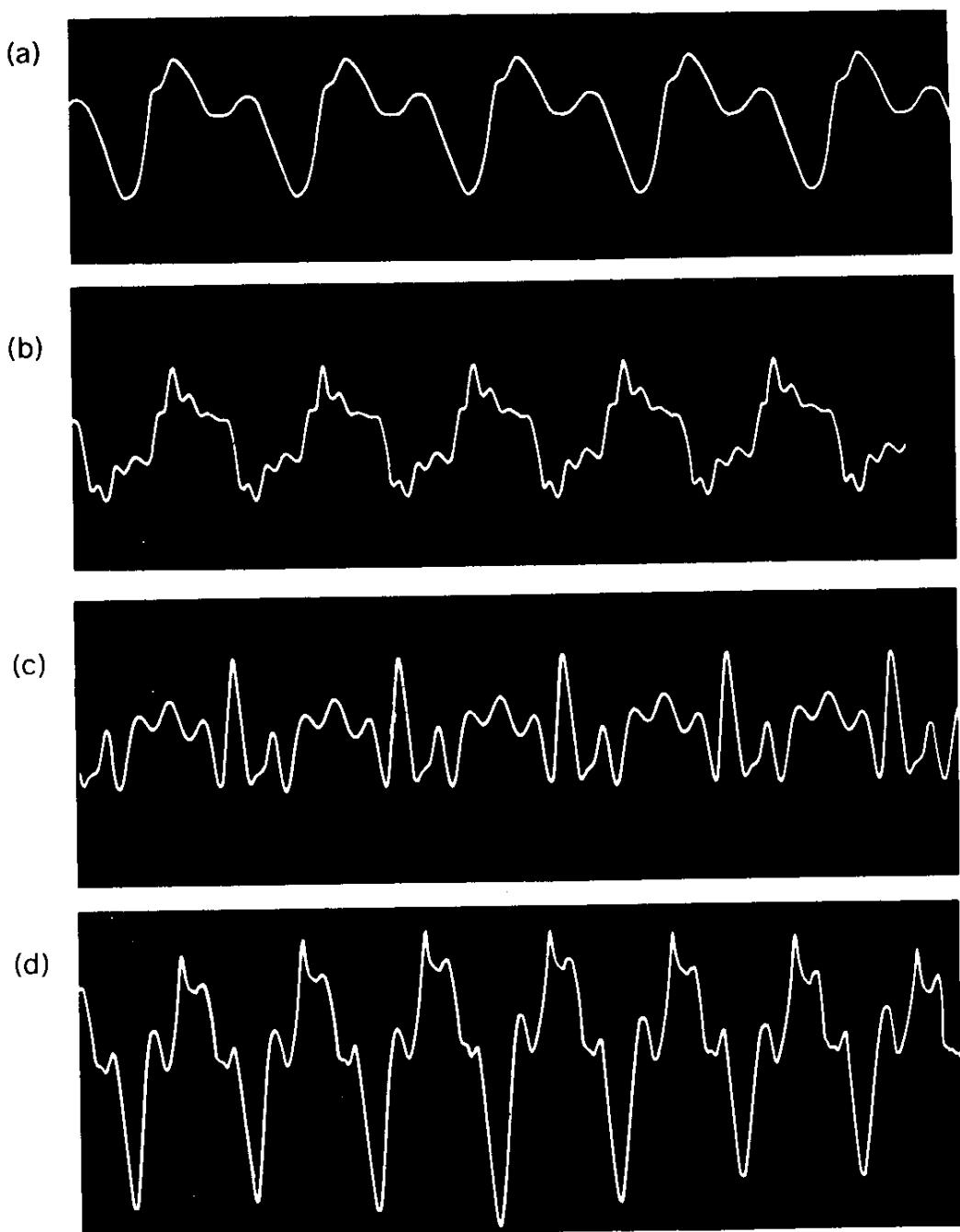


Fig. 7-7. Formas de onda de (a) flauta; (b) clarinete; (c) óboe; (d) saxofón.  
(Según D. C. Miller, Sound Waves and Their Uses, Macmillan, Nueva York, 1938.)

presentan innumerables casos en el que un solo pulso aislado de perturbación viaja de un lugar a otro a través de un medio, por ejemplo, una palabra aislada de felicitación o de mando pronunciada en voz alta de una persona a otra. Los pulsos de este tipo pueden producirse tomando un muelle estirado (o cuerda elástica) y produciendo en él una deformación local, por ejemplo, torciendo un extremo y luego manteniéndolo fijo. La figura 7-8 muestra el comportamiento siguiente a un pulso de este tipo. Se mueve a lo largo del mismo a velocidad constante, de modo que en cualquier instante sólo está perturba-

da una sección limitada del muelle, y las regiones antes y después están quietas. El pulso continuará moviéndose de este modo hasta que alcance el extremo más alejado del muelle, en cuyo punto se produce un proceso de reflexión en cierto modo. Sin embargo, en tanto que el pulso continúa ininterrumpido, parece que conserva la misma forma, como se ve en la figura 7-8. ¿Cómo podemos relacionar el comportamiento de estos pulsos con lo que hemos aprendido de las ondas sinusoidales? La respuesta la suministra un análisis de

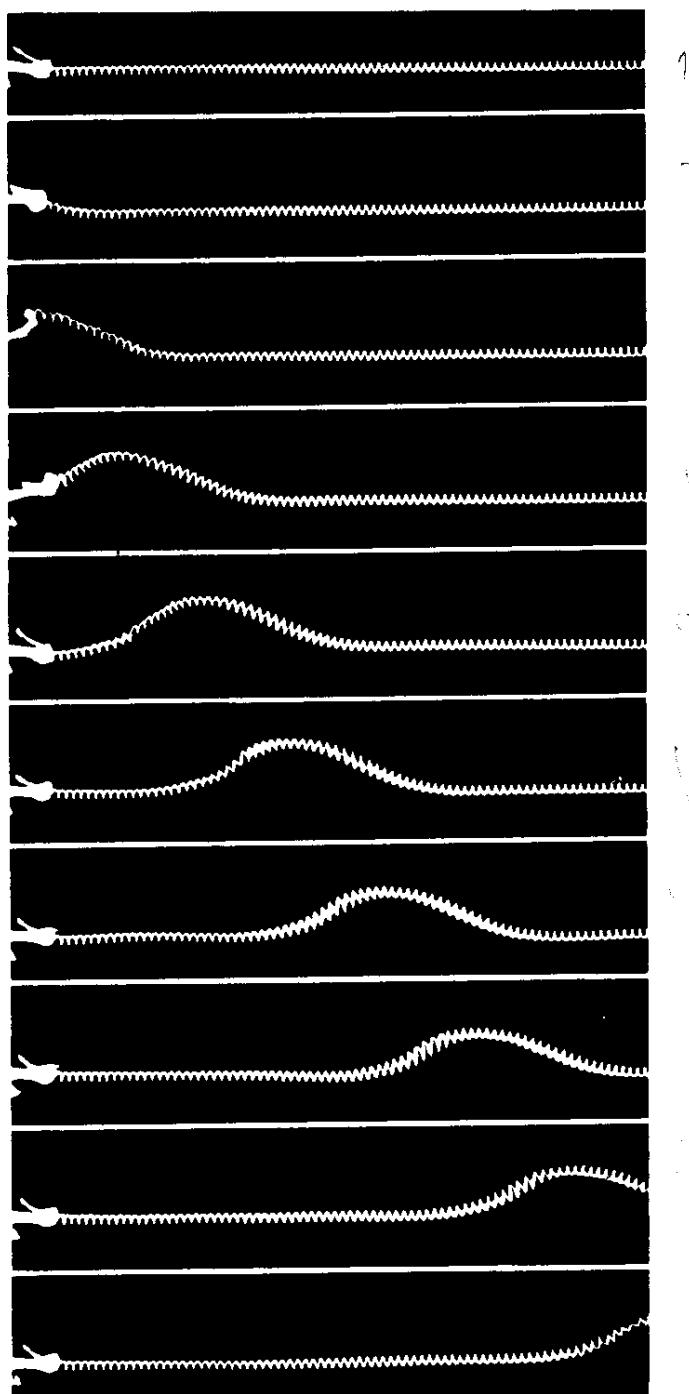


Fig. 7-8. Generación y movimiento de un pulso sobre un muelle, mostrado mediante una serie de fotografías tomadas con una cámara tomavistas de cine. (Según Physical Science Study Committee, Physics, Heath, Boston, 1965.)

Fourier, y en el estudio siguiente veremos cómo puede hacerse esta conexión. Es un estudio que compensa sobradamente, porque nos deja libres para considerar la transmisión de cualquier señal, sea cual sea.

Imaginemos primeramente una cuerda inmensamente larga que se hace oscilar por un extremo hacia arriba y hacia abajo en un movimiento armónico simple con un período de una hora. Para concretar las cosas, supongamos que la cuerda tiene una tensión de 100 N y que su densidad lineal es de 1 kg/m. Así resulta una velocidad de ondas  $\sqrt{T/\mu}$  de 10 m/seg, y la longitud de onda será esta misma velocidad  $v$  dividida por la frecuencia  $\nu (= 1/3600 \text{ seg}^{-1})$  o, lo que es equivalente, a la velocidad multiplicada por el período (3600 seg), lo que nos da  $\lambda = 36\,000 \text{ m}$ . Imaginemos que nuestra cuerda es varias veces mayor que este valor, digamos, por ejemplo, 100 km. Este montaje concreto es físicamente absurdo, pero la consideración del mismo nos ayudará a desarrollar las ideas esenciales.

Supóngase ahora que hacemos oscilar el extremo de la cuerda con una combinación de armónicos de la frecuencia básica. El segundo armónico generará ondas sinusoidales de longitud de onda 18 000 m, el trigésimo sexto armónico generará ondas de longitud aproximadamente igual a 1 km, y el armónico número 36 000 generará ondas de longitud de 1 m. Citamos estos valores como ejemplos específicos, pero el punto principal a señalar es que podemos enfrentarnos con la posibilidad de superponer millares y millares de vibraciones sinusoidales diferentes al extremo accionado de la cuerda, todos los cuales son múltiplos enteros de la misma frecuencia básica (extremadamente baja) y que todos darán origen a ondas que se mueven a lo largo de la cuerda a la misma velocidad. En consecuencia, tendremos moviéndose a lo largo de la cuerda un diagrama de perturbación repetitivo, básicamente semejante al indicado en las figuras 7-6 y 7-7, pero en los que la distancia de repetición será enormemente larga, e igual, de hecho, a la longitud de onda asociada con la frecuencia básica de  $1 \text{ h}^{-1}$ .

Pero introduzcamos ahora las posibilidades notables implicadas en el teorema de Fourier. Su característica consiste en que, como vimos en el capítulo 6 [ecuación (6-30)], cualquier diagrama del desplazamiento dependiente del tiempo que se repite a sí mismo periódicamente (con una periodicidad de  $2\pi/\omega_1$ ) puede expresarse como una combinación lineal de la serie infinita de armónicos representada por  $\omega_1$  y por todos sus múltiplos enteros:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t - \delta_n) \quad (7-16)$$

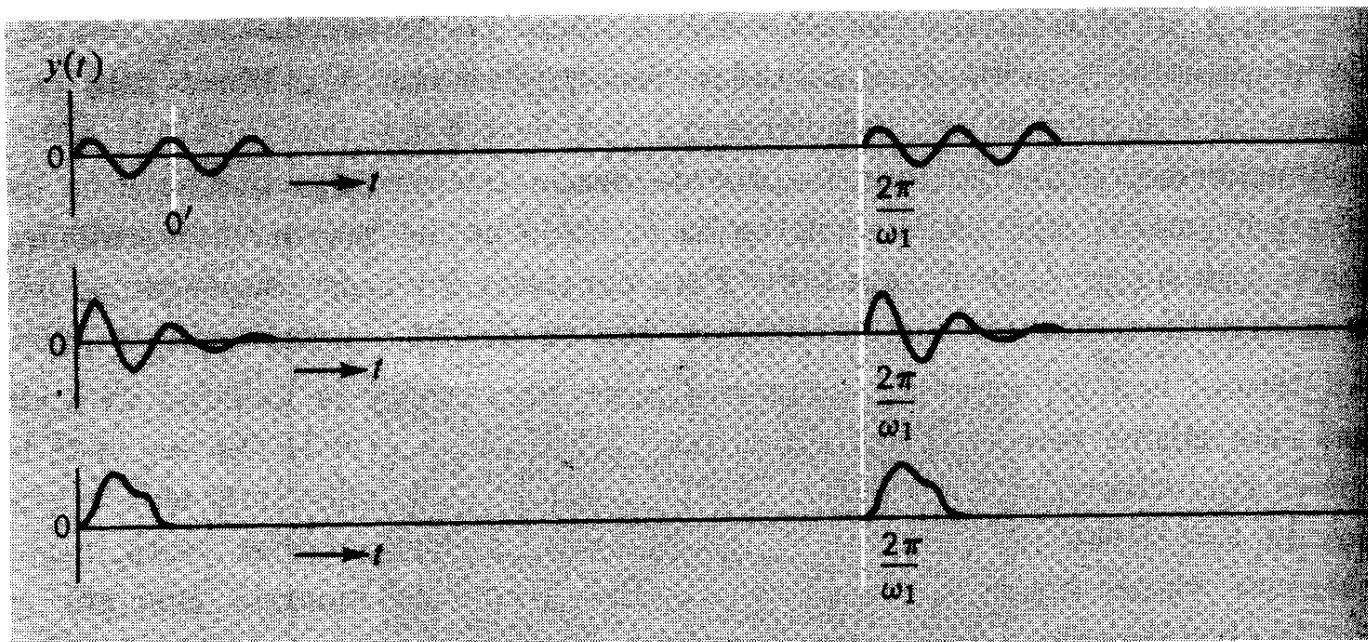


Fig. 7-9. Ejemplos de perturbaciones repetidas periódicamente que son nulas en la mayor parte del período de repetición.

Y su inverso es que podemos sintetizar cualquier diagrama repetitivo por medio del espectro completo de armónicos de la frecuencia básica  $\omega_1/2\pi$ . Ahora, en particular, podemos imaginar una perturbación que es nula en la mayoría del período de repetición; en la figura 7-9 se muestran algunos ejemplos. De acuerdo con el teorema de Fourier, cada una de ellas y cualquier otra función repetitiva del tiempo parecida, puede construirse a partir de las vibraciones sinusoidales, que individualmente son siempre funciones continuas del tiempo. La ausencia de cualquier desplazamiento sobre la mayoría del período de repetición  $2\pi/\omega_1$  se consigue precisamente por la combinación correcta de armónicos, dando como resultado una anulación completa de la perturbación en esta región, pero, sin embargo, proporcionando la perturbación particular dada no nula sobre la parte del período, como era de desear.

Es conveniente señalar que la ecuación (7-16) [que es idéntica a la ecuación (6-30)] implica que son necesarias tanto las funciones seno como coseno de  $n\omega_1 t$  para la representación de una función periódica arbitraria, pues tenemos

$$C_n \cos(n\omega_1 t - \delta_n) = A_n \sin n\omega_1 t + B_n \cos n\omega_1 t$$

Sin embargo, ciertas formas de  $y(t)$  serán describibles en función de las funciones sinusoidales o cosinusoidales solamente. Específicamente, si  $y(t)$  es una función par de  $t$ , de modo que  $f(-t) = +f(t)$  para cualquier valor de  $t$ , entonces el análisis de Fourier exige funciones coseno solamente; mientras

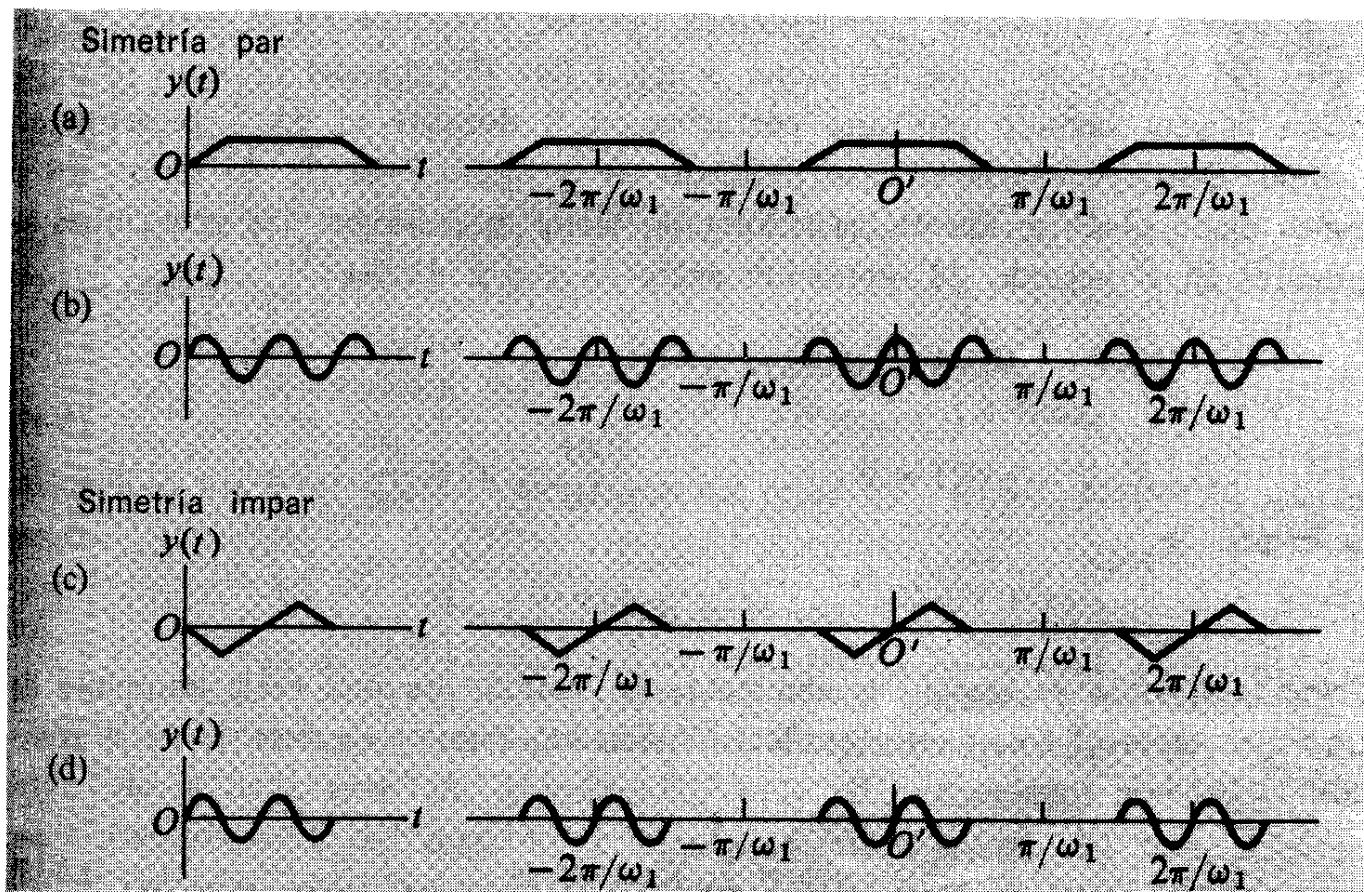


Fig. 7-10. Desplazamiento del origen para conseguir simetría en diversos tipos de pulsos.

que si se tiene una función *ímpar*, de modo que  $f(-t) = -f(t)$ , entonces bastará solamente con las funciones seno. Este tipo de simplificación será siempre posible si la función  $y(t)$  tiene una simetría impar o par respecto al punto medio del tiempo. Sin embargo, se debe desplazar el origen de  $t$  para aprovecharse de esta simetría. Así, por ejemplo, en la figura 7-9 (a) la función  $y(t)$ , compuesta de  $2\frac{1}{2}$  ciclos de una onda sinusoidal seguida por una perturbación nula, no es ni par ni ímpar respecto al origen de tiempo indicado. Por otra parte, si se desplaza el origen al punto  $O'$ , que corresponde a la cresta central del tren de ondas sinusoidales, la función es una función par respecto a  $O'$ . Análogamente, cualquier número *entero* de ciclos de una onda sinusoidal, repetida a intervalos regulares, podría representarse como una función *ímpar* mediante el apropiado desplazamiento del origen. En estos casos un período de repetición aislado se mide más convenientemente entre  $t = -\pi/\omega_1$  y  $t = +\pi/\omega_1$ , que entre 0 y  $2\pi/\omega_1$ . La figura 7-10 ilustra la aplicación de este procedimiento a unos pulsos típicos pares o impares.

*Ejemplo.*<sup>1</sup> Supóngase que deseamos obtener una onda en la forma de 100 ciclos del armónico milésimo, que ocupará una décima del período de repetición básico, seguido por una perturbación 0 durante el 90 % restante del tiempo. Esto recordaría el caso indicado en la figura 7-10(d). Al referirnos al punto medio del tren de ondas la función viene descrita por las ecuaciones siguientes en el período de repetición entre  $-\pi/\omega_1$  y  $+\pi/\omega_1$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \operatorname{sen} N\omega_1 t & 0 \leq |t| \leq \frac{100\pi}{N\omega_1} \\ y(t) &= 0 & \frac{100\pi}{N\omega_1} < |t| \leq \frac{\pi}{\omega_1} \end{aligned} \quad (7-17)$$

en donde

$$N = 1000$$

Como la función es impar, es analizable en función de una serie completa de funciones  $\operatorname{sen} n\omega_1 t$  solamente [es decir, todos los ángulos de fase  $\delta_n$  en la ecuación (7-16) son iguales a  $\pi/2$ ]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} n\omega_1 t \quad (7-18)$$

Y se obtienen los coeficientes  $C_n$  a través de la propiedad de ortogonalidad de las funciones senos respecto a la integración en un período completo  $2\pi/\omega_1$ :

$$\int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} \operatorname{sen} n_1 \omega_1 t \operatorname{sen} n_2 \omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{dado que } n_1 \neq n_2 \\ \frac{\pi}{\omega_1} & \text{dado que } n_1 = n_2 \end{cases}$$

Así resulta, después de multiplicar la ecuación (7-18) por  $\operatorname{sen} n\omega_1 t$  y de integrar, el resultado

$$C_n = \frac{\omega_1}{\pi} \int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} y(t) \operatorname{sen} n\omega_1 t dt$$

En esta expresión sustituimos el valor de  $y(t)$  dado por las ecuaciones (7-17), que nos da, por tanto,

$$C_n = \frac{\omega_1 A_0}{\pi} \int_{-100\pi/N\omega_1}^{100\pi/N\omega_1} \operatorname{sen} N\omega_1 t \operatorname{sen} n\omega_1 t dt$$

<sup>1</sup> Esta parte puede suprimirse sin ninguna pérdida de la continuidad.

(Obsérvese que los límites de integración son ahora  $\pm 100\pi/N\omega_1$ , debido a que fuera de estos límites el integrando es nulo.) Calculemos esta integral utilizando la relación

$$\operatorname{sen} N\omega_1 t \operatorname{sen} n\omega_1 t = \frac{1}{2} [\cos(N-n)\omega_1 t - \cos(N+n)\omega_1 t]$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen} N\omega_1 t \operatorname{sen} n\omega_1 t dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(N-n)\omega_1 t}{(N-n)\omega_1} - \frac{\operatorname{sen}(N+n)\omega_1 t}{(N+n)\omega_1} \right]$$

Incluyendo los límites de  $t$ , vemos que  $\omega_1 t$  toma los valores  $\pm 100\pi/N$ . Así tenemos

$$C_n = \frac{\omega_1 A_0}{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{100\pi(N-n)}{N}\right]}{(N-n)\omega_1} - \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{100\pi(N+n)}{N}\right]}{(N+n)\omega_1} \right\}$$

Aquí introduciremos una aproximación. Obsérvese que el primer término dentro de la llave tiene un denominador muy pequeño para  $n \approx N$ , mientras que el denominador del segundo término es siempre grande. El valor máximo posible del numerador en cada caso es la unidad. Así en la mayoría de los casos es posible ignorar el segundo término, lo cual nos permite escribir una expresión aproximada simplificada para las amplitudes  $C_n$ :

$$C_n \approx \frac{A_0}{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{100\pi(N-n)}{N}\right]}{N-n} \right\}$$

o bien

$$C_n \approx \frac{100A_0}{N} \left( \frac{\operatorname{sen} \theta_n}{\theta_n} \right) \text{ en donde } \theta_n = \frac{100\pi(N-n)}{N}$$

Estos valores de  $C_n$  son de valor apreciable sólo en las proximidades de  $n=N$ . La función  $(\operatorname{sen} \theta_n)/\theta_n$  es la unidad para  $\theta_n=0$  y tiende a cero para  $\theta_n=\pm\pi$  (más allá de cuyo valor oscila entre valores negativos y luego positivos con una amplitud que decrece de modo constante).<sup>1</sup> Si  $N=1000$ , como hemos admitido, entonces  $\theta_n=\pm\pi$  para  $N=\pm 10$ . Y esto significa que el espectro de nuestro grupo de 100 ciclos de  $N=1000$  es, fundamentalmente, un agregado de contribuciones como la indicada en la figura 7-11, en el que el mismo  $n=1000$  proporciona la amplitud aislada más grande.

<sup>1</sup> La aparición de valores *negativos* de  $C_n$  puede, como en el caso de nuestro estudio del oscilador forzado, describirse mediante una variación de fase de  $\pi$ . Por tanto, se pueden describir estas contribuciones en función de valores positivos de  $C_n$  asociadas con fases de  $\theta_n$  iguales a  $3\pi/2$  (o  $-\pi/2$ ) en lugar de  $\pi/2$ .

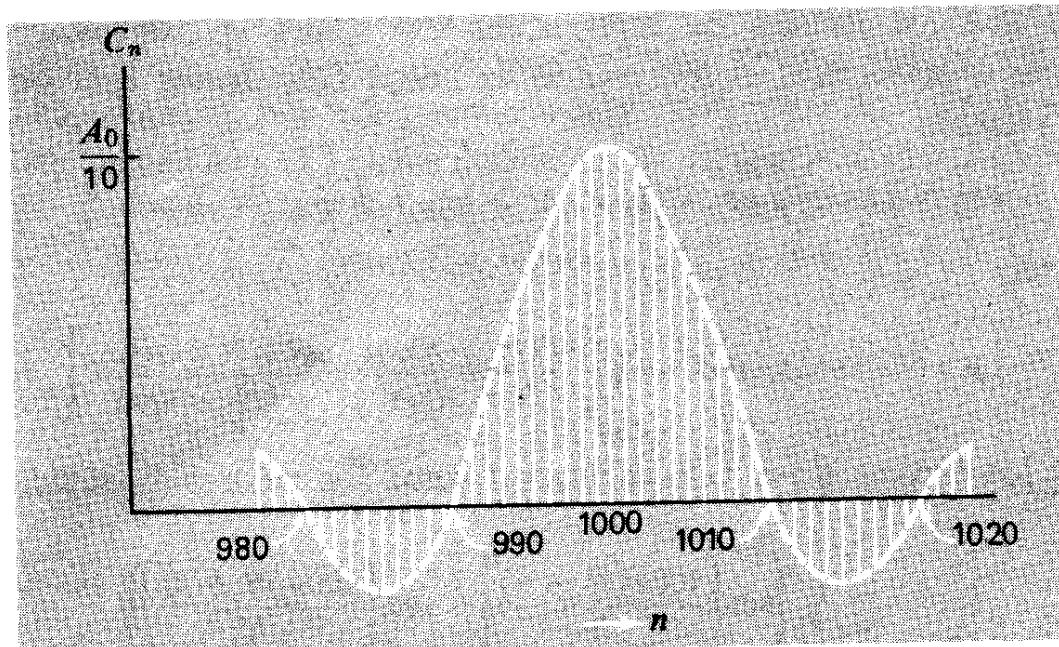


Fig. 7-11. Espectro de frecuencias (amplitud en función de la frecuencia obtenida mediante un análisis de Fourier) de una señal compuesta por 100 ciclos de una onda sinusoidal pura repetida a intervalos de tiempo de 1000 ciclos.

Si permitimos que nuestra vibración escogida continúe durante un gran número de ciclos, su espectro en función de los armónicos puros, mantenidos indefinidamente se estrechará hasta que, en el límite de un número infinitamente grande de ciclos, podríamos, como es natural, dejarlo sólo con el armónico puro  $N = 1000$ . Por otra parte, un pulso constituido solamente por algunos ciclos de una frecuencia armónica dada, requeriría el empleo de un espectro excesivamente amplio (es decir, muchos armónicos con amplitudes comparables) en su síntesis de Fourier.<sup>1</sup> Esta conexión esencialmente inversa entre la duración de un pulso y la anchura de su espectro de frecuencias es muy fundamental. Este tipo de resultado es precisamente aquel al que dirigimos nuestra atención en el capítulo 1, dando efectivamente una advertencia en el sentido de que las perturbaciones perfectamente puras no existen realmente, pero naturalmente, una vibración sinusoidal que continúe (por ejemplo) durante un millón de ciclos está muy cerca de ser un espectro de frecuencias compuesto de una raya nítida solamente.

Volvamos ahora a los aspectos más cualitativos de una vibración repetida con largos intervalos de quietud intermedios. Consideraremos esta vibración, originada en un lugar dado, como si se analizase en su espectro completo de

<sup>1</sup> Deberá comprobar el propio lector que el análisis precedente implica esta propiedad.

componentes de Fourier. Ahora bien, siempre que la velocidad de onda asociada con cada componente de frecuencia sea precisamente la misma, estas vibraciones intermitentes pero periódicamente repetidas darán lugar a pulsos aislados, igualmente separados, que se mueven a través del medio. Con nuestra cuerda muy larga, por ejemplo, se podría imaginar la posibilidad de generar pulsos de ondas de la clase indicada en la figura 7-9 (c), con una longitud total de algunos metros y separados por la distancia básica de repetición de 36 kilómetros. Para todos los demás intentos y objetivos estas perturbaciones serían aisladas e individuales. Desde luego, no se necesita mucha imaginación para ver que los principios del análisis de Fourier pueden prolongarse hasta un límite en que el período de repetición es infinitamente largo, y así, por tanto, constituye la distancia repetición de una forma ondulatoria en la onda que se propaga. Podemos considerar la descripción de un diagrama aislado no repetido del desplazamiento en función del tiempo de la posición, como una función de un espectro completo (continuo) de perturbaciones sinusoidales con período o longitud de onda que se extiende hasta valores infinitamente grandes.

Es precisamente en estos términos que acabamos de escribir y sometidos a la condición de que la velocidad de las ondas sinusoidales puras sea independiente de su frecuencia o longitud de onda, como podremos enfrentarnos con la propagación sin ningún cambio de forma, de pulsos aislados arbitrarios a través del medio. Consideraremos ahora algunas características del movimiento de dichos pulsos.

## MOVIMIENTO DE PULSOS DE ONDA DE FORMA CONSTANTE

Dado un pulso que satisface las condiciones estudiadas anteriormente, procedemos a discutir su comportamiento en términos muy generales. Supóngase que se mueve un pulso de izquierda a derecha y que en un instante que denominaremos  $t = 0$ , viene descrito por una cierta ecuación :

$$y_{(t=0)} = f(x)$$

Si el pulso como un todo está moviéndose a una velocidad  $v$ , entonces en un instante posterior  $t$  el desplazamiento que originalmente existía para cierto valor particular de  $x$  (digamos  $x_1$ ) resulta que está ahora en  $x_2$ , siendo

$$x_2 = x_1 + vt$$

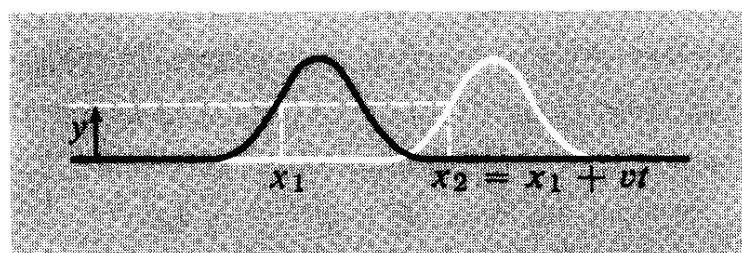


Fig. 7-12. Movimiento de un pulso móvil arbitrario.

La ecuación del pulso para este nuevo valor de  $t$  puede obtenerse dándose cuenta de que una descripción del pulso en el tiempo  $t$  tiene el mismo aspecto que una descripción para  $t = 0$  excepto en un desplazamiento del origen de  $x$  en la distancia  $vt$  (véase fig. 7-12). Podemos expresar matemáticamente esto diciendo que el desplazamiento trasversal, para cualquier valor de  $x$  y  $t$ , viene dado por

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (7-19)$$

La elección de esta forma analítica puede comprobarse, como en el caso particular de una onda sinusoidal pura, considerando la condición necesaria para que se encuentre un valor particular de  $y$  en  $(x + \Delta x, t + \Delta t)$  después de haber sido previamente observada en  $(x, t)$ . De modo semejante un pulso que se mueve de derecha a izquierda viene descrito por

$$y(x, t) = g(x + vt) \quad (7-20)$$

La forma exacta de las funciones  $f$  y  $g$  carece de importancia. Todo lo que importa es que  $y$  deberá ser expresable en función de  $x \pm vt$ . Así pues, por ejemplo, podríamos definir una cierta forma de pulso moviéndose de izquierda a derecha mediante la ecuación

$$y(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (x - vt)^2} \quad (7-21)$$

En la figura 7-13 (a) se indican diversos impulsos para  $t = 0$  y para un tiempo ligeramente posterior. El pico del pulso deberá ser de una altura  $b$  y deberá pasar por el punto  $x = 0$  para  $t = 0$ . El pulso disminuirá hasta la mitad del máximo de altura en los puntos  $x = vt \pm b$  y deberá disminuir hasta menos del 10 % de su altura de pico para  $|x - vt| > 3b$ . Y se podrá escribir cualquier número de formas de pulso posibles, utilizando funciones de potencias, exponenciales o trigonométricas, etc. Pero todos estos pulsos se moverían del mismo modo conservando su forma y moviéndose a la misma velocidad  $v$  si se describen correctamente mediante una u otra de las ecuaciones (7-19) y (7-20).

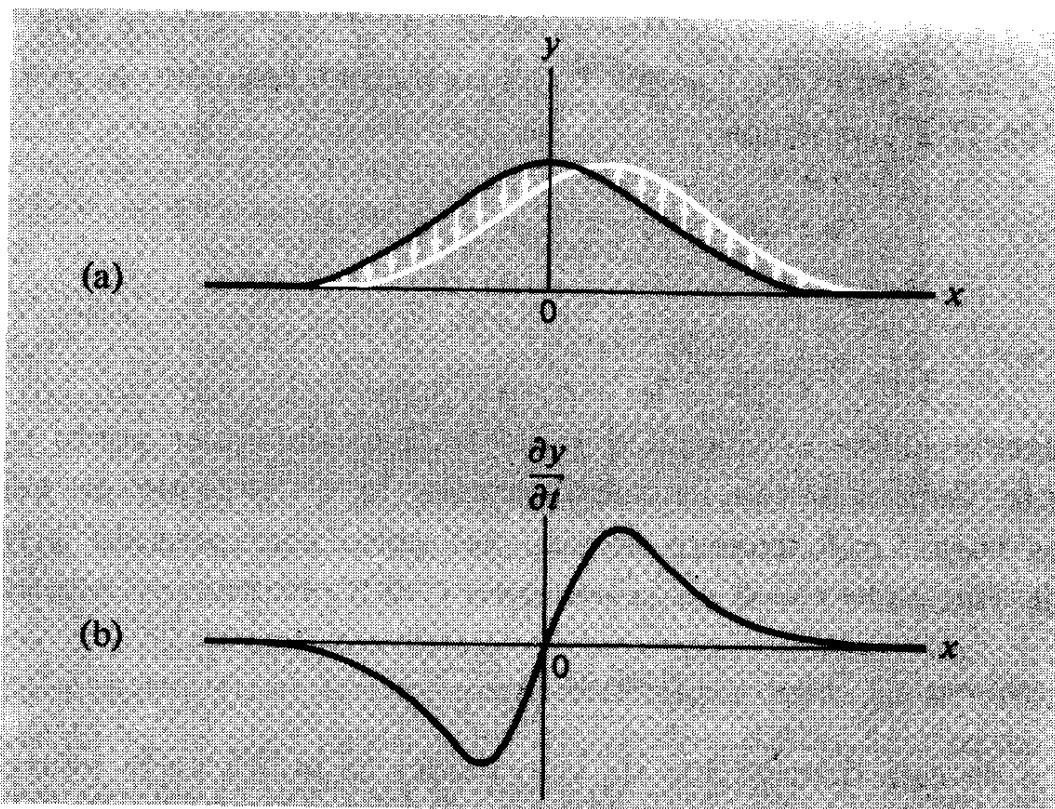


Fig. 7-13. (a) Desplazamiento incremental del pulso descrito por la Ec. (7-21). (b) Distribución de las velocidades transversales durante el desplazamiento incremental del pulso.

Es muy importante para una comprensión de las ondas apreciar la forma en que el movimiento de un perfil de onda a lo largo de su dirección de propagación ( $x$ ) puede ser la consecuencia de los desplazamientos de partículas a lo largo de una dirección puramente trasversal ( $y$ ). Así, por ejemplo, el pulso de la figura 7-13 (a) se mueve hacia la derecha porque en cualquier instante, el desplazamiento trasversal de todos los puntos a la izquierda del pico está disminuyendo y el desplazamiento de todos los puntos a la derecha del pico está aumentando. Es una consecuencia automática de estos movimientos que el desplazamiento del pico se presente a valores cada vez mayores de  $x$  según va pasando el tiempo.

Calculemos la distribución de las velocidades transversales para el pulso descrito por la ecuación (7-21). La velocidad transversal de cualquier partícula del medio (muelle, cuerda o cualquier otra cosa) es la velocidad con que cambia  $y$  con  $t$  para un cierto valor dado de  $x$ , es decir,

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

en donde utilizamos la notación de derivada parcial, apreciando que  $y$  es una función tanto de  $x$  como de  $t$  y que estamos manteniendo fijo  $x$ . Así, a partir de la ecuación (7-21) tenemos

$$v_y = \frac{-b^3}{[b^2 - (x - vt)^2]^2} \frac{\partial}{\partial t} [b^2 + (x - vt)^2]$$

es decir,

$$v_y(x, t) = \frac{2b^3(x - vt)v}{[b^2 + (x - vt)^2]^2} \quad (7-22)$$

Esta ecuación define la velocidad transversal en cualquier punto y en cualquier instante. Supóngase ahora que deseamos la distribución de velocidades transversales para  $t = 0$ , cuando el pico del pulso está pasando a través del punto  $x = 0$ . Haciendo  $t = 0$  en la ecuación (7-22) resulta

$$v_y(x, 0) = \frac{2b^3 vx}{(b^2 + x^2)^2}$$

El gráfico de esta distribución de velocidades se indica en la figura 7-13 (b), y es fácil ver cómo estas velocidades, operando durante un tiempo corto  $\Delta t$ , dan origen a pequeños desplazamientos vectoriales que desplazan el pulso como un todo del modo indicado en la figura 7-13 (a). Debe apreciarse naturalmente que la distribución de velocidades en sí misma se mueve con el pulso de modo que la condición  $v_y = 0$  se satisface siempre en el pico del pulso. La forma de la ecuación (7-22) implica esta condición, porque muestra que  $v_y$ , como el mismo  $y$ , es una función de la variable combinada  $x - vt$ .

