

## FÍSICA TEÓRICA 1

Ecuações de Maxwell (CGS Gaussiano) en vacío:

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho \quad (\text{Ley de Gauss})$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (\text{Inexistencia de monopolos})$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère generalizada})$$

Corriente de desplazamiento  
(necesaria para conservar la carga)

Tomando  $\frac{\partial}{\partial t}$  de la ley de Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \left( \nabla \times \underline{B} - \frac{4\pi}{c} \underline{J} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{J} = 0 \quad (\text{Ec. de continuidad})$$

Campos de gradientes y rotORES

Dado un campo vectorial  $\underline{w}(x)$ , se puede descomponer unívocamente\* como

$$\underline{w} = \underline{v} + \underline{u}$$

$$\text{t.p } \nabla \times \underline{v} = 0 \quad (\text{irrotacional}) \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{solenoideal})$$

Dem: como  $\nabla \times \underline{V} = 0 \Rightarrow \exists \varphi / \nabla \varphi = \underline{V}$

Tomando la divergencia

$$\nabla \cdot \underline{W} = \nabla^2 \varphi \quad (\text{Ec. de Poisson})$$

La ec. tiene solución

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \underline{W}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 \underline{r}'$$

y luego  $\underline{V} = \nabla \varphi$ .

Luego  $\underline{U} = \underline{W} - \underline{V} = \underline{W} - \nabla \varphi$

Veamos que es solenooidal

$$\nabla \cdot \underline{U} = \nabla \cdot \underline{W} - \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \varphi - \nabla^2 \varphi = 0$$

Además, como  $\nabla \cdot \underline{U} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A} / \underline{U} = \nabla \times \underline{A}$

y  $\underline{W} = \nabla \times \underline{A} + \nabla \varphi$

(\* esta descomposición final es única salvo por un gradiente en la determinación de  $\underline{A}$ ).

Para determinar  $\underline{A}$  tomamos

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{W} &= \nabla \times \nabla \times \underline{A} + \nabla \times (\nabla \varphi) = \\ &= \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos pedir  $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{W} = -\nabla^2 \underline{A}$$

El laplaciano de un vector está definido como

$$(\nabla \times \underline{W})_i = -\nabla^2 A_i \quad i = 1, 2, 3$$

i.e., el laplaciano de cada componente.

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \underline{W}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'$$

### Notación de índices

Representaremos las componentes de vectores y tensores por subíndices, y utilizaremos convención de la suma para índices repetidos. Antes, definiremos dos tensores útiles

Tensor de Kronecker: Es un tensor de rango 2 tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Tensor de Levi-Civita: Es un pseudo-tensor de rango 3 tal que sus componentes son

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j,k \text{ es permutación par de } x,y,z \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ es permutación impar de } x,y,z \\ 0 & \text{si se repite algún índice} \end{cases}$$

Luego podemos escribir

$$(\underline{A} \times \underline{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$\text{Ej: } (\underline{A} \times \underline{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

Si  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  son vectores  $\Rightarrow \underline{A} \times \underline{B}$  es un pseudovector.

Usaremos esto para probar (1):

$$\begin{aligned}
 [\nabla \times (\nabla \times \underline{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \underline{A})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l A_m) = \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = \\
 &= \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i \\
 \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) &= \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A}
 \end{aligned}$$

### Electrostática :

La fuerza que siente una carga  $q_1$  en  $\underline{r}_1$  debida a una carga  $q_2$  en  $\underline{r}_2$  es

$$F_{12} = k q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \quad (\text{Ley de Coulomb})$$

$(k=1 \text{ en CGS-gaussiano})$

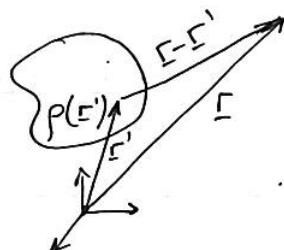
Notar que  $F_{12} = -F_{21}$  y la fuerza está dirigida a lo largo de la recta que une las dos cargas (satisface el pprio. de acción fuerte).

El campo eléctrico en un pto.  $\underline{r}$  se define como

$$\underline{E}(\underline{r}) = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\underline{F}(\delta q(\underline{r}))}{\delta q(\underline{r})} \quad \text{con } \delta q \text{ carga de prueba}$$

Luego, dada una distribución de carga  $\rho(\underline{r})$  el campo en  $\underline{r}$  es

$$d\underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}') \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} d^3 r'$$



$$\text{y } E(\underline{r}) = \int \frac{\rho(\underline{r}') (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3 r'$$

← ppio. de superposición  
con Coulomb pto. a pto.

$$\text{t.p. } E = q E$$

En muchos casos, la distribución de carga no está dada en volumen (ej: densidad de carga en superficie, cargas puntuales, etc.)

### Distribuciones

Dadas una sucesión de funciones  $\{f_n(x)\} \in L^2(-\infty, \infty)$

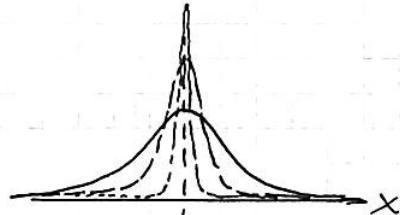
$$\text{t.p. } \forall g(x) \in L^2(-\infty, \infty)$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) g(x) dx \quad \text{es finita}$$

Puede ocurrir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \notin L^2(-\infty, \infty)$

Ejemplo:  $\{f_n(x)\} = N_n e^{-nx^2}$  con  $N_n$  normalización

$$\text{i.e. t.p. } \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1 \quad \forall n$$



Sin embargo, la sucesión

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) g(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I$$

puede tener un límite bien definido.

$\Rightarrow$  La sucesión  $\{f_n(x)\}$  define una distribución  $\Gamma(x)$ .

Def: La distribución  $\Gamma(x)$  asociada a  $\{f_n(x)\}$  es t.p.

$$\int \Gamma(x) \rho(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \rho(x) dx$$

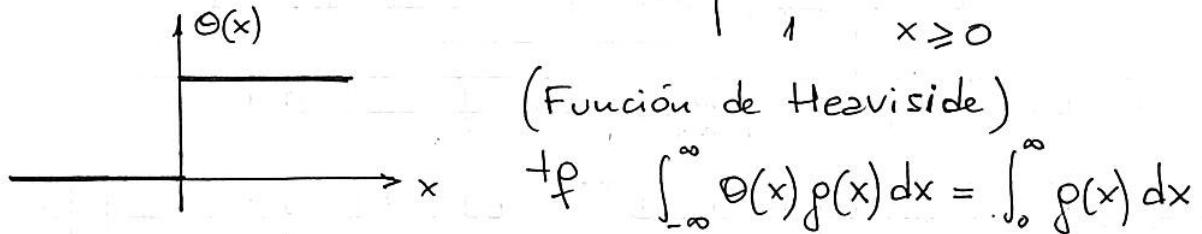
Ejemplo:  $\delta(x)$  (Delta de Dirac)

Def:  $\int \delta(x) \rho(x) dx = \rho(0)$

Definición: La distribución  $\Gamma' = \frac{d\Gamma}{dx}$  satisface

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dx} \rho(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_n}{dx} \rho(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \cancel{f_n(x) \rho(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \frac{d\rho}{dx} dx \right\} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x) \rho'(x) dx \end{aligned}$$

Ejemplo: Distribución  $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

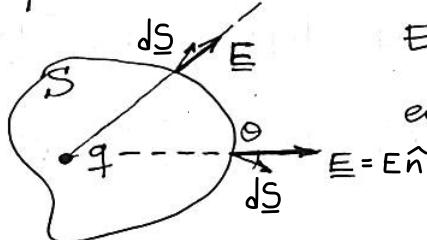


Luego

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x) \rho(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \rho'(x) dx = - \int_0^{\infty} \rho'(x) dx = \\ &= +\rho(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Theta'(x) = \delta(x)$$

Ley de Gauss



El campo generado por  $q$  en  $\Sigma'$  en un pto  $\Sigma$  es

$$E(\Sigma) = \frac{q (\Sigma - \Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|^3}$$

Calculamos el flujo por la superficie cerrada S es

$$\begin{aligned}\oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} &= \oint_S q \frac{\underline{q}(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \cdot d\underline{s} = \oint_S q \frac{\hat{n} \cdot d\underline{s}}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} = \\ &= \oint_S q \frac{\cos \theta dS}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \quad \left( \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \hat{n} \right)\end{aligned}$$

$$y \cos \theta dS = r^2 d\Omega \quad (\text{área sólida}) \quad (r = |\underline{r}-\underline{r}'|^2)$$

$\Rightarrow$  es la proyección sobre una esfera unitaria centrada en  $\underline{r}'$ . Luego

$$\oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = \begin{cases} 4\pi q & \text{si } \underline{r}' \text{ en el interior de } S \\ 0 & \text{si } \underline{r}' \text{ afuera} \end{cases}$$

$$\text{En el caso general } E(\underline{r}) = \int \rho(\underline{r}') \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} d^3 r'$$

y esta integral es sobre  $\underline{r}'$ , mientras que la integral del flujo es sobre  $\underline{r}$ . Usando superposición

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{s} = 4\pi \int \rho(\underline{r}') dV' = 4\pi Q_{\text{ENC}}$$

Usando el teo. de Gauss

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_{V(S)} \nabla \cdot \underline{E} dV = \int 4\pi \rho(\underline{r}) dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho} \quad \text{Ley de Gauss}$$

## Potencial electrostático

Notar que  $\frac{\Sigma - \Sigma'}{|\Sigma - \Sigma'|^3} = -\nabla_{\Sigma} \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right) = \nabla_{\Sigma'} \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right)$

Luego podemos escribir

$$\mathbb{E}(\Sigma) = - \int \rho(\Sigma') \nabla_{\Sigma} \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right) d^3\Sigma' = - \nabla_{\Sigma} \left( \int \frac{\rho(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} d\Sigma' \right)$$

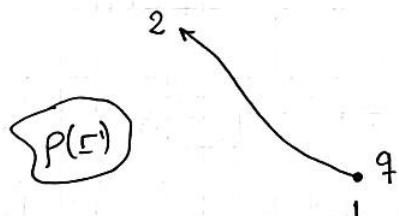
$$\Rightarrow \mathbb{E}(\Sigma) = - \nabla \varphi^* \quad \text{con} \quad \varphi(\Sigma) = \int \frac{\rho(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} d\Sigma' + \text{cte.}$$

Usando la ley de Gauss:

\* Luego  $\nabla \times \mathbb{E} = 0$

$$\nabla \cdot (-\nabla \varphi) = 4\pi\rho \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho} \quad \text{Ec. de Poisson}$$

El potencial electrostático tiene además una interpretación física bien definida. Calcularemos el trabajo para llevar una carga  $q$  de un pto. 1 a 2 contra la fz. electrostática

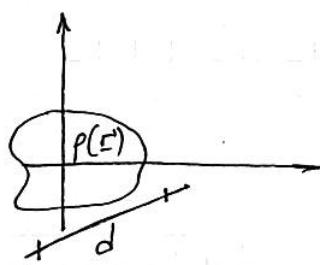


$$W = - \int_1^2 q \mathbb{E} \cdot d\ell = q \int_1^2 \nabla \varphi \cdot d\ell = q (\varphi(2) - \varphi(1))$$

independiente del camino.

### Desarrollo multipolar de $\varphi$

Consideremos una distribución de carga localizada en una región de long.  $d$ , y miremos el potencial para  $|\Sigma| \gg d$ . Por Taylor alrededor de  $\Sigma' = 0$



$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} &= \frac{1}{|\Sigma|} + \partial_i' \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right)_{\Sigma'=0} \cdot \Sigma'_i + \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_i' \partial_j' \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right)_{\Sigma'=0} \Sigma'_i \Sigma'_j + \dots \end{aligned}$$

$$\gamma \quad \partial_i' \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right)_{\Sigma'=0} = \frac{r_i - r_i'}{|\Sigma - \Sigma'|^3} \Big|_{r_i'=0} = \frac{r_i}{|\Sigma|^3}$$

$$\begin{aligned} \partial_i' \partial_j' \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right)_{\Sigma'=0} &= \partial_j' \left( \frac{r_i - r_i'}{|\Sigma - \Sigma'|^3} \right) = \left[ -\frac{\delta_{ij}}{|\Sigma - \Sigma'|^3} + \frac{3(r_i - r_i')(r_j - r_j')}{|\Sigma - \Sigma'|^5} \right]_{\Sigma'=0} \\ &= \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \phi(\Sigma) &= \int dV' \rho(\Sigma') \left\{ \frac{1}{r} + \frac{r_i r_i'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} r_i' r_j' + \dots \right\} \\ &= \phi^{(0)}(\Sigma) + \phi^{(1)}(\Sigma) + \phi^{(2)}(\Sigma) + \dots \end{aligned}$$

1) Término monopolar:

$$\phi^{(0)}(\Sigma) = \frac{Q}{r} \quad \text{con } Q = \int \rho(\Sigma') dV'$$

Una distribución de carga con  $Q \neq 0$  se ve como una carga puntual si  $\Sigma$  es lo suficientemente grande.  $\phi^{(0)}$  es isotrópico y  $\phi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 1/r$  si  $Q \neq 0$

2) Término dipolar:

$$\phi^{(1)}(\Sigma) = \frac{P \cdot \Sigma}{r^3} \quad \text{con } P = \int \rho(\Sigma') \Sigma' dV$$

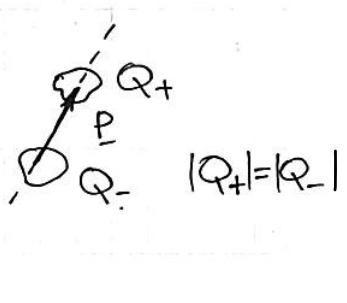
(momento dipolar eléctrico)

Si  $Q=0$  y  $P \neq 0$ ,  $\phi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 1/r^2$   
y tiene una dirección privilegiada en el espacio.

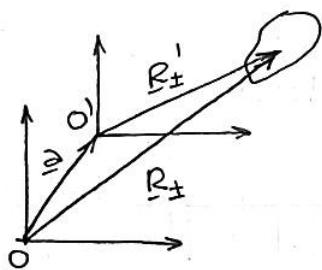
Consideremos dos dist. de carga

$$P = Q_+ R_+ + Q_- R_- = Q_+ (R_+ - R_-)$$

si  $|Q_+| = |Q_-|$



Tomando cambio de origen



$$\underline{R}'_{\pm} = \underline{R}_{\pm} - \underline{\alpha}$$

$$\Rightarrow P' = Q_+ (\underline{R}_+ - \underline{\alpha}) + Q_- (\underline{R}_- - \underline{\alpha}) =$$

$$= P - (Q_+ + Q_-) \underline{\alpha} =$$

$$= P - Q \underline{\alpha} \quad \text{depende del origen}$$

Si  $Q=0 \Rightarrow P=P'$  y el momento es indep. del origen.

? Existe alguna distribución puntual t.p. el pot. exacto sea

$$\phi(\Sigma) = \frac{P \cdot (\Sigma - \Sigma_0)}{|\Sigma - \Sigma_0|^3} ?$$

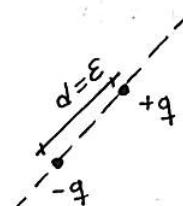
Puedemos

$$\phi(\Sigma) = \underbrace{\frac{Q}{r}}_{\substack{\Sigma \\ O}} + \underbrace{\frac{\Sigma \cdot \int p(\Sigma') \Sigma' dV'}{r^3}}_{\substack{\Sigma' \\ O}} + \dots$$

Pedimos  $Q=0$  y

$$\left. \begin{array}{l} p \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{taq } pd \rightarrow p \text{ finito}$$

vale como  
 $p d^2$  o mayor



$$\begin{aligned} \phi(\Sigma) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ qd \rightarrow p}} \frac{q}{|\Sigma - (\Sigma' + \varepsilon \hat{p})|} - \frac{q}{|\Sigma - \Sigma'|} = \\ &= \lim \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{q \varepsilon}{|\Sigma - (\Sigma' + \varepsilon \hat{p})|} - \frac{q \varepsilon}{|\Sigma - \Sigma'|} \right] = \\ &= P \frac{\partial'}{\partial \hat{p}} \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right) = \frac{P \cdot (\Sigma - \Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|^3} \end{aligned}$$

$$\gamma \quad p_P(\Sigma) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty \\ qd \rightarrow p}} q \delta(\Sigma - (\Sigma' + \varepsilon \hat{p})) - q \delta(\Sigma - \Sigma') =$$

$$= \lim \frac{1}{\varepsilon} [ \varepsilon q \delta(\Sigma - (\Sigma' + \varepsilon \hat{p})) - \varepsilon q \delta(\Sigma - \Sigma') ] =$$

$$= P \frac{\partial'}{\partial \hat{p}} \delta(\Sigma - \Sigma')$$

$$\Rightarrow \rho_p(\underline{r}) = (\underline{P} \cdot \nabla') \delta(\underline{r} - \underline{r}') = -(\underline{P} \cdot \nabla) \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Podemos introducir un dipolo puntual como

$$\underline{P}(\underline{r}) = \underline{p} \delta(\underline{r} - \underline{r}') \Rightarrow \rho_p(\underline{r}) = -\nabla \cdot \underline{p}$$

3) Término cuadrupolar:

$$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} \right) C_{ij} \quad \text{con } C_{ij} = \int \rho(\underline{r}') r_i' r_j' dV'$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) C_{ij} &= (3r_i r_j - \delta_{ij} r_k r_\ell \delta_{k\ell}) C_{ij} = \\ &= \underbrace{(3r_i r_j - \delta_{k\ell} \delta_{ij} r_k r_\ell)}_{\delta_{ij} \delta_{k\ell} r_i r_j C_{kl}} C_{ij} = r_i r_j (3C_{ij} - C_{kk} \delta_{ij}) \end{aligned}$$

y tomando  $Q_{ij} = 3C_{ij} - C_{kk} \delta_{ij}$  (tensor momento quadrupolar)

$$\Rightarrow Q_{ij} = \int \rho(\underline{r}') (3r_i' r_j' - \delta_{ij}' r'^2) dV'$$

y  $\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \frac{r_i r_j}{r^5} Q_{ij} \xrightarrow{\underline{r} \rightarrow \infty} 1/r^3$

Notar que  $\text{tr } \underline{Q} = Q_{ii} = 0$  y  $\underline{Q}$  simétrico.

Se puede diagonalizar y obtener ejes ppales. Mide cuanto se aparta de una dist. esférica de carga.

### Campo electrostático en medios materiales

En un medio material, las cargas pueden desplazarse

como respuesta al campo aplicado. En un conductor, pueden desplazarse distancias macroscópicas y acumularse en los contornos, generando densidad superficial  $\sigma$  y  $E=0$  en el interior.

En un dielectrónico el reordenamiento es microscópico y el efecto dominante es el de polarización:

$$\nabla \cdot E = 4\pi (\rho_e + \rho_p) \quad \text{con} \quad \rho_p = -\nabla \cdot P$$

## Definimos

$$D = E + 4\pi P$$

## Vector desp. eléctrico

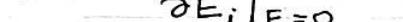
Además

$$\nabla \times E = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot D = 4\pi \rho_e} \quad \text{and} \quad \nabla \times D = 4\pi \nabla \times P$$

Veamos la relación entre  $P$  y  $E$  (relación constitutiva del medio): podemos desarrollar

$$P(E) = P(0) + \left. \frac{\partial P}{\partial E_i} \right|_{E=0} E_i + \left. \frac{\partial^2 P}{\partial E_i \partial E_j} \right|_{E=0} E_i E_j + \dots$$


  
 caracterizan el medio material

Si  $\underline{P}(0) \neq 0$  tienen polarización permanente (electretos).  
 Si  $\underline{P}(0) = 0$  y  $E$  débil tenemos respuesta lineal

$$P_i = \chi_{ij} E_j \quad \text{con} \quad \chi_{ij} = \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{E=0}$$

↗ tensor de susceptibilidad

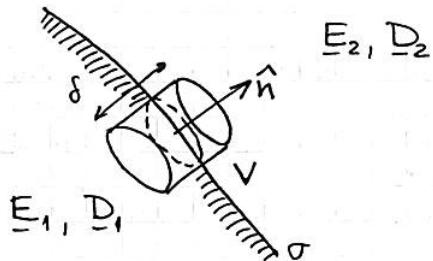
Si el medio es isotropo

$$\underline{P} = \chi \underline{E}$$

Dado  $\underline{P} = \chi \underline{E} \Rightarrow \underline{D} = (1 + 4\pi\chi) \underline{E} = \epsilon \underline{E}$

↑  
tensor de permitividad  
eléctrica

Condiciones de contorno para el campo  $E$  en interfaces



Tenemos  $\oint_S \underline{D} \cdot d\underline{S} = 4\pi Q_{enc}^L$

Para  $\delta \rightarrow 0$

$$\oint_S \underline{D} \cdot d\underline{S} = (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \hat{n} \delta$$

Además  $4\pi \int_V \rho d^3r = 4\pi \rho \delta S = 4\pi \sigma \delta$

$$\Rightarrow (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma$$

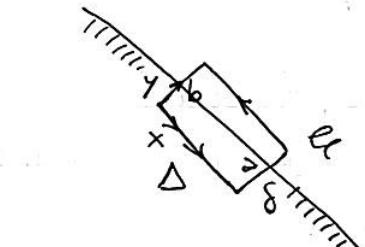
Si  $\epsilon = \frac{1}{\chi} \Rightarrow (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma$

$$1 \quad \left( -\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) = 4\pi \sigma$$

pero  $\varphi$  continuo:

Tenemos ahora  $\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0$

$$\Rightarrow (E_{x_1} - E_{x_2}) \Delta + (E_y^a - E_y^b) \delta = 0$$



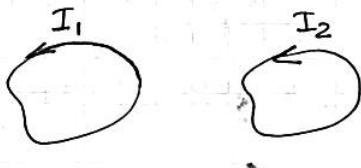
y para  $\delta \rightarrow 0$   $E_{x_1} = E_{x_2}$   
o bien

$$\hat{n} \times (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) = 0$$

y  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0 = \int E \cdot dl$

## Magnetostática:

La fuerza que siente un circuito 1 por el que circula una corriente  $I_1$ , debida a un circuito 2 con corriente  $I_2$  es



$$F_{12} = \frac{1}{c^2} \oint I_1 d\vec{l}_1 \times \oint \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

(Ley de Ampère)

Notar que, a diferencia de la ley de Coulomb, es una expresión global y que no está escrita para

cada elemento diferencial ( $I d\vec{l}$  no es equivalente a q: en el segmento  $d\vec{l}$ , la corriente debe venir de algún lado e ir a algún lado para satisfacer continuidad)  
Notar que de continuidad

$$\cancel{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \text{las líneas de corriente son cerradas!}$$

$\hookrightarrow$  estacionario

La expresión satisface acción y reacción:

$$F_{12} = \frac{1}{c^2} \oint \oint I_1 d\vec{l}_1 \times \left( I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right) =$$

$$= - \frac{1}{c^2} \oint \oint I_2 d\vec{l}_2 \times \left( I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right) = - F_{21}$$

$A \times B \times C = - B \times A \times C$

Puedo introducir un campo magnético, tomando  
 $F_1 = \frac{1}{c} \oint I_1 d\vec{l}_1 \times \underline{B}_2(\vec{r}_1)$

con  $\underline{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{1}{c} \oint \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$

y en general

$$\underline{d}(\Sigma')$$

$$B(\Sigma) = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{d}(\Sigma') \times (\Sigma - \Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|^3} d\Sigma'$$

## Ley de Ampère

$$\text{Tomemos} \quad \nabla \times \underline{B}(\underline{\sigma}) = \frac{1}{C} \nabla_{\underline{\sigma}} \times \left( \int \underline{j}(\underline{\sigma}') \times \underbrace{\frac{\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'}{|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|^3} dV'}_{\parallel} \right) \\ - \nabla_{\underline{\sigma}} \left( \frac{1}{|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|} \right) \equiv - \nabla_{\underline{\sigma}} \phi$$

$$\begin{aligned}
 [\nabla_{\vec{r}} \times (\vec{j} \times \nabla_{\vec{r}} \phi)]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} j'_e \partial_m \phi = \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j (j'_e \partial_m \phi) = \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}) \partial_j (j'_e \partial_m \phi) = \\
 &= \partial_m j'_i \partial_m \phi - \underbrace{\partial_e j'_e \partial_i \phi}_0 (*) = j'_i \nabla^2 \phi
 \end{aligned}$$

Vemos (\*). Reemplazando en la integral

$$\int dV' \partial_e j'_e \partial_i \phi = \partial_i \int dV' j'_e \partial_e \phi = -\partial_i \int dV' j'_e \partial'_e \phi =$$

$\uparrow$   
 $\nabla_E \phi = -\nabla'_E \phi$

$$= -\partial_i \left[ \int dV' \partial'_e (j'_e \phi) - \int dV' \phi \partial'_e j'_e \right] = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
pues  $\nabla \cdot j = 0$

pues es la integral de una div v  $\rightarrow \phi \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{B} = -\frac{1}{C} \int \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\nabla^2 \left( \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)}_{4\pi \delta(\underline{r}-\underline{r}')} dV' \quad \times \text{Ec. de Poisson}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{C} \underline{j}}$$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r)$$

## Potencial vector

Tenemos  $\underline{B}(\Sigma) = \frac{1}{c} \int \underline{j}(\Sigma') \times \left( -\nabla \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right) dV'$

Calculemos

$$[\underline{j}' \times (-\nabla \phi)]_i = -\varepsilon_{ijk} j'_j \partial_k \phi = \varepsilon_{ikj} \partial_k (j'_j \phi) = [\nabla \times (\underline{j}' \phi)]_i$$

$$\Rightarrow \underline{B} = \nabla \times \left( \frac{1}{c} \int \frac{\underline{j}(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} dV' \right)$$

Luego podemos escribir

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad \text{con} \quad \underline{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{j}(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} dV' + \nabla \chi$$

Luego

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

Usando la ley de Ampère

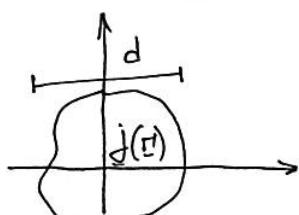
$$\nabla \times \underline{B} = \nabla \times \nabla \times \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A}$$

Eligiendo  $\nabla \cdot \underline{A} = 0$  ( $\chi = 0$ ) (este es el gauge de coulomb)

$$\nabla^2 \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}$$

## Desarrollo multipolar de $\underline{A}$

Tenemos una distribución con tamaño típico  $d$



$$\underline{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{j}(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} dV'$$

Si  $d \ll |\Sigma|$ , desarrollamos alrededor de

$$\Sigma' = 0$$

$$\frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} = \frac{1}{r} + \frac{r_i r_i'}{r^3} + \dots$$

Reemplazando en  $\underline{A}(\Sigma)$

$$\underline{A}(\Sigma) = \underbrace{\frac{1}{Cr} \int \underline{j}(\Sigma') dV'}_{\text{O}^*} + \underbrace{\frac{1}{Cr^3} \int (\Sigma \cdot \Sigma') \underline{j}(\Sigma') dV'}_{\underline{A}^{(1)}} + \dots$$

\* pues

$$\int j_i dV = \int (\partial_e r_i) j_e dV = \underbrace{\int \partial_e (r_i j_e) dV}_{\text{O}} - \int r_i \partial_e j_e dV$$

$\Rightarrow \text{O} \times \nabla \cdot \underline{j} = 0$

si  $\underline{j}$  localizada

Vemos el primer término no nulo

$$A_i^{(1)}(\Sigma) = \frac{1}{Cr^3} \int r_e r_e' j_i' dV'$$

$$\begin{aligned} \int r_e' j_i' dV' &= \int r_e' (\partial_k r_i') j_k' dV' = \cancel{\int \partial_k' (r_i' r_e' j_k') dV'} - \\ &\quad - \cancel{\int (\partial_k' j_k') r_i' r_e' dV'} - \int r_i' (\partial_k' r_e') j_k' dV' = \end{aligned}$$

$$= - \int r_i' j_e dV \quad y \text{ es una matriz antisimétrica.}$$

$\Rightarrow$  tiene solo 3 componentes independientes y  
puedo definir un pseudovector

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos

$$\int (r_e' j_i' dV') r_e = \frac{r_e}{2} \int (r_e' j_i' - r_i' j_e) dV' = \left[ \frac{1}{2} \int (\Sigma' \times \underline{j}') \times \Sigma dV' \right]$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\Sigma) = \frac{\underline{m} \times \Sigma}{r^3} \quad \text{con} \quad \underline{m} = \frac{1}{2C} \int \Sigma' \times \underline{j}' dV' \quad (\text{momento dipolar magnético})$$

y  $\underline{B}^{(1)}(\Sigma) = \nabla \times \underline{A}^{(1)}$

## Campo magnético en medios materiales

Ahora  $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} (\underline{J}_e + c \nabla \times \underline{M})$

y  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

Definimos  $\underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M}$  con  $\underline{H}$ : intensidad magnética

y

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{H} &= \frac{4\pi}{c} \underline{J}_e \\ \nabla \cdot \underline{H} &= -4\pi \nabla \cdot \underline{M}\end{aligned}$$

Necesito relaciones constitutivas  $\underline{M} = \underline{M}(\underline{H})$  según el medio.

Si el medio es lineal

$$\underline{M} = \underline{\chi_m} \underline{H} \quad \underline{\chi_m} : \text{tensor permeabilidad magnética}$$

En el caso isotropo

$$\underline{M} = \chi_m \underline{H} \quad y \quad \begin{cases} \chi_m > 0 & \text{paramagnético} \\ \chi_m < 0 & \text{diamagnético} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = \underline{H} + 4\pi \underline{M} = \underbrace{(1 + 4\pi \chi_m)}_{\chi} \underline{H} \Rightarrow \underline{B} = \chi \underline{H}$$

Condiciones de contorno para el campo  $\underline{B}$  en interfaces

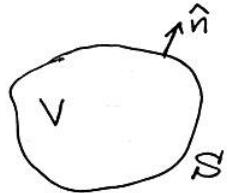
$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\text{no hay monopolos})$$

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}_e \Rightarrow \hat{n} \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \underline{k}_e$$

Tratamiento teórico del potencial electrostático

↑ densidad de corriente en sup.

## Teorema de Green



Partimos del teorema de la divergencia

$$\int_V \nabla \cdot A \, dV = \int_{S(V)} A \cdot \hat{n} \, dS$$

Para la primera identidad de Green tomamos  $A = \phi \nabla \chi$

$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \chi) \, dV = \int_{S(V)} (\phi \nabla \chi) \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\Rightarrow \int_V [(\nabla \phi) \cdot \nabla \chi + \phi \nabla^2 \chi] \, dV = \int_{S(V)} \phi \frac{\partial \chi}{\partial \hat{n}} \, dS$$

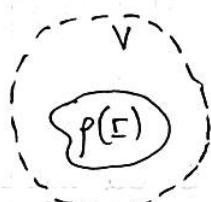
Tomando  $A = \chi \nabla \phi$  y restando m.s.m.

$$\boxed{\int_V (\phi \nabla^2 \chi - \chi \nabla^2 \phi) \, dV = \int_{S(V)} \left( \phi \frac{\partial \chi}{\partial \hat{n}} - \chi \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \, dS}$$

(Teorema de Green)

Consideremos ahora una dist. de cargas, un volumen  $V$ ,

y asociemos



$$\begin{cases} \phi(\Sigma) \rightarrow \text{potencial electrostático } \varphi \\ \chi = \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \end{cases}$$

Reemplazando en el teo. de Green y usando  $\nabla^2 \chi = -4\pi \delta(\Sigma - \Sigma')$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho(\Sigma)$$

$$-4\pi \left[ \int_V \varphi(\Sigma') \delta(\Sigma - \Sigma') \, dV' - \int_V \frac{\rho(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} \, dV' \right] = \int_{S(V)} \varphi \frac{(\Sigma - \Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|^3} \cdot \hat{n} \, dS' -$$

$$- \int_{S(V)} \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} \, dS'$$

Si  $\Sigma \in V$ , el primer término es  $\varphi(\Sigma)$

$$\Rightarrow \varphi(\Sigma) = \underbrace{\int \frac{\rho(\Sigma)}{|\Sigma - \Sigma'|} dV'}_{\text{información de lo que ocurre en } V} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} dS'}_{\text{información de la superficie}} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varphi(\Sigma - \Sigma') \cdot \hat{n}}{|\Sigma - \Sigma'|^3} dS'$$

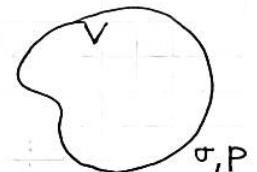
$\Rightarrow$  Basta conocer  $\rho(\Sigma)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}$  y  $\varphi|_S$  para resolver  $\varphi$  en  $V$ .

No necesitamos conocer las fuentes externas: las fuentes externas pueden remplazarse por una densidad superficial de cargas  $\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}$  y una

densidad superficial de dipolos  $D = \frac{1}{4\pi} \varphi \hat{n}$

Notar que este es un resultado integral.

En el caso diferencial alcanzará con conocer  $\varphi$  o  $\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}$  en la superficie.



### Unicidad de sol. de la ec. de Poisson

Consideremos la ec. de Poisson en una región finita del espacio con cond. de contorno en la sup.

- c.d.c  $\longrightarrow$  (i)  $\varphi|_S$  (cond. de Dirichlet)  
 (ii)  $\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}|_S$  (cond. de Neumann)

El problema está definido por  $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$ , con  $\rho$  dado y c.d.c (i) o (ii).

- (i) corresponde a especificar el potencial, mientras que  
(ii) corresponde a especificar el campo eléctrico.

Supongamos  $\exists$  2 soluciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Tomando

$$u = \varphi_1 - \varphi_2$$

Reemplazando en la primera identidad de Green con  
 $\phi = u$  y  $x = u$

$$\underbrace{\int_V u \nabla^2 u}_{\stackrel{H}{=}} + \int_V |\nabla u|^2 dV = \underbrace{\int_{S(V)} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS}_{\stackrel{H}{=}}$$

pues  $\nabla^2 u = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0$  por (i) o (ii)

$$\Rightarrow \int_V |\nabla u|^2 dV = 0$$

Como  $|\nabla u|^2$  es definida positiva,  $\nabla u = 0$ .

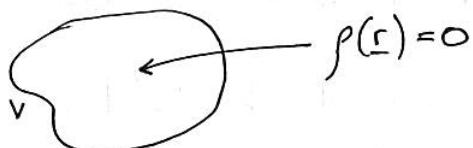
$$\Rightarrow u = \text{cte} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Si la cdc es (i)  $u|_S = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ y } \varphi_1 = \varphi_2$

Si la cdc es (ii)  $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{cte}$  y el campo  $E$  es único.

### Ecación de Laplace

Consideremos el problema



$$\nabla^2 \varphi = 0$$

y queremos obtener  $\varphi$ .

## Método de separación de variables

Hipótesis:

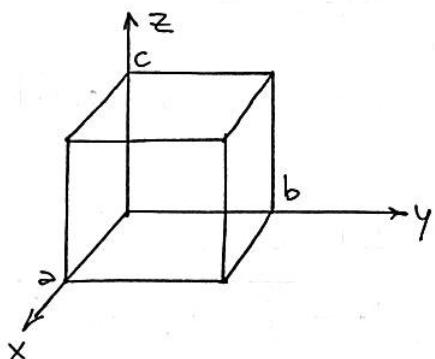
- 1) La ec. debe ser separable en coord.  $x_1, x_2, x_3$ .

