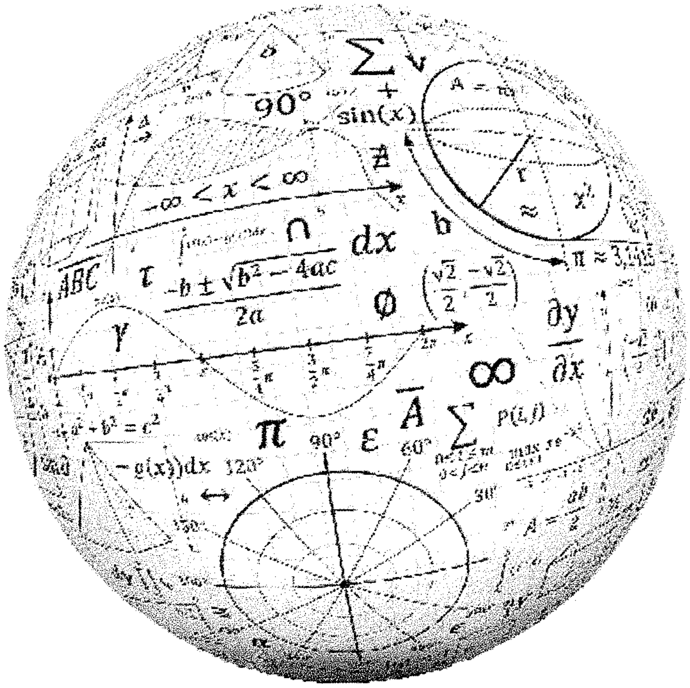
MÓDULO I
"MÉTODO DE BRACKETS"



Submódulo II : Método de Brackets (MoB)

Sección II - Ideas y estrategias más generales respecto a la integración con MoB

A).- **El índice de una serie de brackets** ☑

B).- **Expansión en serie de potencias de $f(x)$** ☑

C).- **Series de brackets de índice $I = 1$** ☑

D).- **Algoritmo general de MoB** ☑

(A) El índice de una serie de brackets.

Cuando obtenemos una serie de brackets a partir de una integral o un multinomio, se observa que en general el número de sumas es mayor o igual al número de brackets. Para analizar las implicancias de este hecho definamos lo siguiente:

Sea σ = Número de sumas de la serie de brackets.

δ = Número de brackets de la serie de brackets.

Se define como índice I de la serie de brackets (o equivalentemente de la integral) como

(70) $$I = \sigma - \delta$$

Estudio de casos

(i) CASO 1: $\sigma = \delta$

$\therefore$ $I = 0$. Una serie de brackets de índice nulo tiene una fácil solución, basta aplicar el TEOREMA DE SUMACIÓN MÚLTIPLE descrito en Ec. (61). La solución de la suma en este caso corresponde a un solo término que contiene funciones Gamma y otros factores dependientes de la forma del coeficiente de la serie de brackets que origina esta solución.

(ii) CASO 2: $\sigma > \delta$, es decir $I > 0$. La situación aquí es un poco más compleja que solo aplicar el teorema de sumación múltiple, de hecho ocurre lo siguiente:

- La solución es una serie de multiplicidad I.
- Existen varias combinaciones de utilizar los brackets para eliminar sumas, de hecho hay:

(71) $$\binom{\sigma}{\delta} = \frac{\sigma!}{\delta!\,(\sigma-\delta)!} \text{ formas posibles}$$

$\therefore$ se generan a lo más $\binom{\sigma}{\delta}$ series distintas de multiplicidad I.

Obs. Cuando decimos, que a lo más podemos obtener $\binom{\sigma}{\delta}$ series distintas a partir de alguna determinada serie de brackets, radica en el hecho que la regla de sumación y el teorema de sumación múltiple involucran la resolución de un sistema de ecuaciones lineales y puede suceder que algunas de las combinaciones de utilizar brackets en sumas eventualmente pueden generar sistemas de ecuaciones que no tienen solución, estos casos disminuyen la cantidad de series que se pueden obtener a partir de una serie de brackets.

Veamos un simple ejemplo, sea la serie de brackets:

$$(72) \qquad I = \sum_n \sum_m \sum_\ell \phi_{n,m,\ell}\, C(n,m,\ell) \langle n+m+\tfrac{1}{2} \rangle \langle \ell+1 \rangle$$

Obs. 1: $\sigma = 3 \quad \delta = 2$

Obs. 2: A lo más $\binom{\sigma}{\delta} = \binom{3}{2} = 3$ series de multiplicidad 1 se pueden obtener.