El lector habrá apreciado ya que existe una conexión íntima entre la velocidad transversal y la pendiente del perfil del pulso. Por supuesto (véase fig. 7-14) que un dibujo instantáneo de un pulso muestra una pequeña porción del mismo a lo largo de la línea recta  $AB$ . La pendiente puede medirse por el cociente  $A'B/AA'$ . Pero en algún intervalo corto de tiempo  $\Delta t$  la línea se moverá a  $A'B'$ ; este tiempo viene dado por

$$\Delta t = \frac{AA'}{v}$$

siendo  $v$  la velocidad con la que se mueve el pulso. Sin embargo, si limitamos nuestras observaciones al valor particular de  $x$  indicado por la línea vertical, veremos que el desplazamiento transversal varía de  $PB$  a  $PA'$  cuando el pulso se mueve. La cantidad de este desplazamiento es precisamente el valor negativo de la distancia  $A'B$ , y la velocidad transversal asociada es

$$-A'B/\Delta t = -v(A'B/AA').$$

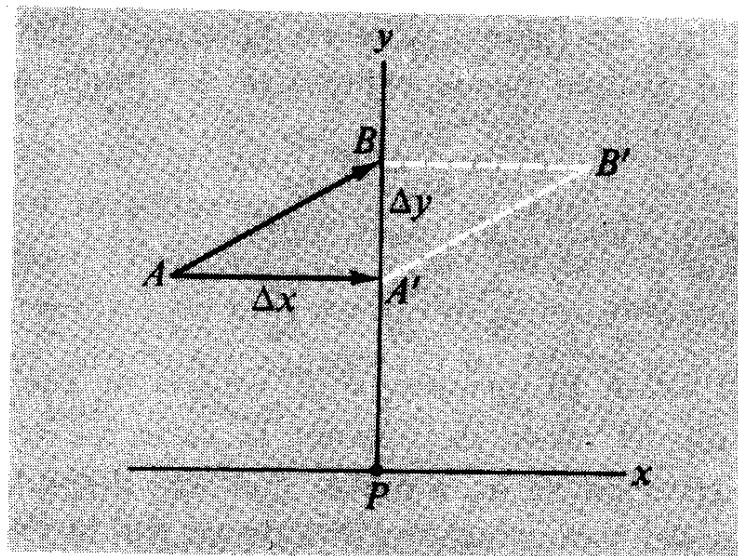


Fig. 7-14. Relación entre el desplazamiento transversal de un medio y el desplazamiento longitudinal de un pulso móvil.

Expresemos esto en un lenguaje de derivadas parciales. La pendiente  $A'B/AA'$  es el valor de  $\Delta y/\Delta x$  para cierto valor fijo de  $t$ , y del estudio anterior podemos ver que (en el límite) es válida la siguiente relación:

$$v_y = -v \frac{\partial y}{\partial x}$$

Como  $v_y$  es el valor  $\Delta y/\Delta t$  para algún valor fijo de  $x$ , podemos escribir alternativamente esto de la forma

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x}$$

Así pues, la velocidad transversal en cualquier punto es directamente proporcional a la pendiente del perfil del pulso en dicho punto.

Podemos completar este análisis recordando que el mismo  $v$  viene definido como el valor límite de  $\Delta x/\Delta t$  para cierto valor fijo de  $y$ , es decir,

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}$$

Reuniendo todos estos datos se obtiene el siguiente resultado:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (7-23)$$

La ecuación (7-23) decepciona puesto que parece ser simplemente la regla de la cadena utilizada en las derivadas ordinarias, pero hay que observar el signo menos. Lo que tenemos aquí es un caso especial de un tipo más general de fenómenos, en el que cierta magnitud  $y$  es una función tanto de la posición como del tiempo. Puede variar de un lugar a otro para un instante dado y puede variar con el tiempo en un lugar determinado. Dos observaciones suce-

sivas de  $y$ , separada por un tiempo  $\Delta t$  y en posiciones distantes  $\Delta x$  diferirán entonces una cantidad  $\Delta y$  que puede expresarse del modo siguiente:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$$

La variación total de  $y$  viene dada, pues, por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \quad (7-24)$$

siendo  $v$  la velocidad  $\Delta x/\Delta t$ . El operador  $\partial/\partial t + v\partial/\partial x$  se suele denominar *derivada convectiva*. Define el modo de obtener la variación temporal de  $y$  si el propio punto de observación se hace mover con una definida velocidad, como por ejemplo, a través del movimiento global de un fluido. Y si en la ecuación (7-24) se inserta la condición  $dy/dt = 0$ , esto corresponde a fijar nuestra atención sobre un valor particular de  $y$ , como hemos hecho ciertamente al definir el movimiento de un punto de desplazamiento dado en un perfil de pulsos arbitrario. Pero esta condición,  $dy/dt = 0$ , conviene entonces la ecuación (7-24) en el enunciado especial que se expresa en la ecuación (7-23).

Es fácil ver que nuestras ecuaciones generales, ecuación (7-19) y (7-20), satisfacen ambas la misma ecuación diferencial básica del movimiento ondulatorio. [Naturalmente, nos hemos asegurado de esto previamente, al apreciar en primer lugar que tal pulso móvil es una superposición de ondas sinusoidales que obedecen todas ellas a la ecuación (7-9).] Tenemos las dos ecuaciones

$$y(x, t) = \begin{cases} f(x - vt) \\ g(x + vt) \end{cases}$$

Para la primera de ellas, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{d(x - vt)} \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = f'$$

en donde  $f'$  es la derivada de  $f$  respecto al argumento completo  $(x - vt)$ . Derivando de nuevo,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''$$

siendo  $f''$  la segunda derivada de  $f$  respecto a  $(x - vt)$ . Derivando ahora con respecto a  $t$ ,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f' \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -vf'$$

y después de una segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (-v)^2 f'' = v^2 f''$$

Comparando estas dos derivadas segundas, vemos que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

que reproduce así la ecuación (7-9). Y si seguimos el mismo procedimiento con la función  $g(x + vt)$ , que describe una perturbación arbitraria que se mueve en el sentido negativo de  $x$ , la única diferencia consiste en que aparece como resultado de cada derivada respecto a  $t$  un factor  $+v$  en lugar de  $-v$ . Así pues, después de dos derivadas, las funciones  $f$  y  $g$  se ve que obedecen a la misma ecuación.

## SUPERPOSICIÓN DE PULSOS DE ONDAS

En la última sección nos limitábamos a la consideración de pulsos individuales. Pero una de las características más importantes e interesantes del comportamiento de dichos pulsos es que dos de ellos, moviéndose en sentidos opuestos, pueden pasar uno por encima de otro y salir del encuentro con sus identidades separadas. Aquí vemos de nuevo trabajando la superposición de un modo muy notable. La figura 7-15 muestra quizás el tipo de superposición más sorprendente. Dos pulsos simétricos se mueven en sentidos opuestos. Son exactamente semejantes, excepto que uno es positivo y el otro es negativo. Cuando pasa el uno a través del otro, llega un momento en que el muelle completo o la cuerda está sin deformar; es como si los pulsos se hubiesen aniquilado el uno al otro y así, en cierto sentido, ha ocurrido. Pero la intuición nos diría que cada pulso iba llevando una cantidad positiva de energía, que no puede simplemente olvidarse. Y realmente, los pulsos reaparecen de nuevo.<sup>1</sup> ¿Pero qué es lo que conserva la memoria de los mismos a través de la fase desplazamiento cero, de modo que vuelvan a recuperar intacta su forma original? Es la velocidad de las diferentes partes del sistema. La cuerda en el instante de deformación transversal cero tiene una distribución de las velocidades transversales características de los dos pulsos superpuestos, y la distribución de velocidad de un pulso positivo simétrico moviéndose hacia la derecha es exactamente la misma que la de un pulso negativo semejante o bien moviéndose hacia la izquierda. Esto viene implicado por la ecuación (7-23),

<sup>1</sup> Leonardo da Vinci, uno de los observadores más agudos de todos los tiempos, estudió las ondas ampliamente y se dio cuenta del resultado de esta superposición pero no supo discernir el mecanismo. Así escribió: "Todas las impresiones producidas por las cosas que chocan sobre el agua pueden penetrar una en otra sin ser destruidas. Una onda nunca penetra en la otra, sino que solamente retroceden desde el punto en donde se encontraron." Véase *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, traducido por Edward McCurdy, Braziller, New York, 1956.

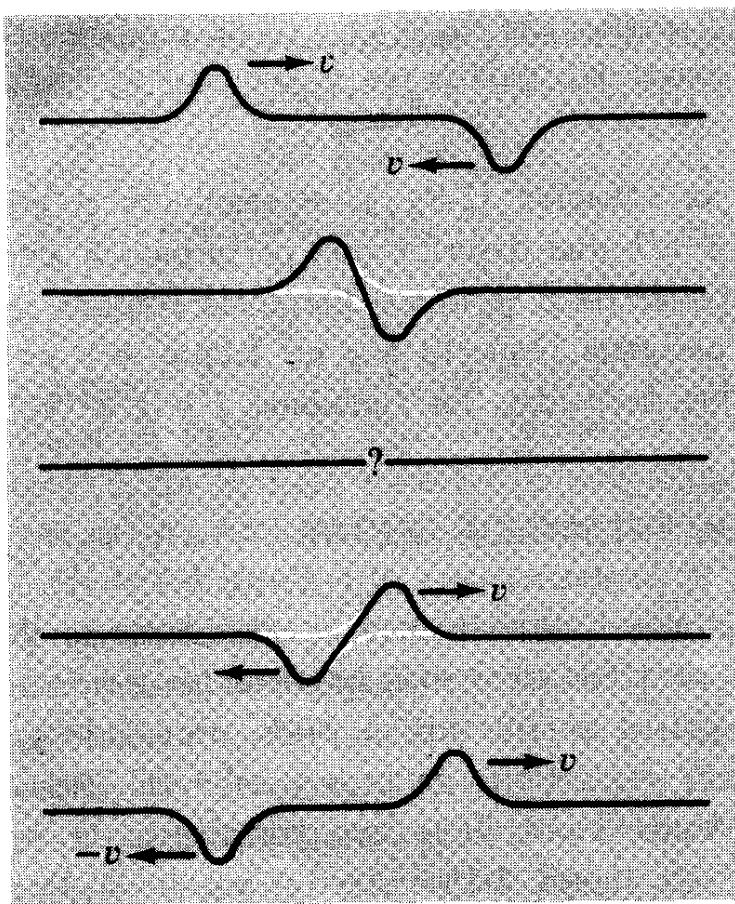


Fig. 7-15. Superposición sucesiva de dos pulsos que son inversos uno respecto al otro tanto de derecha a izquierda como de arriba abajo y que se mueven en sentidos opuestos.

puesto que invirtiendo los signos tanto de  $\partial y / \partial x$  y de  $\partial x / \partial t$  resulta  $v_y$  invariable, pero es también aparente de modo inmediato si se hace un dibujo de ambos pulsos cuando aparecen en dos instantes sucesivos. Así pues, los desplazamientos transversales se contrarrestan, pero las velocidades transversales se suman, y durante este solo instante la energía total del sistema reside en la energía cinética asociada con dichas velocidades. Pero concentrándonos por el momento sobre el aspecto puramente cinemático del problema.

Para algunos objetivos puede ser conveniente admitir formas geométricas sencillas de los perfiles de los pulsos, tales como el rectángulo, triángulo y trapezoide indicados en la figura 7-16. Con un pulso triangular, por ejemplo, la velocidad transversal es la misma en todos los puntos a lo largo de cada lado del pulso, y las consecuencias de la superposición de dichos pulsos se analizan con facilidad. Sin embargo, deberá observarse que dichas formas no tienen significado físico. Así el paso de un pulso rectangular exigiría que la velocidad transversal fuese infinitamente grande en los lados verticales del pulso, cuando éste pasa y cualquier perfil de pulso con esquinas (como las del

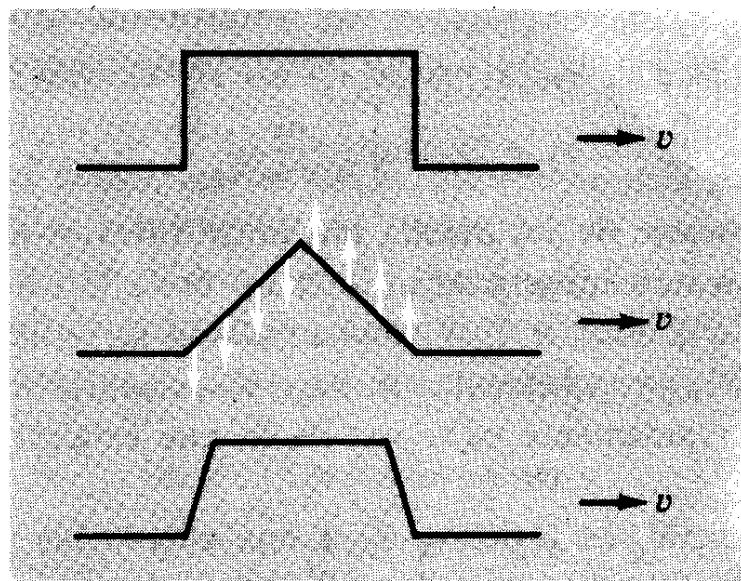


Fig. 7-16. Idealizaciones geométricas de tipos sencillos de pulso.

trapecio) implica unas variaciones discontinuas en la velocidad transversal, lo cual a su vez significa aceleraciones infinitas que exigen fuerzas infinitas. Por tanto, cualquier pulso real tiene las esquinas redondeadas y sus lados con pendientes, por exótica que sea su forma.

## DISPERSIÓN; VELOCIDAD DE FASE Y DE GRUPO

Hemos dado la ecuación de una onda sinusoidal progresiva en la forma [ecuación (7-7)]

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

Para una cuerda tensa, considerada con una distribución continua de masa, tenemos la relación [ecuación (7-5)]

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

De acuerdo con estas ecuaciones, una cuerda dada, bajo una tensión determinada, transportará ondas sinusoidales de todas las longitudes de onda a la misma velocidad  $v$ . Sin embargo, ésta es una idealización que ciertamente no se cumplirá totalmente para ninguna cuerda real. Señalábamos esta limitación más particularmente en el capítulo 5, en la discusión de los modos normales de una línea de masas conectadas. Así se obtuvo que para una cuerda de longitud  $L$ , fija en sus extremos, la longitud de onda  $\lambda_n$  que podía asociarse con un modo normal,  $n$ , era  $2L/n$ , lo mismo que para una cuerda continua,

pero que la frecuencia de modo  $\nu_n$  no era simplemente proporcional a  $n$ . En lugar de ello, como se vio, la frecuencia modal venía dada por

$$\nu_n = 2\nu_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{2(N+1)} \right]$$

De modo que el valor de  $2\nu_0$  definía un límite superior a la frecuencia posible de cualquier línea compuesta de un número finito ( $N$ ) de masas [ver ecuación (5-25), página 161]. Para  $n \ll N$ , este resultado se reducía al caso de una cuerda continua con  $\nu_n$  proporcional a  $n$ . Pero al aumentar  $n$ , los valores de  $\nu_n$  aumentarían menos rápidamente cada vez de lo que exigiría esta proporcionalidad.

Por tanto, en general, es lógico que en una cuerda las ondas sinusoidales puras de alta frecuencia y longitud de onda corta tiendan a moverse con velocidades menores que las ondas más largas. Éste es un ejemplo de lo que se denomina *dispersión*, variación de la velocidad de la onda con la longitud de onda.

El fenómeno de la dispersión se ha hallado en muchos tipos diferentes de medio, con diferentes mecanismos físicos básicos. Y lo que deseamos resaltar no es el análisis muy especial que nos ha conducido a la propiedad dispersiva de una cuerda formada por una serie de cuentas, sino al hecho de la propia dispersión. La palabra sugiere una separación de lo que en principio estaba en un solo lugar, y esto es exactamente lo que encierra. Veremos lo que sucede cuando la luz blanca pasa a través de un prisma y se dispersa en diferentes colores. La velocidad de las ondas de la luz roja en el vidrio es mayor que la correspondiente a las ondas de luz azul, y la refracción de la luz que entra en el prisma viene dada por la ley de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = n = \frac{c}{v}$$

de modo que el ángulo de refracción varía con el color de acuerdo con la variación de velocidad. En un problema monodimensional la dispersión significaría que dos trenes de ondas largos pero limitados, de longitud de onda diferentes, se irían separando cada vez más con el tiempo, si inicialmente estaban solapados. Además cada tren de ondas individuales, formado por una mezcla de ondas sinusoidales puras de velocidades ligeramente diferentes, resultaría distorsionado y más disperso al pasar el tiempo. Solamente una onda sinusoidal pura de extensión realmente infinita, con una sola longitud de onda y frecuencia se movería con una velocidad definida en un medio dispersivo.

(Naturalmente, la dispersión puede ser despreciable en circunstancias particulares y para el caso especial de las ondas de luz en el vacío parece ser estrictamente nula.)

Para estudiar las consecuencias de la dispersión más concretamente, consideraremos dos ondas sinusoidales de longitudes de onda ligeramente diferentes, moviéndose en el mismo sentido (pero quizás con velocidades diferentes) a lo largo de cada cuerda. Supongamos para simplificar que tienen amplitudes iguales y que vienen descritas por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}y_1 &= A \operatorname{sen} 2\pi(k_1 x - v_1 t) \\y_2 &= A \operatorname{sen} 2\pi(k_2 x - v_2 t)\end{aligned}\quad (7-25)$$

Éstas son muy parecidas a las ecuaciones (7-14) que escribíamos con objeto de calcular la forma ondulatoria de estas dos ondas que tienen la misma velocidad. Sin embargo, por conveniencia en el manejo de las ecuaciones, utilizaremos el número de ondas  $k$  en lugar de  $1/\lambda$ , incluyendo explícitamente la frecuencia  $v$  en lugar del cociente  $v/\lambda$ . En general, suponemos que estas dos ondas tienen velocidades características *diferentes*:

$$v_1 = \frac{v_1}{k_1} = v_1 \lambda_1 \quad v_2 = \frac{v_2}{k_2} = v_2 \lambda_2$$

La superposición de estas dos ondas nos da una perturbación combinada del modo siguiente:

$$y = A[\operatorname{sen} 2\pi(k_1 x - v_1 t) + \operatorname{sen} 2\pi(k_2 x - v_2 t)]$$

Utilizando las mismas relaciones trigonométricas que hemos empleado antes, esta expresión se transforma en

$$\begin{aligned}y &= 2A \cos \pi[(k_1 - k_2)x - (v_1 - v_2)t] \\&\times \operatorname{sen} 2\pi \left[ \frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{v_1 + v_2}{2}t \right]\end{aligned}$$

Para  $t = 0$  esto nos recuerda a las ondas superpuestas de la figura 7-6. Pero consideremos ahora lo que ocurre al pasar el tiempo. La expresión anterior para  $y$  puede interpretarse como una onda rápidamente alternativa de longitud de onda corta, modulada en amplitud mediante una envolvente de longitud de onda larga. Estas dos perturbaciones con forma de ondas se mueven. Pero las *dos tienen velocidades diferentes*. Un lugar de amplitud máxima necesariamente se mueve con la velocidad de la envolvente.

Si las dos ondas combinadas son de casi la misma longitud de onda podemos simplificar nuestra descripción para perturbación combinada poniendo

$$k_1 - k_2 = \Delta k \quad \nu_1 - \nu_2 = \Delta\nu$$

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k \quad \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \nu$$

Entonces tenemos

$$y = 2A \cos \pi(x \Delta k - t \Delta\nu) \sin 2\pi(kx - \nu t) \quad (7-26)$$

En esta expresión podemos identificar dos velocidades características. Una de ellas es la velocidad con la que se mueve la cresta perteneciente al número de onda medio  $k$ . Esta velocidad se denomina *velocidad de fase*,  $v_p$ :

$$v_p = \frac{\nu}{k} = \nu\lambda \quad (7-27)$$

La otra es la velocidad con que se mueve la envolvente moduladora. Debido a que esta última encierra un grupo de ondas cortas, la velocidad en cuestión se denomina *velocidad de grupo*,  $v_g$ :

$$v_g = \frac{\Delta\nu}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\nu}{dk} \quad (7-28)$$

La velocidad de fase es la única clase de velocidad que hemos asociado hasta ahora con una onda. Se le da este nombre porque representa la velocidad que podemos asociar con un valor fijo de la fase en la perturbación de onda corta básica, es decir, representa el avance de  $x$  con  $t$  para un punto de desplazamiento cero.

La velocidad de grupo es de gran importancia física, porque todo tren de onda tiene una extensión finita y excepto en aquellos casos raros en donde se sigue el movimiento de una cresta de orden individual, lo que observamos es el movimiento de un grupo de ondas. Además, resulta que el transporte de energía en una perturbación ondulatoria tiene lugar a la velocidad de grupo. Para tratar estas cuestiones con eficacia se necesita utilizar, no simplemente dos ondas sinusoidales, sino un espectro completo, suficiente para definir un pulso aislado o grupo de ondas en el modo que hemos discutido anteriormente. Cuando se hace esto, el valor de la velocidad de grupo sigue viniendo dado por la ecuación (7-28).

La existencia de la dispersión, como es natural, conduce a implicaciones importantes para este procedimiento de analizar un pulso arbitrario en sinusoides puras. Si estas sinusoides tienen diferentes velocidades características, la

forma de la perturbación debe variar al pasar el tiempo. En particular, un pulso que esté altamente localizado inicialmente resultará fatalmente cada vez más disperso.

Un ejemplo notable de la diferencia entre velocidades de fase y de grupo lo proporcionan las ondas en agua profunda, denominadas "ondas de gravedad." Estas ondas son grandemente dispersivas. La velocidad de onda para una longitud de onda bien definida, que debemos ahora denominar velocidad de fase, es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda. Así podemos escribir

$$v_p = C\lambda^{1/2} = Ck^{-1/2}$$

siendo  $C$  una constante. Pero  $v_p = v/k$ , según la ecuación (7-27). De aquí tenemos

$$v = Ck^{1/2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dv}{dk} = \frac{1}{2}Ck^{-1/2}$$

Pero  $dv/dk$  es la velocidad de grupo y así resulta

$$v_g = \frac{1}{2}v_p$$

de modo que las crestas de las ondas componentes se verán correr rápidamente a través del grupo, creciendo primero en amplitud y luego desapareciendo de modo aparente de nuevo. Puede observarse este efecto curioso sobre la superficie del mar o en algún otro sitio con agua profunda.

Las ondas sonoras en los gases, como las demás vibraciones elásticas que hemos considerado, son no dispersivas, al menos en la extensión que nuestra descripción teórica es correcta. Ésta es una circunstancia afortunada. Imaginemos el caos y la angustia auditiva que resultaría si los sonidos de frecuencias diferentes se moviesen a velocidades diferentes a través del aire. El escuchar una orquesta sería una verdadera pesadilla. Naturalmente, cabrían sus compensaciones, podríamos, por ejemplo, analizar sonidos con un prisma de gas, como podemos analizar la luz con un prisma de vidrio. Pero como seres humanos podemos estar contentos de que esta posibilidad no se verifique.

## EL FENÓMENO DE CORTE<sup>1</sup>

Estrechamente relacionado con la propiedad de la dispersión es el efecto notable conocido como *corte*. Este término describe la incapacidad de un medio

<sup>1</sup> Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

dispersivo para transmitir ondas por encima (o posiblemente por debajo) de una frecuencia crítica. El efecto está implícito en el análisis de los modos normales de una línea de  $N$  masas separadas, para las cuales vimos [véase ecuación (5-24)] que

$$\omega_n = 2\omega_0 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi l}{2L} \right)$$

en donde  $L = (N + 1)l$ . Podemos imaginar que la longitud  $L$  de la línea se aumenta indefinidamente sin cambiar la separación  $l$  entre las masas adyacentes. En este caso el número de ondas  $k_n (= n/2L)$  resulta ser, de hecho, una variable continua, y podremos escribir la relación entre la frecuencia  $\nu$  y el número de ondas  $k$  del modo siguiente:

$$\nu(k) = 2\nu_0 \operatorname{sen}(\pi kl) \quad (7-29)$$

Evidentemente, la ecuación (7-29) no permite cualquier valor de  $\nu(k)$  mayor que  $2\nu_0$ . Así pues, se observa (como ya se estudió en la página 162) la existencia de una frecuencia de modo normal máxima  $\nu_m$  ( $2\nu_0 = \omega_0/\pi$ ). Esta frecuencia  $\nu_m$  corresponde a un número de ondas  $k_m$  tal que

$$\pi k_m l = \pi/2$$

para una longitud de onda  $\lambda_m = 2l$ . Pero si tuviésemos una línea de masas como ésta, no habría nada que nos impidiese agitar un extremo a una frecuencia *mayor* que  $\nu_m$ . ¿Qué ocurre, de hecho, en este caso?

Para hallar lo que ocurre volvamos a la ecuación que relaciona las amplitudes de las masas sucesivas en el sistema acoplado que vibra a cierta frecuencia  $\nu$  (o  $\omega$ ). A partir de la ecuación (5-19) tenemos la siguiente relación entre las amplitudes  $A_{p-1}$ ,  $A_p$ ,  $A_{p+1}$  para tres partículas sucesivas (véase pág. 161):

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\nu^2 + 2\nu_0^2}{\nu_0^2} \quad (7-30)$$

Consideremos el tipo de descripción que esta ecuación nos da para diversos valores de  $\nu$ .

a.  $\nu = 0$ . En este caso,

$$A_p = \frac{1}{2}(A_{p-1} + A_{p+1})$$

La amplitud varía linealmente con la distancia a lo largo de la recta; es un equilibrio simplemente estático [fig. 7-17 (a)] con un extremo de la línea que

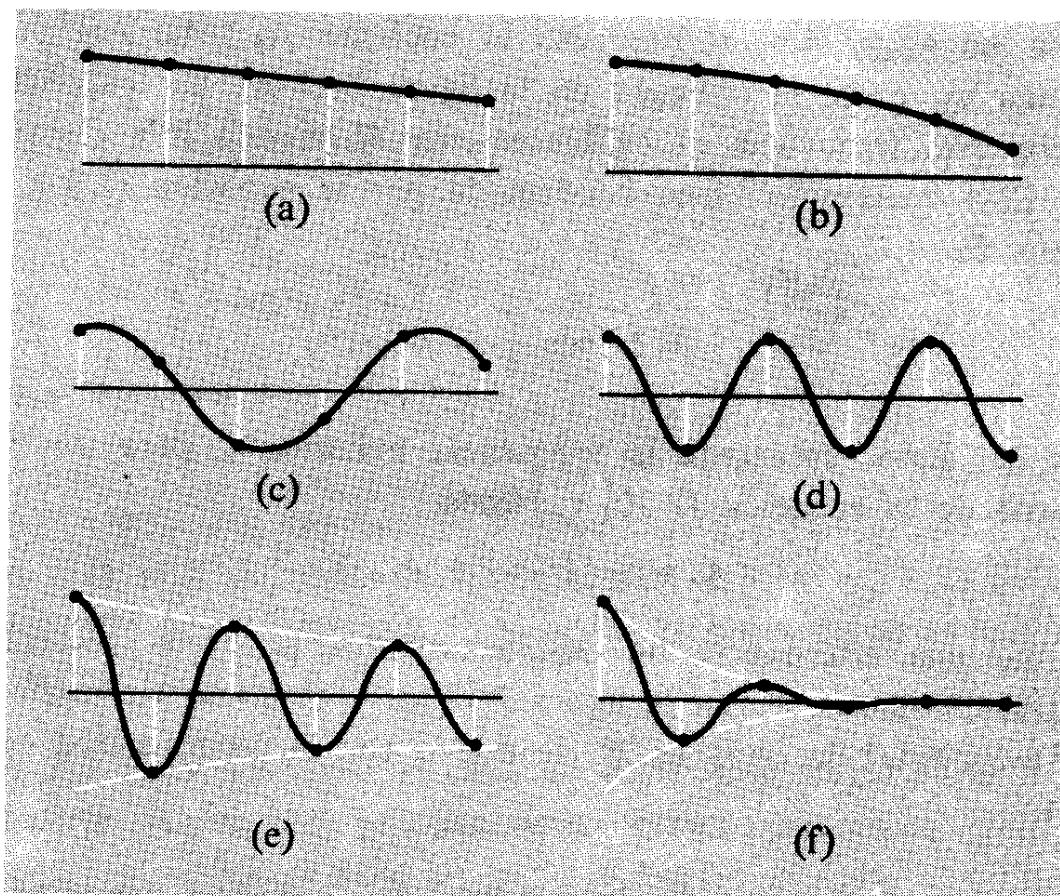


Fig. 7-17. Relaciones de amplitudes para partículas en una cuerda impulsada de izquierda a derecha. (a) Equilibrio estático,  $v = 0$ . (b)  $v \ll v_0$ . (c)  $v = \sqrt{2}v_0$ . (d) Modo superior  $v = 2v_0$ . (e)  $v > 2v_0$ . (f)  $v \gg 2v_0$ .

se ve empujado transversalmente desde la posición de reposo normal. La longitud de onda eficaz es infinita.

b.  $v \ll v_0$ . Ahora tenemos

$$A_p > \frac{1}{2}(A_{p-1} + A_{p+1})$$

Cualquier amplitud es mayor que el valor medio de dos adyacentes, pero no demasiado. El efecto consiste en producir una ligera curvatura hacia el eje de una curva suave que une las partículas [fig. 7-17 (b)], lo cual asegura una forma sinusoidal.

c.  $v = \sqrt{2}v_0$ . Éste es un caso muy especial. Ahora tenemos:

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 0$$

Recuérdese que esto debía satisfacerse para cada serie de tres masas consecutivas y no sólo para una de ellas en concreto. Esto exige que

$$A_{p+1} = -A_{p-1}$$

pero parece no exigir ningún requisito al cociente  $A_{p-1}/A_p$ . Así pues, la situación podía ser como la indicada en la figura 7-17(c). La longitud de onda asociada con esta frecuencia es evidentemente  $4l$ , siendo  $l$  la distancia entre partículas. Esta conclusión viene confirmada por la ecuación (7-29), que para  $k = 1/4l$  nos da

$$\nu = 2\nu_0 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \nu_0$$

d.  $\nu = 2\nu_0$ . Esto representa la frecuencia máxima  $\nu_m$  para un modo normal. A partir de la ecuación (7-30) tenemos

$$A_p = -\frac{1}{2}(A_{p-1} + A_{p+1})$$

Ello exige una alternancia de desplazamientos positivos y negativos del mismo tamaño, como se ve en la figura 7-17(d) y como se vio al final del capítulo 5. La longitud de onda es  $2l$ , de nuevo con la conformidad de la ecuación (7-29).

e.  $\nu > 2\nu_0$ . Supóngase que  $\nu$  es mayor que  $2\nu_0$ , pero no demasiado. Entonces  $A_p$  tiene signo opuesto al valor medio de  $A_{p-1}$  y  $A_{p+1}$ , y además

$$|A_p| < \frac{1}{2}|A_{p-1} + A_{p+1}|$$

Esto implica una ligera curvatura, *alejándose* del eje, de las curvas suaves que unen partículas alternadas. Si es la parte izquierda de la línea la que se está agitando, entonces la figura 7-17(e) sería una representación razonable de los desplazamientos. Las amplitudes alternarían de signo, y sus magnitudes disminuirán en proporción geométrica, es decir, exponencialmente. Éste es el fenómeno de *corte*.

Pongamos

$$\nu = 2\nu_0 + \Delta\nu$$

y hagamos iguales a  $-(1 + f)$ , los cocientes  $A_{p-1}/A_p$ ,  $A_p/A_{p+1}$ , etc., siendo  $f$  una fracción pequeña. A partir de la ecuación (7-30) tenemos

$$\frac{A_{p-1}}{A_p} + \frac{A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\nu^2}{\nu_0^2} + 2$$

Por lo tanto,

$$-(1 + f) - (1 + f)^{-1} = \frac{-(2\nu_0 + \Delta\nu)^2}{\nu_0^2} + 2$$

Por consiguiente,

$$-1 - f - (1 - f + f^2 \dots) = \frac{-[4\nu_0^2 + 4\nu_0\Delta\nu + (\Delta\nu)^2]}{\nu_0^2} + 2$$

Es decir,

$$-2 - f^2 + \dots = -2 - \frac{4\Delta\nu}{\nu_0} - \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2$$

De aquí que, aproximadamente,

$$f = 2 \left( \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right)^{1/2}$$

Cuanto más nos alejamos de la frecuencia crítica  $\nu_m$ , más drástica es la atenuación según nos movemos a lo largo de la línea, como se sugiere comparando las figuras 7-17 (e) y (f).

f.  $\nu \gg 2\nu_0$ . Esto nos lleva al caso de estar muy alejados de la frecuencia crítica de corte. Ahora será prácticamente correcto poner

$$\frac{A_{p-1}}{A_p} = - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}$$

Así pues, por ejemplo, si  $\nu = 2\nu_m = 4\nu_0$ , será casi cierto decir que sólo la primera partícula de la línea (la única que se ve agitada por un agente externo) mostrará cualquier respuesta apreciable; el resto de la línea se comportará casi como una estructura rígida.

## LA ENERGÍA DE UNA ONDA MECÁNICA

En un instante cualquiera las partículas de un medio que transportan una onda están en diversos estados de movimiento. Evidentemente, el medio está dotado de una energía en su estado de reposo normal. Existen contribuciones de energía potencial de la deformación lo mismo que de la energía cinética del movimiento. Calcularemos la energía total asociada con una longitud de onda completa de una onda sinusoidal sobre una cuerda tensa. Para enfocar este problema, consideraremos en primer lugar un pequeño segmento de la cuerda, tan corto que pueda considerarse como recto, que está comprendido entre  $x$  y  $x + dx$ , como se ve en la figura 7-18. Haremos las hipótesis normales de que los desplazamientos de las partículas de la cuerda son estrictamente transversales y que el valor de la tensión  $T$  no varía por la deformación de la cuerda a partir de su longitud y configuración normales.

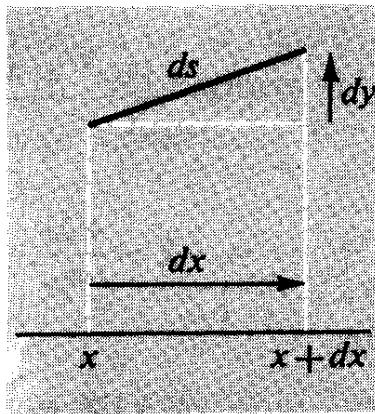


Fig. 7-18. Desplazamiento y alargamiento de un segmento corto de cuerda que transporta una onda elástica transversal.

La masa del segmento pequeño es  $\mu dx$  y su velocidad transversal ( $u_y$ ) es  $dy/dt$ . De aquí que para este segmento tengamos

$$\text{energía cinética} = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

y podemos definir una energía cinética por *unidad de longitud*, que se denomina *densidad* de energía cinética, para dicho medio monodimensional :

$$\text{densidad de energía cinética} \equiv \frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (7-31)$$

Puede calcularse la energía potencial hallando el incremento de longitud de la cuerda cuando se deforma. Este alargamiento, multiplicado por la tensión constante admitida  $T$ , es igual al trabajo realizado en la deformación. Así pues, para el segmento, tenemos

$$\text{energía potencial} = T(ds - dx)$$

en donde

$$\begin{aligned} ds &= (dx^2 + dy^2)^{1/2} \\ &= dx \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Si admitimos que los desplazamientos transversales son *pequeños*, de modo que  $\partial y / \partial x \ll 1$ , podemos aproximar la expresión anterior utilizando el desarrollo del binomio con sólo dos términos, poniendo así

$$ds - dx \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

Por lo tanto,

$$\text{energía potencial} \approx \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

De aquí que tengamos

$$\text{densidad de energía potencial} \equiv \frac{dU}{dx} \approx \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (7-32)$$

Es interesante señalar que las densidades de energía cinética y de energía potencial dadas por las ecuaciones (7-31) y (7-32), son *iguales*. Porque, como hemos visto, una onda que se mueve sobre el muelle tiene la forma

$$y(x, t) = f(x \pm vt) = f(z),$$

en donde

$$v = \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

Así pues,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(z)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm vf'(z)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \mu v^2 [f'(z)]^2$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} T [f'(z)]^2$$

que son igual puesto que  $T = \mu v^2$ . Aunque no pueda admitirse que esta igualdad de las dos densidades de energía es válida en todas las situaciones concebibles, está de acuerdo con lo que sabemos sobre la división en partes iguales (en valor promedio) de la energía total de los sistemas mecánicos sencillos sometidos a fuerzas restauradoras lineales.

Supóngase ahora que tenemos en particular una onda sinusoidal descrita por la ecuación

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right) \quad (7-33)$$

Entonces para cualquier valor dado de  $x$  tenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = 2\pi\nu A \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right) \\ &= u_0 \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right) \end{aligned}$$

en donde  $u_0 (= 2\pi\nu A)$  es la velocidad máxima del movimiento transversal. Consideremos esta distribución de velocidades transversales en el instante  $t = 0$ . En este instante tenemos

$$u(x) = u_0 \cos \left( \frac{-2\pi\nu x}{v} \right) = u_0 \cos \left( \frac{2\pi\nu x}{v} \right)$$

Como  $\nu/v = 1/\lambda$ , esta expresión puede escribirse igualmente

$$u(x) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

La densidad de energía cinética viene dada así por

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2}\mu u^2 = \frac{1}{2}\mu u_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

La energía cinética total en el segmento de cuerda entre  $x = 0$  y  $x = \lambda$  viene dada así por

$$K = \frac{1}{2}\mu u_0^2 \int_0^\lambda \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx$$

es decir,

$$K = \frac{1}{4}(\lambda\mu)u_0^2 \quad (7-34)$$

Ésta es la energía cinética asociada con una longitud de onda completa de la perturbación. (Puede comprobarse fácilmente que se obtiene la misma respuesta integrando la densidad de energía cinética entre dos valores cualesquiera de  $x$  separados por  $\lambda$  en un instante dado.)

La energía potencial en la misma porción de la cuerda debe ser igual, como ya hemos visto, a la energía cinética. Con objeto de ser más explícitos, llevaremos a cabo el cálculo. A partir de la ecuación (7-33) tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2\pi\nu A}{v} \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Así pues, para  $t = 0$  resulta

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{t=0} = -\frac{2\pi\nu A}{v} \cos\left(\frac{2\pi\nu x}{v}\right) = -\frac{2\pi A}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

De aquí que la densidad de energía potencial (ecuación 7-32) venga dada por

$$\frac{dU}{dx} = \frac{2\pi^2 A^2 T}{\lambda^2} \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Integrando una longitud de onda se tiene entonces

$$U = \frac{\pi^2 A^2 T}{\lambda}$$

Poniendo  $T = \mu v^2 = \mu v^2 \lambda^2$ , esto nos da

$$U = \pi^2 A^2 \mu v^2 \lambda \quad (7-35)$$

puede observarse que es igual en valor a  $K$ , dado por la ecuación (7-34), si utilizamos la identidad  $u_0 = 2\pi\nu A$ .

