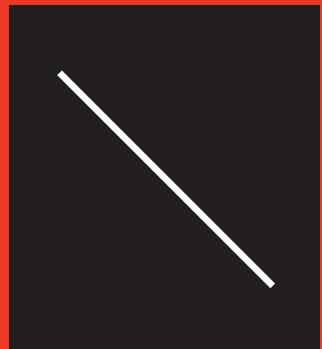


RELATIVIDAD ESPECIAL

A. P. FRENCH

MIT PHYSICS COURSE

(*Massachusetts Institute of Technology*)



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Relatividad especial

A. P. French

PROFESOR DE FÍSICA DEL MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

RELATIVIDAD ESPECIAL

CURSO DE FÍSICA DEL M. I. T.



Editorial Reverté, S. A.
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título de la obra original:

Special Relativity

Edición original en lengua inglesa publicada por:

W. W. Norton & Company, Inc., New York, USA

Copyright © by The Massachusetts Institute of Technology

Versión española por:

Prof. J. Aguilar Peris

Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Con la colaboración de:

Dr. D. J. Doria Rico

Profesor adjunto de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

Tel: (34) 93 419 33 36

Fax: (34) 93 419 51 89

E-mail: reverté@reverte.com

Internet: <http://www.reverte.com>

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1988

REIMPRESIÓN: Junio de 2002

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN: 84-291-4100-6 Obra completa

ISBN: 84-291-4097-2 Tomo I

ISBN: 978-84-291-9060-1 eBook

Depósito legal: SE-2200-2002

Impresión: Publicaciones Digitales, S. A. (Sevilla)
www.publidisa.com – (+34) 95.458.34.25.

Índice analítico

Prefacio ix

1 Desviaciones de la dinámica newtoniana	3
<i>Newton</i> 5	
«Velocidad límite» 6	
<i>Fotones</i> 12	
<i>La relación energía-cantidad de movimiento para los fotones</i> 13	
<i>Materia y radiación: la inercia de la energía</i> 17	
<i>Energía, cantidad de movimiento y masa</i> 22	
¿Es correcta la nueva dinámica? 26	
<i>Movimiento bajo una fuerza constante</i> 28	
«La caja de Einstein desquiciada» 29	
<i>Algunas observaciones</i> 31	
<i>PROBLEMAS</i> 32	
2 Perplejidad ante la propagación de la luz	41
<i>La naturaleza de la luz</i> 42	
<i>El éter luminífero</i> 43	
<i>Aberración estelar</i> 45	
<i>Experimento modificado sobre la aberración</i> 49	
<i>Medida de Fizeau del coeficiente de arrastre</i> 51	
<i>Preludio al experimento de Michelson-Morley</i> 54	
<i>El experimento de Michelson-Morley</i> 57	
<i>Observaciones finales</i> 63	
<i>PROBLEMAS</i> 65	
3 Einstein y las transformaciones de Lorentz-Einstein	71
<i>Preámbulo: la hipótesis de contracción</i> 71	
<i>Einstein reafirma la relatividad</i> 73	
<i>La relatividad según Galileo y Newton</i> 74	

<i>La transformación de las leyes de Newton</i>	77
<i>Einstein y la universalidad de c</i>	79
<i>El segundo postulado y la evidencia que aporta la observación</i>	81
<i>La relatividad de la simultaneidad</i>	83
<i>Las transformaciones de Lorentz-Einstein</i>	85
<i>Algo más acerca de las transformaciones de Lorentz</i>	90
<i>Diagramas de Minkowski: espacio-tiempo</i>	92
<i>El invariante espacio-tiempo</i>	93
<i>PROBLEMAS</i>	95
4 La relatividad y la medición de longitudes e intervalos de tiempo	101
<i>Observadores</i>	102
<i>Sucesos puntuales y sus transformaciones</i>	104
<i>Medición de tiempos</i>	106
<i>La contracción de Lorentz</i>	108
<i>Dilatación de tiempos</i>	110
<i>Observación de la dilatación del tiempo mediante mesones de rayos cósmicos</i>	111
<i>Otra interpretación del experimento de la dilatación del tiempo</i>	118
<i>Algo más sobre la medición de longitudes y de tiempos</i>	120
<i>Un experimento de Michelson-Morley con láseres</i>	125
<i>La relatividad es auténticamente relativa</i>	126
<i>Intervalos de espacio-tiempo y causalidad</i>	133
<i>PROBLEMAS</i>	137
5 Cinemática relativista	143
<i>Transformación de velocidades</i>	143
<i>Radiación de una fuente que se mueve rápidamente</i>	145
<i>La luz en un medio en movimiento: el coeficiente de arrastre</i>	150
<i>Movimientos transversales; aberración estelar</i>	151
<i>El efecto Doppler</i>	153
<i>Algo más sobre los efectos Doppler</i>	159
<i>El efecto Doppler y la dilatación del tiempo</i>	165
<i>De nuevo en busca del éter</i>	168
<i>Observando los relojes en movimiento y otros objetos</i>	171
<i>Movimientos acelerados</i>	175
<i>Los gemelos</i>	177
<i>PROBLEMAS</i>	182

6	Dinámica relativista. Choques y leyes de conservación	191
	<i>Dos aspectos de un choque elástico</i> 193 <i>Dos aspectos de un choque inelástico</i> 196 <i>Algunas otras consideraciones acerca de las leyes de conservación</i> 201 <i>Absorción y emisión de fotones</i> 202 <i>El efecto Mössbauer</i> 206 <i>El cohete de fotones</i> 209 <i>La creación de partículas</i> 211 <i>Dispersión</i> 219 <i>El efecto Doppler considerado de nuevo</i> 226 <i>PROBLEMAS</i> 229	
7	Más acerca de la dinámica relativista	237
	<i>Invariante energía-cantidad de movimiento y su empleo</i> 237 <i>Las transformaciones de Lorentz para la energía y la cantidad de movimiento</i> 240 <i>Cuadrivectores</i> 246 <i>La fuerza en la mecánica relativista</i> 247 <i>Análisis magnético de las partículas relativistas</i> 253 <i>Transformaciones generales de fuerzas; acción y reacción</i> 256 <i>PROBLEMAS</i> 260	
8	Relatividad y electricidad	265
	<i>La ley de Coulomb</i> 267 <i>La fuerza magnética sobre una carga en movimiento</i> 269 <i>Introducción de consideraciones relativistas</i> 271 <i>La transformación de la ley de Coulomb</i> 272 <i>La fuerza sobre una carga de prueba en reposo</i> 274 <i>Fuerza ejercida sobre una carga de prueba en movimiento</i> 281 <i>Campo de una distribución lineal de carga</i> 289 <i>El campo magnético y la relatividad</i> 293 <i>Fuerza magnética ejercida sobre una carga en movimiento por un alambre portador de corriente</i> 296 <i>Algo más acerca de las fuerzas magnéticas y las contracciones de Lorentz</i> 300	

VIII Índice analítico

<i>Fuerza existente entre alambres portadores de corriente</i>	303
<i>Unidades y sistemas de medida eléctricos y magnéticos</i>	305
<i>PROBLEMAS</i>	308
<i>Epílogo</i>	313
<i>Breve reseña bibliográfica</i>	317
<i>Solución a los problemas</i>	321
<i>Índice alfabético</i>	327

Prólogo

La misión del Education Research Center del M.I.T. (antes Science Teaching Center) consiste en mejorar los planes de estudio, el proceso de instrucción y el proceso de aprendizaje, en especial de los alumnos de los «colleges» y universidades. El Centro fue creado por el M.I.T. en 1960, siendo Director el profesor Francis L. Friedman. Desde 1961 el Centro ha sido principalmente subvencionado por la National Science Foundation; aportaciones generosas se han recibido también de la Kettering Foundation, la Shell Companies Foundation, la Victoria Foundation, la W. T. Grant Foundation y la Bing Foundation.

La Serie de Introducción a la Física del M.I.T., una producción directa del trabajo del Centro, está destinada a ser un conjunto de pequeños volúmenes que globalmente abarquen las áreas principales de la física básica. La Serie pretende destacar la interacción de la experiencia y la intuición en el desarrollo las teorías físicas. Los libros de la misma intentan proporcionar una variedad de bases posibles para los cursos de introducción, desde aquellas que destacan fundamentalmente la física clásica hasta aquellas que incluyen una cantidad considerable de física atómica y cuántica. Los diversos volúmenes pretenden ser compatibles en nivel y estilo de tratamiento, pero en ningún momento se han concebido como una enciclopedia homogénea; por el contrario, cada uno de los libros se han diseñado de modo que sea razonablemente autónomo y pueda utilizarse como un componente individual en muchos planes de estudio.

El presente volumen pretende ser una introducción a la relatividad especial para aquellos alumnos que tienen un fundamento modesto de mecánica newtoniana y ciertos conocimientos de óptica y electricidad. El método de enfoque es el tradicional (para este nivel concreto) en el sentido de que no descansa excesivamente sobre la teoría electromagnética, sino que se concentra sobre problemas de cinemática y dinámica. Sin embargo, el último capítulo se refiere a algunas de las aclaraciones que la relatividad puede proporcionar respecto a la relación existente entre

electricidad y electromagnetismo. La parte más importante del contenido de este libro se ha utilizado satisfactoriamente con alumnos de primero y segundo curso en el M.I.T. como parte de un curso general de introducción a la física; la extensión y profundidad de los temas tratados son, no obstante, suficientes para que el texto por sí mismo resulte también adecuado como introducción a la relatividad, para cursos más avanzados.

Este libro, como otros de la serie, debe mucho a las ideas críticas y sugerencias de gente muy diversa, tanto estudiantes como profesores. En esta última categoría han contribuido eficazmente los comentarios detallados del Prof. M. W. Friedlander (Universidad de Washington), el Prof. A. W. K. Metzner (College del Estado de San Diego) y el Prof. Rainer Weiss (M.I.T.).

Un agradecimiento especial merece el Prof. Jack R. Tessman (Universidad de Tufts) que colaboró ampliamente en nuestros primeros trabajos relacionados con la Serie de Introducción a la Física y ha contribuido de un modo especial en este texto de relatividad. Junto con el autor, explicó la primera versión experimental del texto en el M.I.T. durante 1963-64. Los sucesivos manuscritos fueron discutidos por él detalladamente e incluyeron muchas de sus sugerencias. En particular, el capítulo final sobre relatividad y electricidad está ampliamente basado en un análisis de mucho mayor alcance del Prof. Tessman, en el cual se desarrollan las consecuencias principales del electromagnetismo, incluyendo los campos acelerados [véase Am. J. Phys, 34, 1048-1055 (1956) y Am. J. Phys, 35, 523-527 (1967)].

También deseamos agradecer al Prof. M. K. Smith y al Dr. James A. Ross su valiosa ayuda en la preparación de este volumen.

A. P. FRENCH

Cambridge, Massachusetts

Febrero 1968

Relatividad especial

En la filosofía experimental hemos de establecer proposiciones, obtenidas por inducción general de los fenómenos, lo más correctas o cercanas a la verdad... hasta el momento en que se produzcan otros fenómenos en virtud de los cuales, o se hagan más exactas, o se adquiera confianza de que no habrá excepciones.

SIR ISAAC NEWTON, *Principia* (1686)

La teoría de la relatividad fue una necesidad, consecuencia de serias y profundas contradicciones de la teoría clásica que no parecían tener solución. El valor de la nueva teoría radica en la consistencia y sencillez con que resuelve todas estas dificultades utilizando sólo algunas hipótesis muy convincentes... La mecánica clásica es válida cuando las velocidades son pequeñas y constituye el caso límite de la nueva mecánica.

A. EINSTEIN y L. INFELD
La evolución de la física (1938)

1

Desviaciones de la dinámica newtoniana

¿QUÉ ES LO primero que se piensa cuando se ve o se oye la palabra *relatividad*? Es muy probable que el lector recuerde en seguida el nombre de Alberto Einstein, la ecuación $E = mc^2$ o bien una visión de unos viajeros por el espacio que regresan rejuvenecidos después de un viaje de muchos años de duración. Esto constituye un tributo, bien merecido por cierto, al enorme impacto intelectual —todavía vigente, después de más de 60 años de su aparición— de lo que Einstein denominó *teoría especial* de la relatividad. El desarrollo de esta teoría por Einstein y otros en los años próximos al 1900 se considera con razón como uno de los mayores avances que jamás se han hecho en nuestro modo de describir e interpretar el mundo físico. El concepto básico de la relatividad es tan antiguo como la mecánica de Galileo y Newton y coincide, aproximadamente, con la afirmación de que las leyes de la física parecen ser las mismas en muchos sistemas de referencia diferentes. Entonces, ¿qué es lo que hizo Einstein para que su nombre fuese casi sinónimo del título de este libro? La respuesta es que él nos llevó a aplicar las nociones de la relatividad a *toda* nuestra experiencia física y no sólo a una clase restringida de fenómenos. En particular, llegó a afirmar que los procesos en que intervienen movimientos muy rápidos —concretamente, movimientos con velocidades del orden de la que posee la luz— no han de colocarse en ninguna categoría separada. Pero la unificación que propugnaba llevaba consigo algunas implicaciones notables. Aparecían consecuencias que parecían opuestas a nuestra intuición y a nuestro sentido común, mientras que esto no sucedía con las teorías clásicas —aumento

de la inercia con la velocidad, por ejemplo, y la denominada *paradoja de los gemelos*. Fueron cosas semejantes a éstas las que hicieron tan sorprendente la formulación de la relatividad y las que la dotaron de un atractivo y de un interés popular probablemente no igualado nunca en toda la historia de la física.

Hemos dicho que la idea de la relatividad existía antes de Einstein y que estaba implícita en la mecánica de Newton. Pero 200 años después de Newton empezó a apreciarse que ciertos efectos observados —en su mayor parte muy pequeños y sutiles— no podían explicarse sencillamente si se querían sostener por completo las características básicas de la mecánica newtoniana. Los hechos recalcitrantes que exigían una revisión de las ideas hicieron su aparición históricamente en los fenómenos electromagnéticos, especialmente en la propagación de la luz. Sin embargo, pronto resultó evidente a través del propio trabajo de Einstein que se veía afectada toda la dinámica y no sólo el campo especializado conocido como electrodinámica.

Fue típico de Einstein, y un signo de su genio, obtener conclusiones del tipo más profundo y del mayor alcance a partir de un mínimo de datos. Con frecuencia, muchos hombres de menos categoría intentan lo mismo, como es natural, pero difieren de los Einstein de este mundo en que sus grandes conclusiones o generalizaciones son normalmente falsas. En esencia, Einstein construyó la teoría especial de la relatividad a partir de una sola proposición: que en toda observación sobre el paso de la luz de un punto a otro a través del espacio vacío, el tiempo empleado es simplemente igual a la separación relativa entre ambos puntos dividida por una velocidad universal c ; no depende en absoluto de la velocidad que parezca tener nuestro laboratorio a través del espacio. A partir de este resultado no es difícil el desarrollo de la relatividad (una vez que Einstein mostró el camino) y es lógicamente claro y preciso, del modo como lo presentaremos a su debido tiempo. Es un desarrollo que empieza con la óptica, continúa a través de una cinemática revisada y nos muestra cómo debemos volver a escribir la dinámica de las partículas. Pero hoy podemos recurrir a una gran cantidad de pruebas directas relacionadas con la dinámica de las partículas que se mueven a velocidades extremadamente elevadas. Estas pruebas muestran claramente desde el principio que debemos buscar una modificación del esquema newtoniano si hemos de obtener una descripción dinámica aceptable a todas las velocidades de las partículas que nos son familiares, como los electrones. Y en este capítulo inicial vamos a desarrollar tan rápidamente como sea posible parte de esta dinámica revisada. Es sólo un adelanto y por ello debemos ser poco exigentes en su rigor. Pero puede ser de

cierto interés y tendrá su valor para ver cómo, por lo menos, pueden sugerirse algunos de los resultados claves sin recurrir apenas al formalismo de la teoría de la relatividad.

Sin embargo, nuestra primera tarea consistirá en recordar lo que es preciso modificar, porque sin esto no podrá apreciarse y entenderse por completo la relación entre la antigua dinámica y la nueva —todo lo que tienen en común y todo aquello en que se diferencian.

NEWTON

La mecánica de Newton estudia los movimientos de las partículas sometidas a la acción de las fuerzas. Una partícula se considera como un punto material; su movimiento queda descrito por la posición del punto en el espacio expresada en función del tiempo. Se admite que los conceptos separados de espacio y tiempo se entienden bien aunque carezcan de una definición adecuada. Newton creía en la existencia de un espacio absoluto, pero también se daba cuenta de que no se podía trazar el movimiento de un cuerpo a través de dicho espacio. En lugar de ello definimos la posición de un cuerpo respecto a otro: "Y así", escribía en sus *Principia*, "en lugar de posiciones y movimientos absolutos, utilizamos otros relativos".¹

Sin embargo, a pesar de la relatividad de la posición y de la velocidad resulta que la aceleración es una magnitud fundamental o aparentemente absoluta. Y entonces la dinámica newtoniana determina la magnitud de la aceleración a y la relaciona con la fuerza F que ejerce el entorno sobre la partícula. Este procedimiento es muy fructífero porque de este modo, para conectar la aceleración de la partícula con la fuerza basta con una sola y constante propiedad de la partícula —su masa, m — mediante la relación $F = ma$. Si el valor de F viene dado por una ley explícita —como en el caso de la gravitación universal—, la mecánica clásica adquiere la categoría de teoría física y la ley de Newton resulta ser mucho más que una definición de F en función de m y a .²

¹ Véase Sir I. Newton, *Mathematical Principles of Natural philosophy and His System of the World* (*Principia*), traducido por A. Motte, revisado por F. Cajori, Publicaciones de la Univ. de California, Berkeley, 1962.

