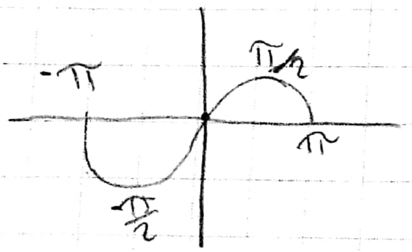
~~X~~ Método de Sustitución Trigonométrica.

Este es un método, el cual es un caso especial del método cambio variable y nos permite integrar funciones racionales del tipo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$$

Para resolver esta integral, notamos.



$$-\pi \quad \phi \qquad \phi \quad \pi$$

$$\text{Con } -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$$

$$-1 < \cancel{x} < 1$$

Si tomamos $x = \operatorname{Sen}(\phi)$

$$\phi = \operatorname{arcsen}(x)$$

* Entonces $dx = \operatorname{Cos}(\phi)\,d\phi$ podemos hacer el sgte cambio

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{Sen}^2\phi} = \sqrt{\operatorname{Cos}^2(\phi)} = |\operatorname{Cos}(\phi)|$$

Así:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\cancel{|\operatorname{Cos}(\phi)|}} \cdot \cancel{\operatorname{Cos}(\phi)} \cdot d\phi$$

$\hookrightarrow |\phi| + k$

Finalmente $\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = |\operatorname{arcsen}(x)| + k$

Cuando en el denominador se tiene $\sqrt{a-x}$

$\rightarrow \int \frac{A}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ * Se utiliza cambio

$x = a \cdot Sen(\phi)$ con $a > 0$ y $x \in (-a, a)$
$\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\phi (-\pi, \pi)$

Asi podemos simplificar siempre de forma

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-(a\,sen(\phi))^2} = \sqrt{a^2-a^2 sen^2(\phi)}$$

$$\rightarrow \sqrt{a^2(1-Sen^2(\phi))} = a \cdot |Cos\,\phi|$$

Ej Encuentre el area del circulo de radio 2 cm

$A = \pi r^2 = 4\pi$

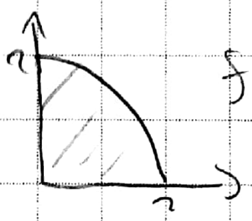
$A_0 = 4 \cdot \int_0^2 \sqrt{2^2-x^2}$

$a > 0$; $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

entonces tomando el cambio

$x = 2\,Sen(\phi)$ / d

$dx = 2\,Cos(\phi)\,d\phi$



$f \rightarrow$ Area $\cdot 4$

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$y = \sqrt{4-x^2}$

$y^2 = 4-x^2$

$x^2+y^2=4$

Se tiene

$$\sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - 4\,\mathrm{Sen}^2\,\phi} = \sqrt{4(1 - \mathrm{Sen}^2(\phi))}$$

$$\hookrightarrow 2\sqrt{\mathrm{Cos}^2(\phi)} = 2\,|\mathrm{Cos}\,\phi|$$

Asi $A_o = 4\int_0^2 2\,|\mathrm{Cos}(\phi)| \cdot 2\cos\phi\, d\phi$ =

$$\hookrightarrow 16\int_0^2 \mathrm{Cos}^2(\phi)\, d\phi \rightarrow 16\int_0^2 \left(\frac{1+\mathrm{Cos}(2\phi)}{2}\right) d\phi$$

$$\hookrightarrow 8\int_0^2 d\phi + 8\int_0^2 \mathrm{Cos}(2\phi)\, d\phi$$

$$\hookrightarrow 8\phi \Big|_0^2 + \frac{8\,\mathrm{Sen}(2\phi)}{2}\Big|_0^2$$

Para devolver el cambio $x = 2\,\mathrm{sen}\,\phi$

$$\phi = \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Finalmente.

$$A_o = 4\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

$\hookrightarrow$

$$8\left(\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2 - 4\,\mathrm{Sen}\left(2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\right.\right.$$

$$\hookrightarrow 8(\mathrm{arcsen}(1) - \mathrm{arcsen}(0)) - 4(\mathrm{Sen}(2(\mathrm{arcsen}\ldots$$

$\hookrightarrow$ ...