<u>Obs.3</u>: Los términos obtenidos son los siguientes:

* Caso n como índice de suma libre

$$\Downarrow$$

Eliminemos las sumas $\sum_m \sum_l$ y dejamos $\sum_n$

Denominaremos a la serie obtenida como

$$(73)\quad I_n = \sum_{n\geq 0} \phi_n\, C(n,m,l)\,\Gamma(-m)\,\Gamma(-l)\Big|_{\substack{l=-1\\ m=-n-\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \phi_n\, C\left(n,-n-\tfrac{1}{2},-1\right)\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\underbrace{\cancel{\Gamma(1)}}_{1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} C\left(n,-n-\tfrac{1}{2},-1\right)\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\frac{(-1)^n}{n!}$$

* caso m Libre

$$\Downarrow$$

$$(74)\quad I_m = \sum_{m\geq 0} \phi_m\, C(n,m,l)\,\Gamma(-n)\,\Gamma(-l)\Big|_{\substack{l=-1\\ n=-m-\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{m\geq 0} \phi_m\, C\left(-m-\tfrac{1}{2}, m, -1\right)\Gamma\left(m+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{m\geq 0} C\left(-m-\tfrac{1}{2}, m, -1\right)\Gamma\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\frac{(-1)^m}{m!}$$

* caso l libre

$I_l =$ No existe esta serie dado que no se puede hallar solución para n y m simultáneamente. El bracket $\langle l+1 \rangle$ no contribuye a generar una ecuación para hallar n y m. En términos simples n y m no los puedo dejar en función del índice de suma l.

Podemos concluir que el parámetro I de una serie de brackets nos da la información respecto al tipo de soluciones que obtenemos a partir de esta serie, en términos concretos el índice I nos revela la "complejidad" de las soluciones que se pueden obtener a partir de una integral, "mientras menor sea el índice I, más simple es la integral".

Antes de evaluar integrales asociadas a series de brackets con $I > 0$, haremos un repaso a series de potencias (convencionales), las cuales en general corresponden a soluciones de integrales.

(B) Expansión en serie de potencias de f(x)

Sea f(x) una función arbitraria tal que su representación en serie de Taylor en torno a $X = X_0$ está dada por la expresión:

(75) $$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{(X - X_0)^n}{n!}$$

donde

(76) $$a_n = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{X = X_0} = \frac{d^n f(X_0)}{dX^n} \quad \text{(Esto ya es conocido)}$$

La representación en serie de f(x) en torno a $x = X_0$ existe si f(x) es infinitamente derivable en X_0, en caso contrario dicha expansión no existe.

i ¿Cuántas representaciones en serie posee f(x)?

Dado que X_0 puede asumir un valor arbitrario en la Ec. (76), f(x) puede tener infinitas representaciones en series de Taylor. Algunas posibilidades son las siguientes:

(77) $$f(x) = \begin{cases} (a)\ \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \\ \vdots \\ (b)\ \sum_{n\geq 0} a'_n \frac{(x-x_0)^n}{n} \\ \vdots \\ (c)\ \sum_{n\geq 0} b_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{n!} \end{cases}$$

En particular la serie mostrada en (a) se denomina la serie de McLaurin para $f(x)$ o serie de Taylor en torno a $x=x_0$. Otro caso relevante es la representación en serie descrita en (c), la cual corresponde a una representación de $f(x)$ cuando $x\to\infty$.

ii) ¿La serie $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ representa a $f(x)$ $\forall x$?

Dependerá del radio de convergencia R que posea la serie:

a) Si $R\to\infty$ la serie es igual a $f(x)$ $\forall x$

b) Si R es finito (no nulo), la serie representa a $f(x)$ solo si $|x-x_0|<R$ y $|x-x_0|=R$ de menera condicionada.

c) Si $R=0$, la serie como suma de infinitos términos diverge, salvo para $x=0$ donde asume el valor a_0, esto implica que $f(0)=a_0$

<u>Obs.</u> Si conocemos $f(x)$ podemos hallar alguna representación en serie siempre, el proceso inverso, es decir, sumar la serie para hallar la función que la origina es en general muy complicado. Esto último es recurrente cuando las series de potencias son originadas como soluciones de integrales y ecuaciones diferenciales, de ahí la importancia de conocer algún procedimiento para hallar el radio de convergencia de una serie de potencias.

(iii) ¿Qué procedimiento es necesario realizar si conozco una serie válida para $|x|<R$ pero deseo conocer el valor para $|x|>R$?