² Véase A. Einstein, "Physics and Reality", *J. Franklin Inst.*, **221**, 349-382 (1936); reimpresso en la obra de Einstein *Ideas and Opinions*, Crown, Nueva York, 1954. Véase también N. Austern, *Am. J. Phys.*, **29**, 617 (1961).

Aunque no se conozca ni se dé explícitamente la ley de la fuerza, todavía poseemos una de las consecuencias clave de la mecánica newtoniana —la conservación de la cantidad de movimiento. Considerando la masa inerte como una propiedad constante de un objeto, puede comprobarse (y éste fue uno de los pilares básicos experimentales de la mecánica) que la suma de las cantidades de movimiento mv de dos o más cuerpos interactivos es una constante, con tal que pueda ignorarse la influencia de todas las fuerzas de origen externo. Si, por conveniencia, designamos con el vector \mathbf{p} a la cantidad de movimiento, sabemos que en mecánica clásica el cociente p/v para una partícula dada representa una magnitud invariable.

Finalmente, más allá de los confines estrictos del esquema newtoniano, tenemos el principio de conservación de la energía. Dada una ley particular de la fuerza, sabemos que el trabajo realizado sobre cualquier partícula se refleja en el cambio correspondiente de su energía cinética :

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad (1-1)$$

Además, la energía que se comunica a una partícula por este procedimiento puede recuperarse en forma diferente como, por ejemplo, haciendo que la partícula alcance el reposo dentro de un medio con liberación de energía térmica (es decir, calor). Nuestra fe en la conservación de la energía es tan grande (debido al grandísimo número de pruebas internamente consistentes) que no dudaríamos, en el ejemplo que acabamos de mencionar, en considerar la medida del calentamiento como equivalente a una medida de la energía cinética de la partícula antes del impacto —con tal que podamos ignorar de modo razonable, como es natural, la posibilidad de pérdidas de energía significativas por radiación, sonido, deformación mecánica, etc.

Por tanto, estos conceptos de espacio, tiempo, fuerza, aceleración y masa, cantidad de movimiento y energía, constituyen los fundamentos de la mecánica clásica. Examinaremos ahora algunos de los fallos que han acabado por aparecer en esta estructura después de casi 200 años de existencia aparentemente perfecta. La mayoría de ellas (pero no todas) aparecieron en conexión con el movimiento de partículas a velocidades extraordinariamente elevadas.

«VELOCIDAD LÍMITE»

De acuerdo con las ecuaciones de la mecánica de Newton no existe en principio ningún límite superior de la velocidad que puede darse a un objeto.

Imaginemos, por ejemplo, que se ejerce una acción continua sobre un objeto mediante una fuerza constante de módulo igual al de la gravedad en la superficie terrestre. Su aceleración tendría siempre el valor $9,8 \text{ m/s}^2$. Después de un año, partiendo del reposo, su velocidad sería aproximadamente igual a $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ (es decir, igual a la velocidad de la luz en el vacío); después de dos años sería $6 \times 10^8 \text{ m/s}$ y así sucesivamente. (Compruébense en un momento estas cifras.) Si el objeto fuese pequeño podríamos fácilmente imaginarnos una fuerza que fuese muchas veces mayor que mg , llegando a producir estos aumentos de velocidad mucho más rápidamente —quizás en cuestión de minutos o segundos. Aunque la fuerza no fuese constante se podría calcular la cantidad de trabajo total, igual a la ganancia de energía cinética K , necesaria para hacer que un cuerpo de masa m alcance una velocidad determinada $v : v = (2K/m)^{1/2}$. Pero cuando se intenta acelerar partículas a velocidades tan altas como las mencionadas anteriormente se observa una separación drástica de las predicciones de la mecánica newtoniana. Consideraremos este fenómeno como nuestro primer ejemplo claro del hecho de que la mecánica clásica no es adecuada para todos los casos dinámicos.

Debido a su masa muy pequeña en relación con su carga, el electrón se acelera fácilmente hasta velocidades muy elevadas —mayores en muchos órdenes de magnitud a cualquiera de las que conocemos por nuestra experiencia normal. Así, por ejemplo, un electrón que vaya del catodo al ánodo de un tubo de vacío, con sólo 100 voltios entre ambos llegaría al ánodo (partiendo del reposo) con una velocidad próxima a los 6000 km/s (y su aceleración, supuesto que la separación entre los dos electrodos fuese de unos milímetros, llegaría a valer 10^{15} g). Incluso en estas condiciones la mecánica de Newton se adapta bien a la situación. Pero si la aceleración se realiza a través de millones de voltios, en lugar de centenares, resulta evidente la necesidad de una dinámica revisada. Esto se ha demostrado en un experimento filmado que investiga la relación existente entre la velocidad y energía cinética en el caso de electrones con energías cinéticas de hasta 15 MeV.¹

El dispositivo experimental puede verse esquemáticamente en la figura 1-1. El experimento consiste en hacer medidas directas del tiempo de vuelo de los electrones que viajan dentro de un acelerador lineal (en abreviatura *linac*). A los electrones puede dárseles energías de hasta 1,5 MeV mediante la acción puramente electrostática de un generador Van de Graaff que actúa como un

¹ Se trata de la película *The Ultimate Speed* (“La velocidad límite”), por W. Bertozzi, Education Development Center, Newton, Mass., 1962. Para una descripción completa véase W. Bertozzi, *Am. J. Phys.*, **32**, 551-555 (1964)

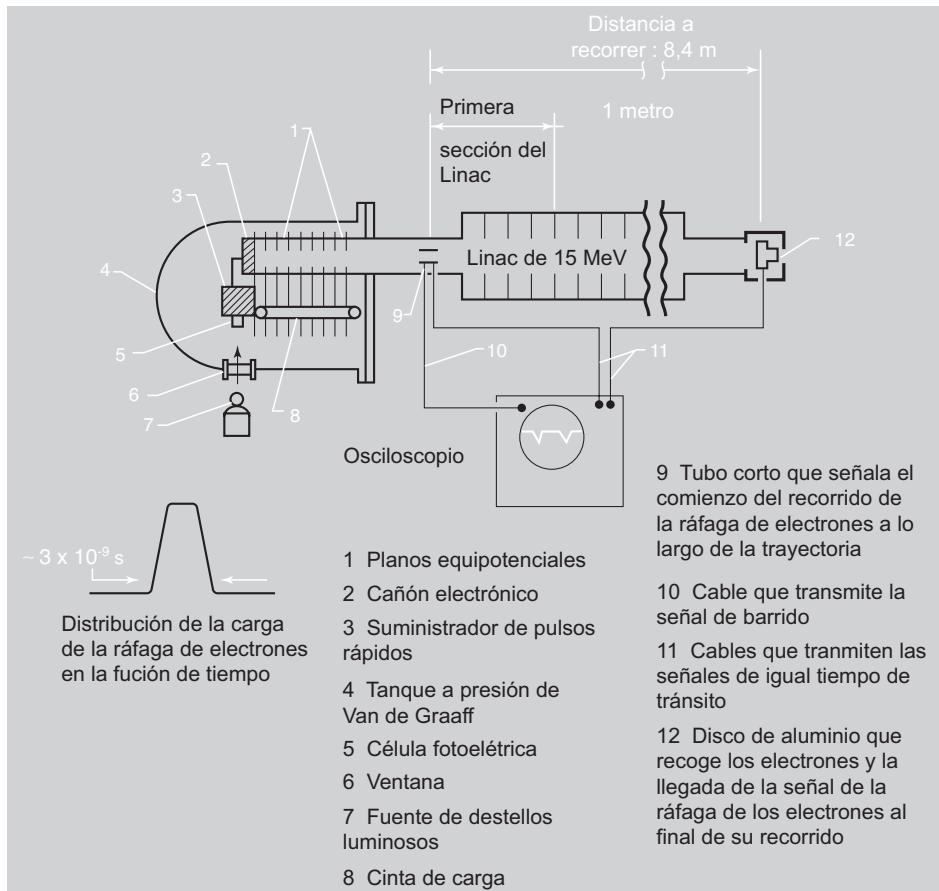


Fig. 1-1. Esquema de los aparatos empleados en la medida del tiempo de vuelo de electrones con alta energía. (El experimento de la "velocidad límite", por W. Bertozzi.)

inyector para el linac; luego entran en la serie de tubos de arrastre del acelerador lineal propiamente dicho y se mide el tiempo que dura su trayectoria de vuelo AB . Pueden obtenerse energías superiores (hasta 15 MeV aproximadamente) haciendo funcionar el sistema de radiofrecuencia del acelerador lineal; en la parte principal de la película sólo se hace uso de este dispositivo en una observación en la que se da a los electrones una energía de 4,5 MeV haciendo funcionar precisamente la primera sección del linac (la sección que sigue inmediatamente al punto A). Sin embargo, incluso en este último caso, los electro-

TABLA 1-1

<i>Energía cinética</i> <i>K, MeV</i>	<i>Tiempo de vuelo</i> <i>t, × 10⁻⁸ s</i>	<i>Velocidad de los electrones</i> <i>v, × 10⁸ m/s</i>	<i>v³, × 10¹⁶ m³/s²</i>
0,5	3,23	2,60	6,8
1,0	3,08	2,73	7,5
1,5	2,92	2,88	8,3
4,5	2,84	2,96	8,8
15	2,80	3,00	9,0

nes recorren la distancia *AB* con una velocidad casi constante, como veremos en seguida.

Los electrones son emitidos en breves ráfagas (con una duración aproximada de 3×10^{-9} s) por el cañón electrónico del terminal negativo de alta tensión del acelerador de Van de Graaff. Unos electrodos aislados situados en *A* y *B* recogen señales eléctricas al pasar la ráfaga. Estos impulsos son llevados a un osciloscopio de rayos catódicos mediante cables de igual longitud. Las señales eléctricas tardan entonces el mismo tiempo en llegar de los electrodos al osciloscopio, por lo que los dos impulsos que aparecen en el osciloscopio (fig. 1-2) miden efectivamente el tiempo que tarda la ráfaga de electrones en ir desde *A* hasta *B*. En la figura 1-2, por ejemplo, este tiempo (*t*) es de unos $3,3 \times 10^{-8}$ s (cada división de la escala horizontal es aproximadamente 10^{-8} s). El recorrido (*l*) entre *A* y *B* resulta ser de 8,4 m. En consecuencia, de la definición básica de la velocidad *v*, resulta

$$v = \frac{l}{t} \approx \frac{8,4}{3,3 \times 10^{-8}} \approx 2,5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Esta medida fue realizada para electrones acelerados a través de 0,5 MV (500 000 V) empleando la máquina de Van de Graaff.

En la tabla 1-1 se resumen los resultados del experimento completo. Una somera inspección de estos resultados revela que en manera alguna son los que cabría esperar si la mecánica newtoniana fuese aplicable. Ante todo, la energía cinética ha aumentado en un factor 30, y en consecuencia la velocidad debería venir afectada por el factor 5,5 ya que, de acuerdo con la mecánica clásica, $v \sim K^{1/2}$. Sin embargo, el aumento es sólo del 15 %. La variación de *v* al pasar de 1,5 a 4,5 MeV es apenas detectable dentro del margen de exactitud del experimento. Cabe entonces preguntarse si los electrones están realmente recibiendo la energía dada por el valor *qV* (producto de la carga por

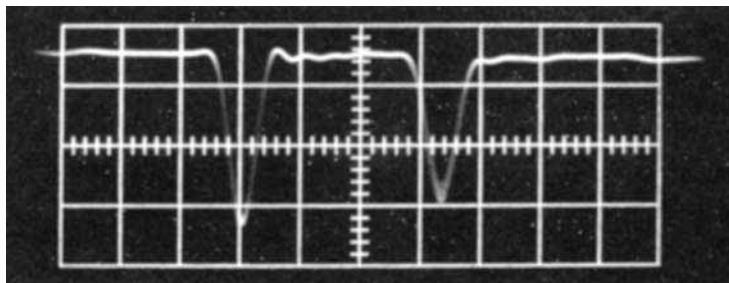


Fig. 1-2. Figura obtenida en el osciloscopio en la que se muestran los pulsos debidos a una ráfaga de electrones de 0,5 MeV al comienzo y al final de un recorrido de 8,4 m. (Reproducido de la película "La velocidad límite".)

la diferencia de potencial acelerador), que representa adecuadamente la energía cinética adquirida cuando V es sólo del orden de los 100 V. En la película se da respuesta a esta pregunta mediante una medida calorimétrica directa de la energía de los electrones en el punto B . No existe duda alguna acerca de ello; la energía está allí.

En la figura 1-3 se comparan los resultados experimentales con las predicciones clásicas. Los valores de v^2 están representados en función de K . Según la mecánica clásica tendríamos

$$v^2 = \frac{2K}{m} \quad (1-2a)$$

Numéricamente resulta

$$v^2 \text{ (m}^2/\text{s}^2\text{)} = 3,5 \times 10^{17} K \text{ (MeV)} \quad (1-2b)$$

Esto es válido para electrones con una energía de 1 keV o menos, pero observamos que aun para la energía más baja del experimento con el acelerador lineal (0,5 MeV) el valor de v^2 que predice la ecuación (1-2) resulta excesivo según un factor próximo a 2. Para altas energías la discrepancia se vuelve aún mayor. En lugar de aumentar proporcionalmente a K , los valores de v^2 parecen ir tendiendo asintóticamente a un límite, lo cual se evidencia especialmente en la medida realizada con 15 MeV que no aparece en la figura 1-3. El valor de v que corresponde a esta asíntota es de $3,0 \times 10^8$ m/s. Estos resultados están de acuerdo con la proposición: "Existe un límite de velocidad

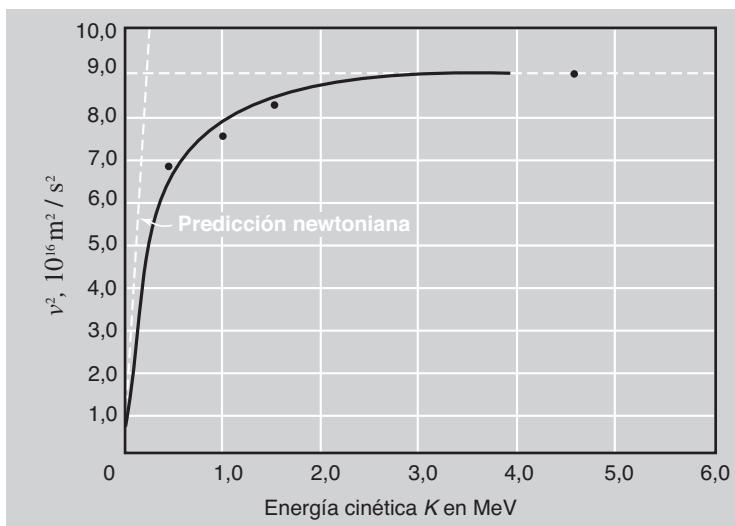


Fig. 1-3. Resultados del experimento de la “velocidad límite” con v^2 en función de la energía cinética para los electrones; obsérvese la forma en que v tiene asintóticamente a c .

para cualquier objeto, y este límite es la velocidad de la luz” (lo cual constituye la última frase de la película).

El resultado anterior es realmente muy notable. ¿Por qué no resulta posible el dar a una partícula una velocidad arbitrariamente elevada siendo posible, en cambio, el suministrarle toda la energía que se desee? Para poder apreciar de otra manera lo sorprendente de este resultado, supongamos que se están acelerando continuamente unos electrones en un tubo largo en el que se ha hecho el vacío, hasta que alcanzan una energía final de varios MeV. Después de los primeros 0,5 MeV de aceleración, los electrones poseen una velocidad aproximada de $2,6 \times 10^8$ m/s (ver tabla 1-1), es decir, cerca del 85 % de la velocidad de la luz. Supongamos ahora que nos encontramos situados en un sistema de referencia que se mueve a esta velocidad en la misma dirección. En este sistema los electrones que se encuentren en esta etapa de su aceleración aparecerán encontrarse en reposo. Considerando la posibilidad de aceleración continua, cabe esperar que los electrones vayan adquiriendo energía y velocidad hasta que posean el equivalente de 0,5 MeV de energía cinética y una velocidad de $2,6 \times 10^8$ m/s con respecto a este nuevo sistema. Pero, ¿no significaría esto que, tal como se observaría en el laboratorio, los electrones poseerían en-

tonces una velocidad de $5,2 \times 10^8$ m/s es decir 1,7 veces c ? Esto es lo que nos sugerirían nuestras reglas ordinarias de adición de velocidades, pero no es lo que ocurre en realidad, como muestra el experimento de la velocidad límite. El comportamiento de los electrones, estudiado por medio de medidas llevadas a cabo en el sistema de referencia del laboratorio, requiere una revisión fundamental de las reglas para combinar velocidades, es decir, las reglas mediante las cuales un movimiento dado es descrito con referencia a sistemas de coordenadas diferentes. Debemos hallar una nueva versión de la cinemática para considerar este problema. Es posible que el lector desee entrar en la cuestión inmediatamente. En tal caso se le aconseja que pase directamente al capítulo 2. En el resto de este capítulo proseguiremos la exploración de algunas de las cuestiones dinámicas surgidas a raíz del experimento de la velocidad límite. En particular, puesto que la velocidad límite de los electrones es igual a la velocidad de la luz examinaremos detenidamente la dinámica de lo que pudiéramos denominar partículas de luz, es decir, los fotones.