2) El contorno de  $V$  debe poder expresarse como un paralelepípedo en coord.  $x_1, x_2, x_3$ .

Buscamos una solución del tipo

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1) u_2(x_2) u_3(x_3)$   
y  $\nabla^2(u_1 u_2 u_3) = 0$  se convierte en tres ec. de una variable. Las soluciones en cada variable estarán conectadas por ctes. de separación  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

Ejemplo: En coord. cartesianas



Tenemos contorno  $\begin{cases} x=0 & y \quad x=a \\ y=0 & y=b \\ z=0 & z=c \end{cases}$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad y \quad \varphi|_{\text{s}} \text{ es dato}$$

Reemplazando  $\varphi = u_1(x_1) u_2(x_2) u_3(x_3)$   
en  $\nabla^2 \varphi = 0$ , queda

$$u_2 u_3 \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + u_1 u_3 \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + u_1 u_2 \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} = 0$$

Dividiendo por  $u_1 u_2 u_3$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_1} \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + \frac{1}{u_2} \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + \frac{1}{u_3} \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} = 0$$

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Busquemos una sol. gen.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} A_{\lambda_1, \lambda_2} u_{1, \lambda_1} u_{2, \lambda_2} u_{3, \lambda_3}$$

y las cond. de contorno están dadas por

$$\varphi(x_1=0, x_2, x_3) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} A_{\lambda_1, \lambda_2} u_{1, \lambda_1}(0) u_{2, \lambda_2}(x_2) u_{3, \lambda_1, \lambda_2}(x_3)$$

(idem para  $x_1 = a$ , etc.)

Pidamos que al menos en dos coord (ej,  $x_1$  y  $x_2$ ) las cond. de contorno se pueden aplicar a cada producto  $u_1 u_2 u_3$  por separado  $\Rightarrow$  puedo considerar el problema ec. dif. + cdc solamente para la variable  $x_1$ .

Por ejemplo, supongamos en el ejemplo que  $\varphi(x_1=0) = \varphi(x_1=a) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_1} \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} = \lambda_1 \quad y \quad u_1(0) = u_1(a) = 0$$

$\Rightarrow$  Se obtiene un conjunto  $\{u_{1, \lambda_1}\}$  con valores posibles para  $\lambda_1$ .

Además, cualquier  $f(x_1)$  en  $[0, a]$  que cumple las cdc debe poder escribirse como  $f(x_1) = \sum_{\lambda_1} A_{\lambda_1} u_{1, \lambda_1}(x_1)$ .

$\Rightarrow$  las soluciones  $\{u_{1, \lambda_1}\}$  deben ser una base del espacio.

Esto ocurre si la ec. diferencial y las cdc definen un

Problema de Sturm - Liouville.

En particular, de  $\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} = \lambda_1 u_1$  y  $u_1(0) = u_1(a) = 0$

$$\Rightarrow u_{1,n} = \operatorname{sen} k_n x_1 \quad k_n = n\pi/a \quad k_n^2 = -\lambda_1 \quad (\lambda_1 < 0)$$

Para  $x_2$ , con  $u_2(0) = u_2(b) = 0$

$$u_{2,m} = \operatorname{sen} k_m x_2 \quad k_m = m\pi/b$$

Además,  $\frac{d^2 u_3}{dx_3^2} = -(\lambda_{1n} + \lambda_{2m}) u_3 = (b_n^2 + k_m^2) u_3 = \gamma_{nm}^2 u_3$

$$\Rightarrow u_{3n,m}(x_3) = A_{nm} e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm} e^{-\gamma_{nm} z}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(x, y, z) &= \sum_{n,m} u_{1n}(x) u_{2m}(y) (A_{nm} e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm} e^{-\gamma_{nm} z}) = \\ &= \sum_{n,m} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) (A_{nm} e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm} e^{-\gamma_{nm} z}) \end{aligned}$$

Supongamos que en  $z$  tiempo cdc de Dirichlet

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z=0) = f(x, y) \\ \varphi(x, y, z=c) = g(x, y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \sum_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) (A_{nm} + B_{nm})$$

$$g(x, y) = \sum_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) (A_{nm} e^{\gamma_{nm} c} + B_{nm} e^{-\gamma_{nm} c})$$

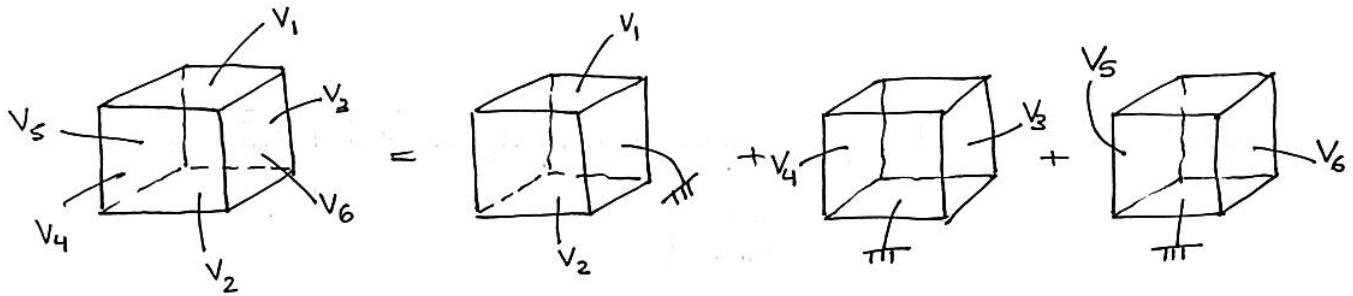
y si  $\{u_{1,n}\}$  y  $\{u_{2,m}\}$  son base del espacio, tengo que poder desarrollar

$$f(x, y) = \sum f_{nm} u_{1n}(x) u_{2m}(y)$$

$$g(x, y) = \sum g_{nm} u_{1n}(x) u_{2m}(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{nm} = A_{nm} + B_{nm} \\ g_{nm} = A_{nm} e^{\gamma_{nm} c} + B_{nm} e^{-\gamma_{nm} c} \end{cases}$$

¿Cómo resuelvo el caso general?



### Problema de Sturm-Liouville

Ec. de la forma:

$$\left[ -\frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) \right] u = \lambda w(x) u$$

con  $w(x)$  definida positiva y  $P(x)$  no nula en el intervalo  $(a, b)$ , y con cdc  $\frac{du}{dx}$  dada una sol.  $u$  con autovalor  $\lambda_1$ , y una sol.  $v$  con autovalor  $\lambda_2$ , de cumple

$$P(x) [uv' - vu']^b_a = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Teorema: Dada una ec. diferencial con cdc  $\frac{du}{dx}$  definen un problema de Sturm-Liouville, si  $[a, b]$  es finito

i)  $\exists$  un conj. discreto de autovalores reales  $\{\lambda_n, n \geq 1\}$

$$\text{tf} \quad |\lambda_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

ii) Autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales  $L_w^2 [a, b]$

$$\int_a^b u_{\lambda_i}^*(x) u_{\lambda_j}(x) w(x) dx = \delta_{ij} C$$

iii) Las autofunciones normalizadas forman una base ortonormal de  $L_w^2 [a, b]$

$$\forall f(x) \text{ en } [a,b] \quad f(x) = \sum_{n \geq 1} A_n u_n(x)$$

con los  $A_n$  dados por

$$\int_a^b w(x) u_m^*(x) f(x) dx = \sum_{n \geq 1} A_n \underbrace{\int_a^b w(x) u_m^*(x) u_n(x) dx}_{\delta_{mn}}$$

$$\Rightarrow A_m = \int_a^b u_m^*(x) f(x) \omega(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Reemplazando} \quad f(x) &= \sum_{n \geq 1} u_n(x) \int_a^b u_n^*(x) f(x') \omega(x') dx' = \\ &= \int_a^b f(x') \left( \sum_{n \geq 1} u_n^*(x') u_n(x) \omega(x') \right) dx' \end{aligned}$$

Debe ser la delta  
 $\delta(x-x')$

luego tenemos:

Relación de ortogonalidad:

$$\int_a^b u_m^* u_n \omega dx = \delta_{mn}$$

Relación de completitud:

$$\omega(x') \sum_{n \geq 1} u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x')$$

Si  $[a,b]$  es infinito se tiene

- i)  $\exists$  un espectro continuo de autovalores reales
- ii) Las autofunciones forman una base ortonormal de  $L^2_w[a,b]$

$$\text{i.e.} \quad f(x) = \int A(\lambda) u_\lambda(x) d\lambda$$

y la relación de completitud se escribe

$$\omega(x) \int u_\lambda^*(x) u_\lambda(x') d\lambda = \delta(x-x')$$

Ejemplo: Supongamos  $p(x) = \frac{t^2}{2m}$

$$q(x) = V(x)$$

$$\omega(x) = 1$$

$\Rightarrow$  tiempo  $H\chi = E_n\chi$  y  $\{X_n, E_n\}$  es base. (\*)

$\Rightarrow$  cualquier estado puede escribirse como comb. lineal

$$\phi(x) = \sum A_n X_n$$

(\*) para cdc convenientes.

### Casos particulares de cdc:

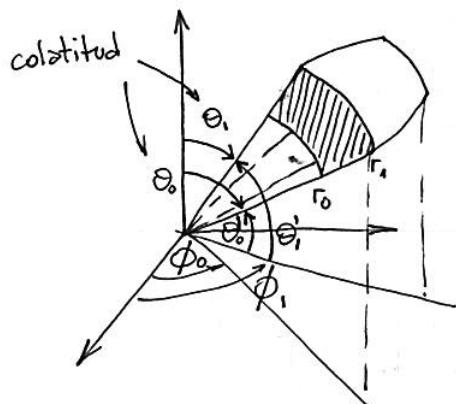
1)  $u(a) = u(b) = 0$  (Dirichlet)

2)  $u'(a) = u'(b) = 0$  (Neumann)

3)  $u(a) = u(b)$  (Periodicidad)  
 $u'(a) = u'(b)$

## Coordenadas esféricas

Tenemos coord.  $(r, \theta, \phi)$  con contorno  $\begin{cases} r_1, r_2 \\ \theta_1, \theta_2 \\ \phi_1, \phi_2 \end{cases}$



y la ec. de Laplace

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 s\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( s\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 s^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

y separamos

$$\varphi = R(r) P(\theta) Q(\phi)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{rR} \frac{d^2}{dr^2} (rR)}_{\alpha_1 / s^2 \theta} + \frac{1}{P r^2 s\theta} \frac{d}{d\theta} \left( s\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \underbrace{\frac{1}{Q r^2 s^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\phi^2}}_{-\alpha_1} = 0 \quad (1)$$

$\Rightarrow Q(\phi)$  satisface

$$\frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -\alpha_1 Q$$

Si las c.c. en  $\phi$  definen un problema de Sturm-Liouville, tenemos  $\{Q_n, \alpha_n\}$ .

$$\text{Si no hay contorno en } \phi \Rightarrow \begin{cases} \varphi(\phi=0) = \varphi(\phi=2\pi) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi=0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\phi=2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q(0) = Q(2\pi) \\ Q'(0) = Q'(2\pi) \end{cases}$$

Si  $\alpha_1 < 0$   $\nexists$  solución

Para  $\alpha_1 \geq 0$ , veamos  $\alpha_1 = k^2$

$$\Rightarrow Q(\phi) = A \cos k\phi + B \sin k\phi + C + D\phi$$

Veamos  $k \neq 0 \Rightarrow C=0$

(por c.c.)

De las cdc  $k=m$  con  $m=1, 2, \dots$

Tenemos una base de funciones ortogonales en  $[0, 2\pi]$

y

$$Q(\phi) = C_0 + \sum_{m \geq 1} A_m \cos m\phi + B_m \operatorname{sen} m\phi$$

Volviendo a (1) tenemos

$$\underbrace{\frac{r}{R} \frac{d^2(rR)}{dr^2}}_{\alpha_2} + \underbrace{\frac{1}{P s\theta} \frac{d}{d\theta} \left( s\theta \frac{dP}{d\theta} \right)}_{-\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{s^2\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s\theta} \frac{d}{d\theta} \left( s\theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{\alpha_1 P}{s^2\theta} + \alpha_2 P = 0$$

y cuando tenemos periodicidad en  $\phi$ ,  $\alpha_1 = m^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{s\theta} \frac{d}{d\theta} \left( s\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left( \alpha_2 - \frac{m^2}{s^2\theta} \right) P = 0$$

Consideremos el caso  $m=0$ :

$$\frac{1}{s\theta} \frac{d}{d\theta} \left( s\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \alpha_2 P = 0$$

y tomando  $x = \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \alpha_2 P = 0$$

Si el recinto es toda la esfera, i.e.  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi$

$\Rightarrow$  el problema está definido en el recinto  $[-1, 1]$  en  $x$ .

Comparando con Sturm-Liouville,  $p(x) = 1-x^2$  y

se anula en los extremos  $\pm 1$ . Luego, siempre que

$P$  sea finita en  $x = \pm 1$  tenemos un problema de Sturm-Liouville y tenemos base  $\{P_m, Q_m\}$ .

(En otro caso, las cdc deben ser tp el problema sea de Sturm-Liouville).

Tomando  $\alpha_2 = l(l+1)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + l(l+1) P = 0$$

Ecuación de Legendre

y tiene soluciones

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Polinomios  
de Legendre

$$P_0(x) = 1$$

con convención  $P_l(x=1)=1$

$$P_1(x) = x$$

y con  $l \geq m$  para que la ec. tenga  
soluciones finitas ( $m=0$  en este caso)

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

...

$$\text{Ortogonalidad: } \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \left( \frac{2}{2l+1} \right) \delta_{ll'}$$

$$\text{Completitud: Para } f(x) = \sum_l A_l P_l(x)$$

con

$$A_l = \left( \frac{2l+1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

$$\delta(x-x') = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{2l+1}{2} \right) P_l(x) P_l(x')$$

Formulas de recurrencia:

$$(l+1) P_{l+1} - (2l+1)x P_l + l P_{l-1} = 0$$

$$\frac{dP_{l-1}}{dx} = x \frac{dP_l}{dx} + (l+1) P_l$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_l}{dx} = l x P_l - l P_{l-1}$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) dx = 0 \quad \forall l \neq 0$$

Veamos ahora el caso  $m \neq 0$ :

Tenemos las funciones asociadas de Legendre

$$P_e^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_e(x) \quad (m \geq 0)$$

$$\Rightarrow P_e^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2-1)^m$$

$$\text{y } P_e^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_e^m(x)$$

Para  $m$  fijo,  $\{P_{em}(x)\}$  es una base para las funciones en  $[0, \pi]$ . Además

$$\underline{\text{Ortopormalidad: }} \int_{-1}^1 P_e^m(x) P_{e'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ee'}$$

Completitud:

$$\delta(x-x') = \sum_e P_e^m(x) P_e^m(x') \left( \frac{2l+1}{2} \right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

Para la sup. de la esfera completa tenemos Sturm-Liouville en  $\theta$  y  $\phi$ . Definimos los armónicos esféricos

$$Y_{lm}(\theta\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_e^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad l=0,1,2, \dots$$

$$-l \leq m \leq l$$

con relaciones de ortogonalidad

$$\int Y_{l'm'}^*(\theta\phi) Y_{lm}(\theta\phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

y de completitud

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l'm}^*(\theta'\phi') Y_{lm}(\theta\phi) = \delta(\phi-\phi') \frac{\delta(\theta-\theta')}{\sin\theta}$$

Propiedades:

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = Y_{l,m}^*(\theta,\phi) (-1)^m$$

$$Y_{lm}(\pi-\theta, \phi+\pi) = Y_{lm}(\theta, \phi) \cdot \text{coef}$$

(inversión del punto)      calcular

Veamos algunos casos particulares:

$$l=0: \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{isotropo})$$

y  $\int d\Omega Y_{lm}(\theta\phi) = 0$  por esto. Pues

$$\int d\Omega Y_{lm}(\theta\phi) = \sqrt{4\pi} \int d\Omega Y_{lm}(\theta\phi) Y_{00}^*(\theta\phi) = \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \delta_{m0}$$

$$l=1: \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (\text{axisimétrico}) \quad m=0$$

$$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$$

Veamos las soluciones en  $r$ . Tenemos

$$\frac{r}{R} \frac{d^2}{dr^2} (rR) = l(l+1)$$

$$\Rightarrow R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

luego la sol. general es

$$\boxed{\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta\phi)}$$

y hay que imponer cdc en  $r$ . Para Dirichlet

$$\varphi(r_1, \theta, \phi) = f(\theta, \phi) = \sum_{l,m} f_{lm} Y_{lm}(\theta\phi)$$

$$\varphi(r_2, \theta, \phi) = g(\theta\phi) = \sum_{l,m} g_{lm} Y_{lm}(\theta\phi)$$

y salen los  $A_{lm}, B_{lm}$ .

Veamos los primeros términos del desarrollo.

Si  $r_1 \rightarrow \infty$  y no hay cargas en  $\infty \Rightarrow \phi_{r \rightarrow \infty} = 0$

$$\Rightarrow A_{lm} = 0 \quad \forall l, m$$

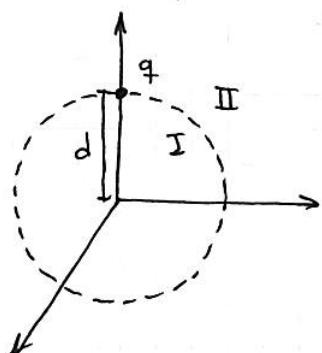
$$\Rightarrow \phi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Para  $l=0, m=0$   $\phi \sim \frac{B_{00}}{r}$  es la contribución monopolar!

Si  $r_0 = 0$  y  $\nabla^2 \phi = 0$  en  $r_0$  (no hay cargas en el origen)  $\Rightarrow B_{lm} = 0 \quad \forall l, m$

$$\Rightarrow \phi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Ejemplo:



$$\phi(\Sigma) = \frac{q}{|\Sigma - d\hat{z}|}$$

Dividimos el espacio en dos zonas

tp  $\nabla^2 \phi = 0$

En I:  $\phi_I = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}$

En II:  $\phi_{II} = \sum_{lm} \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}$

y  $\phi$  debe ser continuo en la interface  $r=d$

$$\Rightarrow \sum_{lm} A_{lm} d^l Y_{lm} (\Theta \phi) = \sum_{lm} \frac{B_{lm}}{d^{l+1}} Y_{lm} (\Theta \phi) \quad (1)$$

Además

$$-\left. \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} \right|_{r=d} + \left. \frac{\partial \phi_I}{\partial r} \right|_{r=d} = 4\pi \sigma (\Theta \phi)$$

con  $\sigma = N \delta(\Theta) \quad$  tp  $\int \sigma dS = q$

$$\int \sigma dS = \int N \delta(\theta) d^2 \sin\theta d\theta d\phi = q$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta, \phi) = \frac{q \delta(\theta)}{2\pi d^2 \sin\theta}$$

luego

$$\sum_{lm} \left[ (l+1) \frac{B_{lm}}{d^{l+2}} + l A_{lm} d^{l-1} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) = 4\pi \frac{q \delta(\theta)}{2\pi d^2 \sin\theta} \quad (2)$$

De (1)

$$A_{lm} d^l = \frac{B_{lm}}{d^{l+1}} \Rightarrow B_{lm} = A_{lm} d^{2l+1}$$

y de (2), usando ortogonalidad

$$\int Y_{lm}^* \sum_{lm'} \left[ (l+1) \frac{B_{lm'}}{d^{l+2}} + l' A_{lm'} d^{l'-1} \right] Y_{lm'} d\Omega = \int Y_{lm'}^* \frac{2q \delta(\theta)}{d^2 \sin\theta} d\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{l+1}{d^{l+2}} B_{lm'} + l' d^{l'-1} A_{lm'} = \frac{4\pi q}{d^2} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi} \frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}} P_l^{m'}(1) \delta_{m'm} \quad (3)$$

luego si  $m \neq 0$ ,  $A_{lm} = B_{lm} = 0$  (axisimetría)

$$\begin{cases} \varphi_I = \sum_l A'_l r^l P_l(\cos\theta) \\ \varphi_{II} = \sum_l \frac{B'_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{en términos de los} \\ P_l(\cos\theta) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{en lugar de los } Y_{lm}(\theta, \phi) \\ (\text{requiere cuidado en la} \\ \text{normalización.}) \end{array}$$

Usando  $B_{lm} = A_{lm} d^{2l+1}$  en (3)

$$\xrightarrow{\text{coef. de los } Y_{lm}} A_{l0} d^{l-1} (2l+1) = \frac{4\pi q}{d^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(1)$$

$$\Rightarrow A_{l0} = \frac{q}{d^{l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \underbrace{P_l(1)}_1$$

Pero para obtener los  $A'_l$ , notar que  $\int P_l P_{l'} d\cos\theta d\phi = 2\pi \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$

y si  $f = \sum A'_l P_l(\cos\theta) \Rightarrow A'_l = \frac{2l+1}{4\pi} \int f P_l(\cos\theta) d\cos\theta d\phi$

y  $A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int f P_l(\cos\theta) d\cos\theta d\phi$

$$\Rightarrow A'_e = A_{e0} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

y luego

$$A'_e = \frac{q}{d^{\ell+1}}$$

$$B'_e = q d^\ell$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_I = q \sum_e \frac{r^\ell}{d^{\ell+1}} P_e(\cos\theta) & r < d \\ \varphi_{II} = q \sum_e \frac{d^\ell}{r^{\ell+1}} P_e(\cos\theta) & r > d \end{cases}$$

Se introduce notación  $r_< = \min\{r, d\}$

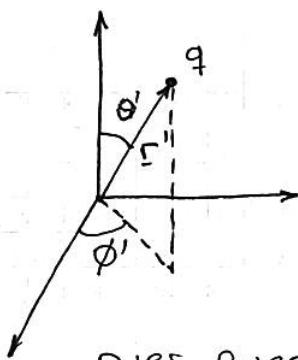
$$r_> = \max\{r, d\}$$

$$y \quad \boxed{\varphi(\xi) = q \sum_e \frac{r'_e^\ell}{r'_>^{\ell+1}} P_e(\cos\theta) = \frac{q}{|\xi - d\hat{z}|}}$$

Desarrollo del pot. debido a una carga puntual en  $z=d$

### Teorema de adición para armónicos esféricos

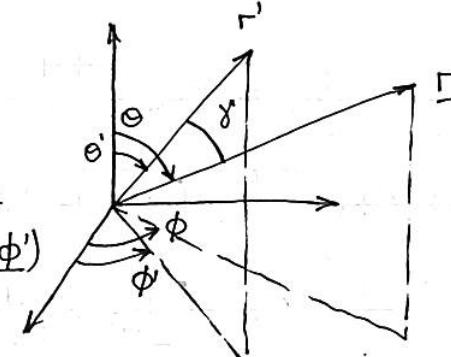
Supongamos que ahora queremos el potencial debido a una carga puntual fuera del eje  $z$ .



En general, necesitamos poder expresar los  $Y_{lm}(\theta\phi)$  en términos de  $\theta', \phi'$ , o equivalentemente, queremos  $P_e(\cos\theta)$

pues queremos resolver el problema con

$$\nabla(\theta, \phi) = q \frac{\delta(\theta-\theta') \delta(\phi-\phi')}{r'^2 \sin\theta}$$



Consideremos  $\theta'$  y  $\phi'$  fijos y desarrollemos

$$P_e(c\delta) = \sum_{l'} \sum_m A_{lm}(\theta'\phi') Y_{lm}(\theta\phi)$$

pero cuando  $\theta' = 0$  tenemos  $P_e(c\theta) = \sum_{l'm} A_{lm} Y_{l'm}(\theta, \phi)$

y se sigue  $l = l'$ .

pues  
 $c\delta = \hat{r} \cdot \hat{r}' = \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi') + \cos\theta \cos\theta'$

usando  $\hat{r} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$

$\hat{r}' = (\sin\theta' \cos\phi', \sin\theta' \sin\phi', \cos\theta')$

y  $\cos(\phi - \phi') = \cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi'$

$$\Rightarrow P_e(c\delta) = \sum_m A_{lm}(\theta'\phi') Y_{lm}(\theta\phi)$$

con  $A_{lm}(\theta\phi) = \int Y_{lm}^*(\theta\phi) P_e(c\delta) d\Omega$

que puede interpretarse como los coef. de  $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\theta\phi)$  en una serie de  $Y_{lm'}(\delta\beta)$  donde con  $\beta$  el ángulo toroidal alrededor de  $\Gamma'$ :

$$A_{lm}(\theta'\phi') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int Y_{lm}^*(\theta\phi) \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_e(c\delta)}_{Y_{lm'}(\delta\beta)} d\Omega$$

luego

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left[ Y_{lm}^*(\theta(r,\beta), \phi(r,\beta)) \right]_{r=0} = \sum_{l'm'} A_{lm} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}} P_{l'}(c\delta)$$

y para  $\delta \rightarrow 0$   $\begin{cases} \theta(r,\beta) \rightarrow \theta' \\ \phi(r,\beta) \rightarrow \phi' \end{cases}$

↑ pero  
nuevamente  
 $l' = l$   
 $m' = 0$

y  $A_{lm}(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta', \phi')$

$$\Rightarrow P_e(c\delta) = \boxed{\sum_m \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta\phi)}$$

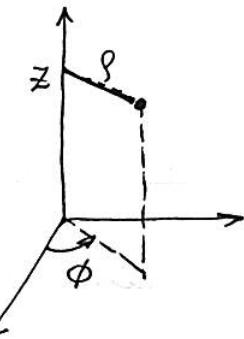
Usando este resultado podemos escribir para la carga  $q$  fuera del eje  $z$

$$\varphi(z) = \frac{q}{|z - z'|} = 4\pi q \sum_{\ell, m} \frac{1}{2\ell + 1} \frac{r_e^\ell}{r_s^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta' \phi') Y_{\ell m}(\theta \phi)$$

### Coordenadas cilíndricas

En cilíndricas  $\nabla^2 \varphi = 0$  con  $(\rho, \phi, z)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$



Tomamos  $\varphi = R(\rho) Q(\phi) Z(z)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R}_{-\lambda} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda Z} \quad (1)$$

$$\text{luego } \underbrace{\frac{1}{R} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R}_{\beta} + \underbrace{\lambda \rho^2 + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2}}_{-\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -\beta Q} \quad (2)$$

y finalmente

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} = (\beta - \lambda \rho^2) R \quad (3)$$

Vemos la solución en  $\phi$ : De (2)

$$\begin{cases} \beta = -v^2 & \Rightarrow Q_v = e^{v\phi}, e^{-v\phi} \\ \beta = 0 & \Rightarrow 1, \phi \\ \beta = v^2 & \Rightarrow \cos v\phi, \sin v\phi \end{cases}$$

consideremos estos casos ( $v$  entero)

La solución en  $Z$ , de (1)

$$Z(z) = \begin{cases} e^{kz}, e^{-kz} & \text{si } \lambda = k^2 \\ 1, z & \lambda = 0 \\ \operatorname{sen} kz, \cos kz & \lambda = -k^2 \end{cases}$$

La solución en  $\rho$  depende de  $\beta$  y  $\lambda$ . Veamos primero el caso  $\lambda = k^2$  (con  $k$  no necesariamente entero).

Dividiendo (3) por  $\rho^2$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

y tomando  $x = k\rho$

$$\boxed{\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0}$$

Ec. de Bessel

con sol.  $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$  Func. de Bessel

Si  $\nu \neq$  entero,  $J_\nu$  y  $J_{-\nu}$  son sol. independientes

Si  $\nu =$  entero  $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$  y se define

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi} \quad \text{Func. de Neumann}$$

$N_\nu(x)$  es sol. de la ec. de Bessel, y  $J_\nu$  y  $N_\nu$  son indep.

Prop: comportamiento asintótico

$$x \ll 1 : \quad J_\nu(x) \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$N_\nu(x) \longrightarrow \begin{cases} -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] & \nu = 0 \end{cases} \quad \gamma = 0.5772... \text{ (cte de Euler)}$$

$$\text{Notar que } \begin{cases} J_0(0) = 1 \\ J_v(0) = 0 \quad \text{si } v > 0 \end{cases}$$

Del comportamiento para  $x$  grande

$$x \gg 1: \quad J_v(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_v(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

se sigue que  $J_v$  y  $N_v$  tienen infinitas raíces en  $x > 0$ , i.e. para cada  $v \exists \{x_{vn}\}$  tq  $J_v(x_{vn}) = 0$

$$\text{Para } n \text{ grande: } x_{vn} \approx n\pi + \left(v - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

También  $\exists \infty$  raíces  $\{y_{vn}\}$  tq  $J_v'(y_{vn}) = 0$ .

Suelen definirse las funciones de Hankel

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + i N_v(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{ix/\sqrt{x}}$$

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - i N_v(x) \longrightarrow e^{-ix/\sqrt{x}}$$

útiles para describir ondas cilíndricas entrantes y salientes.

Vemos ahora el caso  $\lambda = 0$ : Tenemos

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} = V^2 R$$

$$\text{Si: } \begin{cases} V = 0 & R = 1, \ln \rho \\ V \neq 0 & \rho^v, \rho^{-v} \end{cases}$$

Finalmente, veamos el caso  $\lambda = -k^2$ . Tomamos cambio de variables  $x = ik\rho$  y la ec. queda

$$\frac{d^2R}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{dR}{dp} + \left(k^2 - \frac{v^2}{p^2}\right) R = 0$$

y las soluciones son  $J_v(ikp)$ .

Definimos

$$I_v(kp) = i^{-v} J_v(ikp)$$

funciones de Bessel  
modificadas  
( $I_v$  es real)

y la sol. independiente es

$$K_v(kp) = \frac{\pi}{2} i^{v+1} [J_v(ikp) + i N_v(ikp)]$$

Prop: Notar que

$$I_v(kp) = \cancel{i^v} \left(\frac{ikp}{2}\right)^v \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{ikp}{2}\right)^{2j}$$

$$\Rightarrow I_v(kp) > 0 \quad (\text{no tiene raíces reales en } kp > 0)$$

Veamos el comportamiento asintótico

$$x \ll 1: \quad I_v \longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^v$$

$$K_v \longrightarrow \begin{cases} \frac{\Gamma(v)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^v & v \neq 0 \\ \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] & v = 0 \end{cases}$$

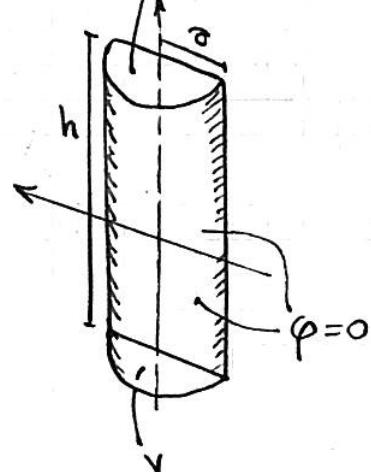
$$x \gg 1: \quad I_v \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$$

$$K_v \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\pi}} e^{-x}$$

En resumen, tenemos diferentes posibilidades:

$\lambda$	$\beta$	$Q(\phi)$	$Z(z)$	$R(\rho)$
$k^2$	0 $v^2$	$1, \phi$ $\cos v\phi, \sin v\phi$	$\left\{ e^{kz}, e^{-kz} \right\}$	$J_v(k\rho), N_v(k\rho)$
0	0 $v^2$	$1, \phi$ $\cos v\phi, \sin v\phi$	$\left\{ 1, z \right\}$	$\left\{ 1, \ln \rho \right.$ $\left. \rho^v, \rho^{-v} \right\}$
$-k^2$	0 $v^2$	$1, \phi$ $\cos v\phi, \sin v\phi$	$\left\{ \cos kz, \sin kz \right\}$	$I_v(k\rho), K_v(k\rho)$

Ejemplo :



contorno descripto por

$$\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$$

$$z_1 = -\frac{h}{2}, z_2 = \frac{h}{2}$$

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = a$$

con cdc

$$\varphi(\rho, \phi_1, z) = \varphi(\rho, \phi_2, z) = 0$$

$$\varphi(\rho_1, \phi, z) = \varphi(\rho_2, \phi, z) = 0$$

$$\varphi(\rho, \phi, z_1) = \varphi(\rho, \phi, z_2) = V$$

En  $\phi$  tenemos cdc homogéneas

$$\Rightarrow Q_v = A_v \cos v\phi + B_v \sin v\phi$$

$$\text{Además } Q_v(\phi=0) = 0 \Rightarrow A_v = 0$$

$$Q_v(\phi=\pi) = 0 = B_v \sin v\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{v=m} \quad v=1, 2, \dots$$

En  $\mathbb{Z}$  tenemos  $\varphi(z = \pm h_z) = V$  (no es Sturm-Liouville)  
 $\Rightarrow$  Tengo dos elecciones posibles. Veamos  $\rho$ : tenemos

$$\varphi(\rho=0) = \varphi(\rho=a) = 0$$

Si  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = k^2 \rightarrow J_V(k\rho), N_V(k\rho) \\ \lambda = 0 \rightarrow \rho^0, \rho^{-\alpha} \\ \lambda = -k^2 \rightarrow I_V(k\rho), K_V(k\rho) \end{array} \right.$

no cumple  
las cdc

} No cumplen  
las cdc.

Tenemos  $\lambda = k^2$ . Nos queda  $R(\rho) = J_V(k\rho)$  y debe valer

$$R(a) = J_V(a) = 0$$

$$\Rightarrow ka = x_{v_n} \text{ con } n=1,2,\dots \text{ y } \{x_{v_n}\} \text{ raíces de } J_V$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{x_{v_n}}{a}} \text{ y } \left\{ J_V\left(\frac{x_{v_n}\rho}{a}\right); n=1,2,\dots \right\} \text{ es base en } [0,a].$$

Ej:  $V=0 \quad x_{v_n} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$

$V=1 \quad x_{v_n} = 3.832, 7.016, \dots$

...

