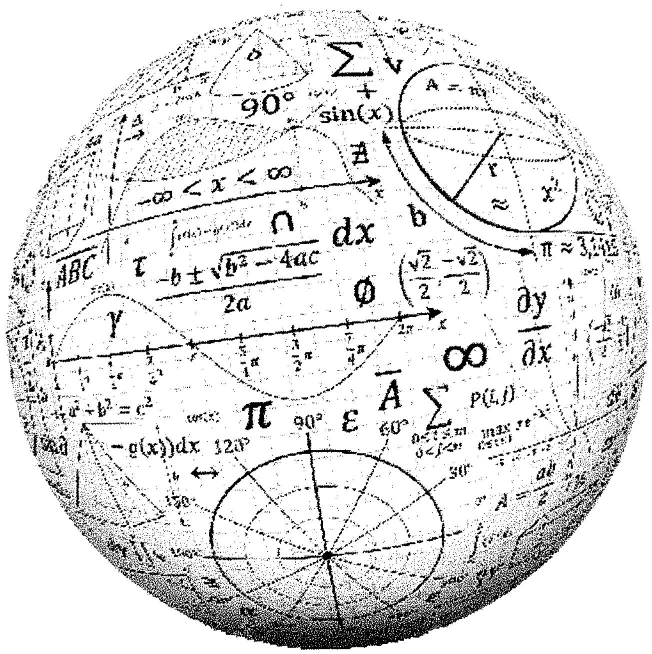
MÓDULO I
"MÉTODO DE BRACKETS"



Submódulo II : Método de Brackets

Sección I - Conceptos preliminares

A).- **El Bracket** ☑

B).- **Propiedades básicas** ☑

C).- **Series de brackets** ☑

D).- **Teorema de sumación múltiple** ☑

E).- **Serie de brackets de un multinomio** ☑

F).- **Integración y brackets** ☑

Método de Brackets
(Method of Brackets: MoB)

¿Qué es el método de Brackets?

MoB es una técnica de cálculo cuyo objetivo es la evaluación de integrales multidimensionales de la forma:

$$I = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Esta técnica está basada en un procedimiento de carácter heurístico y tiene su origen en la representación integral de la función Gamma.

Dado su origen semiriguroso, en esta sección mostraremos MoB como un secuencia de:

- Definiciones
- Teoremas
- Reglas (conclusiones empíricas)

A manera de motivar el aprendizaje de esta técnica diremos que MoB transforma una integral a una estructura matemática que denominaremos SERIE DE BRACKETS. La solución (suma) de esta serie se encuentra resolviendo un sistema de ecuaciones lineales que la misma técnica genera al aplicar sus procedimientos a una integral.

Del punto de vista de la complejidad de las herramientas matemáticas requeridas para evaluar integrales múltiples, MoB reemplaza la necesidad de cálculo avanzado por herramientas de álgebra lineal básica, el conocimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

(I) —— CONCEPTOS PRELIMINARES ——

(A) El Bracket

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, se define el bracket con argumento $\alpha \Rightarrow \langle \alpha \rangle$, como la siguiente integral divergente:

(51) $$\langle \alpha \rangle \equiv \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, dx$$ **DEFINICIÓN I** (BRACKET)

Obs. Es evidente que la integral tiende a $+\infty$ o $-\infty$ si $Re(\alpha) \geq 1$ o $Re(\alpha) < 1$ respectivamente, desde este punto de vista el bracket $\langle \alpha \rangle$ corresponde a una estructura matemática "singuler" y "extraña".

(B) Propiedades básicas

(52) $$\langle \alpha\beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|}\langle \beta \rangle = \frac{1}{|\beta|}\langle \alpha \rangle$$ **TEOREMA I** (DE ESCALAMIENTO)

(53) $$\langle -\alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$$ **TEOREMA II** (DE SIMETRÍA)

(54) $\langle \alpha n+\beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|}\left\langle n+\frac{\beta}{\alpha}\right\rangle$ TEOREMA III (DE ESCAMIENTO GENERALIZADO)

TAREA I

Demuestre el teorema de simetria a partir de la representación integral del bracket.

TAREA II

Demuestre el teorema de escalamiento generalizado. Ver Ec. (54).