FOTONES

La velocidad de la luz, c , ha sido admitida desde hace mucho tiempo como una de las constantes fundamentales de la naturaleza. Pero su interés se reúne cuando en la imagen de la radiación intervienen los fotones. ¿Es realmente cierto que estos fotones —partículas caracterizadas por la frecuencia ν de radiación— poseen todos exactamente la misma velocidad a pesar de que sus energías hv pueden variar dentro de un margen colosal? La respuesta que toda nuestra experiencia acumulada nos permite dar es afirmativa. En la tabla 1-2 se recogen algunos resultados cuya variación total puede expresarse prácticamente mediante el factor 10^{15} en la energía de los fotones.¹ Puede observarse que la exactitud de los resultados varía enormemente para las diferentes energías de los fotones. Las determinaciones más exactas son para la luz visible y para microondas con una longitud de onda aproximadamente de 1 cm; las energías de los fotones difieren según un factor 10^4 pero las velocidades² tienen diferencias de 1 parte en 10^6 . Del primer valor y del último obser-

¹ Para referencias y descripciones excelentes de los experimentos véase J. F. Mulligan y D. F. McDonald, *Am. J. Phys.*, **25**, 180 (1957); J. H. Sanders, *The Fundamental Atomic Constants*, Publicaciones de la Univ. de Oxford, Nueva York, 1961; y J. H. Sanders, *The Velocity of Light*, Pergamon Press, Oxford, 1965.

² Una comparación directa aún más precisa entre las velocidades para longitudes de onda ampliamente diferentes ha podido llevarse a cabo a partir del estudio de las llamadas explosiones

TABLA 1-2: VELOCIDAD DE LOS FOTONES

Frecuencia, s^{-1}	Energía de los fotones, eV	Longitud de onda, m	Velocidad (con error), $\times 10^8$ m/s
$4,7 \times 10^7$	$1,9 \times 10^{-7}$	6,4	$2,9978 \pm 0,0003$
$1,7 \times 10^8$	$7,0 \times 10^{-7}$	1,8	$2,99795 \pm 0,00003$
$3,0 \times 10^8$	$1,2 \times 10^{-6}$	1,0	$2,99792 \pm 0,00002$
$3,0 \times 10^9$	$1,2 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-1}$	$2,99792 \pm 0,00009$
$2,4 \times 10^{10}$	$1,0 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{-2}$	$2,997928 \pm 0,000003$
$7,2 \times 10^{10}$	$3,0 \times 10^{-4}$	$4,2 \times 10^{-3}$	$2,997925 \pm 0,000001$
$5,4 \times 10^{14}$	2,2	$5,6 \times 10^{-7}$	$2,997931 \pm 0,000003$
$1,2 \times 10^{20}$	$5,1 \times 10^5$	$2,5 \times 10^{-12}$	$2,983 \pm 0,015$
$4,1 \times 10^{22}$	$1,7 \times 10^8$	$7,3 \times 10^{-15}$	2,97 $\pm 0,03$

vamos que los fotones emitidos por la televisión de unos 10^{-7} eV y los rayos gamma de unos 100 MeV poseen la misma velocidad con una exactitud del 1 % a pesar de que sus energías difieren según un factor de 10^{15} . Éste es claramente un resultado de la mayor importancia, y contrasta con el aumento sistemático de la velocidad con la energía para partículas como los electrones. Podemos observar, sin embargo, que los resultados del experimento de la velocidad límite hacen que el contraste no sea tan fuerte, puesto que sugieren (y un gran número de otros experimentos se encargan de confirmarlo) que un electrón que posea una energía cinética de unos pocos MeV posee una velocidad próxima en un 1 % a la velocidad de la luz, c , y que ningún aumento de energía, aunque sea de muchos órdenes de magnitud, puede hacer más que reducir esta pequeña diferencia.

LA RELACIÓN ENERGÍA-CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA LOS FOTONES

Consideremos ahora una importante propiedad dinámica de los fotones: la relación entre la energía y la cantidad de movimiento. Un fotón de energía $E (= h\nu)$ posee una cantidad de movimiento asociada de valor p , tal que

$$E = cp \quad (1-3)$$

súbitas de estrellas situadas a una distancia de varios años luz. Se ha encontrado así que las ondas de radio con una longitud de onda de $\lambda = 1,2$ m llegan a la Tierra al mismo tiempo que la luz visible con $\lambda = 5,4 \times 10^{-7}$ m. La exactitud (de unas pocas partes en 10^7) de esta comparación viene limitada principalmente por la incertidumbre sobre el mecanismo de producción de las llamaradas. Véase B. Lovell, F. L. Whipple y L. H. Solomon, *Nature*, **202**, 377 (1964).

La mejor evidencia *experimental* en favor de esta conclusión (o cuando menos la más extensa) es en cierto modo indirecta. Se apoya en la enorme cantidad de información que se posee sobre física nuclear y sobre partículas elementales, en donde el análisis de los choques entre fotones individuales y otras partículas se realiza admitiendo la veracidad de la ecuación (1-3).¹ Cualquier inconsistencia para ese intervalo de energías de fotones —desde el MeV hasta el GeV²— se hubiese evidenciado claramente. Los únicos experimentos encaminados deliberadamente a la comprobación de la relación energía-cantidad de movimiento no se han realizado con fotones individuales, sino con haces continuos de luz, al estudiar el fenómeno de la *presión de radiación*. Tales experimentos tratan de la incidencia de un número elevadísimo de fotones (por ejemplo, 1 watt de luz visible representa un flujo de unos 3×10^{18} fotones/s) y pueden ser adecuadamente descritos y analizados en términos de un flujo continuo de energía radiante, sin referencia a la estructura fotónica de la radiación. De hecho, la ecuación (1-3), como expresión general de la conexión entre la energía y la cantidad de movimiento para la radiación en el espacio libre, fue ampliamente aceptada, puesto que era consecuencia necesaria de la teoría electromagnética de Maxwell —la misma teoría que obtuvo el valor correcto de la velocidad de la luz a partir de la física de los fenómenos eléctricos y magnéticos básicos. Los experimentos sobre presión de radiación fueron considerados ante todo como una verificación de la teoría de Maxwell. Sin embargo, dada una imagen en términos de fotones, estos experimentos implican también que la ecuación (1-3) se cumple para los fotones individuales.

Todos los experimentos sobre presión de radiación poseen una semejanza básica. Consisten en la medida de la fuerza F ejercida sobre una superficie por un flujo conocido (medido por la potencia incidente W) de energía radiante. La superficie en cuestión es una fina laminilla metálica suspendida de una delicada fibra de torsión; el flujo de energía se mide mediante su efecto calorífico. Debe tenerse en consideración la fracción ρ de la radiación incidente que es reflejada por la lámina, puesto que la luz reflejada contribuye a la fuerza de radiación. (Una superficie perfectamente reflectora experimentaría doble fuerza que otra perfectamente absorbente para el mismo flujo de radiación incidente.)

Los experimentos a los que casi siempre se hace referencia en conexión con

¹ Consideraremos este tipo de choques en el capítulo 6.

² 1 GeV = 10^9 eV. Esta abreviatura internacionalmente aceptada (procedente de giga electrón volt) se emplea en lugar de BeV, que puede dar lugar a ambigüedad, ya que en Europa por billón se entiende 10^{12} , mientras que en EE. UU. significa 10^9 .

la presión de radiación son los de Nichols y Hull.¹ Sus mediciones fueron realizadas con mucho cuidado y habilidad, y sus resultados comprobaron la ecuación (1-3) con una desviación inferior al 1 %. Pero su trabajo fue realizado antes de que se dispusiera de alto vacío en los laboratorios, y tuvieron que recurrir a procedimientos especiales para separar la verdadera presión de radiación del efecto radiométrico parásito. Este fenómeno consiste en que una superficie absorbente, calentada mediante la radiación incidente, sufre un ligero empuje que procede del gas que le rodea. El efecto es muy marcado a menos que el vacío sea extremadamente elevado... o por el contrario muy bajo. Puede eclipsar totalmente la verdadera presión de radiación y es el agente motor de los radiómetros de juguete en venta en los bazares. Tal tipo de radiómetro gira siempre en un sentido opuesto al que cabría esperar de las verdaderas fuerzas de radiación. (El lector puede comprobar esto personalmente cuando se le presente la ocasión.) El primer experimento cuantitativo sobre la presión de radiación (realizado por un ruso, P. Lebedef, en 1901) fue en realidad llevado a cabo en un vacío bastante elevado, pero los efectos radiométricos fueron de todos modos apreciables. La primera medida realmente correcta de la presión de radiación parece haber sido realizada en una investigación poco conocida llevada a cabo en 1923 por Gerlach y Golsen.² Trabajando con un vacío inferior a 10^{-6} mm de Hg lograron que el efecto radiométrico fuese inapreciable. El experimento puede considerarse como una comprobación de la siguiente relación, consecuencia de la ecuación (1-3):

$$c = \frac{W(1 + \rho)}{F} \quad (1-4)$$

empleando las cantidades anteriormente definidas. El segundo miembro de esta ecuación está constituido por las cantidades que fueron medidas directamente en el experimento de la presión de radiación. W es, por supuesto, la energía por segundo incidente y F es la variación de la cantidad de movimiento de la radiación en la unidad de tiempo. Puede entonces comprobarse si esta combinación de W , ρ y F es realmente igual a la velocidad de la luz. La tabla 1-3 muestra los resultados de analizar la información de Golsen de esta manera.

¹ E. Nichols y G. F. Hull, *Phys. Rev.*, **13**, 307-320 (1901); **17** 26-50, 91-104 (1903). También G. F. Hull, *Phys. Rev.*, **20**, 292-299 (1905).

² W. Gerlach y A. Golsen, *Z. Physik. (Leipzig)*, **15**, 1-7 (1923); A. Golsen, *Ann. Phys.*, **73**, 624-642 (1924).

TABLA 1-3: EXPERIMENTO DE LA PRESIÓN DE RADIACIÓN

Laminilla	Coeficiente de reflexión ρ	Potencia incidente $W, \times 10^{-2}$ watt	Fuerza medida $F, \times 10^{-10}$ newton	$W(1 + \rho)/F, \times 10^8$ m/s
Pt	0,60	6,07	3,14	3,09
Pt	0,60	2,80	1,44	3,11
Ni	0,43	6,39	3,23	2,83
Al	0,81	6,39	3,91	2,96
Al	0,81	2,78	1,74	2,89
Promedio =				2,98

En consecuencia, la exactitud de la ecuación (1-3) queda confirmada experimentalmente con un error aproximado de un 2 %.

La relación $E = cp$ para los fotones puede compararse con la relación que liga la energía cinética, la velocidad y la cantidad de movimiento para una partícula en la mecánica newtoniana. En este caso tenemos $K = \frac{1}{2} vp$. Puesto que la energía de un fotón es enteramente cinética (ya que los fotones dejan sencillamente de existir cuando intentamos detenerlos en un medio absorbente), podríamos haber sufrido la tentación de proponer la relación $E = \frac{1}{2} cp$ (errónea) para los fotones. Esta discrepancia pudiera conducirnos a preguntar lo que ocurre a la relación entre la energía cinética y la cantidad de movimiento de los electrones cuando su velocidad aumenta desde valores relativamente bajos ($< 0,1 c$, por ejemplo) hasta valores casi iguales a c . La respuesta es que para energías bajas ($K < 1$ keV) la relación es newtoniana¹ con bastante aproximación, pero para energías altas ($K > 0,1$ MeV) la cantidad de movimiento se hace significativamente inferior a la que corresponde al valor de $2K/v$, y que en el caso de energías muy grandes ($K > 50$ MeV) viene dada por K/c con un error inferior al 1 %. (La evidencia de esto se basa en el estudio de los choques atómicos con electrones que posean alta energía; más adelante diremos más acerca de tales procesos.) Así, lo mismo que en el caso de la relación entre la energía cinética y la velocidad, se observa una desviación lenta pero inconfundible con respecto al comportamiento newtoniano cuando intervienen energías suficientemente elevadas y velocidades que se aproximan a la de la luz. Esto confirma nuestra creencia de que la dinámica de los fotones y de otras partículas puede incluirse, al menos para ciertos propósitos, dentro del mismo marco

¹ Ver la película *Momentum of Electrons* (Cantidad de movimiento de los electrones), por J. G. King, Education Development Center, Newton, Mass., 1963.

descriptivo. Nuestro paso siguiente consistirá en sugerir cual pudiera ser ese marco. Nuestra argumentación se basará en un criterio de plausibilidad; en modo alguno será la única explicación posible desde el punto de vista lógico. Pero como reza el viejo dicho inglés, "*the proof of the pudding is in the eating*" (es decir, para probar el pudding hay que comerlo), y así veremos cuán fácilmente podremos describir el paso del comportamiento newtoniano al nonewtoniano apoyándonos en nuestras conclusiones (que son, de hecho, justamente las de la relatividad especial).

MATERIA Y RADIACIÓN: LA INERCIA DE LA ENERGÍA

¿No son los cuerpos y la luz convertibles entre sí, y no reciben los cuerpos gran parte de su actividad de las partículas de luz que entran en su composición?

NEWTON, *Optics* (4.^a ed., 1730)

Sería erróneo sugerir que Newton había anticipado realmente la física del siglo XX en el grado que la cita precedente pudiera suponer, pero su atrayente pregunta es muy apropiada como introducción a la discusión de que nos ocuparemos ahora. En efecto, consideraremos la conexión íntima entre la inercia de la materia ordinaria y la energía de radiación, y al actuar así desarrollaremos algunos resultados que serán aplicables por igual a la dinámica de los fotones y a la de los "cuerpos". Obtendremos, como una de las consecuencias, una descripción acabada de la relación entre la velocidad y la energía cinética de los electrones en el experimento de la velocidad límite.

Nuestro punto de partida será un *gedanken experiment* (literalmente, un "experimento mental", es decir, un experimento ficticio, no realizable en la práctica) inventado por el propio Einstein en 1906.¹ Supondremos que una cantidad E de energía radiante (una ráfaga de fotones) es emitida desde un extremo de una caja de masa M y longitud L aislada de lo que la rodea e inicialmente en reposo [fig. 1-4(a)]. La radiación lleva una cantidad de movimiento E/c . Puesto que la cantidad de movimiento del sistema permanece igual a cero, la caja debe adquirir una cantidad de movimiento igual a $-E/c$. En consecuencia, la caja retrocederá con una velocidad v , dada por

$$v = -\frac{E}{Mc} \quad (1-5)$$

¹ A. Einstein, *Ann. Phys.*, **20**, 627-633 (1906).

² Por masa inercial designamos el cociente entre la cantidad de movimiento (momento lineal) y la velocidad.

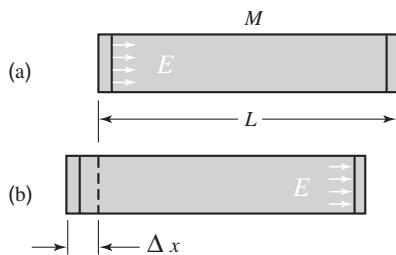


Fig. 1-4. Caja de Einstein —experimento imaginario en el cual una caja retrocede desde su posición inicial (a) hasta una posición final (b) como resultado de una ráfaga de energía radiante que pasa de un extremo de la caja al otro.

Después de viajar libremente durante un tiempo $\Delta t (= L/c)$ con mucha aproximación, siempre que $v \ll c$, la radiación alcanzará el otro extremo de la caja y comunicará un impulso, igual y opuesto al que dio inicialmente, lo cual llevará la caja de nuevo al reposo.¹ Por consiguiente, el resultado de este proceso es que la caja se desplace una distancia Δx :

$$\Delta x = v \Delta t = -\frac{EL}{Mc^2} \quad (1-6)$$

Pero como este sistema está aislado se nos hace difícil creer que el centro de masas de la caja junto con su contenido se haya desplazado. Postulamos, en consecuencia, que la radiación ha transportado consigo el equivalente de una masa m , de manera que

$$mL + M\Delta x = 0 \quad (1-7)$$

Asociando las dos últimas ecuaciones tenemos

$$m = \frac{E}{c^2} \quad \text{o} \quad E = mc^2 \quad (1-8)$$

Para el hombre de la calle, Einstein y la relatividad se resumen probablemente en este resultado. Para el físico, su importancia no disminuye por el hecho de

¹ Si el lector tiene la impresión de que debería considerarse con más detalle el retroceso de la caja y su efecto sobre el tiempo y la distancia de tránsito de la radiación, consulte el problema 1-13.

vulgarizarse; expresa la inercia fundamental que posee la energía. Aunque el cálculo tal como lo hemos realizado (que difiere un tanto de la versión original de Einstein) señala en primer lugar a la masa asociada con la energía radiante, se observa rápidamente que las implicaciones son mucho más amplias. Cuando la radiación se emite desde un extremo de la caja de Einstein, este extremo experimenta una disminución en su masa inercial de valor E/c^2 . De igual forma, la absorción de la radiación en el otro extremo ocasiona un aumento en la masa de esa otra parte. Una vez absorbida, la energía pierde su identidad como energía de los fotones y acaba por convertirse en un aumento de la energía térmica. Así llegamos rápidamente a la conclusión de que la energía en cualquiera de sus formas posee una masa equivalente definida mediante la ecuación (1-8) —lo cual constituye un principio general de la inercia de la energía.¹

El principal ejemplo de la equivalencia entre masa y energía, al cual debemos nuestra pervivencia, es el que suministran las reacciones termonucleares que tienen lugar en estrellas como el Sol. Experimentalmente se ha establecido que la energía radiante procedente del Sol incide sobre la Tierra a un ritmo de $1,35 \times 10^3$ watts/m² por unidad de tiempo. Mediante este dato y la ecuación (1-8) resulta que la masa del Sol decrece a una velocidad de unos $4,5 \times 10^6$ toneladas/segundo —lo cual constituye una pérdida impresionantemente rápida, aunque representa tan sólo una parte en 10^{13} de la masa del Sol por año. Esto tiene lugar como consecuencia de cadenas de reacciones nucleares, entre las que destaca la conversión del hidrógeno (¹H) en helio (⁴He). Por supuesto, existen cuatro átomos de hidrógeno que terminan en un átomo de helio, y el proceso tiene lugar según varios pasos diferentes. Uno de estos pasos posee un interés particular para nosotros, puesto que constituye un ejemplo sencillo y notablemente directo acerca de la equivalencia entre la masa de la materia corriente y la energía de los fotones. Se trata de éste:



Un protón se fusiona con un deuterón D (el núcleo del hidrógeno-2 contiene un protón y un neutrón) dando lugar a un sistema compuesto por dos protones y un neutrón, que es la composición nuclear del ³He. Pero, de acuerdo con las medidas realizadas con el espectrómetro de masas, la masa de esta combi-

¹ Una discusión adecuada sobre este punto se encuentra en el artículo de M. von Laue "Inertia and Energy" ("Inercia y energía"), en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Vol. II (P. A. Schilpp, editor), Harper Torchbook, Harper and Row, Nueva York, 1959.

nación es superior a la masa del ${}^3\text{He}$ en su estado normal. Éstos son los valores aproximados:

protón	$1,6724 \times 10^{-27} \text{ kg}$
deuterón	$3,3432$
<hr/>	<hr/>
$p + D$	$5,0156$
núcleo de ${}^3\text{He}$	$5,0058$
exceso de masa	$9,8 \times 10^{-30} \text{ kg}$

Esta cantidad de masa es transportada por un fotón (un rayo γ) tal como indica la ecuación (1-9). La energía de este fotón viene dada por la ecuación (1-8):

$$\begin{aligned} E = mc^2 &= 9,8 \times 10^{-30} \times 9,0 \times 10^{16} \\ &= 8,8 \times 10^{-13} \text{ joule} \\ &= 5,5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Este proceso ha sido estudiado en el laboratorio, habiéndose observado¹ rayos γ con la energía esperada. Quizás debiera añadirse que tales reacciones, cuando tienen lugar en forma de reacciones termonucleares en el Sol, necesitan de temperaturas del orden de 10^7 °K y tienen lugar, por tanto, solamente en las regiones internas. Los rayos gamma, del tipo de los que se acaban de considerar, son absorbidos por completo antes de que lleguen a alcanzar la superficie del Sol, y su energía escapa finalmente en forma de fotones con energía individual del orden de tan sólo 1 eV —infrarroja, visible y ultravioleta— que constituyen el conocido espectro solar.

