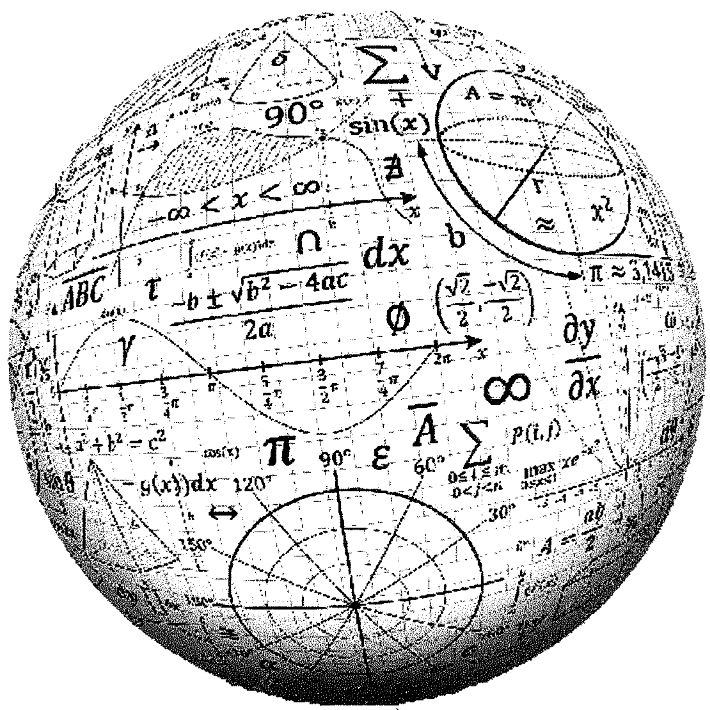
MÓDULO I
"MÉTODO DE BRACKETS"



Submódulo I : Herramientas matemáticas preliminares

Sección I - Función Gamma

Sección II - Función Beta

Sección III - Símbolos de Pochhammer

Sección IV - Función hipergeométrica generalizada univariable

Sección V - Funciones hipergeométricas de más de una variable ☑

(V) Funciones hipergeométricas de más de una variable

Una extensión natural de las series descritas en la sección (IV) es la versión multivariable, en particular series dobles o de dos variables, las cuales tienen mucha aplicación en Física y ciencias aplicadas.

A continuación describiremos algunas series dobles relevantes y de las cuales existe mucha literatura para estudiar.

(a) Funciones de Appell (Paul Appell - 1880)

Las funciones de Appel corresponde a un conjunto de 4 series hipergeométricas, ellas son las series: F_1, F_2, F_3 y F_4.

a.1) Función de Appell F_1

Esta función esta definida como sigue:

$$F_1(a, b_1, b_2; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

a.2) Función de Appell F_2

$$F_2(a,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

a.3) Función de Appell F_3

$$F_3(a_1,a_2,b_1,b_2;c;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_m(a_2)_n(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

a.4) Función de Appell F_4

$$F_4(a,b;c_1,c_2;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c_1)_m(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

Las condiciones de convergencia de cada serie está descrita a continuación.

La serie F_1 converge si $|x|<1 \wedge |y|<1$

F_2 converge si $|x|+|y|<1$

F_3 converge si $|x|<1 \wedge |y|<1$

F_4 converge si $|x|^{1/2}+|y|^{1/2}<1$

TAREA I

a) Demuestre la identidad:

$$\Gamma(a+m+n) = \Gamma(a)(a)_m(a+m)_n$$

b) Escriba la función de Appell F_4 como una suma de la forma:

$$F_4(a,b;c_1,c_2;x,y) = \sum_{n\geq 0} A \times {}_2F_1\left(\cdots \middle| x\right)$$

Determine el valor de A.

TAREA II

Demuestre que la integral:

$$I = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-yt)^{-b_2}\,dt$$

es proporcional a la función de Appell F_1, esto es:

$$I = B\,F_1(\cdots; x, y)$$

Determine B.

<u>Obs.</u> Recuerde que $\dfrac{1}{(1-\eta)^\alpha} = {}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}\middle|\eta\right)$

TAREA I | Solución

a) $\Gamma(a+m+n) = \Gamma(a+m)(a+m)_n$
$$= \Gamma(a)(a)_m (a+m)_n$$

b) $$F_4(a,b;c_1,c_2;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c_1)_m (c_2)_n} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

Se pide construir una función hipergeométrico a partir de la sume sobre el índice m.