(c) Series de Brackets

El bracket como estructura matemática es dependiente de parametros (argumentos del bracket), los cuales eventualmente pueden ser índices de suma, por tanto también es posible construir sumas de brackets de la forma:

(55) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n C(n) \langle n+\alpha \rangle$

Donde hemos definido el factor ϕ_n, tal que:

$$(56) \quad \phi_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}$$

DEFINICIÓN II
(INDICADOR)

El factor $C(n)$ es un coeficiente arbitrario dependiente del índice de suma n. La Ec. (55) es posible sumarla utilizando la siguiente regla de sumación:

$$(57) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \, C(n) \langle n+\alpha \rangle = C(-\alpha)\,\Gamma(\alpha)$$

REGLA I
(DE SUMACIÓN)

Más adelante mostraremos como se encuentra esta regla de suma. De la Ec. (57) y en el contexto de una suma discreta se cumple:

$$(58) \quad n \langle n \rangle = 0$$ **TEOREMA IV**

$$(59) \quad F(n) \langle n+\beta \rangle = F(-\beta) \langle n+\beta \rangle$$ **TEOREMA V**

La regla de sumación presentada en Ec. (57) nos permite concluir que los brackets simplifican una suma, desde el punto de vista de lo operacional, la regla de sumación se puede reducir a un algoritmo:

$$\Downarrow$$

Si tenemos la suma $\sum_n \phi_n C(n) \langle n+\alpha \rangle$, el bracket cumple las siguientes tareas:

a) Elimina la suma $\sum_n$

b) Elimina el factor ϕ_n

c) Genera una función Gamma $\Gamma(-n)$

d) Realiza la evaluación $n=-\alpha$, que equivale a anular el argumento del bracket, esto es, a resolver la ecuación $n+\alpha=0$.

TAREA III

Demuestre las siguientes igualdades:

a) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n \, 4^n \langle n+3/2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{16}$$

b) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n \, A^{2n} \langle 3n+1/2 \rangle = \frac{2}{3} A^{-1/3} \frac{\pi}{\Gamma(5/6)}$$

c) $$\sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} \phi_n \phi_m \, 3^{m+n} \langle n+1 \rangle \langle n+m+1/2 \rangle$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi}$$

TAREA IV

Demuestre que la siguiente serie de brackets tiene dos resultados posibles si aplicamos la regla de sumación de la Ec. (57):

$$S = \sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} \phi_n \phi_m \, A^n B^m \langle n+m+1 \rangle .$$

TAREA I | Solución

Demostrar que $\langle -a \rangle = \langle a \rangle$.

de la definición de un bracket se cumple que:

$$\langle -a \rangle = \int_0^\infty t^{-a-1}\, dt \;;\quad \text{si hacemos } u = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u}$$

lo que implica que $dt = -\frac{du}{u^2}$ y $\int_0^\infty dt \Rightarrow \int_\infty^0$

$$\therefore \langle -a \rangle = \int_\infty^0 u^{a+1}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_\infty^0 u^{a-1}\, du$$

$$= \int_0^\infty u^{a-1}\, du \equiv \langle a \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\therefore \langle -a \rangle = \langle a \rangle$$

TAREA II | Solución

Se tiene que $\langle \alpha\beta \rangle = \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1}\, dt$ (TEOREMA II)

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$t^\alpha = y \Rightarrow t = y^{1/\alpha} \Rightarrow dt = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty dt \Rightarrow \int_0^\infty dy$$

$$\therefore \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1}\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty y^{\beta-1}\, dy = \frac{1}{\alpha}\langle \beta \rangle$$

Por otro lado se cumple que:

$$\langle \alpha' \beta \rangle = \frac{1}{\alpha'} \langle \beta \rangle$$ si hacemos $\alpha' = -\alpha$

entonces:

$$\langle -\alpha \beta \rangle = \frac{1}{-\alpha} \langle \beta \rangle$$, por el teorema de simetría además se cumple que:

$$\langle -\alpha \beta \rangle = \langle \alpha \beta \rangle$$

lo que nos permite concluir que si

$$\langle -\alpha \beta \rangle = \langle \alpha \beta \rangle$$ entonces el resultado debe ser independiente del signo de α, esto es:

$$\langle \alpha \beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle \beta \rangle$$

QED.

Ahora es caso $\langle \alpha n + \beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle n + \beta/\alpha \rangle$ se demuestra fácilmente, esto es

$$\langle \alpha n + \beta \rangle = \langle \alpha (n + \beta/\alpha) \rangle$$

luego utilizando el resultado antes obtenido, se cumple que:

$$\langle \alpha n + \beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle n + \beta/\alpha \rangle$$

QED.