Prop: ortogonalidad  $(x_{v_n}^2 - x_{v_{n'}}^2) \int_0^a J_V\left(\frac{x_{v_n}\rho}{a}\right) J_V\left(\frac{x_{v_{n'}}\rho}{a}\right) \rho d\rho = 0$

Normalización  $\int_0^a J_V\left(\frac{x_{v_n}\rho}{a}\right)^2 J_V\left(\frac{x_{v_{n'}}\rho}{a}\right)^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} J_{V+1}^2(x_{v_n}) \delta_{nn'}$

De la solución en  $\phi$  y la solución en  $\rho$ , de la tabla se sigue que en  $\mathbb{Z}$  tenemos exponentiales.

$$\Rightarrow \varphi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(m\phi) J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) \left[ A_{mn} e^{\frac{x_{mn}z}{a}} + B_{mn} e^{-\frac{x_{mn}z}{a}} \right]$$

De pedir  $\varphi(z = \pm h/2) = V$  salen  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$ . Pero notar que el problema es simétrico respecto a  $z=0$ :

$$\varphi(z) = \varphi(-z)$$

$$\Rightarrow \varphi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin(m\phi) J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) \cosh\left(\frac{x_{mn}z}{a}\right)$$

Pidamos ahora  $\varphi(z = h/2) = V$

$$V = \sum_{m,n} C_{mn} \cosh\left(\frac{x_{mn}h}{2a}\right) \sin(m\phi) J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)$$

Usando ortogonalidad

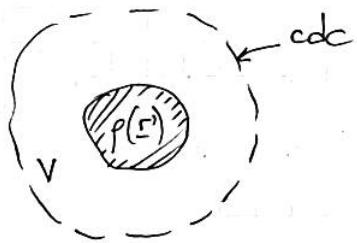
$$V \int_0^\pi \int_0^a \sin(m'\phi) J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right) \rho d\rho d\phi = \sum_{m,n} C_{mn} \cosh\left(\frac{x_{mn}h}{2a}\right) \times$$

$$\underbrace{\int_0^\pi \int_0^a \sin(m'\phi) \underbrace{\sin(m\phi)}_{\frac{\pi}{2} \delta_{mm'}} d\phi J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) \rho d\rho}_{\frac{a^2}{2} \delta_{m'n'} J_{m+1}^2(x_{mn})}$$

$$\Rightarrow C_{m'n'} = \frac{V \int_0^\pi \int_0^a \sin(m'\phi) J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right) \rho d\rho d\phi}{\cosh\left(\frac{x_{m'n'}h}{2a}\right) \frac{\pi a^2}{4} J_{m'+1}^2(x_{mn})} = \frac{8V \int_0^a J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right) \rho d\rho}{m' \pi a^2 \cosh\left(\frac{x_{m'n'}h}{2a}\right) J_{m'+1}^2(x_{mn})}$$

si  $m'$  impar  
(0 en otro caso)

Función de Green:



Queremos hallar  $\varphi$  en  $V$   
Consideremos el caso con  $c_{\partial V}$   
de Dirichlet,  $\varphi|_S$  dato.  
Tomamos  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\text{con } \varphi_1 + \varphi \quad \nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho \quad \text{y} \quad (\varphi_1)_s = 0$$

$$\text{y} \quad \varphi_2 + \varphi \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{y} \quad (\varphi_2)_s = (\varphi)_s = v(\Sigma)$$

Veremos que resolver  $\varphi_1$  es fácil si se resolver



La sol. del segundo problema es

$$\nabla^2 G_D(\Sigma, \Sigma') = -4\pi \delta(\Sigma - \Sigma')$$

↑ func. de Green tipo Dirichlet

$$\text{con cdc} \quad G_D(\Sigma, \Sigma')|_s = 0$$

Por ejemplo, para el caso  $S \rightarrow \infty$  tenemos

$$G_D(\Sigma, \Sigma') = \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|}.$$

Dada la geometría de la región de interés,  $G_D(\Sigma, \Sigma')$  es únicamente definida por estas cond. para cada  $\Sigma'$ .

Luego

$$\varphi_1(\Sigma) = \int \rho(\Sigma') G_D(\Sigma, \Sigma') dV'$$

$\Rightarrow$  es automático que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1|_s = \int \rho(\Sigma') \left. G_D(\Sigma, \Sigma') \right|_s dV' = 0 \\ \nabla^2 \varphi_1 = \int \rho(\Sigma') \underbrace{\nabla^2 G_D(\Sigma, \Sigma')}_{-4\pi \delta(\Sigma - \Sigma')} dV' = -4\pi \rho(\Sigma) \end{array} \right.$$

Prop:  $G_D$  es simétrica en  $\underline{r}, \underline{r}'$        $G_D(\underline{r}, \underline{r}') = G_D(\underline{r}', \underline{r})$

Para verlo usemos el teorema de Green

$$\int_V (\phi \nabla^2 \chi - \chi \nabla^2 \phi) dV = \int_{S(V)} \left( \phi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds$$

Tomando

$$\phi = G_D(\underline{x}, \underline{r}) \quad \text{con } \underline{x} \text{ variable de integración}$$

$$\chi = G_D(\underline{x}, \underline{r}')$$

$$\Rightarrow \int_V [G_D(\underline{x}, \underline{r}) (-4\pi \delta(\underline{x} - \underline{r}')) - G_D(\underline{x}, \underline{r}') (-4\pi \delta(\underline{r} - \underline{x}))] d^3x = \\ = \int_{S(V)} \left[ G_D(\cancel{\underline{x}}, \underline{r}) \frac{\partial}{\partial n} G_D(\underline{x}, \underline{r}') - G_D(\cancel{\underline{x}}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n} G_D(\underline{x}, \underline{r}) \right] ds$$

sobre la sup S

$$\Rightarrow -4\pi G_D(\underline{r}', \underline{r}) + 4\pi G_D(\underline{r}, \underline{r}') = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G_D(\underline{r}, \underline{r}') = G_D(\underline{r}', \underline{r})}$$

Para tener sol. al problema, necesitamos también  $\varphi_2$ .

Veamos que si se usa  $G_D$ : usamos Green, ahora con

$$\phi = \varphi_2(\underline{r})$$

$$\chi = G_D(\underline{r}, \underline{r}')$$

$$\int_V \varphi_2(\underline{r}) (-4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')) d^3r - \int_V G_D(\underline{r}, \underline{r}') \cancel{\nabla^2 \varphi_2} d^3r =$$

$$= \int_{S(V)} \left[ \varphi_2 \frac{\partial G_D}{\partial n}(\underline{r}, \underline{r}') - G_D(\cancel{\underline{r}}, \underline{r}') \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right] ds$$

$$\Rightarrow -4\pi \varphi_2(\underline{r}') = \int_{S(V)} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial n} G_D(\underline{r}, \underline{r}') ds$$

Intercambiando  $\underline{r}$  con  $\underline{r}'$

$$\varphi_2(\Sigma) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S(V)} \varphi_2(\Sigma') \frac{\partial}{\partial n} G_0(\Sigma, \Sigma') dS'$$

O sea que, dadas  $\rho(\Sigma)$  y  $\varphi|_S = v(\Sigma)$ , la sol. formal del problema en términos de  $G_0$  se escribe

$$\varphi(\Sigma) = \int_V \rho(\Sigma') G_0(\Sigma, \Sigma') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{S(V)} \varphi(\Sigma') \frac{\partial G_0}{\partial n}(\Sigma, \Sigma') dS'$$

$\varphi_2$  representa el potencial del sistema de cargas fuera de V

Note: tenemos sol. integral

$$\varphi(\Sigma) = \int_V \frac{\rho(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S(V)} \left[ \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi(\Sigma') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \right) \right] dS'$$

↳ elección  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

con  $\varphi_1 = G_0$

y  $\nabla^2 \varphi_2 = 0$  equivale a definir

$$\nabla^2 G(\Sigma, \Sigma') = -4\pi \delta(\Sigma - \Sigma')$$

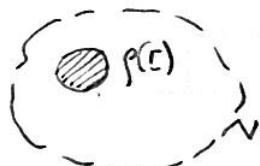
con  $G = \varphi_1 + \varphi_2$  : func. de Green con cond. de cont. arbitraria

y usar  $\varphi_2$  para eliminar uno de los dos términos en S'.

Función de Green con cdc. de Neumann

Ahora tenemos

$\rho(\Sigma)$  en V



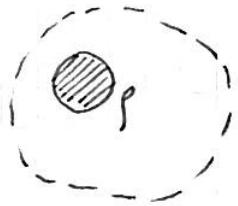
y cdc  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$

Usemos el teo. de Green con }  $\phi = \varphi(\underline{r})$   
 $\chi = G_N(\underline{r}, \underline{r}') / \nabla^2 G_N = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')$

$$\underbrace{-4\pi \varphi(\underline{r})}_{\text{H}} \int_V \varphi(\underline{r}') \nabla^2 G_N(\underline{r}', \underline{r}) dV' + 4\pi \int_V G_N(\underline{r}', \underline{r}) \rho(\underline{r}') dV' =$$

$$= \underbrace{\int_{S(V)} \varphi(\underline{r}') \frac{\partial G_N(\underline{r}', \underline{r})}{\partial n'} dS'}_{\text{Queremos definir } G_N} - \int_{S(V)} G_N(\underline{r}', \underline{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial n'} dS'$$

En este caso, no podemos elegir  $\frac{\partial G_N}{\partial n'}|_{S'} = 0$   
 pues no tenemos tanta libertad  
 de elección en  $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}|_{S'}$ . Por Gauss



$$\oint_S \underline{\phi}_s \cdot \hat{n} dS = 4\pi \int_V \rho dV$$

$$\Rightarrow \int_S -\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 4\pi \int_V \rho dV$$

y  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  y  $\rho$  deben ser compatibles.

En otras palabras, si tengo una carga puntual  $q=1$   
 en V, debe valer que

$$\int_S -\frac{\partial G_N}{\partial n} dS = 4\pi$$

y lo mas simple que podemos pedir es  $\boxed{\frac{\partial G_N}{\partial n}|_S = -\frac{4\pi}{A}}$

Luego

$$\varphi(\underline{r}) = \int_V G_N(\underline{r}', \underline{r}) \rho(\underline{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{S(V)} \varphi(\underline{r}') \frac{4\pi}{A} dS' + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{S(V)} G_N(\underline{r}', \underline{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial n'} dS'}_{\text{No depende de } \underline{r}'}$$

$\Rightarrow$  es una cte =  $\langle \varphi \rangle|_S$

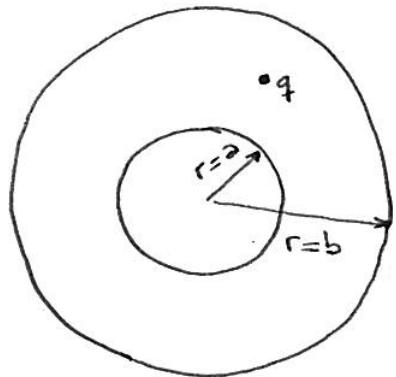
pero como  $\varphi$  está definido salvo una cte, puedo tomarla nula y

$$\varphi(\xi) = \int_V G_N(\xi, \xi') \rho(\xi') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{S(r)} G_N(\xi, \xi') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} dS'$$

y conociendo  $\rho(\xi')$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n'}|_{S(r)}$ , y  $G_N$  puedo resolver  $\varphi(\xi)$ .

### Expansión de la func. de Green en esféricas

Cuando el problema es separable (esféricas, cilíndricas, o cartesianas) la func. de Green puede expandirse en términos de las func del problema de Sturm-Liouville. Consideremos el problema interior



$$\nabla^2 G_D(\xi, \xi') = -4\pi \delta(\xi - \xi') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi')$$

Para  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$  lo resolvemos:

$$G_D = \frac{1}{|\xi - \xi'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_c^l}{r_s^l} Y_{lm}^*(\theta' \phi') Y_{lm}(\theta \phi)$$

$$\text{Ahora queremos } G_D|_{r=0} = G_D|_{r=\infty} = 0$$

Solo debería cambiar la parte radial. Plantearlo

$$\begin{aligned} \nabla^2 G_D &= \nabla^2 \left[ 4\pi \sum_{lm} G_{lm}(r, r') Y_{lm}^*(\theta' \phi') Y_{lm}(\theta \phi) \right] = \\ &= -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \frac{8(\theta - \theta')}{\sin \theta} = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta' \phi') Y_{lm}(\theta \phi) \end{aligned}$$

(completitud de los  $Y_{lm}$ )

y usando que

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \nabla_{\phi\phi}^2 \quad \text{con } \nabla_{\phi\phi}^2 Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 G_0 = \sum_{\ell m} 4\pi \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r c_{\ell m}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} c_{\ell m} \right] Y_{\ell m}^*(\theta\phi') Y_{\ell m}(\theta\phi) = \\ = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r') \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\theta\phi') Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

luego

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r c_{\ell m}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} c_{\ell m} = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r')$$

y notar que  $c_{\ell m} = c_\ell$  (solo depende de  $\ell$ ). Además

$$c_\ell(r) = \begin{cases} A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)} & r < r' \\ A'_\ell r^\ell + B'_\ell r^{-(\ell+1)} & r > r' \end{cases}$$

partiendo el problema en regiones en las que la ec. es homogénea. Pidiendo

$$c_\ell(a) = 0 = A_\ell a^\ell + B_\ell a^{-(\ell+1)}$$

$$c_\ell(b) = 0 = A'_\ell b^\ell + B'_\ell b^{-(\ell+1)}$$

$$\Rightarrow c_\ell(r) = \begin{cases} A_\ell \left( r^\ell - \frac{a^{\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) & r < r' \\ B'_\ell \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{b^\ell}{b^{\ell+1}} \right) & r > r' \end{cases}$$

Podemos escribir, para tener continuidad en  $G_D$

$$C_\ell(r) = D_\ell \left( r_<^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}} \right) \left( \frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{b^{2\ell+1}} \right)$$

que hace al problema simétrico en  $r, r'$ . Faltó determinar  $D$ : pedimos

$$-\left. \frac{\partial G_D}{\partial r} \right|_{r'^+} + \left. \frac{\partial G_D}{\partial r} \right|_{r'^-} = 4\pi\sigma$$

$$4\pi \sum_{\ell m} \left[ -\left. \frac{dc_\ell}{dr} \right|_{r'^+} + \left. \frac{dc_\ell}{dr} \right|_{r'^-} \right] Y_{\ell m}^*(\theta'\phi') Y_{\ell m}(\theta\phi) = \frac{4\pi}{r'^2} \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\theta'\phi') Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

$$\Rightarrow -\left. \frac{dc_\ell}{dr} \right|_{r'^+} + \left. \frac{dc_\ell}{dr} \right|_{r'^-} = \frac{1}{r'^2}$$

y reemplazando

$$\frac{1}{r'^2} = D_\ell \left[ -\left( r'^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r'^{\ell+1}} \right) \left( -\frac{\ell+1}{r'^{\ell+2}} - \frac{\ell r'^{\ell-1}}{b^{2\ell+1}} \right) + \left( \ell r'^{\ell-1} + \frac{(\ell+1)a^{2\ell+1}}{r'^{\ell+2}} \right) \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^\ell}{b^{2\ell+1}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow D_\ell \left[ \frac{\ell+1}{r'^2} - \left( \frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \frac{\ell}{r'^2} + \frac{\ell}{r'^2} - \left( \frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \frac{\ell+1}{r'^2} \right] = \frac{1}{r'^2}$$

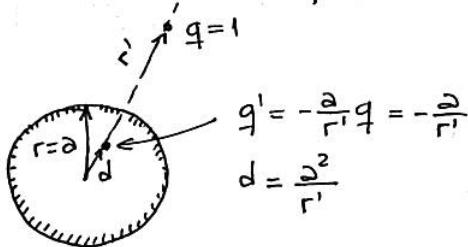
$$\text{y } D_\ell = \frac{1}{(2\ell+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \right]}$$

Y

$$G_D(\Sigma, \Sigma') = 4\pi \sum_{\ell, m} \frac{1}{(2\ell+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \right]} \left( r'_< - \frac{a^{2\ell+1}}{r'_<^{\ell+1}} \right) \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^\ell}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell m}^*(\theta' \phi') Y_{\ell m}(\theta \phi)$$

Vedemos el límite  $b \rightarrow \infty$

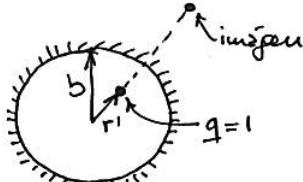
$$G_D(\Sigma, \Sigma') = 4\pi \sum_{\ell, m} \frac{1}{2\ell+1} \left[ \frac{r'_<^\ell}{r'_>^{\ell+1}} - \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{rr'} \right)^{\ell+1} \right] Y_{\ell m}^*(\theta' \phi') Y_{\ell m}(\theta \phi)$$



↑ es la imagen de una carga puntual en la esfera de radio  $a$  (q=1)

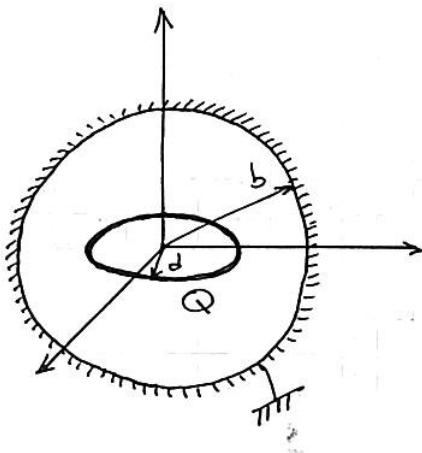
y en el límite  $a \rightarrow 0$

$$G_D(\Sigma, \Sigma') = 4\pi \sum_{\ell, m} \frac{1}{2\ell+1} \left[ \frac{r'_<^\ell}{r'_>^{\ell+1}} - \frac{1}{b} \left( \frac{rr'}{b^2} \right)^\ell \right] Y_{\ell m}^*(\theta' \phi') Y_{\ell m}(\theta \phi)$$



↑ es la imagen de la carga puntual (q=1) interna a la esfera de radio  $b$

Ejemplo: usemos esto para resolver el problema de un anillo con carga  $q$  en el interior de una esfera



Tenemos  $\varphi|_s = 0$

$$\Rightarrow \varphi(\Sigma) = \int \rho(\Sigma') G_D(\Sigma, \Sigma') d\Sigma' + \frac{1}{4\pi} \int_{S(v)} \frac{\partial G_D(\Sigma, \Sigma')}{\partial n} \varphi(\Sigma') dS'$$

Escribamos  $\rho(\Sigma')$

$$\rho(\Sigma') = C \delta(r-d) \frac{\delta(\Theta - \frac{\pi}{2})}{\sin \Theta} \text{ to } \int \rho(\Sigma') d\Sigma' = Q$$

$$\Rightarrow \rho(\Sigma') = \frac{Q}{2\pi d^2} \delta(r-d) \frac{\delta(\Theta - \frac{\pi}{2})}{\sin \Theta} \frac{r_s^\ell r_s^\ell}{b^{2\ell+1}}$$

luego

$$\varphi(\Sigma) = \frac{Q}{2\pi d^2} \int \delta(r-d) \frac{\delta(\Theta - \frac{\pi}{2})}{\sin \Theta} 4\pi \sum_{\ell=0} \frac{1}{2\ell+1} \left[ \frac{r_s^\ell}{r_s^{\ell+1}} - \frac{1}{b} \left( \frac{rr'}{b^2} \right)^\ell \right] Y_{\ell m}^*(\Theta \phi') Y_{\ell m}(\Theta \phi)$$

solo sobreviven los términos con  $m=0$

$$\Rightarrow \varphi(\Sigma) = \frac{2\pi Q d^2}{4\pi} \sum_{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell 0}^*(\frac{\pi}{2}, \phi') Y_{\ell 0}(\Theta \phi) \left( \frac{1}{r_s^{\ell+1}} - \frac{r_s^\ell}{b^{2\ell+1}} \right)$$

donde ahora  $r_s = \max \{r, d\}$   
 $r_s = \min \{r, d\}$

Usando

$$Y_{\ell 0}(\Theta \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \Theta)$$

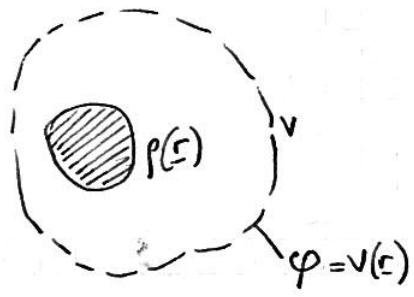
$$\Rightarrow \varphi(\Sigma) = Q \sum_{\ell} P_\ell(0) P_\ell(\cos \Theta) \left( \frac{1}{r_s^{\ell+1}} - \frac{r_s^\ell}{b^{2\ell+1}} \right)$$

y usando que  $P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}$

$$\text{y } P_{2n+1}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\Sigma) = Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n}(\cos \Theta) \left( \frac{1}{r_s^{2n+1}} - \frac{r_s^{2n}}{b^{4n+1}} \right)$$

## Método de imágenes



Tenemos  $\rho(r)$  en  $V$  y conocemos el valor de  $\varphi$  en la sup. que encierra a  $V$ . Escribimos

$$\varphi = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dv' + \varphi'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi' \Big|_{r \in V} = 0 \\ \varphi' \Big|_S = V(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dv' \Big|_S + \varphi' \Big|_S \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \varphi'$  en  $V$  está determinado únicamente pidiendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi' = 0 \\ \varphi' \Big|_S = V(r) - \int \frac{\rho(r') dv'}{|r-r'|} \Big|_S \end{array} \right.$$

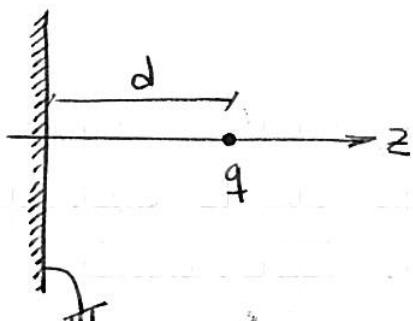
Un candidato es una función de la forma

$$\varphi'(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dv'$$

con  $\rho(r') \neq 0$  afuera de  $V$ , y  $\nabla \varphi'$  satisface la cdc. para  $\varphi' \Big|_S$ .

Notar que lo pedido no define únicamente  $\rho(r)$  afuera de  $V$ . Sin embargo, por los teo. de existencia y unicidad de sol., una vez encontrada  $\varphi$   $\nabla \varphi$  satisface las cdc., la sol. es única en  $V$ .

Carga puntual frente a un plano infinito conductor



Queremos  $\varphi$  en  $z > 0$

sabiendo que

$$\begin{cases} \varphi(z=0) = 0 \\ \varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Nos olvidamos del conductor

y tomamos

$$\varphi(\Sigma) = \frac{q}{|\Sigma - d\hat{z}|} + \underbrace{\frac{q_{im}}{|\Sigma - \Sigma'_{im}|}}_{\text{candidato para } \varphi'} \quad \text{para } z > 0$$

con  $\Sigma'_{im}$  en  $z < 0$ . Debe satisfacer

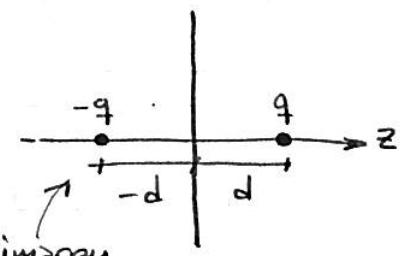
$$\varphi|_S = 0 = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (0-d)^2}} + \frac{q_{im}}{\sqrt{(x-x_{im})^2 + (y-y_{im})^2 + (0-z_{im})^2}}$$

$\Rightarrow$  tomamos

$$q_{im} = -q$$

$$x_{im} = y_{im} = 0$$

$$z_{im} = -d$$



La solución en todo el espacio es

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{|\Sigma - d\hat{z}|} - \frac{q}{|\Sigma + d\hat{z}|} & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

y conociendo  $\varphi$  en todo el espacio podemos hallar la verdadera distribución de cargas en la superficie:

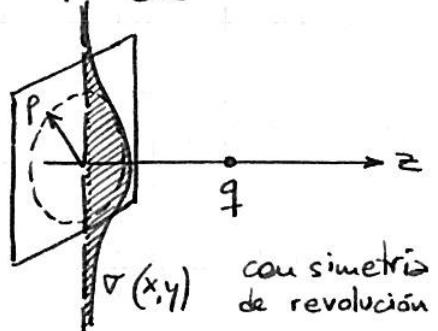
$$4\pi\sigma = \hat{n} \cdot (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \Big|_{z=0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}}$$

Luego  $\sigma(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \left( -\frac{q(z-d)}{|z-d|^3} + \frac{q(z+d)}{|z+d|^3} \right) \Big|_{z=0}$

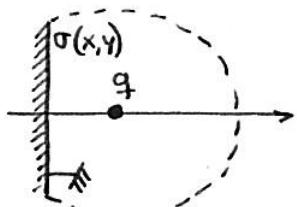
$$\boxed{\sigma(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2qd}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}}$$

Se puede ver que la carga inducida satisface



$$Q_{ind} = \int \sigma(x,y) dx dy = -q$$

O bien, tomando Gauss

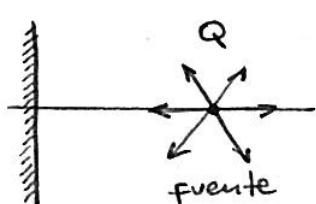


$$4\pi Q_{enc} = \oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_{\text{conducto}} \underline{E} \cdot d\underline{s} + \int_{\text{sup } r \rightarrow \infty} \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0$$

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \frac{1}{r^3} \\ d\underline{s} &\rightarrow r^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  tiende a cero

Notar que la intensidad depende de las cdc. Para un fluido en 2D

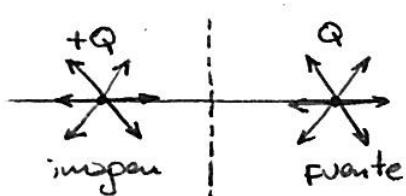


$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{excepto en la pos. de la fuente}) \\ \nabla \times \underline{u} = 0 \end{array} \right.$$

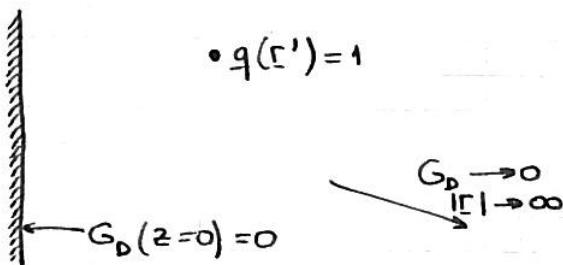
$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \nabla \Phi \quad \text{y la cdc es}$$

$$\underline{u} \cdot \hat{n} \Big|_S = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_S = 0$$



## Función de Green $G_D$ en un semiespacio



Buscamos  $G_D(r, r')$  tal que

$$\begin{cases} \nabla^2 G_D = -4\pi \delta(r - r') \\ G_D(r, r') \Big|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

Es el problema anterior pero con  $q=1$  y la carga en un punto  $r'$  cualquiera

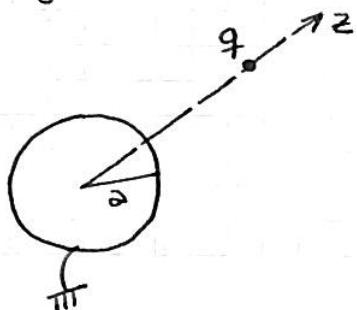
$$\Rightarrow G_D(r, r') = \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{1/2}}$$

y dado cualquier problema electrostático con

$$\begin{cases} \rho(r) \text{ en } z > 0 \\ \varphi(z=0) = V(x, y) \\ \varphi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \int \rho(r') G_D(r, r') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi(r') \frac{\partial G_D}{\partial n'} dS'$$

## Carga puntual frente a una esfera conductora



Veamos  $\varphi(r)$  para  $|r| > a$ .

Tomamos

$$\varphi(r) = \frac{q}{|r-d\hat{z}|} + \frac{q_{in}}{|r-d_{in}\hat{z}|} \quad (d_{in} < a)$$

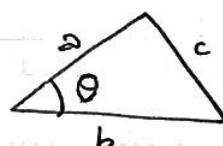
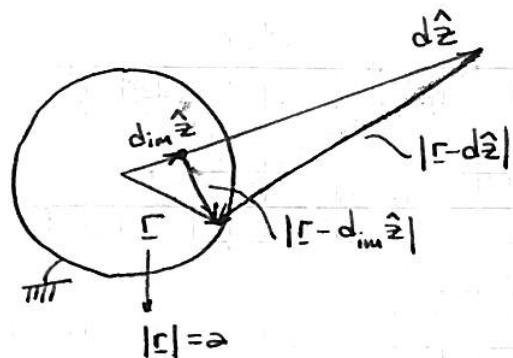
pues el sistema tiene simetría de revolución alrededor de  $z$ . De la cdc.

dentro de la esfera

$$\varphi(|r|=a) = 0$$

y usando el teo. del coseno

$$\varphi(r=d) = \frac{q}{(\alpha^2 + d^2 - 2\alpha d \cos\theta)^{1/2}} + \frac{q_{im}}{(\alpha^2 + d_{im}^2 - 2\alpha d_{im} \cos\theta)^{1/2}} = 0 \quad \forall \theta$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

$$\text{Weg} - \text{Sp}(q_{im}) = \text{Sp}(q)$$

y elevando al cuadrado

$$q^2 (\alpha^2 + d_{im}^2 - 2\alpha d_{im} \cos\theta) = q_{im}^2 (\alpha^2 + d^2 - 2\alpha d \cos\theta)$$

y pedimos

$$\begin{cases} q^2 (\alpha^2 + d_{im}^2) = q_{im}^2 (\alpha^2 + d^2) \\ q^2 2\alpha d_{im} \cos\theta = 2\alpha d q_{im}^2 \cos\theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{q_{im}^2}{q^2} = \frac{d_{im}}{d}$$

y reemplazando en (1)

$$\alpha^2 + d_{im}^2 = \frac{d_{im}}{d} (\alpha^2 + d^2) \Rightarrow \alpha^2 d + dd_{im}^2 - \alpha^2 d_{im} - dd_{im}^2 = 0$$

$$\Rightarrow d_{im} = \frac{(\alpha^2 + d^2) \pm \sqrt{(\alpha^2 + d^2)^2 - 4\alpha^2 d^2}}{2d} \quad \begin{array}{l} \cancel{d_{im}=d} \quad (>\alpha) \\ \boxed{d_{im} = \frac{\alpha^2}{d}} \end{array}$$

y luego

$$\boxed{q_{im} = -\frac{q\alpha}{d}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \frac{q}{|r-d\hat{z}|} - \frac{q\alpha/d}{|r-\frac{\alpha^2}{d}\hat{z}|}} \quad (r>\alpha)$$

La carga inducida se obtiene de

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=\alpha}$$

Escribiendo

$$\varphi = \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{q\alpha/d}{\left[r^2 + \left(\frac{\alpha^2}{d}\right)^2 + 2\frac{r\alpha^2}{d}\cos\theta\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{2q(\alpha - d\cos\theta)}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{2\alpha q/d(\alpha - \frac{\alpha^2}{d}\cos\theta)}{\left[\alpha^2 + \left(\frac{\alpha^2}{d}\right)^2 + 2\frac{\alpha^3}{d}\cos\theta\right]^{3/2}}$$

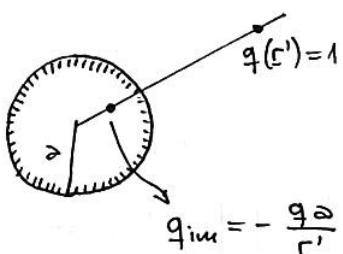
$$\text{y como } \varphi(r=\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{q}{(\alpha^2 + d^2 - 2\alpha d\cos\theta)^{1/2}} = \frac{q\alpha/d}{\left[\alpha^2 + \left(\frac{\alpha^2}{d}\right)^2 + 2\frac{\alpha^3}{d}\cos\theta\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=\alpha} = \frac{-q(\alpha - d\cos\theta) + q\frac{d^2}{\alpha^2}(\alpha - \frac{\alpha^2}{d}\cos\theta)}{(\alpha^2 + d^2 - 2\alpha d\cos\theta)^{3/2}} = \frac{q}{\alpha^2} \frac{\left(\frac{d^2}{\alpha^2} - 1\right)}{\left(1 + \frac{d^2}{\alpha^2} - 2\frac{\alpha^2}{d}\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta, \phi) = -\frac{q}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{d}\right) \frac{\left(1 - \frac{\alpha^2}{d^2}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{d^2} - 2\frac{\alpha^2}{d}\cos\theta\right)^{3/2}}$$

Es max. en  $\theta=0$   
y minima en  $\theta=\pi$

### Función de Green $G_D$ en la esfera



Veamos la función de Green exterior con c.d.c. de Dirichlet.

Del problema anterior:

$$G_D(\Sigma, \Sigma') = \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} - \frac{\alpha/\Sigma'}{|\Sigma - \frac{\alpha^2}{\Sigma'}\hat{\Sigma}'|}$$

y por teo. del coseño

$$G_D(\Sigma, \Sigma') = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\delta)^{1/2}} - \frac{\alpha}{r'\left(r^2 + \left(\frac{\alpha^2}{r'}\right)^2 - 2\frac{r\alpha^2}{r'}\cos\delta\right)^{1/2}}$$

$$\text{con } \cos\delta = \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') + \cos\theta\cos\theta'$$

$$\text{Saliómos que } \frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_\Sigma^l}{r_{\Sigma'}^{l+1}} Y_m^*(\theta'\phi') Y_m(\theta\phi)$$

$$\gamma \frac{\partial/r'}{|r - \frac{\partial^2 r'}{r'}} = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{\partial}{r'} \frac{r_c^l}{r_s^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta' \phi') Y_{lm}(\theta \phi)$$

→ ahora, afuera  $\left\{ \begin{array}{l} r_s = r \\ r_c = \partial^2/r \end{array} \right.$

y luego reobtenemos el desarrollo

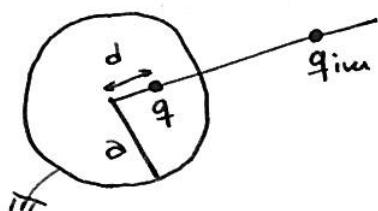
$$G_D(r, r') = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \left( \frac{r_c^l}{r_s^{l+1}} - \frac{\partial^{2l+1}}{r'^{l+1} r_s^{l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta' \phi') Y_{lm}(\theta \phi)$$

Carga puntual en el interior de una esfera conductora

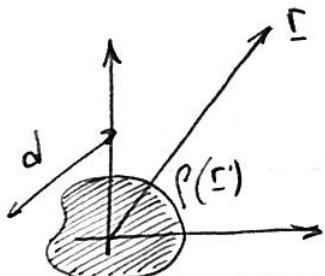
El problema es equivalente

$$\varphi(r) = \frac{q}{|r-d^2|} + \frac{q_{im}}{|r-d_{im}^2|}$$

con  $\left\{ \begin{array}{l} q_{im} = -q \frac{d}{d} \\ d_{im} = \frac{d^2}{d} \end{array} \right.$



Desarrollo multipolar en esféricas



Tenemos

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dv'$$

y queremos desarrollarlo para  $|r| \gg d$ .  
En cartesianas tenemos

$$\varphi(r) = \frac{Q}{r} + \frac{P \cdot r}{r^3} + \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} + \dots$$

Calculamos el desarrollo en esféricas. Tenemos

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_c^l}{r_s^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta' \phi') Y_{lm}(\theta \phi)$$

pero nos interesa  $|r| \gg d \Rightarrow r_c = r', r_s = r$

Reemplazando

$$\varphi(r) = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta\phi)}{r^{l+1}} \underbrace{\int Y_{lm}^*(\theta'\phi') r'^l \rho(r') dv'}_{q_{lm} \text{ coef. del desarrollo}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta\phi)}{r^{l+1}}}$$

con  $q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta'\phi') r'^l \rho(r') dv'$  momentos multipolares

Veamos algunos ejemplos:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(r') dv' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \Rightarrow \varphi^{(0,0)} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\pi}} \frac{Q}{r\sqrt{4\pi}} = \frac{Q}{r}$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(r') \underbrace{r'_1}_{z} \cos \theta' dv' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_z$$

$$q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \rho(r') r'_1 \cos \theta' e^{\pm i\phi'} dv' = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (P_x \pm iP_y)$$

El campo eléctrico correspondiente a un momento multipolar puede escribirse usando

$$\begin{aligned} E^{(l,m)} &= -\nabla \varphi^{(l,m)} = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) = \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \left[ (l+1) \frac{Y_{lm}(\theta\phi)}{r^{l+2}} \hat{r} - \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial Y_{lm}(\theta\phi)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{im}{r^{l+2} \sin \theta} Y_{lm}(\theta\phi) \hat{\phi} \right] \end{aligned}$$

Por ejemplo, para un dipolo puntual en  $\hat{z}$

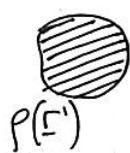
$$\begin{aligned} E^{(1,0)} &= \frac{4\pi}{3} q_{10} \left[ 2 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\cos \theta}{r^3} + \frac{1}{r^3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \hat{\theta} \right] = \\ &= \frac{2P \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{Ps \theta}{r^3} \hat{\theta} \end{aligned}$$

## Energía electrostática

Habíamos visto que la fuerza electrostática

$$\underline{F} = q \underline{E}$$

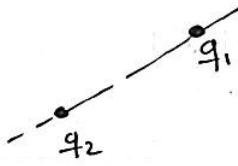
es conservativa pues  $\underline{E} = -\nabla \varphi$ . Así, el trabajo para traer una carga desde el  $\infty$  es



$$W = - \int_{\infty}^{\Sigma} q \underline{E} \cdot d\underline{l} = q \varphi(\Sigma)$$

y es independiente del camino.