Scanned by CamScanner

Caso II : Integración por sustitución Trigonométrica

Si tenemos la sgte. forma algebraica

$\int \sqrt{a^2+x^2}$, entonces se recomienda tomar el cambio

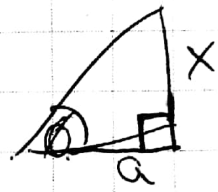
$x = a \cdot tg(\phi)$; con $a > 0 \wedge -\pi/2 < \phi \leq \pi/2$

Asi tenemos:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2 tg^2(\phi)} = |a| \sqrt{(1+tg^2(\phi))}$$

$$\hookrightarrow |a| \sqrt{sec^2(\phi)} = \boxed{a \sec(\phi)}$$

Obs $\phi = arctg\left(\frac{x}{a}\right)$



Ej #1 $\sqrt{2+x^2}$ -> Cont. en $\mathbb{R}$
$2+x^2 \geq 0$

$$\int \sqrt{2+x^2}\, dx \to \int \sqrt{(\sqrt{2})^2+x^2}\, dx$$

1) Como tenemos la forma algebraica $\sqrt{(\sqrt{2})^2+x^2}$ podemos usar el cambio trigon.

$x = \sqrt{2} \cdot tg(\phi)$, entonces $dx = \sqrt{2} \cdot Sec^2\phi\, d\phi$

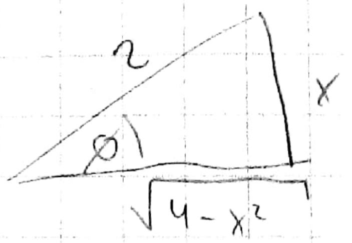
$$\sqrt{(\sqrt{2})^2+x^2} = \sqrt{2+(\sqrt{2} \cdot tg(\phi))^2} = \sqrt{2+2tg^2(\phi)}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+tg^2\phi} = \sqrt{2}\sqrt{Sec^2(\phi)} \longrightarrow$$

$$\hookrightarrow \sqrt{2} \cdot Sec(\phi)$$

Fecha:

* Caso de la circunferencia



$$A = 4\int_0^2 \sqrt{2-x^2}\, dx = 8\left[\phi + \frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen}(2\phi)\right]\Big|_0^2$$

$x = 2\operatorname{sen}\phi$ $\qquad$ $\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$

$\operatorname{sen}\phi = \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2\phi = 1 - \dfrac{x^2}{4}$ $\left\{ \dfrac{x}{2} = \operatorname{sen}\phi \right.$

$\phi = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos\phi = \sqrt{\dfrac{4-x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

$$A = 8\left[\phi + \frac{1}{2}\, 2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\right]\Big|$$

$$= 8\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cancel{2}\,\frac{x}{\cancel{2}}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right]\Big|_0^2 = 4\pi$$

Así:

$$\int \sqrt{2+x^2}\, dx = \int \sqrt{2}\sec(\phi)\cdot\sqrt{2}\cdot\sec^2\phi\, d\phi$$

$$= 2\int \sec^2(\phi)\,\sec(\phi)\, d\phi$$

Tarea

Fecha:

Ej # 2

$$\int (1+x^2)^{-2}\, dx = \int \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^4}$$

Tomando el cambio $x = 1 \cdot tg\,\phi$

$dx = Sec^2\phi\, d\phi$

Entonces

$$\int (1+x^2)^{-2}\, dx = \int \frac{1}{(Sec^2\phi)^4} \cdot sec^2\phi\, d\phi$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{Sec^2\phi}\, d\phi = \int \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{Cos^2\phi}}\, d\phi = \int Cos^2\phi\, d\phi$$

$$\hookrightarrow \int \frac{1+Cos(2\phi)}{2}\, d\phi \rightarrow \frac{1}{2}\int d\phi + \frac{1}{2}\int Cos(2\phi)\, d\phi$$

$$\rightarrow \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2}\int Cos(2\phi)\, d\phi \rightarrow$$