TAREA III | Solución

a) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n 4^n \langle n+3/2\rangle = 4^n \Gamma(-n)\Big|_{n=-3/2}$$

$$= 4^{-3/2}\, \Gamma(3/2)$$

$$= 2^{-3}\, \Gamma(1/2+1)$$

$$= \frac{1}{8}\, \frac{1}{2}\, \Gamma(1/2) = \frac{1}{16}\sqrt{\pi} \quad \text{QED.}$$

b) $$\sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \langle 3n+\tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \frac{1}{|3|}\langle n+\tfrac{1}{6}\rangle$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \langle n+\tfrac{1}{6}\rangle$$

$$= \frac{1}{3} A^{2n}\, \Gamma(-n)\Big|_{n=-1/6}$$

$$= \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}}\, \Gamma(1/6)$$

$$= \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}}\, \frac{\Gamma(1/6)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(5/6)}$$

$$= \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}}\, \frac{\Gamma(1-5/6)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(5/6)}$$

donde $\Gamma(1-5/6)\Gamma(5/6) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi . 5}{6}\right)} = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

Finalmente

$$\sum_{n\geq 0} \phi_n A^{2n} \langle 3n+1/2\rangle = \frac{2}{3} A^{-\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\Gamma(5/6)} \quad \text{QED.}$$

c) $\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} \phi_n \phi_m 3^{m+n} \langle n+1\rangle \langle n+m+1/2\rangle = I$

Hay varias formas de evaluar esta suma doble, escogeremos tomar el bracket $\langle n+1\rangle$ para eliminar la suma en n:

$$I = \sum_{m\geq 0} \phi_m 3^m \left[\sum_{n\geq 0} \phi_n 3^n \langle n+m+1/2\rangle \langle n+1\rangle \right]$$

$$= \sum_{m\geq 0} \phi_m 3^m \left[3^n \langle n+m+1/2\rangle \Gamma(-n) \right]_{n=-1}$$

$$= \sum_{m\geq 0} \phi_m 3^m 3^{-1} \langle -1+m+1/2\rangle \cancel{\Gamma(1)}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} \sum \phi_m 3^m \langle m-1/2\rangle \quad \text{Finalmente}$$

$$= \frac{1}{3} \; 3^m \Gamma(-m) \Big|_{m=1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(-1/2)\Gamma(-1/2)}{(-1/2)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Gamma(1-1/2)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi} \quad \text{QED.}$$

Ud. puede probar otras combinaciones suma-bracket, la solución de esta suma es independiente de esta elección.

TAREA IV | Solución

La suma $S = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} A^n B^m \langle n+m+1 \rangle$

CASO 1:

Dejaremos el índice n libre (dejaremos la sume $\sum_{n \geq 0}$ y eliminaremos o sumemos $\sum_{m \geq 0}$)

$\therefore$

$$S_n = \sum_{n \geq 0} \phi_n A^n \left[\sum_{m \geq 0} \phi_m B^m \langle n+m+1 \rangle \right]$$

$$= \sum_{n \geq 0} \phi_n A^n B^m \Gamma(-m) \Big|_{m=-n-1}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \phi_n A^n B^{-n-1} \Gamma(n+1)$$

$$(*) \quad S_n = \frac{1}{B} \sum_{n \geq 0} \underbrace{\Gamma(n+1)}_{\Gamma(n+1)=\Gamma(1)(1)_n} \frac{\left(-\frac{A}{B}\right)^n}{n!} = \frac{1}{B} \, {}_1F_0\left(\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{A}{B} \right)$$

CASO 2:

Indice m libre (nos quedamos con la sume $\sum_{m \geq 0}$),

entonces:
$$S_m = \sum_{m \geq 0} \phi_m B^m \left[\sum_{n \geq 0} \phi_n A^n \langle n+m+1 \rangle \right]$$

$$\Downarrow$$

$$S_m = \sum_{m\geq 0}{}' \phi_m B^m A^n \Gamma(-n)\Big|_{n=-m-1}$$

$$= \sum_{m\geq 0} \phi_m B^m A^{-m-1} \Gamma(m+1)$$

$$= \frac{1}{A} \sum_{m\geq 0}{}' \phi_m \Gamma(m+1) \left(\frac{B}{A}\right)^m$$

$$= \frac{1}{A} \sum_{m\geq 0} \phi_m (1)_m \left(\frac{B}{A}\right)^m$$

$$(**) \quad S_m = \frac{1}{A} \sum_{m\geq 0} (1)_m \frac{\left(-\frac{B}{A}\right)^m}{m!} = \frac{1}{A}\, {}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix}\Big| -\frac{B}{A}\right)$$

Finalmente, se observa que se obtienen dos términos S_n y S_m, en principio distintos, sin embargo, recordando que

$${}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}\Big| x\right) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}, \text{ se observa que:}$$

$$\Downarrow$$

$$S_n = \frac{1}{B}\, {}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix}\Big| -\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{B} \frac{1}{\left(1+\frac{A}{B}\right)} = \frac{1}{A+B}$$

y

$$S_m = \frac{1}{A}\, {}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix}\Big| -\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A} \frac{1}{\left(1+\frac{B}{A}\right)} = \frac{1}{A+B}$$

En conclusión, el resultado final es independiente de como sumemos usando los brackets.

(D) TEOREMA DE SUMACIÓN MULTIPLE

En el enunciado dado en Ec. (57) respecto a como sumar series de brackets, se muestra la versión en términos de suma simple, la extensión de esta regla al caso multisuma será descrito a continuación.