Entonces, definimos una energía potencial de interacción entre las cargas de una distribución

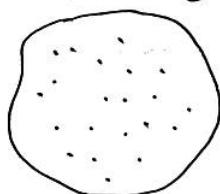


$$U = \frac{q_1 q_2}{|\Sigma_1 - \Sigma_2|}$$

o bien, simetrizando

$$U = \frac{1}{2} [q_1 \varphi_2(\Sigma_1) + q_2 \varphi_1(\Sigma_2)]$$

Para N cargas



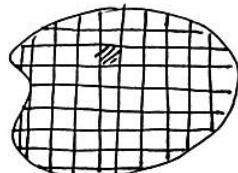
$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\Sigma_i - \Sigma_j|}$$

O en forma simétrica

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\Sigma_i - \Sigma_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi(\Sigma_i)$$

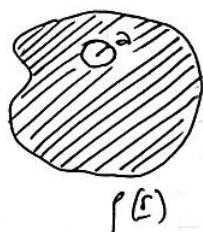
potencial debido a  
las  $N-1$  cargas restantes

y en el caso continuo



$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\Sigma) \varphi(\Sigma) dV$$

Estrictamente hablando la integral debería excluir el bloque  $\Sigma$ . Pero si  $\rho(\mathbf{r})$  se comporta bien (toma valores finitos en todo el espacio) la contribución de  $\Sigma$  no influye en el resultado, pues



$$\varphi = \varphi' + \int_{\text{esfera}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

y para  $r \rightarrow 0$   $\varphi = \varphi'$  salvo que  $\rho$  diverja más rápido que  $1/r^2$ .

Podemos escribir  $U$  en términos de los campos, en lugar de en términos de las cargas y los potenciales.

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int (\nabla^2 \varphi) \varphi dV$$

y usando  $(\nabla \cdot \nabla \varphi) \varphi = \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) - \nabla \varphi \nabla \varphi$

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{8\pi} \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV + \frac{1}{8\pi} \int |\nabla \varphi|^2 dV =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int \underbrace{\varphi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}_{S(V)} + \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}|^2 dV$$

y

$$U = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}|^2 dV$$

y se puede definir una densidad de energía  $u = \frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi}$ , pero se debe tener cuidado en volúmenes finitos con las c.d.c. y la integral sobre  $S(V)$ .

Veamos algunos ejemplos:

## Casos particulares

1)



$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$$

$$\text{dado que } \begin{cases} \rho = \rho_1 + \rho_2 \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int \underbrace{(\rho_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2)}_{\text{autoenergías}} + \underbrace{(\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1)}_{\text{energía de interacción}} dV$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int \rho_1 \varphi_1 dV$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int \rho_2 \varphi_2 dV$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{autoenergías} \\ (\text{deformación}) \end{array} \right\}$$

$U_1, U_2 > 0$   
mientras que  
 $U_1, U_2$  puede ser  
negativa

$$U_{12} = \frac{1}{2} \int (\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1) dV = \int \rho_1 \varphi_2 dV = \int \rho_2 \varphi_1 dV$$

energía de interacción

$$\int \rho_1 \varphi_2 dV = \int \frac{\rho_1(\Sigma) \rho_2(\Sigma')}{|\Sigma - \Sigma'|} dV dV' = \int \rho_2 \varphi_1 dV$$

Pues

2) Sistemas de conductores



$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S(V_i)} \sigma_i \varphi dS_i = \frac{1}{2} \sum_i V_i Q_i$$

Pero nota que no puedo prescribir  $Q_i$  y  $V_i$  al mismo tiempo. Como las ec. de los campos en el vacío son lineales, podemos escribir

$$Q_i = C_{ij} V_j$$

donde los  $C_{ij}$  dependen de la geometría

$C_{ii} \rightarrow$  coeficientes de capacidad

$C_{ij} \rightarrow$  coeficientes de inducción electrostática ( $i \neq j$ )

con  $C_{ii} > 0$ ,  $C_{ij} < 0$  ( $i \neq j$ ) (pues las cargas inducidas son de signo contrario).

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} C_{ij} V_i V_j$$

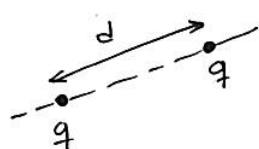
Además, notar que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial Q_i} = V_i \\ \frac{\partial U}{\partial V_i} = Q_i \end{array} \right.$$

y como  $U$  es función de estado, sus derivadas cruzadas deben ser iguales

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial V_i} = C_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial V_j \partial V_i} = C_{ij}$$
$$\Rightarrow C_{ij} = C_{ji}$$

### 3) Cargas puntuales



$$U_{12} = -\frac{q^2}{d} < 0$$

Notar que el cálculo del trabajo para traer una carga del  $\infty$  no tiene en cuenta las autoenergías, mientras que

$$U = \int \frac{1}{2} \rho \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbb{E}|^2 dV > 0$$

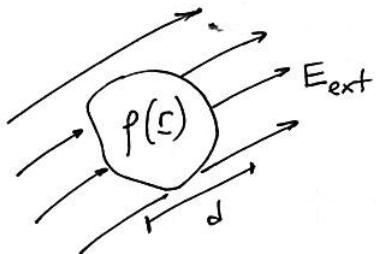
porque considera autoenergías. Para una esfera con  $\rho$  uniforme

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi r^2}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{3Q^2}{5r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$$

pero si la esfera no se deforma es una constante.

### Energía de interacción de una distribución con un campo externo



$$U_{\text{int}} = \int \rho(\mathbf{r}) \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) dV$$

Si la distribución está concentrada en una región con long. característica  $d$  con  $d \ll$  long. característica de variación de  $\varphi$

⇒ desarrollamos  $\varphi$  alrededor de  $r_0$

$$U_{\text{int}} = \int dV \rho(\mathbf{r}) \left[ \varphi(r_0) + (r_i - r_{0i}) \frac{\partial \varphi}{\partial r_i} \Big|_{r_0} + \frac{1}{2} (r_i - r_{0i})(r_j - r_{0j}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{r_0} + \dots \right]$$

$$= \varphi(r_0) \int \rho dV + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r_i} \right|_{r_0} \int \rho(\mathbf{r}) (r_i - r_{0i}) dV + \\ + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{r_0} \int \rho(\mathbf{r}) (r_i - r_{0i})(r_j - r_{0j}) dV$$

y  $U_{\text{int}}$  pueda expresada en términos de los multipolos respecto de  $r_0$ .

$$\Rightarrow U_{\text{int}} = Q \varphi(r_0) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r_i} \right|_{r_0} P_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{r_0} C_{ij} + \dots$$

$$= Q \varphi(r_0) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}(r_0) - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial r_i} \right|_{r_0} C_{ij} + \dots$$

pues  $\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} = -E_i$ . Además

$$Q_{ij} = 3C_{ij} - C_{ee}\delta_{ij} \Rightarrow C_{ij} = \frac{Q_{ij}}{3} + \delta_{ij}\frac{C_{ee}}{3}$$

y luego  $\frac{1}{2} \frac{\partial E_j}{\partial r_i} \Big|_{r_0} C_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial E_j}{\partial r_i} \Big|_{r_0} \left( \frac{Q_{ij}}{3} + \delta_{ij} \frac{C_{ee}}{3} \right) =$   
 $= \frac{1}{6} \frac{\partial E_j}{\partial r_i} \Big|_{r_0} Q_{ij} + \frac{1}{6} \cancel{\frac{\partial E_i}{\partial r_i}} \Big|_{r_0} C_{ee}$

$$\Rightarrow U_{int} = Q\varphi(r_0) - P \cdot E(r_0) - \frac{1}{6} \frac{\partial_i E_j}{\partial r_i} \Big|_{r_0} Q_{ij} + \dots$$

y  $Q$  interactiva con  $\varphi$

$$\begin{array}{lll} P & " & E \\ \underline{Q} & " & \underline{\nabla E} \end{array}$$

Por ejemplo, si introduzco  $p(\varepsilon)$  en un  $E$  uniforme interactúa solo si  $P \neq 0$ .

### Energía electrostática en medios materiales

La definimos como  $-W$  para armar la configuración.

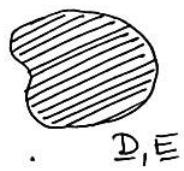
Notar que ahora no hay que contar solo el trabajo para traer cargas del  $\infty$ , sino también el trabajo asociado a polarizar el medio para cada configuración.

$U$  es función de estado termodinámica

$$\Delta U = Q - W = Q + W_{ext}$$

y  $\delta U = T \delta S - \delta W = T \delta S + \delta W_{ext}$

consideremos solo la energía electrostática de una configuración



$\rho_e$

e incrementemos  $\rho_e \rightarrow \rho_e + \delta\rho_e$

$$\Rightarrow \delta U = \int \delta \rho_e \varphi dV$$

$$\text{Pero } 4\pi \rho_e = \nabla \cdot D$$

$$\Rightarrow 4\pi \delta \rho_e = \nabla \cdot (\delta D)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta U &= \int dV \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \delta D) \varphi = \\ &= \cancel{\frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot (\delta D \varphi) dV} - \frac{1}{4\pi} \int \delta D \cdot \nabla \varphi dV \\ \Rightarrow \delta U &= \frac{1}{4\pi} \int \underline{\underline{E}} \cdot \delta \underline{\underline{D}} dV \end{aligned}$$

Formalmente, ahora podemos llevar  $\underline{\underline{D}}$  de 0 a su valor y obtener

$$U = \frac{1}{4\pi} \int dV \int_0^{\underline{\underline{D}}} \underline{\underline{E}} \cdot \delta \underline{\underline{D}} \quad \xrightarrow{\text{Nota que:}} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}(\underline{\underline{D}})$$

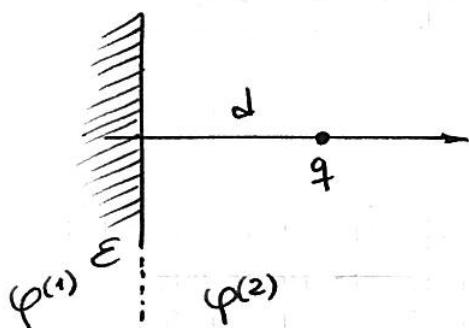
↑ tiene en cuenta la historia del medio (histeresis)

Si el medio es lineal  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{E}}$

$$\text{y } \underline{\underline{E}} \cdot \delta \underline{\underline{D}} = E_i \epsilon_{ij} \delta E_j = \delta (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}})$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{8\pi} \int \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} dV$$

Ejemplo:



Tenemos que considerar la polarización del medio.  
Usando imágenes, buscamos

$$\varphi^{(2)} = \frac{q}{|\Gamma - d\hat{z}|} + \varphi'$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi' = 0 \text{ en } z > 0 \\ \varphi^{(2)} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \\ \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} \text{ en } z = 0 \end{array} \right\}$$

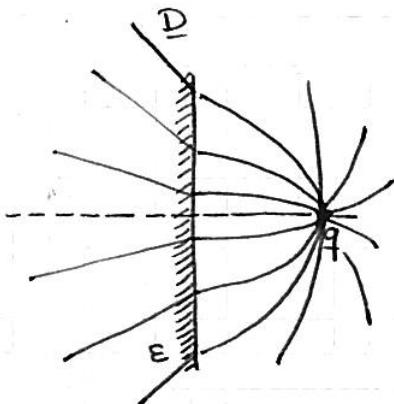
$$\text{Además } (\underline{D}^{(2)} - \underline{D}^{(1)}) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_e = 0 \quad (1)$$

$$\text{Es decir } \left\{ \begin{array}{l} \left. (\varphi^{(1)}) \right|_{z=0} = \left. \frac{q}{|\Gamma - d\hat{z}|} \right|_{z=0} + \varphi'(z=0) = \varphi^{(2)} \Big|_{z=0} \\ \left. \left[ -\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \right] \right|_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

La solución en (1) debe ser solución de Laplace.

Tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{(1)} = \frac{q_{im}}{|\Gamma - d\hat{z}|} \\ \varphi^{(2)} = \frac{q}{|\Gamma - d\hat{z}|} + \frac{q_{im}}{|\Gamma - z_{im}\hat{z}|} \end{array} \right.$$



De las cdc.

$$\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} + \frac{q_{im}}{\sqrt{x^2+y^2+z_{im}^2}} = \frac{q_{im}}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}$$

$$-\frac{qd}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} - \frac{q_{im}z_{im}}{(x^2+y^2+z_{im}^2)^{3/2}} = -\frac{\epsilon q_{im}d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

Tomamos  $z_{im} = -d$   $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q + q_{im} = q_{im} \\ -q + q_{im} = -\epsilon q_{im} \end{array} \right.$

Luego  $q_{im} = \frac{2q}{1+\epsilon}$

$$q_{im} = \frac{q(1-\epsilon)}{1+\epsilon}$$

$$\varphi(\underline{\Gamma}) = \begin{cases} \frac{2}{1+\epsilon} \frac{q}{|\Gamma - d\hat{z}|} & z < 0 \\ \frac{q}{|\Gamma - d\hat{z}|} + \frac{1}{1+\epsilon} \frac{q(1-\epsilon)}{|\Gamma + d\hat{z}|} & z > 0 \end{cases}$$

↑ debido a la polarización del dielectrónico.

P (en realidad,  $\sigma_p$ )

puede obtenerse de  $(E^{(2)} - E^{(1)}) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_p$

con  $E^{(2)} = -\nabla\varphi^{(2)}$  y  $E^{(1)} = -\nabla\varphi^{(1)}$ .

Ahora podemos calcular U de la configuración usando

$$\delta U = \int \delta p_e \varphi dV$$

Consideremos la carga como  $\alpha q$  y llevemos  $\alpha$  de 0 a 1:

$$\Psi^{(2)}(\Gamma) = \frac{\alpha q}{|\Gamma - d\hat{z}|} + \frac{\alpha q(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)|\Gamma + d\hat{z}|} \quad y \quad \delta p_e = q \delta \alpha \delta(\Gamma - d\hat{z})$$

Nos interesa solo la energía de interacción, es decir,  $\alpha q$ , con el campo eléctrico generado por el dielectrónico

$$U = \int_0^1 q \, d\alpha \frac{\alpha q(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)2d} = \frac{q^2}{4d} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < 0$$

y el dielectrónico atrae a la carga.

### Principio de trabajos virtuales

Consideremos una distribución de cargas y desplazemos las cargas en  $\Delta \Gamma_i$



$$\begin{aligned} \Delta U &= U(q_i, \Gamma + \Delta \Gamma_i) - U(q_i, \Gamma_i) = \\ &= - \sum_i E_i \cdot \Delta \Gamma_i = - F_i^{(\alpha)} \Delta \Gamma_i^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

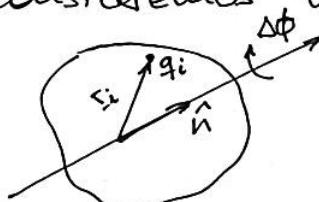
Luego

$$F_i^{(\alpha)} = - \left. \frac{\partial U}{\partial \Gamma_i^{(\alpha)}} \right|_q = - \lim_{\Delta \Gamma_i^{(\alpha)} \rightarrow 0} \frac{U' - U}{\Delta \Gamma_i^{(\alpha)}}$$

En general

$$F_i = - \nabla_i U \Big|_q$$

Consideremos una rotación rápida



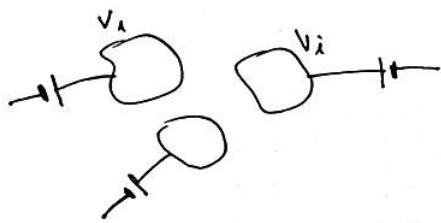
$$\Delta \Gamma_i = \Delta \Phi \hat{n} \times \Gamma_i$$

$$\gamma \frac{U' - U}{\Delta \phi} = -E_i \cdot (\cancel{\Delta \phi} \hat{n} \times \underline{r}_i) \frac{1}{\Delta \phi} = -\hat{n} \cdot (\underline{r}_i \times E_i) = -\hat{n} \cdot \underline{N}$$

Torque

Precio de trabajos virtuales  $\Rightarrow$  potencial constante

Cuando se prescriben los potenciales (en lugar de las cargas) al desplazar los conductores necesitamos baterías para mantener  $V$  cte. Tomemos:



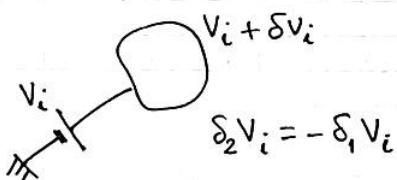
Desconectamos las fuentes y los mantenemos aislados para desplazarlos. Luego conectamos las baterías para volver a  $V_i$  en cada conductor.

Al desconectar las fuentes

$$\delta_1 U = \frac{1}{2} \sum_i (\cancel{s_i q_i} V_i + q_i \cancel{s_i V_i})$$

Al conectar las

$$\delta_2 U = W_{\text{batería}} = \sum \delta_2 q_i V_i$$



(las baterías están a  $V_i$  constante)

$$\Rightarrow \delta_2 U = \sum_i \delta_2 q_i V_i = \sum_i q_i \delta_2 V_i = - \sum_i q_i \delta_1 V_i$$

$$\Rightarrow \delta U = \delta_1 U + \delta_2 U = -\frac{1}{2} \sum_i q_i \delta_1 V_i = -\delta_1 U = +F_i \cdot \delta r_i$$

sist. aislado      variación de  $U$  de las baterías      trabajo hecho por las baterías para restaurar  $V_i$

$$\Rightarrow F_i = \nabla_i U \Big|_V$$

Otra forma de verlo es usando que  $U$  es func. de estado. Tenemos  $\frac{\partial U}{\partial q_i} = V_i$ ,  $\frac{\partial U}{\partial r_i^{(\alpha)}} = -F_i^{(\alpha)}$

$$\Rightarrow dU = V_i dq_i - F_i \cdot dr_i$$

para el sist. cerrado (cargas constantes). Si quiero pasar a variables independientes  $V_i, r_i$  tomamos potencial termodinámico  $\tilde{U}$ :

$$\tilde{U} = U - q_i V_i \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{transf. de} \\ \text{Legendre} \end{array}$$

$$\Rightarrow d\tilde{U} = dU - q_i dV_i - V_i dq_i = -q_i dV_i - F_i \cdot d\Sigma_i$$

$$\Rightarrow F_i = -\nabla_i \tilde{U}|_V = \nabla_i U|_V$$

### Termodinámica de dielectricos

La energía interna está dada por

$$U = Q - W = Q + W_{ext}$$

y

$$\delta U = T \delta S + \frac{1}{4\pi} \int \underline{E} \cdot \underline{\delta D} dV$$

Esta expresión es útil para procesos en los que la entropía está prescripta. Si trabajamos con  $\underline{D}$  y  $T$  como variables termodinámicas independientes, introducimos la energía libre de Helmholtz usando transf. de Legendre

$$F = U - TS$$

$$\Rightarrow \delta F = -SdT + \frac{1}{4\pi} \int \underline{E} \cdot \underline{\delta D} dV$$

Si queremos  $\underline{E}$  como variable termodinámica

$$\tilde{U} = U - \frac{1}{4\pi} \int \underline{E} \cdot \underline{D} dV \quad \leftarrow \text{es equivalente al ejemplo anterior}$$

$$\tilde{F} = U - \frac{1}{4\pi} \int \underline{E} \cdot \underline{D} dV \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}: \text{respecto a los potenciales} \\ U: \text{respecto a las cargas} \end{array} \right.$$

$$\text{y } \delta \tilde{F} = \delta F - \frac{1}{4\pi} \int (\underline{E} \cdot \underline{\delta D} + \underline{D} \cdot \underline{\delta E}) dV = -SdT - \frac{1}{4\pi} \int \delta \underline{E} \cdot \underline{D} dV$$

$$\delta \tilde{U} = T \delta S - \frac{1}{4\pi} \int \delta \underline{E} \cdot \underline{D} dV$$

Notar que dados los potenciales tenemos (usando  $D = E - \underline{E}$ )

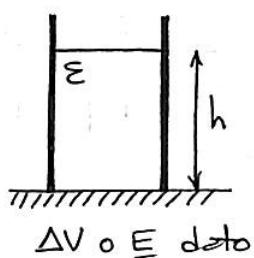
$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\underline{D}} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\underline{D}} \int \frac{D^2}{8\pi e^2} dV + S_0(T) = \\ &= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\underline{D}} \int \frac{E^2}{8\pi} dV + S_0(T) \end{aligned}$$

Recordar que en una transf. isotérmica  $-\Delta F$  es el maximo trabajo que puede hacer el sistema

$$\frac{\Delta Q}{T} \leq \Delta S \quad y \quad W \leq -\Delta U + T\Delta S$$
$$\Rightarrow W \leq -\Delta F$$

Se sigue que un sist. aislado a  $T = \text{cte}$  evoluciona al minimo de  $F$ .

Ejemplo: capacitor con dielectrónico líquido



Tenemos energía potencial de la columna (gravitatoria)

$$U_g = \int_0^h \rho g h dh = \rho g \frac{h^2}{2} \quad (\times \text{u. de área})$$

Para la energía electrostática, queremos la variación por introducir el dielectrónico.

Veamos que

$$U_e = \frac{1}{8\pi} \int (\underline{\epsilon} \cdot \underline{D} - \underline{\epsilon}_0 \cdot \underline{D}_0) dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int [(\underline{\epsilon} \cdot \underline{D}_0 - \underline{D} \cdot \underline{\epsilon}_0) + (\underline{\epsilon} + \underline{\epsilon}_0) \cdot (\underline{D} - \underline{D}_0)] dV$$

$-\nabla \Phi$  pues  $\nabla \times (\underline{\epsilon} + \underline{\epsilon}_0) = 0$

$$\gamma \int -\nabla \Phi \cdot (\underline{D} - \underline{D}_0) dV = - \int \nabla \cdot [\Phi (\underline{D} - \underline{D}_0)] dV + \int \Phi \nabla \cdot (\underline{D} - \underline{D}_0) dV$$

$\uparrow_{\Phi = 0}$  pues  $\Phi$  no cambia

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{8\pi} \int (\underline{E} \cdot \underline{D}_0 - \underline{D} \cdot \underline{E}_0) dV$$

Puede obtenerse de  $dF = -\frac{1}{4\pi} \int \delta E \cdot \underline{D} dV$  variando  $\epsilon'$  de 1 a  $\epsilon$

$$\Rightarrow U_e = -\frac{1}{8\pi} \int_{\text{medio}} (\epsilon - 1) E \cdot E_0 dV$$

solo sobre el volumen del medio, pues afuera  $\underline{D} = \underline{E}$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\text{medio}} P \cdot E_0 dV$$

es la energía de interacción

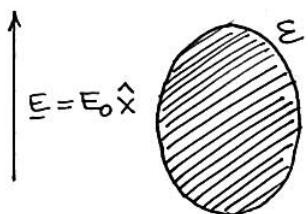
Wegó  $U_e = -\frac{1}{8\pi} (\epsilon - 1) E^2 h$  ( $\times$  v. de área)

$$\gamma \quad \delta F = \phi = \rho g h \delta h - \frac{1}{8\pi} (\epsilon - 1) E^2 \delta h =$$

$$= \delta h \left[ \rho g h - \frac{1}{8\pi} (\epsilon - 1) E^2 \right]$$

$$\Rightarrow h = \frac{E^2}{8\pi \rho g} (\epsilon - 1)$$

Ejemplo: consideremos una gota de dielectrónico líquido en un campo  $E$  uniforme ( $E$  débil). ¿Qué forma tiene?



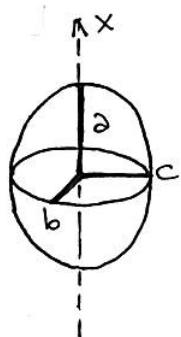
El campo  $E^{(i)}$  dentro del medio será uniforme. Por simetría, la gota será un elipsoide y el campo satisface (Landau & Lifshitz):

$$(1 - n_x) E_x^{(i)} + n_x D_x^{(i)} = E_0$$

(pues para  $\epsilon = 1$  tenemos  $E_x^{(i)} = E_0$ ). El coef.  $n_x$  (coef. de depolarización) es geométrico y vale

$$n_x = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^2 \quad \text{para } e \ll 1$$

con la excentricidad  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$   
y  $b = c$  x simetría de revolución.



Luego, para un medio lineal, isotropo y homogeneo

$$E_x^{(i)} = \frac{E_0}{1 + \nu_x(\epsilon - 1)}$$

y

$$U_e = -\frac{(\epsilon - 1) E_0^2 V}{8\pi [1 + \nu_x(\epsilon - 1)]}$$

donde  $V$  es el volumen  
(constante)

Luego  $F = \gamma A - \frac{(\epsilon - 1) E_0^2 V}{8\pi [1 + \nu_x(\epsilon - 1)]}$

$\nearrow$   
tensión superficial

Podemos aproximar

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^2\right)(\epsilon - 1)} &= \frac{1}{\frac{\epsilon+2}{3} - \frac{2}{15}(\epsilon-1)e^2} = \frac{3}{\epsilon+2} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{5} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) e^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{3}{\epsilon+2} \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} e^2 \right) \end{aligned}$$

Además

$$V = \frac{4\pi}{3} \alpha b^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (\text{radio de la esfera con igual } V)$$

y al orden mas bajo en  $e$

$$\alpha \approx R \left(1 + \frac{e^2}{3}\right) \quad \text{pues} \quad \alpha = R (1 - e^2)^{-1/3}$$

$$b \approx R \left(1 - \frac{e^2}{6}\right) \quad \text{pues} \quad b = R (1 - e^2)^{1/6}$$

y  $A \approx 4\pi R^2 + \frac{8\pi}{45} e^4 R^2$

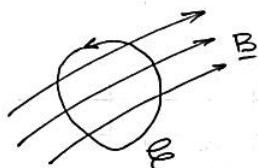
$$\Rightarrow F = F_0 + \gamma \frac{8\pi}{45} e^4 R^2 - \frac{6R^3}{2 \cdot 15} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 E_0^2 e^2$$

y  $\delta F = 0 = 8e \left[ 4 \gamma \frac{8\pi R^2}{45} e^3 - \frac{6R^3}{15} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 E_0^2 e \right]$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{9}{16\pi} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{RE_0^2}{\gamma}$$

## Fenómenos dependientes del tiempo

Ley de inducción de Faraday:



$$\text{FEM} \quad \downarrow \quad E = -\frac{1}{C} \frac{d\Phi}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{Flujo} \\ \text{magnético} \end{array}$$

↑ Ley de Lenz

$$E = \oint_{S(\epsilon)} \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\frac{1}{C} \int_{S(\epsilon)} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s} \quad \text{si el circuito es fijo}$$

Maxwell lo generaliza como una relación entre  $\underline{E}$  y  $\underline{B}$

$$\oint_{S(\epsilon)} \underline{E} \cdot d\underline{l} = \int_{S(\epsilon)} (\nabla \times \underline{E}) \cdot d\underline{s} = -\frac{1}{C} \int \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}$$

Ley de Ampere: Habíamos visto que  $\nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{C} \underline{J}_e$  viola la continuidad de carga. Maxwell la generaliza como

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{C} \underline{J}_e + \frac{1}{C} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

## Ecaciones de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho_e \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{C} \underline{J}_e + \frac{1}{C} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{con fuentes} \\ \text{(inhomogéneas)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{sin fuentes} \\ \text{(homogéneas)} \end{array}$$

y en vacío

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{C} \underline{J} + \frac{1}{C} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

## Potenciales electromagnéticos

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad (\text{potencial vector})$$

Reemplazando en (2)

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \underline{A} = 0$$

$$\nabla \times \left( \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \Rightarrow \boxed{\underline{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}}$$

Podemos escribir Maxwell en términos de  $\underline{A}, \varphi$ .

$$\text{De } \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla \cdot \left( -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho$$

$$\text{y de (1)} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right)$$

luego

$$\begin{cases} -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{A} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} - \nabla \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} \end{cases}$$

y tenemos libertad de elección de  $\nabla \cdot \underline{A}$ .

Gauge de Lorentz :

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}$$

Queda

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} \end{cases}$$

Notar que dados  $\underline{A}, \varphi$  que satisfacen el gauge, tiempo libertad

$$\underline{A}' = \underline{A} + \nabla \chi$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

con  $\chi$  arbitraria

pues

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{A} = \nabla \times \underline{A}' = \underline{B} \\ -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}'}{\partial t} = \underline{E} \end{cases}$$

Gauge de Coulomb:

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \\ -\nabla^2 \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} - \nabla \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (1)$$

Notar que en este gauge  $\varphi$  es el potencial electrostático

$$\varphi(\underline{r}, t) = \int \frac{\rho(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV'$$

En la segunda ecuación descomponemos  $\underline{j} = \underline{j}_e + \underline{j}_t$

$$\text{con } \begin{cases} \nabla \times \underline{j}_e = 0 & \text{(irrotacional)} \\ \nabla \cdot \underline{j}_t = 0 & \text{(solenoideal)} \end{cases}$$

$\equiv \underline{j}(\underline{r}')$

luego

$$\underline{j}_e = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left( \int \frac{\nabla' \cdot \underline{j}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' \right)$$

$$\underline{j}_t = -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \left( \int \frac{\nabla \times \underline{j}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' \right)$$

De la ec. de continuidad

$$\frac{4\pi}{c} \underline{j}_e = \frac{1}{c} \nabla \left( \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' \right) = \frac{1}{c} \nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

$\Rightarrow (1)$  queda

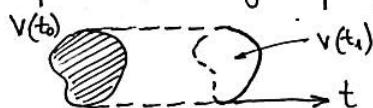
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}_t + \cancel{\frac{4\pi}{c} \underline{j}_e - \nabla \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}$$

y recuperamos una ec. de ondas con fuentes para  $\underline{A}$ , donde ahora la fuente es solo la parte de la densidad de corriente que no produce acumulación de cargas.

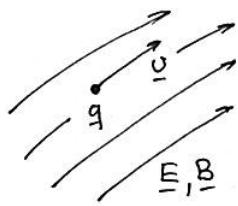
Ahora tenemos ec. de la forma  $\nabla^2 \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = -4\pi \underline{f}(\underline{r}, t)$

Necesitamos conocer las fuentes y cdc., pero ahora el volumen es  $V$  + su evolución en el tiempo. Por ejemplo,

$$\begin{cases} \chi(\underline{r}) & \forall \underline{r} \text{ en } t_0, t_1 \\ \chi_s & \forall t \end{cases}$$



## Balance de energía para un sist. de cargas



Para una carga puntual, tenemos  
la fuerza de Lorentz (experimental)

$$\underline{F} = q \underline{E} + \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B}$$

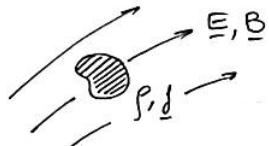
y para una dist. en volumen  $\underline{F} = \rho \underline{E} + \frac{\underline{j}}{c} \times \underline{B}$

Véamos el trabajo que hacen los campos electromagnéticos sobre un sist. de cargas x unidad de tiempo (potencia entregada)

$$\frac{dW}{dt} = \left( q \underline{E} + \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \cdot \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}} = q \underline{v} \cdot \underline{E}$$

y en un medio continuo

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \underline{J} \cdot \underline{E} dV$$



$$\text{Pero de Ampère} \quad \nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \int_V \left( \frac{c}{4\pi} \nabla \times \underline{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) \cdot \underline{E} dV$$

Además

$$(\nabla \times \underline{H}) \cdot \underline{E} = \varepsilon_{ijk} (\partial_j H_k) E_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (H_k E_i) - \varepsilon_{ijk} (\partial_j E_i) H_k = - \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) + (\nabla \times \underline{E}) \cdot \underline{H}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \int_V -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) - \frac{1}{4\pi} \int_V \underbrace{\left( \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot \underline{H} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \cdot \underline{E} \right)}_{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{B} \cdot \underline{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \cdot \underline{E})} dV \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = - \int_{S(V)} \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{H}) \cdot d\underline{A} - \frac{d}{dt} \int_V \underbrace{\frac{1}{8\pi} (\underline{B} \cdot \underline{H} + \underline{D} \cdot \underline{E})}_{U} dV \quad (2)$$

$U$  (densidad de energía electromagnética)

W puede convertirse en energía

mecánica o calor. Si no hay disipación el W externo se convertirá en  $U_{\text{mec}}$

$$\frac{dU_{\text{mec}}}{dt} = - \int_{S(V)} \underline{S} \cdot d\underline{A} - \frac{dU_{\text{ext}}}{dt}$$

con

$$U_{\text{ext}} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\underline{B} \cdot \underline{H} + \underline{D} \cdot \underline{E}) dV$$

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \times \underline{H}$$

← Vector de Poynting  
(densidad de flujo)

En forma diferencial:  
(o de conservación)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{S} = - \underline{J} \cdot \underline{E}$$

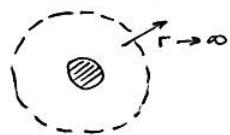
de (1) y (2)

$$\text{Notar que } \int_{S(V)} \underline{S} \cdot d\underline{A} = \int_{r \rightarrow \infty} \hat{r} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) r^2 d\Omega \rightarrow 0$$

$\sim 1/r^2$  para los campos de radiación

$$(\underline{E} \sim \underline{H} \sim 1/r)$$

para el ej. del dipolo  $\begin{cases} \underline{E} \text{ va en } \hat{\theta} \\ \underline{B} \text{ va en } \hat{\phi} \end{cases}$  }  $\underline{E} \times \underline{B}$  va en  $\hat{r}$



Si los campos se generan en  $t_0$ , para esferas con radio  $R > c(t - t_0)$   $\frac{d}{dt}(U_{\text{mec}} + U_{\text{em}}) = 0$  (si no hay dissipación)

Si no, se describe el flujo de energía por radiación, llevado por los campos.