$u = 2\phi$

$du = 2\,d\phi$; $\frac{du}{2} = d\phi$

$\int Cos(u)\frac{du}{2} = \frac{Sen(u)}{2}$

$$\hookrightarrow \frac{\phi}{2} + \frac{Sen(2\phi)}{4} + K$$

Caso III

Fecha:

x es incognita

a = numero

Si en el integrando tenemos la forma radical $\sqrt{x^2-a^2}$ tenemos el cambio

$\boxed{x = a\sec(\phi)}$ con $a>0$ y $\phi \in [\,[0, \pi/2), \pi/2$

entonces $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2(\phi)-a^2}$

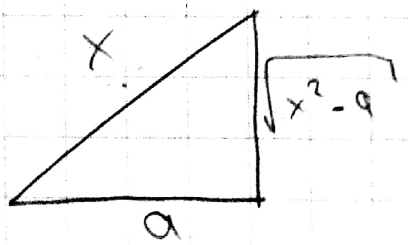
$$= \sqrt{a^2(\sec^2(\phi)-1)}$$

$$= a\sqrt{tg^2(\phi)} \to \boxed{a\,tg(\phi)}$$

Obs: para obtener ϕ

$$\phi = \begin{cases} \text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) ; \text{ si } x > a \\ 2\pi - \text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) ; \text{ si } x < -a \end{cases}$$

* Se puede usar triangulo



$$x = a\sec(\phi)$$

$$\frac{x}{a} = \sec(\phi) = \frac{1}{\cos(\phi)}$$

$$\frac{a}{x} = \cos(\phi)$$

Fecha:

Resumen

Luego del Cambio

$\sqrt{a^2 - x^2} \longrightarrow x = a\,\text{Sen}(\varnothing) \Rightarrow a\,\text{Cos}(\varnothing)$

$\sqrt{a^2 + x^2} \longrightarrow x = a\,\text{tg}(\varnothing) \Rightarrow a\,\text{sec}(\varnothing)$

$\sqrt{x^2 - a^2} \longrightarrow x = a\,\text{sec}(\varnothing) \rightarrow a\,\text{tg}(\varnothing)$

Ej $\int (x^2 - 25)^{-1}\, dx$ Cont $\mathbb{R} - \{-5, 5\}$

reescribiendo $\int \frac{1}{(x^2 - 25)}\, dx \rightarrow \int \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 5^2})^2}\, dx$

Cambiamos $x = 5 \cdot \text{sec}(\varnothing)$

$dx = 5 \cdot \text{sec}\,\varnothing\, \text{tg}(\varnothing)\, d\varnothing$

$\int \frac{1}{(5\,\text{tg}(\varnothing))^2} \cdot 5\, \text{Sec}\,\varnothing\, \text{tg}(\varnothing)\, d\varnothing$

$\int \frac{5}{125 \cdot 5\, \text{tg}^2\varnothing} \cdot \text{Sec}(\varnothing)\, \text{tg}(\varnothing)\, d\varnothing$

$$\int_{-3}^{0} (x+1)\, dx$$ Usando Riemann

Scanned by CamScanner

Fracciones Parciales.

Este método nos permitirá integrar cierta clase de funciones racionales de formas cocientes polinomiales.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx. \quad \text{Con } Q(x) \neq 0$$

Ejemplo (Ilustrativo):

$$\int \frac{x^2+x+3}{(x-2)}\,dx \rightarrow \text{Divido} \rightarrow \int \frac{(x-2)(x+3)+9}{(x-2)}$$

$$\rightarrow \int (x+3)\,dx + 9\int \frac{dx}{(x-2)} \rightarrow$$

Caso I:

(Q(x) tiene raíces reales y distintas.)

$\left(\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\right)$: Cuando la factorización de Q(x) es en factores lineales y distintos es decir,

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

Podemos hacer la sgte descomposición.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

Donde A_1, A_2, A_n: son ctes reales que se obtienen de resolver un sistema de ecuaciones.