Sea

(60) $$J = \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_r} \phi_{n_1} \cdots \phi_{n_r} \, C(n_1, \ldots, n_r)$$

$$\times \langle a_{11}n_1 + \cdots + a_{1r}n_r + c_1 \rangle \cdots \langle a_{r1}n_1 + \cdots + a_{rr}n_r + c_r \rangle$$

Una serie de brackets de r sumas y r brackets, donde $C(n_1, \ldots, n_r)$ el coeficiente de la serie. El resultado de es serie es:

(61) $$J = \frac{1}{|\det A|} \, C(n_1^*, \ldots, n_r^*) \, \Gamma(-n_1^*) \ldots \Gamma(-n_r^*)$$

TEOREMA **VI**
(DE SUMACIÓN MÚLTIPLE)

donde A esta definida como la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \tag{62}$$

y $\{n_i^*\}$ $(i=1,\ldots,r)$ las soluciones del sistema de ecuaciones generado al anular los brackets:

$$\begin{cases} a_{11}n_1 + \ldots + a_{1r}n_r = -C_1 \\ \vdots \\ a_{r1}n_1 + \ldots + a_{rr}n_r = -C_r \end{cases} \tag{63}$$

TAREA V

Utilizando la regla de sumación simple dada en Ec. (57), halle la solución de la siguiente serie de brackets:

$$J = \sum_{n_1}\sum_{n_2} \phi_{n_1}\phi_{n_2}\, C(n_1,n_2) \langle a_{11}n_1 + a_{12}n_2 + C_1\rangle \langle a_{21}n_1 + a_{22}n_2 + C_2\rangle$$

para el caso $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 2$, $a_{22} = 2$

$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 0$

(E) SERIE DE BRACKETS DE UN MULTINOMIO

Un multinomio es un expresión matemática cuya estructura genérica es la siguiente:

(64) $M = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$

Si $n=2$ entonces tenemos un binomio, para $n=3$ un trinomio, etc. Lo que nos interesa es hallar una expansión que represente a este multinomio y en el contexto de MoB enunciamos el siguiente teorema:

Dado un multinomio de n términos elevado a una potencia arbitraria, la representación en serie de brackets está dada por la siguiente identidad:

(65) $$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)^{-\alpha} = \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \phi_{k_1} \cdots \phi_{k_n} A_1^{k_1} \cdots A_n^{k_n} \times \frac{\langle \alpha + k_1 + \cdots + k_n \rangle}{\Gamma(\alpha)}$$

TEOREMA VII (DE EXPANSIÓN MULTINOMIAL)

TAREA VI Demuestre el teoreme multinomial

TAREA VII Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

a) Halle la expansión en serie en potencies de x

b) Halle la expansión en serie en potencias de $\dfrac{1}{x}$

c) Halle la expansión multinomial de $f(x)$. De acuerdo al teorema VI se obtendrá una serie de brackets con 2 sumas y 1 bracket. A partir de esto evalúe la serie de brackets resultante de la dos formas posibles en este caso.

d) De acuerdo a los resultados previos, ¿qué puede concluir acerca del significado de la represen_tación en serie de brackets de este binomio?

(F) INTEGRACIÓN Y BRACKETS

El Método de Brackets tiene como objetivo la integración, en este contexto es que presentamos un simple procedimiento para evaluar integrales:

a) El probleme

(66) $$\text{Sea } I = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

b) La expansión del integrando

Suponemos que conocemos la expansión en serie de potencias para $f(x)$, esto es:

(67) $$f(x) = \sum_{n \geq 0} \phi_n F(n)\, x^{\alpha n + \beta - 1}$$

c) La inversión de sumas ⇒ continua ⇌ discreta

Esto es:

$$I = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \phi_n F(n)\, x^{\alpha n + \beta - 1} \right] dx$$

$$I = \sum_{n \geq 0} \phi_n F(n) \underbrace{\int_0^{\infty} x^{\alpha n + \beta - 1}\, dx}_{\langle \alpha n + \beta \rangle}$$

$$I = \sum_{n\geq 0} \phi_n F(n) \langle \alpha n+\beta \rangle \quad ; \quad \langle \alpha n+\beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle n+\beta/\alpha \rangle$$

(67) $$I = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{n\geq 0} \phi_n F(n) \langle n+\tfrac{\beta}{\alpha} \rangle$$

Finalmente, con uso de la regla de sumación se tiene que:

$$I = \frac{1}{|\alpha|} F(n)\Gamma(-n) \Big|_{n=-\frac{\beta}{\alpha}}$$

(68) $$I = \frac{1}{|\alpha|} F\left(-\tfrac{\beta}{\alpha}\right)\Gamma\left(\tfrac{\beta}{\alpha}\right)$$