Sea la serie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ cuyo radio de convergencia R es finito (no nulo) Π la serie converge absolutamente si $|x|<R$ y condicionalmente si $|x|=R$, para $|x|>R$ la serie diverge, luego es necesario hallar otra representación en serie para el caso $|x|>R$, el procedimiento para lograr esto se denomina CONTINUACIÓN ANALÍTICA de la variable x o también extensión analítica de x, la estructura de la serie continuada analíticamente es de la forma:

$$\sum_{n\geq 0} b_n \left(\frac{1}{x}\right)^n \qquad (78)$$

<u>Obs.</u> si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = f(x) \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} b_n \left(\frac{1}{x}\right)^n = f(x)$

esto es, ambas series representan a la misma función:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n\geq 0} a_n x^n, & \text{para } |x|<R \\ \sum_{n\geq 0} b_n \left(\frac{1}{x}\right)^n; & \text{para } |x|>R \end{cases} \qquad (79)$$

pero para intervalos en la variable x.

(iv) ¿Para que pueden ser utilizadas las series de potencias?

Dada una función $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, si deseamos conocer el comportamiento asintótico para $x \to 0$ de $f(x)$, basta considerar los primeros términos de la serie, esto es:

(80) $$f(x) \approx a_0 + a_1 x + O(x^2)$$

Si queremos conocer el comportamiento para $x \to \infty$ de $f(x)$, requerimos obtener la serie con argumento recíproco, esto es:

(81) $$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

la cual es obtenible a partir de la serie $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Entonces cuando $x \to \infty$ se cumple que:

(82) $$f(x) \approx b_0 + \frac{b_1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

TAREA I

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas representaciones en serie son las siguientes:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

Determine la expansión en serie de:

a) $F(x) = f(x)\,g(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$

b) $G(x) = f(x) + g(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$

TAREA II

La función $f(x) = {}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha \\ -\end{matrix}\middle| x^2\right)$, donde la serie tiene de radio de convergencia $R=1 \Rightarrow$ la serie converge absolutamente para $|x^2|<1$. Halle la continuación analítica de esta representación para valores $|x^2|>1$ en terminos de una serie de potencias.

TAREA I | Solución

a) Se tiene que $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$

entonces:

$$f(x)g(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots)$$

$$= a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + \dots$$
$$+ a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \dots$$
$$+ a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + \dots$$
$$+ a_3 b_0 x^3 + \dots$$

Reordenamos esta suma:

$$f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

Obs. $c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = (a_0 b_1 + a_1 b_0)$

$c_2 = (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)$

$\vdots$

Se observa una combinatoria en la suma asociada a cada c_i $(i = 0, 1, 2, \dots)$:

$$c_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k} = a_0 b_0$$

$$c_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k b_{1-k} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k b_{2-k} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$\vdots$$

Podemos generalizar estos resultados para

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$ (Más info: Ver producto de Cauchy)

$\therefore$ la serie que representa a $F(x)$ está dado por la siguiente fórmula:

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right] x^n$$

Obs. $$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

b) $f(x) + g(x) = G(x)$

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\ x^n$$

Finalmente

$c_n = a_n + b_n \quad \Longrightarrow F(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$

Obs.

Este último resultado es importante, lo que nos dice es que todas las series que tienen el mismo argumento (o potencias) se pueden sumar, dando como resultado una única serie:

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum c_n x^n$$

La serie resultante y que representa a $G(x)$ corresponde a la serie de Taylor de $G(x)$ en torno de $x=0$.

Obs. Series de la forma $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^{2n}$ también son sumables. En principio tienen distinto argumento, x y x^2 respectivamente, pero:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} + x \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n}$$

$$= \sum_{n \geq 0} (a_{2n} + x\, a_{2n+1}) x^{2n}$$

$\therefore \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^{2n}$

$= \sum_{n \geq 0} [a_{2n} + x a_{2n+1} + b_n] x^2$, esto se lee como una expansión en serie Taylor en torno a $x^2 \to 0$.

TAREA II | Solución

La serie ${}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}\middle| x^2\right)$ representa a cierta función solo si el argumento cumple con la condición $|x^2| < 1$, ∴ es necesario realizar el procedimiento de CONTINUACIÓN ANALÍTICA para hallar una serie que converja para $|x^2| > 1$.

En este caso es fácil (tal vez el único caso), ya que:

$$ {}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}\middle| x^2\right) = \frac{1}{(1-x^2)^\alpha} = f(x) $$

si reescribimos la función como sigue:

$$ f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^\alpha} = \frac{1}{(x^2)^\alpha}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\ \ 1\right)^\alpha} = -\frac{1}{(x^2)^\alpha}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^\alpha} $$

$$ = -\frac{1}{(x^2)^\alpha}\,{}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}\middle| \frac{1}{x^2}\right) $$

$\left|\frac{1}{x^2}\right| < 1$

Equivalentemente

∴ $$ f(x) = -\frac{1}{(x^2)^\alpha}\,\underbrace{{}_1F_0\left(\begin{matrix}\alpha\\ -\end{matrix}\middle| \frac{1}{x^2}\right)}_{\text{Esta serie converge si } |x^2|>1} $$

Ambas series representan a la misma función, pero son válidas en intervalos distintos debido a que ambas tienen $R=1$, la original es una expansión en torno a $x^2 \to 0$ y la continuación analítica es una expansión en torno a $x^2 \to \infty$ o $\frac{1}{x^2} \to 0$.