→ Nótese que efectuada la descomposición, la integración dada es más sencilla.

$$\int \frac{A_n}{(x-a_n)}\,dx = \ln|x-a_n| + K$$

Ej

$$\int \frac{dx}{x^2-16} \to \frac{1}{(x+4)(x-4)} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x-4)}$$

$$\to \frac{1}{(x+4)(x-4)} = \frac{Ax - 4A + Bx + 4B}{(x+4)(x-4)}$$

$$1 = Ax + Bx - 4A + 4B$$

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = -4A + 4B \end{cases}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{8} \;;\; A = -\frac{1}{8}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{-1}{8(x+4)} + \frac{1}{8(x-4)}$$

$$\to \frac{1}{8}\left(-\int \frac{1}{(x+4)}dx + \int \frac{1}{(x-4)}dx\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{8}\left(-\ln|x+4| + \ln|x-4|\right)$$

Así:

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \frac{\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|}{8} + Cte$$

Caso II (Q(x) tiene todas las raíces reales, pero alguna con multiplicidad mayor a 1; es decir se repiten raíces.)

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$; Cuando la factorización del polinomio

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_n)^{n_n},$$ ~~(por cada~~

↳ Por cada factorial lineal aparecerán tantas fracciones como multiplicidad tenga el factor $(x-a_n)^{n_n}$. Así se tiene

$$\frac{A_1}{(x-a_n)} + \frac{A_2}{(x-a_n)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a_n)^{n_n}}$$ donde

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$$

Fecha:

Ej: $\int \frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x}\,dx \rightarrow$ Cont $\mathbb{R}-\{0,2\}$

Procedemos a descomponer

$$\frac{3x+8}{x(x^2-4x+4)} = \frac{3x+8}{x(x-2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\frac{3x+8}{\cancel{x(x-2)^2}} = \frac{Ax^2 - A4x + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx}{\cancel{x(x-2)^2}}$$

$$3x+8 = (A+B)x^2 + x(-4A-2B+C) + 4A$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -4A-2B+C=3 \\ \quad 4A = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=2 \\ B=-2 \\ C=7 \end{array}$$

Así: $\int \frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x} = 2\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{(x-2)}dx + 7\int \frac{1}{(x-2)^2}dx$

$\rightarrow 2 \cdot \ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{7}{(x-2)} + k$

$x-2 = u \rightarrow du = dx$

$$\int \frac{1}{(u)^2}du \Rightarrow \int u^{-2}\,du \rightarrow -u^{-1} \rightarrow -\frac{1}{u} \rightarrow -\frac{1}{x-2}$$

Scanned by CamScanner

Fecha:

Caso III (Q(x) posee raices complejas distintas y conjugadas

Cuando la factorización de Q(x) aparecen factores cuadraticos de la forma ($ax^2 \pm bx \pm c = 0$)

Con $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ raices complejas.

A cada uno de los factores le correspondera una funcion parcial de la forma

$$\left(\frac{ax + B}{ax^2 \pm bx \pm c} \right)$$

Una Posible descomposición de Q(x), se puede realizar por raiz.

Ej: $\int \frac{3x+1}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx$

Caso 4 ($Q(x)$ tiene raíces complejas y conjugadas con multiplicidad mayor a 1).

Cuando en la factorización del Polinomio "Q_x" tenemos formas

$$(ax^2 \pm bx \pm c)^n \quad \text{con } n \geq 1 \text{ y}$$

$$b^2 - 4ac < 0 .$$

A cada uno de estos factores les corresponden fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 \pm bx \pm c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 \pm bx \pm c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 \pm bx \pm c)^n}$$

Por esto se resuelve un sistema de ecuaciones "n"-ésimo para hallar la solución de la integral

EXAMEN #1 12/10/18

P.P. S. S.T. F.P.

Ejercicios claves 5/10/18

① $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$ ② $\int sen^2(x)\cos^3(x)\,dx$ 3) $\int sen^2(x)\cos^2(x)$ d

④ $\int \frac{x\,arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ⑤ $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

7) $\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+5x}\,dx$ 8) $\int \frac{x^2}{x^4+2x+1}\,dx$