Lo anterior se resume en el siguiente teorema:

Sea $f(x) = \sum_{n\geq 0} \phi_n F(n)\, x^{\alpha n+\beta-1}$, entonces

(69) $$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{|\alpha|} F\left(-\tfrac{\beta}{\alpha}\right)\Gamma\left(\tfrac{\beta}{\alpha}\right)$$ TEOREMA $\underline{\overline{\text{VIII}}}$

(DE INTEGRACIÓN)

TAREA V | Solución

$$J = \sum_{n_1}\sum_{n_2} \phi_{n_1}\phi_{n_2} C(n_1,n_2) \langle n_1+2n_2+\tfrac{1}{2} \rangle \langle 2n_1+2n_2 \rangle$$

Usaremos el bracket $\langle 2n_1+2n_2 \rangle$ y eliminaremos la suma $\sum_{n_2}$, entonces:

$$J = \sum_{n_1} \phi_{n_1} \left[\sum_{n_2} \phi_{n_2} C(n_1,n_2) \langle n_1+2n_2+\tfrac{1}{2} \rangle \langle 2n_1+2n_2 \rangle \right]$$

Obs. $\langle 2n_1+2n_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle n_1+n_2 \rangle$

$$\therefore \; J = \frac{1}{2} \sum_{n_1} \phi_{n_1} \underbrace{\left[\sum_{n_2} \phi_{n_2} C(n_1,n_2) \langle n_1+2n_2+\tfrac{1}{2} \rangle \langle n_1+n_2 \rangle \right]}$$

$$C(n_1,n_2) \langle n_1+2n_2+\tfrac{1}{2} \rangle \Gamma(-n_2) \Big|_{n_2=-n_1}$$

$$\Downarrow$$

$$C(n_1,-n_1) \langle n_1-2n_1+\tfrac{1}{2} \rangle \Gamma(n_1)$$

luego

$$J = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n_1} \phi_{n_1} C(n_1,-n_1) \Gamma(n_1) \langle -n_1+\tfrac{1}{2} \rangle}$$

$$C(n_1,-n_1)\Gamma(n_1)\Gamma(-n_1) \Big|_{n_1=1/2}$$

Finalmente

$$J = \frac{1}{2}\, C\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \Gamma(1/2)\Gamma(-1/2)$$

$$= \frac{1}{2}\, C(1/2, -1/2)\, \sqrt{\pi}\, \left(-2\sqrt{\pi}\right)$$

$$= -\, C\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \pi$$

El uso del teoreme de sumación múltiple de Ec. (67) nos da los siguiente:

$$J = \frac{1}{|\det A|}\, C(n_1^*, n_2^*)\, \Gamma(-n_1^*)\Gamma(-n_2^*)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

y n_1^* y n_2^* son soluciones del sisteme de ecs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el cual es generado al anular los brackets.

$$\Downarrow$$

$$n_1 = 1/2$$
$$n_2 = -1/2$$

$\therefore$ $J = \frac{1}{2}\, C(1/2, -1/2)\, \Gamma(-1/2)\Gamma(1/2) = -\, C(1/2, -1/2)\, \pi$

Resultado obtenido al hacer el cálculo iteradamente.

TAREA VI | Solución

Usamos la identidad vectorial siguiente:

$$\frac{1}{B^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-Bt}\, dt .$$

si $B = (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)^\alpha$, luego

$$\frac{1}{(A_1 + \cdots + A_n)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-(A_1+\cdots+A_n)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-A_1 t} \cdots e^{-A_n t}\, dt$$

donde $e^{-A_i t} = \sum_{k_i} \phi_{k_i} A_i^{k_i} t^{k_i} \quad (\forall i \in [1,n])$

entonces

$$\frac{1}{(A_1 + \cdots + A_n)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left[\sum_{k_1} \cdots \sum_{k_n} \phi_{k_1} \cdots \phi_{k_n} A_1^{k_1} \cdots A_n^{k_n} \times t^{k_1+\cdots+k_n} \right] dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_n} \phi_{k_1} \cdots \phi_{k_n} A_1^{k_1} \cdots A_n^{k_n} \times \int_0^\infty t^{\alpha+k_1+\cdots+k_n-1}\, dt$$

la integral es igual al bracket $\langle \alpha + k_1 + \dots + k_n \rangle$

Finalmente:

$$\frac{1}{(A_1 + \dots + A_n)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \phi_{k_1} \dots \phi_{k_n} A_1^{k_1} \dots A_n^{k_n} \frac{\langle \alpha + k_1 + \dots + k_n \rangle}{\Gamma(\alpha)}$$

QED

TARERA VII | Solución

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, la expansión en serie de esta función corresponde a la serie geométrica:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-x)^n \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{1}{1+x} = {}_1F_0\left(\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \middle| -x \right)$$