La energía total por longitud de onda,  $E$ , puede escribirse

$$E = \frac{1}{2}(\lambda\mu)u_0^2 \quad (7-36)$$

y es igual a la energía cinética que tendría un trozo de la cuerda de longitud  $\lambda$  si toda ella se moviese con la velocidad transversal máxima  $u_0$  asociada con la onda.

Aunque hemos escogido hacer este cálculo para una onda sinusoidal, pueden obtenerse resultados equivalentes para otros tipos de formas de ondas (véase el problema 7-23 para un ejemplo de éstos).

## TRANSPORTE DE ENERGÍA MEDIANTE UNA ONDA

Imaginemos que se está haciendo oscilar transversalmente un extremo de una cuerda muy larga de modo que genere una onda sinusoidal que se mueve a lo largo de la misma. Los cálculos de la sección anterior exigen claramente que este proceso debe llevar consigo una entrada continua de energía. Para cada nueva longitud  $\lambda$  que se pone en movimiento por la onda, debe suministrarse la cantidad de energía dada por la ecuación (7-36). Por tanto, el trabajo equivalente a esta energía debe ser suministrado por el agente exterior (la fuente o foco) situado al extremo de la cuerda. Veamos cómo puede comprobarse esto.

Consideremos la misma ecuación de onda sinusoidal que en la última sección [ecuación (7-33)]:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

Admitiremos que la cuerda tiene un extremo en  $x = 0$  y que está siendo accionada en dicho punto (fig. 7-19). La fuerza impulsora,  $F$ , igual en módulo a la tensión,  $T$ , debe estar aplicada en una dirección tangente a la cuerda, como

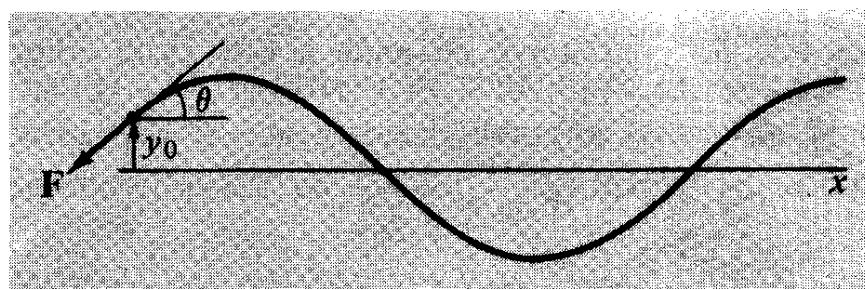


Fig. 7-19. Generación de una onda sinusoidal en una cuerda tensa, mostrando el vector de la fuerza aplicado en un instante arbitrario.

se ve en la figura. El movimiento del punto extremo, que se admite como puramente transversal, viene dado por la ecuación

$$y_0(t) = A \operatorname{sen} 2\pi\nu t$$

La componente de  $F$  en la dirección de este movimiento transversal viene dado por

$$F_y = -T \operatorname{sen} \theta \approx -T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$$

A partir de la ecuación (7-33) tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2\pi\nu A}{v} \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

Por lo tanto,

$$F_y = \frac{2\pi\nu A T}{v} \cos 2\pi\nu t$$

Ahora podemos calcular el trabajo realizado en un tiempo cualquiera mediante la integral de  $F_y dy_0$ :

$$\begin{aligned} W &= \int F_y dy_0 = \frac{2\pi\nu A T}{v} \int \cos 2\pi\nu t d(A \operatorname{sen} 2\pi\nu t) \\ &= \frac{(2\pi\nu A)^2 T}{v} \int \cos^2 2\pi\nu t dt \end{aligned}$$

Podemos expresar este resultado de modo más sencillo observando que  $2\pi\nu A$  es la velocidad máxima  $u_0$  del movimiento transversal. Así pues, podemos escribir

$$W = \frac{u_0^2 T}{v} \int \cos^2 2\pi\nu t dt$$

Calculemos este trabajo para un período completo de la onda, tomando la integral de  $t = 0$  a  $t = 1/\nu$ . Entonces se tiene

$$W_{\text{ciclo}} = \frac{u_0^2 T}{2v} \int_0^{1/\nu} (1 + \cos 4\pi\nu t) dt$$

El término  $\cos 4\pi\nu t$  no contribuye en nada a este ciclo completo, de modo que tenemos

$$W_{\text{ciclo}} = \frac{u_0^2 T}{2v\nu} \quad (7-37)$$

Como  $T = \mu v^2$  y  $\nu = v/\lambda$ , esto puede expresarse de las formas siguientes:

$$W_{\text{ciclo}} = \frac{1}{2}(\lambda\mu)u_0^2 = 2\pi^2 v^2 A^2 \lambda \mu \quad (7-38)$$

que son precisamente el doble de los valores de la energía cinética y potencial por longitud de onda, dados en las ecuaciones (7-34) y (7-35).

El trabajo realizado *por unidad de tiempo*, según viene descrito por la potencia media de entrada  $P$ , se obtiene tomando la ecuación (7-37), que da el trabajo por ciclo y multiplicándolo por el número de ciclos por unidad de tiempo ( $v$ ). Esto nos da

$$P = \frac{u_0^2 T}{2v} = \frac{1}{2} \mu u_0^2 v \quad (7-39)$$

(Recuérdese que  $T = \mu v^2$ .) Así se observa que  $P$  es igual a la energía total por unidad de longitud que la onda añade a la cuerda ( $\frac{1}{2} \mu u_0^2$ ) multiplicada por la velocidad de la onda ( $v$ ), lo cual puede considerarse (por lo menos hasta que la onda alcanza el otro extremo de la cuerda) como la longitud adicional de cuerda por unidad de tiempo que se ve envuelta en la perturbación. La energía no se retiene en la fuente: fluye a lo largo de la cuerda, que actúa así como un medio para transporte de energía de un punto a otro, siendo la velocidad de transporte igual a la velocidad de onda  $v$ .<sup>1</sup> ( Nótese que cuando una porción dada de la cuerda ha entrado a formar parte del movimiento ondulatorio, su energía media permanece constante.)

## FLUJO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y PRESIÓN DE RADIACIÓN MECÁNICA

Es natural que, asociado al transporte de energía por una onda mecánica, exista también el transporte de cantidad de movimiento. Y es tentador suponer que el cociente del transporte de energía y el transporte de cantidad de movimiento es esencialmente la velocidad de onda  $v$  (de modo muy parecido a como al cociente de la energía y la cantidad de movimiento para una partícula, excepto en un factor de  $\frac{1}{2}$ ). Sin embargo, esto no es en general así. El cálculo de la cantidad de movimiento de la onda encierra una consideración detallada de las propiedades del medio y los resultados pueden ser sorprendentes. Por ejemplo, se llegaría a la conclusión de que las ondas longitudinales en una barra que obedece exactamente a la ley de Hooke no puede llevar cantidad de movimiento en absoluto. El medio perfectamente elástico

<sup>1</sup> Aquí estamos admitiendo que no existe dispersión. Si el medio es dispersivo, resulta que la velocidad de grupo es la que caracteriza la velocidad de transporte de energía.

en este sentido no existe, pero el cálculo del flujo de cantidad de movimiento en un medio real resulta ser entonces un tema bastante sutil y difícil.

Una cuestión estrechamente relacionada con la del flujo de cantidad de movimiento es la fuerza mecánica ejercida por las ondas sobre un objeto que las absorbe o las refleja. Está bien establecido, por ejemplo, que las ondas longitudinales en un gas (ondas sonoras) ejercen una presión sobre una superficie colocada en su camino, y la existencia de esta presión debe estar ciertamente asociada con un transporte de cantidad de movimiento por las ondas. En este caso particular la fuerza ejercida sobre una superficie por las ondas viene dada ciertamente en cuanto a su orden de magnitud por el flujo de energía por unidad de tiempo dividido por la velocidad de la onda, relación que es válida exactamente para las ondas electromagnéticas. Sin embargo, una vez más deberá resaltarse que el resultado preciso depende de las hipótesis que hagamos sobre la ecuación de estado (es decir, sobre la ecuación que relaciona los cambios de tensión y de densidad) del medio. La existencia de flujo de cantidad de movimiento y de fuerzas longitudinales asociadas, depende esencialmente de la falta de linealidad en las ecuaciones del movimiento que no son compatibles con soluciones de onda estrictamente sinusoidales. Esto coloca al problema fuera del propósito de nuestra discusión presente, de manera que no lo continuaremos más.<sup>1</sup>

## ONDAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES

En el capítulo 6 vimos algunos ejemplos de los modos normales de sistemas que eran esencialmente bidimensionales, películas de jabón y placas muy delgadas. El caso más sencillo es el de una membrana (siendo un buen ejemplo de la misma una película de jabón) sometida a una tensión uniforme  $S$  (por unidad de longitud) medida a lo largo de cualquier línea trazada en su plano. Si empleamos coordenadas rectangulares  $x$ ,  $y$  en el plano de la membrana y describimos los desplazamientos transversales en función de una tercera coordenada,  $z$ , según hemos visto, se obtiene la siguiente ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (7-40)$$

<sup>1</sup> Para una discusión más completa de la cantidad de movimiento de las ondas y de su presión, véase en el artículo "Radiation Pressure in a Sound Wave", por R. T. Beyer, *Am. J. Phys.*, **18**, 25 (1950), y el libro de R. B. Lindsay, *Mechanical Radiation*, McGraw-Hill, New York, 1960.

La velocidad de onda  $v$  viene dada por

$$v^2 = \frac{S}{\sigma}$$

siendo  $\sigma$  la densidad superficial (es decir, la masa por unidad de área) de la membrana.

Si la simetría de dicho sistema es rectangular, es posible aplicar la ecuación (7-40) y obtener soluciones de la forma de ondas planas o rectas, de la forma

$$z(x, y, t) = f(\alpha x + \beta y - vt)$$

La superposición de ondas de este tipo, en un sistema con límites rectangulares, corresponde a los modos normales como los que hemos visto en la figura 6-11.

Si, por otra parte, la simetría natural del sistema es circular, como podía ser, por ejemplo, si las ondas estuvieran generadas en una membrana haciendo que un punto de la misma entrase en movimiento transversal, lo apropiado es introducir coordenadas polares planas  $r, \theta$  en lugar de  $x$  e  $y$ . Limitémonos nosotros mismos a un caso completamente simétrico en el que el desplazamiento  $z$  es independiente de  $\theta$  para un valor dado de  $r$ . Entonces la ecuación (7-40) pasa a tener la forma siguiente:

$$\text{(simetría cilíndrica)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (7-41)$$

Las ondas móviles que representan las soluciones de esta ecuación son frentes de ondas circulares en expansión. Se puede apreciar más o menos intuitivamente que la amplitud de vibración resulta menor cuando  $r$  aumenta, debido a que la perturbación se reparte en perímetros de circunferencia de radios crecientes. Las soluciones precisas se obtienen en función de unas funciones especiales denominadas de Bessel.

A valores suficientemente grandes de  $r$ , el segundo miembro de la ecuación (7-41) resulta casi despreciable comparado con el primero, y en cierta aproximación se convierte en el de una onda recta de amplitud constante. (Más exactamente, la amplitud disminuye aproximadamente como  $1/\sqrt{r}$ .) Naturalmente, ésta es la impresión que se tiene si se está muy lejos del origen de las circulares y se ve sólo una pequeña porción del perímetro del centro de onda.

Finalmente, podemos plantear una ecuación de ondas para un medio tridimensional, como un bloque de sólido elástico o el aire no confinado en un tubo. Esta ecuación también se citó en el capítulo 6:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (7-42)$$

siendo  $\Psi$  cierta variable tal como la magnitud local de la presión. La combinación de los operadores diferenciales del primer miembro se denomina *laplaciana* (en honor de P. S. de Laplace, matemático casi contemporáneo de Lagrange) y suele dársele el símbolo especial  $\nabla^2$  (que se denomina “delta cuadrado”). Así pues, escribamos la ecuación (7-42) en la forma alternativa

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (7-43)$$

Como en el caso del medio bidimensional, si tenemos un sistema con simetría rectangular lo adecuado es buscar soluciones de ondas planas de la ecuación de ondas:

$$\Psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt)$$

Pero, por otra parte, si se sugiere por sí misma la simetría esférica, como en el caso de las ondas que se generan si tiene lugar una pequeña explosión a cierta profundidad de la Tierra, incluiríamos el radio  $r$  y dos ángulos para definir la posición de un punto. Para un sistema en que la amplitud de onda depende de  $r$  solamente, la ecuación diferencial se reduce a la siguiente:

$$(\text{simetría esférica}) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (7-44)$$

Es fácil comprobar que esta ecuación se satisface por ondas armónicas simples cuya amplitud disminuye inversamente con  $r$ :

$$\Psi(r, t) = \frac{C}{r} \operatorname{sen} 2\pi(vt - kr) \quad (7-45)$$

Recordando que el flujo de energía en el caso de una onda monodimensional es proporcional al cuadrado de la amplitud, se puede ver en la ecuación (7-45) que el valor medio temporal de  $[\Psi(r, t)]^2$ , multiplicada por el área  $4\pi r^2$  de una esfera de radio  $r$ , define la velocidad de salida de energía que es independiente de la distancia del foco puntual que genera las ondas. En ausencia de disipación o de absorción, esto es precisamente mi resultado lógico.

## PROBLEMAS \*

- 7-1 Comprobar que las ecuaciones siguientes pueden utilizarse para describir la misma onda progresiva:

$$y = A \operatorname{sen} 2\pi(x - vt)/\lambda$$

$$y = A \operatorname{sen} 2\pi(kx - vt)$$

$$y = A \operatorname{sen} 2\pi[(x/\lambda) - (t/T)]$$

$$y = -A \operatorname{sen} \omega(t - x/v)$$

$$y = A \operatorname{Im}\{ \exp [j2\pi(kx - vt)] \}$$

7-2 La ecuación de una onda transversal que se mueve a lo largo de una cuerda viene dada por  $y = 0,3 \operatorname{sen} \pi(0,5x - 50t)$ , en donde  $y$  y  $x$  están en centímetros y  $t$  en segundos.

(a) Hallar la amplitud, la longitud de onda, el número de ondas, la frecuencia, el período y la velocidad de la onda.

(b) Hallar la velocidad transversal máxima de cualquier partícula en la cuerda.

7-3 ¿Cuál es la ecuación para una onda longitudinal que se mueve en el sentido de las  $x$  negativas con amplitud 0,003 m, frecuencia 5  $\text{seg}^{-1}$  y una velocidad de 3000 m/seg?

7-4 Una onda de frecuencia 20  $\text{seg}^{-1}$  tiene una velocidad de 80 m/seg.

(a) ¿A qué distancia están dos puntos cuyos desplazamientos estén separados  $30^\circ$  en fase?

(b) En un punto dado, ¿cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos que se producen en tiempos separados por 0,01 seg?

7-5 Se tensa una cuerda uniforme larga de densidad de masa 0,1 kg/m con una fuerza de 50 N. Un extremo de la cuerda ( $x = 0$ ) se hace oscilar transversalmente (sinusoidalmente) con una amplitud de 0,02 m y un período de 0,1 seg, de modo que se generan unas ondas que se mueven en el sentido de las  $x$  positivas?

(a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas?

(b) ¿Cuál es la longitud de onda?

(c) Si en el extremo impulsor ( $x = 0$ ) el desplazamiento ( $y$ ) para  $t = 0$  es 0,01 m con  $dy/dt$  negativa, ¿cuál es la ecuación de las ondas que se mueven?

7-6 Se observa que un pulso necesita 0,1 seg para recorrer de un extremo a otro una cuerda larga. La tensión de la cuerda se obtiene haciéndola pasar sobre una polea y colgando un peso que tiene 100 veces la masa de la misma.

(a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

(b) ¿Cuál es la ecuación del tercer modo normal?

7-7 Una cuerda muy larga de la misma tensión y masa por unidad de longitud que la del problema 7-6 tiene una onda móvil sobre ella con la ecuación siguiente:

$$y(x, t) = 0,02 \operatorname{sen} \pi(x - vt)$$

en donde  $x$  e  $y$  están en metros,  $t$  en segundos y  $v$  en la velocidad de onda (que puede calcularse). Hallar el desplazamiento transversal y la velocidad de la cuerda en el punto  $x = 5$  m en el instante  $t = 0,1$  seg.

7-8 Se observan dos puntos en una cuerda cuando una onda móvil pasa por ella. Los puntos están en  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$  m. Los movimientos transversales de los dos puntos resultaron ser del modo siguiente:

$$y_1 = 0,2 \operatorname{sen} 3\pi t$$

$$y_2 = 0,2 \operatorname{sen} (3\pi t + \pi/8)$$

- (a) ¿Cuál es la frecuencia en hertz?
- (b) ¿Cuál es la longitud de onda?
- (c) ¿Con qué velocidad se mueve la onda?

(d) ¿De qué modo se mueve la onda? Explicar cómo puede llegarse a esta conclusión.

*¡Atención!* Considerar con cuidado si existe alguna ambigüedad debida a la cantidad limitada de información que se ha dado.

7-9 Un pulso triangular simétrico de altura máxima 0,4 m y longitud total 1,0 m se mueve en el sentido positivo de las  $x$  sobre una cuerda en la que la velocidad de onda es 24 m/seg. Para  $t = 0$ , el pulso está situado totalmente entre  $x = 0$  y  $x = 1$  m. Dibujar un gráfico de la velocidad transversal en función del tiempo para  $x = x_2 = +1$  m.

7-10 El extremo ( $x = 0$ ) de una cuerda tensa se mueve transversalmente con una velocidad constante de 0,5 m/seg durante 0,1 seg (empezando en  $t = 0$ ) y vuelve a su posición normal durante los siguientes 0,1 seg, de nuevo a velocidad constante. El pulso de onda resultante se mueve con una velocidad de 4 m/seg.

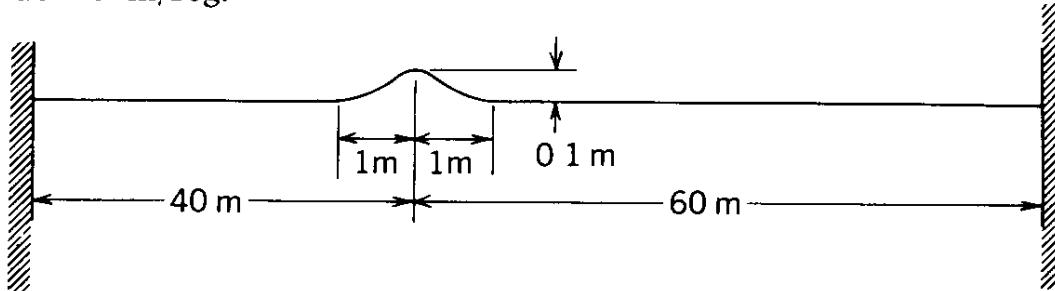
- (a) Dibujar el espectro de la cuerda para  $t = 0,4$  seg, y para  $t = 0,5$  seg.
- (b) Dibujar un gráfico de la velocidad transversal en función de  $x$  para  $t = 0,4$  seg.

7-11 Suponer que un pulso de onda móvil está descrito por la ecuación

$$y(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (x - vt)^2}$$

con  $b = 5$  cm y  $v = 2,5$  cm/seg. Dibujar el perfil del pulso como aparecería cuando  $t = 0$  y  $t = 0,2$  seg. Por sustracción directa de las ordenadas de ambas curvas obtener una descripción apropiada de la velocidad transversal en función de  $x$  para  $t = 0,1$  seg. Compararla con la que se obtiene calculando  $\partial y / \partial t$  para un valor de  $t$  arbitrario y luego haciendo  $t = 0,1$  seg.

- 7-12 La figura muestra un pulso sobre una cuerda de longitud 100 m con extremos fijos. El pulso se mueve hacia la derecha sin ningún cambio de forma a una velocidad de 40 m/seg.



- (a) Hacer un dibujo claro que muestre el modo en que la velocidad transversal de la cuerda varía con la distancia sobre la misma en el instante en que el pulso está en la posición indicada.
- (b) ¿Cuál es la velocidad transversal máxima de la cuerda (aproximadamente)?
- (c) Si la masa total de la cuerda es de 2 kg, ¿cuál es la tensión  $T$  sobre ella?
- (d) Escribir una ecuación para  $y(x, t)$ , que describa numéricamente las ondas sinusoidales de longitud de onda 5 m y amplitud 0,2 m, que se mueven hacia la izquierda (es decir, en el sentido negativo de la  $x$ ) sobre una cuerda muy larga hecha del mismo material y bajo la misma tensión que anteriormente.

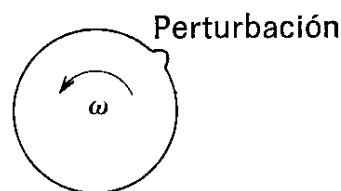
- 7-13 Un pulso que se mueve sobre una cuerda tensa viene descrito por la ecuación siguiente:

$$y(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2}$$

- (a) Dibujar el gráfico de  $y$  en función de  $x$  para  $t = 0$ .
- (b) ¿Cuáles son la velocidad del pulso y su sentido del movimiento?
- (c) La velocidad transversal de un punto dado de la cuerda se define por

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Calcular  $v_y$  en función de  $x$  para el instante  $t = 0$ , y demostrar por medio de un dibujo lo que esto nos dice sobre el movimiento del pulso durante un tiempo corto  $\Delta t$ .



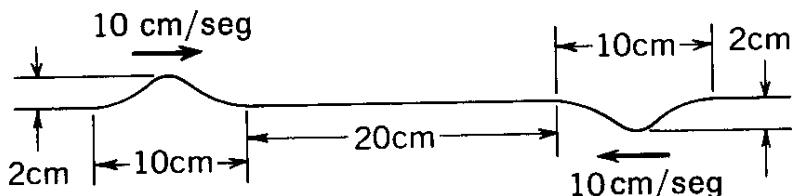
- 7-14 Un lazo cerrado de una cuerda uniforme se hace girar rápidamente a una cierta velocidad constante  $\omega$ . La masa de la cuerda es  $M$  y el radio es  $R$ . Como

resultado de su rotación se produce una tensión  $T$  "circunferencialmente" en la cuerda.

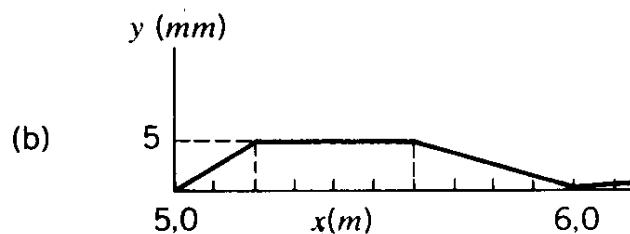
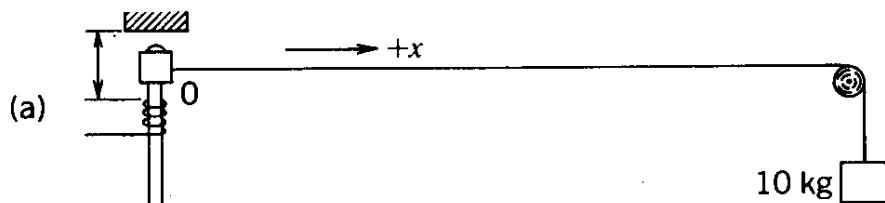
(a) Considerando la aceleración centrípeta instantánea de un pequeño segmento de la cuerda, demostrar que la tensión debe ser igual a  $M\omega^2 R/2\pi$ .

(b) Se deforma repentinamente la cuerda en un punto, haciendo que aparezca una protuberancia como se ve en el diagrama. Demostrar que esto podría producir una distorsión de la cuerda que permaneciese estacionaria respecto al laboratorio, sin tener en cuenta los valores particulares de  $M$ ,  $\omega$  y  $R$ . Pero ¿no sucedería nada más? (Recuérdese que los puntos en una cuerda pueden moverse en los dos sentidos.)

7-15 Dos pulsos idénticos de amplitudes iguales pero opuestas se aproximan uno al otro al propagarse sobre una cuerda. Cuando  $t = 0$  están en la posición indicada en la figura. Dibujar a escala la cuerda y el perfil de velocidad de los elementos de masa de la cuerda para  $t = 1$  seg,  $t = 1,5$  seg,  $t = 2$  seg.



7-16 Se desea estudiar el movimiento vertical bastante rápido del contacto móvil de un interruptor que funciona magnéticamente. Para ello, se sujetó el contacto a un extremo ( $O$ ) de un sedal horizontal de masa total 5 g ( $5 \times 10^{-3}$  kg) y longitud total 12,5 m. El otro extremo del sedal pasa sobre una polea pequeña y sin rozamiento, colgándose una masa de 10 kg de su extremo, como se ve en la figura. El contacto se hace funcionar de modo que el interruptor (inicialmente abierto) pasa a su posición cerrada, permanece cerrado durante un tiempo corto y se abre de nuevo. Un poco después la cuerda se fotografía utilizando una lámpara de destellos de alta velocidad y se ve que está deformada entre 5 y 6 m, como se ve en la figura. ( $x = 0$  es el punto  $O$  en donde la cuerda está conectada al contacto.)



- (a) ¿Durante cuánto tiempo estuvo el interruptor *completamente cerrado*?  
 (b) Dibujar un gráfico del desplazamiento del contacto *en función del tiempo*, tomando  $t = 0$  como el instante en que el contacto empezó primeramente a moverse.  
 (c) ¿Cuál era la velocidad máxima del contacto? (Se presentó durante el cierre o la abertura del interruptor?)  
 (d) ¿Para qué valor de  $t$  fue tomada la fotografía? (Admitir  $g = 10 \text{ m/seg}^2$ .)

7-17 Se superponen en un medio las dos ondas siguientes:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(5x - 10t)$$

$$y_2 = A \operatorname{sen}(4x - 9t)$$

en donde  $x$  está en metros y  $t$  en segundos.

- (a) Escribir una ecuación para la perturbación combinada.  
 (b) ¿Cuál es su velocidad de grupo?  
 (c) ¿Cuál es la distancia entre los puntos de amplitud nula en la perturbación combinada?

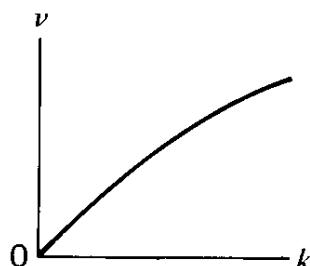
7-18 El movimiento de la onda de longitud de onda corta ( $\lesssim 1 \text{ cm}$ ) en agua está controlado por la tensión superficial. La velocidad de fase de estas ondas viene dada por

$$v_p = \left( \frac{2\pi S}{\rho\lambda} \right)^{1/2}$$

en donde  $S$  es la tensión superficial y  $\rho$  la densidad del agua.

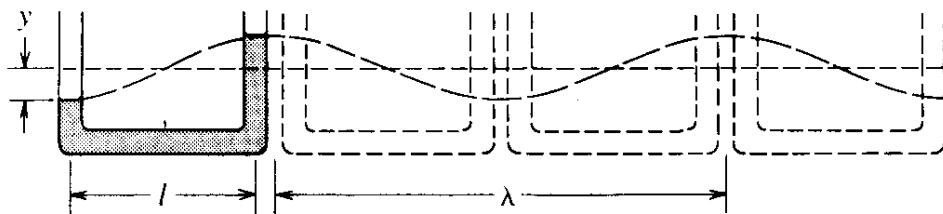
- (a) Demostrar que la velocidad de grupo para una perturbación formada por longitudes de ondas próximas a una longitud dada  $\lambda$  es igual a  $3v_p/2$ .  
 (b) ¿Qué implica esto acerca del movimiento observado de un grupo de ondas que se mueven en la superficie del agua?  
 (c) Si el grupo se compone solamente de dos ondas, de longitud de onda 0,99 y 1,01 cm, ¿cuál es la distancia entre las crestas del grupo?

7-19 La relación entre la frecuencia  $v$  y el número de ondas  $k$  para las ondas de un cierto medio están indicadas en la figura. Hacer un razonamiento cualitativo (y explicar las bases del mismo) sobre los valores relativos de las velocidades de grupo y de fase para cualquier longitud de onda en el intervalo representado.



7-20 Consideremos un tubo en U de sección recta uniforme con dos brazos verticales. Sea la longitud total de la columna de líquido  $l$ . Imaginemos que el líquido está oscilando arriba y abajo de modo que en un instante cualquiera los niveles de los brazos laterales están a  $\pm y$  respecto al nivel de equilibrio y todo el líquido tiene la velocidad  $dy/dt$ .

(a) Escribir una expresión para la energía potencial más la energía cinética del líquido y a partir de ahí demostrar que el período de oscilación es  $\pi\sqrt{2l/g}$ .



(b) Imaginar que puede utilizarse una serie de estos tubos para definir una sucesión de crestas y valles como en una onda de agua (véase el diagrama). Toman-do el resultado de (a) y la condición  $\lambda \approx 2l$  implicada por esta analogía, deducir que la velocidad de las ondas en el agua es semejante a  $(g\lambda)^{1/2}/\pi$  (admitir que sólo una pequeña fracción de líquido está en los brazos verticales del tubo en U).

(c) Utilizar el resultado exacto,  $v = (g\lambda/2\pi)^{1/2}$ , para calcular la velocidad de las ondas de longitud de onda 500 m en el océano.

7-21 Consideremos un sistema de  $N$  osciladores acoplados ( $N \gg 1$ ), cada uno de ellos separados de sus vecinos más próximos por una distancia  $l$ .

(a) Hallar la longitud de onda y la frecuencia del modo  $n$  de oscilación.

(b) Hallar las velocidades de fase y de grupo para este modo. ¿Cuáles son para los casos en que  $n \ll N$  y  $n = N + 1$ ?

7-22 Se nos da el problema de analizar la dinámica de una línea de coches que se mueven sobre una carretera de una sola vía. Un modo de enfoque a este problema es admitir que la línea de coches se comporta como un grupo de osciladores acoplados. ¿Cómo se plantearía este problema de un modo tratable? Hacer bastantes hipótesis.

7-23 Se mueve transversalmente un extremo de una cuerda tirante a velocidad constante  $u_y$  durante un tiempo  $\tau$ , y se vuelve a llevar a su punto de partida con velocidad  $-u_y$  durante el intervalo siguiente  $\tau$ . Como resultado se produce un pulso triangular sobre la cuerda que se mueve a lo largo de ella con velocidad  $v$ . Calcular las energías cinética y potencial asociadas con el pulso y demostrar que su suma es igual al trabajo total realizado por la fuerza transversal que ha de aplicarse al extremo de la cuerda.

7-24. Consideremos una onda sinusoidal longitudinal  $\xi = \xi_0 \cos 2\pi k(x - vt)$  que se mueve a lo largo de una varilla de densidad de masa  $\rho$ , área de la sección recta

$S$  y módulo de Young  $Y$ . Demostrar que si la tensión de una varilla se debe solamente a la presencia de una onda, la densidad de energía cinética es  $\frac{1}{2}\rho S(\partial \xi / \partial t)^2$ , y la densidad de energía potencial es  $\frac{1}{2}YS(\partial \xi / \partial x)^2$ . Demostrar así que la energía cinética por longitud de onda y la energía potencial por longitud de onda son ambas iguales a  $\frac{1}{4}(\rho S \lambda)u_0^2$ , siendo  $u_0$  la velocidad máxima de la partícula ( $\partial \xi / \partial t$ ).

7-25 Comprobar que la ecuación de onda para una onda con simetría esférica [Ec. (7-44)] se ve satisfecha por ondas armónicas simples cuya amplitud disminuye inversamente con  $r$ .

*Veremos en este capítulo cómo los sonidos se pelean, luchan, y cuando tienen igual intensidad se destruyen el uno al otro, dando lugar al silencio.*

ROBERT BALL, *Wonders of Acoustics* (1867)

# Efectos debido a los límites e interferencias

EL CAPÍTULO ANTERIOR se refería a las ondas, que podían imaginarse moviéndose ininterrumpidamente en un medio especificado. Este capítulo se dedica especialmente a algunos de los efectos que tienen lugar cuando una onda en movimiento se encuentra con una barrera, o un medio diferente, o pequeños obstáculos. Tales efectos representan un campo enorme de estudio y la presente descripción no pretende ser más que un primer vistazo del análisis de estos fenómenos. Empezaremos con nuestro sistema anterior, la cuerda tensa, y consideraremos lo que ocurre cuando una onda que se mueve sobre una cuerda se encuentra con una discontinuidad de cualquier clase.

## REFLEXIÓN DE PULSOS DE ONDAS

Al estudiar la conexión entre las ondas estacionarias y las móviles sobre una cuerda tensa, hicimos necesariamente algunas referencias a las condiciones que existen en los dos extremos de cualquier cuerda de longitud limitada. Señalábamos que, como nos dice la experiencia, podemos producir una onda estacionaria agitando el extremo de una cuerda, y generando por lo tanto una onda móvil que sufre ciertos procesos de reflexión en el extremo más alejado. Las ondas que van y que vuelven se combinan entonces para producir un diagrama de ondas estacionarias con nodos en posiciones fijas.

Más cuantitativamente, apreciaremos que un modo normal dado producido sobre una cuerda con extremos fijos puede considerarse como la superposición de dos ondas sinusoidales de amplitud, longitud de onda y frecuencia iguales, que se mueven en sentidos opuestos.

Para concretar más, observaremos que son equivalentes los dos enunciados siguientes:

Modo normal :

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \omega t$$

Dos ondas móviles :

$$y(x, t) = \frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega t\right) + \frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega t\right)$$

Si escogemos la segunda definición, y fijamos nuestra atención sobre las condiciones en  $x = 0$  o  $x = L$ , tenemos

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y(L, t) = \frac{A}{2} \operatorname{sen}(-\omega t) + \frac{A}{2} \operatorname{sen} \omega t \\ &= -\frac{A}{2} \operatorname{sen} \omega t + \frac{A}{2} \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Esto quiere decir que estas ondas que se mueven en sentidos opuestos deben producir en todo instante desplazamientos iguales y opuestos en los extremos fijos, lo cual es, como es natural, totalmente necesario. El punto principal es que esta misma condición debe definirla el proceso de reflexión para cualquier onda móvil cuando se encuentra con un límite rígido.

Echemos una segunda ojeada a otro proceso de superposición de este tipo. En conexión con la figura 7-15, estudiábamos la superposición de dos pulsos simétricos de desplazamientos opuestos que se movían en sentidos opuestos a lo largo de una cuerda. En este ejemplo puede señalarse un hecho interesante: El punto sobre la cuerda en el que se encuentran los dos pulsos permanece en reposo en todo instante. La onda pasa a través de él en sentidos opuestos sin causar ningún desplazamiento del punto en ningún instante. Podría considerarse el punto como rígidamente fijo en la pared sin alterar el diagrama de ondas de ninguna manera. Esto nos da la clave de lo que ocurre cuando un pulso de onda incide sobre el extremo de una cuerda que se mantiene estacionaria: Se refleja un pulso de desplazamiento opuesto en dicho extremo que viaja en sentido contrario hacia el foco.

Esta reflexión invertida no es tan misteriosa cuando consideramos que la llegada de un desplazamiento positivo ejercerá una fuerza hacia arriba sobre el soporte que mantiene el extremo fijo (véase fig. 8-1). Según la tercera ley de Newton, el soporte ejerce una reacción en sentido opuesto hacia la cuerda, ge-

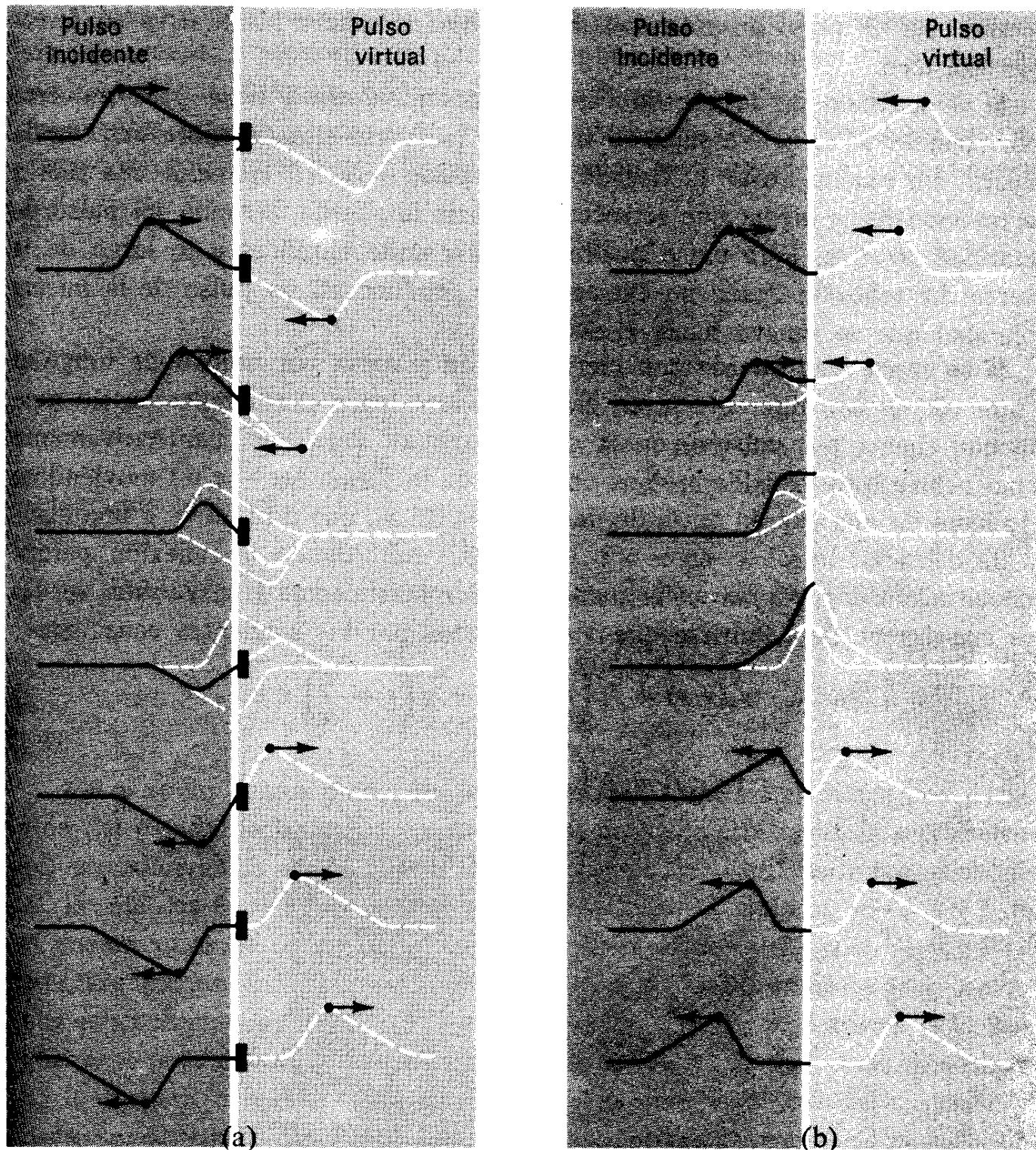


Fig. 8-1. (a) Reflexión en un extremo fijo. (b) Reflexión en un extremo libre. La reflexión puede considerarse como si la cuerda se extendiese indefinidamente más allá de su terminación real y el pulso continuara dentro de la parte imaginaria como si el soporte no existiese, mientras que al mismo tiempo un pulso "virtual" que ha estado moviéndose en la parte imaginaria se mueve dentro de la parte real formando así el pulso reflejado. La naturaleza del pulso reflejado depende de que el extremo esté fijo o libre. (Figura adoptada de F. W. Sears y M. W. Zemansky, University Physics, 3.<sup>a</sup> ed., I parte, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.)

nerando así un pulso de polaridad *opuesta* que se mueve hacia atrás en dirección del foco.