(c) <u>Series de brackets de índice $I = 1 = \sigma - \delta$</u>

$$\Downarrow$$

Tiene $\binom{\sigma}{\sigma-1} = \sigma$ formas posibles de utilizar los brackets para sumar, cada una de estas formas podría generar un término asociado a la solución de una integral. Cada una de estas combinaciones necesita de la evaluación de un sistema de ecuaciones, si dicho sistema NO TIENE SOLUCIÓN, entonces no se genera ningún término.

Respecto a los términos obtenidos, estos corresponden a series de potencias de multiplicidad $I = 1$. Estableceremos a continuación una regla para hallar la correcta solución de la integral.

<u>REGLA 2:</u> Sea una integral J y su solución depende de cierto parámetro A, los términos que se

obtienen son series de la forma:

$$\sum_{n} \cdots A^{n} \quad ó \quad \sum_{n} \cdots \left(\frac{1}{A}\right)^{n}$$

Sean M series(términos) de la forma $\sum \cdots A^{n}$ (argumento A) y N términos con argumento $\left(\frac{1}{A}\right)$, entonces:

$$J = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \left[\alpha_i \sum \cdots A^{n}\right] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left[\beta_i \sum \cdots \left(\frac{1}{A}\right)^{n}\right] \end{cases}$$

las constantes α_i y β_i diferencian entre si los términos obtenidos.

$$\Downarrow$$

Tenemos que:

REGLA 2: Regla de sumación de series de igual argumento.

EJERCICIO | SOLUCIÓN

Resolver la integral:

$$J = \int_0^\infty \frac{J_0(x)\,\mathrm{sen}(\beta x)}{x}\,dx$$

PASO 1 Expansión del integrando

$$J_0(x) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 1 \end{matrix}\,\middle|\, -\frac{x^2}{4}\right) = \sum_m \phi_m \frac{1}{(1)_m}\frac{x^{2m}}{4^m} = \sum_m \phi_m \frac{1}{\Gamma(m+1)4^m}\, x^{2m}$$

$$\mathrm{sen}(\beta x) = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!}\, n!\, \frac{x^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)}\, \beta^{2n+1}$$

$$= \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}\, x^{2n+1}\beta^{2n+1}$$

PASO 2 Serie de brackets de la integral

$$J = \sum_n \sum_m \phi_{n,m} \frac{\beta^{2n+1}}{4^m\,\Gamma(m+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \underbrace{\int_0^\infty x^{2m+2n+1-1}\,dx}_{\langle 2m+2n+1\rangle}$$

$$J = \sum_n \sum_m \phi_{n,m} \frac{\Gamma(n+1)\,\beta^{2n+1}}{4^m\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(2n+2)} \langle 2m+2n+1\rangle$$

Obs.: $\langle 2m+2n+1\rangle = \frac{1}{2}\langle m+n+\frac{1}{2}\rangle$

$\Downarrow$

Finalmente:

$$J = \frac{1}{2}\sum_n \sum_m \phi_{n,m} \frac{\Gamma(n+1)\,\beta^{2n+1}}{4^m\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(2n+2)} \langle m+n+\tfrac{1}{2}\rangle$$

PASO 3 Obtención de términos y solución a J

$\boxed{\text{caso } 1}$: n como índice libre $\Rightarrow$ obtenemos término J_n

$$\Downarrow$$

$$J_n = \frac{\beta}{2} \sum_{n\geq 0} \phi_n \frac{\Gamma(n+1)\quad \beta^{2n}}{4^m \Gamma(m+1)\Gamma(2n+2)} \Gamma(-m) \Big|_{m=-n-\frac{1}{2}}$$

$$J_n = \frac{\beta}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(-n+\frac{1}{2})} \frac{\beta^{2n}}{\Gamma(2n+2)} \frac{1}{4^{n-\frac{1}{2}}} \Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$

Usando la identidad general

$$\Gamma(\alpha+n) = \Gamma(\alpha)(\alpha)_n$$

$$\Downarrow$$

$$J_n = \frac{\beta}{\cancel{2}} \frac{\cancel{\Gamma(1/2)}\,\cancel{\Gamma(1)}^{\,1}}{\cancel{\Gamma(1/2)}\,\cancel{\Gamma(2)}_{\,1}} \cdot \cancel{2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(1)_n (1/2)_n}{(1/2)_{-n} (2)_{2n}} \frac{1}{4^{-n}} \beta^{2n}$$