La ecuación $E = mc^2$ ha estado (al menos en las descripciones populares) tan exclusivamente ligada a las transformaciones nucleares como para desviar la atención respecto a su universalidad. Pero el mensaje de la ecuación de Einstein es que *cualquier* variación ΔE en la energía de un cuerpo implica una variación correspondiente Δm en su masa inercial:

$$\Delta E = c^2 \Delta m \quad (1-10)$$

Una pelota de golf en movimiento posee una masa superior a la que esa misma pelota de golf posee en reposo. El filamento incandescente de una lámpara posee más masa que ese mismo filamento cuando está frío. Un condensador cargado posee una masa superior a la de ese mismo condensador cuando se en-

¹ W. A. Fowler, C. C. Lauritsen y A. V. Tollestrup, *Phys. Rev.*, **76**, 1767 (1949).

cuentra descargado. Y así indefinidamente. Puesto que, en términos de magnitudes familiares, la masa asociada con una cantidad dada de energía es muy pequeña (por ejemplo, la energía empleada cada día para propósitos domésticos en una ciudad con un millón de habitantes posee una masa equivalente de tan sólo 1 g), esta conexión íntima entre ambas permaneció ignorada durante mucho tiempo. Einstein consideraba extremadamente importante el descubrimiento de esta conexión. Para citar sus propias palabras:¹

El resultado más importante de carácter general al que ha conducido la teoría especial de la relatividad es el que se relaciona con el concepto de masa. Antes de la llegada de la relatividad la física admitía dos leyes de conservación de importancia fundamental, la ley de la conservación de la energía y la ley de conservación de la materia; estas dos leyes fundamentales aparentaban ser totalmente independientes la una de la otra. Mediante la teoría de la relatividad ambas han sido unificadas en una sola ley.

Quizá una de las mejores maneras de apreciar el carácter de la equivalencia *masa-energía* consista en considerar un átomo neutro y aislado en un trozo de materia ordinaria. Desde un punto de vista es sencillamente un elemento más de una colección de lo que Newton denominaba “partículas sólidas, con masa, macizas, impenetrables y móviles”.² No importa cuál sea la estructura interna, parece casi evidente que la propiedad inercial del átomo debería venir descrita por una cantidad sencilla que denominaremos masa. Pero consideremos ahora este mismo átomo desde el punto de vista de los conocimientos actuales. Se trata de un complicado sistema de electrones, neutrones y protones (y si explorásemos profundamente encontraríamos una estructura más compleja aún). La masa del átomo en su conjunto contiene contribuciones positivas de las energías cinéticas de sus constituyentes en rápido movimiento, y contribuciones de ambos signos (con predominio del negativo) procedentes de la energía potencial de sus interacciones eléctrica y nuclear. (Obsérvese que una fuerza de atracción entre dos partículas representa automáticamente una contribución *negativa* a la masa total del sistema.³) Cualquier variación del estado interno del átomo viene acompañado de un flujo de energía hacia su interior o su exterior, asociado con un aumento o disminución de su masa. La capacidad de

¹ A. Einstein, *Relativity*, Crown, Nueva York, 1961.

² Sir I. Newton, *Optics*, 4.^a edición, 1730; reimprima en forma revisada por G. Bell, Londres, 1931; la edición de Bell ha sido reimprima por Dover, Nueva York, 1952.

³ Siempre que la magnitud de la fuerza atractiva disminuye con la separación, lo cual es cierto para todas las fuerzas existentes entre las partículas elementales de los átomos.

los constituyentes para la cohesión depende de que su energía total en esta configuración sea inferior a aquella en que se encuentren separados entre sí. Según estos términos, la masa de un átomo es el resultado de una notable y sutil síntesis. Sin embargo, sirve para caracterizar el átomo completo en todo contexto dinámico —incluyendo la gravitación— en el que se inueva como una unidad aislada.

ENERGÍA, CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y MASA

Intentemos ahora reunir algunos de los resultados que hemos discutido. Para los fotones tenemos

$$E = cp \quad (1-3)$$

y

$$m = \frac{E}{c^2} \quad (1-8)$$

(siendo la primera relación de carácter experimental y basada la segunda en la caja de Einstein). Combinando ambas obtenemos

$$m = \frac{p}{c} \quad (1-11)$$

Sin embargo, en la mecánica newtoniana resulta

$$m = \frac{p}{v} \quad (1-12)$$

Parece como si pudiéramos considerar la ecuación (1-11) como un caso particular de la ecuación (1-12) para $v = c$. Si, además, suponemos que la ecuación (1-8) describe una equivalencia universal entre la energía y la masa inercial, podemos combinar las ecuaciones (1-8) y (1-12) en una sola:

$$E = \frac{c^2 p}{v} \quad (1-13)$$

Ahora bien, en mecánica clásica no nos ocupamos nunca de energías absolutas, sino de diferencias de energía y de la transformación entre una forma de energía y otra. Una partícula experimenta una variación de energía potencial, por ejemplo, y su energía cinética sufre una variación correspondiente, de

tal modo que la energía total permanece constante. La base para el análisis de todas estas situaciones es la *ley de Newton*. El aumento de energía cinética corresponde al trabajo realizado por las fuerzas externas,¹ es decir,

$$dE = F dx = \frac{dp}{dt} dx$$

y por tanto,

$$dE = v dp \quad (1-14)$$

Si aceptamos las ecuaciones (1-13) y (1-14) podemos obtener de ellas una relación, que propondremos ahora como de carácter general, entre la energía y la cantidad de movimiento de una partícula. Basta multiplicar miembro a miembro ambas ecuaciones e integrar:

$$E dE = c^2 p dp$$

Por tanto:

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 \quad (1-15)$$

en donde E_0^2 es una constante de integración escrita explícitamente como el cuadrado de una energía constante.

A partir de aquí podemos seguir por diversos caminos. Por ejemplo, podemos sustituir en la ecuación (1-15) la relación $cp = Ev/c$ de la ecuación (1-13). Esto conduce inmediatamente al siguiente resultado:

$$E(v) = \frac{E_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (1-16)$$

Para $v \ll c$ podemos aproximar este resultado exacto desarrollando en serie y despreciando los términos de orden superior a v^2/c^2 .

$$[\text{Resultado aproximado } (v \ll c)] \quad E(v) \approx E_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{c^2} \right) v^2 \quad (1-17)$$

¹ La película sobre la velocidad límite evidencia que, incluso bajo condiciones en las que algunas de las características de la mecánica newtoniana no son válidas, el aumento en energía (energía cinética) de un electrón sigue siendo igual al trabajo calculado como producto de la fuerza electrostática por la distancia recorrida.

Para que la ecuación (1-17) se armonice con la mecánica newtoniana a bajas velocidades, debemos identificar E_0/c^2 con la masa inercial clásica de una partícula: designémosla mediante m_0 . De este modo, las ecuaciones (1-8) y (1-16) conjuntamente conducen a la expresión explícita de la variación de la masa inercial con la velocidad:

$$m(v) = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (1-18)$$

La cantidad m_0 , que en mecánica newtoniana era *la* masa inercial de un cuerpo asume ahora el papel nuevo de *masa en reposo* de dicho cuerpo para $v = 0$; para cualquier otra velocidad, la masa inercial es mayor.¹

El aumento de la masa inercial con la velocidad viene evidentemente implícito en cuanto se admite el principio general de la inercia de la energía. La forma particular de variación expresada por la ecuación (1-18) se muestra gráficamente en la figura 1-5 conjuntamente con algunos resultados experimentales basados en la desviación eléctrica y magnética de los electrones con alta energía.

Las ecuaciones (1-15) y (1-18) constituyen dos de los resultados centrales de la nueva dinámica; el primero de ellos —la relación entre la energía y la cantidad de movimiento— se revelará como especialmente importante y aplicable. Sin embargo, la energía cinética de una partícula, magnitud de gran importancia en la dinámica clásica, adquiere ahora un papel secundario. Es simplemente la diferencia entre la energía total E y la energía en reposo E_0 :

$$K = m_0 c^2 \left[\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right] \quad (1-19)$$

Por supuesto que K sigue siendo una cantidad de importancia práctica, ya que mide la energía extra suministrada a una partícula a través del trabajo realizado por fuerzas externas. Obsérvese que K no se obtiene sustituyendo en la expresión $\frac{1}{2}mv^2$ el valor de m calculado a partir de la ecuación (1-18) —error frecuente, puesto que la tentación de adherirse a la expresión newtoniana de la energía cinética es muy fuerte.

Con riesgo de parecer reiterativos, subrayemos el significado de $m(v)$ tal como viene definido mediante la ecuación (1-18). Describe la propiedad iner-

¹ Y la magnitud $E_0 (= m_0 c^2)$ es la *energía en reposo*. Por tanto, en el caso de electrones (por ejemplo) tenemos $m_0 = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $E_0 = 8,2 \times 10^{-14}$ J = 0,51 MeV.

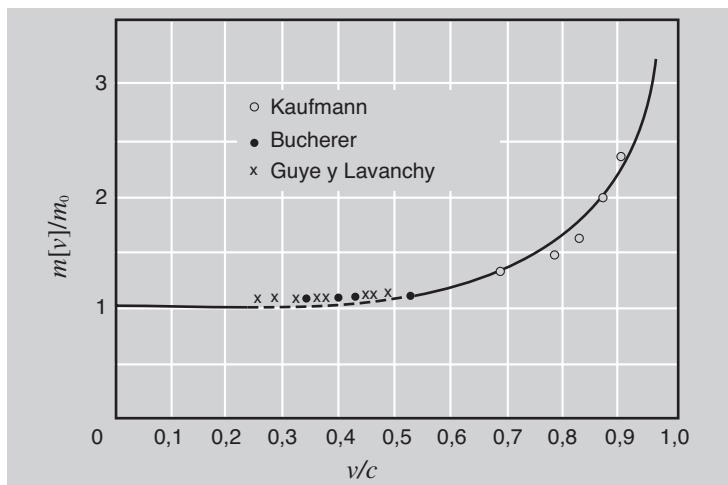


Fig. 1-5. Variación de la masa inercial con la velocidad para los electrones. Basado en Kaufmann (1910), Bucherer (1909) y Guye y Lavanchy (1915). (Tomado de R. S. Shankland, *Atomic and Nuclear Physics*, Macmillan, Nueva York, 1961.)

cial de un cuerpo que se mueve a velocidad v , de tal modo que la cantidad de movimiento p viene dada por la ecuación

$$p = m(v)v \quad (1-20)$$

También describe el contenido total de energía del cuerpo y por tanto,

$$E = m(v)c^2 \quad (1-21)$$

Ahora bien, son las magnitudes p y E , en lugar de $m(v)$, las que figuran en cualquier situación dinámica real. En este sentido, la masa variable $m(v)$ es sencillamente una construcción adecuada que, por ejemplo, nos permite mantener la forma de la proposición newtoniana de que la cantidad de movimiento es el producto de la masa por la velocidad. Muchos físicos prefieren reservar la palabra *masa* para definir la masa en reposo m_0 , por ser una propiedad únicamente definida para una partícula dada. Pero esto es esencialmente una cuestión de preferencias.¹ Con independencia de las palabras que se decida em-

¹ Y resulta imposible eludir el hecho de que para casi todas las partículas, incluso en la misma masa en reposo, intervienen contribuciones asociadas a los movimientos y energías cinéticas de sus constituyentes.

plear, no existe desacuerdo alguno en el hecho de que las ecuaciones (1-20) y (1-21) describen la cantidad de movimiento y la energía total de una partícula, viiniendo dada $m(v)$ por la ecuación (1-18).

El denominador $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ aparece tan a menudo en la relatividad especial, y es tan incómodo de escribir, que en casi todas las discusiones sobre la relatividad se hace uso de un símbolo, γ , para referirse al mismo. Se hace, por tanto,

$$\gamma(v) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (1-22)$$

con lo cual tenemos

$$m = \gamma m_0 \quad (1-23)$$

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad (1-24)$$

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad (1-25)$$

en donde, al hacer empleo de las ecuaciones (1-23) a (1-25) debemos tener presente que γ depende de la velocidad v según la ecuación (1-22).

¿ES CORRECTA LA NUEVA DINAMICA?

Es importante el preguntarse si la ecuación (1-19) ofrece realmente una descripción de la relación entre la velocidad y la energía cinética que se observa, por ejemplo, en el experimento del acelerador lineal. Modificando el resultado tenemos

$$1 + K/m_0 c^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Por tanto,

$$1 - v^2/c^2 = (1 + K/m_0 c^2)^{-2}$$

o bien,

$$v^2 = c^2[1 - (1 + K/m_0 c^2)^{-2}] \quad (1-26)$$

Está claro que la energía en reposo $m_0 c^2$ puede adoptarse como unidad natural para la medida de la energía extra K que se comunica a una partícula por medio de un proceso de aceleración. Podemos, efectivamente, construir una

tabla en la que se muestre la dependencia de la velocidad con K para cualquier partícula (tabla 1-4).

TABLA 1-4: VELOCIDAD DE LAS PARTÍCULAS EN FUNCIÓN DE SU ENERGÍA CINÉTICA

K/m_0c^2	$(1 + K/m_0c^2)^{-2}$	v^2/c^2	v/c	$v^2, \times 10^{16} m^2/s^2$
0,1	0,8264	0,1736	0,417	1,56
0,2	0,6944	0,3056	0,553	2,75
0,3	0,5917	0,4083	0,639	3,67
0,5	0,4444	0,5556	0,745	5,00
1,0	0,2500	0,7500	0,866	6,75
2,0	0,1111	0,8889	0,943	8,00
5,0	0,0278	0,9722	0,986	8,87
10,0	0,0083	0,9917	0,996	8,93
30,0	0,0010	0,9990	0,999	8,99

Sabiendo que, para los electrones, $m_0c^2 = 0,51$ MeV, podemos representar fácilmente una curva de la variación de v^2 en m^2/s^2 con respecto a K expresada en MeV. Esta curva ha sido trazada sobre el gráfico que representa los resultados obtenidos en el experimento de la velocidad límite (figura 1-3). Como puede verse, el acuerdo entre teoría y experimento es bastante bueno y corrobora favorablemente la dinámica revisada, al igual que lo hace la forma de la variación de la masa con la velocidad que se muestra en la figura 1-5.

Si deseáramos representar en una curva la variación de v^2 en función de K para los protones, lo único que necesitaríamos sería hacer $m_0 = 1,672 \times 10^{-27}$ kilogramos, lo cual da $m_0c^2 = 0,938$ GeV (o bien 938 MeV), y la tabla 1-4 suministraría el resto de la información necesaria. El que los resultados así obtenidos para los protones sean realmente los correctos, queda ampliamente confirmado por el funcionamiento de los grandes aceleradores nucleares, evidenciando claramente la validez de la ecuación (1-26) para partículas de todo tipo.