Si el extremo de la cuerda estuviese completamente libre para moverse (por ejemplo, si estuviese sujeto a un anillo sin masa situado sobre una varilla vertical sin rozamiento),<sup>1</sup> la llegada de un pulso positivo ejercería una fuerza de reacción hacia arriba que retrocedería hacia la cuerda, creando un pulso de polaridad positiva. Este pulso positivo se transmite entonces a lo largo de la cuerda. La reflexión desde un extremo libre produce así un pulso de la *misma* polaridad que se mueve hacia el foco.

Si se sujetan una cuerda con cierta tensión y masa por unidad de longitud a otra cuerda con diferente  $\mu$ , en general tendrá lugar cierta reflexión (lo mismo que alguna transmisión) en la discontinuidad. Para ver cuantitativamente cómo ocurre esto, consideraremos un pulso de la forma  $f_1(t - x/v_1)$  moviéndose a lo largo de una cuerda tensa de densidad lineal  $\mu_1$ , que está unida a una cuerda de densidad lineal  $\mu_2$  en  $x = 0$  (fig. 8-2).<sup>2</sup> Admitiendo la reflexión parcial y una transmisión parcial en la unión, los desplazamientos transversales en las dos cuerdas pueden admitirse que vienen dados por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_1}\right) \\y_2(x, t) &= f_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\end{aligned}\quad (8-1)$$

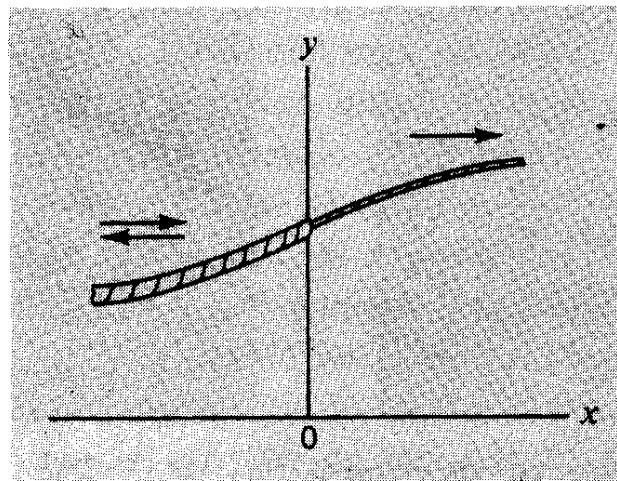


Fig. 8-2. Reflexión y transmisión en una unión entre cuerdas diferentes.

<sup>1</sup> Otro modo de obtener un terminal libre consiste en sujetarlo a una cuerda de mucho menor masa.

<sup>2</sup> Escribir el pulso en la forma  $f(t - x/v)$  en lugar del habitual  $f(x - vt)$  es más apropiado en este análisis debido básicamente a que cuando una onda pasa de un medio a otro, la longitud de onda cambia, pero la frecuencia no. Así pues, asociamos los factores cambiados con la coordenada  $x$  y no con la  $t$ .

Como los extremos de las dos cuerdas permanecen en contacto entre sí, los desplazamientos transversales,  $y$ , en el punto  $x = 0$ , deben ser los mismos para ambas cuerdas. Además, en cada instante las cuerdas deben unirse con iguales pendientes y tener iguales tensiones; en otro caso el elemento de masa representado por la unión recibiría una aceleración muy grande. Así pues, tenemos las dos condiciones siguientes:

$$y_1(0, t) = y_2(0, t)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(0, t)$$

es decir,

$$f_1(t) + g_1(t) = f_2(t) \quad (8-2)$$

$$\frac{1}{v_1} f_1'(t) - \frac{1}{v_1} g_1'(t) = \frac{1}{v_2} f_2'(t) \quad (8-3)$$

Integrando la ecuación (8-3), tenemos

$$v_2 f_1(t) - v_2 g_1(t) = v_1 f_2(t) \quad (8-4)$$

Despejando  $g_1$  y  $f_2$  en función de  $f_1$  en las ecuaciones (8-3) y (8-4), se tiene

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_1(t) \\ f_2(t) &= \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_1(t) \end{aligned} \quad (8-5)$$

Tal y como hemos dicho, las ecuaciones (8-5) son simplemente una descripción del estado de las cosas en  $x = 0$  para un valor arbitrario de  $t$ . Sin embargo, introduciremos un elemento de rozamiento algo sutil pero muy importante. Lo que las ecuaciones (8-5) hacen es relacionar los valores de  $f_1$ ,  $g_1$  y  $f_2$  para el mismo valor de su argumento. Para un valor dado cualquiera, digamos  $\tau$ , de este argumento, tenemos  $g_1(\tau) = \text{const.} \times f_1(\tau)$  y  $f_2(\tau) = \text{const.} \times f_1(\tau)$ . Pero no nos estamos restringiendo a interpretar  $\tau$  como el valor de  $t$  para  $x = 0$ . Puede utilizarse para definir todos los demás valores de  $x$  y  $t$  que están relacionados de la manera exigida por el enunciado básico de una onda móvil dada. Así pues, se *define* la función  $f_1$  como una función del argumento  $t - x/v_1$  y se *define* la función  $g_1$  como una función del argumento  $t + x/v_1$ . Supóngase que ambos argumentos se hacen igual al mismo valor  $\tau$ , como exige la ecuación (8-5). Evidentemente, no podemos utilizar el mismo par de valores de  $x$  y de  $t$  para ambos; por lo tanto, indiquemos los valores como  $x_f$ ,  $t_f$  y  $x_g$ ,  $t_g$ . Entonces tenemos

$$\tau = t_f - \frac{x_f}{v_1} = t_g + \frac{x_g}{v_1}$$

Si hacemos  $t_f = t_g = t$ , debemos tener

$$x_g = -x_f$$

Esto significa que el desplazamiento asociado con el pulso  $g_1$  en un instante dado cualquiera para un valor determinado de  $x$ , está directamente relacionado con el valor de  $f_1$  que se calculó para el mismo instante en la posición  $-x$ . De modo específico, de acuerdo con las primeras ecuaciones (8-5), tenemos

$$g_1\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \quad (8-6a)$$

Y lo que esto quiere decir es que el pulso reflejado, además de aparecer disminuido en el factor  $(v_2 - v_1)/(v_2 + v_1)$  se invierte de derecha a izquierda con respecto al pulso incidente. Si  $v_2 < v_1$ , también se invierte la parte de arriba hacia abajo.

De modo semejante podemos relacionar la forma de onda transmitida  $f_2$  con la forma de onda incidente  $f_1$ . Para un valor dado de  $t$  los valores correspondientes de  $x$  (llamémosle  $x_1$  y  $x_2$ ) están definidos por la relación

$$\tau = t - \frac{x_1}{v_1} = t - \frac{x_2}{v_2}$$

De aquí que  $x_2 = (v_2/v_1)x_1$ , y las segundas ecuaciones (8-5) exigen que pongamos

$$f_2\left(t - \frac{v_2x/v_1}{v_2}\right) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \quad (8-6b)$$

Esto nos dice que, comparado con el pulso incidente, el pulso transmitido sufre no sólo un cambio en altura sino también un cambio de escala a lo largo de  $x$ .

Al utilizar las anteriores relaciones ha de señalarse que si el pulso  $f_1$  incide desde el sentido negativo de las  $x$  y si la unión se tiene en  $x = 0$ , entonces las funciones  $f_1$  y  $g_1$  representan físicamente desplazamientos reales sólo si  $x \leq 0$ , mientras que  $f_2$  representa desplazamiento físicamente real sólo si  $x \geq 0$ . Así, por ejemplo, al utilizar la ecuación (8-6a), hallamos el desplazamiento real en el pulso reflejado  $g_1$  para cierto valor negativo de  $x$ , considerando cuál habría sido el desplazamiento del pulso incidente  $f_1$  si hubiese continuado en la región de valores de  $x$  positivos y multiplicando luego por el factor  $(v_2 - v_1)/(v_2 + v_1)$ . En la figura 8-3 mostramos el desarrollo de los pulsos reflejados y

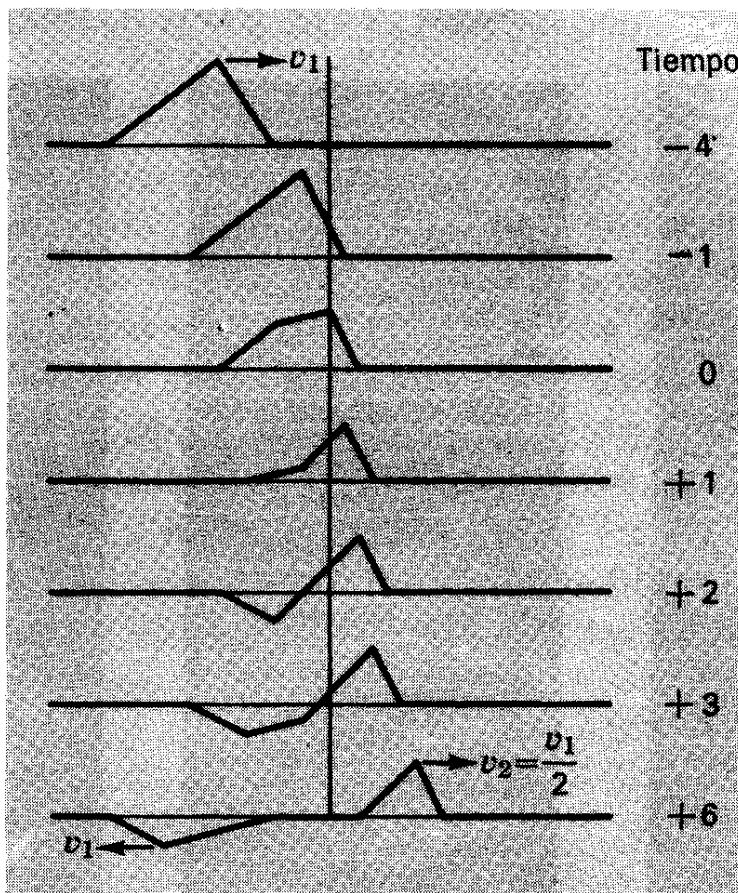


Fig. 8-3. Reflexión y transmisión parcial de un pulso de onda triangular en la unión de dos cuerdas. El pulso incidente desde la cuerda en la que es mayor la velocidad de onda. ( $v_2 = \frac{1}{2}v_1$ .)

transmitidos a partir de un pulso incidente determinado para el caso particular  $v_2 = v_1/2$ .

Como casos extremos de la ecuación (8-6 a) tenemos los siguientes:

a. Cuerda 2 de masa infinita:

$$v_2 = 0$$

$$g\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = -f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

b. Cuerda 2 sin masa o ausente:

$$v_2 = \infty$$

$$g\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

Estos dos casos representan entonces las dos situaciones indicadas en la figura 8-1. La figura 8-4 muestra algunos ejemplos reales de la reflexión y transmisión de pulsos que se mueven a lo largo de muelles estirados.

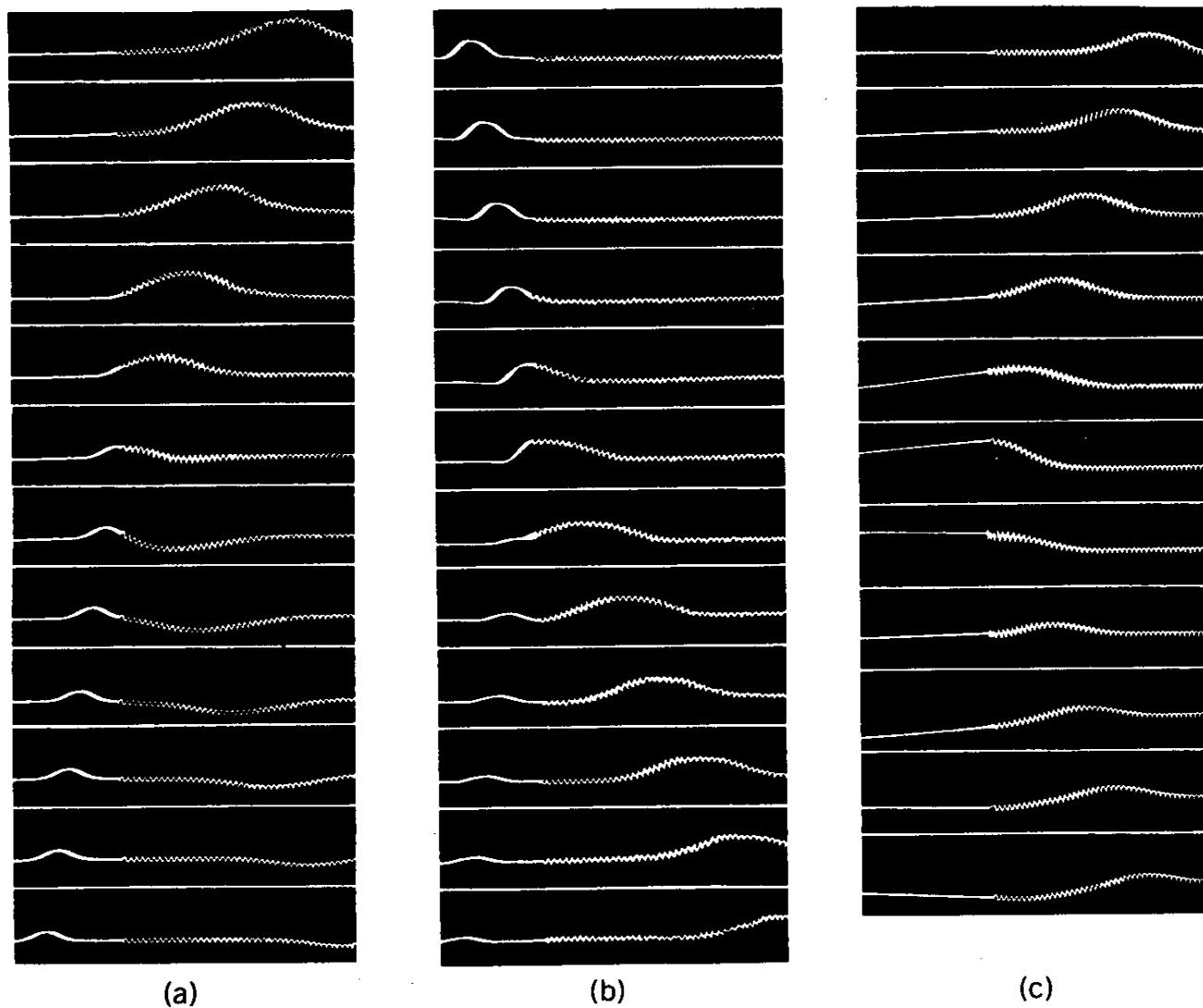


Fig. 8-4. *Fotografías de pulsos que se encuentran en el límite entre dos medios diferentes. (a) Pulso que pasa de un muelle ligero (derecha) a otro más pesado. En la unión el pulso parcialmente se transmite y parcialmente se refleja. Se observará que el pulso reflejado está invertido. (b) Pulso que pasa de un muelle pesado (izquierda) a otro ligero. En la unión el pulso parcialmente se transmite y parcialmente se refleja. El pulso reflejado no está invertido. (c) Pulso en un muelle reflejado en una unión con un hilo muy ligero. El pulso entero retorna sin invertirse. La parte borrosa de la fotografía indica que las partículas del hilo se están moviendo a velocidad elevada cuando pasa el pulso. ¿Puede determinarse el sentido del movimiento en cada fotografía? (Fotografías según Physical Science Study Committee, Physics, Heath, Boston, 1965.)*

## IMPEDANCIA: TERMINACIONES NO REFLECTORAS<sup>1</sup>

El tipo de comportamiento estudiado en la última sección puede considerarse de un modo muy claro introduciendo el concepto de *impedancia mecánica* de un sistema físico sometido a fuerzas impulsoras. Se define esta impedancia como el cociente entre la fuerza impulsora y la velocidad del desplazamiento asociado. Se observará aquí una semejanza fuerte con el concepto eléctrico de resistencia, que es la razón entre una tensión aplicada y la corriente asociada (siendo la corriente la velocidad con que fluye la carga). Pero en los sistemas mecánicos y eléctricos semejantes, existen en general una diferencia de fase entre la fuerza impulsora y la velocidad (o entre la tensión y la corriente). La ley de Ohm expresa una relación en la que la tensión y la corriente están siempre en fase. Así, por ejemplo, si aplicamos en los extremos de una resistencia una tensión dada por

$$V = V_0 \cos \omega t$$

Entonces la corriente resultante viene dada por

$$I = I_0 \cos \omega t$$

en donde

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

Pero si, por ejemplo, se aplicase esta misma tensión alterna en las placas de un condensador, sería la carga  $q$ , y no la corriente  $I$ , la que estaría en fase con la tensión, porque tendríamos

$$q = CV$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

De aquí que, si

$$V = V_0 \cos \omega t$$

tenemos

$$I = -\omega CV_0 \sin \omega t$$

es decir,

$$I = I_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

<sup>1</sup> Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad. (Pero no es difícil y puede ser muy instructiva, dando alguna aclaración sobre las propiedades de los elementos básicos de los circuitos eléctricos.)

en donde

$$I_0 = \omega CV_0$$

Existe así una diferencia de fase de  $90^\circ$  entre  $V$  e  $I$  en este caso. Y si se conectan la resistencia y el condensador en serie aplicando la tensión a la combinación, entonces la diferencia de fase no será  $0^\circ$  ni  $90^\circ$ . Por lo tanto, en estos casos más generales, el cociente entre la tensión impulsora y la corriente posee tanto un módulo como una fase y la magnitud que encierra la especificación de estos conceptos se denomina la *impedancia* del sistema. Se recordará que la relación entre la fuerza impulsora y el desplazamiento en el oscilador mecánico con amortiguamiento (capítulo 4) tenía mucho de este mismo carácter, y, como en dicho caso, el empleo de magnitudes complejas proporciona un modo sencillo y económico de presentar tanto las relaciones de amplitud como las de fase. De hecho, es costumbre caracterizar la impedancia mediante una magnitud compleja,  $Z$ , y expresar la tensión y la corriente mediante la técnica de los exponentes complejos. Así, para definir la impedancia de un condensador, pondríamos

$$\begin{aligned} V &= V_0 e^{j\omega t} \\ q &= CV_0 e^{j\omega t} \\ I &= \frac{dq}{dt} = j\omega CV_0 e^{j\omega t} = j\omega CV \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Z_C = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

Volviendo ahora al tema de las ondas móviles sobre una cuerda, consideremos primero la generación de dicha onda mediante la aplicación de una fuerza impulsora transversal en un punto cualquiera. Admitamos que la cuerda está a la derecha de este punto de modo que la onda generada es de la forma

$$y(x, t) = f(t - x/v)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = f' \left( t - \frac{x}{v} \right) \\ F_y &= -T \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T}{v} f' \left( t - \frac{x}{v} \right) \end{aligned}$$

[Obsérvese que la fuerza ejercida *sobre* la cuerda es el valor negativo de  $T \partial y / \partial x$  (véase fig. 8-5).]

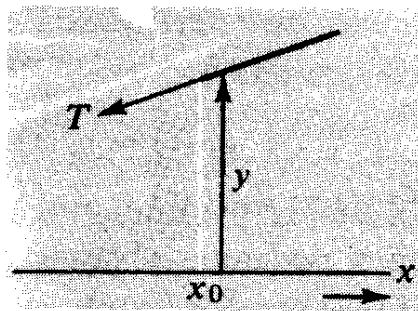


Fig. 8-5. *Condiciones en el extremo accionado de una cuerda tirante.*

Definamos así la impedancia  $Z$  mediante la ecuación

$$Z = \frac{F_y}{v_y} = \frac{T}{v} \quad (8-7)$$

Como  $v = \sqrt{T/\mu}$ , esto identifica para nosotros lo que podemos denominar *impedancia característica* de la cuerda en función de su tensión y de su densidad lineal:

$$Z = (T\mu)^{1/2} \quad (8-8)$$

Esta magnitud es real pura; la fuerza impulsora y la velocidad están siempre en fase una respecto a la otra, en terminología eléctrica, esta impedancia es puramente resistiva.

Consideremos ahora, en estos mismos términos, las condiciones en una unión entre dos cuerdas diferentes. Como antes, escogeremos  $x = 0$  en el punto de unión y admitiremos una onda incidente en el sentido negativo de las  $x$  a lo largo de la cuerda 1. Así pues, las ecuaciones (8-1) describen de nuevo la forma de la solución que esperamos:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{v_1}\right) \\ y_2(x, t) &= f_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right) \end{aligned}$$

En  $x = 0$  exigimos

$$\begin{aligned} v_y &= f_1'(t) + g_1'(t) = f_2'(t) \\ F_y &= \frac{T_1}{v_1} f_1'(t) - \frac{T_1}{v_1} g_1'(t) = \frac{T_2}{v_2} f_2'(t) \end{aligned} \quad (8-9)$$

(En la segunda ecuación pedimos sólo que las fuerzas *transversales* sean las mismas. Por ejemplo, se podría imaginar una diferencia entre los valores de las tensiones  $T_1$ ,  $T_2$  si se conectasen dos cuerdas tensas mediante un anillo situado sobre una varilla lisa, simulando una unión rígida respecto al desplazamiento a lo largo de las  $x$ , pero no ofreciendo ninguna resistencia a lo largo del eje de las  $y$ .)

Introduciendo las impedancias características  $Z_1, Z_2$  de las dos cuerdas, tenemos así las dos condiciones siguientes :

$$\begin{aligned} f'_1(t) + g'_1(t) &= f'_2(t) \\ Z_1 f'_1(t) - Z_1 g'_1(t) &= Z_2 f'_2(t) \end{aligned}$$

A partir de aquellas ecuaciones podemos obtener resultados semejantes a los de las ecuaciones (8-5) y (8-6), excepto que ahora tenemos

$$\begin{aligned} g_1(0, t) &= \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} f_1(0, t) \\ f_2(0, t) &= \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} f_1(0, t) \end{aligned} \quad (8-10)$$

Vemos que en estos términos, la cantidad de reflexión que se produce cuando una onda móvil encuentra una unión viene especificada enteramente por la impedancia característica que presenta a la onda en la unión. No tiene por qué existir otra cuerda, sino que puede ser cualquier otra cosa caracterizada por un cierto valor de  $F_y/v_y$ . De nuevo apreciamos en la ecuación (8-10) los dos resultados ya estudiados : (1) impedancia infinita  $Z_2$ , dando  $g_1(0, t) = -f_1(0, t)$  y (2) impedancia cero  $Z_2$ , dando  $g_1(0, t) + f_1(0, t)$ .

Consideremos ahora la posibilidad de *reflexión nula*. De acuerdo con la primera de las ecuaciones (8-10) esto se consigue haciendo  $Z_2 = Z_1$ . Un modo de cumplir esto consiste en disponer de otra cuerda con exactamente la misma tensión y densidad lineal, lo cual, como es natural, no es ninguna unión. Otro modo [ecuación (8-8)] consiste en tener una segunda cuerda de tensión y densidad lineal diferentes, pero de tal modo que  $T_2\mu_2 = T_1\mu_1$ . *Pero un tercer procedimiento consiste en tener el extremo de nuestra primera cuerda introducido dentro de un depósito de aceite de la consistencia adecuada.* Estamos muy familiarizados con la ley de la resistencia viscosa, que en el caso de velocidades bajas da una fuerza proporcional a la velocidad, y ésta es precisamente la ley que necesitábamos para definir una impedancia constante de acuerdo con la definición básica expresada en la ecuación (8-7). Naturalmente, esta proporcionalidad no es suficiente; el valor real de  $F/v$  debe ser igual al valor de  $\sqrt{T\mu}$  para la cuerda. Aquí tenemos la posibilidad de una terminación ideal para la cuerda. Las ondas que se mueven a lo largo de la cuerda en un sentido avanzan dentro del depósito de aceite y se anulan. Terminando la cuerda de este modo, podemos hacer que se comporte como si fuese infinitamente larga; se dice que la carga, representada por el depósito de aceite, está perfectamente ajustada a la cuerda. Toda la energía que se transporta al extremo de la

cuerda por las ondas que avanzan se recoge y absorbe allí. La analogía con el problema de transportar energía eléctrica de una fuente a una carga tan eficazmente como sea posible es muy claro, y este tema del ajuste de impedancia correcta es, naturalmente, de enorme importancia práctica; otro ejemplo de la ubicuidad de los problemas que pueden relacionarse con el comportamiento de una cuerda sencilla tensa.

Una última nota sobre esta cuestión de las uniones. No existe ninguna cosa semejante a una transición abrupta completamente de un medio a otro. Existirá siempre alguna distancia no nula (aunque sea sólo un diámetro atómico) sobre la que se produzca la transición. Los cálculos del tipo que hemos hecho describirán el caso muy bien si la longitud de la región de transición es muy pequeña comparada con la longitud de onda que interviene. Pero si la longitud de onda es suficientemente pequeña o la transición suficientemente gradual se puede dejar de tener una reflexión apreciable. Un caso extremo es una variación completamente suave imaginaria de las propiedades a lo largo de la cuerda. Por ejemplo, consideremos la cuerda uniforme colgando verticalmente (con  $\mu = \text{constante}$  pero  $T$  incrementando linealmente con la distancia de arriba abajo) como se ve en la figura 5-1; o una cuerda de grosor uniforme sometida a una tensión constante en toda ella. Estos ejemplos no tienen ninguna discontinuidad identificable a la que pueda aplicarse la ecuación (8-1) y (8-9). Una onda incidente sufre un cambio de longitud de onda suave y puede llegar al extremo lejano de un modo muy diferente al que tenía inicialmente. Estos sistemas cuidadosamente graduados se utilizan con frecuencia en la propagación de ondas acústicas y eléctricas.

## ONDAS LONGITUDINALES EN CONTRAPOSICIÓN CON LAS ONDAS TRANSVERSALES: POLARIZACIÓN

Quizá sea apropiado en este momento comentar brevemente los tipos básicos de perturbaciones ondulatorias, transversales y longitudinales, que hemos encontrado al estudiar la propagación de ondas monodimensionales.

La cuerda tensa es esencialmente un portador de ondas transversales. Un muelle largo, por otra parte, es capaz de transportar tanto perturbaciones transversales como longitudinales. En este aspecto un muelle es una analogía mejor que un sólido real, que también puede llevar ondas transversales (cizalladura) como longitudinales (de compresión). Una columna de líquido o de gas, en contraste con un sólido, no tiene ninguna resistencia elástica al cambio de for-

ma y sólo la tiene a la variación de densidad. Así pues, una columna de un fluido (por ejemplo, aire) puede transportar sólo ondas longitudinales, excepto, y ésta es una excepción muy importante, cuando la gravedad o la tensión superficial proporciona un efecto equivalente a una fuerza restauradora elástica contra las deformaciones transversales.

Con las ondas transversales puede ser necesario apreciar la existencia posible de dos direcciones diferentes de polarización para las vibraciones, perpendicular entre sí y a la dirección de propagación. Incluso puede ser que estos diferentes estados de polarización tengan velocidades de ondas distintas asociadas con ellas, como por ejemplo en un medio cristalino en que los espaciados interatómicos son más pequeños en una dirección que en otra. Así pues, es concebible que en un cristal anisótropo puedan existir tres velocidades de onda a lo largo de una dirección dada, una para las ondas longitudinales y dos para las diferentes direcciones de la polarización transversal. Cuando consideramos una onda monodimensional de cualquier tipo que se encuentra con un límite o barrera, los resultados desarrollados en las últimas dos secciones describirán lo que ocurre. Sin embargo, es interesante señalar que una interfase determinada puede comportarse de modo diferente respecto a las ondas longitudinales y transversales. Supongamos, por ejemplo, que tenemos agua en reposo dentro de un depósito con paredes verticales lisas. La interfase agua-pared actúa entonces como un límite casi completamente rígido respecto a las ondas longitudinales, pero como un extremo totalmente libre respecto a las ondas transversales. Si se producen ondas estacionarias, la pared representará un nodo para las vibraciones longitudinales del agua pero un antinodo para las vibraciones transversales.

## ONDAS EN DOS DIMENSIONES

En este momento dejaremos los problemas puramente monodimensionales para dedicar alguna atención a los fenómenos que, en su mayoría, exigen un espacio por lo menos bidimensional (por ejemplo, ondas sobre una superficie) para que puedan aparecer. Éstos son fenómenos en los que interviene una variación en la dirección de una onda móvil, o que comprende la superposición de perturbaciones que llegan a un punto dado desde direcciones diferentes. Estos mismos fenómenos también pueden presentarse esencialmente en la propagación de ondas en tres dimensiones, pero los casos bidimensionales son más

sencillos de considerar y poseen la mayoría de las ideas importantes para su estudio.

Básicamente, trataremos con diversos tipos de soluciones para la ecuación de onda bidimensional, como se expresaba en una u otra de las dos formas citadas en el capítulo 7 [ecuaciones (7-40) y (7-41)]:<sup>1</sup>

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (8-11)$$

Sin embargo, en su mayor parte podremos referirnos fundamentalmente a dos formas especiales de ondas:

1. Ondas planas u ondas rectas (siendo esta última una descripción más apropiada para las ondas sobre una superficie). Estas ondas se generan por oscilaciones de un objeto recto o plano de dimensiones lineales grandes comparadas con la longitud de la onda.
2. Ondas circulares, generadas por un objeto cuyas dimensiones lineales son pequeñas comparadas con la longitud de onda. (Estas ondas en tres dimensiones se denominarían esféricas.)

Como mencionábamos en el capítulo 7, las ondas circulares se transformarán a gran distancia del foco en ondas rectas efectivas, que a menudo simplifican el análisis de su comportamiento. En particular, a un valor de  $r$  grande podemos, en cierta aproximación, ignorar el posterior decrecimiento de la amplitud que se debía tener en cuenta en principio si había que estudiar un cambio adicional de  $r$ . Esta simplificación se aplica particularmente a la consideración de los efectos de las interferencias debidas a dos o más fuentes pequeñas.

No vamos a *resolver* las ecuaciones (8-11) en sentido riguroso. En lugar de ello, empezaremos con la hipótesis de que tenemos ondas rectas o circulares y consideraremos su comportamiento en diversas situaciones físicas. En principio, una solución completa y exacta a cualquier problema de propagación de ondas exigiría resolver la ecuación diferencial básica sometida a las restricciones representadas por las condiciones particulares en todos los límites. *Muy* pocos casos pueden analizarse exactamente de este modo, y así se recurre a

<sup>1</sup> Obsérvese que la segunda ecuación es un caso especial basado sobre la hipótesis de que el desplazamiento  $z$  es independiente de la dirección  $\theta$ .

ciertas aproximaciones físicamente razonables que en la mayoría de los casos están totalmente justificadas por el éxito que se obtiene. En la mayoría de estos tratamientos aproximados reside un concepto que fue primeramente introducido por C. Huygens en 1678 y desarrollado posteriormente por J. A. Fresnel en 1816 y años posteriores. Este concepto es que, cuando una onda progresiva a través de un medio, se puede considerar cada punto sobre el frente de ondas que avanza como un nuevo foco. El desarrollo detallado de esta idea es el tema de la sección siguiente.

## PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL

Supóngase que se produce una perturbación en cierto punto de un depósito de agua, por ejemplo, se tira un pequeño objeto en el agua, o se toca la superficie con la punta de un lápiz. Entonces se crea un pulso de onda circular en expansión. Ignorando los efectos de la dispersión, podemos decir que el pulso se expande a cierta velocidad  $v$ . Si el pulso se crea en el origen para  $t = 0$ , entonces las partículas del medio a una distancia  $r$  del origen se ponen en movimiento cuando  $t = r/v$ . El punto de vista de Huygens era que los efectos que se producían en  $r + \Delta r$  en el instante  $t + \Delta r/v$  podía adscribirse a la agitación del medio en  $r$  en el instante  $t$ , tratando así la perturbación de modo explícito como algo que se traslada de un punto a otro adyacente a través del medio. Tanto Huygens como Fresnel aplicaron esta idea a la propagación de la luz, en la cual el comportamiento del medio está más allá de la observación. Sin embargo, es muy probable que la descripción de estos hechos fuese sugerida por el comportamiento observado de las ondas en el agua. En particular, si las ondas que se mueven alejándose de una fuente o foco se encuentran con una barrera que posee sólo una pequeña abertura ("pequeña" significa de una anchura pequeña comparada con la longitud de onda), esta abertura parece actuar exactamente como una fuente puntual, a partir de la cual se extienden ondas circulares. En la figura 8-6 se muestra este fenómeno. No importa que las ondas originales sean rectas y circulares; lo que hace la pequeña abertura es actuar como foco de ondas circulares en cualquier caso. Esto es muy razonable, porque el efecto de la barrera es suprimir toda la propagación de la perturbación original excepto la que se propaga a través de la abertura en la cual el desplazamiento del medio está libre de comunicarse al otro lado.

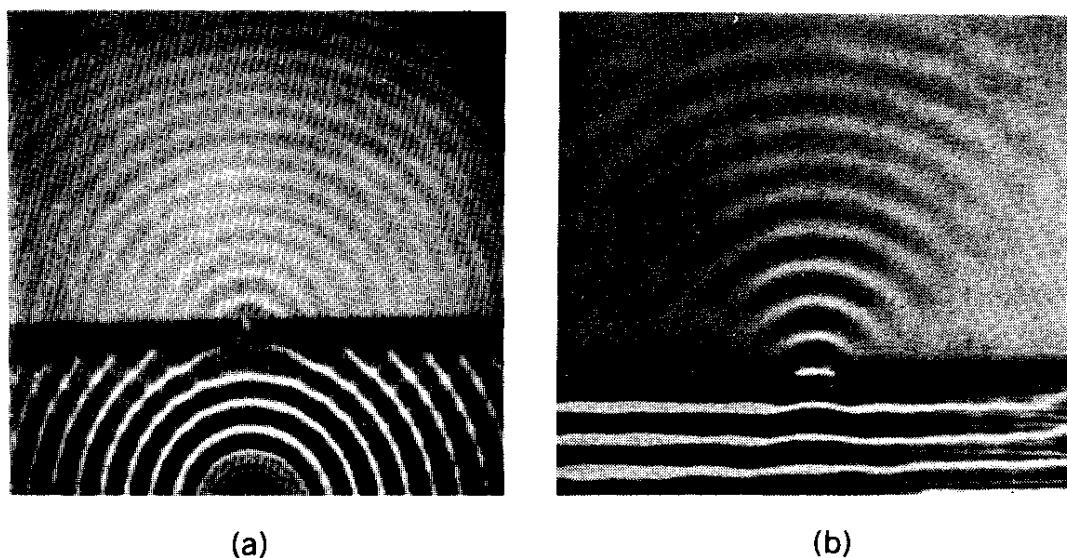


Fig. 8-6. Generación de ondas elementales de Huygens en una abertura pequeña con que se encuentra un frente de onda que avanza. (a) Ondas principales circulares. (Según R. W. Pohl, Physical Principles of Mechanics and Acoustics, Blackie, London, 1932.) (b) Ondas primarias rectas. (Según la película "Ripple Tank Phenomena", Parte II, Education Development Center, Newton, Mass.)

El principio de Huygens explica fácilmente el hecho de que un pulso de onda circular no impedido da lugar a un frente de onda circular subsiguiente y que un pulso recto da origen a un frente de onda también recto. La figura 8-7, tomada del libro original de Huygens,<sup>1</sup> indica cómo, dado un frente de

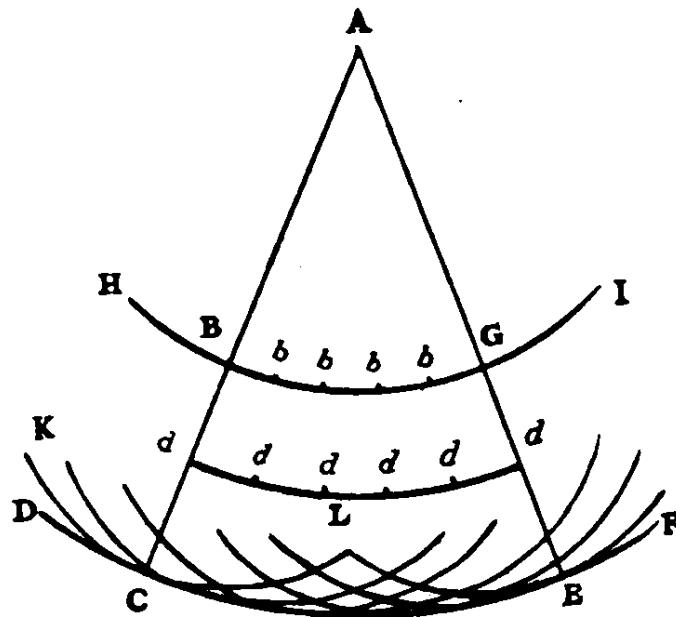


Fig. 8-7. Construcción de un frente de onda por el método de Huygens. [Según C. Huygens, Treatise on Light (traducido por S. P. Thompson), Dover, New York, 1962.]

<sup>1</sup> C. Huygens, *Treatise on Light*, 1960 (traducido por S. P. Thompson Dover, New York, 1962).

onda circular HBGI, se desarrollará en un tiempo posterior un frente de onda circular DCEF. Esto es así debido a que cada punto, como el B, da origen a un elemento de onda circular KCL, y la totalidad de estos elementos generan un refuerzo a lo largo de la línea DCEF que es tangente a todas ellas en un instante dado. Este lugar geométrico está caracterizado por el hecho de que las distancias más cortas entre él y el frente de onda original es en todos los puntos igual a  $v\Delta t$ , siendo  $\Delta t$  el tiempo transcurrido desde que el frente de onda estaba en HBGI. Una construcción semejante para un frente de onda recto implica que éste genere un frente de onda subsiguiente paralelo a sí mismo.

Sin embargo, existe algo más de lo que se ve a simple vista. La construcción de Huygens, como acabamos de describir, definiría dos frentes de ondas siguientes y no uno sólo. Además de un frente de onda nuevo que se aleja de la fuente, debía existir otro correspondiente a un frente de onda que se mueve hacia la fuente. Pero sabemos que esto no ocurre así. Si el modo de Huygens de visualizar la propagación de la onda ha de ser aceptable, debe incorporar la propiedad unidireccional de una onda móvil. Esto puede obtenerse exigiendo que la perturbación iniciada a partir de un punto dado en el medio en un instante determinado no es igualmente intensa en todas direcciones. Específicamente, si O (fig. 8-8) es la fuente original verdadera, y S es el origen de un elemento de ondas de Huygens, y P es el punto en que ha de registrarse la perturbación, entonces el efecto en P debido a la región próxima a S es una función  $f(\theta)$  del ángulo  $\theta$  entre OS y SP. En particular,  $f(\theta) = \theta$  para  $\theta = \pi$ .