Usando las identidades:

$$\frac{1}{(1/2)_{-n}} = (-1)^n (1/2)_n \quad \text{y} \quad \frac{1}{(2)_{2n}} = \frac{1}{4^n (1)_n (3/2)_n}$$

entonces

$$J_n = \beta \sum_{n\geq 0} \frac{\cancel{(-1)^n}}{n!} \frac{\cancel{(1)_n} (1/2)_n \cancel{(-1)^n} (1/2)_n \cancel{4^n}}{\cancel{4^n} \cancel{(1)_n} (3/2)_n} \beta^{2n}$$

$$= \beta \sum_{n\geq 0} \frac{(1/2)_n (1/2)_n}{(3/2)_n} \frac{\beta^{2n}}{n!}$$

$$J_n = \beta \; {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \Big| \beta^2\right);$$

como es de la forma ${}_{q+1}F_q$ tiene $R=1$

$\therefore$ J_n es válida para $|\beta^2| < 1$

<u>Obs.</u> En el COMPLEMENTO I se halla que

$$\beta\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2\ ,\ 1/2\\ 3/2\end{matrix}\middle|\ \beta^2\right) = \text{arcsen}(\beta)$$

$$\therefore\quad J_n = \arcsin(\beta) \qquad \text{si } |\beta^2| < 1$$

$\boxed{\text{caso 2}}$: m como índice libre $\Rightarrow$ J_m

$$\Downarrow$$

$$J_m = \frac{\beta}{2}\sum_{m\geq 0}\phi_m \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}\frac{\beta^{2n}}{4^m\,\Gamma(m+1)}\Gamma(-n)\Bigg|_{n=-m-\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$J_m = \frac{\beta}{2}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\Gamma(-m+\frac{1}{2})\,\beta^{-2m-1}\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(-2m+1)\,4^m\,\Gamma(m+1)}$$; construimos los símbolos de Pochhammer

$$= \frac{\cancel{\beta}}{2}\frac{\Gamma(1/2)^2\cdot\cancel{\beta^{-1}}}{\Gamma(1)\,\Gamma(1)}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(1/2)_{-m}}{(1)_{-2m}}\frac{(1/2)_m}{(1)_m}\left(\frac{1}{\beta^2}\right)^m\frac{1}{4^m}$$

donde

$$(1/2)_{-m} = \frac{(-1)^m}{(1/2)_m} \quad \text{y} \quad \frac{1}{(1)_{-2m}} = \cancel{(-1)^{2m}}^{\,1}(0)_{2m} = 4^m(0)_m(1/2)_m$$

$$\therefore\quad J_m = \frac{\pi}{2}\sum_{m\geq 0}\frac{\cancel{(-1)^m}}{m!}\frac{\cancel{(-1)^m}}{\cancel{(1/2)_m}}\frac{\cancel{4^m}(0)_m\cancel{(1/2)_m}}{(1)_m\cancel{4^m}}(1/2)_m\left(\frac{1}{\beta^2}\right)^m$$

válida para $|\beta^2| > 1$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{m\geq 0}\frac{(0)_m\,(1/2)_m}{(1)_m}\frac{\left(\frac{1}{\beta^2}\right)^m}{m!} = \frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}0\ ,\ 1/2\\ 1\end{matrix}\middle|\ \frac{1}{\beta^2}\right)$$

Debido al factor $(0)_m$ en la serie o el parámetro 0 como argumento de un símbolo de Pochhammer del numerador, la serie tiene valor 1.

Obs. un factor de la forma $(-N)_n$ con $N \in \mathbb{N}$, trunca la serie, convirtiéndola en un polinomio de grado N (con $N+1$ términos).

$$\therefore \quad J = \begin{cases} \arcsin(\beta) & ; \text{ para } |\beta^2| < 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & ; \text{ para } |\beta^2| > 1 \end{cases} \qquad \text{o} \quad J = \begin{cases} J_n & , \text{si } |\beta^2| < 1 \\ J_m & , \text{si } |\beta^2| > 1 \end{cases}$$

J_n y J_m tienen distintos argumentos.

Obs. si $\beta = 1$ $\qquad J_m = J_n = \frac{\pi}{2}$

REGLA 3: Regla de descarte

Sea la integral J cuya serie de brackets genera varios términos, esta regla establece que no deben considerar o mejor dicho descartar todos aquellos términos que son:

- NULOS
- DIVERGENTES

Un ejemplo simple. Supongamos que de alguna determinada serie de brackets obtenemos una serie de la forma:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \cdots \frac{1}{n} \cdots$ (Diverge en $n=0$)

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \cdots \Gamma(-n) \cdots$ (Diverge para todo n)

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \cdots \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdots$ (Es nula para todo n)

Todas ellas deben descartarse como parte de la solución.