Se observa que la serie tiene un radio de convergencia $R = 1$, ∴ solo es útil para $|x| < 1$ (convergencia absoluta).

b) Por otro lado $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x} + 1\right)} = \dfrac{1}{x} \dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{x} \right)^n = \frac{1}{x} \, {}_1F_0\left(\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{x} \right)$$

Se observa que esta serie es útil para $|x| > 1$.

c) Utilizando la expansión multinomial obtenemos la siguiente serie de brackets:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n_1}\sum_{n_2} \phi_{n_1}\phi_{n_2} \cancel{(1)}^{n_1} x^{n_2} \frac{\langle 1+n_1+n_2 \rangle}{\cancel{\Gamma(1)}}$$

$$= \sum_{n_1}\sum_{n_2} \phi_{n_1}\phi_{n_2} x^{n_2} \langle 1+n_1+n_2 \rangle \quad (*)$$

i) Ahora bien podemos usar el bracket para sumar $\sum_{n_2}$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n_1}\phi_{n_1} \underbrace{\left[\sum_{n_2}\phi_{n_2} x^{n_2}\langle 1+n_1+n_2\rangle\right]}_{x^{n_2}\Gamma(-n_2)\big|_{n_2=-n_1-1}}$$

$$= \sum \phi_{n_1} x^{-n_1-1}\Gamma(n_1+1)$$

$$= \frac{1}{x}\sum_n \frac{(-1)^n}{\cancel{n!}} x^{-n} \cancel{\Gamma(n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{x}\right)^n$$

ii) Ahora con el bracket eliminamos la suma $\sum_{n_1}$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n_2\geq 0}\phi_{n_2} x^{n_2}\left[\sum_{n_1}\phi_{n_1}\langle 1+n_1+n_2\rangle\right]$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n_2 \geq 0} \phi_{n_2} x^{n_2} \left[\Gamma(-n_1) \right] \Big|_{n_1 = -n_2 - 1}$$

$$= \sum_{n_2 \geq 0} \frac{(-1)^{n_2}}{\cancel{n_2!}} x^{n_2} \cancel{\Gamma(n_2+1)}$$

Finalmente

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-x)^n$$

d) del item (c) se observa que la serie de brackets del binomio $(1+x)^{-1}$ representa de manera simultánea la expansión en torno a $x=0$ (resultado en (ii)) y la expansión en torno a $x \to \infty$ (resultado en (i)).

Extendiendo esta idea podemos decir que la expansion multinomial como serie de brackets representa expansiones en torno a $x=0$ y en torno a $x \to \infty$ de forma simultánea, a diferencia de una serie de Taylor que solo hace referencia a una expansión respecto a un único punto.

MÉTODO DE BRACKETS

RESUMEN I

NOTACIÓN + DEFINICIÓN + REGLAS + TEOREMAS

DEF. 1: Definición de un bracket

$$\langle \alpha \rangle \equiv \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, dx$$

TEOR. 1: Teorema de escalamiento

$$\langle \alpha\beta \rangle = \frac{1}{|\alpha|}\langle \beta \rangle = \frac{1}{|\beta|}\langle \alpha \rangle$$

TEOR. 2: Teorema de simetría

$$\langle -\alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$$

DEF. 2: Definición del Indicador

$$\phi_n = \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}$$

REGLA 1: Regla de sumación

$$\sum_{n\geq 0} \phi_n\, C(n) \langle n+\alpha \rangle = C(-\alpha)\Gamma(\alpha)$$

donde $C(n)$ = coeficiente arbitrario

TEOR.3: Teorema de escalamiento generalizado

$$\langle \alpha n+\beta\rangle = \frac{1}{|\alpha|}\langle n+\frac{\beta}{\alpha}\rangle$$

NOTACIÓN 1: Simplificación de la notación

$$\sum_{n} = \sum_{n\geq 0}$$

TEOR.4: Válido en contexto de una serie de brackets

$$n\langle n\rangle = 0$$

TEOR.5: Válido en contexto de una serie de brackets

$$F(n)\langle n+\alpha\rangle = F(-\alpha)\langle n+\alpha\rangle$$

NOTACIÓN 2: Simplificación del producto de indicadores

$$\phi_{n_1} = \phi_1$$

$$\phi_{n_1}\phi_{n_2}\cdots\phi_{n_N} = \phi_{1,2,\dots,N}$$

TEOR. 6: Teorema de sumación múltiple

$$\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_r}\phi_{1,2,\ldots,r}\, C(n_1,\ldots,n_r)\,\langle a_{11}n_1+\ldots+a_{1r}n_r+c_1\rangle\ldots\langle a_{r1}n_1+\ldots+a_{rr}n_r+c_r\rangle$$

$$=\frac{1}{|\det(A)|}\, C(n_1^*,\ldots,n_r^*)\,\Gamma(-n_1^*)\ldots\Gamma(-n_r^*)$$

con $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{pmatrix}$ y el vector $\begin{pmatrix} n_1^*\\ \vdots\\ n_r^*\end{pmatrix}=\vec{n}^*$

solución de la ecuación:

$$\vec{n}^*=A^{-1}\vec{c} \qquad \text{donde } \vec{c}=\begin{pmatrix}-c_1\\ \vdots\\ -c_r\end{pmatrix}$$