Por lo que a nuestro estudio presente se refiere, la construcción de Huygens ofrece una contribución útil pero esencialmente cualitativa al análisis de la propagación de onda. Realmente hacer algo más es verdaderamente muy di-

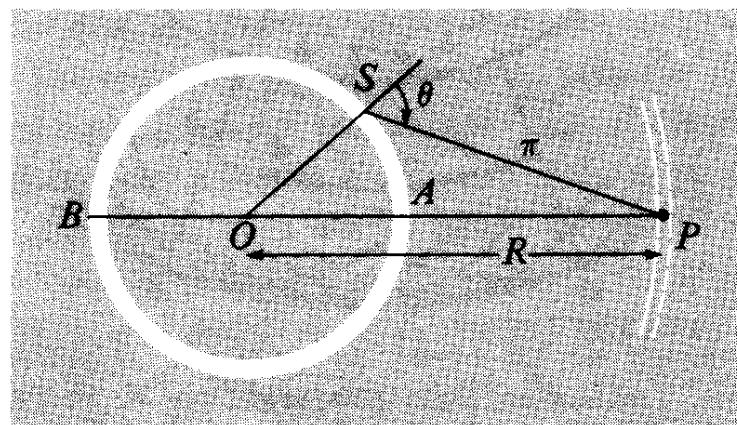


Fig. 8-8. El punto S sobre una onda circular en expansión originada en O, actúa como una fuente o foco secundario cuyo efecto en P depende de la oblicuidad  $\theta$  y de la distancia SP.

fícil. Las propiedades de los focos secundarios se deben definir sobre un frente de onda que avanza, de tal modo que produzcan el efecto preciso que se requiere. Una formulación matemática precisa del principio de Huygens en estos términos fue publicada por H. Helmholtz en 1859 y se desarrolló adicionalmente por G. Kirchhoff en 1882.<sup>1</sup> A pesar de su artificialidad, el método es de gran valor en el análisis de las interferencias ópticas que se producen cuando un haz de luz está parcialmente interrumpido por obstáculos. Y aun sin las matemáticas se puede utilizar, como veremos, el método de Huygens como guía para el estudio.

Con gran frecuencia, estamos tratando con ondas sinusoidales continuas, y no con pulsos individuales, e incluso un pulso individual es describible, como hemos visto, en función de la superposición de un tren de onda infinita a través del análisis de Fourier. Esto significa que podemos considerar en todo instante cada punto de una superficie arbitrariamente escogida como una fuente secundaria de elementos de ondas de Huygens. Aunque las ondas mismas estén avanzando, la amplitud de la perturbación sinusoidal en un punto dado cualquiera es independiente del tiempo. Esto significa que una vez que se hayan tenido en cuenta las fases relativas de las perturbaciones que llegan a un punto dado a partir de cualquier superficie designada, puede despreciarse la dependencia explícita con el tiempo. Esto resultará más claro cuando consideremos los problemas específicos en dirección e interferencia.

## REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS

Como hicimos con las ondas en una cuerda, en general, podémos esperar una reflexión parcial y una transmisión parcial de las ondas en un medio cuando se encuentra con un límite o frontera entre los diferentes medios. Pero con ondas en dos o tres dimensiones, debemos ahora también considerar los posibles cambios de dirección.

<sup>1</sup> Esto era válido para una propagación de ondas en tres dimensiones. Realmente, y de modo sorprendente, la formulación y empleo del principio para dos dimensiones es más difícil y menos claro que en caso de tres. Pero esto es un punto sin importancia, inadecuado para discutirlo aquí. Para un estudio más completo del principio de Huygens, ver B. Rossi, *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957, o (para un estudio matemático completo) B. B. Baker y E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Oxford University Press, New York, 1950.

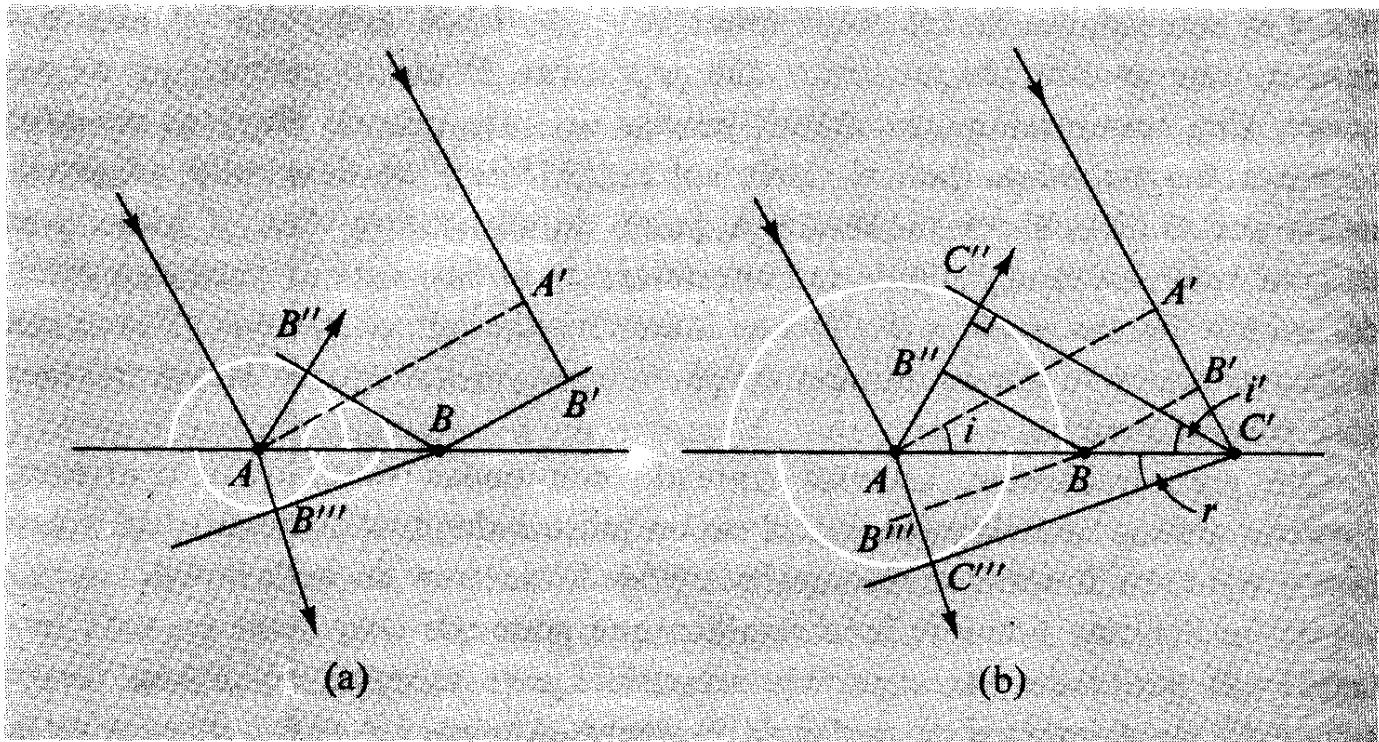


Fig. 8-9. (a) Reflexión y refracción mediante la construcción de Huygens.  
(b) Prueba de la ley de Snell mediante la construcción de Huygens.

El caso más sencillo es aquel en que una onda recta incide sobre una frontera o límite recto. Entonces tenemos el comportamiento familiar de la reflexión y refracción descrito por las leyes de Snell. Estos resultados se obtienen fácilmente por medio de la construcción de Huygens. En la figura 8-9, la línea \$AA'\$ representa un frente de onda recto en el instante en que el punto \$A\$ incide en la frontera. En un instante posterior, el frente ha avanzado en el medio original a la posición \$BB'\$ [fig. 8-9 (a)]. Cada punto sucesivo a lo largo de la frontera entre \$A\$ y \$B\$, cuando es alcanzado por el frente de onda, resulta ser el centro de un nuevo elemento de onda de Huygens, elemento que avanza en el segundo medio y que retrocede en el medio original. Las tangentes a estos elementos de ondas serán los nuevos frentes de onda.

Un poco más tarde, los frentes de onda originales tocan a la frontera en el punto \$C'\$ [fig. 8-9 (b)]. En el mismo instante el elemento de onda que partió anteriormente del punto \$A\$, extendiéndose hacia atrás en el medio original, habrá adquirido un radio \$AC''\$. La línea \$C'C''\$, tangente a este último elemento de onda, será también tangente a todos los elementos de onda que surgen de los puntos a lo largo de la frontera entre \$A\$ y \$A'\$.<sup>1</sup> La línea \$C'C''\$ es un nuevo frente de onda. Y a partir de la geometría de la figura, si llamamos \$i\$ e \$i'\$

<sup>1</sup> Deberá comprobar el lector por sí mismo que esto es así.

a los ángulos formados por los frentes de onda incidente y reflejado con el límite o frontera, tendremos

$$\operatorname{sen} i = \frac{A'C'}{AC'} = \frac{AC''}{AC'} = \operatorname{sen} i'$$

El ángulo formado por la frontera y el frente de onda es igual al ángulo existente entre la normal a la frontera y la normal al frente de onda. Pero esta última dirección representa lo que podríamos denominar la dirección de los rayos (al menos en óptica), es decir, la dirección de un haz estrecho de ondas progresivas.<sup>1</sup> Así pues, los ángulos  $i$  e  $i'$  representan los ángulos de incidencia y reflexión para los rayos que inciden sobre una frontera recta.

(Realmente, el estudio anterior del proceso de reflexión puede parecer difícil de reconciliar con la propiedad normalmente exigida de los elementos de ondas secundarias de Huygens, según la cual deberá existir una amplitud que tiende a cero en sentido hacia atrás. Sin embargo, se puede argüir que la presencia de una frontera brusca crea un caso nuevo y diferente, en el que resulta posible la producción de un elemento de onda intenso hacia atrás.)

El proceso de refracción se analiza de un modo semejante. Refiriéndonos de nuevo a la figura 8-9 (b), debemos especificar el radio del elemento de onda de Huygens que ha avanzado ya hacia el segundo medio desde el instante en que el frente de ondas estaba en  $AA'$  al instante en que toca al límite en  $C'$ . Entonces  $C'C''$ , trazado tangente a este elemento de onda (y a todos los demás elementos de ondas en este instante), es el frente de onda en el medio 2. Si las velocidades de las ondas en los dos medios son  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente, y el tiempo que interviene es  $\Delta t$ , tendremos

$$A'C' = v_1 \Delta t \quad AC''' = v_2 \Delta t$$

El ángulo de refracción  $r$  es el ángulo comprendido entre  $C'A$  y  $C'C''$ .

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} i = \frac{v_1 \Delta t}{AC'} \quad \operatorname{sen} r = \frac{v_2 \Delta t}{AC'}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} \quad (8-12)$$

<sup>1</sup> Esta ortogonalidad de la dirección de los rayos y del frente de ondas puede parecer evidente, pero realmente cesa de ser válida en medios anisótropos, en las que los elementos de ondas de Huygens pueden ser elípticos en lugar de circulares.

El problema de calcular las amplitudes reales de las ondas reflejada y transmitida no es trivial. Ciertamente, no es un problema aislado. Las ondas longitudinales (de compresión) se comportan de modo diferente a las ondas transversales, y en este mismo caso aquellas situaciones en que el desplazamiento es perpendicular al plano de la figura 8-9 (como sería el caso con ondas de agua) difieren de la situación en que los desplazamientos están contenidos en el plano de la misma. Es decir, con ondas transversales el comportamiento depende del estado de polarización. Debido a esta complejidad, no intentaremos analizar dichos problemas. Pero puede señalarse que cuando la incidencia es normal ( $i = 0$ ) tenemos de nuevo un problema esencialmente monodimensional. Sin embargo, existe todavía una distinción entre perturbaciones longitudinales y transversales, como hemos ya mencionado para el caso de un medio fluido en contacto con un límite efectivamente inmóvil pero liso. En este caso existirá efectivamente el 100 % de reflexión de cualquier onda incidente. Pero si la onda es longitudinal, el límite actúa como si fuese completamente rígido y el desplazamiento de la onda reflejada en dicho límite debe ser igual y opuesto al de la onda incidente; mientras que si la onda es transversal, el límite no ofrece ninguna resistencia y la reflexión tiene lugar sin inversión del signo del desplazamiento (véanse nuestras discusiones anteriores sobre los problemas de los límites o fronteras monodimensionales).

En la figura 8-10 mostramos ejemplos de la reflexión y refracción de ondas de agua, según se observa en una cubeta.

En la refracción, se puede ver claramente la variación de la longitud de onda (en el factor  $v_2/v_1$ ) que se produce cuando la perturbación pasa al segundo medio.

No presentaremos aquí ningún estudio de la reflexión o refracción de ondas circulares en fronteras rectas o curvas. Sin embargo, tales casos pueden analizarse fácilmente en función del comportamiento de los elementos de ondas de Huygens. Se ve claramente cómo los espejos y las lentes modifican los frentes de onda incidentes conduciendo al enfoque o desenfoque y a otros fenómenos, que pueden describirse como modificaciones de las trayectorias de los rayos de acuerdo con la ley de Snell.

En la cuestión específica de la refracción quizá sea interesante señalar que se produce un cambio de dirección del frente de onda siempre que la velocidad de las ondas varía con la posición. Esto puede suceder dentro de un solo medio en ciertas condiciones. Por ejemplo, la velocidad de las ondas de compresión (sonido) en gases es una función de la temperatura. [Especificamente

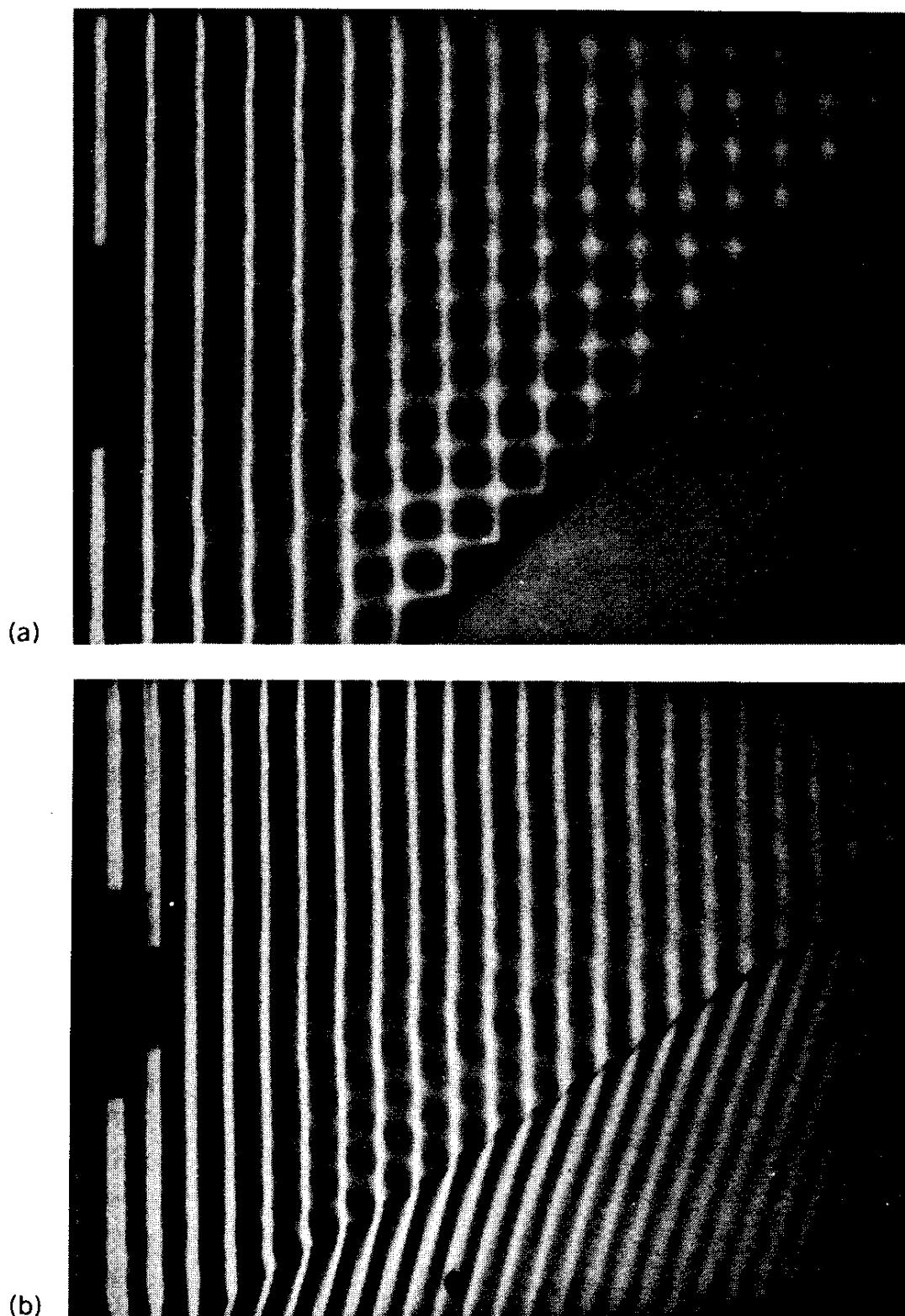


Fig. 8-10. (a) Reflexión de ondas rectilíneas en el agua en una frontera rígida ( $i = 45^\circ$ ). (b) Refracción de las ondas en el agua en la frontera entre zonas de diferente profundidad y, por tanto, con distintas velocidades de onda. (Según la película "Ripple Tank Phenomena". Parte I, Education Development Center, Newton, Mass.)

$v \sim \sqrt{T}$ , véase capítulo 7, ecuación (7-12).] Así pues, si existe un gradiente de temperaturas en un gas, las ondas que se mueven a través del mismo se desviarán progresivamente. De nuevo, si el medio está en movimiento de tal modo que sus diferentes partes tienen velocidades distintas, se producirá refracción. En el aire cerca de la superficie de la Tierra puede existir un gradiente de temperaturas así como un gradiente de velocidades. Dependiendo de sus signos y de la dirección de propagación de las ondas, un tren de ondas sonoras puede desviarse hacia arriba de la superficie de la Tierra o hacia abajo. En último caso puede existir una audibilidad incrementada del sonido a distancias considerables.

## EFFECTO DOPPLER Y FENÓMENOS RELACIONADOS

Si la fuente de una perturbación periódica se mueve respecto al medio, se modifica el diagrama de ondas producido por dicha perturbación. El caso más sencillo es el de una fuente que se mueve en línea recta a velocidad constante. Existen dos casos muy diferentes, según que la velocidad de la fuente sea menor o mayor que la velocidad de la onda que genera. Estos dos casos se indican esquemáticamente en la figura 8-11. Se muestra la posición de la fuen-

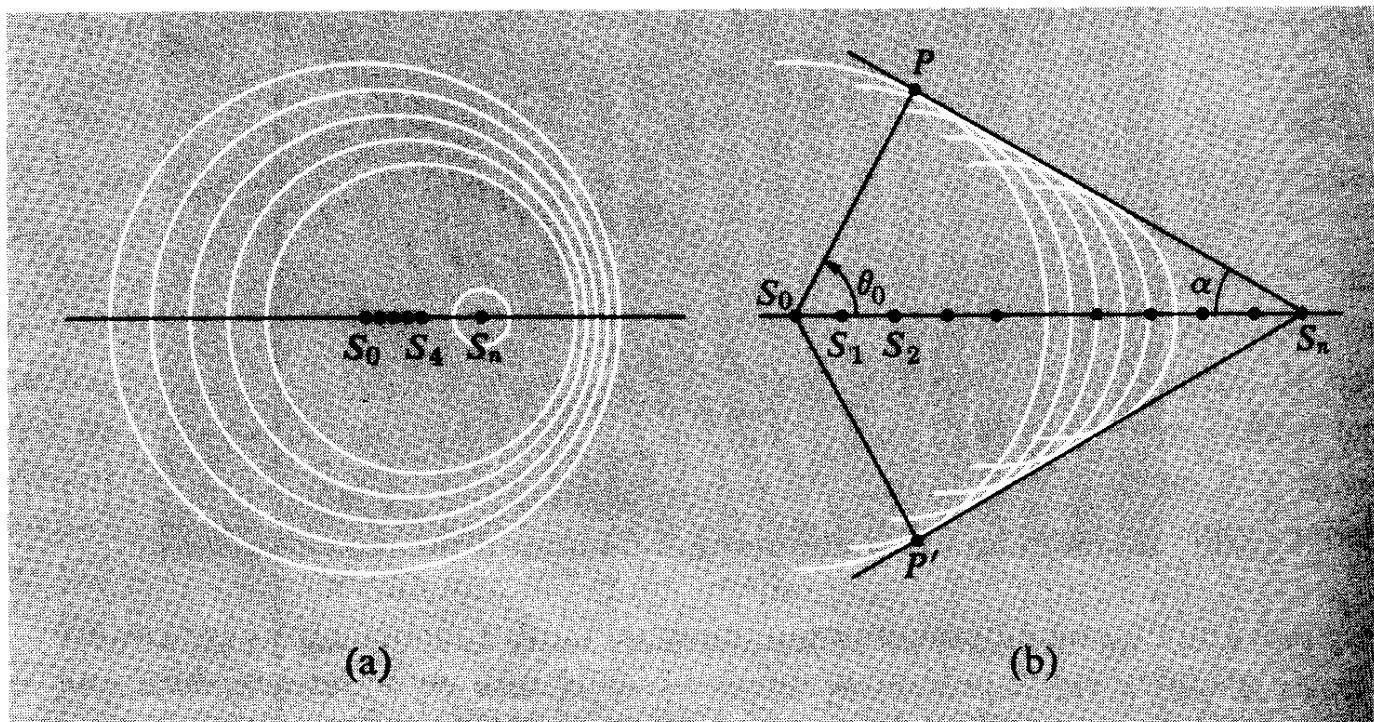


Fig. 8-11. Frentes de ondas sucesivas producidos a intervalos iguales de tiempo por (a) foco que se mueve con una velocidad menor que la onda, (b) foco moviéndose con una velocidad superior que la onda.

te o foco,  $S$ , en una sucesión de intervalos iguales de tiempo. Por ejemplo, éstos podrían ser instantes en los que la fuente genera un pulso breve, o distantes separados por un período de una vibración sinusoidal continua de la fuente. En cualquier caso, una circunferencia con una posición dada de  $S$  como centro representa el lugar de los puntos influídos en un instante subsiguiente determinado por las ondas que se difunden a partir de  $S$ .

Sea  $u$  la velocidad de la fuente, y  $v$  la de las ondas. Entonces en un instante  $t$  después de la iniciación de una de las ondas circulares, el radio del frente de onda es  $vt$  y el foco se ha movido una distancia  $ut$ . Si  $u < v$ , tenemos un caso como el indicado en la figura 8-11 (a). Los frentes de onda circulares están comprendidos uno dentro del otro. La distancia de los sucesivos frentes de onda es menor a lo largo del sentido del movimiento de la fuente y mayor en sentido opuesto. Si el intervalo de tiempo entre las posiciones sucesivas de  $S$  indicadas en la figura 8-11 (a) lo llamamos  $\tau$ , entonces esta separación de los frentes de ondas es  $(v - u)\tau$  y  $(v + u)\tau$ . Pero  $v\tau$  representa la distancia entre las fuentes de onda en cualquier dirección si la fuente es estacionaria. Así pues, existe una variación sistemática de longitud de onda con la dirección para las ondas emitidas desde una fuente móvil; éste es el efecto Doppler. En particular, tenemos

$$\lambda_{\min} = \lambda_0 \left(1 - \frac{u}{v}\right) \quad \lambda_{\max} = \lambda_0 \left(1 + \frac{u}{v}\right)$$

La situación es más complicada para otras direcciones, pero puede analizarse sencillamente si la distancia de la fuente al punto de observación es muy grande comparada con una longitud de onda. Vemos un caso del tipo indicado en la figura 8-12. Los puntos marcados con  $S_0$  y  $S_n$  representan las posiciones de la fuente para  $t = 0$  y para  $t = n\tau$  ( $n$  períodos más tarde). Como la velocidad de la fuente es  $u$ , resulta

$$S_0 S_n = x_n = unt$$

Como el punto de observación,  $P$ , se supone muy alejado, el ángulo  $S_0 P S_n$  es muy pequeño. Esto significa que los frentes de onda que llegan a  $P$  procedentes de  $S_0$  y  $S_n$  (y en todos los puntos intermedios que va ocupando la fuente) son casi paralelos. Supóngase que la onda  $W_0$  procedente de  $S_0$  ha alcanzado justamente a  $P$ . Esto define un tiempo  $t_P$  igual a  $r_0/v$ . La onda procedente de  $S_n$  partió en  $t = n\tau$ ; así en el tiempo  $t_P$  ha estado viajando sólo durante un tiempo  $t_P - n\tau$ ; su frente de onda está en  $W_n$ , y tenemos

$$\begin{aligned} S_n Q &= v(t_P - n\tau) \\ &= r_0 - v n \tau \end{aligned}$$

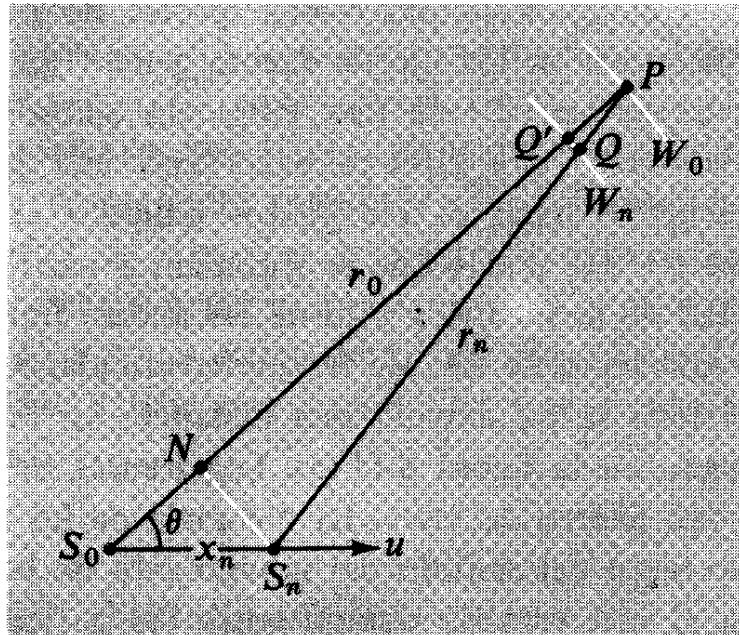


Fig. 8-12. Ondas que llegan a un punto distante  $P$  procedentes de un foco que se mueve de  $S_0$  a  $S_n$ .

La distancia entre los frentes de onda puede considerarse igual a  $QP$  o  $Q'P$  (siendo la diferencia entre ellos insignificante).

Si ponemos  $S_nP = r_n$ , tenemos

$$QP = r_n - S_nQ = r_n - r_0 + v\tau$$

Pero si trazamos una perpendicular desde  $S_n$  a la línea  $S_0P$ , resulta también que  $NP \approx r_n$  (de nuevo debido a la pequeñez del ángulo  $S_0PS_n$ ), de modo que

$$r_0 - r_n \approx S_0N = x_n \cos \theta$$

es decir,

$$r_0 - r_n \approx u\tau \cos \theta$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior de  $QP$ , tenemos

$$\begin{aligned} Q'P &\approx QP \approx v\tau - u\tau \cos \theta \\ &= n\lambda_0 \left( 1 - \frac{u \cos \theta}{v} \right) \end{aligned}$$

Pero  $Q'P$  o  $QP$  comprende  $n$  longitudes de onda de la perturbación según se observan en la dirección  $\theta$  respecto a la fuente móvil. Así,

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \left( 1 - \frac{u \cos \theta}{v} \right) \quad (8-13)$$

Esto significa de modo sencillo que el efecto Doppler depende de la componente de la velocidad de la fuente en la dirección del observador. La *frecuencia*

cia a la que los frentes de onda sucesivos pasan a través del punto de observación  $P$  es la velocidad de la onda dividida por la longitud de onda. Así pues, resulta

$$\nu(\theta) = \frac{v_0}{1 - \frac{u \cos \theta}{v}} \quad (8-14)$$

Esta última ecuación es el enunciado más apropiado del efecto Doppler en acústica, porque el efecto correspondiente se detecta mediante la variación del tono de la nota recibida de un foco o fuente móvil.

Volvamos ahora al caso en el que la velocidad de la fuente supera a la velocidad de la onda. Esto nos da una situación semejante a la indicada en la figura 8-11 (b). Supongamos que la fuente está en  $S_0$  en el instante  $t = 0$ . Entonces en el tiempo posterior  $t = n\tau$ , la fuente está en  $S_n$ , siendo  $S_0S_n = nvt$ , y el frente de onda procedente de  $S_0$  ha alcanzado o adquirido un radio igual a  $nvt$ . En la posición de  $S_n$  en dicho instante, las ondas están solamente a punto de generarse. Si se dibujan las líneas tangentes desde  $S_n$  al frente de onda circular procedente de  $S_0$ , estas líneas son también tangentes a todas las demás circunferencias intermedias. En nuestra experiencia anterior, la construcción de Huygens sugiere que el resultado a obtener es un refuerzo de los elementos de onda a lo largo de estas líneas, que actúan así como un frente de onda recta que se mueve alejándose a la velocidad  $v$ . El ángulo  $\alpha$  que forman estos frentes de onda con la línea del movimiento de la fuente se define mediante la relación

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{S_0P}{S_0S_n} = \frac{v}{u} \quad (8-15)$$

El cociente  $u/v$  se denomina número de Mach, y el ángulo  $\alpha$  es el ángulo de Mach (existe solamente si el número de Mach es mayor que 1).

La figura 8-13 muestra dos ejemplos reales de los diagramas de ondas generados en una cubeta de ondas con una fuente móvil para un número de Mach menor y mayor que 1.

Para ver más claramente que el lugar geométrico de las ondas circulares para  $u > v$  actúa como un frente de onda recto concentrado, consideremos los instantes de llegada de las ondas circulares sucesivas a un punto  $P$  bastante alejado de la fuente móvil. Podemos referirnos otra vez a la figura 8-12. Supongamos de nuevo que una onda parte de  $S_0$  cuando  $t = 0$ , y que otra onda

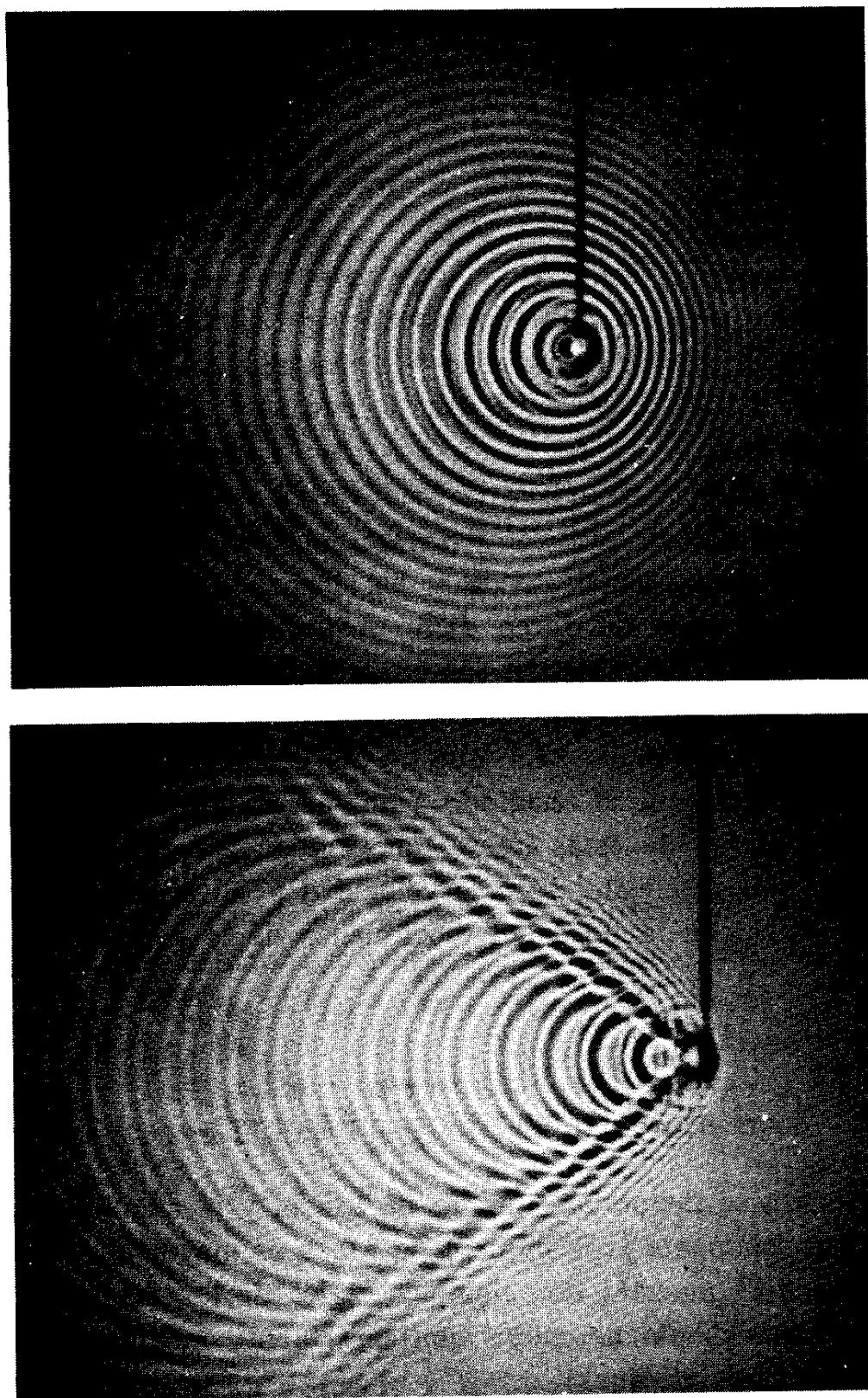


Fig. 8-13. Ondas en el agua producidas en una cubeta de ondas por un foco móvil. (De la pelíchila "Ripple Tank Phenomena", Parte III, Education Development Center, Newton, Mass.) (a) Velocidad del foco inferior que la velocidad de la onda (efecto Doppler). (b) Velocidad del foco mayor que la velocidad de la onda (onda de choque).

parte de  $S_n$  cuando  $t = n\tau$ . Los tiempos de llegada de estas ondas a  $P$  vienen dados por

$$t_0 = \frac{r_0}{v}$$

$$t_n = n\tau + \frac{r_n}{v}$$

Así pues,

$$t_n - t_0 = n\tau - \frac{r_0 - r_n}{v}$$

Pondremos de nuevo  $r_0 - r_n \approx x_n \cos \theta$ , lo que da

$$t_n - t_0 \approx n\tau \left(1 - \frac{u \cos \theta}{v}\right)$$

Evidentemente, si  $u < v$ ,  $t_n$  es siempre mayor que  $t_0$ , es decir, las ondas llegan en el mismo orden en que se emitieron. Pero si  $u > v$ , la secuencia de tiempos depende de  $\theta$ . Y en particular, existe un valor de  $\theta$  para el que todos los frentes de onda llegan a  $P$  en el *mismo* instante. Llamando a este ángulo  $\theta_0$ , tenemos

$$\cos \theta_0 = \frac{v}{u} \quad (8-16)$$

Este valor de  $\theta$  es el complemento del ángulo de Mach y define la dirección perpendicular al frente de onda recto, a lo largo de la cual viaja esta región de concentración de los elementos de ondas circulares. En estos términos pueden entenderse la producción de efectos como el del estampido sónico. Si un foco  $S$  está moviéndose [fig. 8-14(a)] a una velocidad mayor que la velocidad de onda, y un observador está en  $P$ , una línea trazada desde  $P$  formando un ángulo  $\theta_0$  con la dirección del movimiento de la fuente o foco intersectará a la línea de movimiento de la misma en un punto  $S_0$ . Un tiempo  $r_0/v$  después de que la fuente pase a través de  $S_0$ ,  $P$  recibirá repentinamente la acumulación de los elementos de onda que han sido generados por la fuente en una distancia corta desde  $S_0$  en adelante, pero que alcanzan a  $P$  simultáneamente.

En este instante la fuente misma ha recorrido una distancia  $ur_0/v$  más allá de  $S_0$ ; véase figura 8-14(a). Antes de este instante,  $P$  no recibía ninguna perturbación. Después que la acumulación ha pasado más allá de  $P$  existirá una llegada continua de elementos de onda normales, pero sin aprovecharse del refuerzo producido por su llegada simultánea, de modo que pueden ser demasiado débiles para ser apreciables.