EJERCICIO | SOLUCIÓN

Demostrar que:

$$J = \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + A^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-A}$$

PASO 1 Expansión del integrando

$$\operatorname{sen} x = \sum_n \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} x^{2n+1}$$

$$\frac{1}{x^2 + A^2} = \sum_m \sum_\ell \phi_{m,\ell}\, x^{2m} A^{2\ell} \frac{\langle 1+m+\ell \rangle}{\cancel{\Gamma(1)}_{1}}$$

PASO 2 Serie de brackets de J

$$J = \sum_n \sum_m \sum_\ell \phi_{n,m,\ell} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} A^{2\ell} \langle 1+m+\ell \rangle \underbrace{\int_0^\infty x^{2n+1+2m+1} dx}_{\langle 2n+2m+3 \rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$J = \sum_n \sum_m \sum_\ell \phi_{n,m,\ell} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} A^{2\ell} \langle 1+m+\ell \rangle \langle 2n+2m+3 \rangle$$

$$\langle 2n+2m+3 \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \langle n+m+3/2 \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \sum_\ell \phi_{n,m,\ell} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} A^{2\ell} \langle 1+m+\ell \rangle \langle n+m+3/2 \rangle$$

PASO 3 Obtención de términos y solución

$\boxed{\text{Caso 1}}$: n libre $\Rightarrow J_n$

El sist. de ecs. a resolver es el siguiente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} - n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n + 1/2 \\ -3/2 - n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det M_1 = 1$$

Luego

$$J_n = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \phi_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} A^{2l} \frac{\Gamma(-l)\Gamma(-m)}{\underbrace{|\det M_1|}_{1}} \Bigg|_{\substack{l = n+1/2 \\ m = -n-3/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} A^{2n+1} \Gamma(-1/2 - n)\Gamma(n + 3/2)$$

$$= \frac{A}{2} \frac{\cancelto{1}{\Gamma(1)}\,\Gamma(-1/2)\Gamma(3/2)}{\cancelto{1}{\Gamma(2)}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(1)_n (-1/2)_{-n} (3/2)_n}{(2)_{2n}} A^{2n}$$

donde: $(-1/2)_{-n} = \dfrac{(-1)^n}{(3/2)_n}$ y $(2)_{2n} = 4^n (1)_n (3/2)_n$

$$\therefore \quad J_n = \frac{A}{2} \cdot \overbrace{\Gamma(-1/2)\Gamma(3/2)}^{-\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\cancel{(-1)^n}}{n!} \cancel{(1)_n} \frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{(3/2)_n}} \frac{\cancel{(3/2)_n}}{4^n \cancel{(1)_n} (3/2)_n} A^{2n}$$

$$= -A\frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3/2)_n} \frac{\left(\frac{A^2}{4}\right)^n}{n!}$$

$$= -A\frac{\pi}{2} \, {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{A^2}{4} \right)$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$: m libre $\Rightarrow J_m$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} \begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-m \\ -\frac{3}{2}-m \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-m \\ -1-m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det M_2 = -1.$$

luego

$$J_m = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} \phi_m \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} A^{2\ell} \frac{\Gamma(-n)\Gamma(-\ell)}{|\det M_2|} \Bigg|_{\substack{\ell = -1-m \\ n = -\frac{3}{2}-m}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} \phi_m \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}-m)\,\Gamma(3/2+m)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(-1-2m)} A^{-2-2m}$$

¡ ESTE TÉRMINO SE DESCARTA, ES NULO !

$$\Downarrow$$

Porque $\Gamma(-1-2m)$ en el denominador diverge $\forall m$, $\therefore$ cada término de la serie es NULO y la suma infinita entonces es NULA. //

$\boxed{\text{Caso 3}}$: l libre $\Longrightarrow$ J_l

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1-l \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+l \\ -1-l \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det M_3 = 1.$$

luego

$$J_l = \frac{1}{2} \sum_{l\geq 0} \phi_l \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} A^{2l} \frac{\Gamma(-n)\,\Gamma(-m)}{\underbrace{|\cancel{\det M_3}|}_{1}} \Bigg|_{\substack{n = l-1/2 \\ m = -l-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l\geq 0} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(2l+1)} A^{2l}\, \Gamma(-l+1/2)\, \Gamma(l+1)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)^2 \cancel{\Gamma(1)}}{\cancel{\Gamma(1)}} \sum_{l\geq 0} \frac{(1/2)_l (1/2)_{-l} (1)_l}{(1)_{2l}} (-1)^l \frac{A^{2l}}{l!}$$