Obs.

$$(b)_{m+n} = \frac{\Gamma(b+m+n)}{\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}(b+n)_m = (b)_n (b+n)_m$$

análogamente:

$$(a)_{m+n} = (a)_n (a+n)_m$$

$\therefore$
$$F_4(a,b;c_1,c_2;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c_2)_n}\frac{y^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a+n)_m(b+n)_m}{(c_1)_m}\frac{x^m}{m!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c_2)_n}\frac{y^n}{n!}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+n,\, b+n \\ c_1 \end{matrix}\middle| x\right)$$

luego $A = \dfrac{(a)_n (b)_n}{(c_2)_n}\dfrac{y^n}{n!}$

TAREA II | Solución

La expresión de una expansión binomial es:

$$\frac{1}{(1-\eta)^{\alpha}} = {}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha \\ -\end{matrix}\middle| \eta\right)$$

luego: $$(1-xt)^{-b_1} = {}_1F_0\left(\begin{matrix} b_1 \\ - \end{matrix}\middle| xt\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (b_1)_m \frac{x^m t^m}{m!}$$

$$(1-yt)^{-b_2} = {}_1F_0\left(\begin{matrix} b_2 \\ - \end{matrix}\middle| yt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_2)_n \frac{y^n t^n}{n!}$$

Luego:

$$I = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b_1)_m}{m!}\frac{(b_2)_n}{n!} t^{n+m} x^m y^n\right] dt$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (b_1)_m (b_2)_n \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 t^{a+m+n-1}(1-t)^{c-a-1}}_{B(a+m+n,\, c-a)}$$

$$B(a+m+n,\, c-a) \Downarrow \frac{\Gamma(a+m+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+m+n)}$$

<u>Obs.</u> $\Gamma(a+m+n) = \Gamma(a)\,(a)_{m+n}$

$\Gamma(c+m+n) = \Gamma(c)\,(c)_{m+n}$

Luego

$$I = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

Finalmente

$$I = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c)} F_1(a, b_1, b_2; c; x, y)$$

(b) Funciones de Kampé de Fériet

Las funciones de Appell descritas en la sección anterior en realidad corresponden a un caso particular de una función más general llamada función de Kampé de Fériet, la cual está definida de la siguiente manera:

$$(39)\quad F^{p:r:\mu}_{q:s:\nu}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_p & a_1,\dots,a_r & c_1,\dots,c_\mu \\ \beta_1,\dots,\beta_q & b_1,\dots,b_s & d_1,\dots,d_\nu\end{matrix}\middle| x, y\right)$$

$$= F^{p:r:\mu}_{q:s:\nu}\left(\begin{matrix}\{\alpha\} & \{a\} & \{c\} \\ \{\beta\} & \{b\} & \{d\}\end{matrix}\middle| x, y\right)$$

$$= \sum_{n,m\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_{n+m}\prod_{j=1}^{r}(a_j)_n\prod_{j=1}^{\mu}(c_j)_m}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_{n+m}\prod_{j=1}^{s}(b_j)_n\prod_{j=1}^{\nu}(d_j)_m}\,\frac{x^n}{n!}\,\frac{y^m}{m!}$$

La serie converge si:

i) $p+r<q+s+1 \wedge p+\mu<q+\nu+1$

m $|x|<\infty \wedge |y|<\infty$

ii) Si

$$p+r = q+s+1 \ \wedge \ p+u = q+v+1$$

y

$$|x|^{(p-q)^{-1}} + |y|^{(p-q)^{-1}} < 1 \quad \text{si } p > q$$

ó

$$\max\{|x|, |y|\} < 1 \quad \text{si} \quad p \leq q$$

(c) Series más generales

En términos generales las series no necesariamente son hipergeométricas, así por ejemplo la serie:

$$(40) \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\alpha_j + \beta_j n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j n)} \frac{x^n}{n!}$$

Solo corresponderá a una serie hipergeométrica si los coeficientes $\{\beta_j, \tilde{\beta}_j\}$ son números enteros.

La serie mostrada en Ec. (40) puede ser generalizada a muchas variables. Un ejemplo de una serie no hipergeométrica es la asociada a la función de Mittag-Leffler, la que está descrita a continuación:

$$(41) \quad E_\alpha(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad (\alpha > 0)$$

la cual es una función entera (analítica en todo el plano complejo).

CASOS PARTICULARES

$$(42) \quad E_0(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$(43) \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

$$(44) \quad E_4(z) = \frac{1}{2}\left[\cosh(z^{1/4}) + \cos(z^{1/4})\right]$$

etc.