En la práctica, un avión que se mueve con velocidad supersónica genera un estampido doble, debido a la formación de dos frentes de onda principales, uno

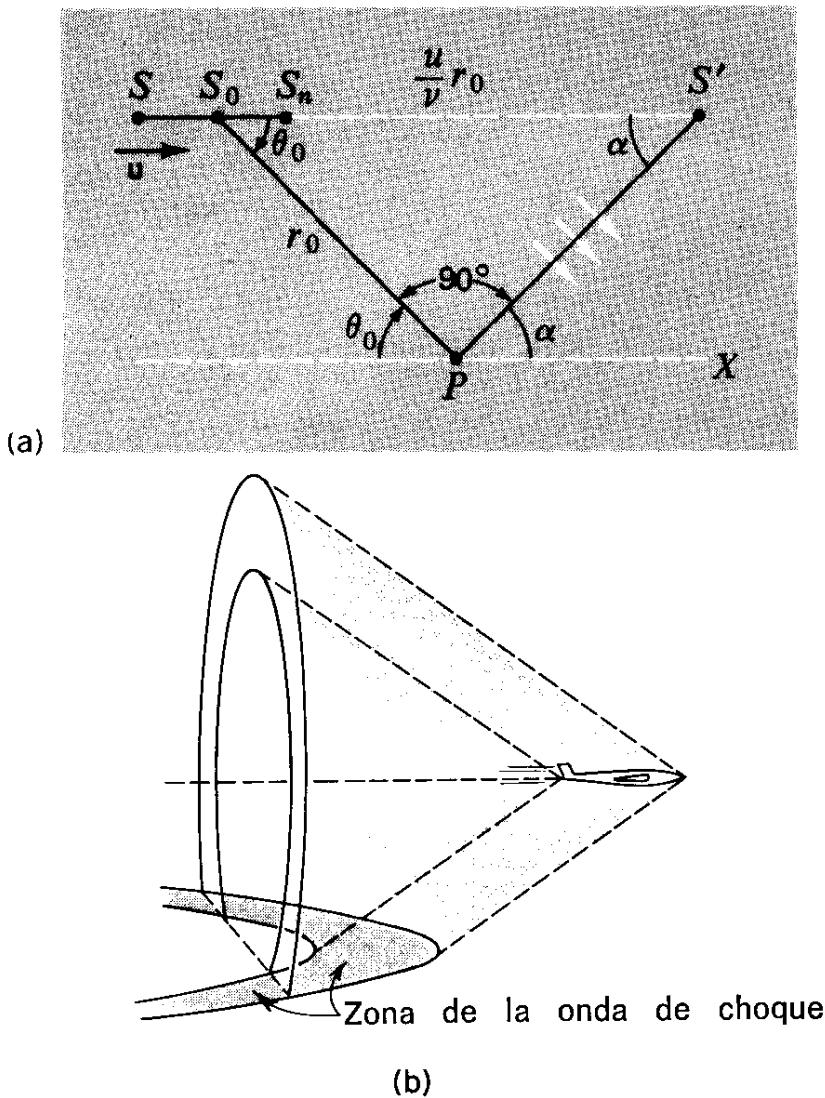


Fig. 8-14. (a) En la dirección  $\theta_0 = \arccos(v/u)$ , los pulsos procedentes del foco móvil ( $u > v$ ) se acumulan simultáneamente en el punto de observación  $P$ .  
 (b) Producción del estampido sónico.

en su parte delantera y el otro en su cola. Ambos, para un avión que se mueve horizontalmente a velocidad constante, se producen en la forma de superficies cónicas que se transportan junto con el avión [véase fig. 8-14 (b)]. Su intersección con el suelo tiene forma hiperbólica. Cuando este diagrama barre cualquier punto particular, se oye en dicho punto el estampido sónico.<sup>1</sup>

## INTERFERENCIAS PRODUCIDAS POR UNA DOBLE RENDIJA

Consideraremos ahora más explícitamente lo que ocurre cuando una onda que avanza se ve obstruida por un obstáculo o barrera. Desde el punto de vista del

<sup>1</sup> Para una explicación más completa, véase, por ejemplo, el artículo "Estampido sónico" por H. A. Wilson, Jr., *Scientific American*, enero 1962, pp. 36-43.

principio de Huygens, cada punto sin obstruir en el frente de onda original actúa como una nueva fuente y la perturbación más allá de la barrera es la superposición de todas las ondas que se extienden a partir de estas fuentes o focos secundarios. Debido a que todos los focos secundarios son producidos por la onda original, existe una relación de fase bien definida entre ellas. Esta condición se denomina *coherencia* e implica a su vez una relación de fases sistemática entre las perturbaciones secundarias cuando ellas llegan a cualquier otro punto más alejado. Como resultado, existe un diagrama de interferencias característico en la región más allá de la barrera.

El caso más sencillo, y que es básico para el análisis de todo lo demás, consiste en considerar la onda original completamente obstruida excepto en las aberturas arbitrariamente estrechas. En un sistema bidimensional dichas aberturas actúan como focos puntuales. El caso análogo para ondas en tres dimensiones sería el de dos rendijas largas paralelas que actuasen como focos lineales. Discutimos brevemente un dispositivo de esta clase en el capítulo 2, cuando considerábamos primeramente la superposición de vibraciones armónicas, y el lector probablemente estará familiarizado también con dicho dispositivo en conexión con el histórico experimento de Thomas Young (realizado alrededor de 1802) que expuso la interferencia de las ondas luminosas de un modo inconfundible.

En la figura 8-15 indicamos un frente de onda que se aproxima a dos rendijas  $S_1$  y  $S_2$ , que se admiten que son iguales y muy estrechas. Por sencillez supondremos que las rendijas están igualmente alejadas de un punto que actúa como foco primario de la onda. Así pues, las fuentes secundarias  $S_1$  y  $S_2$  están en fase entre sí. Si la onda original es una perturbación armónica simple continua,  $S_1$  y  $S_2$  generarán a su vez ondas armónicas simples. En un punto arbitrario  $P$ , la perturbación se obtiene sumando las contribuciones que llegan en un instante dado desde  $S_1$  y  $S_2$ . En general, necesitaremos considerar dos efectos característicos:

1. Las perturbaciones que llegan a  $P$  procedentes de  $S_1$  y  $S_2$  difieren en amplitud por una doble razón. En primer lugar las distancias  $r_1$  y  $r_2$  son diferentes, y la amplitud generada por una perturbación circular en expansión disminuye al aumentar la distancia al foco. En segundo lugar los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son diferentes, y un elemento de onda de Huygens tiene una amplitud que disminuye (como vimos anteriormente en conexión con la fig. 8-8) al aumentar la oblicuidad.

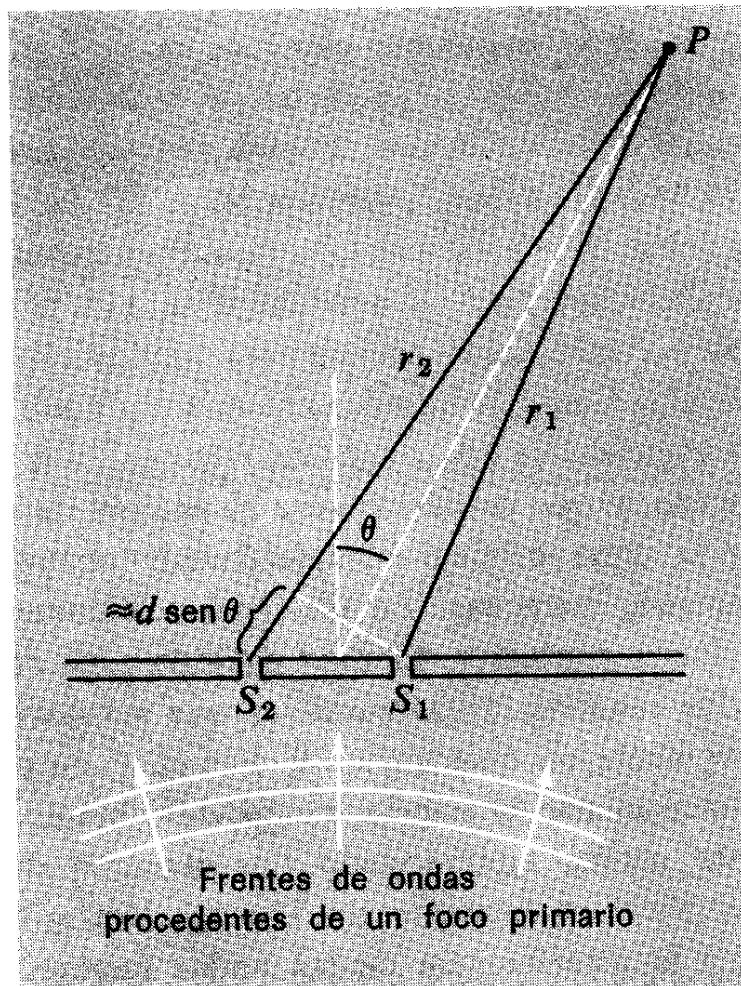


Fig. 8-15. Interferencias por una doble rendija.

2. Existe una diferencia de fase entre las perturbaciones en  $P$ , correspondientes a la diferencia de tiempo  $(r_2 - r_1)/v$ , siendo  $v$  la velocidad de la onda.

Estudiemos ahora los casos en que las distancias  $r_1$  y  $r_2$  son grandes comparados con la distancia entre  $S_1$  y  $S_2$ . Entonces la diferencia entre las amplitudes debidas a  $S_1$  y  $S_2$  en  $P$  es despreciable. Pero sigue persistiendo la posibilidad de una diferencia de fase importante entre ambas perturbaciones, y ésta es la que domina el aspecto general del diagrama de ondas resultante. Vemos las consecuencias típicas en la figura 8-16, que es una fotografía hecha en la cubeta de ondas. Existen ciertos lugares, *líneas modales*, en los cuales la perturbación resultante es casi cero en todo instante. Es fácil calcular sus posiciones. En un punto cualquiera de la figura 8-15, como  $P$ , el desplazamiento en función del tiempo tiene la forma

$$y_P(t) = A_1 \cos \omega \left( t - \frac{r_1}{v} \right) + A_2 \cos \omega \left( t - \frac{r_2}{v} \right) \quad (8-17)$$

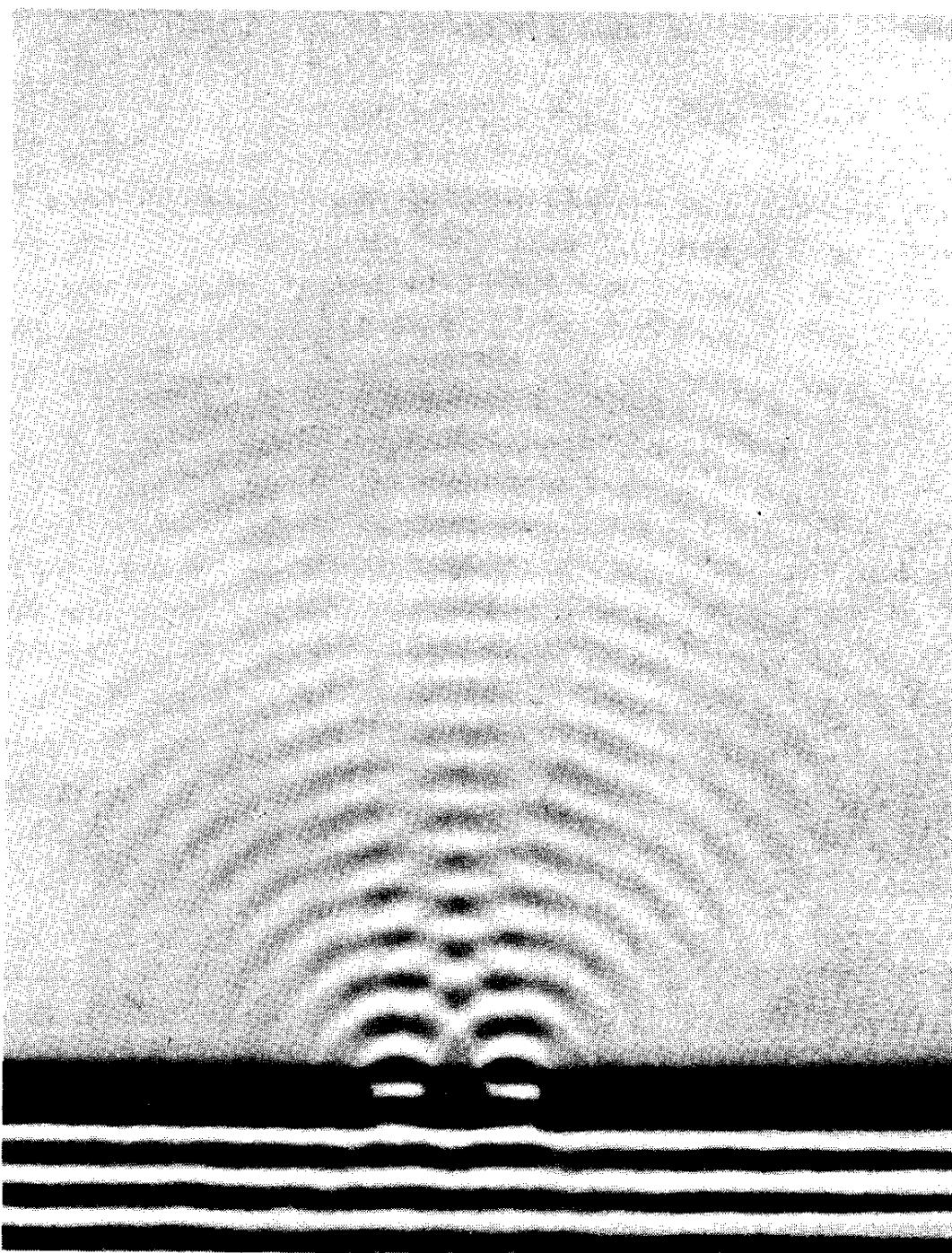


Fig. 8-16. Interferencias de ondas de agua por una doble rendija. (Según la película "Ripple Tank Phenomena", Parte II, Education Development Center, Newton, Mass.)

si la dependencia temporal de las perturbaciones en  $S_1$  y  $S_2$  depende del  $\cos \omega t$ . La ecuación (8-17) encierra el hecho de que una secuencia dada de desplazamientos en un foco cualquiera da origen, en un instante posterior  $r/v$ , a una secuencia semejante en un punto alejado a una distancia  $r$ . Así pues, si podemos hacer  $A_1 \approx A_2$  ( $= A_0$ , por ejemplo), entonces

$$y_P(t) = A_0 \left[ \cos \omega \left( t - \frac{r_1}{v} \right) + \cos \omega \left( t - \frac{r_2}{v} \right) \right] = 2A_0 \cos \omega t \cos \left[ \frac{\omega}{2v} (r_2 - r_1) \right]$$

Introduciendo la longitud de onda  $\lambda = v/\nu = 2\pi v/\omega$ , tenemos así

$$y_P(t) = 2A_0 \cos \omega t \cos \left[ \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \right] \quad (8-18)$$

Se define una línea nodal por la condición de que la cantidad  $\pi(r_2 - r_1)/\lambda$  es un múltiplo impar de  $\lambda/2$ . Así pues, podemos escribir

$$\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

o bien

$$r_2 - r_1 = (n + \frac{1}{2})\lambda \quad (\text{líneas nodales}) \quad (8-19)$$

siendo  $n$  un entero cualquiera positivo o negativo (o cero). Las líneas nodales son así una serie de hipérbolas que dividen la región completa detrás de las rendijas de un modo bien definido. Dentro de las zonas entre las líneas nodales se puede dibujar una segunda serie o familia de hipérbolas que definen líneas de desplazamiento máximo, en el sentido de que a una distancia dada de las rendijas y entre dos líneas nodales dadas la amplitud de la perturbación resultante alcanza su valor *máximo*. Es fácil de ver que la condición para que esto ocurra es

$$r_2 - r_1 = n\lambda \quad (\text{máximos de interferencia}) \quad (8-20)$$

El parámetro importante que gobierna el aspecto general del diagrama de interferencias es el cociente adimensional entre la separación de la rendija  $d$  y la longitud de onda  $\lambda$ . Este hecho se manifiesta en su forma más sencilla si consideramos las condiciones que se presentan a una distancia grande de las rendijas, es decir,  $r \gg d$ . Entonces (refiriéndose de nuevo a la fig. 8-15) puede ponerse el valor de  $r_2 - r_1$  igual a  $d \sin \theta$  con error despreciable. De aquí que la condición para los máximos de interferencia resulte ser

$$d \sin \theta_n = n\lambda \quad \sin \theta_n = \frac{n\lambda}{d} \quad (8-21)$$

y la amplitud en cualquier dirección arbitraria viene dada por

$$A(\theta) = 2A_0 \cos \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \quad (8-22)$$

A partir de esta expresión vemos que la interferencia a una distancia grande de las rendijas es esencialmente un efecto direccional. Es decir, si se ob-

servan las posiciones de los nodos y de los máximos de interferencia a lo largo de una línea paralela a la que une las dos aberturas, las separaciones *lineales* de los máximos (o cero) adyacentes aumenta en proporción a la distancia de las rendijas.

Las características generales del diagrama de interferencias en el caso de un sistema de doble rendija se ilustran de modo muy aceptable en la figura 8-17 para dos valores diferentes de  $d/\lambda$ . Éstos no son diagramas de ondas reales, sino que son simulados, obtenidos superponiendo dos series o familias

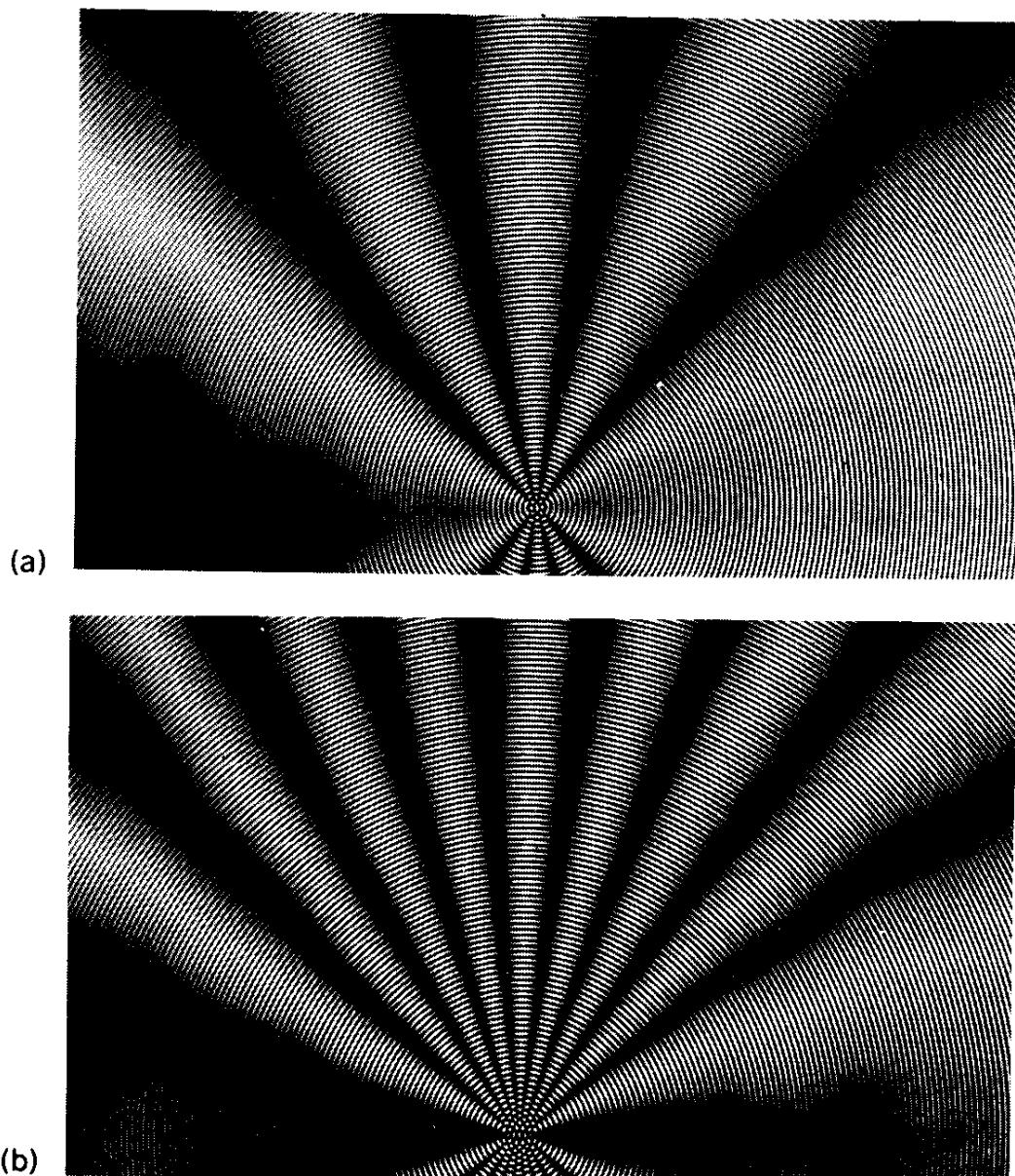


Fig. 8-17. Diagramas de Moiré con los que se obtienen aproximadamente las interferencias producidas por una doble rendija. (Hecho con el equipo de "Moiré Patterns", distribuido por Edmund Scientific Co., Barrington, N. J.) (Foto por Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

de circunferencias concéntricas.<sup>1</sup> Un interés especial se tiene con frecuencia en el caso de que  $d/\lambda$  es muy grande. Esto sucede especialmente en interferencias ópticas, en donde la longitud de onda ( $\sim 6 \times 10^{-7}$  m) es, por lo común, extremadamente pequeña comparada con la separación entre rendijas (típicamente  $\sim 0,1$  mm). En estas condiciones ( $\lambda/d \approx 10^{-2}$ ) podemos sustituir  $\sin \theta_n$  por  $\theta_n$  en la ecuación (8-21), de modo que la separación angular entre dos máximos sucesivos de interferencias resulta ser  $\lambda/d$ , muy aproximadamente. Además, a una distancia dada  $D$  de las rendijas, los máximos de interferencia sucesivos están igualmente separados, con una separación de  $D\lambda/d$ .

## INTERFERENCIAS POR RENDIJAS MÚLTIPLES (REDES DE DIFRACCIÓN)

Al estudiar el problema de la doble rendija hemos indicado con cierto detalle cómo se formó el diagrama de interferencias. Pero en casos más complicados nos limitaremos nosotros mismos a considerar el estado de la interferencia a distancias que son grandes comparadas con las dimensiones lineales del sistema de aberturas. Esto nos permite admitir lo siguiente:

1. Porciones igualmente anchas (no obstruidas) del frente de onda original dan contribuciones de la misma amplitud en cualquier punto que se considere.
2. Las líneas trazadas hasta un punto de observación dado desde las diversas partes sin obstruir del frente de onda original son casi paralelas.

Analicemos en estos términos el diagrama de interferencias debido a una disposición de  $N$  rendijas igualmente separadas. Como sucede en el caso de la doble rendija, admitiremos por el momento que las rendijas individuales tienen todas la misma anchura, que es muy pequeña. Llamemos  $d$  a la separación entre rendijas adyacentes. Admitiremos que las diversas rendijas están todas accionadas en fase, como sucedería si la onda fundamental fuese plana o recta (es decir, procedente de una fuente primaria muy alejada) y paralela al plano de la rendija (fig. 8-18). La diferencia de trayectoria para las ondas secundarias que llegan a un punto  $P$  procedentes de rendijas adyacentes es

<sup>1</sup> Realizados con el equipo de los diagramas de Moiré construidos por Edmund Scientific Co., Barrington, N.J.

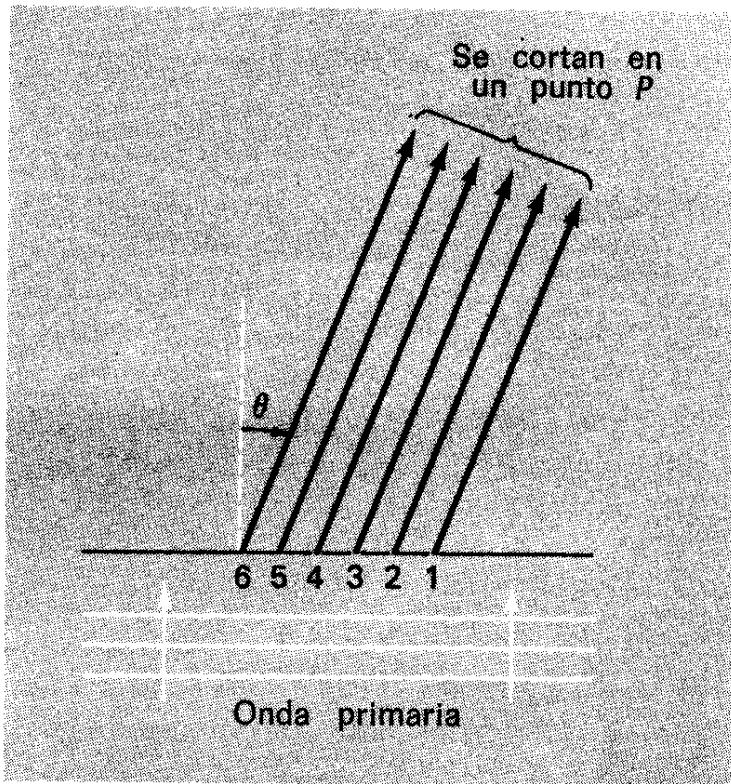


Fig. 8-18. Interferencias por una rendija múltiple.

igual a  $d \operatorname{sen} \theta$ . Esto define entonces una diferencia de tiempos  $d \operatorname{sen} \theta/v$  y una diferencia de fases  $\delta$  dada por

$$\delta = \frac{\omega d \operatorname{sen} \theta}{v} = \frac{2\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \quad (8-23)$$

El desplazamiento resultante en  $P$  tiene así la forma

$$y_P(t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_0 \cos(\omega t - \varphi_1 - \delta) \\ + A_0 \cos(\omega t - \varphi_1 - 2\delta) + \dots \text{(hasta } N \text{ términos)}$$

en donde  $\varphi_1 = 2\pi r_1/\lambda$  es la diferencia de fases que corresponde a la distancia  $r_1$  de la primera rendija al punto  $P$ .

Ya hemos considerado este problema de superposición en el capítulo 2. La amplitud  $A$  de la resultante se obtiene tomando el vector suma de  $N$  vectores de longitud  $A_0$ , cada uno de los cuales forma un ángulo  $\delta$  con su vecino próximo (véase fig. 2-7). El resultado es

$$A = A_0 \frac{\operatorname{sen}(N\delta/2)}{\operatorname{sen}(\delta/2)} \quad (8-24)$$

Consideremos ahora la forma en que  $A$  depende del ángulo  $\theta$ , dada por la ecuación (8-23) para  $\delta$ . Es especialmente aclaratorio hacer esto con la ayuda

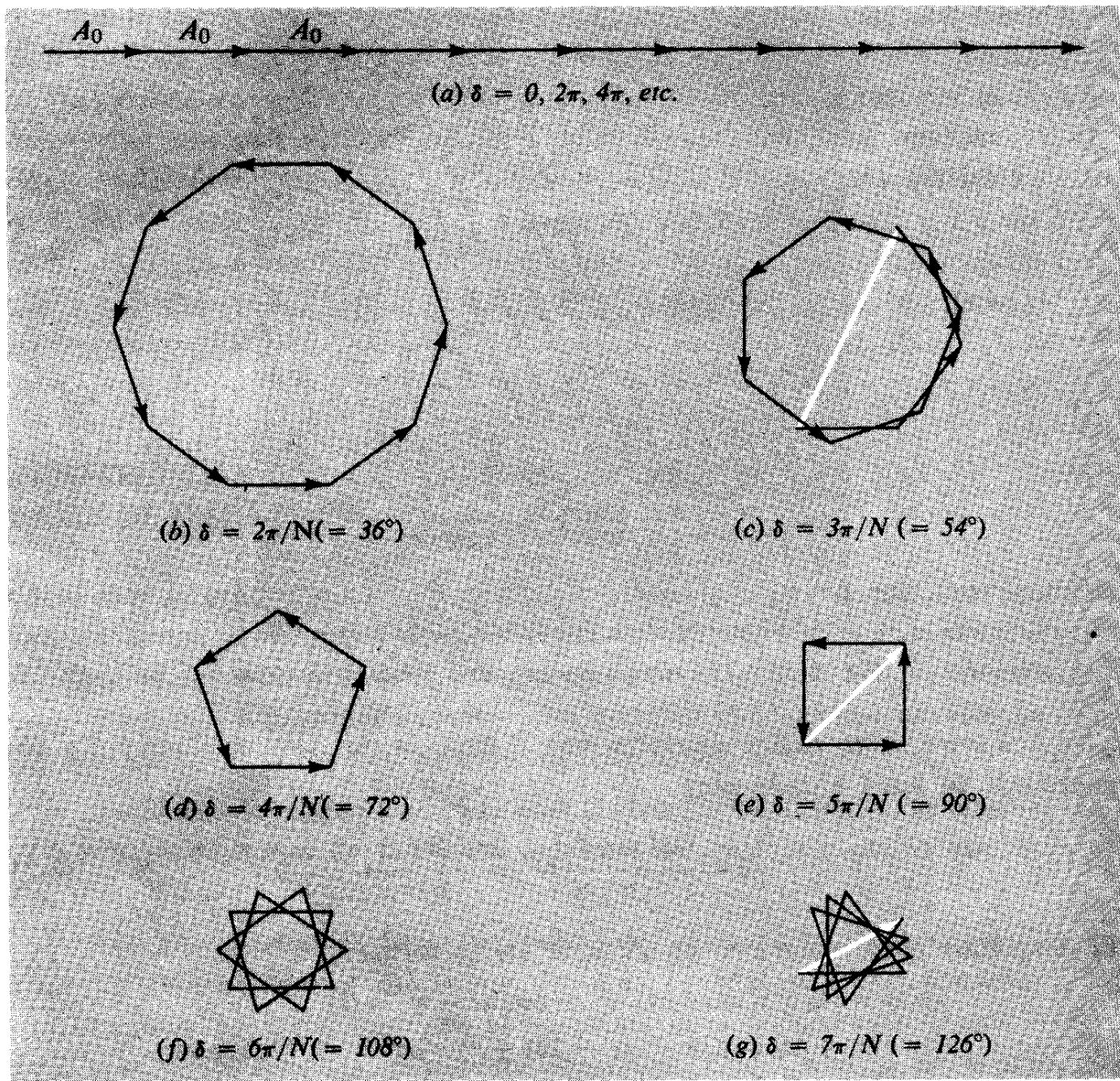


Fig. 8-19. Diagramas vectoriales para redes de difracción

( $N = 10$ ). (a)  $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \text{etc.}$  (b)  $\delta = 2\pi/N$   
 $(= 36^\circ)$ . (c)  $\delta = 3\pi/N (= 54^\circ)$ . (d)  $\delta = 4\pi/N$   
 $(= 72^\circ)$ . (e)  $\delta = 5\pi/N (= 90^\circ)$ . (f)  $\delta = 6\pi/N$   
 $(= 108^\circ)$ . (g)  $\delta = 7\pi/N (= 126^\circ)$ .

de una serie de diagramas vectoriales como los indicados en la figura 8-19 para el caso particular  $N = 10$ .

1. Cuando  $\delta = 0$ , los vectores combinados están todos sobre una recta y se suman de este modo:

$$A = NA_0$$

Por lo tanto, esto representa la mayor amplitud resultante posible. También se verifica para cualquier valor dado de  $\theta$  de la ecuación (8-21). Es decir, una distribución de  $N$  rendijas, separadas  $d$ , posee *máximos principales* en las mismas direcciones que en el sistema de dos rendijas de la misma separación.

2. Cuando  $\delta = 2\pi/N, 4\pi/N, 6\pi/N$ , etc., los vectores combinados forman un polígono cerrado y se tiene

$$A = 0$$

Se puede ver esto igualmente bien a partir de la ecuación (8-24), porque en todos los casos el ángulo  $N\delta/2$  es un múltiplo entero de  $\pi$ , haciendo que el numerador sea cero.

3. Entre estos ceros existirán valores de  $\delta$ , y por tanto de  $\theta$ , que definen máximos intermedios del desplazamiento. Éstos se denominan *máximos subsidiarios* del diagrama de interferencias de rendijas múltiples, y sus amplitudes son mucho menores que las amplitudes de los máximos principales, aunque sus posiciones angulares precisas y sus amplitudes relativas no sean fácilmente calculables, como se descubrirá si se intenta hacer dicho cálculo para los valores máximos de  $A$  mediante la ecuación (8-24). En la figura 8-19 la amplitud en el diagrama (c) para  $\delta = 3\pi/N$  es *aproximadamente* igual a la del primer máximo subsidiario y es solamente un quinto del correspondiente al máximo principal.

4. Despues de  $N-1$  ceros y  $N-2$  máximos subsidiarios, llegamos al valor  $\delta = 2\pi$ , que define el máximo principal siguiente del diagrama de difracción.

La figura 8-20 es una comparación de las variaciones de amplitud con  $\delta$  correspondientes a una doble rendija y a un sistema de 10 rendijas con igual separación entre ellas. (Nótese la diferencia de las escalas verticales.) El aspecto de estas curvas, semejante a pelotas que rebotan, es el resultado de considerar  $A$  siempre positiva, mientras que la ecuación (8-24) definiría valores alternativamente positivos y negativos entre los pares sucesivos de ceros. El efecto de la utilización de más rendijas consiste en agudizar los máximos principales. Naturalmente, es precisamente esta propiedad la que hace que una red de difracción sea una herramienta de gran valor en espectroscopia, porque implica una resolución angular muy nítida para la luz de una longitud de onda dada. La mayor parte de la intensidad se concentra dentro de unos intervalos angulares muy estrechos alrededor de las direcciones de los máximos prin-

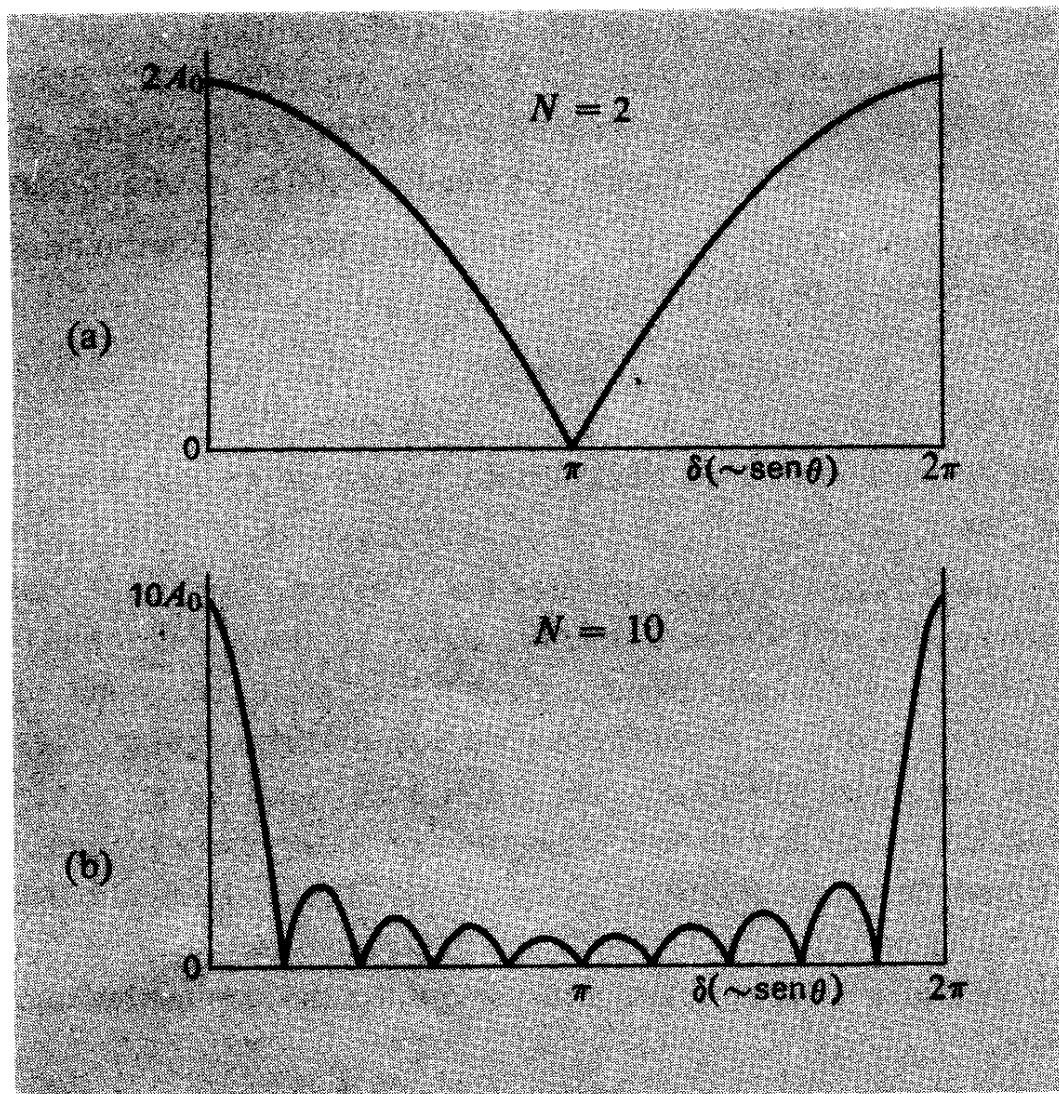


Fig. 8-20. (a) Variación de la amplitud con la diferencia de fase en el caso de una interferencia por doble rendija. (b) Variación de la amplitud con la diferencia de fase en el caso de interferencias por diez rendijas.

cipales ; los denominados máximos de orden cero, primer orden, segundo orden, etc., según diagrama. La figura 8-21 muestra un diagrama de interferencias de rendijas múltiples ( $N = 8$ ) producidas en una cubeta de ondas. La concentración efectiva de ondas consiste precisamente en tres haces , uno de orden cero y dos de primer orden, se muestra claramente. (¿Por qué no están presentes órdenes superiores?)