TEOR. 7: Teorema de expansión multinomial

$$\frac{1}{(A_1+\ldots+A_n)^{\alpha}}=\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_n}\phi_{1,\ldots,n}\,A_1^{k_1}\ldots A_n^{k_n}\,\frac{\langle \alpha+k_1+\ldots+k_n\rangle}{\Gamma(\alpha)}$$

TEOR. 8: Teorema de integración

Si $f(x)=\sum_n \phi_n F(n)\, x^{\alpha n+\beta-1}$ entonces

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{|\alpha|}\,F\!\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\Gamma\!\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Evalúe con MoB la siguiente integral

$$I = \int_0^\infty t^{-5/2} e^{-t} dt$$

Obs. Esta integral diverge

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty t^{-3/2-1} e^{-t} dt$$

* PASO 1 EXPANSIÓN INTEGRANDO del pto. de vista riguroso

$$e^{-t} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} t^n = \sum_n \phi_n t^n$$

PASO 2 REPRESENTACIÓN EN SERIE DE BRACKETS.

$$* \; I = \sum_n \phi_n \underbrace{\int_0^\infty t^{-5/2+n} dt}_{\langle -3/2+n \rangle}$$

$$I = \sum_n \phi_n \langle -3/2+n \rangle$$

$$\Downarrow$$

* PASO 3 Evaluar la ecuación para n

$$-\frac{3}{2} + n = 0 \Longrightarrow n = 3/2$$

y con uso de la regla de sumación se tiene que:

* PASO 4

$$I = \Gamma(-n)\Big|_{n=3/2} = \Gamma(-3/2)$$

Como conclusión se puede decir que en la integral: $\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$; se requiere que $\alpha > 0$ para su existencia, con MoB la extensión analítica para α negativos es automática, no se requieren procedimientos extras para hacer dicha tarea, MoB resuelve sin importar las condiciones de existencia.

---

2) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi/2$

PASO 1| $$\operatorname{sen} x = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} x^{2n+1}$$

PASO 2| $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \int_0^\infty x^{2n}\,dx$$

$$= \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \langle 2n+1 \rangle$$

pero $\langle 2n+1 \rangle = \frac{1}{2}\langle n+\frac{1}{2} \rangle$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{1}{2} \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \langle n+\tfrac{1}{2} \rangle$$

PASO 3 $\quad n + \frac{1}{2} = 0 \implies n = -1/2$

PASO 4 $\displaystyle \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}\,\Gamma(-n)\Bigg|_{n=-1/2}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{QED}$$

Resumimos algoritmo

$\Downarrow$

PASO 1 $\implies$ Representación en serie del integrando

$\Downarrow$

PASO 2 $\implies$ Obtención serie de brackets

$\Downarrow$

PASO 3 $\implies$ Evalución del sistema de ecs. lineales generado al anular los brackets y el determinante de los coeficientes.

$\Downarrow$

PASO 4 $\implies$ Obtención de la solución aplicando teor. de sumación múltiple.

---

3) $\displaystyle I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-Ax^{2\gamma}}\,dx$

$\Downarrow$

PASO 1 / $\displaystyle e^{-Ax^{2\gamma}} = \sum_n \phi_n A^n x^{2\gamma n}$

$\Downarrow$

PASO 2 / $\displaystyle I = \sum \phi_n A^n \langle \alpha + 2\gamma n \rangle = \frac{1}{|2\gamma|} \sum_n \phi_n A^n \left\langle n + \frac{\alpha}{2\gamma} \right\rangle$

PASO 3/ $n+\frac{\alpha}{2\gamma}=0 \Rightarrow n=-\frac{\alpha}{2\gamma}$

PASO 4/ $$I=\frac{1}{2|\gamma|}A^{n}\Gamma(-n)\Big|_{n=-\frac{\alpha}{2\gamma}}=\frac{1}{2|\gamma|}A^{-\frac{\alpha}{2\gamma}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)$$

---

4) $$I=\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+Ax^\beta)^\eta}dx$$

PASO 1/ $$\frac{1}{(A+Bx^\beta)^\eta}=\sum_{n_1}\sum\phi_{1,2}A^{n_1}B^{n_2}x^{\beta n_2}\frac{\langle\eta+n_1+n_2\rangle}{\Gamma(\eta)};\ \phi_{1,2}=\phi_{n_1}\phi_{n_2}$$