donde $(1/2)_{-l} = \dfrac{(-1)^l}{(1/2)_l}$ y $(1)_{2l} = 4^l (1/2)_l (1)_l$

$$\therefore \quad J_l = \frac{1}{2}\pi \sum_{l\geq 0} \frac{\cancel{(1/2)_l}\cancel{(-1)^l}}{(1/2)_l} \frac{\cancel{(1)_l}}{4^l (1/2)_l \cancel{(1)_l}} \cancel{(-1)^l} A^{2l}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{l\geq 0} \frac{1}{(1/2)_l} \frac{\left(\frac{A^2}{4}\right)^l}{l!} = \frac{\pi}{2}\, {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{A^2}{4} \right)$$

Finalmente :

$$J = J_n + J_e$$ (Ambos terminos tienen el mismo argumento $\left(\frac{A^2}{4}\right)$)

$$J = \frac{\pi}{2}\left[-A\, {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{A^2}{4}\right) + {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{A^2}{4}\right)\right]$$

pero:

$${}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{A^2}{4}\right) = \cosh(A)$$

$$A\, {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{A^2}{4}\right) = \operatorname{senh}(A)$$

$$\therefore\ J = \frac{\pi}{2}\left[-\operatorname{senh}(A) + \cosh(A)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\underbrace{\left[\operatorname{senh}(-A) + \cosh(-A)\right]}_{e^{-A}}$$

Finalmente

$$J = \pi/2\, e^{-A}$$

EJEMPLO | SOLUCIÓN

Evalúe la integral:

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{e^{\beta x} + A}\, dx$$

PASO 1: EXPANSIÓN DEL INTEGRANDO

$$\frac{1}{e^{\beta x} + A} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \phi_{n_1, n_2} \left(e^{\beta x}\right)^{n_1} A^{n_2} \langle 1 + n_1 + n_2 \rangle$$

$\therefore$

$$\frac{x^\alpha}{e^{\beta x} + A} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \phi_{n_1, n_2} x^\alpha A^{n_2} \underbrace{e^{\beta x n_1}} \langle 1 + n_1 + n_2 \rangle$$

expandimos este factor

$$e^{\beta x n_1} = e^{\frac{g}{g} \beta x n_1}$$

; el g del numerador lo hacemos $g = -1$ el del denominador lo reemplazamos al final de todo el cálculo.

$$= e^{-\frac{\beta}{g} x n_1} = \sum_{n_3} \phi_{n_3} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{n_3} x^{n_3} (n_1)^{n_3}$$

Finalmente la expansión del integrando es:

$$\frac{x^\alpha}{e^{\beta x} + A} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \phi_{n_1, n_2, n_3} A^{n_2} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{n_3} (n_1)^{n_3} x^{\alpha + n_3} \langle 1 + n_1 + n_2 \rangle$$

PASO 2: SERIE DE BRACKETS DE LA SOLUCIÓN

$$J(\alpha) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \phi_{n_1, n_2, n_3} A^{n_2} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{n_3} (n_1)^{n_3} \langle 1 + n_1 + n_2 \rangle \langle \alpha + n_3 + 1 \rangle$$

$$J(\alpha) = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} \phi_{1,2,3}\, A^{n_2} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{n_3} n_1^{\,n_3} \langle 1+n_1+n_2\rangle \langle \alpha+n_3+1\rangle$$

PASO 3: SOLUCIONES

Obs. $\binom{3}{2}=3$ formas de evaluar la serie

caso 1 : n_1 libre $\Rightarrow$ Obtenemos el término J_1

$$\Downarrow$$

$$n_2 = -1-n_1$$

$$n_3 = -1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \begin{pmatrix} n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-n_1 \\ -1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-n_1 \\ -1-\alpha \end{pmatrix} \quad y \quad \det M_1 = 1.$$

Luego

$$J_1 = \sum_{n_1 \geq 0} \phi_{n_1} A^{n_2} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{n_3} n_1^{\,n_3} \frac{\Gamma(-n_2)\Gamma(-n_3)}{\underbrace{|\det M_1|}_{1}}$$ o equivalentemente

reemplazando los valores hallados para n_2 y n_3 y haciendo $n_1 = n$, tenemos:

$$J_1 = \sum_{n\geq 0} \phi_n A^{-1-n} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{-1-\alpha} n^{-1-\alpha} \Gamma(1+n)\Gamma(1+\alpha)$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{g}{\beta}\right)^{1+\alpha} \Gamma(1+\alpha) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\cancel{n!}} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \cancel{\Gamma(n+1)} \left(\frac{1}{A}\right)^n \text{ ; como } g=-1$$

$$= \frac{1}{A} \frac{(-1)^{1+\alpha}}{\beta^{1+\alpha}} \Gamma(1+\alpha) \sum_{n\geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{A}\right)^n}{n^{1+\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{A\beta^{1+\alpha}} (-1)^{\alpha} \Gamma(1+\alpha) \sum_{n\geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{A}\right)^n}{n^{1+\alpha}}$$

Respecto a esta solución, si $\alpha > -1$: la suma diverge para $n=0$

<u>caso 2:</u> n_2 libre, obtenemos el término J_2.