Entre las diversas características de estas leyes modificadas del movimiento, el fenómeno de la velocidad límite c es quizás el más notable. Significa que la energía (y la masa) pueden almacenarse en las partículas atómicas sin aumentar por ello apreciablemente su velocidad. Para comprobar esto en detalle es conveniente volver a escribir la ecuación (1-16) de la siguiente manera:

$$(1 - v^2/c^2)^{1/2} = E_0/E$$

Por tanto,

$$v^2/c^2 = 1 - (E_0/E)^2 \quad (1-27a)$$

y entonces

$$v/c = [1 - (E_0/E)^2]^{1/2}$$

Para $E \gg E_0$ resulta, aproximadamente,

$$v/c \approx 1 - \frac{1}{2}(E_0/E)^2 \quad (1-27b)$$

Por ejemplo, el acelerador de electrones de Harvard - M.I.T. posee como inyector un acelerador lineal (igual al empleado en la película sobre la velocidad límite) que suministra a los electrones 15 MeV de energía. El acelerador principal comunica a los electrones cerca de 5 GeV ($= 5000$ MeV). Haciendo uso de estos valores se tiene

Inyección del acelerador lineal (15 MeV) $\rightarrow v/c \approx 0,9995$

Energía final (5 GeV) $\rightarrow v/c \approx 0,99999995$

Por tanto, la variación de v/c posterior a la aceleración preliminar es sólo de unas 5 partes en 10^4 . Estas enormes máquinas nucleares podían denominarse con mayor propiedad “ponderadores”¹ en lugar de aceleradores, puesto que con una aproximación excelente se limitan a añadir masa a las partículas inyectadas sin producir un aumento apreciable en la velocidad.

MOVIMIENTO BAJO UNA FUERZA CONSTANTE

El problema dinámico más sencillo de la mecánica clásica es el del movimiento de un cuerpo bajo una fuerza constante. Veamos la forma en que este problema se modifica en la nueva dinámica. Supongamos que una fuerza F actúa sobre un cuerpo durante un tiempo t (supondremos un movimiento unidimensional); el cuerpo se supone inicialmente en reposo y termina con una velocidad v . Entonces,

$$Ft = mv = \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (1-28)$$

¹ Este nombre fue propuesto por primera vez hacia 1945 por el profesor A. G. Hill del M. I. T.

Por tanto

$$1 - v^2/c^2 = (m_0v/Ft)^2$$

$$c^2 = v^2[1 + (m_0c/Ft)^2]$$

y

$$v(t) = \frac{c}{[1 + (m_0c/Ft)^2]^{1/2}} \quad (1-29)$$

Este es un resultado de aspecto un tanto complejo. Consideremos dos casos extremos:

(a) $Ft \ll m_0c$:

$$(m_0c/Ft)^2 \gg 1$$

Por tanto,

$$v(t) \approx \frac{c}{(m_0c/Ft)} = \frac{F}{m_0} t$$

(b) $Ft \gg m_0c$:

$$(m_0c/Ft)^2 \rightarrow 0$$

Por tanto,

$$v(t) \approx c$$

El caso (a) corresponde a la mecánica newtoniana ordinaria. El caso (b) pone en evidencia la propiedad, ahora ya familiar para nosotros, de existir una velocidad límite constante c para el movimiento bajo cualquier tipo de fuerza, con independencia de su magnitud o del tiempo durante el cual se la aplique.

«LA CAJA DE EINSTEIN DESQUICIADA»

De acuerdo con nuestras actuales creencias, expresadas mediante la relatividad especial, la velocidad de la luz en el espacio libre representa un límite superior, no sólo a la velocidad de partículas materiales como pueden ser los electrones, sino también a la velocidad con la que puede propagarse cualquier tipo de interacción gravitatoria, nuclear, eléctrica, etc. Si no sucediese así resultaría po-

sible (como discutiremos más tarde) el llegar a una paradoja en la cual los papeles de causa y efecto se intercambiarían según el punto de vista adoptado (véase la discusión sobre causalidad hacia el final del capítulo 4).

Una consecuencia particular del límite de la velocidad física igual a c es que el concepto clásico de cuerpo rígido ideal carece de sentido en la relatividad especial. (Y hablando estrictamente, tampoco puede ser justificado en la mecánica clásica.) Entendemos por cuerpo rígido un objeto a través del cual puede transmitirse información de tipo físico en un tiempo arbitrariamente corto, de modo que el sólido se pone en movimiento instantáneamente, y como una sola unidad, al aplicarle una fuerza en cualquiera de sus puntos. Para cualquier tipo de caja, la información de que uno de sus extremos ha sido golpeado se transmite en forma de onda elástica, cuya velocidad sabemos que es inferior en muchos órdenes de magnitud a la de una señal luminosa. Por tanto, la argumentación de la caja de Einstein no puede sostenerse en su forma original. En el extremo receptor de la caja, la primera información que se recibe de que algo ha sucedido en el extremo opuesto es la llegada de la propia radiación. Podemos, sin embargo, modificar la anterior argumentación de la manera siguiente.

Ignorando por completo cualquier tipo de conexión entre los extremos de la caja, y considerándolos como dos masas separadas m_1 y m_2 (figura 1-6), supongamos que uno de los extremos, de masa inicial m_1 emite una cantidad de energía E para $t = 0$ y experimenta una variación en su masa, convirtiéndose en m'_1 . Adquiere una velocidad v_1 que viene dada por

$$v_1 = \frac{-E/c}{m'_1}$$

Si m_1 se encontrase inicialmente en $x = 0$, su posición en cualquier instante posterior vendría dada por

$$x_1(t) = -\frac{E}{m'_1 c} t \quad (1-30)$$

Cuando la energía llega a m_2 (para $t = L/c$) da lugar a un retroceso y a una variación en la masa de tal modo que para la posición de m_2 , tenemos:

$$x_2(t) = L + \frac{E}{m'_2 c} (t - L/c) \quad (1-31)$$

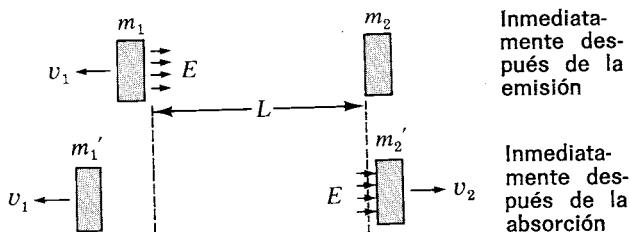


Fig. 1-6. "La caja de Einstein desquiciada." Procesos de retroceso que tienen lugar en dos masas no conectadas entre sí debido a una ráfaga de energía radiante emitida por una de estas masas (m_1) y absorbida por la otra (m_2).

Sea M la masa total y sea \bar{x} la posición del centro de masas antes de ser emitida la radiación desde m_1 y \bar{x}' una vez que ha sido absorbida en m_2 . Entonces,

$$M\bar{x} = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot L \quad (1-32)$$

y

$$M\bar{x}' = m_1' \left(\frac{-E}{m_1'c} t \right) + m_2' \left[L + \frac{E}{m_2'c} (t - L/c) \right]$$

es decir,

$$M\bar{x}' = -\frac{E}{c} t + m_2'L + \frac{E}{c} t - \frac{E}{c^2} L \quad (1-33)$$

Por tanto, si $\bar{x}' = \bar{x}$,

$$\Delta m_2' = m_2' - m_2 = \frac{E}{c^2} = -\Delta m_1' \quad (1-34)$$

Por consiguiente, el principio de la inercia de la energía posee una base teórica más sólida, si bien en esta etapa en que nos encontramos lo hemos justificado a partir del comportamiento de las partículas observado experimentalmente.

ALGUNAS OBSERVACIONES

En este capítulo hemos presentado pruebas de que el comportamiento de partículas a velocidades muy elevadas no puede describirse en modo alguno me-

diente la dinámica newtoniana. Analizando este comportamiento, y adoptando la suposición de Einstein de que el centro de masas de un sistema aislado no se desplaza espontáneamente, hemos desarrollado algunas relaciones (que parecen experimentalmente válidas para todo tipo de velocidades) que ligan la energía, la cantidad de movimiento y la masa. Esto nos ha permitido alcanzar bastante rápidamente ciertas conclusiones dinámicas de importancia. Por otro lado, está claro que en la argumentación utilizada ha intervenido una gran cantidad de suposiciones; son sugestivas, pero en modo alguno irresistibles. Además, cabe preguntarse qué es lo que todo esto tiene que ver con las cosas, con que normalmente se piensa al mencionarse la relatividad —la contracción de Lorentz, los sistemas de referencia, el espacio-tiempo, el experimento de Michelson-Morley. La respuesta es que la conexión es muy próxima. Pero aparte de una pequeña insinuación hecha en nuestra discusión de los resultados del experimento de la velocidad límite, hasta ahora no hemos intentado enfrentarnos con estos aspectos fundamentales de la relatividad. Hay una buena razón para ello: cada uno de los experimentos citados ha sido llevado a cabo dentro de un solo sistema de referencia —el laboratorio del experimentador. Pero los conceptos de distancia, tiempo y velocidad intervinieron en todo instante; sin ellos resulta imposible la formulación o el estudio de la dinámica.

Fue al intentar explicar los fenómenos ópticos cuando la necesidad de una revisión drástica de nuestras ideas acerca del espacio y el tiempo se hizo imprescindible. El desarrollo de este problema, que culmina con el experimento de Michelson-Morley, es el tema del capítulo 2. Veremos entonces cómo Einstein, mediante su insistencia en la necesidad de un nuevo examen de las bases de la medida en la dinámica, hizo posible la integración de todo en un único esquema dinámico. Así resulta que los mismos conceptos de espacio y de tiempo son adecuados para la óptica y para el electromagnetismo, así como para el comportamiento dinámico no newtoniano que hemos estado discutiendo en este capítulo. Nuestro programa, entonces, consistirá en describir en primer lugar la situación a la que condujeron los hechos observados en el campo de la óptica, para demostrar seguidamente la forma en que Einstein eliminó el conflicto que aparentemente existía entre la óptica y la mecánica newtoniana e ilustrar, por último, algunas de las aplicaciones de la formulación de Einstein del principio de la relatividad.

PROBLEMAS

- I-1. Una ráfaga de 10^{14} electrones acelerados a una energía de 15 MeV por elec-

trón es interceptada por un bloque de cobre que actúa como blanco con una masa de 100 g. Si el bloque se encuentra térmicamente aislado, ¿cuál es su aumento de temperatura? El calor específico del cobre es de 0,98 cal/g °K.

1-2. La intensidad de la radiación solar inmediatamente fuera de la atmósfera terrestre es aproximadamente de 8×10^4 joules/m² min.

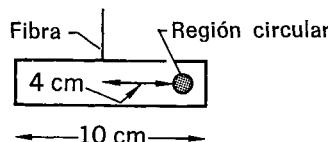
(a) ¿Cuál es la fuerza aproximada que esta radiación ejerce sobre el globo-satélite reflector Echo II? El Echo II está formado por una cápsula esférica de radio 20,4 m. Su superficie está formada por una capa de mylar con un espesor de 9×10^{-6} m comprendida entre dos capas de aluminio cada una de las cuales posee un espesor de $4,5 \times 10^{-6}$ m. La densidad del mylar es de 10³ kg/m³; la del aluminio es de $2,7 \times 10^3$ kg/m³.

(b) Comparar esta fuerza con la fuerza gravitatoria ejercida sobre el globo por el Sol.

1-3. (a) La energía radiante procedente del Sol que se recibe en la Tierra en una superficie perpendicular a los rayos solares es aproximadamente igual a 2 cal/cm² minuto. ¿Qué fuerza total se ejercería sobre la Tierra entera a causa de la radiación solar si se absorbiese completamente? Comparar esta fuerza con la fuerza gravitatoria del Sol sobre la Tierra.

(b) ¿Qué radio debería tener una partícula de polvo en el espacio para que se encontrarse en equilibrio bajo la acción combinada de la atracción gravitatoria del Sol y la repulsión debida a la radiación?

1-4. Una laminilla rectangular de aluminio con una longitud de 10 cm y una masa total de 100 mg cuelga verticalmente de una delgada fibra en el vacío (ver la figura). El período de la oscilación de torsión es 40 s. ¿Cuál será la desviación de cada extremo de la laminilla una vez alcanzado el equilibrio si en una región circular situada a 4 cm del centro incide 1 watt de energía radiante? Supóngase que el 60 % de la radiación es reflejada. El momento de inercia, respecto a un eje que pase por su centro, de una barra de masa M y longitud L es $ML^2/12$.



1-5. Se ha dicho que un paraguas abierto recoge en un día despejado una energía radiante por unidad de tiempo suficiente para hacer funcionar una lavadora. A partir de esta proposición calcular la masa aproximada que pierde el Sol cada segundo.

1-6. Si toda la luz empleada en la ciudad de Nueva York durante una hora de

la tarde pudiera capturarse y meterse en una caja, ¿en cuánto aumentaría, aproximadamente, el peso de la caja?

I-7. Se conecta una pila a la bombilla de una linterna de bolsillo, y se la equilibra exactamente en un platillo de una balanza. La pila mantiene una corriente media de 0,1 A con una tensión media de 1 volt durante 3 horas. Suponiendo que toda esta energía es radiada, ¿cuál debe ser el orden de magnitud de la sensibilidad $\Delta M/M$ de la balanza de manera que pueda detectarse una desviación?

I-8. (a) Sir Arthur Eddington señaló en una ocasión que si pudiera meterse 1 g de electrones en una esfera de radio 10 cm, la masa asociada a su energía potencial eléctrica sería del orden de 10 millones de toneladas. Compruebe el lector esta afirmación suponiendo que los electrones forman una bola de carga con densidad uniforme. (La energía potencial electrostática de una esfera de carga q y radio r es $3 kq^2/5r$, en donde q representa la carga en coulombs, r el radio en metros, y k la constante de la ley de Coulomb $F = kq_1 q_2/r^2$, que vale $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{coulomb}^2$.

(b) El cálculo realizado en (a) puede parecer un poco extraño. Sin embargo, calcúlese ahora la masa de todos los electrones de una esfera de agua con un radio de 10 cm. Si no fuese por los núcleos positivamente cargados, nos encontraríamos con una situación casi exacta a la que describe Eddington.

I-9. Un millonario excéntrico decide esterilizar su piscina de 10^6 litros haciendo hervir toda el agua que contiene. Para calentarla emplea la reacción de fusión

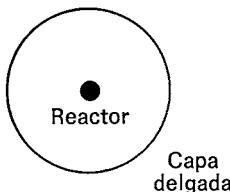


Suponiendo que el rendimiento del sistema calefactor es del 20 %, ¿cuánto deberá pagar por el tritio (${}^3\text{H}$) necesario para elevar la temperatura de la piscina desde 20°C hasta 100°C? Para elevar la temperatura de 1 g de agua 1°C se necesitan 4,2 joules. El precio del tritio es aproximadamente de 350 ptas por cm^3 de gas en C.N.

Masas atómicas	${}^1\text{H}$	1,0081 uma
	${}^3\text{H}$	3,0170 uma
	${}^4\text{He}$	4,0039 uma

I-10. Un reactor nuclear esférico con una masa de 10^{30} kg situado en el espacio interestelar se encuentra totalmente rodeado de una delgada capa esférica no rígida de materia cuya masa es de 10^{26} kg (ver la figura). El reactor pierde 10^{10} kg/s de su masa debido a la emisión de radiación electromagnética. (Si esto se asemeja a la descripción de una estrella no es ninguna casualidad.) Esta radiación es completamente absorbida por la capa de materia que cubre el reactor. ¿Cuál deberá

ser el radio de la capa esférica de manera que la repulsión que sobre ella ejerza la radiación sea lo suficientemente grande para equilibrar la atracción de origen gravitatorio que sobre ella ejerce el reactor? (Considérense las fuerzas que actúan sobre una pequeña porción de la capa esférica.)

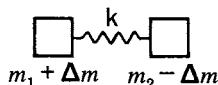


I-11. (a) El calor de formación del CO a partir del C y del O es aproximadamente igual a 20 kcal/mol. Si este calor se deja escapar, ¿cuánto más ligero es el monóxido de carbono que sus elementos constituyentes?

b) Si los núcleos de los isótopos abundantes del C y del O (^{12}C y ^{16}O) pudieran combinarse para dar lugar a ^{28}Si en su estado normal, escapando toda la energía en exceso, ¿en qué tanto por ciento sería el núcleo de silicio más ligero que los núcleos que lo formaron?

(c) El proceso (b) no sería muy probable a menos que los núcleos que reaccionen pudieran aproximarse entre sí una distancia de 10^{-14} m en contra de su repulsión eléctrica. ¿Qué orden de temperatura se necesitaría en una mezcla de C y O para que esto pudiera llegar a suceder? En la expresión de la ley de Coulomb ($F = kq_1 q_2/r^2$) el valor de k es de 9×10^9 N m²/coulomb².

I-12. (a) Un cuerpo con una masa $m_1 + \Delta m$ se encuentra conectado a otro cuerpo cuya masa es $m_2 - \Delta m$ a través de un muelle de constante k y masa des-



preciable (véase la figura). El sistema se encuentra en reposo sobre una mesa sin rozamiento. Se emite un impulso de radiación por el primer cuerpo y es absorbido por el segundo, variando las masas a m_1 y m_2 y entrando el sistema en oscilación. Si el tiempo de tránsito de la radiación es despreciable frente al período de oscilación, demostrar que la elongación máxima del muelle viene dada por

$$x = c \Delta m \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 k} \right)^{1/2}$$

(b) Estúdiese cuantitativamente lo que sucedería si el muelle pudiera hacerse más y más resistente, sin límite alguno.