### Balance de impulso

$$\text{Ahora } \frac{dP_{\text{mec}}}{dt} = F = \int \left( \rho \underline{\underline{E}} + \frac{\underline{j}}{c} \times \underline{B} \right) dV$$

Escribiendo todo en términos de los campos

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \underline{\underline{E}} , \quad \underline{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \underline{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t} \quad (\text{vacío})$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \underline{\underline{E}} (\nabla \cdot \underline{\underline{E}}) + (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} - \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t} \times \underline{B}}_H \right] dV$$

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{E} \times \underline{B}) + \frac{1}{c} \underline{\underline{E}} \times \underbrace{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}_H$$

$$\gamma - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = - \nabla \times \underline{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \underline{\underline{E}} (\nabla \cdot \underline{\underline{E}}) + (\nabla \times \underline{\underline{E}}) \times \underline{\underline{E}} + (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} \right] dV - \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V \underline{\underline{E}} \times \underline{B} dV$$

Podemos identificar  $P_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi c} \underline{\underline{E}} \times \underline{B}$

$$\Rightarrow \frac{dP_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dP_{\text{em}}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \underline{\underline{E}} (\nabla \cdot \underline{\underline{E}}) + (\nabla \times \underline{\underline{E}}) \times \underline{\underline{E}} + (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} \right] dV$$

y para expresar una conservación quiero escribir el término de la derecha como una divergencia. Veamos que

$$[\underline{\underline{E}} (\nabla \cdot \underline{\underline{E}}) + (\nabla \times \underline{\underline{E}}) \times \underline{\underline{E}}]_i = E_i \partial_j E_j + \overbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} (\partial_k E_m)}^{E_{jki}} E_k =$$

$$= E_i \partial_j E_j + (\partial_k E_i) E_k - (\partial_i E_k) E_k = \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2} \partial_i E^2$$

Para  $\underline{B}$ , usando que  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

$$[\underline{B}(\nabla \cdot \underline{B}) + (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}]_i = \partial_j(B_i B_j) - \frac{1}{2} \partial_i B^2$$

Definimos el tensor de Maxwell

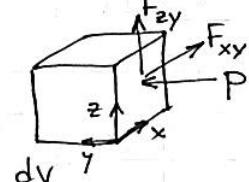
$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} [E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(E^2 + B^2)]$$

$$\Rightarrow \frac{dP_{mec}}{dt}_i + \frac{dP_{em}}{dt}_i = \int_V \partial_j T_{ij} dV$$

$$\frac{dP_{mec}}{dt} + \frac{dP_{em}}{dt} = \int_V \nabla \cdot \underline{T} dV = \int_{S(V)} \underline{T} \cdot \underline{dS}$$

$T_{ij}$  representa los esfuerzos en un diferencial de volumen (presión, tensión, etc.).

Es útil para calcular las fuerzas sobre una dada configuración.



$T_{ij}$ : fuerza en  $i$  sobre una sup. con normal  $j$

Los términos diagonales son de presión y tensión. Los que están fuera de la diagonal son de cizalla. Tienen unidades de fuerza  $\times$  u. de área.

### Balance de impulso angular

Tenemos torque  $d\underline{\tau} = \underline{\Gamma} \times d\underline{F}$

$$\Rightarrow \underline{\tau} = \int_V \underline{\Gamma} \times \underline{F} dV$$

$$\text{y en vacío } F_i = \partial_j T_{ij} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{E} \times \underline{B})_i$$

$$\Rightarrow \underline{\tau} = \int_V \underline{\Gamma} \times (\partial_j T_{ij} \hat{i}) dV - \frac{d}{dt} \int_V \underline{\Gamma} \times \left( \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{4\pi c} \right) dV$$

Veamos cada componente

$$\begin{aligned} [\underline{\Sigma} \times (\partial_j T_{ij} \hat{i})]_k &= \epsilon_{kli} r_e \partial_j T_{ij} = \epsilon_{kli} \partial_j (r_e T_{ij}) - \epsilon_{kli} T_{ij} \partial_j r_e = \\ &= \partial_j (\epsilon_{kli} r_e T_{ij}) - \cancel{\epsilon_{kji} T_{ij}} \xrightarrow{\text{antisimétrico}} \xrightarrow{\text{simétrico}} \end{aligned}$$

Definimos el tensor

$$M_{kj} = \epsilon_{kli} r_e T_{ij} \quad \underline{\underline{M}} = \underline{\Sigma} \times \underline{\underline{T}}$$

y la conservación del impulso angular queda

$$\underline{\Sigma} + \frac{dL_{\text{em}}}{dt} = \int_V (\partial_j M_{kj}) \hat{k} dV = \int_{S(V)} \underline{\underline{M}} \cdot d\underline{s}$$

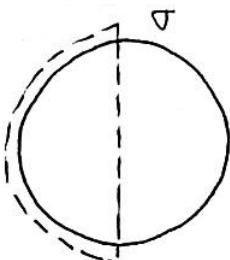
En ausencia de otras fuerzas  $\underline{\Sigma} = \frac{dL_{\text{mec}}}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dL_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dL_{\text{em}}}{dt} = \int_{S(V)} \underline{\underline{M}} \cdot d\underline{s}$$

$$\frac{dL_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dL_{\text{em}}}{dt} = \int_{S(V)} M_{ij} dS_j$$

compartiente  $i$ -ésima del torque

Ejemplo:

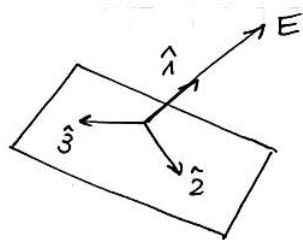


$$F = \int_{S(V)} \underline{\underline{T}} \cdot d\underline{s}$$

En el caso puramente eléctrico (o puramente magnético)  $T_{ij}$  puede diagonalizarse (en cada punto).

De hecho, como  $T_{ij}$  es simétrico en  $(i,j)$ , puede diagonalizarse salvo cuando  $E \perp B$  y de igual módulo.

Consideremos



$$T = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E^2}{2} \end{pmatrix} = \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora dos casos particulares: la sup. es  $\nparallel E$

1)  $\hat{n} \parallel E$  :  $\hat{n} = (1, 0, 0)$

$$\gamma d\underline{F} = T \cdot \hat{n} d\underline{S} = \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\underline{S} = \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\underline{S}$$

$$\Rightarrow d\underline{F} = \frac{E^2}{8\pi} \hat{n} d\underline{S} \quad \text{Tensión}$$

2)  $\hat{n} \perp E$  : por ej.  $\hat{n} = (0, 0, 1)$

$$\gamma d\underline{F} = \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\underline{S} = -\frac{E^2}{8\pi} \hat{n} d\underline{S}$$

$$\Rightarrow d\underline{F} = -\frac{E^2}{8\pi} \hat{n} d\underline{S} \quad \text{Presión}$$

## Funciones de Green avanzadas y retardadas

Tenemos  $\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -4\pi f(\underline{r}, t)$

Transformando Fourier

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(\underline{r}, \omega) = \int \chi(\underline{r}, t) e^{i\omega t} dt \\ f(\underline{r}, \omega) = \int f(\underline{r}, t) e^{i\omega t} dt \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \chi(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \chi(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ f(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \chi(\underline{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \chi(\underline{r}, \omega) = -4\pi f(\underline{r}, \omega)$$

y las freq. quedan desacopladas. Introduzcamos ahora func. de Green

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 + k^2) G_k(\underline{r}, \underline{r}') = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}') \\ G_k \xrightarrow[\underline{r}' \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right. \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Busquemos una sol. particular. Tomando  $G_k(\underline{r}, \underline{r}') = G_k(\underline{R})$

con  $\underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$

$$\nabla^2 G_k(\underline{R}) + k^2 G_k(\underline{R}) = -4\pi \delta(\underline{R})$$

sin contornos es  
esfericamente simétrica  
alrededor de  $\underline{r}'$

y tiene soluciones

$$G_k(\underline{R}) = \underbrace{A \frac{e^{ik\underline{R}}}{\underline{R}}}_{G_k^+(\underline{R})} + \underbrace{B \frac{e^{-ik\underline{R}}}{\underline{R}}}_{G_k^-(\underline{R})}$$

$$G_k(\underline{R}) = G_k(\underline{R})$$

$$\text{y } \nabla^2 = \frac{1}{\underline{R}} \frac{d^2}{d\underline{R}^2}(\underline{R})$$

representan ondas esféricas entrantes y salientes.

Ahora consideremos

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) G(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = -4\pi \underbrace{\delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t')}_{f(\underline{r}, t)}$$

Transformando Fourier

$$(\nabla^2 + k^2) G_k(\underline{r}, \underline{r}') = -4\pi \delta(\underline{R}) e^{i\omega t'}$$

$$\Rightarrow G_k^{\pm}(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{i\omega t'}$$

Autotransformando

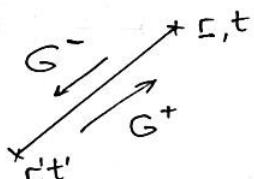
$$G^{\pm}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int dw \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} = \\ = \frac{1}{2\pi R} \int dw e^{iw(\pm \frac{R}{c} + t' - t)}$$

$$\Rightarrow G^{\pm}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{1}{R} \delta\left(\pm \frac{R}{c} + t' - t\right)$$

$$G^{\pm}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{\delta\left[t' - \left(t \mp \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right)\right]}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Func. de Green avanzadas (-) y retardadas (+).

$G^+$  es la sol. de la ec. de ondas inhomogéneas en  $(\underline{r}, t)$  si  $\exists$  una inhomogeneidad (fuente) en  $(\underline{r}', t')$ . Es no nula solo en  $t = t' + \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$   $\Rightarrow$  describe la propagación



de lo ocurrido en  $(\underline{r}', t')$  hacia adelante en  $t$  con vel. c.

$G^-$  es no nula en  $t = t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$ .

Dada una fuente  $f(\underline{r}, t)$  tenemos sol. part. de la ec.

$$\chi_{\text{part}}(\underline{r}, t) = \int d^3r' dt' G^{\pm}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') f(\underline{r}', t')$$

La sol. gen. es:  $\chi(\underline{r}, t) = \chi_{\text{part}}(\underline{r}, t) + \chi_{\text{homog}}(\underline{r}, t)$

con sol. homogénea fp. satisface las cdc.

Notar que la elección conveniente de  $G^{\pm}$  facilita satisfacer las cdc. Por ejemplo

$$\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{2i \sin kR}{R}$$

Ejemplo: Encendido de un dipolo en el origen

$\uparrow p \hat{z}$

$$p(\underline{r}', t') = -p \delta(x) \delta(y) \delta'(z) \Theta(t')$$

$$\gamma \quad j_z(\underline{r}', t') = p \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t')$$

$$\Rightarrow \varphi = \int G^+(\underline{r}, t; \underline{r}', t') \rho(\underline{r}, t) d^3 r' dt'$$

Pues si una fuente se enciende en  $t = t_0$ ,  $\chi(\underline{r}, t) = 0$  para  $t < t_0$ . La sol. averzada no satisface las cdc.

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{r}, t) &= \int d^3 r' dt' \frac{\rho(\underline{r}', t') \delta(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \\ &= \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \\ &= P \int d^3 r' \frac{\delta(x') \delta(y') \delta'(z') \Theta(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \\ &= P \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{\Theta(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right]_{z'=0} = P \Theta\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{z - z'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \Big|_{z'=0} + \\ &\quad + \frac{P}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\partial}{\partial z'} (|\underline{r} - \underline{r}'|) \Big|_{z'=0} \\ \Rightarrow \boxed{\varphi(\underline{r}, t) = \frac{Pz}{r^3} \Theta\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{Pz}{cr^2} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)} \end{aligned}$$

Idem  $\Delta(\underline{r}, t) = \hat{z} \frac{1}{c} \int d^3 r \frac{\delta(\underline{r}, t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$

y  $\boxed{A(\underline{r}, t) = \frac{\hat{z}}{c} \frac{P}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}$

Cálculemos  $E$ . Tenemos

$$E = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

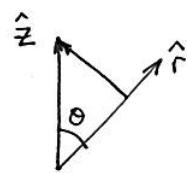
Veamos término por término  $\swarrow \underset{P=P\hat{z}}{\nwarrow}$

$$-\nabla \left[ \frac{Pz}{r^3} \Theta\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] = \left[ \frac{3(P \cdot \underline{r}) \underline{r} - r^2 P}{r^5} \right] \Theta\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{Pz}{cr^3} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \hat{r}$$

$$-\nabla \left[ \frac{Pz}{cr^2} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] = \frac{1}{c} \left[ \frac{2(P \cdot \underline{r}) \underline{r} - r^2 P}{r^4} \right] \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) + \underbrace{\frac{Pz}{c^2 r^2} \delta'\left(t - \frac{r}{c}\right) \hat{r}}_{①}$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{P}{c^2 r} \delta' \left( t - \frac{r}{c} \right) \hat{z} = ②$$

Nota que  $① + ② = \frac{P}{rc^2} \delta' \left( t - \frac{r}{c} \right) \underbrace{\left( \cos \theta \hat{r} - \hat{z} \right)}_{\sin \theta \hat{\theta}}$



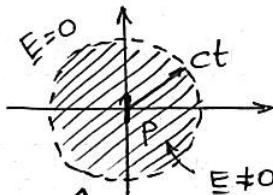
Sumando

$$E(r, t) = \left[ \frac{3(P \cdot E)E - r^2 P}{r^5} \right] \Theta \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{Pz}{cr^3} \delta \left( t - \frac{r}{c} \right) \hat{r} + \\ + \delta \left( t - \frac{r}{c} \right) \frac{1}{c} \left[ \frac{2(P \cdot E)E - r^2 P}{r^4} \right] + \frac{P}{c^2 r} \delta' \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \hat{\theta}$$

representa el retardo  
en la llegada de la información

$$E=0 \text{ si } t - \frac{r}{c} < 0$$

Los demás términos representan  
la perturbación en la frontera.



↓ decae como  $1/r$   
y apunta en  $\hat{\theta}$ : campo  
de radiación

Idem, para  $B = \nabla \times A = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{x}, -\frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y}, 0 \right)$

$$B(r, t) = \frac{P}{cr^2} \delta \left( t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi} + \frac{P}{c^2 r} \delta' \left( t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

campo de  
radiación

## Aproximación cuasiestacionaria

Consideremos fenómenos variables en el tiempo en los que

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

es  $\gg d$

donde  $d$  es el tamaño característico de la dist. de carga.

Wegs

$$\omega \ll \eta_L$$

Tenemos ec. de Maxwell (en el conductor  $\underline{J} = \sigma \underline{E}$ )

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho & \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} & \nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{cases}$$

y planteando  $\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}(r) e^{i\omega t} \\ \underline{B} = \underline{B}(r) e^{i\omega t} \end{cases}$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho & \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{i\omega}{c} \underline{B} & \nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{i\omega}{c} \underline{E} \end{cases}$$

En conductores usualmente  $\sigma \gg \omega$  y  $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi\sigma}{c} \underline{E}$

Estas ec. se resuelven en forma perturbativa

en  $k = \frac{\omega}{c}$

$$\begin{cases} \underline{E}(r) = \sum_n k^n \underline{E}^{(n)}(r) \\ \underline{B}(r) = \sum_n k^n \underline{B}^{(n)}(r) \end{cases}$$

Ejemplo: consideremos  $\begin{cases} \underline{J} = \underline{j}(r) e^{i\omega t} \\ \rho = 0 \end{cases}$

A orden cero tenemos soluciones

$$\underline{E}^{(0)} = \text{cte} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \underline{E}^{(0)} = 0 \\ \nabla \times \underline{E}^{(0)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \underline{B}^{(0)} = 0 \\ \nabla \times \underline{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} \Rightarrow \underline{B}^{(0)} \neq 0 \end{cases}$$

con cdc adecuadas

A primer orden

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \underline{E}^{(1)} = 0 & \nabla \cdot \underline{B}^{(1)} = 0 \\ \nabla \times \underline{E}^{(1)} = -\frac{i\omega}{c} \underline{B}^{(0)} & \nabla \times \underline{B}^{(1)} = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{B}^{(1)} = 0 \\ \text{con cdc adecuadas} \end{array} \right.$$

$\underline{E}^{(1)} \neq 0$

Para un conductor, podemos eliminar  $\underline{E}$  tomando

$$\nabla \times \nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi\sigma}{c} \nabla \times \underline{E}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \underline{B} = + \frac{i 4\pi \sigma \omega}{c^2} \underline{B}$$

Es la ec. de difusión!

(la misma ec. puede obtenerse para)

De análisis dimensional, un campo penetra una distancia

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{\sigma \omega}}$$

en un conductor. Luego  $\underline{E}$

queda determinado por

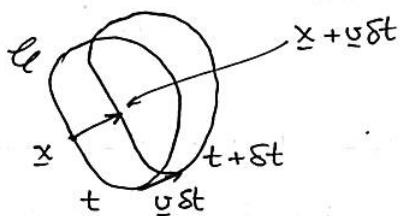
$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{i \omega}{c} \underline{B}$$

### Movimiento de un conductor en un campo magnético

En un conductor en reposo tenemos  $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ .

Cuando el conductor se mueve,  $\underline{j} = \sigma \underline{E}'$  con  $\underline{E}'$  el campo en el referencial del conductor.

Consideremos  $v \ll c$  y un circuito móvil en Faraday



$$\oint \underline{E}' \cdot d\underline{l} = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S(\underline{r})} \underline{B} \cdot d\underline{s}$$

Pero ahora tenemos la variación de  $\underline{B}$  en el tiempo, y la variación por el desplazamiento. Tomando

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [ \underline{B}(x + v\delta t, t + \delta t) - \underline{B}(x, t) ] = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) \underline{B}(x, t)$$

$$\underline{B}(x, t) + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \underline{B}}{\partial x_i} v_i \delta t$$

Derivada convectiva

Además, para  $v$  fijo

$$\nabla \times (\underline{B} \times \underline{v}) = (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{B} - \cancel{v} (\nabla \cdot \underline{B}) + \cancel{\underline{B} (\nabla \cdot \underline{v})} - (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{v}$$

variación del flujo  
por desplazamiento a  $\underline{B} = \text{cte}$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{E}} \underline{E}' \cdot d\underline{l} = -\frac{1}{c} \int_{S(\mathcal{E})} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s} - \underbrace{\frac{1}{c} \oint_{\mathcal{E}} (\underline{B} \times \underline{v}) \cdot d\underline{l}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_{\mathcal{E}} \left( \underline{E}' - \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \cdot d\underline{l}}_{\underline{E} \text{ en el sist. de laboratorio, pues para una espira fija}} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s}$$

Luego, para  $v \ll c$   $\underline{E}' = \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}$   $\oint_{\mathcal{E}} \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{s}$

$$\Rightarrow \underline{j} = \sigma \left( \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \quad \text{para el conductor en movimiento}$$

Ahora tenemos ec. de Maxwell ( $\mu = 1$ )

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \cancel{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}} \approx \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \underline{E} + \frac{\underline{v} \times \underline{B}}{c} \right)$$

$v \ll c$

Tomando el rotor

$$-\nabla^2 \underline{B} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}) + \eta \nabla^2 \underline{B}}$$

Ec. de inducción

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad \text{difusividad magnética}$$

### Teorema de Alfvén

En un conductor, las líneas de campo magnético están "coupladas" al medio material, y el flujo magnético se conserva. Consideremos  $\eta = 0$ . De

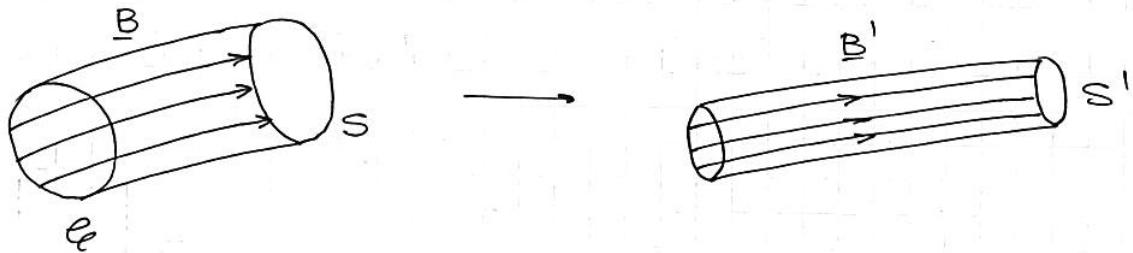
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(\mathcal{E})} \underline{B} \cdot d\underline{s} = -c \int_{\mathcal{E}} \underline{E}' \cdot d\underline{l} =$$

$$= -\frac{c}{\sigma} \int_{\mathcal{E}} \underline{j} \cdot d\underline{l} = -\eta \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{E}} \underline{j} \cdot d\underline{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0} = \frac{d}{dt} \int_{(e)} \underline{B} \cdot d\underline{S}$$

El flujo magnético a través de cualquier curva material que se desplace con el conductor se conserva.

$\Rightarrow$  Consideremos un tubo de líneas de  $\underline{B}$  delimitadas por una curva  $C$  en un líquido conductor



Cuando el tubo se estira

$$\int_S \underline{B} \cdot d\underline{S} = \int_{S'} \underline{B}' \cdot d\underline{S}'$$

Si  $S'$  disminuye  $\Rightarrow \underline{B}'$  aumenta para conservar el flujo  $\Rightarrow$  la energía magnética  $U_H = \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV$  aumenta (inducción  $\rightarrow$  efecto dinamo).

Vemos que este mecanismo es necesario para explicar el campo magnético de la tierra. Si dominas la difusión Ohmica

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \underline{B}$$

y el tiempo de difusión es  $T_\eta \sim \frac{L^2}{\eta} = \frac{(3000 \text{ Km})^2}{2.6 \text{ m}^2/\text{s}} \sim 10^4 \text{ s}$

## Magnetohidrodinámica (MHD)

Si el conductor es líquido (o un plasma) necesitamos ecuaciones para  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ , y  $P$ . Para la densidad

Tenemos continuidad de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{Si } \rho = \text{cte} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{v} = 0}$$

Para  $\underline{v}$  tenemos conservación de momento:

$$\frac{dP_{\text{mec}}}{dt} + \cancel{\frac{dP_{\text{em}}}{dt}} = \int_V \partial_j (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) dV$$

$\cancel{\frac{dP_{\text{em}}}{dt}}$

$\sigma \ll c$

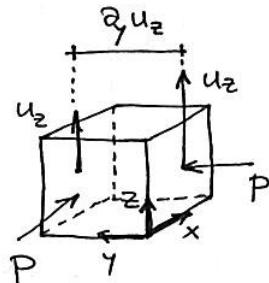
tensor de Maxwell      tensor de esfuerzos mecánicos

$$P_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi c} \int \underline{E} \times \underline{B} dV$$

Consideramos el fluido electricamente neutro (igual cant. de portadores de carga positivos y negativos en cada elemento de volumen). Luego

$$\tau_{ij} = \frac{1}{4\pi} (B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij})$$

$$\gamma \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \underbrace{\rho v}_{\text{presión}} \underbrace{(\partial_j v_i + \partial_i v_j)}_{\text{esfuerzos viscosos}}$$



Luego

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \left( \frac{1}{4\pi} B_j \partial_j B_i - \frac{1}{8\pi} \partial_i B^2 - \partial_i p + \rho v \partial_i^2 v_i \right) dV$$

Fz. de Lorentz  $\underline{j} \times \underline{B}$

$$\Rightarrow \boxed{p \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \underline{B} \cdot \nabla \underline{B} + \rho v \nabla^2 \underline{v}}$$

presión mfp.      tensión mfp.

Estas dos ec. junto con la ec. de inducción son las ec.

de la MHD. Usando que  $\rho = \text{cte}$  y tomando  $\underline{b} = \frac{\underline{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$  (vel. de Alfvén)

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \underline{b} \cdot \nabla \underline{b} - \nabla \left( p + \frac{B^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \underline{v} \\ \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} = \nabla \times (\underline{v} \times \underline{b}) + \eta \nabla^2 \underline{b} \end{cases}$$

## Ondas electromagnéticas en medios no dispersivos

Vimos que las ec. para  $\phi, A$  son ec. de ondas inhomogéneas

Veámos las ec. para los campos en la región libre de fuentes.

Para medios lineales, isotropos y homogéneos

$$\nabla \cdot \underline{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \underline{B} = \frac{\mu E}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

Luego  $\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu E}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \underline{E} - \frac{\mu E}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\text{y } \boxed{\nabla^2 \underline{B} - \frac{\mu E}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0}$$

Transformando Fourier

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(\underline{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \text{Re} \left[ \int_0^{\infty} \underline{E}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\left( \nabla^2 + \frac{\mu E}{c^2} \omega^2 \right) \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0}$$

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \underline{E}^*(\underline{r}, -\omega)$$

para  $\underline{E}$  real

Para cada  $\omega$  tiempo sol.  $\underline{E}(\underline{r}, t) = \text{Re} [\underline{E}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}]$

Busquemos sol. de onda plana (en cartesianas)

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = E_0 e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}}$$

$\underline{k} = (k_x, k_y, k_z)$

complejo

$$\nabla^2 \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -k^2 \underline{E}(\underline{r}, \omega) \Rightarrow k^2 = \frac{\mu E}{c^2} \omega^2$$

$$\text{y } \underline{E}(\underline{r}, t) = E_0 e^{i \underline{\phi}(\underline{r}, t)}$$

$\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t$

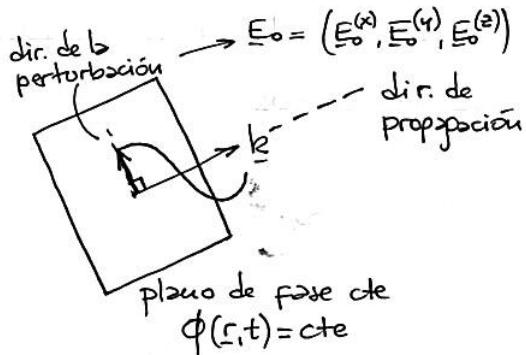
con  $k = |\underline{k}| = \frac{\sqrt{\mu E}}{c} \omega$

Rel. de  
dispersión

La vel. de fase es  $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$  indice de refracción

Pues los ptos. con fase cte. satisfacen

$$\phi(r, t) = \text{cte} = k \cdot r - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \text{son ondas planas!}$$



Si seguimos los planos con  $\phi$  cte, se mueven con velocidad  $v_f$ . Además,

$$v_p = \frac{d\omega}{dk} = v_f.$$

Además, de  $\nabla \cdot \underline{E} = 0 \Rightarrow \boxed{k \cdot \underline{E} = 0}$  y  $k \perp \underline{E}_0$

Idem  $k \cdot \underline{B}_0 = 0$  (se sigue de  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ ).

$\Rightarrow$  Son ondas transversales.

De Faraday

$$\nabla \times \underline{E} = \frac{i\omega}{c} \underline{B}$$

$$(\nabla \times \underline{E})_j = E_{0q} \sum_{j \neq p} \partial_p e^{i(k \cdot r - \omega t)} = E_{0q} \sum_{j \neq p} i k_p e^{i(k \cdot r - \omega t)} = \\ = (i k \times \underline{E})_j$$

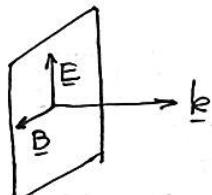
$\Rightarrow$  Faraday queda

$$\boxed{i k \times \underline{E} = \frac{i\omega}{c} \underline{B}}$$

$$\underline{B} \perp \underline{E} \perp k$$

ie,  $(k, \underline{E}, \underline{B})$  definen una terza derecha

$$\gamma \quad \boxed{\underline{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \underline{E}}$$



$\underline{E}$  y  $\underline{B}$  están en fase.

Flujo de energía para una onda plana

Las ec. de Maxwell son lineales en los campos y vale el ppio. de superposición. Sin embargo, debemos

Tener cuidado con el vector de Poynting, el tensor de Maxwell, y otras cant. cuadráticas en los campos.

Prop: dados  $A(t) = \operatorname{Re}(A e^{-i\omega t})$

$$B(t) = \operatorname{Re}(B e^{-i\omega t})$$

$$\begin{aligned} S(t) &= A(t) B(t) = \operatorname{Re}(A e^{-i\omega t}) \operatorname{Re}(B e^{-i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} (A e^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t}) \cdot \frac{1}{2} (B e^{-i\omega t} + B^* e^{i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{4} (AB e^{-2i\omega t} + A^* B^* e^{2i\omega t} + A^* B + AB^*) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(AB e^{-2i\omega t}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(AB^*)$$

oscila con  $2\omega$

constante  
(valor medio temporal)

En muchos casos (e.g., óptica)  $2\omega$  es muy rápido y solo se observa el valor medio temporal

$$\langle S(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(AB^*)$$

Vemos ahora el caso del vector de Poynting para una onda plana

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \times \underline{H} = \frac{c}{8\pi\mu} \operatorname{Re}(\underline{E}_0 \times \underline{B}_0 e^{-2i\omega t} + \underline{E}_0 \times \underline{B}_0^*)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{S} \rangle = \frac{\sqrt{\mu\epsilon} c}{8\pi\mu} \operatorname{Re}[\underline{E}_0 \times (\hat{k} \times \underline{E}_0^*)]$$

$$\Rightarrow \langle \underline{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\underline{E}_0|^2 \hat{k}$$

~~$(\underline{E}_0 \cdot \underline{E}_0^*) \hat{k} - (\underline{E}_0 \cdot \hat{k}) \underline{E}_0^*$~~

Se define el vector de Poynting complejo  $\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \underline{E} \times \underline{H}^*$   
y  $\langle \underline{S} \rangle = \operatorname{Re}(\underline{\underline{S}})$ .

Para la energía del campo

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \underline{E} \cdot \underline{D} \xrightarrow{\underline{D} = \epsilon \underline{E}} \langle U_E \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} |\underline{E}_0|^2$$

$$U_B = \frac{1}{8\pi} \underline{B} \cdot \underline{H} \xrightarrow{\underline{B} = \mu \underline{H}} \langle U_B \rangle = \frac{1}{16\pi \mu} |\underline{B}_0|^2$$

Además  $\underline{B} = \sqrt{\mu \epsilon} \hat{k} \times \underline{E} \Rightarrow |\underline{B}| = \sqrt{\mu \epsilon} |\underline{E}|$

$$\Rightarrow \langle U_E \rangle = \langle U_B \rangle$$

y  $\boxed{\langle U \rangle = \frac{\epsilon}{8\pi} |\underline{E}_0|^2}$

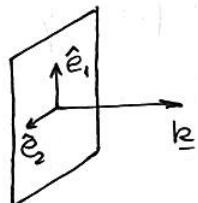
### Polarización

Dado  $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

Como  $\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0$  tenemos dos grados de libertad para  $\underline{E}_0$

Tomemos forma derecha  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k})$

El  $\underline{E}_0$  mas general es



$$\underline{E}_0 = E_0^{(1)} \hat{e}_1 + E_0^{(2)} \hat{e}_2$$

Definimos la polarización de la onda plana como la trayectoria del campo  $\underline{E}$  en el plano  $\perp \underline{k}$  (para  $\underline{r}$  fijo en función de  $t$ ).

Tomemos

$$\begin{aligned} \underline{E} &= (A e^{i\phi_1} \hat{e}_1 + B e^{i\phi_2} \hat{e}_2) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} = \\ &= (A \hat{e}_1 + B e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \hat{e}_2) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t + \phi_1)} \end{aligned}$$

Luego las componentes son

$$E_1 = \operatorname{Re} (\underline{E} \cdot \hat{e}_1) = A \cos [\omega(t - t_0)] \quad \text{con } \omega t_0 = \underline{k} \cdot \underline{r} + \phi_1$$

$$E_2 = \operatorname{Re} (\underline{E} \cdot \hat{e}_2) = B \cos [\omega(t - t_0) - \phi] \quad \phi = \phi_2 - \phi_1$$

Calculemos la trayectoria de  $\underline{E}$  en el plano. Tomando  $\tau = t - t_0$

$$\frac{E_1}{A} = \cos \omega \tau$$

$$\frac{E_2}{B} = \cos \omega \tau \cos \phi + \sin \omega \tau \sin \phi$$

$$\Rightarrow \left( \frac{E_2}{B} - \frac{E_1}{A} \cos \phi \right)^2 = \underbrace{\sin^2 \omega \tau \sin^2 \phi}_{1 - \cos^2 \omega \tau}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{E_2}{B} - \frac{E_1}{A} \cos \phi \right) = \left[ 1 - \left( \frac{E_1}{A} \right)^2 \right] \sin \phi$$

$$\left( \frac{E_2}{B} \right)^2 + \left( \frac{E_1}{A} \right)^2 - \frac{2E_1 E_2}{AB} \cos \phi = \sin^2 \phi$$

Forma cuadrática

Para ver las trayectorias, lo escribimos como

$$(E_1, E_2) \begin{pmatrix} 1/A^2 & 1/AB\cos\phi \\ 1/AB\cos\phi & 1/B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = s^2\phi$$

y es simétrica. Diagonalizando

$$(E'_1, E'_2) \Phi \begin{pmatrix} 1/A^2 & 1/AB\cos\phi \\ 1/AB\cos\phi & 1/B^2 \end{pmatrix} \Phi^T \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = (E'_1, E'_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 E'^2_1 + \lambda_2 E'^2_2 = s^2\phi$$

Basta conocer el signo de  $\lambda_1, \lambda_2$

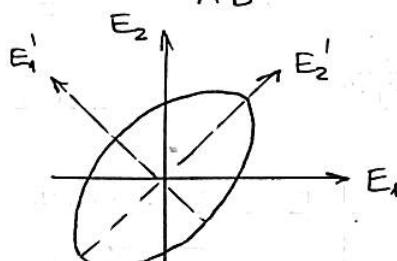
$$\det \begin{pmatrix} 1/A^2 & 1/AB\cos\phi \\ 1/AB\cos\phi & 1/B^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2B^2} (1 - c^2\phi) = \frac{1}{A^2B^2} s^2\phi > 0 \quad (\text{sabido } \phi=0)$$

$\Rightarrow$  es una elipse:

Vemos casos particulares

$$1) s\phi = 0 : \left( \frac{E_1}{A} \pm \frac{E_2}{B} \right)^2 = 0$$

↳ polarización lineal



$$2) c\phi = 0 : \left(\frac{E_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{B}\right)^2 = s\phi$$

Para  $A=B$  tenemos polarización circular.

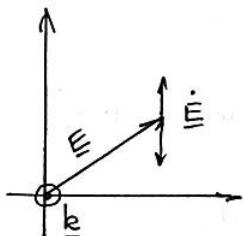
Falta ver la evolución temporal (el sentido de polarización).