## DIFRACCIÓN POR UNA SOLA RENDIJA

Es claro que ninguna rendija individual o abertura puede ser arbitrariamente fina, y este hecho da origen al comportamiento de interferencia característico

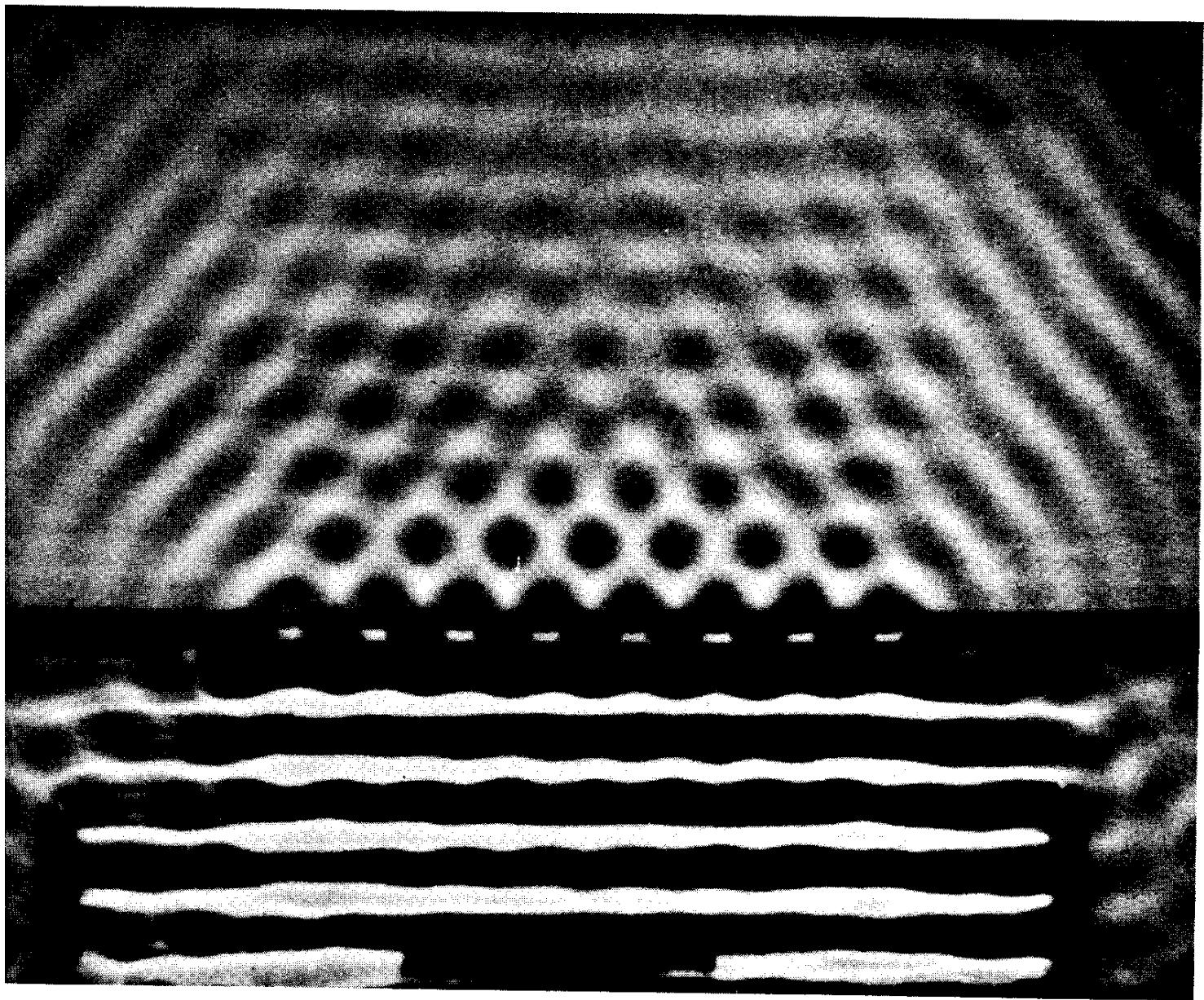


Fig. 8-21. Interferencia por ocho rendijas de ondas de agua. (Según la película "Ripple Tank Phenomena", Parte II, Education Development Center, Newton, Mass.)

de las diversas regiones de una sola rendija. Hemos evitado discutir esto anteriormente debido a que el análisis del problema de  $N$ -rendijas proporciona una base de interés para ello. La figura 8-22 es un diagrama muy aumentado de una rendija aislada estrecha, de anchura  $b$ . Admitamos que todas las partes de la misma se ven perturbadas en fase por una onda plana incidente. Ahora bien, si la perturbación en la parte más alejada de la rendija ha de estudiarse a un ángulo  $\theta$  respecto a lo normal, como está indicado, existirá una diferencia de trayectos neta de  $b \operatorname{sen} \theta$  desde los dos lados de la rendija al punto de observación y una diferencia de fases asociada de  $2\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda$ . Si imaginamos la rendija dividida en un gran número de tiras de anchuras iguales  $\Delta s$ , una

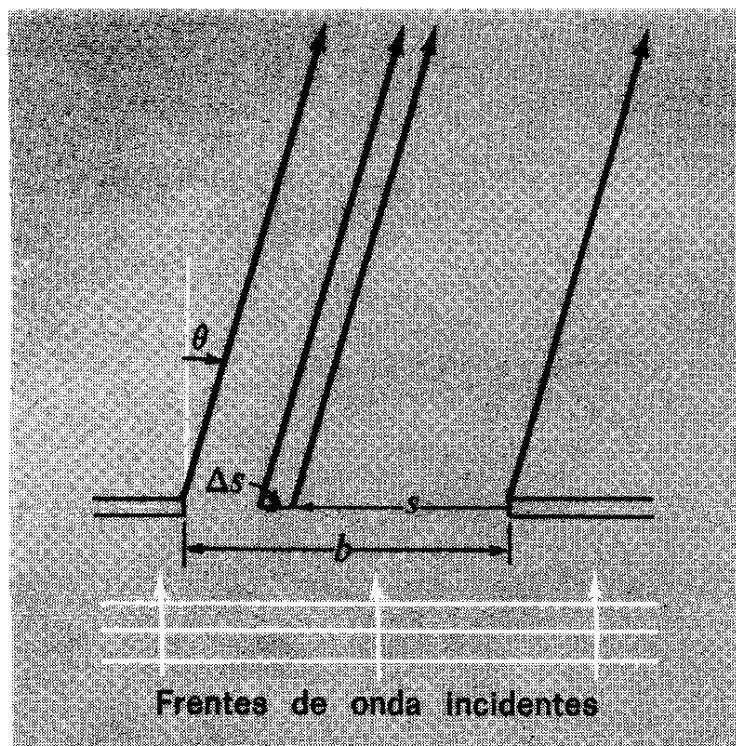


Fig. 8-22. Difracción por una rendija.

cualquiera de ellas a una distancia  $s$  de un extremo de la rendija, produce en el punto de observación un desplazamiento proporcional a  $\Delta s$  con una fase igual a  $2\pi s \operatorname{sen} \theta/\lambda$  (relativo a las ondas que proceden del borde de la rendija). Si aceptamos esta descripción del caso, podemos hallar las amplitudes resultantes en función de  $\theta$  construyendo un diagrama vectorial como el de la figura 8-19 para las redes de difracción. Ello correspondería a hacer  $N = s/\Delta s$  y  $\delta = 2\pi\Delta s \operatorname{sen} \theta/\lambda$ . Pero, como es natural, esta subdivisión en un número finito de tiras es artificial. Lo que vamos a hacer es imaginar el límite de esta descripción cuando  $\Delta s \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ . Así tenemos una variación continua de la fase en proporción a la distancia a lo largo de toda la rendija. La implicación de esto es que nuestro diagrama vectorial se transforma en un arco circular continuo con las siguientes propiedades:

1. El ángulo entre las tangentes de sus dos extremos es la diferencia de fase total  $2\pi b \operatorname{sen} \theta/\lambda$ .
2. La longitud del arco corresponde a la amplitud total que proporciona la rendija (para valores dados de  $r$  y  $\theta$ ) si todas las partes de la misma pudiesen de alguna forma producir sus efectos en fase entre sí. Si se ignora el factor de oblicuidad de las ondas elementales de Huygens, esta longitud del arco es siempre igual a la amplitud  $A_0$  producida para  $\theta = 0$  (a una distancia  $r$  dada de la rendija).

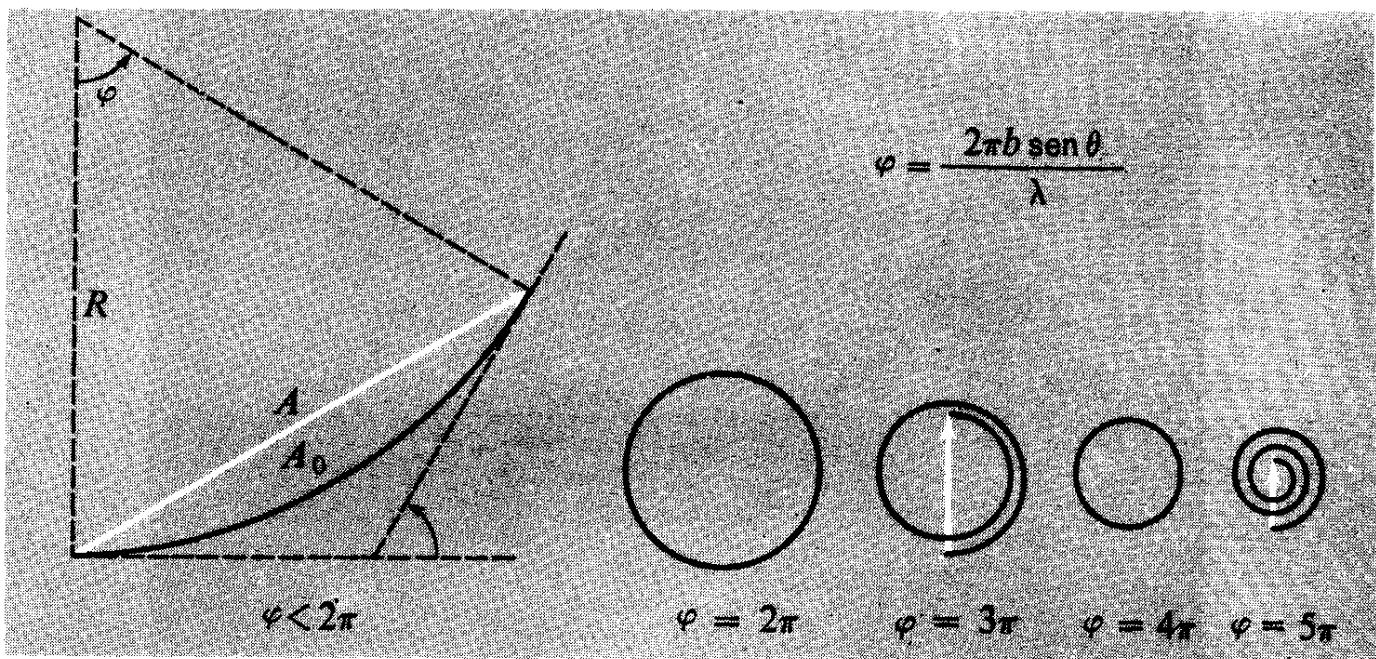


Fig. 8-23. Diagramas vectoriales para la difracción por una rendija.

El cálculo de la amplitud resultante es ahora una cuestión simple. En la figura 8-23 indicamos la base para dicho cálculo. Para un valor dado de la diferencia de fases total  $\varphi$ , el diagrama vectorial resulta ser un arco circular de radio  $R$  tal que

$$A_0 = R\varphi$$

La amplitud resultante  $A$  en estas condiciones es la cuerda de este arco, y viene dada por

$$A = 2R \operatorname{sen}(\varphi/2)$$

Así pues, tenemos

$$A = A_0 \frac{\operatorname{sen}(\varphi/2)}{\varphi/2} \quad \text{siendo } \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi b \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \quad (8-25)$$

Esta variación de la amplitud resultante con la dirección es, pues, de la forma  $(\operatorname{sen} \alpha)/\alpha$ , siendo  $\alpha = \varphi/2$ . Esta función (más formalmente identificada como una función de Bessel de orden cero) tiene un cero siempre que  $\varphi/2$  sea un múltiplo entero de  $\pi$ . Su aspecto general se indica en la figura 8-24(a). En la figura 8-24(b) se ha vuelto a dibujar sin considerar el signo, y su gran parecido con la curva de la amplitud de una red de difracción se aprecia entonces más fácilmente [fig. 8-20(b)].

A partir de este análisis se deduce que una rendija sola puede dar origen a un diagrama de difracción con un sistema de líneas nodales, como se ve

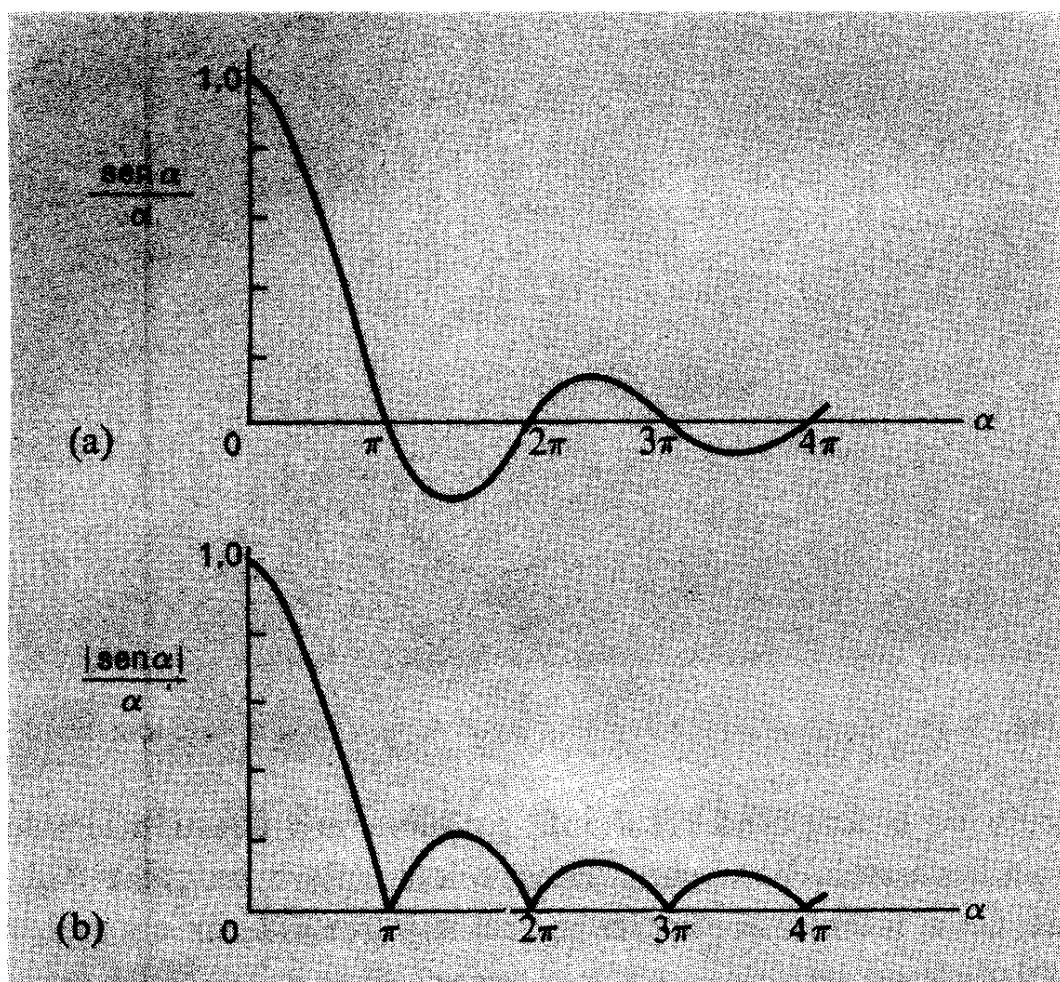


Fig. 8-24. Variación de la amplitud con la dirección en la difracción en una rendija ( $z = \pi b \operatorname{sen} \theta / \lambda$ , siendo  $\theta$  la dirección de observación y  $b$  la anchura de la rendija). (a) Amplitud junto con la fase (como se indica con el signo + o -). (b) Valor absoluto de la amplitud.

en la figura 8-25. Es esencialmente más parecido al diagrama existente alrededor del máximo central (de orden cero) de una red de difracción que al diagrama de una doble rendija. Los máximos subsidiarios son relativamente débiles; sus amplitudes son aproximadamente proporcionales a los valores del  $(\operatorname{sen} \alpha)/\alpha$  para  $\alpha = 3\pi/2, 5\pi/2$ , etc., es decir, para  $\varphi = 3\pi, 5\pi$ , etc. (No exactamente, debido a que los máximos no se presentan a estos valores precisos de la fase.) Relativamente a una amplitud de 1 para  $x = 0$ , estos otros máximos tendrían amplitudes de alrededor de  $2/3\pi$  (0,21),  $2/5\pi$  (0,13), etc. (véase figura 8-24)

Obsérvese que los primeros ceros se presentan para direcciones tales que la diferencia de caminos desde los dos lados de la rendija es precisamente una longitud de onda completa. Esto tiene sentido si se imagina la rendija simple constituida por dos rendijas contiguas, cada una de la anchura  $b/2$ . La diferencia de camino entre las ondas procedentes de los centros (o cualquier otra

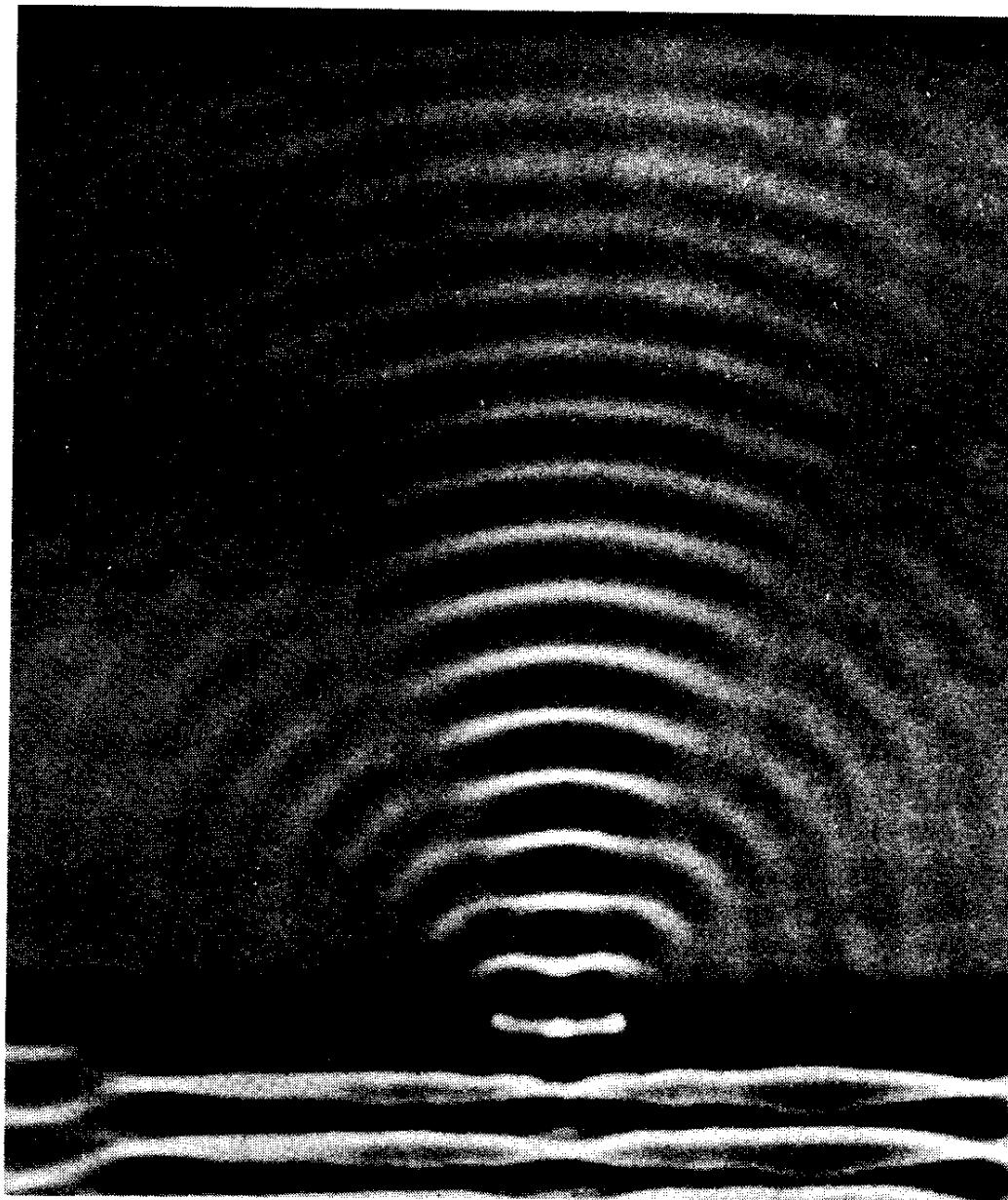


Fig. 8-25. Difracción de ondas de agua en una rendija. (Según la película "Ripple Tank Phenomena", Parte II, Education Development Center, Newton, Mass.)

pareja de puntos correspondientes) de estas dos partes es entonces  $\lambda/2$ , que es la condición de interferencia destructiva. Pueden entenderse de un modo semejante las otras líneas nodales de una rendija simple.

Deberá recordarse siempre que todo nuestro estudio pertenece a puntos de observación que están alejados de la rendija o rendijas. Esto es particularmente importante ahora que nos hemos dado cuenta de las consecuencias de la anchura finita de la rendija. Porque, como es natural, en posiciones próximas a una rendija, se ve la influencia de la misma de un modo más directo. Una parte del frente de onda incidente, de anchura  $b$ , pasa a su través y se produce una gran perturbación en esta región, mientras que todos los demás

puntos situados en la parte alejada de la barrera están en una sombra geométrica. ¿Hasta dónde podemos ir antes que nuestra descripción en función de los ángulos de difracción sea irrelevante? Podemos establecer un criterio como el siguiente: El máximo central del diagrama de difracción de una rendija de anchura  $b$  se extiende en un intervalo de ángulo  $\pm \theta_m$ , siendo

$$\operatorname{sen} \theta_m = \frac{\lambda}{b}$$

[Esto está implicado en la ecuación (8-25).] A una distancia  $D$  de la rendija (figura 8-26), este máximo definiría una dispersión lineal igual a  $\pm D \operatorname{tg} \theta_m$ . Por otra parte, una imagen puramente geométrica de la rendija siempre sería de anchura  $b$ . Así pues, la difracción es dominante si es válida la siguiente condición:

$$D \operatorname{tg} \theta_m \gg b$$

Si  $\lambda$  es pequeño comparada con  $b$ , podemos poner  $\operatorname{tg} \theta_m \approx \operatorname{sen} \theta_m = \lambda/b$ , y nuestra condición se transforma en

$$D \gg \frac{b^2}{\lambda} \quad (8-26)$$

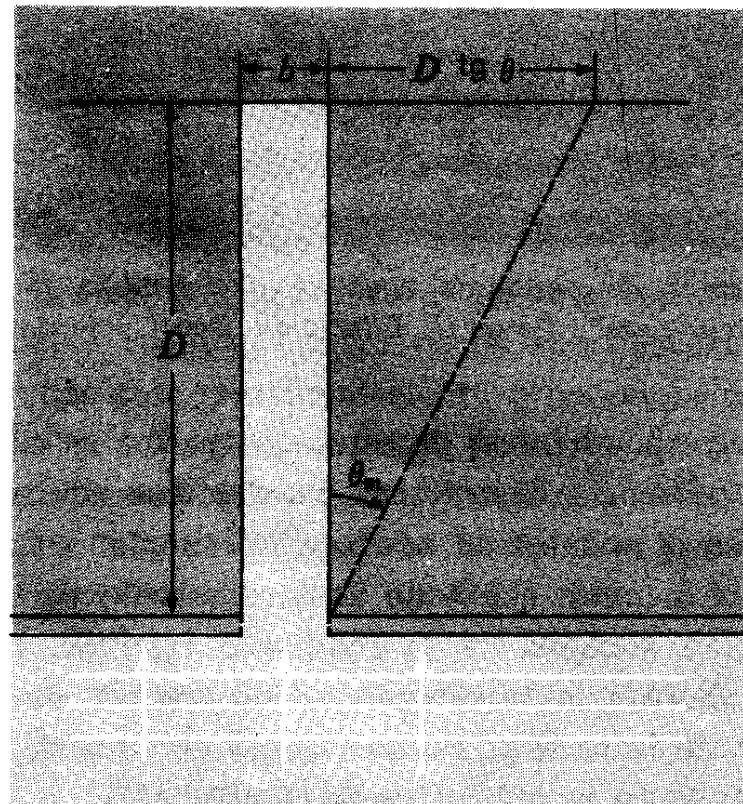


Fig. 8-26. Condiciones necesarias para la difracción de Fraunhofer.

Este importante criterio define las condiciones para lo que se denomina difracción de Fraunhofer, es el tipo que hemos estado discutiendo.

## DIAGRAMAS DE INTERFERENCIAS DE SISTEMAS DE RENDIJAS REALES

Habiendo estudiado la influencia de la anchura de una rendija finita, estamos ahora en condiciones de analizar los diagramas de difracción o de interferencias (los términos son esencialmente intercambiables) de cualquier barrera perforada. Sin embargo, al hacer esto consideraremos no la amplitud resultante, sino la *intensidad*, es decir, la velocidad a la que la onda resultante libera energía a una región de una dimensión dada en diversos puntos. Ahora bien, para una onda de una frecuencia o longitud de onda dada en un medio determinado, la potencia transportada por la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud. Así pues, nos vemos limitados esencialmente a calcular  $A^2$  en función de la dirección a cierta distancia dada de la abertura que difracta. Consideraremos los casos específicos de una sola rendija, doble rendija y rendija múltiple (red).

1. *Rendija aislada.* En el caso de la rendija aislada, basándonos en la ecuación (8-25), tenemos

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

siendo  $\alpha = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$

(8-27)

La figura 8-27 muestra un hermoso ejemplo de un diagrama de éstos, obtenido por R. W. Pohl con ondas sonoras. La longitud de onda  $\lambda$  fue de 1,45 cm (correspondiente a una frecuencia supersónica de unos 23 kHz), y la anchura de la rendija  $b$  fue 11,5 cm. La segunda versión del diagrama es un *diagrama polar*; en él la distancia medida desde el origen a cualquier punto de la curva es proporcional a la intensidad en dicha dirección particular.

Una vez que hemos apreciado que es  $A^2$ , y no  $A$ , el que proporciona una medida de la magnitud más importante, el flujo de energía, se aprecia mejor la importancia que tiene el máximo central comparado con los otros. Las alturas (teóricas) de los máximos subsidiarios más importantes, es decir, aquellos más próximos al máximo central, solamente son del orden de un 5 % del

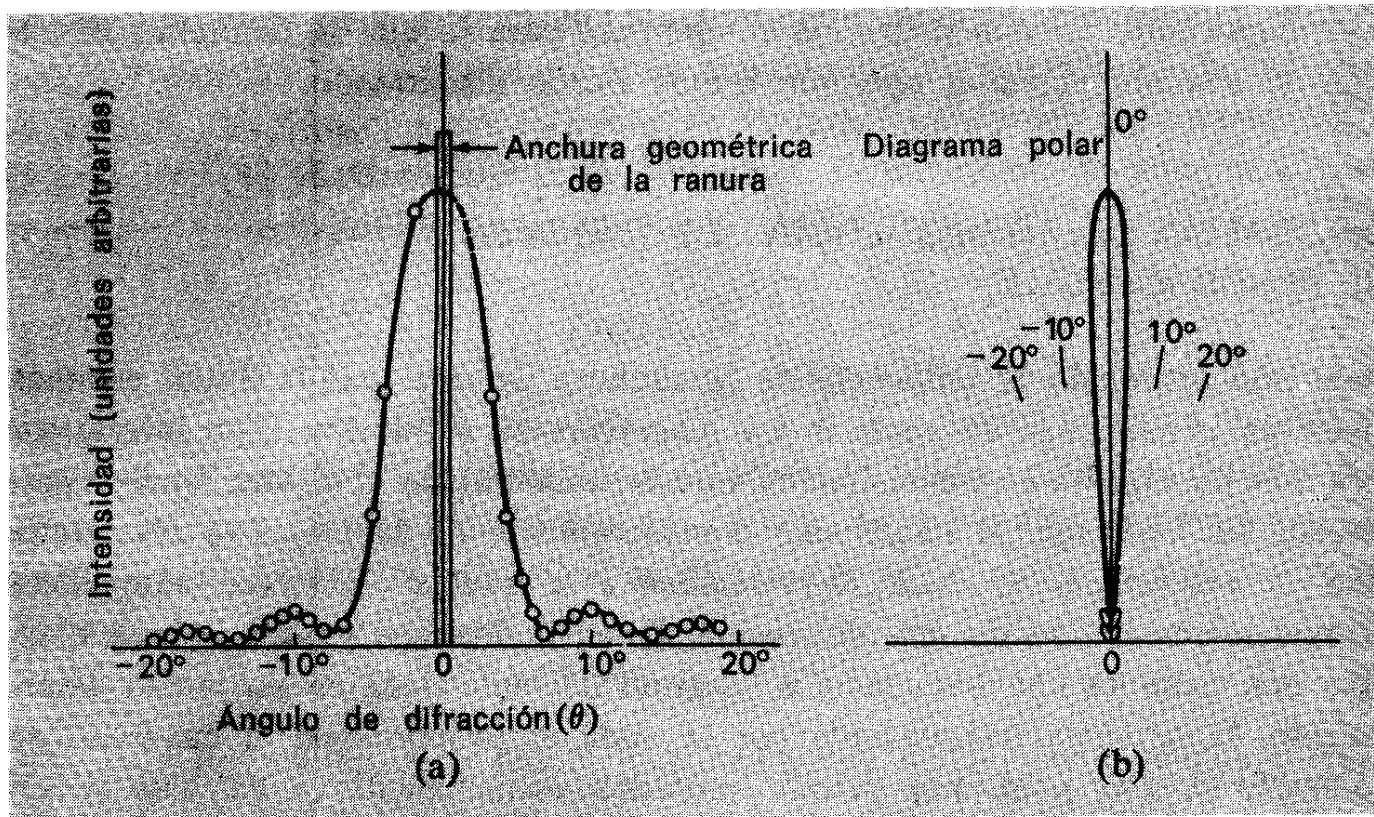


Fig. 8-27. (a) Difracción en una rendija de ondas sonoras ( $\lambda = 1,45 \text{ cm}$ ). (b) Diagrama polar del mismo esquema. La longitud del segmento entre  $O$  y la curva en cualquier dirección da la intensidad relativa en dicha dirección. (Según R. W. Pohl, Physical Principles of Mechanics and Acoustics, Blackie, London, 1932.)

central, y alrededor del 93 % de la energía total transmitida está comprendida entre los ceros a ambos lados del máximo central. Incidentalmente, al elevar al cuadrado las ordenadas en las curvas semejantes a las de la figura 8-24 (b) se originan discontinuidades de pendientes en los ceros (comprobar por sí mismo que esto se deduce de las ecuaciones).

2. *Doble rendija.* En este caso tenemos una combinación de dos efectos, el diagrama de difracción característico de una sola rendija y la interferencia entre las dos rendijas. La intensidad viene dada por una expresión de la forma

$$I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \quad (8-28)$$

en donde  $\alpha = (\pi b \sin \theta)/\lambda$  y  $\delta = (2d \sin \theta)/\lambda$ . Aquí  $I_0$  es la intensidad máxima (para  $\theta = 0$ ) que se obtendría de una rendija sola. La ecuación anterior está basada en la ecuación (8-22) para dos rendijas de anchura despreciable, combinada con la ecuación (8-27).

Medidas cuidadosas en un diagrama de interferencias de doble rendija revelarían esta modulación del efecto de interferencia básico mediante el diagrama de una sola rendija. La separación  $d$  (medida entre centros) es necesariamente mayor (y quizá mucho mayor) que la anchura  $b$  de una rendija individual, de modo que la anchura angular de la modulación de una sola rendija es significativamente mayor que la separación angular entre los picos de interferencias. Si las rendijas son extremadamente estrechas comparadas con su separación, el diagrama completo de las rendijas puede estar comprendido dentro del máximo central del diagrama de difracción de una sola rendija. La figura 8-28 (a) (de nuevo según Pohl) es un diagrama de interferencia acústico obtenido en estas condiciones ( $b/d \approx 1/10$ ). La figura 8-28 (b) es un diagrama de doble rendija óptico, para el cual  $b/d \approx \frac{1}{4}$ . Los límites de la intensidad impuestos por el factor de difracción de una sola rendija se indican muy adecuadamente en este caso.

Es interesante comentar el factor 4 de la ecuación (8-28). Para  $\theta = 0$  la intensidad debida a las dos rendijas es cuatro veces mayor que la debida a una sola rendija. Sin embargo, como es claro, la energía total transportada por las ondas a través de dos rendijas es sólo el doble de la que pasa por una sola rendija. El aumento en un factor de más de dos en algunas direcciones se compensa por la existencia de intensidades cero en otras direcciones, a lo largo de las líneas nodales. La interferencia es esencialmente una distribución de la energía disponible.

3. *Red de difracción.* La fórmula apropiada en este caso es la combinación de la ecuación (8-27) con la ecuación (8-24). Esto nos da

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}(N \delta/2)}{\operatorname{sen}(\delta/2)} \right]^2 \quad (8-29)$$

[Puede comprobarse que para  $N = 2$  esta expresión reproduce la ecuación (8-28).] Un estudio cuantitativo de los detalles finos de dichos diagramas de rendijas múltiples para ondas mecánicas (por ejemplo, sonidos) no es sencillo; cualquier laboratorio ordinario contiene todo tipo de superficies extrañas y objetos que difunden las ondas y dan un fondo imposible de evitar. La figura 8-29, sin embargo, exhibe las principales características del diagrama correspondiente. Éste se obtuvo (por R. W. Pohl) utilizando redes de siete rendijas y sonidos de longitud de onda de 1,45 cm.

Como sucede en el caso del sistema de doble rendija, podemos notar la redistribución de la energía disponible. Si ignoramos la variación del factor

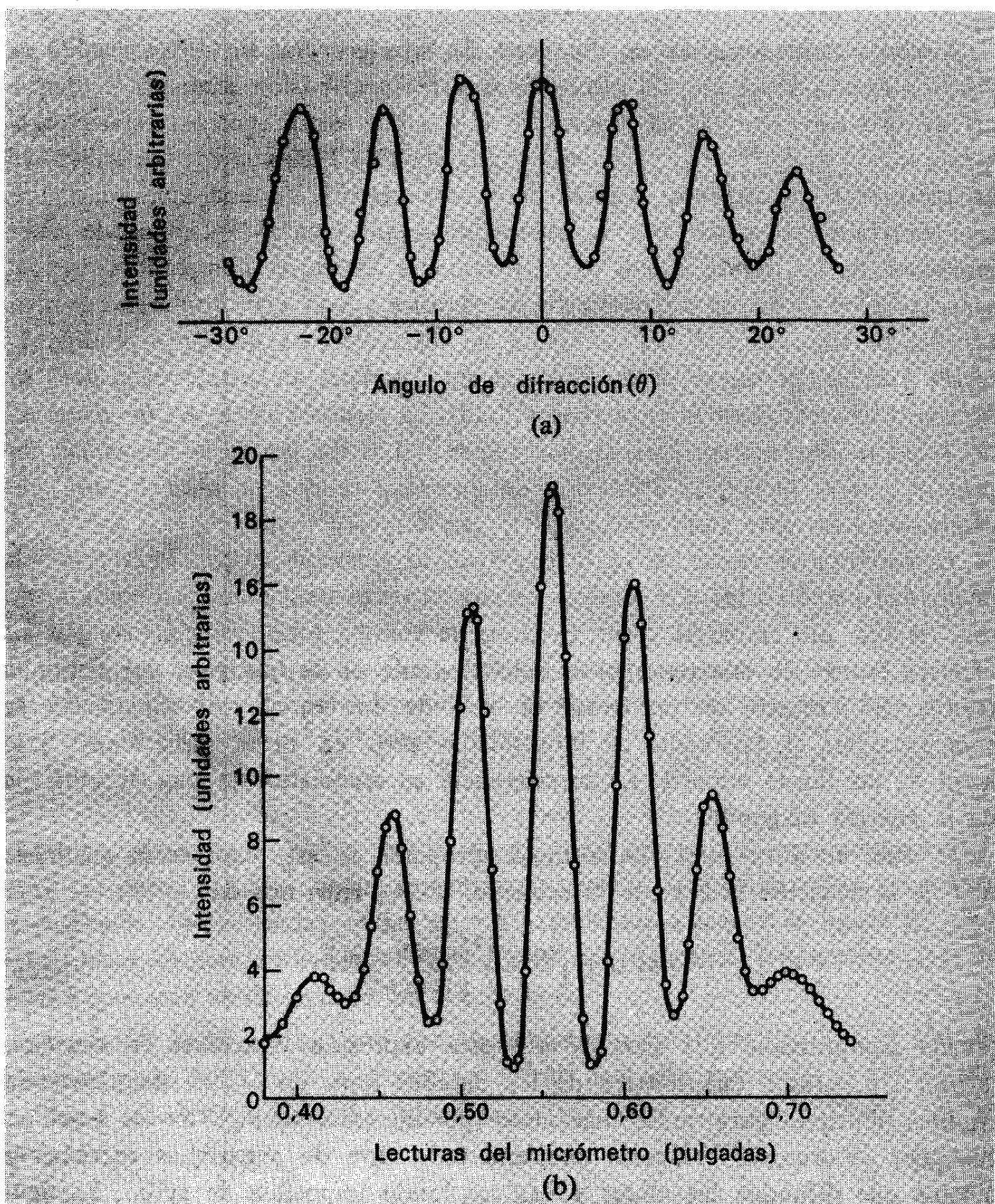


Fig. 8-28. Diagramas de difracción en una doble rendija, mostrando la influencia de la anchura de la rendija aislada. (a) Diagrama acústico con  $\lambda = 1,45 \text{ cm}$ . (Según R. W. Pohl, Physical Principles of Mechanics and Acoustics, Blackie, London, 1932.) (b) Diagrama óptico con  $\lambda = 7300 \text{ \AA}$ . [Según A. P. French, J. G. King y D. J. Cronin, "An Interference Fringe Photometer", Am. J. Phys., 33, 628 (1965).]

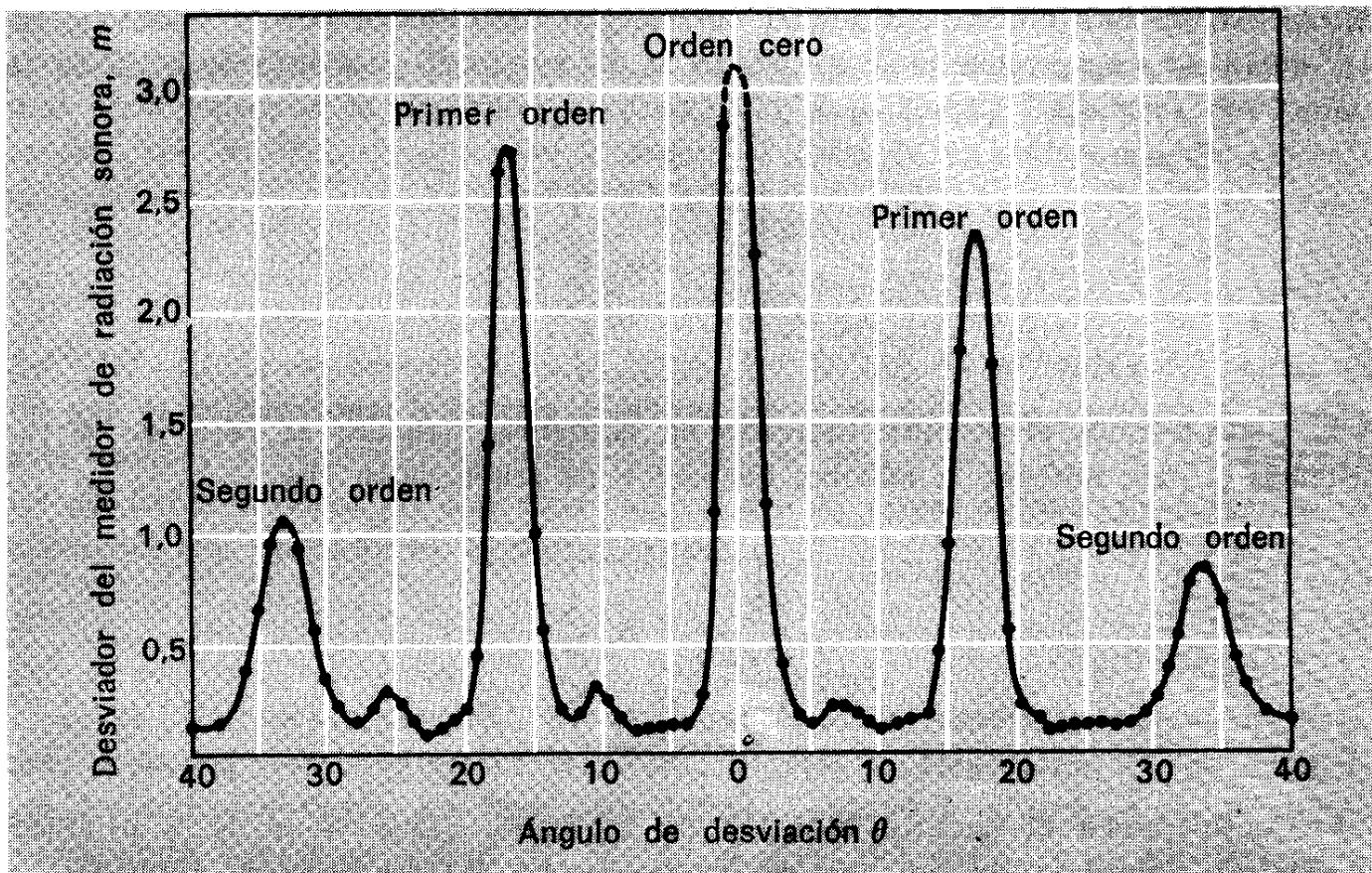


Fig. 8-29. Diagrama de intensidades de una red en difracción acústica ( $N = 7$ ) para  $\lambda = 1,45 \text{ cm}$ . (Según R. W. Pohl, Physical Principles of Mechanics and Acoustics, Blackie, London, 1932.)