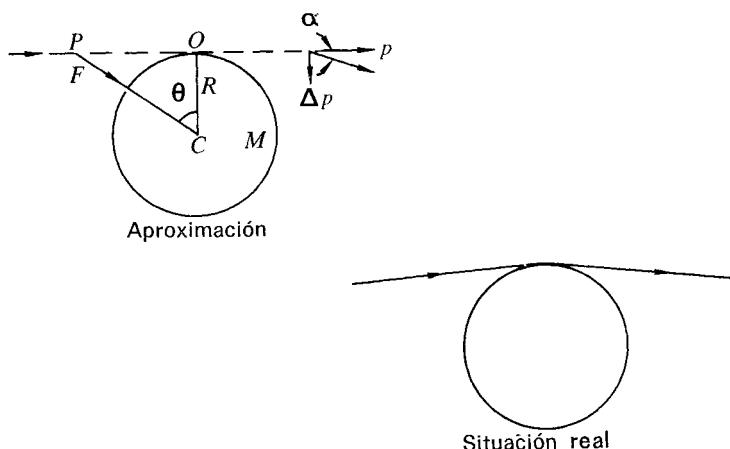
1-13. La discusión sobre la caja de Einstein del texto supone que el tiempo de tránsito de la energía radiante es L/c (en donde L es la longitud de la caja), llegándose a esta conclusión al despreciar la distancia que retrocede la caja. En el texto también se desprecia la disminución de masa de la caja debida a la emisión de energía radiante. Demostrar que si se toman en consideración ambas cosas se sigue obteniendo que $m = E/c^2$.

1-14. Una vez obtenida la relación $m = E/c^2$ para la masa inercial de la energía radiante, Einstein empezó a especular en 1911 sobre si este mismo valor de m , sustituido en la fórmula de la gravitación universal, podría describir la desviación por el Sol de los rayos de luz procedentes de una estrella lejana, por lo cual la dirección aparente de la estrella aparecería ligeramente desplazada. (Un astrónomo alemán, J. Soldner, tratando la luz sencillamente como partículas newtonianas que poseían una velocidad c , había llevado a cabo este mismo cálculo allá en 1801, hecho que era desconocido para Einstein.)

Calcular la desviación α de un fotón que roza justamente el borde del Sol suponiendo que, en primera aproximación, su trayectoria es una línea recta recorrida siempre a una velocidad c , pero que la componente de la fuerza gravitatoria perpendicular a la trayectoria ($F \cos \theta$) integrada a lo largo de la trayectoria entera acaba suministrando al fotón una componente transversal de la cantidad de movimiento

$$\Delta p = \int F \cos \theta \, dt$$

y por tanto, la desviación α vale $\Delta p/p$, en donde $p = E/c$ (ver la figura). Sea x la distancia medida a lo largo de la trayectoria. Tomando como origen de x el punto



en el cual el rayo roza con el Sol, los límites de x son $\pm \infty$ y tenemos también que $dt = dx/c$ y $CP^2 = x^2 + R^2$.

El resultado es $\alpha = 2GM/c^2R$. Una vez verificada esta fórmula opérese hasta obtener el valor numérico de α en segundos de arco. (*Nota:* se cree que esta respuesta es errónea en principio. La teoría de la relatividad de Einstein incluye un factor adicional de valor 2 en la expresión de la desviación teórica.)

I-15. Se suministra a una partícula una energía cinética igual a n veces su energía en reposo m_0c^2 . ¿Cuáles son:

- (a) su velocidad?
- (b) su cantidad de movimiento?

I-16. (a) Hallar el voltaje a través del cual debe acelerarse un electrón partiendo del reposo de forma que su masa aumente en un 0,4 %.

- (b) Hallar su velocidad bajo estas condiciones.

I-17. Un protón es sometido en un sincrotrón a una aceleración equivalente a 500 millones de volts.

- (a) ¿Cuál es su masa, expresada como múltiplo de la masa en reposo?
- (b) ¿Cuál es su velocidad expresada como fracción de la velocidad de la luz?

I-18. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas de un sistema formado por un fotón de energía $h\nu$ y un átomo cuya masa en reposo es m_0 ?

¿En qué forma variaría la respuesta si el átomo se encontrase en estado excitado? ¿Es esto razonable desde el punto de vista no relativista?

I-19. (a) El cociente v/c se designa muy a menudo mediante el símbolo β . Demostrar que si $\beta \ll 1$ las expresiones siguientes son válidas, despreciando términos del orden de β^2 :

$$E = m_0c^2 + m_0v^2/2 = m_0c^2(1 + \beta^2/2)$$

$$K = m_0v^2/2 = m_0c^2\beta^2/2$$

$$pc = m_0vc = m_0c^2\beta$$

$$\gamma = 1 + \beta^2/2$$

(b) Demostrar que si $\gamma = \epsilon^{-1} \gg 1$ las expresiones siguientes son válidas, despreciando términos de orden ϵ^2 :

$$\beta = 1 - \epsilon^2/2$$

$$E = \epsilon^{-1}m_0c^2$$

$$K/E = 1 - \epsilon$$

$$pc/E = 1 - \epsilon^2/2$$

$$K/pc = 1 - \epsilon + \epsilon^2/2$$

I-20. (a) El índice de refracción del aire para la luz visible es aproximadamente igual a 1,000277. ¿Cuál sería la energía cinética de un electrón cuya velocidad al recorrer un tubo en el que se ha efectuado el vacío sea la suficiente para viajar a la par que una señal luminosa a través del aire?

(b) ¿Qué fuerza ejercería un chorro de tales electrones equivalente a una corriente de 16 mA sobre un bloque de material que los interceptase?

I-21. (a) ¿Cuál es el error en tanto por ciento que se comete al emplear la expresión $1/2 mv^2$ para la energía cinética de un cuerpo si su velocidad es de

- (1) 3 m/s
- (2) 300 m/s (velocidad del sonido en el aire)
- (3) 10^4 m/s (velocidad que necesita un cuerpo para escapar de la Tierra)
- (4) 0,1 c
- (5) 0,9 c.

(b) Si el error experimental cometido al medir v es del 1 % (aproximadamente), ¿cuánto debe valer v para que las correcciones relativistas sean apreciables?

I-22. Un electrón que se mueve con una velocidad de 0,5 c según el eje de las x penetra en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico uniforme según el eje de las y . Demostrar que la componente de la velocidad de la partícula según el eje de las x deberá disminuir. (Tomado de E. M. Purcell, *Electricidad y Magnetismo*, Ed. Reverté, Barcelona, 1969.)

I-23. Una partícula de masa m , carga q y velocidad inicial \mathbf{v}_0 penetra en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico uniforme \mathbf{E} perpendicular a \mathbf{v}_0 . Hallar la trayectoria que describirá la partícula y demostrar que será una parábola siempre que la velocidad de la partícula sea mucho menor que c . (Tomado de H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950.)

I-24. Una barra uniforme de masa M y longitud $2L$ gira con una frecuencia angular $\omega \ll c/L$ en torno a su centro. Su momento angular y su energía cinética vienen dadas por

$$I = \frac{ML^2\omega}{3} \left(1 + A \frac{\omega^2 L^2}{c^2} + \dots \right)$$

$$K = \frac{ML^2\omega^2}{6} \left(1 + B \frac{\omega^2 L^2}{c^2} + \dots \right)$$

¿Cuáles son los valores de A y de B ?

I-25. El “radio clásico” del electrón, r_0 , es una combinación de constantes físicas numéricamente igual a $2,818 \times 10^{-15}$ m. Se sabe también que el electrón posee un momento angular intrínseco o spin, igual a $\hbar/2 = 5,272 \times 10^{-35}$ J s. Si se asimila el electrón a una esfera uniforme de radio r_0 que gira a una frecuencia angular ω , obtener el valor numérico de ω . (Hacer uso de un análisis no relativista.) ¿Cree el lector que es éste un modelo razonable? ¿Por qué no? El momento de inercia de una esfera uniforme es $2MR^2/5$.

I-26. Calcular el aumento relativista de masa en tanto por ciento asociado a la energía cinética de un electrón que se mueve en la primera órbita de Bohr para (a) el hidrógeno ($Z = 1$), (b) el uranio ($Z = 92$). La órbita viene definida por $F = mv^2/r$ y por $mvr = \hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J s. La fuerza F viene dada por $F = kq_1q_2/r^2$, en donde $q_1 = Ze$, $q_2 = e = 1,6 \times 10^{-19}$ C y $k = 9 \times 10^9$ N m²/C².

*¿Deseas llamar mi atención sobre algo en especial?
Sí, sobre el curioso incidente protagonizado por el perro
durante la noche.
Pero si el perro no hizo absolutamente nada durante la
noche.
Precisamente ése fue el curioso incidente, observó Sherlock
Holmes.*

LAS MEMORIAS DE SHERLOCK HOLMES (1893)

*La interpretación de estos resultados es que no hay co-
rrimiento de las bandas de interferencias.*

A. A. MICHELSON (1881)

2

Perplejidad ante la propagación de la luz

LA EVIDENCIA recogida en el capítulo 1 no nos deja lugar a dudas acerca del profundo significado que tiene para la física una velocidad igual a la velocidad de la luz en el vacío. Sin embargo, cuando intentamos acomodar este hecho dentro del esquema de la dinámica clásica tropezamos con serias dificultades. En efecto, a primera vista, una velocidad universal supone una contradicción. Sabemos que la velocidad de un movimiento determinado viene expresada de forma diferente al variar los sistemas de referencia. ¿Cómo es entonces posible incorporar una velocidad única en las ecuaciones de la dinámica? ¿Qué justificación tenemos para hablar de *la* velocidad de la luz sin hacer referencia a ningún sistema de observación determinado? (Cuando decimos, por ejemplo, que la velocidad del sonido tiene un cierto valor, sabemos que esto sólo tiene sentido si lo consideramos como una afirmación sobre la velocidad de una onda con relación al propio medio en el que se propaga.) Como veremos en el capítulo 3, la clara respuesta que Einstein proporcionó a estos interrogantes en contraste con las explicaciones parciales o las tentativas de explicación que hasta entonces se habían propuesto fue lo que le convirtió en el verdadero creador de la relatividad especial. Y un factor definitivo que determinó su éxito fue su capacidad para reconocer la verdadera importancia de las cosas que *no* tienen lugar (capacidad parecida a la que Conan Doyle atribuye a Sherlock Holmes). El más célebre de todos estos fenómenos es el que se refiere a los resultados de lo que universalmente se conoce como el *experimento de Michelson-Morley*, aunque muchos otros fenómenos ópticos, algunos de los cuales ya eran conocidos antes de que este experimento fuese llevado a cabo, contenían pistas para la resolución del pro-

blema. En este capítulo examinaremos parte de la importante evidencia existente relativa a la propagación de la luz, tanto en el vacío como en medios materiales transparentes.

LA NATURALEZA DE LA LUZ

La propagación de la luz implica el transporte de energía desde una fuente. La imagen más sencilla de este proceso es la que corresponde a un chorro de partículas emitido desde la fuente; Pitágoras propuso este mecanismo allá por el siglo vi a. de C. Explica muy adecuadamente la propagación de la luz en línea recta (hecho evidenciado por la definición del contorno de las sombras) y el que la luz pueda atravesar con toda facilidad el vacío. En 1667 hizo aparición la primera exposición clara de una teoría diferente, según la cual la luz era una vibración que se propagaba a través de un medio. Esta teoría fue propuesta por Robert Hooke en su famoso libro *Micrographia*. Por esta época fueron observados algunos de los fenómenos que no podían conciliarse fácilmente con una teoría corpuscular de la luz —los brillantes colores de finas películas de aire comprendidas entre superficies de cristal y la penetración de la luz en la región de la sombra geométrica. Huygens, en su *Treatise on Light*,¹ desarrolló explícitamente la teoría ondulatoria y mostró la manera en que explicaba la reflexión y la refracción.

La teoría corpuscular y la teoría ondulatoria han sido los únicos modelos claramente definidos mediante los cuales ha podido describirse la luz y su propagación. Durante mucho tiempo —realmente, hasta el propio siglo XX— se consideró que ambas teorías eran mutuamente exclusivas; parecía obvio que el aceptar una implicaba el rechazo de la otra. Desde el punto de vista actual deben aceptarse ambos aspectos del comportamiento de la luz, ondulatorio y corpuscular: los hechos no pueden迫使 todos en el molde de una u otra teoría. Hemos aprendido también (en gran parte gracias a Einstein) que deberíamos centrar nuestra atención en los hechos escuetos de la observación científica, sin que nuestra adhesión a alguna teoría particular nos haga leer en ellos más de lo que realmente existe allí. Para ser concretos, las propiedades ondulatorias de la luz son irrefutables —difracción, interferencia, polarización, etc. Pero las ondas de la experiencia corriente necesitan de un medio para propagarse. ¿Qué cosa más natural, por tanto, que construir una especificación detallada del medio que puede transmitir las ondas de la luz y proceder entonces a su detec-

¹ C. Huygens, *Treatise on Light* (escrito en 1678 y publicado en 1690), reimpresión completa de la edición original inglesa de 1912, traducción e introducción de S. P. Thompson, Dover, Nueva York.

ción? Sin embargo, este camino condujo sólo a la frustración. Einstein demostró que la búsqueda del medio —*el éter luminífero*— era estéril e innecesaria. El éter no era más que un medio de despistar, de desviar la atención de los físicos por un camino que no conducía a ninguna parte. Quizás no debiéramos introducir el éter en la discusión presente, ya que sabemos de antemano que acabaremos dejándolo de lado. Sin embargo, no puede apreciarse debidamente el nacimiento de la relatividad especial sin mencionar la importancia y la apariencia de realidad que el éter llegó a poseer. Por tanto, en la sección siguiente, ofrecemos una breve discusión de este tema.

EL ÉTER LUMINÍFERO

La historia de la física del siglo XIX es en gran parte la historia del triunfo de la teoría ondulatoria de la luz. A comienzos del siglo (1801-1804) Thomas Young realizó sus estudios cuantitativos sobre los fenómenos de interferencia. A partir de 1818, Fresnel publicó cálculos que eran capaces de explicar en detalle los hechos relativos a los fenómenos de interferencia, difracción y polarización. Como, de acuerdo con las deducciones de Huygens, una teoría ondulatoria era tan eficaz como una teoría corpuscular a la hora de describir las propiedades de los rayos de luz —la propagación rectilínea y las leyes de la reflexión y la refracción—, la imagen de la luz como una vibración propagándose en un medio de manera análoga a como lo hacían las ondas transversales en una cuerda parecía ser algo irrefutable. Pero, ¿qué podía decirse acerca de las propiedades del medio —denominado *éter luminífero*— en el cual tenían lugar estas vibraciones?

Hasta 1850, aproximadamente, la propagación de la luz fue considerada en términos puramente mecánicos. Esto, sin embargo, planteó dificultades muy considerables, ya que resultaba difícil comprender el porqué la velocidad de la luz podía ser tan elevada. (La primera medida cuantitativa de esta velocidad fue realizada por el astrónomo danés Roemer en 1675. Observó las variaciones sistemáticas de los tiempos, registrados en relojes situados en la Tierra, para los cuales las lunas de Júpiter se internaban en la sombra del planeta, y fue lo suficientemente astuto como para darse cuenta de que estas variaciones estaban ligadas a la posición de la Tierra en su órbita y al tiempo de tránsito asociado de la luz a lo largo de una distancia variable.) Una velocidad de onda superior a los ciento ochenta mil kilómetros por segundo era superior en muchos órdenes de magnitud a la velocidad de cualquier otra perturbación mecánica, y necesitaba de un medio que fuese por un lado lo suficientemente tenue como para que los planetas pudieran atravesarlo año tras año sin una pérdida sen-

sible de velocidad pero que, por otro lado, desarrollara unas fuerzas recuperadoras muy elevadas al desplazarle del equilibrio —dado que la velocidad de propagación de una onda depende de esta propiedad restauradora del medio. También resultaba insatisfactorio el que la única pista sobre las propiedades del medio fuese el propio valor medido de c ; nada era conocido a priori.

La situación cambió cuando James Clerk Maxwell, en 1861, expuso su teoría electromagnética de la luz. Resultaba ahora posible *predecir* el valor numérico de la velocidad de la luz para cualquier medio dado en función de propiedades eléctricas y magnéticas del mismo, susceptibles de medir. Ya no existía tal abismo entre éter y materia ordinaria, aunque la intangibilidad del éter pudiera todavía parecer algo misterioso. La teoría ondulatoria parecía haber conseguido una justificación definitiva y el éter una realidad que no podía ponerse en entredicho.

Una vez garantizada la existencia del éter quedaba entonces bastante claro lo que se entendía por “velocidad de la luz”. Cualquier onda posee una velocidad definida con respecto al medio a través del cual se propaga. El valor de esta velocidad puede ser función de la longitud de onda (fenómeno de dispersión) pero aparte de esto queda unívocamente definida, al menos para un medio isótropo (es decir, un medio en el que no existen direcciones privilegiadas). En particular, la velocidad de la luz a través de un medio debe ser por completo independiente de cualquier movimiento de la fuente, en contraste directo con el mecanismo de emisión de partículas en el cual cabría esperar que la velocidad *relativa a la fuente* fuese la magnitud constante. La aceptación de la teoría ondulatoria no dependía de que pudiera comprobarse experimentalmente que el valor medido de c fuese efectivamente independiente de la velocidad de la fuente. De haber sido este hecho conocido por Huygens, sin duda alguna lo hubiera empleado como una prueba más de que un modelo corpuscular de la luz era por entero inadmisible. Sin embargo, la teoría ondulatoria parecía quedar justificada adecuadamente mediante otro tipo de evidencia, y el efecto del movimiento de la fuente no fue explorado hasta que la teoría ondulatoria encontró a su vez serios tropiezos. En los capítulos 3 y 5 tendremos más que decir acerca de los experimentos sobre radiación procedente de fuentes en movimiento; de momento nos limitaremos a enunciar la conclusión de que la velocidad de una fuente luminosa *no* se comunica a la radiación que emite.