Tenemos  $\underline{E} = (A\hat{e}_1 + B e^{i\phi}\hat{e}_2) e^{-i\omega z}$

$$\Rightarrow \text{Re}(\underline{E}(z=0)) = A\hat{e}_1 + B c\phi \hat{e}_2$$

$$\dot{\underline{E}} = -i\omega(A\hat{e}_1 + B e^{i\phi}\hat{e}_2) e^{-i\omega z}$$

$$\Rightarrow \text{Re}(\dot{\underline{E}}(z=0)) = \omega B s\phi \hat{e}_2$$

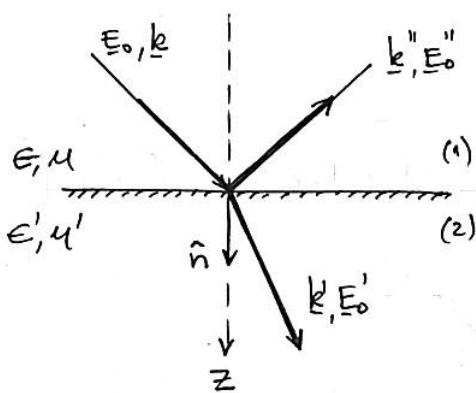


Si  $\begin{cases} s\phi > 0 & \text{antihorario} \\ s\phi < 0 & \text{horario} \end{cases}$

Puedo tomar cambio de base  $\begin{cases} \hat{e}_+ = \hat{e}_1 + i\hat{e}_2 & \text{antihorario} \\ \hat{e}_- = \hat{e}_1 - i\hat{e}_2 & \text{horario} \end{cases}$

$$\text{y } \underline{E} = (A\hat{e}_1 + B\hat{e}_2) e^{i(k.z-wt)} = (A'\hat{e}_+ + B'\hat{e}_-) e^{i(k.z-wt)}$$

Reflexión y refracción de ondas planas en una interfaz



Onda incidente :

$$\begin{cases} \underline{E} = E_0 e^{i(k.z-wt)} \\ \underline{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \underline{E} \end{cases}, \quad k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c}$$

Onda transmitida :

$$\begin{cases} \underline{E}' = E'_0 e^{i(k'.z-w't)} \\ \underline{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'} \hat{k}' \times \underline{E}' \end{cases}$$

Onda reflejada:

$$\begin{cases} \underline{E}'' = E_0'' e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega t)} \\ \underline{B}'' = \sqrt{\mu\epsilon} \underline{k}'' \times \underline{E}'' \end{cases}$$

Las ondas reflejadas y transmitidas salen de imponer cdc. Tenemos condiciones que resultan de la naturaleza ondulatoria y de la interfaz plana, independiente de las cdc. electromagnéticas (cond. cinemáticas). Cualquier cdc. va a ser comb. lineal de las ondas incidente, reflejada y transmitida

$$\alpha e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} + \beta e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega t)} + \gamma e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega t)} = 0$$

$\Rightarrow$  1) Para  $r$  fijo en el plano, la cdc debe valer  $\neq t \Rightarrow \boxed{\omega = \omega' = \omega''}$

$$\Rightarrow \alpha e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} + \beta e^{i\underline{k}' \cdot \underline{r}} + \gamma e^{i\underline{k}'' \cdot \underline{r}} = 0$$

2) La cdc debe valer  $\neq r$  en el plano

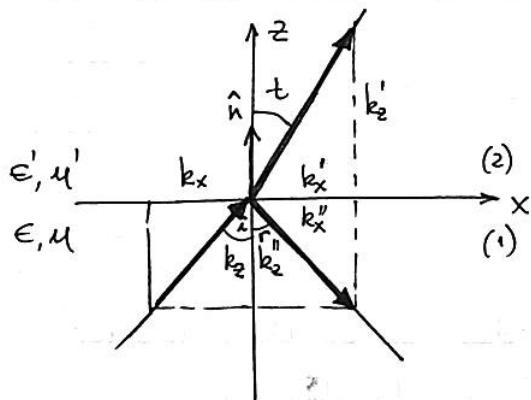
$$\Rightarrow \underline{k} \cdot \underline{r} = \underline{k}' \cdot \underline{r} = \underline{k}'' \cdot \underline{r} \quad \neq r \text{ con } z=0$$

Escribiendo  $\begin{aligned} \underline{k} &= k_{xy} \hat{x} + k_z \hat{z} \\ \underline{k}' &= k'_{xy} \hat{x} + k'_z \hat{z} \\ \underline{k}'' &= k''_{xy} \hat{x} + k''_z \hat{z} \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow k_{xy} = k'_{xy} = k''_{xy}$

$\Rightarrow \underline{k}, \underline{k}', \underline{k}''$  son coplanares. Elegimos  $\hat{x}$  en la dirección de  $\underline{k}_{xy}$  (de forma tal que el plano  $xz$  sea el plano de interés). Luego

$$\left. \begin{aligned} \underline{k} &= k_x \hat{x} + k_z \hat{z} \\ \underline{k}' &= k_x \hat{x} + k'_z \hat{z} \\ \underline{k}'' &= k_x \hat{x} + k''_z \hat{z} \end{aligned} \right\}$$

Tomemos coordenadas:



Se sigue que:

$$\frac{\sqrt{\mu \epsilon} \omega}{c} \operatorname{sen} i = \frac{\sqrt{\mu' \epsilon'} \omega}{c} \operatorname{sen} r$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} r = \operatorname{sen} i$$

y:

$$\frac{\sqrt{\mu \epsilon} \omega}{c} \operatorname{sen} i = \frac{\sqrt{\mu' \epsilon'} \omega}{c} \operatorname{sen} t$$

$$\Rightarrow n \operatorname{sen} i = n' \operatorname{sen} t$$

Ley de Snell

$k_z, k_z', y k_z''$  salen de la rel. de dispersión. Como  $k^2 = \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}$

$$\Rightarrow k_z^2 = \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2$$

Para obtener las amplitudes debemos usar las ecuac. electromagn.

$$(1) (\underline{D}^{(2)} - \underline{D}^{(1)}) \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow [\epsilon' \underline{E}_0 - \epsilon (\underline{E}_0 + \underline{E}_0'')] \cdot \hat{n} = 0$$

$$(2) \hat{n} \times (\underline{E}^{(2)} - \underline{E}^{(1)}) = 0 \Rightarrow \hat{n} \times [\underline{E}_0' - (\underline{E}_0 + \underline{E}_0'')] = 0$$

$$(3) (\underline{B}^{(2)} - \underline{B}^{(1)}) \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow [\sqrt{\mu' \epsilon'} \hat{k}' \times \underline{E}_0' - \sqrt{\mu \epsilon} (\hat{k} \times \underline{E}_0 + \hat{k}'' \times \underline{E}_0'')] \cdot \hat{n} = 0$$

$$(4) \hat{n} \times (\underline{H}^{(2)} - \underline{H}^{(1)}) = 0 \Rightarrow \hat{n} \times [\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \hat{k}' \times \underline{E}_0' - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{k} \times \underline{E}_0 + \hat{k}'' \times \underline{E}_0'')] = 0$$

Debemos tener cuidado con la polarización. Como las

ec. son lineales, separaremos en dos casos:

$$\underline{E}_0 = E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2$$

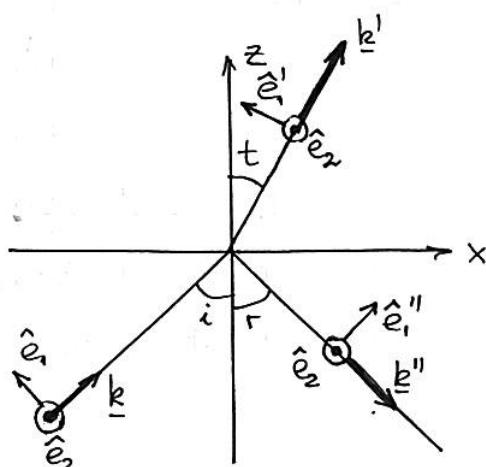
y estudiamos por separado

$$1) \underline{E}_0 = E_0 \hat{e}_2 \quad TE \text{ (transverso eléctrico)}$$

$\underline{E} \perp$  al plano de incidencia

$$2) \underline{E}_0 = E_0 \hat{e}_1 \quad TM \text{ (transverso magnético)}$$

$\underline{B} \perp$  al plano



$$1) \underline{\text{Caso TE}}: \quad \underline{E_0} = E_0 \hat{e}_2$$

Tomenos

$$\underline{E'_0} = E'_1 \hat{e}'_1 + E'_2 \hat{e}'_2$$

$$\underline{E''_0} = E''_1 \hat{e}''_1 + E''_2 \hat{e}''_2$$

Como  $\hat{e}_2 \cdot \hat{n} = 0$ , de (1):

$$-E'_1 \text{sent} - E''_1 \text{senr} = 0$$

$$\text{De (2): } \hat{n} \times [E'_2 - (E'_0 + E''_2)] \hat{e}_2 + \hat{n} \times [E'_1 \hat{e}'_1 - E''_1 \hat{e}''_1] = 0$$

$\nwarrow$  son perpendiculares  $\uparrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} E'_2 - (E'_0 + E''_2) = 0 \\ \cos t E'_1 + \cos r E''_1 = 0 \end{cases}$$

Tomenos 2 ec. l.i. para los coef.  $E'_1$  y  $E''_1 \Rightarrow \boxed{E'_1 = E''_1 = 0}$

con sol. única. Luego  $\begin{cases} E'_0 = E'_2 \hat{e}'_2 \\ E''_0 = E''_2 \hat{e}''_2 \end{cases}$

De (3):

$$\sqrt{\mu' \epsilon'} (-E'_2 \text{sent}) - \sqrt{\mu \epsilon} [(-E'_0 \text{seni}) + (-E''_2 \text{sent})] = 0$$

y de Snell  $E'_2 - E'_0 - E''_2 = 0$  es l.d.

De (4):

$$\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_2 \hat{e}'_2 (\hat{n} \cdot \hat{k}') - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [E'_0 \hat{e}'_2 (\hat{k} \cdot \hat{n}) + E''_2 \hat{e}''_2 (\hat{n} \cdot \hat{k}'')] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \cos t E'_2 - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E'_0 \cos i + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E''_2 \cos i = 0 \\ E'_2 - E''_2 = E'_0 \end{cases}$$

y tiene sol. única pues  $\det = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu}} \cos i + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos t \neq 0$

$$\Rightarrow E_2' = \left( \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos i}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos i + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \cos t} \right) E_0$$

$$E_2'' = \left( \frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos i - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \cos t}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos i + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \cos t} \right) E_0$$

O bien

$$\begin{cases} \frac{E_2'}{E_0} = \frac{2n \cos i}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'}(n'^2 - n^2 \sin^2 i)^{1/2}} \\ \frac{E_2''}{E_0} = \frac{n \cos i - \frac{\mu}{\mu'}(n'^2 - n^2 \sin^2 i)^{1/2}}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'}(n'^2 - n^2 \sin^2 i)^{1/2}} \end{cases}$$

Coeficientes de fresnel (TE)

2) Caso TM:

$$\begin{cases} \frac{E_1'}{E_0} = \frac{2nn' \cos i}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2 \cos i + n(n^2 - n^2 \sin^2 i)^{1/2}} \\ \frac{E_1''}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2 \cos i - n(n^2 - n^2 \sin^2 i)^{1/2}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2 \cos i + n(n^2 - n^2 \sin^2 i)^{1/2}} \end{cases}$$

Consideremos  $\mu \approx \mu' \approx 1$ .

Notar que si  $(n'^2 - n^2 \sin^2 i) \geq 0 \Rightarrow$  los coef. son reales.

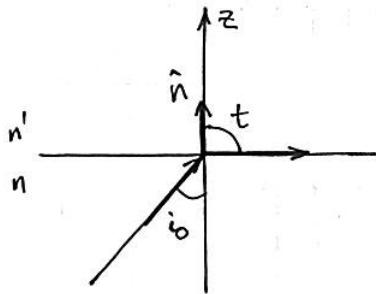
Además

$\frac{E_2'}{E_0} > 0$  estén en fase

$\frac{E_2''}{E_0}$  pueden estar en fase o saltar en  $\pi$

¿Qué pasa cuando  $(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i) < 0$ ?

Necesitamos  $n > n'$ : Reflexión total interna



$\exists i_0 \text{ tq } \operatorname{sen} i_0 = \frac{n'}{n}, \operatorname{sen} t = 1$

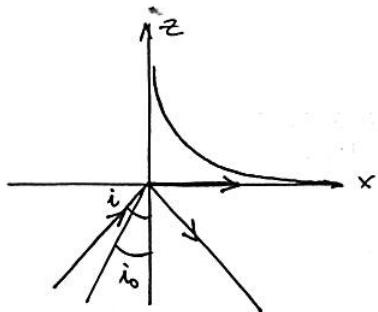
Tenemos

$$E' = E_0' e^{i(k_x x + k_z' z - wt)}$$

$$\gamma \quad k_z'^2 = \mu' \epsilon' \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 = \mu' \epsilon' \frac{\omega^2}{c^2} - \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 i \\ = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{n^2}{n'^2} \operatorname{sen}^2 i \right) \leq 0 \quad \text{para } i \geq 0$$

Tomando  $k_z' \equiv ik_z$  con  $k_z' = -n'^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{n^2}{n'^2} \operatorname{sen}^2 i \right)^{1/2}$

$$\Rightarrow E' = E'_0 e^{i(k_x x - \omega t)} e^{-\gamma z} \quad \text{con } \gamma = \frac{\omega}{c} \left( n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2 \right)^{1/2}$$



La onda se propaga en x  
y se atenua en z

El coef. de fresnel queda (TE)

$$\frac{E_2'}{E_0} = \frac{2n \cos i}{n \cos i + i(n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2)^{1/2}} \in \mathbb{C}$$

↑ desfase

y para la onda reflejada

$$\frac{E_2''}{E_0} = \frac{n \cos i - i(n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2)^{1/2}}{n \cos i + i(n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2)^{1/2}} \quad \text{con } \left| \frac{E_2''}{E_1} \right| = 1$$

(la onda reflejada se lleva tanto energía como la incidente).

El otro caso de interés es cuando

$$n \cos i - n' \cos t = 0 \quad (\text{TE})$$

$$n' \cos i - n \cos t = 0 \quad (\text{TM})$$

En ese caso una polarización no es reflejada:

Ángulo de Brewster. Tenemos relaciones

$$\alpha \cos i - \beta \cos t = 0 \quad \text{y usando Snell}$$

$$\Rightarrow \alpha \cos i = \beta \left[ 1 - \left( \frac{n}{n'} \operatorname{sen} i \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\alpha^2 \cos^2 i = \beta^2 - \beta^2 \frac{n^2}{n'^2} \operatorname{sen}^2 i = \beta^2 (\cos^2 i + \operatorname{sen}^2 i) - \beta^2 \frac{n^2}{n'^2} \operatorname{sen}^2 i$$

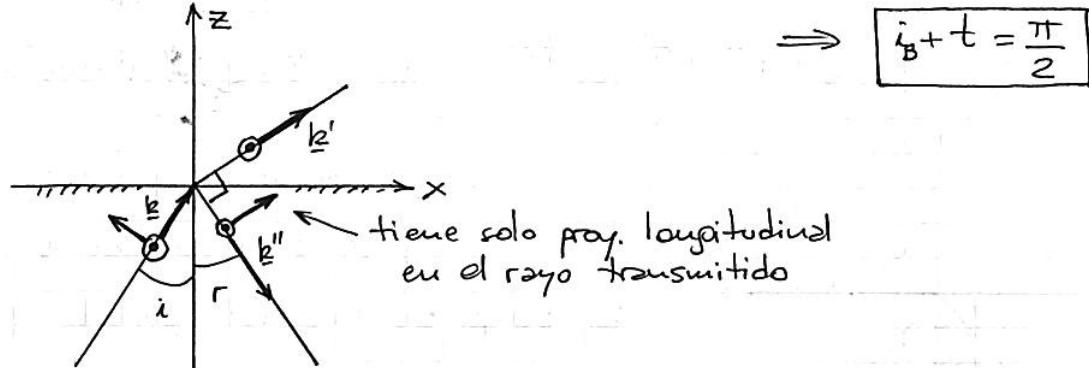
$$\Rightarrow (\alpha^2 - \beta^2) \cos^2 i = \beta^2 \left( 1 - \frac{n^2}{n'^2} \right) \operatorname{sen}^2 i$$

$$\Rightarrow \tan^2 i = \frac{n^2(\alpha^2 - \beta^2)}{\beta^2(n^2 - n^2)} \quad \begin{cases} TE: \tan^2 i = -1 \\ TM: \tan^2 i = \frac{n^2}{n^2} \end{cases}$$

Luego para el caso TM  $\exists i \tan E_1'' = 0$

$$\tan i_B = \frac{n'}{n}$$

y como  $n \sin i_B = n' \cos i_B = n' \sin t \Rightarrow \sin t = \cos i_B$



### Ondas en medios conductores

$$\text{Tenemos } \underline{J}_e = \sigma \underline{E}$$

En ausencia de fuentes

$$\nabla \cdot \underline{D} = \nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad (2)$$

Tomando rotar en (1)

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = -\nabla^2 \underline{E} = -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \underline{H} =$$

$$= -\frac{\mu \sigma}{c^2} 4\pi \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \frac{\mu \underline{E}}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \underline{E} - \frac{\sigma \mu}{c^2} 4\pi \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \frac{\mu \underline{E}}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0$$

dissipación                      inducción

$$\Rightarrow \nabla^2 \underline{E} + \mu \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E} \left( 1 + i \frac{4\pi \sigma}{\omega \mu} \right) \underline{E} = 0$$

Transformando Fourier  
 $\underline{E}(r, t) = \underline{E}(r, \omega) e^{-i\omega t}$

Tomando onda plana  
 $\underline{E}(r, t) = E_0 e^{i(k_r r - \omega t)}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon \left( 1 + i \frac{4\pi \sigma}{\omega \mu} \right) \in \mathbb{C}$$

$\epsilon$  cte dielectrica compleja con  $\sigma$  real (puede tomarse al revés)

\* Podemos pensar en una razón de tiempos  $T/Z_i$  con  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (tiempo de excitación) y  $Z_i = \frac{\epsilon}{2\sigma}$  (inercia del material). Si  $\frac{T}{Z_i} = \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$  los efectos del conductor son despreciables

Consideremos entonces  $\omega$  real en conductores.

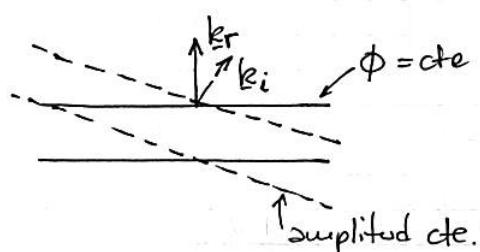
con  $\epsilon, \mu$  reales  $\Rightarrow \hat{E} \in \mathbb{C}$  y  $\underline{k}$  es complejo.

Tomemos

$$\underline{k} = \underline{k}_r + i\underline{k}_i$$

$$\Rightarrow E(\underline{r}, t) = \underbrace{E_0 e^{-\underline{k}_i \cdot \underline{r}}}_{\text{amplitud}} e^{i(\underline{k}_r \cdot \underline{r} - \omega t)} \underbrace{\text{fase}}$$

Ahora tenemos ondas planas con fase constante en planos  $\perp \underline{k}_r$ , y amplitud constante en planos  $\perp \underline{k}_i$ .

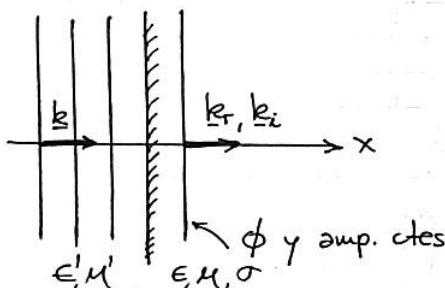


Las ondas se propagan en  $\underline{k}_r$  y se atenuan en  $\underline{k}_i$ .

Las ondas siguen siendo transversales. Supongamos que hubiera una componente en  $\hat{k}_r$ . Tomemos  $\hat{x}$  en  $\hat{k}_r$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = E_x(x, t) \hat{x} + E_{\perp}(x, t) \\ H = H_x(x, t) \hat{x} + H_{\perp}(x, t) \end{array} \right. \quad \text{y soluciones 1D} \quad (\underline{k}_i \parallel \underline{k}_r)$$

(por ejemplo, tenemos incidencia normal en la sup. de un conductor)



$$\text{Como } \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow E_x = E_x(t)$$

$$B_x = B_x(t)$$

Además

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \underline{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

Tomando la componente x

$$0 = \frac{4\pi\sigma}{c} E_x + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\Rightarrow E_x(t) = E_{0x} e^{-\frac{4\pi\sigma}{\epsilon}t}$$

$\frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$  es el tiempo característico para que el medio suelte el campo longitudinal en el interior por disipación ohmica.

Además  $\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

y la componente x:  $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow H_x = \text{cte}$

Veamos las componentes transversales.

$$\begin{cases} E_\perp = E_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \\ H_\perp = H_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases}$$

con  $\underline{k} = k \hat{x}$ ,  $k^2 = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\epsilon \omega} \right)$

Tomemos

$$k = k_0 (\alpha + i\beta)$$

$$\Rightarrow k^2 = k_0^2 \left[ (\alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta \right] = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\epsilon \omega} \right)$$

luego  $k_0 = \sqrt{\mu \epsilon \frac{\omega}{c}}$  y  $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon \omega} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{4\pi\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2} \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{4\pi\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \end{cases}$$

y  $E_\perp = E_0 e^{-k_0 \beta x} e^{i(k_0 \alpha x - \omega t)}$

Casos límites:

1) Mal conductor

$$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$$

Por Taylor a primer orden

$$\alpha \approx 1$$

$$\beta \approx \frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}$$

$$\Rightarrow k = k_0(\alpha + i\beta) \approx \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left(1 + i\frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right) =$$

$$= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} + i \underbrace{\frac{2\pi\sigma}{\epsilon c} \sqrt{\mu\epsilon}}_{\text{independiente de } \omega \text{ si } \epsilon, \mu \text{ son indep. de } \omega}$$

Luego

$$E_\perp = E_0 e^{-\frac{2\pi\sigma}{\epsilon c} \sqrt{\mu\epsilon} x} e^{i(k_0 x - \omega t)}$$

y se propaga como en el vacío pero decae con  $x$ .

Notar que un pequeño se propaga y atenua sin deformarse.

2) Buen conductor:  $\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$

$$\Rightarrow \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}}$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left(\frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right)^{1/2} (1+i) = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\mu\omega}{c}} (1+i)$$

$$Y \quad E_\perp = E_0 e^{-\chi_s x} e^{i(kx - \omega t)}$$

$\chi_s$  l. p. p. o de penetración

Además, ahora  $\omega = \omega(k)$  y  $v_f = v_f(k)$  y el medio es dispersivo. En el caso general

$$E(\Sigma, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k, t) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

## Teoría de la relatividad especial

### Transformaciones de Galileo y covariación de Newton

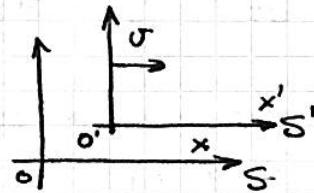
Las ec. de la mecánica son invariantes (no cambian de forma), ie. covariantes = "varían como una escalar" función frente a transformaciones de Galileo.

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$



O bien  $\begin{cases} \underline{r}' = \underline{r} - \underline{vt} \\ t' = t \end{cases}$

Tenemos  $m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{F}(\underline{r}, t)$

$$\gamma \quad \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \underline{r}'}{dt'^2}, \quad \underline{F}(\underline{r}, t) = \underline{F}(\underline{r}(\underline{r}', t'), t') = \underline{F}'$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 \underline{r}'}{dt'^2} = \underline{F}'(\underline{r}', t') \quad \text{si la fuerza es invariante}$$

Se introduce el concepto de sistema inercial: el sist. en el que un cuerpo en ausencia de fzas. exteriores se mueve con  $v$  cte.

Las ec. de Maxwell no son invariantes frente a transf. de Galileo. Por ejemplo, las ec. para  $\phi$  y  $A$  en el gauge de Lorentz en vacío y en una región

libre de fuentes satisfacen

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

que tienen sol. unidimensional  $\chi = f(x \pm ct)$

Veamos como se transforma esta ec. en el sist. S'

En el caso unidimensional  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$

$$y \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'}$$

Reemplazando en la ec. de ondas

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \chi = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \right] \chi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t'^2} + v^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \chi}{\partial x' \partial t'} \right) = 0$$

Para ondas en medios materiales, la ec. de ondas homogéneas solo es válida en el sist. de referencia en que el medio está en reposo.

⇒ se introdujo el ÉTER: las ec. de Maxwell están escritas en el sist. en el que el éter está en reposo.

Tres experimentos ponearon problemas con esta hipótesis

1. Mediciones de la vel. de la luz en fluidos en movimiento (Fizeau, 1859)

2. El experimento de Michelson-Morley (1887)

3. La aberración (corrimiento en la posición

aparente) de las estrellas.

El exp. 2 intentó medir el mov. de la tierra respecto al éter y falló. Se explicó con la contracción de FitzGerald-Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El exp. 1 se explicó asumiendo que el fluido arrastra parcialmente al éter, con una efectividad que depende del  $n$  del medio.

A principios de siglo las posibles explicaciones eran

1. Las ec. de Maxwell son incorrectas; las ec. del electromagnetismo son inv. de Galileo
2. Las ec. de Maxwell son válidas en el sist. de ref. fijo al éter; la descripción de la interacción de los campos y la materia con el éter seguía una gran cantidad de reglas complejas.
3. Todas las ec. de la física son covariantes, pero no ante transf. de Galileo.

### Postulados de la relatividad especial

Einstein consideró la tercera opción y propuso:

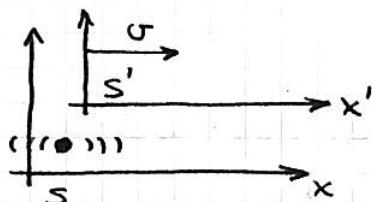
1. Las ec. de la física son las mismas (covariantes) en todos los sistemas en MRU respecto al otro (sist. inerciales).

2. La vel. de la luz en el vacío es la misma en todos los sist. de referencia y es independiente del movimiento de la fuente.

Estos postulados excluyen las transformaciones de Galileo. En estas transformaciones, la ley de transf. para la velocidad es

$$x' = x - vt \implies v' = v - u$$

Si emito un pulso de luz en S.



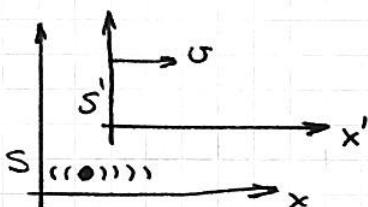
$$v_s = c$$

$$v_{s'} = c$$

$$\text{y según Galileo } v_{s'} = c - u$$

El postulado 2 también implica que c es la vel. máxima posible. Si no, puedo desplazar una carga con  $v > c$  y tener conexión causal más rápida que  $\frac{x}{c}$ .

Suceso: queda definido por  $t, r$  en un sist. de ref. Consideremos



Emitimos un pulso en  $x_1, y_1, z_1, t_1$

En  $t_2$  viajó  $c(t_2 - t_1)$

$$\Rightarrow c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

En  $S'$

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0$$

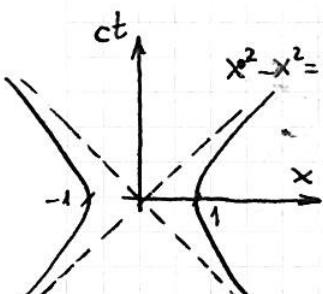
Para dos sucesos cualesquiera se define el intervalo:

$$\Delta s_{12} = c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2 - \Delta y_{12}^2 - \Delta z_{12}^2$$

$y$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

notación de dist.  
en una geometría  
pseudoeuclídea



como  $ds = 0 \Leftrightarrow ds' = 0$

$$\Rightarrow ds^2 = \alpha ds'^2$$

pero si cambio  $v \rightarrow -v$   
 $\circ S \rightarrow S'$  }  $\Rightarrow \alpha = 1$

$$\Rightarrow ds^2 = ds'^2$$

INVARIANTE relativista

Consideremos ahora que el pulso se emite en

$x_1 = y_1 = z_1 = 0, t_1 = 0$ , y que en ese instante el origen de coord de  $S$  y  $S'$  coinciden, con  $t' = t$ .

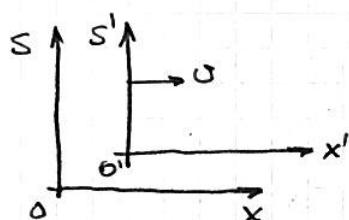
luego, como  $S$  invariante

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \quad \begin{matrix} c^2 t^2 - x^2 \\ x^0 \end{matrix} = \begin{matrix} c^2 t'^2 - x'^2 \\ x'^0 \end{matrix}$$

$$\text{Tomamos rotación} \quad \begin{cases} x^0 = x^0 \cosh \xi - x \senh \xi \\ x^1 = -x^0 \senh \xi + x \cosh \xi \end{cases}$$

Para el mov. de  $O$  (origen de  $S$ ) respecto de  $S'$



$$x = 0 \Rightarrow x^0 = ct = x^0 \cosh \xi$$

$$x' = -vt = -x^0 \senh \xi$$

$$\Rightarrow \tanh \xi = \frac{v}{c} = \beta$$

We po

$$\sinh \gamma = \gamma \beta$$

$$\cosh \gamma = \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma (x^0 - \beta x^1) & x^0 = ct \\ x^1 = \gamma (x^1 - \beta x^0) & x^1 = x \\ x^2 = x^2 & x^2 = y \\ x^3 = x^3 & x^3 = z \end{cases}$$

Tranf. de Lorentz

Las transf. inversas salen de cambiar  $\beta \rightarrow -\beta$ .  
 $x \rightarrow x'$

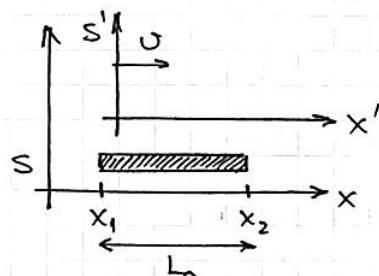
Se introduce el cuadrvector posición

$$\begin{array}{ll} (x^0, x^1, x^2, x^3) & x^M \quad M=0,1,2,3 \\ " (x^0, x) & \\ \text{parte temporal} & \text{parte espacial} \end{array}$$

### Las transformaciones de Lorentz

Notar que  $v < c$ . Para  $c \rightarrow \infty$  las transf. se reducen a Galileo.

Consideremos una barra de largo  $L_0$  en reposo en el sist S. En  $S'$ , debemos medir  $x'_2$  y  $x'_1$  en el mismo instante  $t'$ . Usando la transf. inversa



$$x_1 = \gamma (x'_1 + vt)$$

$$x_2 = \gamma (x'_2 + vt')$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = L_0 = \gamma (x'_2 - x'_1) = \gamma L'$$

$$\Rightarrow L' = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

contracción de FitzGerald-Lorentz

Consideremos ahora un reloj en reposo en el sist.  $S'$ .  
 Sean dos sucesos que ocurren en  $x', y', z'$  en  $t'_1$  y  $t'_2$ . El tiempo transcurrido en  $S'$  (tiempo propio) es  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ .

Véamos  $\Delta t$  en  $S$ :

$$ct_1 = \gamma(ct'_1 + \beta x'_1)$$

$$ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x'_2)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2/c^2}} \quad \text{Dilatación temporal}$$

### Transformación de las velocidades

Tenemos  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  y queremos  $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$

$$\text{De Lorentz} \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t)$$

$$c \Delta t' = \gamma(c \Delta t - \beta \Delta x)$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

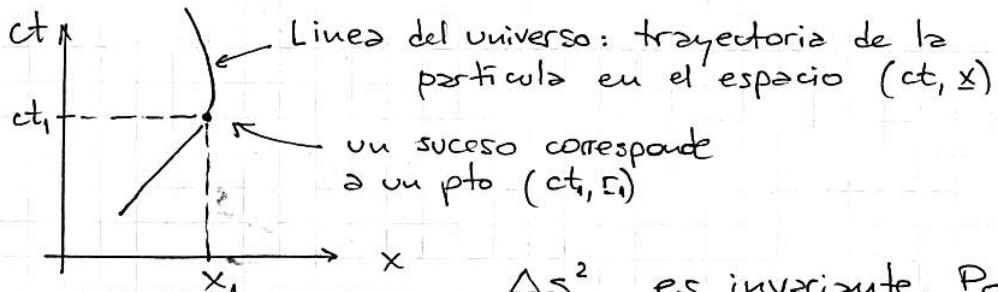
$$\Rightarrow v'_x = \frac{\Delta x - \beta c \Delta t}{\Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c}} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta c}{1 - \beta \frac{\Delta x}{c}}$$

dividido  
por  $\Delta t$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - \beta c}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta \frac{v_x}{c})} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta \frac{v_x}{c})} \end{array} \right.$$

## Diagramas de espacio-tiempo

Consideremos el espacio de Minkowski del sist. de referencias S

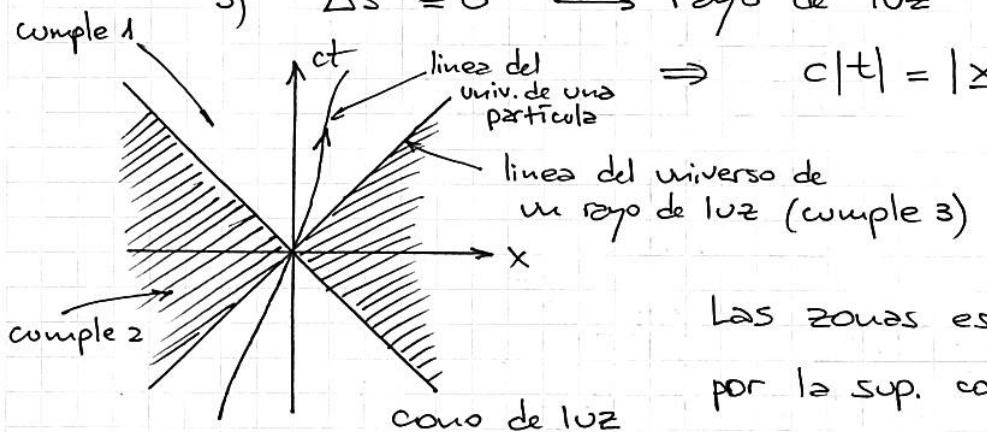


$\Delta s^2$  es invariante. Podemos clasificar fenómenos segú

$$1) \Delta s^2 > 0$$

$$2) \Delta s^2 < 0$$

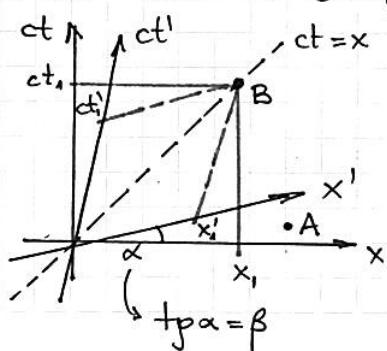
$$3) \Delta s^2 = 0 \rightarrow \text{rayo de luz} \quad ct^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



Las zonas están separadas por la sup. con  $\Delta s^2 = 0$   
 $\Rightarrow$  tienen carácter absoluto  
 (son indep. del sist. de referencia).

Veamos  $x'$  y  $ct'$  para un sist. de referencia  $S'$  que

se mueve con  $v$  uniforme



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

Los eventos simultáneos en  $S$  (ptos. sobre el eje  $x$ ) no lo son en  $S'$  (en  $S'$  los eventos simultáneos están sobre el eje  $x'$ ). En part. A están en el futuro de  $S$  y en el pasado de  $S'$ .

Los eventos con  $\Delta s^2 > 0$  (1) cumplen

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 > 0$$

Consideremos  $\Delta y = \Delta z = 0$ . En el sistema que se mueve con  $\beta = \frac{\Delta x}{c \Delta t}$ :  $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) = 0$   
 $\Delta t' = \gamma(c \Delta t - \beta \Delta x) \neq 0$

$$\Rightarrow \Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 \quad (\text{separación temporal})$$

Los eventos con  $\Delta s^2 < 0$  (2) cumplen

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 < 0$$

Ahora podemos hallar un sistema  $S'$  tp  $\Delta t' = 0$  y

$$\Delta s'^2 = -\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 < 0 \quad (\text{separación espacial})$$

(los dos eventos no pueden tener conexión causal)

FUTURO ABSOLUTO (conectado causalmente con 0)

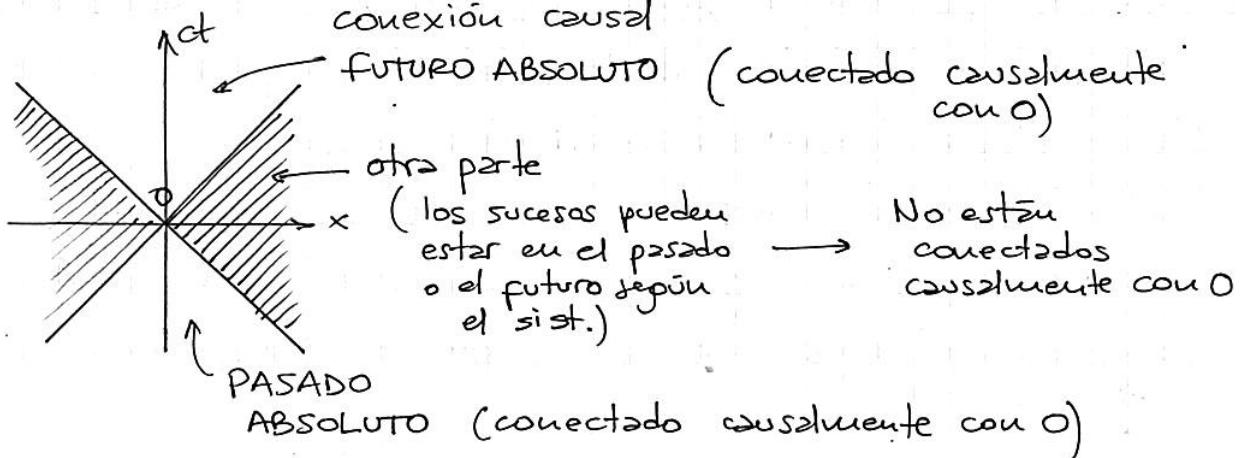
otra parte

(los sucesos pueden estar en el pasado o el futuro según el sist.)