Revisitando la EDO hipergeométrica

Antes conocimos que la función:

$$(45) \quad f(z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z\right)$$

es solución de la ecuación diferencial lineal:

$$(46) \quad \left[z \prod_{j=1}^{p} \left(z\frac{d}{dz} + a_j \right) - z\frac{d}{dz} \prod_{j=1}^{q} \left(z\frac{d}{dz} + b_j - 1 \right) \right] f(z) = 0$$

El orden de la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} q+1 \, ; \text{si } p \leq (q+1) \\ p \, ; \text{si } p > (q+1) \end{cases}$$

<u>Obs.</u> $\prod_{j=1}^{N} a_j = a_1 a_2 \dots a_N$

<u>Obs.</u> $\prod_{j=1}^{0} a_j = 1$

REVISITANDO LA FUNCIÓN ${}_pF_q$

Casos especiales y obtención de la forma canónica de la EDO

Series ${}_0F_0\left({- \atop -}\middle| z\right)$

En este caso $p=q=0$, por lo tanto la EDO que da origen a esta función es la siguiente:

$$\left[z \cancelto{1}{\prod_{j=1}^{0}\left(z\frac{d}{dz}+a_j\right)} - z\frac{d}{dz}\cancelto{1}{\prod_{j=1}^{0}\left(z\frac{d}{dz}+b_j-1\right)}\right] f(z) = 0$$

$$\left[z - z\frac{d}{dz}\right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z\, f(z) - z\frac{d}{dz} f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

(47) $$f(z) = \frac{df(z)}{dz}$$; la solución de esta EDO es $f(z) \propto e^{z}$

Series ${}_1F_0\left({a \atop -}\middle| z\right)$

La EDO respectiva es

$$\left[z \prod_{j=1}^{1}\left(z\frac{d}{dz}+a\right) - z\frac{d}{dz}\cancelto{1}{\prod_{j=1}^{0}\left(z\frac{d}{dz}+b_j-1\right)}\right] f(z) = 0$$

$$\left[z\left(z\frac{d}{dz}+a\right)-z\frac{d}{dz}\right]f(z)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[z^2\frac{d}{dz}+az-z\frac{d}{dz}\right]f(z)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[z\frac{d}{dz}-a-\frac{d}{dz}\right]f(z)=0$$

$$\Downarrow$$

$$(z-1)\frac{d}{dz}f(z)=-af(z)$$

$$\Downarrow$$

(48) $\quad (1-z)\dfrac{d}{dz}f(z)=af(z)$; la solución de esta EDO es $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^a}$

Series ${}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\b\end{matrix}\middle|z\right)$

La EDO que da origen a esta función es la siguiente:

$$\left[z\cancelto{1}{\prod_{j=1}^{0}\left(z\frac{d}{dz}+a_j\right)}-z\frac{d}{dz}\prod_{j=1}^{1}\left(z\frac{d}{dz}+b-1\right)\right]f(z)=0$$

o equivalentemente:

$$\left[z - z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + b - 1\right)\right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[z - z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right) - (b-1)z\frac{d}{dz}\right] f(z) = 0$$

donde $\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right) = \frac{d}{dz} + z\frac{d^2}{dz^2}$

$$\Downarrow$$

$$\therefore \quad \left[z - z\frac{d}{dz} - z^2\frac{d^2}{dz^2} - (b-1)z\frac{d}{dz}\right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[z - bz\frac{d}{dz} - z^2\frac{d^2}{dz^2}\right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[1 - b\frac{d}{dz} - z\frac{d^2}{dz^2}\right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(49) \qquad \boxed{z\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + b\frac{df(z)}{dz} = f(z)}$$

Series ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1 \end{matrix}\middle| z\right)$

La EDO respectiva es la siguiente:

$$\left[z \prod_{j=1}^{2} \left(z\frac{d}{dz} + a_j \right) - z\frac{d}{dz} \prod_{j=1}^{1} \left(z\frac{d}{dz} + b_j - 1 \right) \right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\cancel{z}\left(z\frac{d}{dz} + a_1 \right)\left(z\frac{d}{dz} + a_2 \right) - \cancel{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) \right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\left(z\frac{d}{dz} + a_1 \right)\left(z\frac{d}{dz} + a_2 \right) - \frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} \right) - (b_1 - 1)\frac{d}{dz} \right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} \right) + (a_1 + a_2) z\frac{d}{dz} + a_1 a_2 - \frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} \right) - (b_1 - 1)\frac{d}{dz} \right] f(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

Obs. $\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} \right) = \frac{d}{dz} + z\frac{d^2}{dz^2}$; utilizando esta identidad se tiene que:

$$z(1-z)\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \left[b_1 - (a_1 + a_2 + 1) z \right] \frac{df(z)}{dz} - a_1 a_2 f(z) = 0 \tag{50}$$

Como observación final, se tiene que:

i) Si $p \leq q+1$, la EDO tiene $q+1$ soluciones de la forma ${}_pF_q$.

ii) Si $p > q+1$, la EDO tiene p soluciones de la forma ${}_pF_q$.