Por tanto, situémonos en el caso de un físico de alrededores de 1900 y consideremos algunos interesantes fenómenos ópticos desde el punto de vista de la teoría ondulatoria.

ABERRACIÓN ESTELAR

En 1725 el astrónomo británico James Bradley intentó medir las distancias a algunas estrellas buscando una variación aparente de sus posiciones a medida que la Tierra se movía alrededor del Sol. Esperaba emplear el diámetro de la órbita terrestre de una manera semejante en esencia a la que emplea un topógrafo para medir distancias mediante triangulación. Observó un fenómeno, pero descubrió que no se trataba de paralaje, ya que dependía, no de la posición de la Tierra, sino de su *movimiento* en un punto dado de la órbita. (El verdadero efecto de paralaje es lo suficientemente pequeño como para ser despreciable para la mayoría de las estrellas.)

Consideremos la figura 2-1, en la que se describe la órbita de la Tierra alrededor del Sol, y una estrella observada desde cuatro posiciones distintas de la Tierra, según intervalos de 3 meses. La altitud verdadera de la estrella con relación al plano de la órbita terrestre (la eclíptica) es el ángulo θ_0 . Debido a la variación de posición de la Tierra cabría esperar que la altitud fuese máxima cuando se encontrase en la posición 2 y mínima cuando se hallase en la posición 4. Sin embargo, Bradley encontró que la altitud era máxima en la posición 3 y mínima en la posición 1.

El fenómeno puede ser comprendido mediante la figura 2-2. Un telescopio situado en una Tierra en reposo (a) debería apuntar según la altitud verdadera θ_0 de manera que los rayos de luz procedentes de la estrella pasasen por el eje del instrumento y formasen una imagen en el centro del campo visual. Pero en el caso (b) de una Tierra en movimiento el telescopio debería estar inclinado según un ángulo θ diferente. La diferencia entre ambos ángulos es la aberración, α . Podemos observar un fenómeno comparable cuando llueve. Si las gotas caen verticalmente a velocidad w , pero nos encontramos en un vehículo que circula a una velocidad v , las gotas de agua apparentarán describir trayectorias rectas inclinadas un ángulo igual al $\text{arc tg}(v/w)$ respecto a la vertical.

El efecto de aberración no sería nunca detectable si la Tierra se moviese siempre a la misma velocidad, pero las *variaciones* en el sentido del movimiento a lo largo del año dan lugar a una variación sistemática de la posición aparente. Esto puede analizarse cuantitativamente con ayuda de la figura 2-1. En las posiciones 1 y 3 el vector velocidad de la Tierra y la línea recta trazada desde el Sol a la estrella forman un ángulo θ_0 entre sí. En las posiciones 2 y 4 la velocidad de la Tierra forma un ángulo recto con la recta que va desde el Sol a la estrella; el ángulo de aberración alcanza sus valores máximos ($\pm v/c$) en estas posiciones. En las posiciones 1 y 3 tenemos una situación como la que muestra

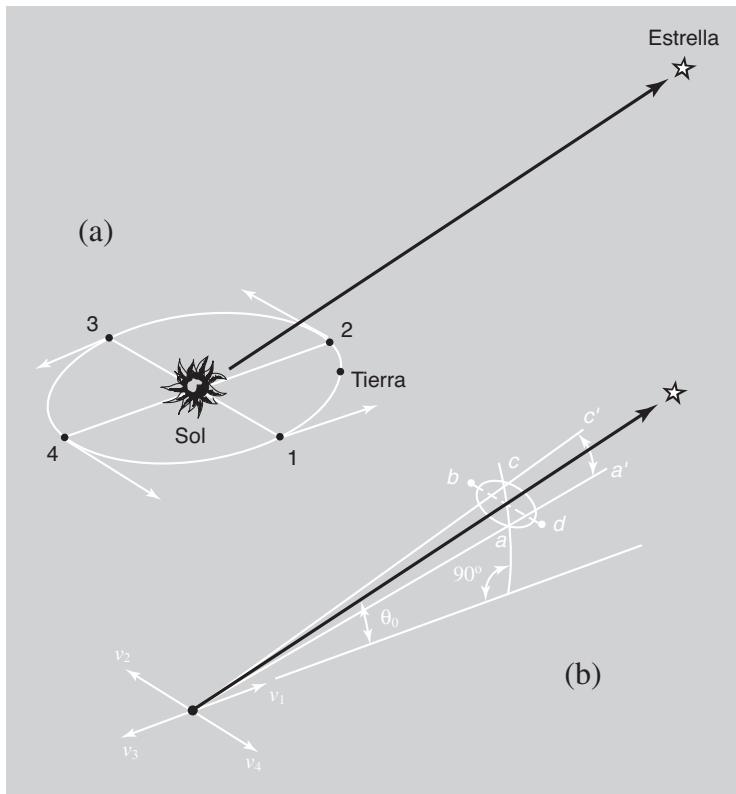


Fig. 2-1. Aberración estelar. (a) Una estrella lejana se observa desde las posiciones sucesivas de la Tierra 1-2-3-4 en el movimiento de giro de esta última alrededor del Sol. (b) En un sistema de coordenadas fijo a la Tierra (pero con la dirección de los ejes fija en el espacio), la posición aparente de la estrella describe la trayectoria elíptica a-b-c-d. El efecto depende de las variaciones en la dirección de la velocidad de la Tierra, pero no de las variaciones de su posición como tal.

la figura 2-2, en donde el ángulo de aberración vale sólo $v \operatorname{sen} \theta_0/c$. Por consiguiente, en el transcurso de un año la estrella aparenta describir una órbita elíptica de eje mayor (medido como un ángulo 2β) igual a $2v/c$ y de eje menor $2\beta \operatorname{sen} \theta_0$. La longitud del eje mayor debería ser la misma para todas las estrellas; la longitud del eje menor depende de la altura θ_0 de una estrella con respecto al plano de la órbita terrestre.

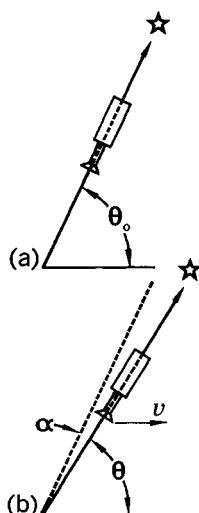


Fig. 2-2. Fundamento de la aberración estelar. (a) Telescopio en reposo dirigido hacia una estrella. (b) Telescopio en movimiento dirigido hacia la misma estrella.

Lo que Bradley observó se correspondía exactamente con la descripción anterior. La figura 2-3 muestra en forma de gráfica algunas de sus observaciones sobre la estrella γ Dragón; puede verse cómo la posición aparente de la estrella varía en la dirección norte-sur en el transcurso de un período de 12 meses.¹ La componente este-oeste de la aberración no fue registrada. (Ténganse en cuenta las dificultades prácticas que entraña la medida de esta componente.) Por tanto, los datos de Bradley abarcan los ejes menores de la trayectoria de la aberración.

Ahora bien, la velocidad de la Tierra alrededor de su órbita es de 30 km/s y por tanto el valor de $2v/c$ es de 2×10^{-4} rad, es decir, aproximadamente 41 segundos de arco. Una trayectoria típica de aberración se asemejaría al contorno de un balón visto desde una distancia de unos 2 km. Los valores de la figura 2-3 abarcan el eje menor de una trayectoria de aberración para la cual $\theta_0 = 75^\circ$, dando una variación entre la altitud máxima y la mínima que se puede calcular como de 39,6" con una variación sinusoidal (¿por qué?) entre

¹ Datos tomados de J. Bradley, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **35**, 637 (1729). Una descripción interesante del trabajo de Bradley, con múltiples detalles, puede encontrarse en A. Stewart, "The discovery of stellar aberration", *Scientific American*, **210** (3), 100 (1964).

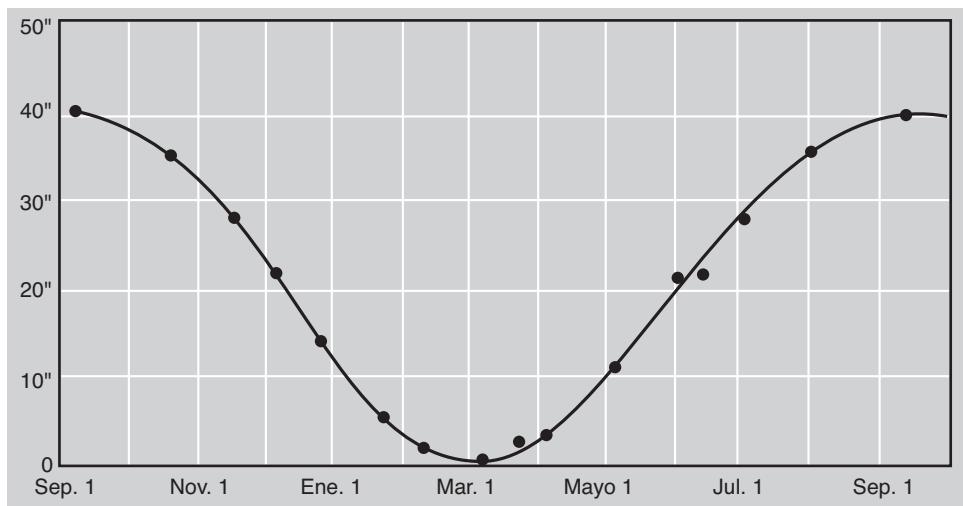


Fig. 2-3. Datos de Bradley sobre la componente norte-sur de la aberración de la estrella γ -Dragón (1727-1728).

estos extremos. El margen observado de variación se corresponde, con una aproximación muy grande, con este valor teórico. En realidad el propio Bradley no pudo efectuar una comprobación teórica cuantitativa de su resultado, puesto que la velocidad de la luz no era conocida con una precisión suficiente. En cambio, como estaba convencido de que la interpretación básica del fenómeno era correcta, empleó los ángulos de aberración observados para obtener un valor mejorado de c , estando bastante bien determinada por aquella época la velocidad de la Tierra alrededor de su órbita.

Cuando intentamos analizar el fenómeno de aberración en función de una teoría de la luz, resulta claro que un modelo corpuscular proporciona una explicación inmediata; es exactamente como la analogía de la lluvia que cae. Sin embargo también puede darse una explicación en función de ondas que atravesen el éter *siempre que* éste permanezca completamente insensible al movimiento de la Tierra. Si, por el contrario, el éter próximo a la Tierra fuese arrastrado por ella, la aberración no tendría lugar. El concepto de un éter completamente insensible al paso de la Tierra debió de parecer algo extraño a muchos físicos, pero con la preponderancia de la teoría ondulatoria se consideró aceptable. Era natural el preguntarse entonces si era posible realizar algún tipo

de mediciones que pusiesen de manifiesto la velocidad de la Tierra a través del éter. Pasaremos a describir a continuación algunos experimentos que tienen relación con esta pregunta.

EXPERIMENTO MODIFICADO SOBRE LA ABERRACIÓN

Supongamos que un telescopio apunta a una estrella cuya dirección real forma 90° con respecto al plano de la órbita terrestre. Sea α el ángulo de aberración desconocido [figura 2-4 (a)] y sea v la velocidad desconocida de la Tierra a través del éter. Supongamos ahora que el tubo del telescopio se llena de agua, con un índice de refracción n . Como la luz atraviesa el agua más lentamente que el aire o el vacío, el tiempo que tardará la luz en recorrer toda la longitud del telescopio vendrá aumentado por el factor n . Cabe esperar, por consiguiente, que para mantener la imagen de la estrella en el centro del campo visual haya que inclinar un poco más el telescopio, hasta alcanzar un nuevo ángulo de aberración β y que el valor de este ajuste pueda emplearse para el cálculo de la velocidad v . A primera vista el ángulo β valdría sencillamente nv/c , pero al analizar este experimento debe tenerse en cuenta que, puesto que la lente del objetivo del telescopio posee ahora aire en un lado y agua en el otro, los rayos de luz que penetran en el telescopio son desviados hacia el eje del instrumento, tal como se indica en la figura 2-4 (b). En el interior del telescopio los rayos deberían formar un ángulo δ con el eje de tal manera que

$$n = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \approx \frac{\beta}{\delta}$$

Como la luz marcha hacia abajo con una velocidad c/n , y el telescopio se mueve hacia un lado con una velocidad v , la condición para que la imagen de la estrella quede centrada en el telescopio es que

$$\delta \approx \frac{v}{c/n} = \frac{nv}{c} \quad (2-1)$$

(Recuérdese que los ángulos han sido trazados muy exageradamente en la figura 2-4.) Aunque no conocemos los valores verdaderos de α , β y δ podemos medir la variación experimentada por la dirección del telescopio, de modo que

$$\beta \approx n\delta \approx \frac{n^2 v}{c} \quad \alpha \approx \frac{v}{c}$$

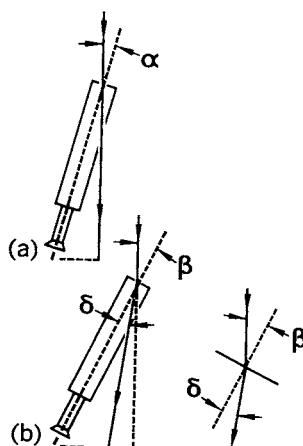


Fig. 2-4. Fundamento del experimento de Airy destinado a mostrar el movimiento de la Tierra a través del éter enfocando hacia una estrella con (a) un telescopio normal; (b) el mismo telescopio lleno de agua.

Por tanto

$$\beta - \alpha \approx (n^2 - 1)v/c \quad (2-2)$$

Todas las magnitudes pueden medirse, con excepción de v , y por tanto resulta posible averiguar su valor. Este experimento fue llevado a cabo por Sir George Airy en 1871. ¿Cuál fue el resultado? No hubo variación alguna en la posición aparente de la estrella.

¿Cómo podemos explicar este resultado negativo? En realidad esto había sido ya predicho por el brillante J. A. Fresnel, quien había sugerido este experimento con muchos años de antelación. Las previsiones de Fresnel estaban basadas, sin embargo, no en la imposibilidad fundamental de detectar el movimiento absoluto, sino en la suposición de que el medio ejercía un arrastre parcial sobre la luz. Había postulado esto en 1818, después de que su compatriota Arago hubiese encontrado que la refracción de la luz de las estrellas a través del cristal aparecía tener lugar como si la Tierra se encontrase en reposo en el éter.

El experimento de Sir George Airy puede analizarse con facilidad en estos términos. Supongamos que el agua arrastra la luz hacia un lado con una fracción f de su propia velocidad v . El experimento ha demostrado que el ángulo β es igual al ángulo de aberración original $\alpha (= v/c)$ y por consiguiente que el án-

gulo δ es igual a α/n . Sea l la longitud del telescopio; en tal caso el tiempo t que tarda la luz en atravesarlo cuando se encuentra lleno de agua viene dado por nl/c . En un tiempo t el telescopio recorre la distancia vt ; si la luz debe aparecer en el centro del ocular su desplazamiento lateral debe valer esta magnitud. Pero, el desplazamiento de la luz medido desde la posición del ocular cuando la luz entra por la parte superior del telescopio es la suma de $l\delta$, debido a la refracción, y fvt , debido al arrastre ejercido por el agua. Por tanto tenemos

$$vt = l\delta + fvt$$

Pero

$$l = ct/n \quad \text{y} \quad \delta = \alpha/n = v/nc$$

Por tanto,

$$vt = \frac{ct}{n} \frac{v}{nc} + fvt$$

de donde

$$f = 1 - 1/n^2 \quad (2-3)$$

La magnitud f se denomina *coeficiente de arrastre* de Fresnel.

Puede parecer verdaderamente curioso el que la naturaleza dé un coeficiente de arrastre con un valor tal que el experimento de Airy, al igual que otros experimentos semejantes a él, proporcionen exactamente el mismo resultado que si la Tierra permaneciese en reposo con relación al éter. ¿Hay alguna manera de que este arrastre aparezca como un efecto *positivo* en lugar de un fenómeno nulo? H. L. Fizeau suministró una respuesta afirmativa por medio de un famoso experimento que llevó a cabo en 1851.

MEDIDA DE FIZEAU DEL COEFICIENTE DE ARRASTRE

Fizeau dispuso los aparatos que se muestran en el esquema de la figura 2-5. Un rayo de luz procedente de una fuente S incide sobre un espejo inclinado P que posee una capa metálica semitransparente de tal forma que el rayo se divide en dos partes. Una parte prosigue en línea recta hasta que alcanza un espejo M_1 . La otra parte es reflejada y desviada 90° e incide sobre M_2 . Mediante un tercer espejo M_3 ambos rayos recorren la misma trayectoria rectangular aunque en sentido opuesto. Cuando vuelven a P , parte del primer rayo

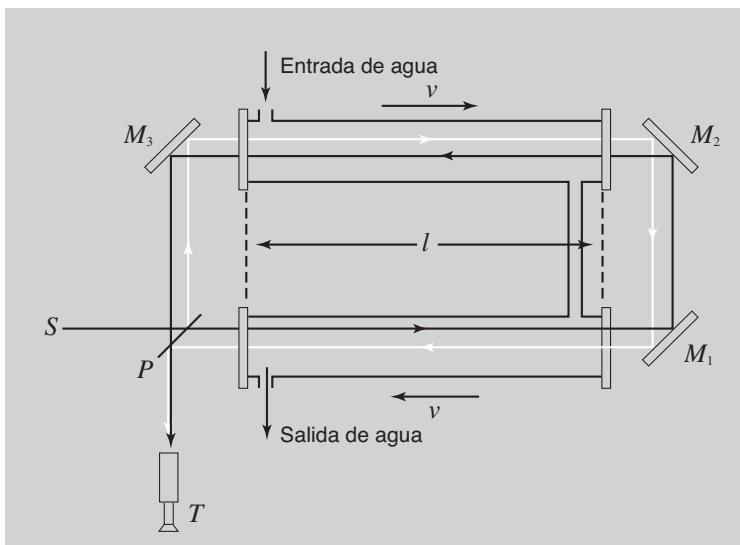


Fig. 2-5. Diagrama esquemático del aparato de “arrastre del éter” de Fizeau.

es reflejado y parte del segundo es transmitido, y la luz que emerge del sistema de esta manera penetra por un telescopio T .