No están conectados causalmente con 0

PASADO

ABSOLUTO (conectado causalmente con 0)



## Formalismo de cuadrivectores

Tenemos el cuadrivector posición  $x^{\mu}$

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \underline{x})$$

con "longitud"

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = s^2 \quad (\text{Espacio de Minkowski})$$

¿Cuáles son las transf. que dejan al módulo de  $x^{\mu}$  invariante? Tenemos

1) Transf. de Lorentz

2) Rotaciones espaciales (las coord. espaciales están en un espacio euclídeo)

(1) + (2) forman el grupo de Poincaré (más reflexiones).

Del primer postulado de la relatividad especial, las ec. de la física deben ser invariantes de forma bajo la acción de estas transformaciones  $\Rightarrow$  las magnitudes involucradas tienen que poder escribirse como cuadrivectores (o tensores de rango más alto) que se transformen como  $x^{\mu}$ .

Consideremos cuatro cantidades  $A^{\mu}$  que se transforman como las componentes de  $x^{\mu}$

$$\left. \begin{array}{l} A^0' = \gamma (A^0 - \beta A^1) \\ A^1' = \gamma (A^1 - \beta A^0) \\ A^{2'} = A^2 \\ A^{3'} = A^3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} A^4 = (A^0, A) \text{ es un} \\ \text{cuadrivector contravariante} \\ \text{En prst: } A'^4 = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \\ \text{con conv. de la suma.} \end{array} \right.$$

Notar que la distancia (la geometría del espacio tiempo) en el espacio de Minkowski está dada por el intervalo

$$ds^2 = c dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \\ = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

con  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  Tensor métrico <sup>forma cuadrática</sup>

La "longitud" de  $A^4$  en este espacio es

$$A^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

Introduciendo un cuadrivector covariante

$$A_\mu = (A_0, -A) \quad \circ \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

podemos escribir

$$A^\mu A_\mu = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = \\ = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

escalar  
invariante  
relativista o de Lorentz)

Un vector covariante se transforma en

general como

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu$$

Ejemplo: Si  $A^\mu = x^\mu = (ct, \underline{x})$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\underline{x})$$

$$\text{y } x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = (ct)^2 - |\underline{x}|^2 = s^2 \quad \text{invariante}$$

$$\text{De } A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \implies \boxed{g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}} \quad \text{y } g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

Notar que un diferencial se transforma según

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} \quad \text{o} \quad dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

(ie. se transforma como el vector contravariante)

$\Rightarrow$  un vector contravariante se transforma como un diferencial de las coordenadas.

Por otro lado, el diferencial de una func. escalar debe ser un invariante. Se transforma como

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$$

$\uparrow$  debe ser covariante

Frente a un cambio de coord., sabemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad \text{o} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$$

(se transforma como un vector covariante)

$\Rightarrow$  un vector covariante se transforma como las derivadas de un escalar.

En geometrías no euclidianas tenemos que distinguir entre los dos tipos de vectores.

Ejemplo: consideremos el intervalo en cilíndricas

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2$$

o el sistema no-inercial que rota con  $\Omega$  fijo:  $\phi = \phi' + \Omega t'$

$$ds'^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt'^2 - 2\Omega r^2 d\phi' dt' - dz'^2 - dr'^2 - r'^2 d\phi'^2$$

Veamos en Minkowski cuánto vale la matriz de transformación

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \equiv L^{\mu}_{\nu} :$$

En Minkowski la ley de transformación  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

es Lorentz:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$x'^2 = x^2$$

$$x'^3 = x^3$$

$$L_v^{\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \Rightarrow x' = L x$$

para vectores contravariantes

$$\text{Es fácil ver que } L^{-1}(\beta) = L(-\beta)$$

Podemos generalizar estos conceptos a tensores: por ejemplo,

16 cantidades que se transforman según

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$$

Son un tensor contravariante de segundo rango.

Y vale que:

$$1) \quad T'^\nu_\nu = g_{\alpha\nu} T'^\alpha_\nu \quad (\text{"bajar un índice"})$$

$$2) \quad T^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = R^{\gamma\delta}_\gamma \quad (\text{"contraer un índice"})$$

Contrayendo todos los índices obtendremos un escalar (= invariante)

Operador de derivada parcial

$$\text{Habíamos visto que } \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

Armemos el cuadrivector covariante

$$\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$$

y podemos construir el vector contravariante como

$$\partial^{\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right)$$

Ahora, dado un vector contravariante  $A^{\mu}$

$\partial_{\mu} A^{\mu}$  es invariante

El operador  $\partial_{\mu} \partial^{\mu}$  también debe ser invariante:

$$\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3{}^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

### Ecuaciones de Maxwell

Por el primer postulado de la relatividad especial, las leyes de la física (y en particular las ec. de Maxwell) deben poder expresarse de igual forma en todo sistema inercial  $\Rightarrow$  deben tener una formulación covariante.

Por la definición de  $\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu}$  la ec. de ondas es covariante.

De la ec. de continuidad  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$ . (cons. de la carga)

Es covariante si  $\rho$  y  $\underline{j}$  forman un cuadrivector de la forma

$$J^{\mu} = (c\rho, \underline{j}) \quad \text{cuadrivector corriente}$$

$\Rightarrow$  la ec. de continuidad queda

$$\boxed{\partial_{\mu} J^{\mu} = 0}$$

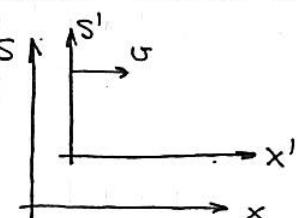
Además, las componentes de  $J^{\mu}$  se transforman como  $x^{\mu}$

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x)$$

$$j'_x = \gamma(j_x - \beta c\rho)$$

$$j'_y = j_y$$

$$j'_z = j_z$$



En el gauge de Lorentz  $\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\text{y} \quad \begin{cases} \nabla^2 \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi$  y  $\underline{A}$  deben ser las componentes de un cuadivector  
 $\underline{A}^\mu = (\varphi, \underline{A})$  cuadivector potencial

luego el gauge de Lorentz queda del campo electromagnético

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

tiene la forma de ley de coul.

Expresa que los estados del fotón no

tiene prop. en spin 0  
 (masa del fotón = 0)  
 De hecho, elimina  
 el spin 0 en la rep. del  
 gauge de Lorentz pues

$$k_\mu A^\mu = 0$$

y las ec. de ondas inhomogéneas quedan

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

o

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Veamos ahora como se transforman  $\underline{E}$  y  $\underline{B}$ . Tenemos

$$\begin{cases} \underline{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \\ \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \end{cases}$$

Veamos si estos campos son las componentes de un tensor de segundo rango. Definimos el tensor intensidad de campo

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Es antisimétrico  $\Rightarrow$  los elementos diagonales son nulos  
 y como es de  $4 \times 4$  tiene 6 componentes independientes.

Veamos las componentes

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -E_x$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Definimos el pseudo-tensor  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{permutaciones pares de } 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{permutaciones impares} \\ 0 & \text{para indices repetidos} \end{cases}$

Dado un tensor antisimétrico  $A^{\mu\nu}$ , se define el dual (pseudotensor) como

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} A_{\mu\nu}$$

Notar que  $A^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$  es un pseudoescalar (recordar que el dual  $\mathcal{V}$  de un espacio  $V$  está formado por todas las funciones lineales en  $V$ ).

Entonces el dual del tensor intensidad de campo es

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora como se escriben las ec. de Maxwell en forma covariante. Tomemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\frac{4\pi}{c} J^\nu} - \underbrace{\partial_\nu (\partial_\mu A^\mu)}_0 \quad \text{por Gauge de Lorentz}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu}$$

Son 4 ecuaciones para  $\nu = 0, 1, 2, 3$

Vemos que ec. son

$$v=0) \quad \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{q} \neq p \Rightarrow \nabla \cdot E = 4\pi p$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} J_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

⇒ son las ec. de Maxwell inhomogéneas. Nos faltan las 4 ec. homogéneas. Tomemos

$$\partial_M \mathcal{F}^{M^P} = 0$$

y vemos que son las ec. faltantes

$$v=0) \quad \partial_1 \mathcal{F}^{10} + \partial_2 \mathcal{F}^{20} + \partial_3 \mathcal{F}^{30} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot B = 0$$

$$V=1) \quad \partial_0 \vec{F}^{01} + \partial_2 \vec{F}^{21} + \partial_3 \vec{F}^{31} = 0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$\Downarrow$

$$(\nabla \times \vec{E})_x + \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

Usando la definición del tensor dual esta ec. puede escribirse en términos de  $F^{\mu\nu}$  como

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} = 0$$

cou  $\alpha, \beta, \gamma =$   
 $0, 1, 2, \circ 3$

## Transformación del campo electromagnético

Veamos primero que ciertas cantidades no cambian (son invariantes relativistas). Las podemos hallar contrayendo indices. Tomemos

- 1)  $F_{\mu}^{\mu} = 0$  ( $\Rightarrow$  traza es nula en todo sistema)
  - 2)  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2E^2 + 2B^2 = -2(E^2 - B^2)$
  - 3)  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -4 \underline{E} \cdot \underline{B}$

Es decir que

$$\begin{cases} \text{si } \underline{E} \perp \underline{B} \text{ en } S \Rightarrow \underline{E}' \perp \underline{B}' \text{ en todo } S' \\ \text{si } E^2 - B^2 > 0 \text{ en } S \Rightarrow E'^2 - B'^2 > 0 \text{ en todo } S' \end{cases}$$

Veamos ahora las transformaciones.  $F^{uv}$  debe transformarse

como

$$F^{uv} = L_\alpha^u L_\beta^v F^{\alpha\beta} \quad \text{con} \quad L_\alpha^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene

$$\begin{cases} E'_\parallel = E_\parallel \\ E'_\perp = \gamma(E_\perp + \beta \times B) \\ B'_\parallel = B_\parallel \\ B'_\perp = \gamma(B_\perp - \beta \times E) \end{cases}$$

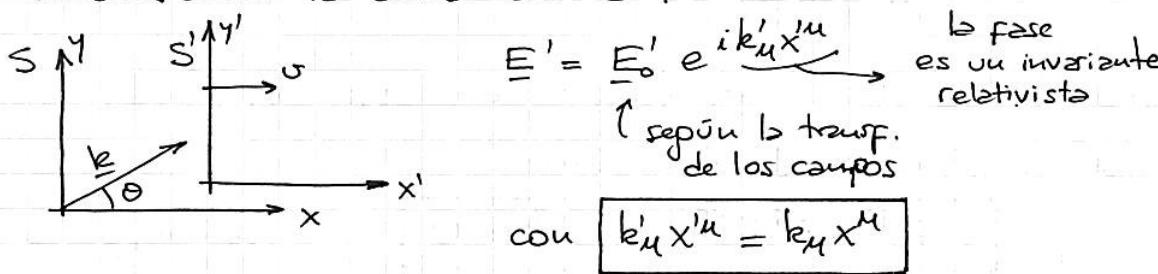
## Efecto Doppler relativista

Consideremos una onda plana en S

$$\underline{E} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x})} = E_0 e^{i k_y x^4}$$

con  $k_\mu = \left( \frac{\omega}{c}, -\underline{x} \right)$  y  $k^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \underline{x} \right)$  (cuadrvector de onda)

Consideremos la onda en  $S'$ :



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega'}{c} = \gamma \left( \frac{\omega}{c} - \beta k_x \right) \\ k'_x = \gamma \left( k_x - \beta \frac{\omega}{c} \right) \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \end{cases}$$

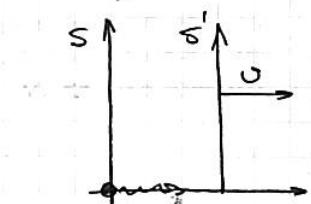
En S y S' tenemos onda plana que se propaga con vel. c. Pero la freq. cambia para satisfacer  $|k'| = \frac{\omega'}{c}$

Usando  $k_x = k \cos \theta \Rightarrow$   
 $= \frac{\omega}{c} \cos \theta$

$$\omega' = \frac{\omega (1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Casos particulares:

$\theta = 0$ ) El observador se aleja de la fuente

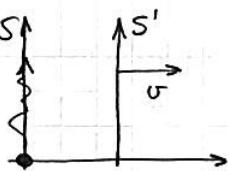


$$\omega' = \omega \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < \omega$$

$\theta = \pi$ ) El obs. se acerca a la fuente

$$\omega' = \omega \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \omega$$

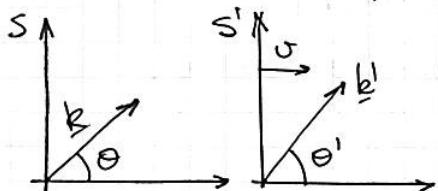
$\theta = \frac{\pi}{2}$ )



Es el caso de prop. transversal

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{no existe en el caso clásico})$$

Además, en  $S'$  hay un cambio en la dirección de propagación.



$$\text{Tenemos } k_x' = \gamma (k_x - \beta \frac{\omega}{c})$$

$$\Rightarrow \frac{\omega' \cos \theta'}{\ell} = \frac{\gamma \omega}{c} (\cos \theta - \beta)$$

$$\text{y como } \omega' = \omega \gamma (1 - \beta \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}}$$

(Esto explica la aberración estelar)

### Mecánica relativista

Las ec. de Newton no son covariantes. Para tener una mec. relativista debemos definir velocidades, aceleraciones, impulsos, etc. que se transformen como cuadrvectores.

Notar que las componentes de la velocidad  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  no se transforman según Lorentz. Esto es así porque el tiempo  $t$  cambia frente a transf. de Lorentz.

Definimos  $U^M = \frac{dx^M}{d\zeta}$  ← cuadrivector posición  
 tiempo propio (iuv. relativista)

Debe ser un cuadrivector contravariante: cuadrivector

velocidad:  $U^0 = \frac{dx^0}{d\zeta} = \frac{dx^0}{dt} \frac{dt}{d\zeta} = \gamma_v c$

$d\zeta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$  el tiempo propio es  $t$  en el sistema que se mueve con  $v = v$

$$U^i = \frac{dx^i}{d\zeta} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\zeta} = \gamma_v v^i$$

$$\Rightarrow U^M = \gamma_v (c, v) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{se transforma} \\ \text{según Lorentz.} \end{matrix}$$

se transforma  
según la transf. de las velocidades.

y notar que  $U_M U^M = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2) = c^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} = c^2$

$\Rightarrow \frac{U^M}{c}$  es un vector unitario perpendicular a la linea del universo de la partícula.

Volviendo a derivar respecto a  $\zeta$  obtenemos el cuadrivector aceleración:

$$\alpha^M = \frac{dU^M}{d\zeta} = \frac{d^2x^M}{d\zeta^2}$$

$$\begin{aligned} \gamma \quad \alpha^M &= \frac{dU^M}{dt} \frac{dt}{d\zeta} = \gamma_v \frac{d}{dt} [\gamma_v (c, v)] = \\ &= \gamma_v \frac{d\gamma_v}{dt} (c, v) + \gamma_v^2 \frac{d}{dt} (c, v) \end{aligned}$$

Véanmos que

$$U_M \alpha^M = 0$$

Podríamos hacer la cuenta explícita, pero es más fácil derivar  $U_M U^M = c^2$

$$\frac{d}{d\zeta} (U_M U^M) = 0 = 2 U_M \frac{dU^M}{d\zeta} \Rightarrow U_M \alpha^M = 0$$

y los cuadrivectores velocidad y aceleración son ortogonales.

Ahora queremos hallar la generalización de la ec. de Newton

$$\frac{d}{dt} (m \underline{v}) = \underline{F}$$

tp para  $c \rightarrow \infty$  recobramos Newton. Tomemos

$$\frac{d}{dz} (m \underline{U}^{\mu}) = K^{\mu}$$

masa en reposo ( $\equiv m_0$ )

fz. de Minkowski  
Debe satisfacer  $K^i_{c \rightarrow \infty} \rightarrow F^i$   
i.e.  $K^i = \gamma_v F^i$

inviriante  
y  $\underline{z}_{c \rightarrow \infty} \rightarrow t$

Definiendo

$$P^{\mu} = m \underline{U}^{\mu}$$

cuadrivector momento

$$\Rightarrow \frac{dp^{\mu}}{dz} = K^{\mu} \quad (1)$$

Las prop. de transformación de  $K^{\mu}$  deben ser las mismas independientemente de la naturaleza de la fuerza. Consideremos el caso de fzcs. electromagnéticas:

$$\underline{E} = q \underline{E} + \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B} = \frac{q}{c} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

Consideremos el cuadrivector

$$K^{\mu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} U_{\nu}$$

$$\begin{aligned} M=1) \quad K^i &= \frac{q}{c} (F^{10} U_0 + F^{12} U_2 + F^{13} U_3) = \gamma_v \frac{q}{c} (E_x c - B_z v_y + B_y v_z) \\ &= \gamma_v \frac{q}{c} (c E_x + (\underline{v} \times \underline{B})_x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K^i = \gamma_v F^i \quad i = 1, 2, 3$$

Veamos las componentes espaciales de (1)

Tenemos  $P^{\mu} = (P^0, \underline{P})$  con  $\begin{cases} P = \gamma_v m \underline{v} \\ P^0 = \gamma_v m c \end{cases}$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{dz} = \gamma_v \frac{dp}{dt} = \gamma_v F$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dp}{dt} = F$$

con

$$F = \gamma_v m v$$

(Para un cuerpo libre de interacciones tenemos MRU)

y en el límite  $c \rightarrow \infty$  recobramos Newton.

Pero la componente temporal es nueva. Ahora tenemos

$$\frac{dp^0}{dp} = K^0$$

$p^0 = \gamma_v mc$ , pero ¿cuánto vale  $K^0$  en general? Tomemos

$$U_\mu \frac{dp^\mu}{dp} = U_\mu K^\mu = U_\mu \frac{dp^\mu}{dp} (m v^\mu) = \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{2} m U_\mu v^\mu \right)$$

$$= \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{2} m c^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow U_\mu K^\mu = 0 = \gamma_v (c K^0 - v \cdot \gamma_v E)$$

luego

$$K^0 = \frac{\gamma_v}{c} v \cdot E$$

$$\Rightarrow K^\mu = \gamma_v \left( \frac{v \cdot E}{c}, E \right)$$

Fz. de Minkowski

La componente temporal entonces queda

$$\frac{dp^0}{dz} = \frac{dp^0}{dt} \frac{dt}{dz} = \gamma_v \frac{dp^0}{dt} = \gamma_v \frac{v \cdot E}{c}$$

Potencia  
(trabajo x v. de tiempo)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \gamma_v m c^2 \right) = v \cdot E = F \cdot \frac{dx}{dt}$$

↑ Energía cinética

$$\Rightarrow E = \gamma_v m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

y

$$P^\mu = \left( \frac{E}{c}, P \right)$$

Notar que ahora puedo escribir  $P = \gamma_v m v = \frac{E}{c^2} v$

De la definición de  $p^\mu$  se sigue

que en relatividad especial, siempre

que se conserva el momento (espacial), se conserva  $E$ .

$E$  se conserva aún en choques inelásticos! \*

Veamos el invariante

$$P_\mu P^\mu = m^2 U_\mu U^\mu = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - P^2$$

\* pero se viola  
la cons. de la masa  
La masa total no  
es la suma de las  
masas de cada par

Se sigue además que

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

o

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

(3)

energía  
en reposo

Para una partícula en reposo

$$E = mc^2$$

y para una partícula con  $m=0$  (fotón)

$$E = pc$$

Notar la relación entre el  
vector de Poynting y la densidad de  
momento electromagnético.

Desarrollando (3) por Taylor para  $v/c \ll 1$

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Ejemplos:

1) Veamos el mov. de una carga en un campo eléctrico

uniforme:  $\varphi = -E_0 x$

$$(v = v \hat{x})$$

La ec. de movimiento es

$$\frac{d}{dt} (\gamma_v m v) = q E_0$$

$$\Rightarrow \gamma_v m v = q E_0 t + d \quad d=0 \text{ si } v(t=0)=0$$

$$\Rightarrow \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qE_0 t$$

$$\gamma v^2 = \frac{q^2 E_0^2 t^2}{m^2 c^2} (c^2 - v^2) \Rightarrow v = \frac{q E_0 t / m}{\sqrt{1 + \left(\frac{q E_0 t}{m c}\right)^2}}$$

Volviendo a integrar

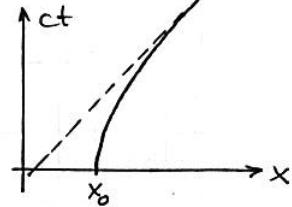
$$\int_{x_0}^x dx' = x - x_0 = \int_0^t \frac{q E_0 t' / m}{\sqrt{1 + \left(\frac{q E_0 t'}{m c^2}\right)^2}} dt' =$$

$$= \int_0^t c \frac{\alpha t'}{\sqrt{c^2 + \alpha^2 t'^2}} dt'$$

$$\Rightarrow x = \frac{c}{\alpha} \left( \sqrt{c^2 + \alpha^2 t^2} - c \right) + x_0$$

pues  $\left[ \left( x - x_0 \right) + \frac{c^2}{\alpha} \right]^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$

Es la ec. de una hiperbola



2) Mov. de una carga en un campo magnético uniforme: Tomemos  $\underline{B} = B_0 \hat{x}$

Tenemos

ec. de movimiento

$$\frac{d}{dt} (\gamma_v m \underline{v}) = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B}$$

En  $\hat{x}$  tenemos conservación de momento. En  $\hat{y}, \hat{z}$  el vector velocidad predece alrededor de  $\hat{x}$  con frecuencia

$$\omega = \frac{q B_0}{m c \gamma_v}$$

notar que  $v^2 = \text{cte}$

Se sigue de  $F_H = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B}$

$$\text{y } \underline{v} \cdot \underline{E} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} (\gamma_v m c^2)$$

$$\Rightarrow \gamma_v = \text{cte}$$

## Campos de cargas en movimiento

Hasta ahora, vimos la evolución de campos electromagnéticos en el tiempo, o la mecánica de cargas en campos

electromagnéticas prescriptas. El primer caso lo estudiamos con las ec. de Maxwell, el segundo con la extensión relativista de las ec. de la mecánica clásica. Sin embargo, el movimiento de las cargas genera campos electromagnéticos "propios" que no consideramos (la única excepción es el caso MHD, donde consideramos la ec. de inducción acoplada con la de cons. de momento; pero allí  $\beta/c \ll 1$  y despreciamos las corr. de desplazamiento, luego no tenemos pérdidas por radiación).

Vemos también que al "prender" un dipolo, tenemos campos  $\propto 1/r$  (campos de radiación) que se llevan flujo de energía para  $r \rightarrow \infty$ . Olvidemos por el momento el acoplamiento y estudiemos el campo generado por cargas en movimiento.

### Potenciales de Liénard-Wiechert

En el paquete de Lorentz  $\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} c p \\ \nabla^2 \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \underline{J} \end{aligned} \right\} \text{ ó } \square A^u = \frac{4\pi}{c} J^u$$

Si las cond. de contorno son tales que  $\varphi = \underline{A} = 0$  antes que el sist. empiece a evolucionar, las sol. se escriben en términos de los potenciales retardados (los avanzados describen, por ej., el caso en que se apagan campos).

$$G^+(\Sigma, t; \Sigma', t') = \frac{\delta\left[t' - \left(t - \frac{|\Sigma - \Sigma'|}{c}\right)\right]}{|\Sigma - \Sigma'|}$$

$$\gamma \begin{cases} \varphi(\Sigma, t) = \int \frac{\rho(\Sigma', t') \delta\left[t' - \left(t - \frac{|\Sigma - \Sigma'|}{c}\right)\right]}{|\Sigma - \Sigma'|} dt' d^3 r' \\ A(\Sigma, t) = \int \frac{j(\Sigma', t') \delta\left[t' - \left(t - \frac{|\Sigma - \Sigma'|}{c}\right)\right]}{c |\Sigma - \Sigma'|} dt' d^3 r' \end{cases}$$

$$\circ A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int J^\mu(x') G^+(x, x') d^4 x'$$

Consideremos una carga en movimiento  $\Sigma' = \Sigma_0(t)$  (tiempo propio)

$$\Rightarrow \rho(\Sigma', t') = q \delta\left[\Sigma' - \Sigma_0(t')\right]$$

$$\gamma \text{ por la ec. de continuidad } \nabla \cdot j = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow j(\Sigma', t') = q \dot{\Sigma}_0(t') \delta\left[\Sigma' - \Sigma_0(t')\right] \text{ con } \dot{\Sigma}_0 = \frac{d\Sigma_0}{dt'}$$

Notar que por ahora  $\Sigma_0(t')$  es una función prescrita.

Reemplazando

$$\begin{aligned} \varphi(\Sigma, t) &= \int q \frac{\delta(\Sigma' - \Sigma_0(t')) \delta\left[t' - \left(t - \frac{|\Sigma - \Sigma'|}{c}\right)\right]}{|\Sigma - \Sigma'|} dt' d^3 r' = \\ &= \int q \frac{\delta\left[t' - \left(t - \frac{|\Sigma - \Sigma_0(t')|}{c}\right)\right]}{|\Sigma - \Sigma_0(t')|} dt' \end{aligned}$$

$$\text{Veamos que } \delta(f(x)) = \frac{\delta(x - f^{-1}(0))}{|f'(f^{-1}(0))|}$$

si  $f$  tiene una sola raíz

Basta ver que

$$\int g(x) \delta(f(x)) dx = \int g(f^{-1}(u)) \delta(u) \frac{du}{|f'(f^{-1}(u))|} = \frac{g(f^{-1}(0))}{|f'(f^{-1}(0))|}$$

$$u = f(x)$$

$$du = |f'(x)| dx$$

$$\text{pues } \delta(x) = \delta(-x)$$

$$\int \delta(x) dx = 1$$

$$\int \delta(\alpha x) dx = \int \delta(x) \frac{dx}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\text{Tenemos } f(t') = t' - t + \frac{|\Sigma - \Sigma_0(t')|}{c} = 0$$

$$\Rightarrow c(t-t') = |\Sigma - \Sigma_0(t')|$$

La señal que sale en  $t'$  de  $\Sigma_0(t')$  llega a  $r$  después de  $\Delta t = \frac{|\Sigma - \Sigma_0(t')|}{c}$ . Calculemos la derivada  $\dot{\Sigma}_0(t')$

$$f'(t') = \frac{\partial f}{\partial t'} = 1 + \frac{\Sigma - \Sigma_0(t')}{|\Sigma - \Sigma_0(t')|} \cdot \left( -\frac{v(t')}{c} \right)$$

$$\Rightarrow |f'(t')| = 1 - \hat{n}(t') \cdot \beta(t')$$

Reemplazando

$$\varphi(\Sigma, t) = \int q \frac{\delta(t' - f^{-1}(0))}{|\Sigma - \Sigma_0(t')|(1 - \hat{n} \cdot \beta)} dt' =$$

$$= \frac{q}{|\Sigma - \Sigma_0(t')|(1 - \hat{n} \cdot \beta)} \Big|_{t'=\text{ret}}$$

$$\text{Teniendo } R = |\Sigma - \Sigma_0(t')|$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(\Sigma, t) = \frac{q}{R(1 - \hat{n} \cdot \beta)} \Big|_{t'=\text{ret}}}$$

Por el mismo camino

$$\boxed{A(\Sigma, t) = \frac{q}{R(1 - \hat{n} \cdot \beta)} \beta \Big|_{t'=\text{ret}}}$$

tiempo retardado:  
dados  $(t, \Sigma)$ , el tiempo  
que cumple  
 $c(t-t') = |\Sigma - \Sigma_0(t')|$

Potenciales  
de Liénard-Wiechert

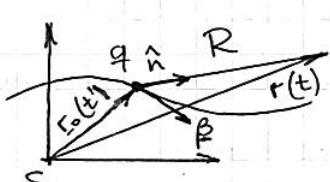
$\hat{n}$  → es el versor en la dirección

pto. fuente (en  $t'$ ) - pto. campo (en  $t$ ).

$\beta \rightarrow \frac{v}{c}$  de la fuente en  $t'$ .

Calculemos los campos  $E$  y  $B$ .

Tenemos



$$\begin{cases} \underline{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \\ \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \end{cases}$$

pero  $t'$  ( $\gamma \Sigma_0$ ) son funciones de  $\Sigma$  y  $t$ . Se obtiene \*

$$\underline{E} = \left. \frac{q(\hat{n} - \beta)}{\gamma^2(1 - \beta \cdot \hat{n})^3 R^2} \right|_{t' \text{ ref}} + \frac{q}{c} \left. \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^3 R} \right|_{t' \text{ ref}}$$

$\gamma$   $\underline{B} = \hat{n} \times \underline{E} \Big|_{t' \text{ ref}}$

campo de velocidades      campo de radiación

Notar que  $\hat{n}, \beta, \gamma$  y  $R$  están evaluados en  $t'_{\text{ref}} = t' + t_p$

$$c(t - t') = |\Sigma - \Sigma_0(t')|$$

\* Hay que usar  $R = |\Sigma - \Sigma_0(t')| = c(t - t')$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\Sigma - \Sigma_0(t')}{|\Sigma - \Sigma_0(t')|} \cdot \left( -\frac{d\Sigma_0}{dt'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} = -\hat{n} \cdot \underline{v} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{n} \cdot \beta}$$

Además

$$\Rightarrow \nabla t' = -\frac{1}{c} \nabla R(t') = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial R}{\partial t'} \nabla t' + \hat{n} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla t' = -\frac{\hat{n}}{c(1 - \hat{n} \cdot \beta)}$$

Tenemos dos términos en los campos: el primero depende de  $\Sigma_0$  y  $\beta$  y decréce como  $1/R^2$ .

El segundo depende de  $\beta$  y decréce como  $1/R$ . Este término está presente solo si el movimiento es acelerado, y lleva energía al infinito  $\Rightarrow$  campo de radiación.

Tenemos también dos tipos de efectos relativistas: los

que tienen que ver con el signo formado por  $\beta$  y  $\hat{\beta}$  (numerador), y los que tienen que ver con la transf. del sist. de referencia de la carga al del observador y van como  $1 - \beta \cdot \hat{u}$  (denominador).

Veamos las prop. del campo de velocidades:

+ Para una carga en reposo:

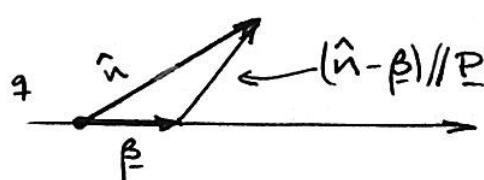
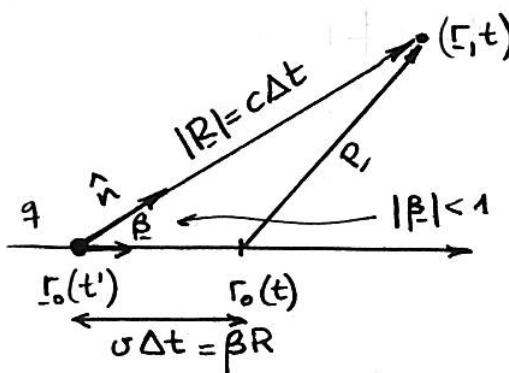
$$\underline{E} = \frac{q\hat{u}}{R^2} \quad \text{Ley de Coulomb}$$

+ Para una carga en mov. uniforme:

$$\underline{E} = \frac{q(\hat{u} - \beta)}{c^2(1 - \beta \cdot \hat{u})^3 R^2} \Big|_{t_{\text{ret}}}$$

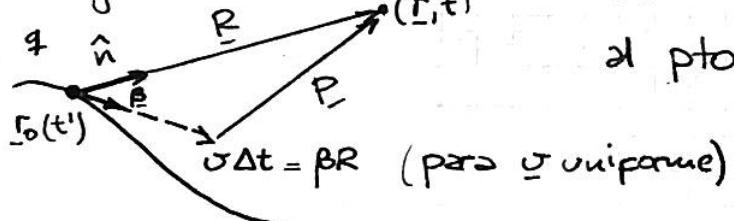
Veamos el vector

$$\begin{aligned} R(\hat{u} - \beta) &= R - R\beta \\ &= R - R \frac{v}{c} = \\ &= R - v\Delta t = P \end{aligned}$$



Luego el campo es radial con la posición de la carga en t.

+ En general



El campo es radial respecto al pto. en el que estaría la carga con v uniforme.

Veamos ahora el campo de aceleración:

Tenemos

$$\underline{E}_{\text{rad}} = \frac{q \hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{c (1 - \beta \cdot \hat{n})^3 R} \Big|_{\text{tret}}$$

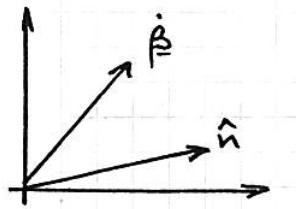
$$\gamma \quad \underline{B}_{\text{rad}} = \hat{n} \times \underline{E}_{\text{rad}}$$

$\Rightarrow \underline{E}_{\text{rad}}, \underline{B}_{\text{rad}}$  y  $\hat{n}$  son perpendiculares.