PASO 2/ $$I=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\phi_{1,2}A^{n_1}B^{n_2}\frac{\langle\eta+n_1+n_2\rangle}{\Gamma(\eta)}\underbrace{\int_0^\infty x^{\alpha+\beta n_2}dx}_{\langle\alpha+\beta n_2+1\rangle}$$

$$\langle\alpha+\beta n_2+1\rangle \Downarrow \frac{1}{|\beta|}\left\langle n_2+\frac{\alpha+1}{\beta}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{|\beta|}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\phi_{1,2}\frac{A^{n_1}B^{n_2}}{\Gamma(\eta)}\langle\eta+n_1+n_2\rangle\left\langle n_2+\frac{\alpha+1}{\beta}\right\rangle$$

PASO 3/ La solución del sistema de ec.

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\eta\\-\frac{(\alpha+1)}{\beta}\end{pmatrix}$$ tiene como solución

$$n_2=-\frac{(\alpha+1)}{\beta} \quad y \quad n_1=\frac{\alpha+1}{\beta}-\eta$$

PASO 4/

$$I = \frac{1}{|\beta|} \frac{A^{n_1} B^{n_2}}{\Gamma(\eta)} \Gamma(-n_1)\Gamma(-n_2)$$

donde n_1 y n_2 son les soluciones halladas en PASO3, esto es:

$$I = \frac{1}{|\beta|\,\Gamma(\eta)} A^{\frac{\alpha+1}{\beta}-\eta} B^{-\frac{(\alpha+1)}{\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\Gamma\left(\eta-\frac{(\alpha+1)}{\beta}\right)$$

---

5) $$I = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty X^\alpha Y^\beta Z^\sigma \frac{e^{-BX^\lambda}}{(X+AY)^\mu (XY+CZ)^\nu}\,dx\,dy\,dz$$

PASO 1/

$$* \quad e^{-BX^\lambda} = \sum_{n_1} \phi_1 B^{n_1} X^{\lambda n_1}$$

$$* \quad \frac{1}{(X+AY)^\mu} = \sum_{n_2}\sum_{n_3} \phi_{2,3} X^{n_2} A^{n_3} Y^{n_3} \frac{\langle \mu+n_2+n_3\rangle}{\Gamma(\mu)}$$

$$* \quad \frac{1}{(XY+CZ)^\nu} = \sum_{n_4}\sum_{n_5} \phi_{4,5} X^{n_4} Y^{n_4} C^{n_5} Z^{n_5} \frac{\langle \nu+n_4+n_5\rangle}{\Gamma(\nu)}$$

PASO2/

$$I = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \sum_{n_1}\cdots\sum_{n_5} \phi_{1,\dots,5} A^{n_3} B^{n_1} C^{n_5} \langle \mu+n_2+n_3\rangle\langle \nu+n_4+n_5\rangle$$

$$\times \int_0^\infty X^{\alpha+\lambda n_1+n_2+n_4}\,dx \int_0^\infty Y^{\beta+n_3+n_4}\,dy \int_0^\infty Z^{\sigma+n_5}\,dz$$

$\therefore$

$$I = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_5} \phi_{1,\ldots,5}\, A^{n_3} B^{n_1} C^{n_5} \langle \mu + n_2 + n_3 \rangle \langle \nu + n_4 + n_5 \rangle$$

$$\times \langle \alpha + \lambda n_1 + n_2 + n_4 + 1 \rangle \langle \beta + n_3 + n_4 + 1 \rangle \langle \sigma + n_5 + 1 \rangle$$

PASO 3/ Resolución del sistema de ecuaciones generado al anular los bracket

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz } M} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\nu \\ -\alpha - 1 \\ -\beta - 1 \\ -\sigma - 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo del determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda$$

Sistema de ecuaciones a resolver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\nu \\ -\alpha - 1 \\ -\beta - 1 \\ -\sigma - 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}(-\alpha - 2\sigma - \beta + \mu + 2\nu - 4) \\ \sigma + \beta - \mu - \nu + 2 \\ -\sigma - \beta + \nu - 2 \\ \sigma - \nu + 1 \\ -\sigma - 1 \end{pmatrix}$$

PASO 4/

$$I = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} A^{n_3} B^{n_1} C^{n_5} \Gamma(-n_1)\Gamma(-n_2)\Gamma(-n_3)\Gamma(-n_4)\Gamma(-n_5) \cdot \frac{1}{|\det M|}$$

$\Downarrow$

reemplazando los valores hallados para n_i $(i=1,\dots,5)$ y $|\det M| = \lambda$

se tiene la solución de la integral.