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-n_2 \\ -1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-n_2 \\ -1-\alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det M_2 = 1$$

Luego el término obtenido es:

$$J_2 = \frac{1}{|\det M_2|} \sum_{n_2\geq 0} \phi_{n_2} A^{n_2} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{n_3} n_1^{n_3} \Gamma(-n_1)\Gamma(-n_3)$$

reemplazando los valores para n_1 y n_3 y haciendo $n_2 = n$:

$$J_2 = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\cancel{\Gamma(n+1)}} A^{n_2} \left(\frac{\beta}{g}\right)^{-1-\alpha} (-1-n)^{-1-\alpha} \cancel{\Gamma(1+n)} \Gamma(1+\alpha)$$

$$= \left(\frac{\beta}{g}\right)^{-1-\alpha} (-1)^{-1-\alpha} \Gamma(1+\alpha) \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-A)^n}{(1+n)^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\beta^{1+\alpha}} \frac{(-1)^{-1-\alpha}}{g^{-1-\alpha}} \Gamma(1+\alpha) \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-A)^n}{(1+n)^{1+\alpha}} \quad ; \text{pero } g = -1$$

$\therefore$

$$J_2 = \frac{1}{\beta^{1+\alpha}} \Gamma(1+\alpha) \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-A)^n}{(1+n)^{1+\alpha}}$$

<u>caso 3:</u> n_3 Libre, obteniendo el término J_3

$$\Downarrow$$

$$n_1 + n_2 = -1$$
$$0 = -1-\alpha-n_3$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_3} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1-\alpha-n_3 \end{pmatrix}$$

<u>Obs.</u> $\det M_3 = 0 \implies$ El sistema no tiene solución, luego J_3 no existe, no es generado.

Obs. La función polilogaritmo se define como:

$$Li_N(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k^N} \quad (*) \quad ; \text{ si hacemos } k = l+1 \Rightarrow l = k-1.$$

entonces:

$$Li_N(z) = \sum_{l\geq 0} \frac{z^{l+1}}{(l+1)^N} \quad (**)$$

de acuerdo a esta definición, (*) o (**) tenemos que:

$$J_2 = \frac{1}{\beta^{1+\alpha}} \Gamma(1+\alpha)\, Li_{1+\alpha}(-A)$$

$$J_1 = -\frac{1}{A\beta^{1+\alpha}} (-1)^\alpha \Gamma(1+\alpha) \sum_{n\geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{A}\right)^n}{n^{1+\alpha}} \quad ; \text{ Existe solo si } \alpha < -1 \Rightarrow \alpha = -|\alpha|$$

$$= -\frac{1}{A\beta^{1+\alpha}} (-1)^\alpha \Gamma(1+\alpha) \sum_{n\geq 1} \frac{\left(-\frac{1}{A}\right)^n}{n^{1-|\alpha|}}$$

$$= -\frac{1}{A\beta^{1+\alpha}} (-1)^\alpha \Gamma(1+\alpha)\, Li_{-(|\alpha|-1)}\left(-\frac{1}{A}\right)$$

ALGORITMO GENERAL

INTEGRAL ORIGINAL (Definida)

$\Downarrow$

GENERALIZAR LA INTEGRAL $\Longrightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{f(Cx)}{(Ax^\varepsilon+B)^\beta}\,dx$

$\Downarrow$

OBTENER LA SERIE DE BRACKETS

$\Downarrow$

OBTENER TODOS LOS TÉRMINOS DESDE LA SERIE DE BRACKETS

$\Downarrow$

DESCARTAR TODAS LAS CONTRIBUCIONES : NULAS $\wedge$ DIVERGENTES

$\Downarrow$

¿QUEDAN TÉRMINOS NO DESCARTADOS? $\Longrightarrow$ NO $\Longrightarrow$ EL MÉTODO NO APLICA A ESTA INTEGRAL

$\Downarrow$

SI

$\Downarrow$

LA SOLUCIÓN CORRECTA ESTA ENTRE LAS CONTRIBUCIONES NO DESCARTADAS

P-136