Para bajas velocidades ( $\beta \approx 0$ )

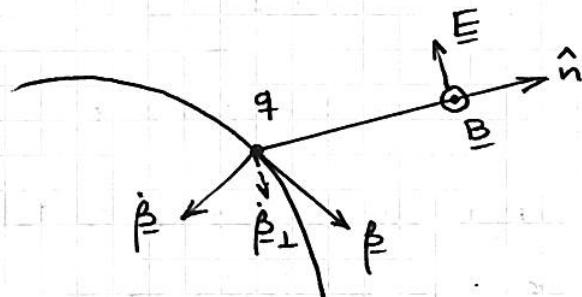
$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{c} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta})}{R} \Big|_{\text{tret}}}$$

El campo eléctrico está polarizado en el plano que contiene a  $\dot{\beta}$  y  $\hat{n}$ . De hecho



$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta}) = -[\dot{\beta} - (\dot{\beta} \cdot \hat{n}) \hat{n}]$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{\text{rad}} \propto -\dot{\beta}_\perp$$



### Potencia irradiada

Tenemos el flujo instantáneo de energía

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \times \underline{B} = \frac{c}{4\pi} \underline{E}_{rad} \times (\hat{n} \times \underline{E}_{rad})$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{S} = \frac{c}{4\pi} |\underline{E}_{rad}|^2 \hat{n}}$$

luego la potencia irradiada es

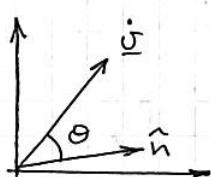
$$dP = S \cdot dA \quad \text{y} \quad dA = R^2 d\Omega \hat{n}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = R^2 S \cdot \hat{n} = \frac{c}{4\pi} |R E_{rad}|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \left| \frac{\hat{n} \times (\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^3} \right|^2}$$

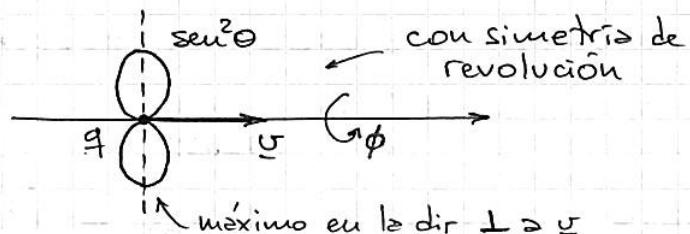
Para bajas velocidades

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} |\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta})|^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\dot{\omega}|^2 \sin^2 \theta$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\dot{\omega}|^2 \sin^2 \theta}$$

Supongamos  $\beta \parallel \dot{\beta}$  (partícula acelerada en la dirección de movimiento)  $\Rightarrow$  el patrón de radiación es:



Integrando sobre el sólido

$$\boxed{P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} |\dot{\omega}|^2}$$

Fórmula de Larmor

En el caso relativista, debemos tener cuidado pues  $\frac{dP}{d\Omega}$  es energía irradiada por unidad de área y de tiempo en el sist. del observador, y queremos la potencia irradiada por la fuente (i.e., por u. de tiempo en el sist. de la fuente).

Tenemos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dE}{dt d\Omega} = R^2 S \cdot \hat{n}$$

y queremos

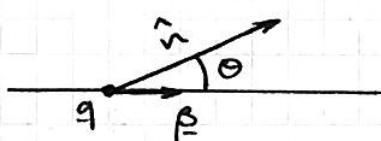
$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{dE}{dt d\Omega} \frac{dt}{dt'} = R^2 \leq \hat{n} \frac{dt}{dt'} = R^2 \leq \hat{n} (1 - \beta \cdot \hat{n})$$

$\Rightarrow$  la potencia irradiada por la partícula es

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\hat{n} \times (\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}|^2}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^5} (1 - \beta \cdot \hat{n})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\hat{n} \times (\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}|^2}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^5}}$$

Volviendo al ejemplo con  $\dot{\beta} \parallel \beta$  (mov. rectilíneo)

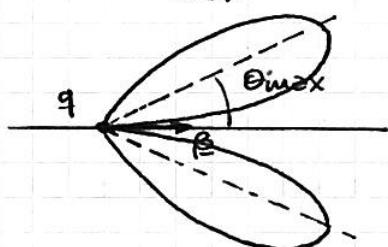


$$\begin{aligned} \frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\hat{n} \times (\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}|^2}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^5} = \\ &= \frac{q^2}{4\pi c} |\dot{\beta}|^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \end{aligned}$$

Tomemos  $x = \cos \theta$  y busquemos máximos de

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}$$

$$\text{Sale } x_{\max} = \cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta} \xrightarrow[\beta \rightarrow 1]{} 1$$



La radiación queda confinada a un cono delgado en la dirección de movimiento.

(cuando es por frenado x colisiones Coulomb  
 $\rightarrow$  Bremsstrahlung)

### Radiación de fuentes localizadas

Consideremos una fuente localizada y veamos los campos de radiación lejos (como caen como  $1/R$  serán los dominantes). Haciendo análisis de



Fourier

$$\begin{cases} \rho(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}') e^{-i\omega t} \\ \underline{f}(\underline{r}, t) = \underline{f}(\underline{r}') e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Dado  $\underline{A}$ , podemos obtener  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ .

Luego, lejos de las fuentes  $\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \underline{j}$

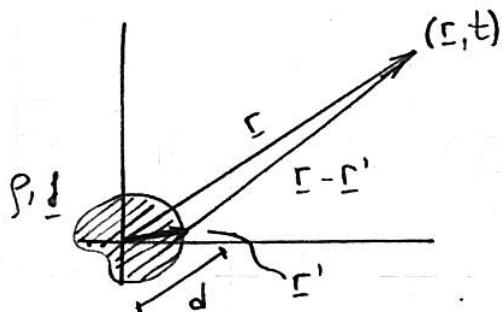
$$\Rightarrow -\frac{i\omega}{c} \underline{E} = \nabla \times \underline{B} \quad \text{y} \quad \underline{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \underline{B}$$

La sol. de  $\underline{A}$  está dada por los potenciales retardados

$$\underline{A} = \frac{1}{c} \int d^3 r' d^3 t' \underline{f}(\underline{r}', t') \frac{\delta[t' - (t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})]}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \underline{f}(\underline{r}') e^{-i\omega(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})} \quad \boxed{\text{retardo}} \quad \boxed{\text{Tiempo diferente}} \quad \boxed{\text{tret para}} \quad \boxed{\text{cada pto. de}} \quad \boxed{\text{la fuente.}}$$

Consideremos:



para  $d \ll r \ll \lambda$  tenemos la región "cerca", donde vale cuasi estacionario.

Veamos  $d \ll \lambda \ll r$  (región de campo lejano o de radiación).

Tomando desarrollo multipolar de

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \int d^3 r' \underline{f}(\underline{r}') \frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

tenemos que desarrollar

$$\frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{4\pi i k}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(kr') h_\ell^{(1)}(kr_s) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta' \phi') Y_{\ell m}(\theta \phi)$$

con  $f_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$ ,  $h_\ell^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} [J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) + i N_{\ell+\frac{1}{2}}(x)]$

Esto lleva a un desarrollo en términos de func. esféricas de Bessel y armónicos esféricos. Pero veamos los términos de orden más bajo por otro camino.

Aproximando

$$\frac{1}{|\Sigma - \Sigma'|} \approx \frac{1}{|\Sigma|} = \frac{1}{r}$$

y en  $e^{ik|\Sigma - \Sigma'|}$   $|\Sigma - \Sigma'| \approx r - \hat{n} \cdot \Sigma' + \dots$

Luego  $e^{ik|\Sigma - \Sigma'|} \approx e^{ikr - i\hat{n} \cdot \Sigma'}$

$$\Rightarrow A(\Sigma, t) = \frac{e^{+i(kr-wt)}}{cr} \int \underline{J}(\Sigma') e^{-i\hat{n} \cdot \Sigma'} d^3 r'$$

(1) \*Hasta acá solo usando  
 $r \gg d$

Luego para  $d \ll \lambda$  podemos

tomar  $e^{-i\hat{n} \cdot \Sigma'} \approx 1 - ik\hat{n} \cdot \Sigma' + \dots$

Tenemos  $|k\hat{n} \cdot \Sigma'| \ll 1$

"  
kd  $\ll 1$

ó  $d \ll \frac{\lambda}{2\pi}$

Término dipolar eléctrico:

Tomemos, a orden cero

$$A(\Sigma, t) \approx \frac{e^{+i(kr-wt)}}{cr} \int \underline{J}(\Sigma') d^3 r'$$

Veamos

$$\int J_i dV = \int (\partial_e r_i) j_e dV = \int \partial_e (\partial_e r_i) dV - \int r_i \partial_e j_e dV$$

pero por la ec. de continuidad  $\nabla \cdot \underline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{J} = iwp$

$$\Rightarrow A(\Sigma, t) \approx -\frac{e^{+i(kr-wt)}}{cr} i \omega \underbrace{\int \Sigma' \rho(\Sigma') d^3 r'}_P$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(0)}(\Sigma, t) = -i k P \frac{e^{i(kr-wt)}}{r}$$

Luego

$$\underline{B}^{(0)} = \nabla \times \underline{A}^{(0)} = k^2 (\hat{n} \times P) \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

pero  $\lambda \ll r \Rightarrow \frac{1}{kr} \ll 1$   
(leyes dominan el campo de radiación que cae  $\propto 1/r$ )

$$\Rightarrow \underline{B}^{(0)}(\Sigma, t) \approx k^2 (\hat{n} \times P) \frac{e^{i(kr-wt)}}{r}$$

$$\gamma \quad \underline{E}^{\Theta}(r, t) = \frac{i}{k} \nabla \times \underline{B}$$

$$\Rightarrow \underline{E}^{\Theta} = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left\{ k^2 (\hat{n} \times \underline{P}) \times \hat{n} + [3\hat{n}(\hat{n} \cdot \underline{P}) - \underline{P}] \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \right\}$$

γ la parte de radiación es

$$\boxed{\underline{E}^{\Theta}(r, t) = k^2 (\hat{n} \times \underline{P}) \times \hat{n} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} = \underline{B} \times \hat{n}}$$

Calculemos la potencia irradiada. Teníamos

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \underline{S} \cdot \hat{n}$$

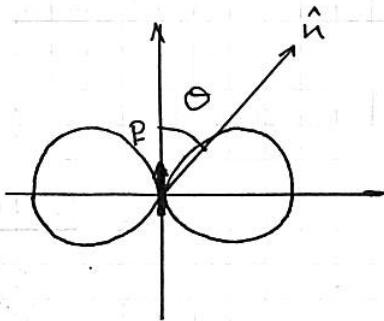
y en el caso complejo nos interesa

$$\langle \underline{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\underline{E} \times \underline{B}^*) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[(\underline{B} \times \hat{n}) \times \underline{B}^*] = \frac{c}{8\pi} |\underline{B}|^2 \hat{n} =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} |\hat{n} \times \underline{P}|^2 \hat{n}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} |\hat{n} \times \underline{P}|^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} |\underline{P}|^2 \sin^2 \theta$$



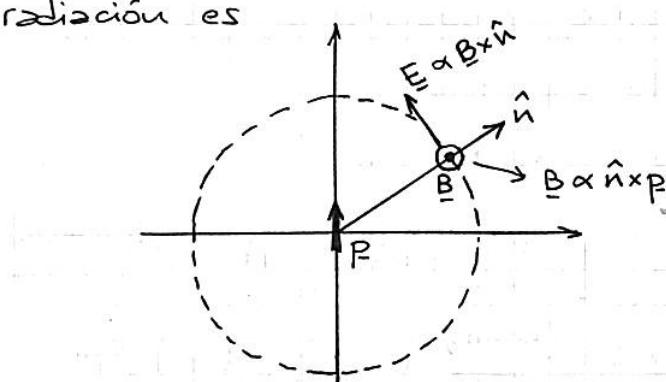
e integrando sobre el angulo sólido

La polarización del campo

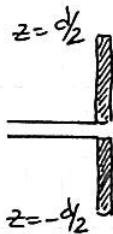
de radiación es

$$P = \frac{ck^4}{3} |\underline{P}|^2 \text{ pot. irradiada } \propto \omega^4$$

(en el visible, la radiación en el rojo es menor y en el violeta mayor; comparar con scattering de Rayleigh).



Ejemplo: antena.

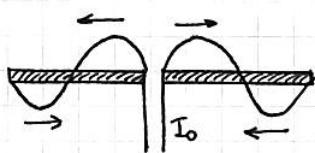


Tenemos ceros de  $j$  en los extremos. En general.

podemos descomponer  $\frac{k\hat{d}(1-\frac{|z|}{d})}{z}$

$$j = j_0 \operatorname{sen} [k(\frac{d}{2} - |z|)] e^{-iwt} \delta(x) \delta(y) \hat{z}$$

Esta expresión puede reemplazarse en (1) e integrar para obtener  $A$ . Pero veamos la radiación dipolar en el caso  $k\hat{d} \ll 1$ . Tenemos



$$j \approx I_0 \left( \frac{2|z|}{d} + 1 \right) e^{-iwt} \delta(x) \delta(y) \hat{z}$$

y de la ec. de continuidad

$$\begin{aligned} i\omega\rho = \partial_z j_z &\Rightarrow \rho = iI_0 \frac{2}{d\omega} \frac{z}{|z|} e^{-iwt} \delta(x) \delta(y) \\ &= \rho(r) e^{-iwt} \end{aligned}$$

donde  $\rho(r) = \frac{i^2 I_0}{\omega d} \operatorname{sgn}(z) \delta(x) \delta(y)$

$$\begin{aligned} \text{Luego } P &= \int r' \rho(r') d^3r' = \int_{-d/2}^{d/2} \hat{z} z \operatorname{sgn}(z) \frac{i^2 I_0}{\omega d} dz = \\ &= \hat{z} \frac{i^2 I_0}{\omega d} \int_0^{d/2} z dz = \frac{i I_0 d}{2 \omega} \hat{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} \frac{I_0^2 d^2}{4\omega^2} \sin^2 \theta = \frac{I_0^2 k^2 d^2}{32\pi C} \sin^2 \theta$$

$$\boxed{P = \frac{I_0^2 k^2 d^2}{12C}} \quad \leftarrow \rightarrow I_0 \text{ fijo crece como } \omega^2$$

Términos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico

Al orden siguiente en la expansión

$$e^{-ik\hat{n}\cdot\hat{r}'} \approx 1 - ik\hat{n}\cdot\hat{r}' + \dots$$

tenemos

$$\begin{aligned} A(r, t) &\approx \frac{1}{C} \int j(r') (-ik\hat{n}\cdot\hat{r}') d^3r' \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} \\ &= -\frac{ik e^{i(kr-wt)}}{Cr} \int j(r') (\hat{n}\cdot\hat{r}') d^3r' \end{aligned}$$

Veamos ahora

$$\int \hat{f}_i n_e r_e dV = n_e \underbrace{\left( \int f_i r_e dV \right)}_{\text{tensor}} =$$

$$= n_e \left[ \frac{1}{2} \underbrace{\int (f_i r_e - f_e r_i) dV}_{\text{antisimétrico}} + \frac{1}{2} \underbrace{\int (f_i r_e + f_e r_i) dV}_{\text{simétrico}} \right]$$

Para la parte antisimétrica, definiendo

$$\underline{m} = \frac{1}{2c} \int (\underline{r}' \times \underline{f}) d^3 r' \quad \begin{matrix} \text{Momento dipolar} \\ \text{magnético} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}^{(M)}(\underline{r}, t) = ik \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} (\hat{n} \times \underline{m})}$$

pues

$$\hat{n} \times \underline{m} = \frac{1}{2c} \varepsilon_{ielp} n_e \overbrace{\int \varepsilon_{pqr} r_q f_r dV}^{m_p} = \frac{1}{2c} \varepsilon_{pil} \varepsilon_{pqr} n_e \int r_q f_r dV$$

$$= \frac{1}{2c} n_e \int (f_e r_i - r_i f_e) dV$$

Falta determinar  $\underline{B}$  y  $\underline{E}$  para el término de radiación dipolar magnética. Tenemos que calcular

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad \text{y} \quad \underline{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \underline{B}.$$

Pero notar que  $\underline{A}^{(M)}$  se parece a  $\underline{B}^{(0)}$  (dipolar eléctrico) tomando el cambio  $\underline{m} \rightarrow p \Rightarrow \underline{B}^{(M)}$  es proporcional a  $\underline{E}^{(0)}$

$$\underline{B}^{(M)} = \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} \left\{ k^2 (\hat{n} \times \underline{m}) \times \hat{n} + [3\hat{n}(\hat{n} \cdot \underline{m}) - \underline{m}] \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \right\}$$

y la parte de radiación es

$$\boxed{\underline{B}^{(M)}(\underline{r}, t) = k^2 (\hat{n} \times \underline{m}) \times \hat{n} \frac{e^{i(kr-wt)}}{r}}$$

Para el campo eléctrico obtenemos

$$\underline{E}^{(M)} = -k^2 (\hat{n} \times \underline{m}) \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

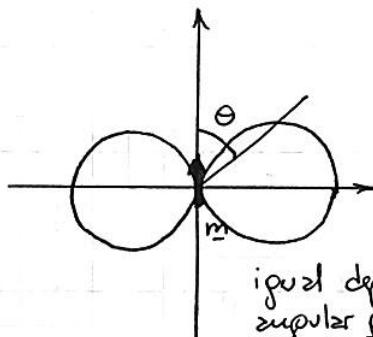
y la parte de radiación es

$$E^{(M)}(\Sigma, t) = -k^2 (\hat{n} \times \underline{m}) \frac{e^{i(kr-wt)}}{r}$$

La potencia irradiada ahora es

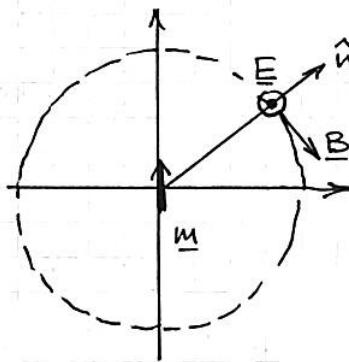
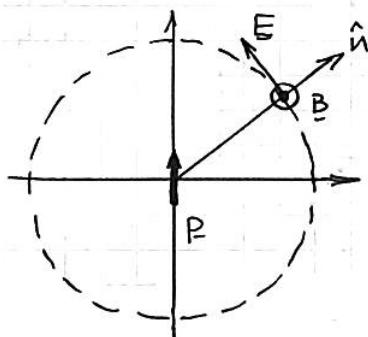
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} |\hat{n} \times \underline{m}|^2$$

$$\circ \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} |\underline{m}|^2 \sin^2 \theta$$



igual dependencia angular que el dipolo eléctrico.

pero la polarización es diferente



Veamos finalmente la parte simétrica (término cuadripolar eléctrico): tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int (j_i r_e + j_e r_i) dV &= \frac{1}{2} \int (\partial_k r_i) j_k r_e dV + \frac{1}{2} \int j_e r_i dV = \\ &= \cancel{\frac{1}{2} \int \partial_k (r_i j_k r_e) dV} - \frac{1}{2} \int r_i r_e \cancel{\partial_k j_k} dV - \cancel{\frac{1}{2} \int j_k r_i \delta_{kk}} + \cancel{\frac{1}{2} \int j_e r_i dV} \end{aligned}$$

pero  $\nabla \cdot j = iw\rho$

$$\Rightarrow A_i^{(E)}(\Sigma, t) = + \frac{ik e^{i(kr-wt)}}{2cr} i\omega \underbrace{\left( \int \rho(\Sigma') r'_i r'_e d^3 r' \right)}_{C_{ie}}$$

y tenemos

$$Q_{ij} = 3C_{ij} - C_{ee} \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow A_i^{(E)}(\Sigma, t) = - \frac{k^2}{2} \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} \frac{1}{3} (Q_{ij} + C_{ee} \delta_{ij}) u_j$$

$$\boxed{\underline{A}^{(E)}(\underline{r}, t) = -\frac{k^2}{6} \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} (\underline{\underline{Q}} + \text{tr}(\underline{\underline{Q}}) \underline{\underline{I}}) \cdot \hat{n}}$$

tensor identidad  $\underline{\underline{I}}$

La parte solo de radiación de los campos  $\underline{E}$  y  $\underline{B}$  para el término cuadrupolar eléctrico las podemos calcular fácilmente haciendo

$$\begin{aligned} \underline{B}^{(E)} &= \nabla \times \underline{A} = ik \hat{n} \times \underline{A} \\ \Rightarrow \underline{B}^{(E)}(\underline{r}, t) &= -\frac{ik^3}{6} \hat{n} \times (\underline{\underline{Q}} \cdot \hat{n}) \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} \end{aligned}$$

$$y \quad \underline{E}^{(E)} = \frac{i}{k} \nabla \times \underline{B} = \underline{B}^{(E)} \times \hat{n}$$

$$\Rightarrow \underline{E}^{(E)}(\underline{r}, t) = -\frac{ik^3}{6} [\hat{n} \times (\underline{\underline{Q}} \cdot \hat{n})] \times \hat{n} \frac{e^{i(kr-wt)}}{r}$$

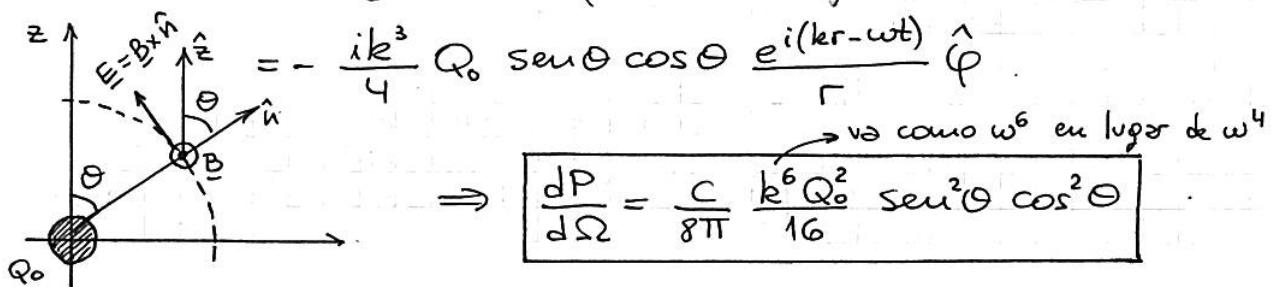
La potencia irradiada es

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^6}{288\pi} |\hat{n} \times (\underline{\underline{Q}} \cdot \hat{n})|^2}$$

Ejemplo: consideremos una esfera con carga  $Q_0$  que oscila con frecuencia  $\omega$ . Por simetría no tiene momentos dipolares. Tenemos

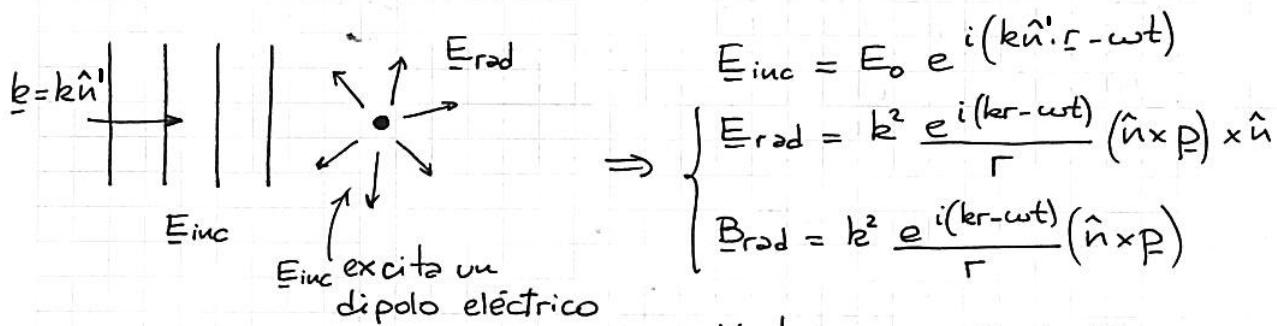
$$\underline{\underline{Q}} = Q_0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + Q_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = -\frac{ik^3}{6} Q_0 \hat{n} \times \left( -\frac{1}{2} \hat{n} + \frac{3}{2} \hat{\phi} \right) \frac{e^{i(kr-wt)}}{r} =$$



## Scattering de Rayleigh

Consideremos una onda plana monocromática que incide sobre una molécula:



Notar que  $E_{\text{rad}}, B_{\text{rad}}$  se propagan en todas las direcciones.

La sección eficaz de scattering se define como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega}}{\frac{dP_{\text{inc}}}{d\Omega}} = \frac{\frac{c\rho^2}{8\pi} \frac{k^4}{\rho^2} |(\hat{n} \times P) \times \hat{n}|^2}{\frac{c}{8\pi} |E_0|^2} = \frac{k^4}{\epsilon_0^2} |(\hat{n} \times P) \times \hat{n}|^2$$

Ejemplo: Esfera dielectrica en un campo  $E$



$$P = \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \alpha^3 E_0$$

$$\text{Si } E = E_0 e^{i\omega t} \Rightarrow P = P_0 e^{i\omega t}$$

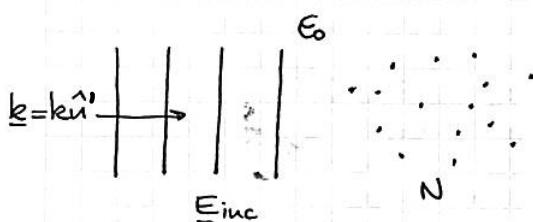
$$\text{Y } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \alpha^6}{\epsilon_0^2} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)^2 |(\hat{n} \times E_0) \times \hat{n}|^2$$

Definiendo  $E_0 = E_0 \hat{e}$  dir. de polarización (puede ser complejo)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \alpha^6}{\epsilon_0^2} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)^2 |(\hat{n} \times \hat{e}) \times \hat{n}|^2}$$

sección eficaz de scattering de una esfera dielectrica

Consideremos ahora el problema más general en el que tenemos  $N$  moléculas en un medio con permitividad eléctrica  $\epsilon_0$ .



Las moléculas adquieren momento dipolar  $p = \chi E$

$$\Rightarrow D = E + 4\pi P = \underbrace{(1 + 4\pi \chi)}_{E = \epsilon_0 + \delta\epsilon} E$$

Podemos pensar que en las moléculas tenemos

$$\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon \quad \text{con} \quad \delta\epsilon = 4\pi \chi \sum_{i=1}^N \delta(\epsilon - \epsilon_i)$$

De las ec. de Maxwell sin fuentes

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B$$

y de  $\nabla \times H = \nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$   $\Rightarrow \nabla \times \nabla \times E \epsilon_0 = -\frac{\epsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$  (1)

De  $\nabla \cdot D = 0 \Rightarrow \nabla^2 D = -\nabla \times \nabla \times D$  (2)

Sumando (1) y (2)

$$\boxed{\left( \nabla^2 - \frac{\epsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) D = -\nabla \times \nabla \times (D - \epsilon_0 E)}$$

↓ fuente

Tenemos una ec

de ondas inhomogéneas.

La solución es

$$D = \overset{\text{sol. homogénea}}{D^{(0)}} + \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\epsilon - \epsilon'|}}{|\epsilon - \epsilon'|} \nabla \times \nabla \times (D - \epsilon_0 E) d^3 r'$$

Lejos de la región de scattering, podemos aproximar

$$1/|\epsilon - \epsilon'| \approx \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad k|\epsilon - \epsilon'| \approx kr - k\hat{n} \cdot \epsilon'$$

Para  $\epsilon_0 = 1$   $D - E = 4\pi P$

$\Rightarrow$  la fuente es el scattering por los dipolos inducidos

$$\nabla \times = i \underline{k} \times = i \underline{k} \hat{n} \times$$

Además,  $\underline{D} = (\epsilon_0 + \delta\epsilon) E$  con  $\delta\epsilon \ll \epsilon$ .

$$\Rightarrow D - \epsilon_0 E = \delta \epsilon E = \frac{\delta \epsilon}{\epsilon_0 + \delta \epsilon} D \underset{\uparrow}{\approx} \frac{\delta \epsilon}{\epsilon_0} D^{(0)}$$

2 orden was  
beyo en  $\delta \epsilon$

Veamos solo la parte

de radiación (scattering)

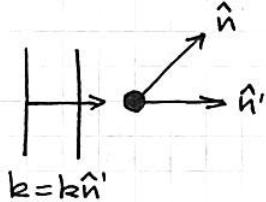
$$\underline{D} = \underline{D}^{(o)} + \underline{D}_{rad}$$

$$\begin{aligned} \text{con } D_{\text{rad}} &\approx \frac{k^2 e^{i(kr-wt)}}{4\pi r} \int e^{-ik\hat{n}\cdot\Gamma'} \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0} (\hat{n} \times D^{(e)}(\Gamma')) \times \hat{n} d^3\Gamma' = \\ &= \frac{k^2 e^{i(kr-wt)}}{4\pi r} (\hat{n} \times \epsilon_0) \times \hat{n} \int \delta\epsilon(\Gamma') e^{ik\delta\hat{n}\cdot\Gamma'} d^3\Gamma' \end{aligned}$$

$$\text{usando} \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{\text{inc}}(\vec{r}) = D^{(0)} = D_0 e^{i k \hat{n} \cdot \vec{r}} \\ E_{\text{inc}}(\vec{r}) = E_0 e^{i k \hat{n} \cdot \vec{r}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} D_{\text{inc}}(\vec{r}, t) = D_{\text{inc}}(\vec{r}) e^{-i \omega t} \\ D_0 = E_0 E_0 \end{array}$$

Notar que  $\delta\hat{n} = \hat{n}' - \hat{n}$  es la dif. entre el versor

con la dirección de propagación de la onda plana incidente, y el versor con la dir. de scattering.



Usando  $\delta E(\Gamma) = 4\pi \chi \sum_{i=1}^N \delta(\Gamma - \Gamma_i)$   
 y reemplazando en  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi)^2} |(\hat{n} \times \hat{e}) \times \hat{n}|^2 (4\pi)^2 |x|^2 \left| \sum_{i=1}^N \int e^{-ik \cdot \delta \hat{n} \cdot \vec{r}_i} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_i) d^3 r_i \right|^2$$

$$= k^4 |\chi|^2 |(\hat{n} \times \hat{e}) \times \hat{n}|^2 \left| \sum_i e^{-ik\delta\hat{n} \cdot \varepsilon_i} \right|^2 =$$

$$= k^4 |\chi|^2 |(\hat{n} \times \hat{e}) \times \hat{n}|^2 \sum_{i,j=1}^N e^{ik\delta\hat{n} \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_j)}$$

↑ usando  $|A|^2 = A \cdot A^*$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = N k^4 |\chi|^2 |(\hat{n} \times \hat{e}) \times \hat{n}|^2$$

Para moléculas distribuidas al azar, los términos con  $i \neq j$  dan una contribución despreciable.

(Comparar con una red  $r_i = 2\pi i$   
 $\Rightarrow r_i - r_j = 2\pi m!$ )

Para un gas diluido con

$$N \text{ moléculas} \quad \epsilon = 1 + 4\pi N \chi$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi N}$$

$$\gamma \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{16\pi^2 N} (\epsilon - 1)^2 |(\hat{n} \times \hat{e}) \times \hat{n}|^2$$

Integrando sobre el sólido:

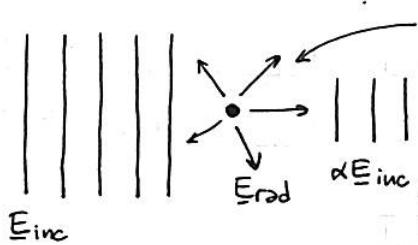
$$\sigma = \frac{k^4}{6\pi N} (\epsilon - 1)^2$$

$$\text{Usando } n = \sqrt{\epsilon} \approx \sqrt{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \epsilon \approx n^2$$

$$\gamma \text{ para } n-1 \ll 1 \quad (\epsilon - 1)^2 = (n^2 - 1)^2 = (n-1)^2(n+1)^2 \approx 4(n-1)^2$$

$$\Rightarrow \sigma \approx \frac{2k^4}{3\pi N} (n-1)^2 \quad \text{Coeficiente de absorción}$$



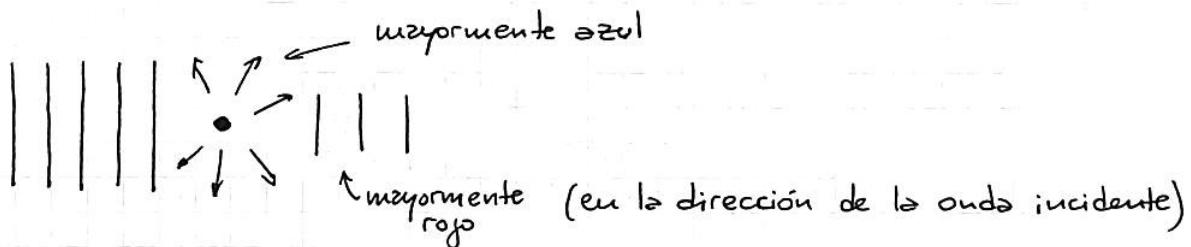
$\sigma$  me dice que fracción de la potencia en la onda incidente es absorbida y re-emitida (dispersada) en todas direcciones (scattering).

$\sigma \propto k^4$ : en el visible, el rojo es absorbido menos y el violeta más. Esto explica:

+ el cielo azul

+ el sol (y la luna) rojizo al amanecer o anochecer

- + por qué el sol se vuelve más rojo luego de erupciones volcánicas.
- + por qué no hay que tomar sol al mediodía.
- + las diferencias en la radiación recibida en verano e invierno.



La atenuación de la intensidad de la onda incidente es

$$\frac{dI}{dx} = -\sigma I$$

Deberíamos considerar  $\sigma = \sigma(x)$  (pues en la atmósfera  $N = N(x)$ ; decréce exponencialmente para una atmósfera isotérmica). Pero consideremos  $N$  constante ( $\approx$  el valor medio). Luego

$$\frac{dI}{I} = -\sigma dx$$

$$\Rightarrow I(x) = I_0 e^{-\sigma x}$$

Tomando

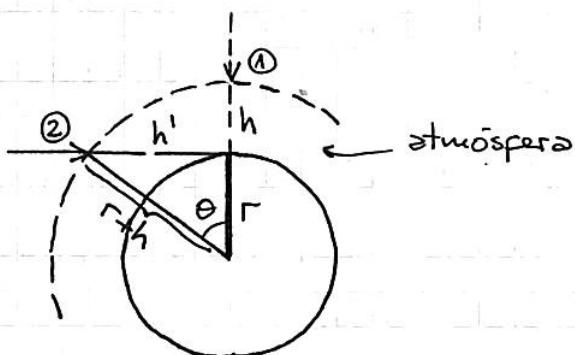
$$\left\{ \begin{array}{l} n-1 \approx 2.8 \cdot 10^{-4} \\ N \approx 2.7 \cdot 10^{25} \text{ /m}^3 \\ k^4 = \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2k^4}{3\pi N} (n-1)^2 \approx \frac{9.6 \cdot 10^{-31} \text{ m}^3}{\lambda^4}$$

Para el rojo  $\lambda = 6.5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \sigma_{\text{rojo}} \approx 5.4 \cdot 10^{-6} \text{ /m}$

Para el violeta  $\lambda = 4.1 \cdot 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \sigma_{\text{violeta}} \approx 3.4 \cdot 10^{-5} \text{ /m}$

Tenemos dos casos:



Consideremos solo la atenuación por la tropósfera ( $h \approx 15\text{ km}$ ) en la aproximación de  $N$  uniforme:

Caso ①: para el rojo  $\frac{I}{I_0} = e^{-\sigma_{\text{rojo}} h} \approx 0.92$

para el violeta  $\frac{I}{I_0} = e^{-\sigma_{\text{vio}} h} \approx 0.60$

Caso ②: Calculemos  $h'$ .  $r \approx 6300\text{ km}$

$$\cos \theta = \frac{r}{r+h} = \frac{6300}{6315} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \theta \approx \sqrt{2 \left( 1 - \frac{6300}{6315} \right)} \approx 0.06^\circ$$

$$h' = (r+h) \operatorname{sen} \theta \approx (r+h) \theta \approx 435\text{ km}$$

$\Rightarrow$  para el rojo  $\frac{I}{I_0} = e^{-\sigma_{\text{rojo}} h'} \approx 0.095$

para el violeta  $\frac{I}{I_0} = e^{-\sigma_{\text{vio}} h'} \approx 3.7 \cdot 10^{-7}$

Notar el corrimiento al rojo en el amanecer y atardecer.