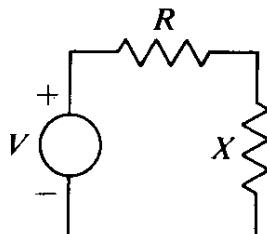
( $\sin \alpha/\lambda$ )<sup>2</sup>, cada máximo principal alcanza una intensidad igual a  $N^2$  multiplicada por la que se origina con una sola rendija. Sin embargo, la anchura de este máximo es sólo alrededor de  $1/N$  de la separación entre máximos. La combinación de estos factores da una intensidad integrada igual a  $N$  veces la debida a una sola rendija.

## PROBLEMAS

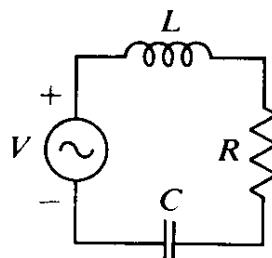
8-1 Se conectan juntas dos cuerdas de tensión  $T$  y densidades máximas  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Consideremos una onda móvil incidente sobre su límite. Hallar el cociente entre la amplitud reflejada y la amplitud incidente y el cociente entre la amplitud transmitida y la amplitud incidente en los casos en que  $\mu_2/\mu_1 = 0, 0,25, 1,4, \infty$ .

8-2 Se conectan juntas dos cuerdas de tensión  $T$  y densidades máximas  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Consideremos una onda móvil incidente en el límite entre ambas. Demostrar que el flujo de energía de la onda reflejada más el flujo de energía de la onda transmitida es igual al flujo de energía de la onda incidente. [Indicación: El flujo

energético de una onda (la densidad de energía multiplicada por la velocidad de la onda) es proporcional a  $A^2/v$ , siendo  $A$  la amplitud y  $v$  la velocidad de la onda.]



8-3 Consideremos el circuito indicado en la figura. Calcular el valor de la resistencia  $X$  para obtener la máxima disipación de potencia en ella.



8-4 Consideremos el circuito indicado en la figura. ¿Qué valor de  $\omega$  produce la máxima disipación de potencia en la resistencia  $R$ ? (Indicación: Considérese la impedancia del circuito.)

8-5 Una onda plana de sonido en el aire incide sobre la superficie del agua con incidencia normal. La velocidad del sonido en el aire es de unos 334 m/seg y la velocidad en el agua es de unos 1480 m/seg.

[Las condiciones límites apropiadas en el caso de ondas longitudinales son la continuidad del desplazamiento de una onda y de la presión de la onda. La última viene dada por  $K(\partial \xi / \partial x)$ , en donde  $K$  es el módulo de compresibilidad del medio. (Esto se deduce de  $\Delta p = -K\Delta V/V = -K\Delta \xi / \Delta x$ ). Como la velocidad de onda  $v$  viene dada por  $(K/\rho)^{1/2}$ , los coeficientes de reflexión y transmisión son expresables en términos de  $\rho$  y  $v$  solamente.]

(a) ¿Cuál es la amplitud de la onda sonora que entra en el agua, expresa da como una fracción de la amplitud de la onda incidente?

(b) ¿Qué fracción del flujo de energía incidente entra en el agua?

8-6 (a) Puede observarse que las ondas en el agua avanzan hacia la costa teniendo sus frentes de ondas casi siempre paralelos a la misma, independientemente de la dirección del viento. Observando el hecho de que la velocidad de las ondas en el agua disminuye cuando disminuye la profundidad del agua, utilizar el principio de Huygens para explicar este fenómeno.

(b) Para hacer más específico el análisis de (a), admitir que las ondas inicialmente moviéndose en dirección  $x$  entran en una región en la que su veloci-

dad  $v$  tiene una variación sistemática con la distancia  $y$  perpendicular a la dirección de movimiento. (Por ejemplo,  $x$  podría ser la dirección paralela a la costa e  $y$  sería entonces la dirección perpendicular a la costa.) Demostrar que la dirección de las ondas empezarán a seguir el arco de circunferencia de radio  $R$  tal que

$$R = \frac{v}{dv/dy}$$

8-7 (a) Como se desarrolló en el texto [Ec. (7-12)], la velocidad del sonido en un gas es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta  $T$ . Utilizar este hecho y el resultado del problema anterior para demostrar que cuando existe un gradiente térmico en dirección vertical ( $z$ ) las ondas sonoras se curvarán inicialmente con un radio de curvatura

$$R = \frac{2T}{dT/dz}$$

(b) En un día calmado, la temperatura de la atmósfera resulta disminuir más o menos linealmente con la altura. Dibujar la trayectoria de los rayos de sonido emitidos desde un foco suspendido a bastante altura en la atmósfera. Admitiendo que la velocidad del sonido al nivel del suelo es de 330 m/seg, estimar la distancia adicional horizontal a la que un avión que vuela a 4500 m empezará a resultar audible a un observador sobre el suelo, si la temperatura disminuye 1 °C por cada 150 m de aumento de altura.

8-8 (a) Un coche de policía, moviéndose a 90 km/h, pasa junto a un inocente peatón mientras suena su sirena que tiene una frecuencia de 2000 Hz. ¿Cuál es el cambio total de frecuencia de la sirena según la oirá el peatón?

(b) El coche de policía continúa por la calle cuyo extremo final está bloqueado por una pared alta de ladrillo. ¿Qué oirá el peatón cuando las reflexiones acústicas de la pared se superpongan al sonido que le llega directamente de la sirena?

8-9 Los átomos de sodio térmicamente excitados emiten luz de longitud de onda característica  $\lambda \approx 600$  Å. Resulta que la radiación de una fuente de vapor de sodio no es perfectamente monocromática, sino que contiene una distribución de longitudes de onda en el intervalo  $(6000 \pm 0,02)$  Å. Si este ensanchamiento de la línea del sodio se debe predominantemente al efecto Doppler (lo cual es cierto), determinar la temperatura aproximada de la fuente de sodio. (Velocidad de la luz =  $3 \times 10^8$  m/seg.)

8-10 Lord Rayleigh, en su famoso tratado *The Theory of Sound* (Vol. II, Sec. 298), hacía notar que si un observador pudiese alejarse de un recital de música a una velocidad exactamente el doble de la del sonido, "oiría una pieza musical en el

tiempo y tono correcto, pero en sentido temporal contrario". Aunque esto parece ciertamente posible, pensar en los detalles que encierra este resultado tan curioso.

**8-11** Las ondas sonoras se mueven horizontalmente de un foco a un receptor. Admitir que el foco tiene una velocidad  $u$ , que el receptor tiene una velocidad  $v$  (en la misma dirección) y que está soplando un viento de velocidad  $w$  desde el foco hacia el receptor. Demostrar que, si el foco emite sonido de frecuencia  $\nu_0$ , y si la velocidad del sonido en el aire calmado es  $V$ , la frecuencia que registra el receptor viene dada por

$$\nu = \nu_0 \frac{V - v + w}{V - u + w}$$

Obsérvese que si las velocidades del foco y del receptor son iguales, la existencia del viento no constituirá ninguna diferencia para la frecuencia observada de la señal recibida.

**8-12** El texto, pág. 309-310, desarrolla la teoría del efecto Doppler para una fuente o foco móvil, con un observador distante en una dirección  $\theta$  respecto al movimiento del foco. Se demuestra [Ec. (8-14)] que la frecuencia recibida viene dada por

$$\nu(\theta) = \frac{\nu_0}{1 - \frac{u \cos \theta}{v}}$$

(a) Demostrar que si el foco está en reposo y el *observador* tiene una velocidad —  $u$ , de modo que la velocidad relativa del foco y del observador es la misma que antes, la frecuencia detectada por el observador viene dada por

$$\nu'(\theta) = \nu_0 \left( 1 + \frac{u \cos \theta}{v} \right)$$

(b) Hallar la diferencia aproximada entre  $\nu$  y  $\nu'$ . Es un tema de gran importancia física el que en las ondas de la luz en el vacío no existe dicha diferencia en contraste con las ondas sonoras en el aire; sólo aparece en el resultado la velocidad *relativa* de la fuente y el observador. Ésta es una de las características reseñada en la teoría especial de la relatividad de Einstein, de acuerdo con la cual no existe ningún medio identificable respecto al cual la velocidad de la luz tenga cierta velocidad característica.

**8-13** Un foco de sonido de frecuencia  $\nu_0$  se mueve horizontalmente a velocidad constante  $u$  en la dirección  $x$  a una distancia  $h$  por encima del suelo. Un observador está situado en el suelo en el punto  $x = 0$ ; la fuente pasa sobre dicho punto cuando  $t = 0$ .

(a) Demostrar que la señal recibida en un tiempo cualquiera  $t_R$  en el suelo fue emitida por el foco en un tiempo anterior  $t_S$ , tal que

$$\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) t_S = t_R - \frac{1}{v} \left[ h^2 \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) + u^2 t_R^2 \right]^{1/2}$$

(b) Demostrar que la frecuencia de la señal recibida es una función de tiempo de *emisión*  $t_S$ , dada por

$$\nu(t_S) = \frac{\nu_0}{1 + \frac{u}{v} \cdot \frac{ut_S}{(h^2 + u^2 t_S^2)^{1/2}}}$$

(La expresión para  $\nu$  en función del tiempo de *recepción*  $t_R$  es mucho más complicada.)

(c) Se observa que la frecuencia del sonido recibido de uno de estos focos es de 5500 Hz cuando la fuente está alejada y aproximándose; y disminuye a 4500 Hz cuando la fuente está alejada y se aleja aún más. Además, se observa que la frecuencia disminuye de 5100 Hz a 4900 Hz durante un tiempo de 4 seg cuando la fuente pasa sobre nosotros. Deducir la velocidad y la altitud de la fuente. Aproximar lo necesario para simplificar el cálculo. (Este tipo de análisis se utiliza para deducir la velocidad y la altitud de los satélites terrestres a partir de la variación con el tiempo de la frecuencia recibida de un transmisor de radio del satélite.)

8-14 (a) Se coloca una fuente de sonido  $S$  de longitud de onda  $\lambda$  a una distancia pequeña  $d$  de una pared plana y reflectora. Demostrar que así se originaría un diagrama de interferencias del mismo tipo que el que se produciría si la pared estuviese ausente y se colocase una segunda fuente  $S'$  a una distancia  $d$  detrás de la pared. Probar que este "foco imagen" tendría que estar desfasado  $180^\circ$  con  $S$  y considerar las implicaciones que esto origina para el diagrama de interferencia resultante en comparación con el debido a un dispositivo normal de una fuente doble en que ambas están en fase.

(b) Si se coloca un equipo de alta fidelidad a 0,30 m de una pared, ¿qué margen de audiofrecuencias producirán dos o más franjas de interferencias en una habitación de tamaño moderado (por ejemplo, de  $3,6 \times 4,9$  m)? ¿Si estuviésemos sentados a 3,6 m del equipo, con la cabeza situada a 0,09 m de la pared, ¿qué frecuencias tenderían a ser suprimidas por efecto de las interferencias?

8-15 Consideremos una red de difracción de  $N$  rendijas estando las rendijas separadas 0,05 mm y siendo  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ .

(a) ¿Cuántos órdenes de máximos principales existen aproximadamente?

(b) ¿Cuál es el cociente de las dos amplitudes  $A$  y  $A_0$ ? ( $A_0$  es la amplitud que resultaría si  $N = 1$ .)

(c) Demostrar que la respuesta a la parte (b) se reduce al resultado dado en el texto para el caso de un sistema de dos rendijas si  $N = 2$ .

(d) Si  $N = 100$  hallar (aproximadamente) el cociente de la amplitud del primer máximo subsidiario a la del máximo principal.

8-16 Se realiza un experimento de difracción de Fraunhofer utilizando luz de longitud de onda  $5000 \text{ \AA}$  con una rendija de  $0,05 \text{ mm}$  de anchura.

(a) ¿A qué distancia deberá estar la pantalla de detección?

(b) Si se utiliza un sistema de dos rendijas, ¿cuál es el cociente entre las intensidades del primer máximo lateral y la del máximo central, si la distancia entre los centros de las rendijas (idénticas) es  $0,1 \text{ mm}$ ? ¿ $0,05 \text{ mm}$ ?

8-17 Un sonido de frecuencia  $2000 \text{ Hz}$  cae en incidencia normal sobre una pared elevada en la que existe un orificio vertical de  $45 \text{ cm}$  de ancho. Un hombre está paseando paralelo a la pared a una distancia de  $15 \text{ m}$  de ella por la parte más alejada. ¿En qué margen de distancia oirá una intensidad de sonido mayor que el  $50\%$  del valor máximo? ¿Mayor que el  $5\%$ ?

# Soluciones a los problemas

## CAPÍTULO 1

1-4 (b)  $r_1 = \sqrt{7}$ ,  $\operatorname{tg} \theta_1 = \sqrt{3}/2$ ;  $r_2 = 7$ ,  
 $\theta_2 = -2\theta_1$  ( $\operatorname{tg} \theta_2 = -4\sqrt{3}$ ).

1-9 Sí; vale casi 21 cents.

1-10  $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -B/A$ .

1-11 (a)  $A = 5$  cm;  $\omega = 2\pi \text{ seg}^{-1}$ ;  $\alpha = \pm \pi/2$ . (b) (Para  $\alpha = +\pi/2$ )  $x = 5\sqrt{3}/2$  cm;  
 $dx/dt = 5\pi$  cm/seg;  $d^2x/dt^2 = -10\sqrt{3}\pi^2$  cm/seg<sup>2</sup>.

1-12 (a)  $A = 150/\pi$  cm;  $\omega = \pi/3 \text{ seg}^{-1}$ ;  $\alpha = \pi/6$ .

(b)  $x = -75\sqrt{3}/\pi$  cm;  $dx/dt = -25$  cm/seg;  $d^2x/dt^2 = 25\pi/\sqrt{3}$  cm/seg<sup>2</sup>.

## CAPÍTULO 2

2-1 Los valores de  $(A, \alpha)$  son (a)  $\sqrt{2}, -\pi/4$ ; (b)  $1, -2\pi/3$ ; (c)  $\sqrt{13}, -\operatorname{tg}^{-1}(2/3)$ ;  
(d)  $2 - \sqrt{2}, 3\pi/4$ .

2-2  $A \approx 0,52$  mm;  $\delta \approx 33,5^\circ$ .

2-3 1 seg.

2-4 (a)  $v = 1 \text{ seg}^{-1}$ ; (b)  $6,25 \text{ seg}^{-1}$ ; (c)  $0,49 \text{ seg}^{-1}$ .

## CAPÍTULO 3

3-1  $k = 25$  dyn/cm.  $0,04 \text{ dyn/cm}$ .

3-2 (a)  $T_0 = 2\pi(m/k)^{1/2}$ ; (b)  $T_0/\sqrt{2}$ ; (c)  $\sqrt{2}T_0$ .

- 3-3 (a)  $y = 2,5$  cm; (b) 1,25 cm.
- 3-4 (a)  $\omega = (g/l)^{1/2}$ .
- 3-5  $2\pi(2L/3g)^{1/2}$ .
- 3-6  $2\pi(d/g)^{1/2}$ .
- 3-7  $y = l_0/20$ ; tensión =  $5 \times$  peso del objeto.
- 3-8 (a) 0,25 mm; (b) 0,23 m.
- 3-9 (a) 22 cm radio, 360 kg; (b) 66 seg.
- 3-10 (a)  $5,9 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>; (b)  $b/a$ ; (c) 1,5.
- 3-11 (a)  $\omega = (\gamma p A / ml)^{1/2}$ .
- 3-12 (b) ~~N~~<sup>s</sup>seg/m; (b)  $Q = 1$ .
- 3-13 (a)  $Q_0 = 512\pi/\log_e 2$ ; (b)  $2Q_0$ ; (c)  $Q = 12$ ,  $b = 0,025$  kg/seg.
- 3-16 (a)  $8\pi^4 v^3 A^2 K e^2 / c^3$ ; (b)  $mc^3 / 4\pi v K e^2$ ; (c)  $(Q \log_e 2) / 2\pi$ ; (d)  $Q \approx 2,5 \times 10^7$ ; período de semidesintegración  $\approx 5 \times 10^{-9}$  seg.
- 3-17 (d)  $2\pi(2h/g)^{1/2}$ .
- 3-19 (c)  $T_x/T_y = (1 - l_0/l)^{1/2}$ ; (d)  $x(t) = A_0 \cos(2k/m)^{1/2} t$ ,  
 $y(t) = A_0 \cos[2k(l - l_0)/ml]^{1/2} t$ .

## CAPÍTULO 4

- 4-3 (a)  $T = \pi/5\sqrt{3}$  seg; (b) 1,3 cm.
- 4-4 (b)  $(35g/36h)^{1/2}$ ; (c)  $3(h/g)^{1/2}$ ; (d)  $Q = 3$ ; (e)  $\delta = \pi/2$ ; (f) 0,90h.
- 4-5 (b) 15,7 cm; (c)  $\omega_0 \pm 0,017$  seg<sup>-1</sup>.
- 4-6 (d) Aproximadamente 200 Å.
- 4-8 (b)  $A = F_0/m\omega(\omega^2 + \gamma^2)^{1/2}$ ;  $\tan \delta = -\gamma/\omega$ .
- 4-9 (a)  $\pi b \omega A^2$ .
- 4-11 (a) 1,3 cm, 130°; (b) 0,063 J; (c) 0,30 W.
- 4-12 (a) 19,8 seg<sup>-1</sup>; (b) 1,5 cm; (c) 0,086 W.
- 4-13 (a)  $\omega_0 = 40$  seg<sup>-1</sup>,  $Q = 20$ ; (b) 16.
- 4-14 (a)  $Q = 25$ ; (b)  $\gamma = 0,04\omega_0$ ; (c)  $0,08\pi$ ; (d)  $\sqrt{2}\omega_0$ ; (e)  $\sqrt{2}Q$ ; (f)  $\bar{P}_m$ ; (g)  $E_0$ .
- 4-15 (a)  $1,005\omega_1$ ; (b)  $Q = 5$  (muy aproximadamente); (c)  $0,2(mk)^{1/2}$  (aprox.).
- 4-16 (a)  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ ; (b)  $\gamma = 1/CR$ ; (c)  $P_m = I_0^2 R/2$ .
- 4-17 (a)  $2\pi \times 10^{-5}$  J; (b)  $10^{-3}$  J; (c)  $10^{-4}$  seg.

## CAPÍTULO 5

- 5-2 (a) 1,27 seg, 1,23 seg; (b) 40 seg (aprox.).

• 5-4  $m\omega^2 = \left( \frac{k_A + k_B}{2} + k_C \right) \pm \left[ \left( \frac{k_A - k_B}{2} \right)^2 + \underbrace{k_C^2}_{\sim} \right]^{1/2}$ .

Si  $k_C^2 = k_A k_B$ ,  $\omega' = [(k_A + k_B + k_C)/m]^{1/2}$ ,  $\omega'' = (k_C/m)^{1/2}$ .

5-5  $\omega = \omega_0(1 \pm \alpha)^{-1/2}$ .

5-6 (a)  $\sqrt{6}$  seg,  $3\sqrt{2}$  seg;

(c)  $3\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/2$  seg.

5-7 (c)  $2,29 \text{ seg}^{-1}$ ; (d)  $k_c/k_0 = 1,52$ .

5-8 (d)  $(g/L)^{1/2}; [(g/L) + (2ka^2/mL^2)]^{1/2}$ .

5-9 (d)  $(11/3)^{1/2} = 1,91$ .

5-10 En el modo "lento", cociente de amplitudes (superior/inferior) =  $(\sqrt{5} - 1)/2$ ; en el modo rápido, cociente =  $(\sqrt{5} + 1)/2$ .

5-11 (b)  $\omega^2 = [k/2M] + (g/l) \pm [(k/2M)^2 + (g/l)^2]^{1/2}$ .

5-13 (a) Período =  $2\pi(2ml/3T)^{1/2}$ ; (c)  $\omega = (3T/ml)^{1/2}$ .

5-15 (c)  $(2 - \sqrt{2})^{1/2}\omega_0$ ,  $\sqrt{2}\omega_0$ ,

$(2 + \sqrt{2})^{1/2}\omega_0$ , en donde  $\omega_0 = (T/ml)^{1/2}$ .

5-16  $\alpha = \cos^{-1}[1 - (\omega^2/2\omega_0^2)]$ ;  $C = h/\sin[\alpha(N + 1)]$ .

## CAPÍTULO 6

6-1 (a)  $v_1 = 10 \text{ seg}^{-1}$ ; (b)  $v = 50, 100, 150, \dots, \text{seg}^{-1}$  (todos los múltiplos enteros de  $50 \text{ seg}^{-1}$ ).

6-2  $v_A = nv_1$  ( $n = 1, 2, 3$ ),  $v_1^2 = T/4ML$ ;

$v_B = 0,84v_1$ ,

$1,55v_1, 2,04v_1$ .

6-5  $\omega = \pi(T/LM)^{1/2}$ .

6-6 (a)  $\omega_n = [(2n - 1)\pi(Y/\rho)^{1/2}]/L$ ; (b)  $\lambda_n = L/(n - \frac{1}{2})$ ;

(c)  $x = L(n - \frac{1}{2} \pm k)/(2n - 1)$  ( $k = 0, \dots, n - 1, \dots$ ).

6-9 (b)  $A_1 = 10 \mu$ ,  $A_2 = 10(1 - 1/\sqrt{2}) \simeq 3 \mu$ .

6-10 (a)  $v_n = nc/2L$ ; (b) (1) 21, (2) 15 cm.

6-11 (a)  $(A^2 n^2 \pi^2 T)/4L$ ; (b)  $(A_1^2 + 9A_3^2)\pi^2 T/4L$ .

6-12 (a)  $TL\{(1 + (2h/L)^2)^{1/2} - 1\} \simeq 2Th^2/L$ ; (b) cada  $2(ML/T)^{1/2}$  seg.

6-14  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L)$ , en donde

$$(a) B_n = \begin{cases} 8AL^2/(n\pi)^3 & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par;} \end{cases}$$

(b)  $B_1 = A$ ,  $B_n = 0$ , si  $n \neq 1$ ;

$$(c) B_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{(n+1)/2} 4A}{\pi(n^2 - 4)} & n \text{ impar} \\ A/2 & n = 2 \\ 0 & n \text{ par, } n \neq 2. \end{cases}$$

6-15  $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ , en donde

$$(a) C_n = \begin{cases} 8AL^2 \cos(n\omega_1 t)/(n\pi)^3 & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par;} \end{cases}$$

$$(b) C_n = \begin{cases} 8BL^2 \operatorname{sen}(n\omega_1 t)/n^4\pi^3\omega_1 & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

( $\omega_1$  = frecuencia angular del modo inferior).

## CAPÍTULO 7

1.57

7-2 (a)  $A = 0,3$  cm,  $\lambda = 4$  cm,  $K = 0,25$  cm $^{-1}$ ,  $v = 25$  seg $^{-1}$ ,  $T = 0,04$  seg,  $v = 100$  cm/seg; (b)  $15\pi$  cm/seg.

7-3  $\xi = 0,003 \operatorname{sen} 2\pi[(x/600) + 5t]$ .

7-4 (a)  $\frac{1}{3}$  m; (b)  $72^\circ$ .

7-5 (a) 22,4 m/seg; (b) 2,24 m; (c)  $y(x, t) = 0,02 \operatorname{sen}(2,80x - 62,8t + 0,52)$ .

7-6 (a) 10 m; (b)  $y = A \operatorname{sen}(3\pi x/L) \cos(30\pi t)$ .

7-7  $y = \text{cero}$ ;  $\partial y/\partial t \simeq 6$  m/seg.

7-8 (a)  $v = 1,5$  Hz;

(b)  $\lambda = \frac{16}{16n-1}$  m,  $n = 1, 2, 3, \dots$  para la onda con movimiento positivo,  
 $\frac{16}{16n+1}$  m,  $n = 1, 2, 3, \dots$  para la onda con movimiento negativo;

(c)  $v = +8/5$  m/seg, etc.,  $v = -24$  m/seg, etc.;

(d) datos insuficientes.

7-12 (b)  $v_y(\text{máx}) \approx 4$  m/seg; (c)  $T = 32$  N;

(d)  $y(x, t) = 0,2 \operatorname{sen} 2\pi(8t + x/5)$ .

7-13 (b)  $v = u/2$ , dirección = + $x$ ;

$$(c) \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{4b^3 u}{(b^2 + 4x^2)^2} x.$$

7-16 (a)  $8 \times 10^{-4}$  seg; (c)  $v_{\max} = 12,5$  m/seg, durante la apertura;

(d)  $t = 1,2 \times 10^{-2}$  seg.

7-17 (a)  $y(x, t) = 2A \cos$

$$\left( \frac{x}{2} - \frac{t}{2} \right) \times \operatorname{sen} \left( \frac{9}{2}x - \frac{19}{2}t \right);$$

(b) 1 m/seg; (c)  $2\pi$  m.

7-18 (c) 50 cm.

7-20 (c) 28 m/seg  $\simeq 63$  millas/hora.

7-21 (a)  $\lambda_n = 2l(N+1)/n$ ;  $\omega_n = 2\omega_0 \operatorname{sen}[n\pi/2(N+1)]$ ;

(b)  $v_p(n) = \omega_n \lambda_n / 2\pi$ ,

$$v_\theta(n) = [2l\omega_0(N+1)/\pi] \left\{ \sin\left[\frac{(n+1)\pi}{2(N+1)}\right] - \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \right\}.$$

## CAPÍTULO 8

- 8-1  $g_1/f_1 = 1, 1/3, 0, -1/3, -1; f_2/f_1 = 2, 4/3, 1, 2/3, 0.$
- 8-3  $X = R$  para disipación máxima.
- 8-4  $\omega = (LC)^{-1/2}$  para disipación máxima cuando se dan  $L, C$  y  $R$ .
- 8-5 (a)  $5,5 \times 10^{-4}$ ; (b)  $1,1 \times 10^{-3}$ .
- 8-7 (b) Unos 32 kilómetros.
- 8-8 (a) Variación total de frecuencia = 320 Hz.
- 8-9  $T \approx 900^\circ\text{K}.$
- 8-12 (b)  $v(\theta) - v'(\theta) \approx v_0(u \cos \theta/v)^2.$
- 8-13 (c) velocidad  $\approx 0,1v = 33$  cm/seg; altura de 330 a 360 m.
- 8-14 (b) Todas las audiofrecuencias por encima de 1300 Hz; múltiplos enteros de 2200 Hz (aproximadamente).
- 8-15 (a) 100; (b)  $A/A_0 = \sin(100\pi N \sin \theta)/\sin(100\pi \sin \theta);$  (d) 1/5.
- 8-16 (a) Una distancia mucho mayor que 5 mm.  
 (b) para  $d = 0,1$  mm, el cociente es 0,44 aproximadamente; para  $d = 0,05$  mm., el cociente es 0,05 aproximadamente.
- 8-17  $I/I_{\max} \geq 0,5$  para unos 2,4 m a cada lado del máximo;  
 $I/I_{\max} \geq 0,05$  para unos 4,8 m a cada lado del máximo.

# Índice alfabético

- Amortiguamiento crítico, 80  
de las oscilaciones libres, 72
- Amplitud, 6
- Análisis armónico, 216  
de Fourier, 183, 214, 216
- Anderson, O. L., 167, 168
- Ángulo de corte, 63  
de Mach, 311
- Antinodos, 185
- Ball, Robert, 283, 284
- Barnes, R. B., 174
- Barsley, Michael, 20
- Barton, E. H., 101, 102, 106
- Barton, péndulo de, 101, 106
- Batido, 28
- Bergmann, Ludwig, 211
- Bernoulli, Daniel, 155, 190
- Bernoulli, Jean, 155
- Beyer, R. T., 274
- Bishop, R. E. D., 3
- Bloch, F., 126
- Bohr, N., 210
- Bouasse, H., 89
- Boyle, ley de, 67
- Boyle, Robert, 66
- Brillouin, León, 155
- Bunsen, R. W., 122
- Cálculo de modos normales para N osciladores acoplados, 158
- Cizalladura, 63
- Cizallamiento, módulo de, 64
- Coherencia, 315
- Compresibilidad, módulo de, 64, 67  
isotérmica, módulo de, 68
- Coordenadas normales, 144
- Corte, 263  
tensión de, 64
- Cronin, D. J., 334
- Chladni, E. F., 211
- Chladni, figuras de, 212
- Churinoff, G. J., 100
- Da Vinci, Leonardo, 257
- David, E. A., 8
- Deformación, 53  
de corte, 63  
unitaria, 53
- Densidad de energía cinética, 268
- Densímetro simple, 57
- Derivada convectiva, 256
- Diagrama polar, 331
- Diagramas de interferencias de sistemas de rendijas reales, 331  
de Moiré, 319
- Diferencia de fase, 23
- Difracción de Fraunhofer, 330  
por una sola rendija, 324
- Dispersión, 259, 260
- Doppler, Efecto, 308
- Ecuación del oscilador armónico, 49
- Eddington, sir Arthur, 266
- Efecto Doppler y fenómenos relacionados, 308
- Efectos debidos a los límites e interferencias, 285
- Elasticidad, 52  
de un gas, 199
- Energía cinética, densidad de, 268  
de una onda mecánica, 267
- Espectro completo de modos normales, 202
- Euler, Leonhard, 15
- Euler, relación de, 15
- Exponente complejo en el caso de oscilaciones forzadas, método del, 94
- Fase, diferencia de, 23
- Fenómeno de corte, 263
- Fenómenos transitorios, 104
- Feynman, R. P., 16
- Figuras de Chladni, 212

- Figuras de Lissajous, 38  
 Flujo de cantidad de movimiento y presión  
     de radiación mecánica, 273  
 Fourier, análisis de, 183, 214, 216  
 Fourier, J. B., 5, 214, 215, 216  
 Frank, N. H., 165  
 Fraunhofer, Joseph von, 121  
 Fraunhofer, difracción de, 330  
     líneas de, 121  
 Frecuencia angular, 90  
     de la pulsación, 29  
 Frecuencias normales, 145  
     método analítico general, 148  
 French, A. P., 334  
 Fresnel, J. A., 300  
 Funciones ortogonales, 220, 221  
  
 Galilei, G., 188  
 Gas, elasticidad de un, 199  
  
 Helmholtz, H., 303  
 Herb, R. G., 124  
 Herrick, Robert, 20  
 Hook, ley de, 45  
 Hooke, Robert, 1, 45, 47  
 Hudson, A. M., 209  
 Huygens, C., 300, 301  
 Huygens-Fresnell, principio de, 300  
  
 Impedancia, 293  
     característica, 295  
     eléctrica, 294  
     mecánica, 293  
     terminaciones no reflectoras, 293  
 Ingard, U., 211  
 Interferencias, 285  
     producidas por una doble rendija, 314  
     por rendijas múltiples, 320  
  
 Jenkins, F. A., 122  
  
 Kelvin, Lord, 136  
 King, J. G., 100, 334  
 Kirchhoff, G., 122, 303  
  
 Lagrange, J. L., 215  
 Laplace, P. S., de, 276  
 Leighton, R. B., 16  
 Lenz, ley de, 117  
 Ley de Boyle, 67  
     de Hooke, 45  
     de Lenz, 117  
     de Snell, 260  
  
 Límites e interferencias, efectos debidos a  
     los, 285  
 Lindsay, R. B., 274  
 Líneas de Fraunhofer, 121  
 Líquido oscilante en un tubo en U, 61  
 Lissajous, figuras de, 38  
 Lissajous, J. A., 39  
 Longitud de onda, 188  
  
 Mach, ángulo de, 311  
     número de, 311  
 Martin, W. T., 110  
 MAS, 6  
 Método del exponente complejo en el caso  
     de oscilaciones forzadas, 94  
 Miller, D. C., 184, 190, 243  
 Modos normales, 137, 185  
     de sistemas continuos, 183  
     de un sistema bidimensional, 205  
     de un sistema tridimensional, 213  
     de una red cristalina, 172  
     espectro completo de, 202  
     para N osciladores acoplados, cálculo de,  
         158  
     para N osciladores acoplados, propie-  
         dades de los, 161  
     superposición de, 142  
     y funciones ortogonales, 221  
     y ondas en movimiento, 228  
     sobre una cuerda, superposición de, 189  
 Módulo de cizallamiento, 64  
     de compresibilidad, 64, 67  
     de compresibilidad isoterma, 68  
     de elasticidad de Young, 52, 54  
     de rigidez, 64  
 Módulos elásticos, 64  
 Moiré, diagramas de, 319  
 Movimiento armónico simple, 6  
     de un pulso móvil arbitrario, 252  
     de pulsos de onda de forma constante, 251  
     estacionario del oscilador impulsado, 91  
     ondulatorio, 227  
 Movimientos periódicos, 3  
     perpendiculares con frecuencias diferentes,  
         38  
     con frecuencias iguales, 34  
     superposición de, 21  
 Muelle de aire, 65  
  
 Nodos, 185  
 Número complejo, 13  
     de Mach, 311  
     de onda, 241

- Objetos flotantes, 56  
 Onda, número de, 241  
     mecánica, energía de una, 267  
 Ondas circulares, 299  
     circulares, 299  
     de gravedad, 263  
     en dos dimensiones, 298  
     en dos y tres dimensiones, 274  
     en medios específicos, velocidades de las, 236  
     en movimiento, 228  
     esféricas, 299  
     finitas, tren móvil de, 235  
     móviles, superposición de dos, 241  
     planas, 299  
         reflexión de, 303  
         refracción de, 303  
     progresivas, 227  
     pulsos de, 242  
         en una dirección, 233  
     rectas, 299  
     sonoras, velocidad de, 237  
 Oscilaciones armónicas rápidamente amortiguadas, 76  
 de los sistemas mecánicos, 3  
 de muelles cuya masa es grande, 69  
 forzadas con amortiguamiento, 96  
     método del exponente complejo en el caso de, 94  
 libres, amortiguamiento de las, 72  
 por torsión, 62  
 Oscilador armónico, ecuación del, 49  
 impulsado, movimiento estacionario del, 91  
     potencia absorbida por un, 111  
 no amortiguado con impulsión armónica, 90  
 Osciladores acoplados, 137, 156  
     cálculo de modos normales para, 158  
     propiedades de los modos normales para, 161  
     vibración forzada y resonancia para dos, 151  
 anarmónicos, 127  
 longitudinales, 166  
 Parámetros de resonancia eléctrica, 120  
     mecánica, 120  
 Péndulo de Barton, 101, 106  
     simple, 59  
     de Wilberforce, 147  
 Péndulos, 59  
     acoplados, 139  
 Perturbaciones ondulatorias, 297  
 Pierce, J. R., 8  
 Pitágoras, 184  
 Pohl, R. W., 301, 331, 333, 334, 335  
 Polarización, 297  
 Potencia absorbida por un oscilador impulsado, 111  
 Poynting, J. H., 41  
 Principio de Huygens-Fresnel, 300  
 Problema básico masa-muelle, 47  
 Propiedades de los modos normales para N osciladores acoplados, 161  
 Pulsación, 28  
 Pulso móvil arbitrario, movimiento de un, 252  
 Pulsos de ondas, 242  
     reflexión de, 285  
     superposición de, 257  
     de forma constante, movimiento de, 251  
 Purcell, E. M., 126  
 Radiación mecánica, flujo de cantidad de movimiento y presión de, 273  
 Rayleigh, Lord (J. W. Strutt), 337  
 Red cristalina, modos normales de una, 172  
 Redes de difracción, 320  
 Reflexión de ondas planas, 303  
     de pulsos de ondas, 285  
 Refracción de ondas planas, 303  
 Reissner, E., 110  
 Relación de Euler, 15  
 Resonancia, 89  
     ejemplos de, 116  
     eléctrica, 117  
         parámetros de, 120  
         magnética nuclear, 125  
         mecánica, parámetros de, 120  
         nuclear, 123  
         óptica, 120  
 Rigidez, módulo de, 64  
 Rosenfeld, Jon, 26, 27, 29, 42, 73, 101, 106, 109, 140, 319  
 Rowland, H. A., 122  
 Runk, R. B., 167, 168  
 Sala, O., 124  
 Sands, M. L., 16  
 Sears, F. W., 287  
 Semiperíodo, 29  
 Simetría cilíndrica, 275  
     esférica, 276

- Sistema bidimensional, modos normales de un, 205  
 masa-alambre, 48  
 masa-muelle, 48  
 tridimensional, modos normales de un, 213  
 Sistemas continuos, modos normales de, 183  
 Slater, J. C., 165  
 Snell, ley de, 260  
 Snowden, S. C., 124  
 Sommerfeld, A., 210  
 Número complejo, 13  
 Sonido, 237  
 Starling, E. H., 4  
 Straub, H., 4  
 Stull, J. L., 167, 168  
 Superposición, 240  
   de dos vibraciones de igual frecuencia, 22  
   de modos normales, 142  
   de modos sobre una cuerda, 189  
   de movimientos, 21  
     paralelos y perpendiculares, 40  
   de muchas vibraciones de la misma frecuencia, 30  
   de ondas móviles, 241  
   de pulsos de ondas, 257  
   de vibraciones de frecuencias diferentes, 24  
   paralela, 43  
   perpendicular, 43
- Taylor, teorema de, 15  
 Tensión, 54  
   de corte, 64  
 Teorema de Taylor, 15  
 Thomson, J. J., 41  
 Torre de Texas, 100  
 Transporte de energía mediante una onda, 271  
 Tren móvil de ondas finitas, 235  
 Tucker, W. S., 41  
 Van Bergeijk, M. A., 8  
 Variaciones libres de cuerdas alargadas, 184  
 Vectores rotatorios, 10  
 Velocidad de fase, 262  
   y de grupo, 259  
   de grupo, 262  
   de ondas sonoras, 237  
 Velocidades de las ondas en medios específicos, 236  
 Vibración armónica forzada de una cuerda tensa, 191  
   forzada y resonancia para dos osciladores acoplados, 151  
 Vibraciones, 3  
   de columnas de aire, 197  
   estacionarias, 184  
   forzadas, 89  
   libres de los sistemas físicos, 47  
   longitudinales de una varilla, 193  
   perpendiculares, 32  
   sinusoidales, 4  
   superpuestas en una dimensión, 21  
 Vinci, Leonardo da, 257
- Waller, Mary, 212  
 White, H. E., 122  
 Wiener, Norbert, 181  
 Wilberforce, L. R., 147  
 Wilberforce, péndulo de, 147  
 Wollaston, W. H., 122  
 Wood, Alexander, 89
- Young, módulo de elasticidad de, 52, 54  
 Young, Thomas, 54, 315
- Zemansky, M. W., 287