La disposición es la de una especie de interferómetro óptico. Si se emplea luz monocromática (o bien prácticamente monocromática) se observarán líneas de interferencia al mirar a través del telescopio. Una línea concreta representa una diferencia de camino óptico particular entre los dos rayos que se interfieren. (Por *camino óptico* designamos la distancia en el vacío equivalente a cualquier camino real. Una distancia d a través de un medio con un índice de refracción n representa un camino óptico nd ; es esto lo que define el número de longitudes de onda de la luz incluido en dicha distancia.) En la figura 2-6 se muestra la imagen observada a través del telescopio.

Para obtener un efecto de arrastre se hace pasar agua a través de dos tubos con tapas de cristal plano, tal como se muestra en la figura, de manera que un rayo de luz marche siempre en la dirección del agua y el otro siempre en dirección contraria. En el exterior de los tubos conductores de agua las condiciones son las mismas para ambos rayos; por tanto para calcular la diferencia de camino óptico necesitamos tan sólo conocer lo que sucede en el interior de los tubos. Podemos calcular esta diferencia de camino en función de la diferencia

de *tiempos* para los dos rayos. Si cada tubo posee una longitud l y la velocidad del agua es v (con un coeficiente de arrastre f), tenemos

$$\Delta t = \frac{2l}{(c/n) - fv} - \frac{2l}{(c/n) + fv}$$

lo cual nos da

$$\Delta t \approx \frac{4n^2 fvl}{c^2} \quad (2-4)$$

Esto implica una diferencia de camino óptico $c\Delta t$. La variación de camino óptico, expresada como un múltiplo (δ) de la longitud de onda λ de la luz viene dada, por consiguiente, por $c\Delta t/\lambda$:

$$\delta = \frac{4n^2 fvl}{\lambda c} \quad (2-5)$$

En el experimento de Fizeau los valores aproximados eran

$$l = 1,5 \text{ m}$$

$$v = 7 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 5,3 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$n = 1,33 \text{ (índice de refracción del agua)}$$

$$\delta = 0,23 \text{ franjas}$$

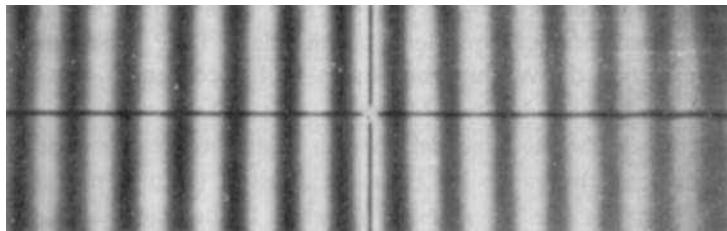


Fig. 2-6. *Franjas de interferencia en un aparato del tipo de Fizeau.* (Foto cortesía de G. C. Babcock, *Michelson Laboratory China Lake, Calif.*)

Substituyendo estos valores en la ecuación (2-5) se obtiene el valor observado para f :

$$f_{\text{obs}} \approx 0,48$$

El valor de f calculado a partir de la ecuación 2-3 es

$$f_{\text{calc}} = 0,43$$

Esto podía tomarse como confirmación de la hipótesis de arrastre. El experimento fue repetido, sin embargo, con mayor precisión por Michelson y Morley en 1886 y fue objeto con posterioridad de una serie de bellos experimentos llevados a cabo por P. Zeeman y sus colaboradores en Holanda durante los años 1914-1922.

Los resultados del experimento de Fizeau podían tomarse como un refuerzo de las observaciones sobre la aberración estelar. Podían interpretarse suponiendo que un objeto en movimiento no comunica nada de su movimiento al éter, tanto el que está en su exterior como el que está en su interior. Según este punto de vista, dentro de un medio transparente en movimiento la luz es transmitida en parte por el medio y en parte por el éter difundido en él. Puesto que el éter se encuentra en reposo, la luz se comporta como si sólo una fracción de la velocidad del medio fuese sumada a la de la luz. Aún quedaba por responder la siguiente pregunta: ¿Es posible de alguna manera detectar el movimiento de la Tierra a través del éter?

PRELUDIO AL EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

En 1879 Clerk Maxwell, en Inglaterra, escribió unas letras de agradecimiento por unas tablas astronómicas que le había mandado D. P. Todd del U.S. Nautical Almanac Office de Washington. Estas tablas contenían muchas observaciones acerca del planeta Júpiter. Maxwell, en su carta, preguntaba si era posible la medición de la velocidad del sistema solar a través del éter mediante la observación de los eclipses de las lunas de Júpiter. (Hemos mencionado anteriormente la forma en que Roemer llevó a cabo la medición de la velocidad de la luz mediante el estudio del tiempo de retraso en detectar estos eclipses.)

La esencia de la idea de Maxwell era muy sencilla. Júpiter posee un período de 12 años terrestres y en consecuencia en medio año terrestre, mientras

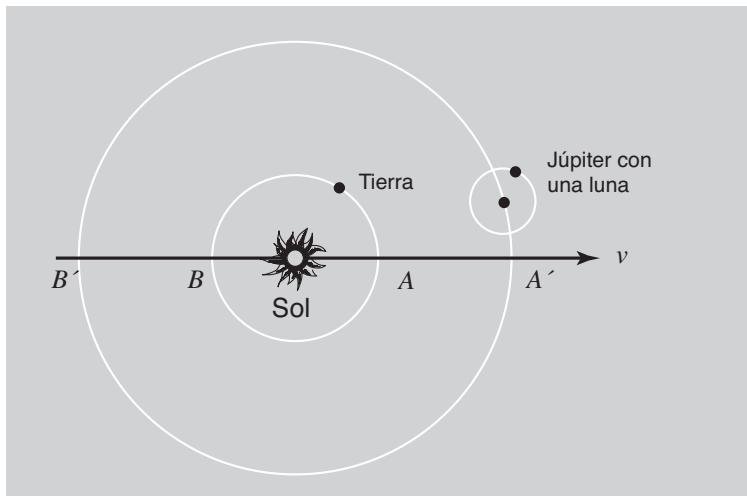


Fig. 2-7. *Orbitas de la Tierra, Júpiter y una de las lunas de Júpiter. Los intervalos entre los eclipses de las lunas detrás de Júpiter, según se observan en la Tierra, dependen de las posiciones y movimientos relativos de la Tierra y de Júpiter.*

la Tierra pasa de A a B (fig. 2-7), Júpiter no avanza mucho en su órbita. Por tanto, observando los tiempos aparentes de los eclipses con la Tierra en A y en B sucesivamente, podemos calcular el tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia igual al diámetro de la órbita terrestre. De hecho, este fue el descubrimiento que realizó Roemer. Pero si se mide este tiempo cuando Júpiter se encuentra primeramente en A' y luego, unos 6 años después, en B' , sería lógicamente posible descubrir si el sistema solar en su totalidad se mueve a través del éter luminífero con una cierta velocidad v . En efecto, si l es el diámetro de la órbita terrestre, cabe esperar que

$$t_1 = \frac{l}{c + v} \quad t_2 = \frac{l}{c - v}$$

y, en consecuencia, la diferencia de tiempos Δt vale

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx \frac{2lv}{c^2} = \frac{2v}{c} t_0 \quad (2-6)$$

en donde $t_0 = 16$ min, aproximadamente. Si pudiéramos detectar $\Delta t = 1$ s, esto correspondería a un valor de v equivalente a unos 150 km/s. Esta velocidad

es bastante elevada frente a las velocidades conocidas de las estrellas en relación con el sistema solar (20 km/s es un valor típico), pero de todos modos no es excesivo. Pero, por desgracia, la dificultad en obtener tal diferencia de tiempos mediante medidas efectuadas con un intervalo de 6 años es muy grande, y, además, los datos astronómicos de que disponía Maxwell no eran lo suficientemente exactos como para llevar a cabo este análisis. Esto mismo fue lo que Todd le indicó en su respuesta.

Maxwell, al proponer el método anterior, señaló que se trataba de un experimento de primer orden —el efecto sería proporcional a la primera potencia del cociente v/c . En su carta a Todd, Maxwell observó que esto le distinguía de los experimentos terrestres para medir la velocidad de la luz, puesto que en estos experimentos intervenía necesariamente un rayo de luz que volvía a su punto de partida. El tiempo de cualquiera de esos recorridos circulares no depende en principio de la velocidad de la Tierra a través del éter, pero el efecto es de segundo orden. Por tanto, si la longitud del recorrido (en un sentido) es l y si el movimiento de la Tierra tiene lugar también según el sentido del recorrido y a una velocidad v , el tiempo total que tarda la luz vendría dado por

$$t = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

La variación de tiempo debida al movimiento viene dada entonces por

$$\Delta t \approx \frac{2l}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (2-7)$$

Maxwell observó que este efecto sería tan pequeño que resultaría imposible de detectar. Tomando v como velocidad de la Tierra alrededor de su órbita, se tendría $v/c = 10^{-4}$, y por tanto, la variación relativa del tiempo de vuelo sería sólo de 1 parte en 10^8 , lo cual caería ciertamente fuera de los límites de observación. Pero la carta de Maxwell fue leída por A. A. Michelson, quien en el año anterior (1878) a la temprana edad de 25 años había llevado a cabo una estupenda medición de la velocidad de la luz.¹ Y Michelson no aceptó como incuestionable la imposibilidad de detectar el movimiento por medio de la ecuación (2-7). Por el contrario, empezó a pensar en un método que le permitiese conseguirlo. Dos años después, en 1881, obtuvo algunos resultados positivos. En la sección siguiente se describe su experimento, el más famoso de todos los intentos llevados a cabo para detectar nuestro movimiento a través del espacio absoluto tal como lo define el éter.

¹ Michelson, joven instructor naval por entonces, acababa de ser destinado a la Nautical Almanac Office, en donde trabajaba Todd, quien mantenía correspondencia con Maxwell.

EL EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

Michelson, primer americano que recibió un premio Nobel en ciencias (se le otorgó en 1907), inventó un nuevo instrumento con una sensibilidad sin precedentes para buscar el efecto que Maxwell había despreciado. En la figura 2-8 se muestran las características esenciales de su aparato, conocido universalmente como el *interferómetro de Michelson*. La luz procedente de una fuente S incide sobre una lámina de cristal inclinada P que posee una capa de metal semitransparente en su cara anterior. Ésta divide a la luz en dos partes. Una parte atraviesa la lámina y alcanza un espejo M_1 . A continuación recorre el camino seguido en sentido inverso hasta que llega al punto en donde el haz se desdobló inicialmente, y una fracción de él es reflejado a través de la lámina hacia el telescopio T . La otra parte del haz original es enviada por reflexión al espejo M_2 y vuelve. Una lámina de compensación C hace pasar este segundo haz a través del mismo espesor de cristal que el primero (para conseguir la simetría óptica) antes de que se reúnan de nuevo y se introduzcan en el telescopio.

Si esa placa P está inclinada 45° y las superficies de los espejos están entre sí casi pero no exactamente a 90° , se obtendrán franjas parecidas a las formadas por un prisma de ángulo muy pequeño. Con un adecuado ajuste de los espejos

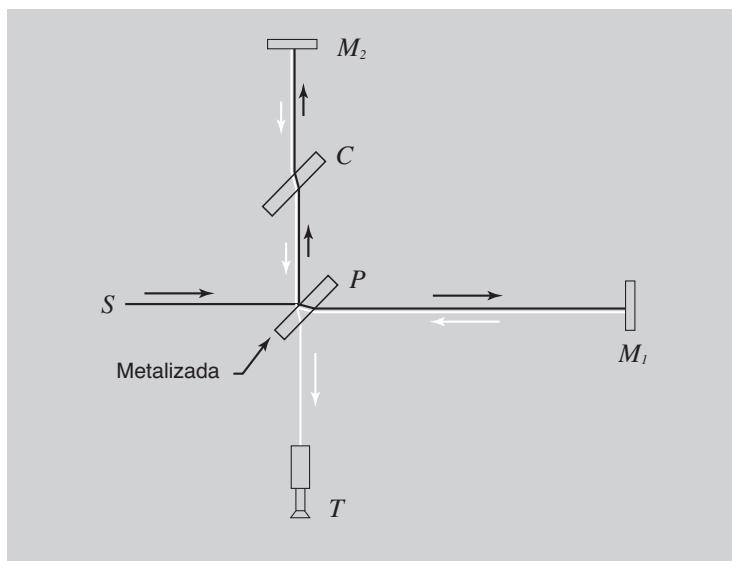
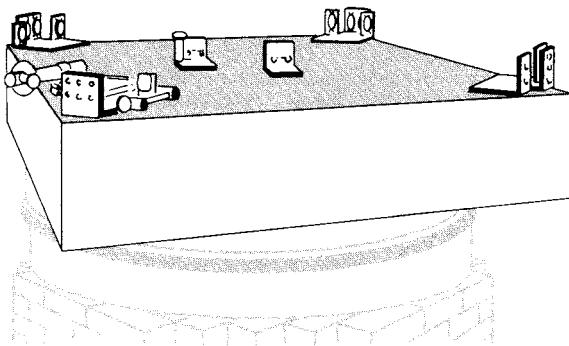
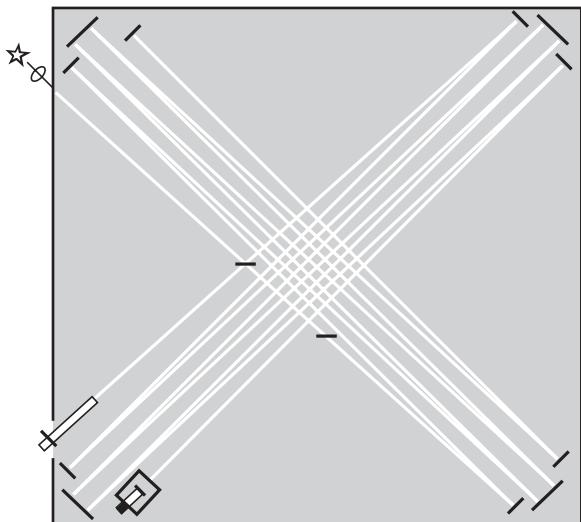


Fig. 2-8. Esquema de la disposición del interferómetro de Michelson.

Experimento de Michelson-Morley



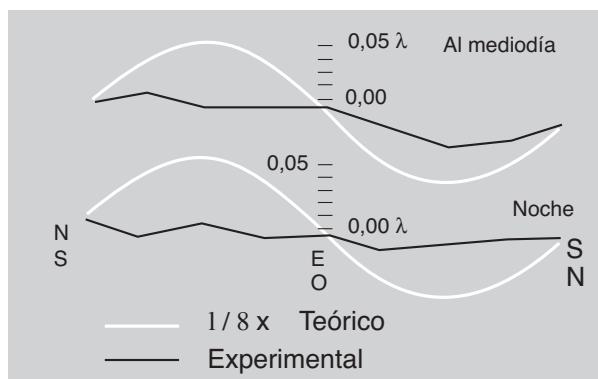
(a)



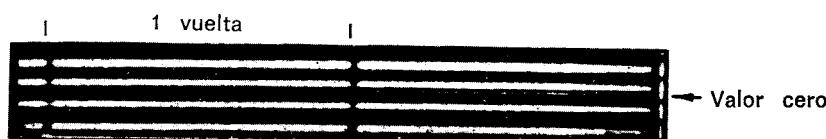
(b)

(a) Aspecto del aparato. (b) Planta del sistema óptico. (c) Variación de la posición de las franjas al efectuar una rotación completa del aparato. [Los dibujos (a), (b) y (c) han sido adaptados de A. A. Michelson, *Studies in Optics*, Universidad de Chicago, Phoenix Books, 1962.]

La fotografía muestra las franjas durante dos giros completos del aparato en una repetición posterior del experimento llevada a cabo por G. Joos en 1930. (Tomado de Joos, "Lehrbuch der Theoretischen Physik", Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.) La tabla resume los resultados de diversos estudios del experimento de Michelson-Morley. (δ_{calc} = Corrimiento de las franjas según la ecuación (2-14), para $v = 30 \text{ km/s}$.)



(c)

DIVERSAS REALIZACIONES DEL EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY^a

Observador; año	$l, \text{cm.}$	δ_{calc}	δ_{obs}	(límite superior)	Razón
Michelson; 1881	120	0,04	0,02		2
Michelson y Morley; 1887	1100	0,40	0,01		40
Morley y Miller; 1902-1904	3220	1,13	0,015		80
Miller, 1921	3220	1,12	0,08		15
Miller; 1923-1924	3220	1,12	0,03		40
Miller (luz solar); 1924	3220	1,12	0,014		80
Tomaschek (luz estelar); 1924	860	0,3	0,02		15
Miller; 1925-1926	3200	1,12	0,08		13
Kennedy; 1926	200	0,07	0,002		35
Illingworth; 1927	200	0,07	0,0004		175
Piccard y Stahel; 1927	280	0,13	0,006		20
Michelson y otros; 1929	2590	0,9	0,01		90
Joos; 1930	2100	0,75	0,002		375

^a De una revisión llevada a cabo por Shankland y otros. *Rev. Mod. Phys.*, 27, 167 (1955).

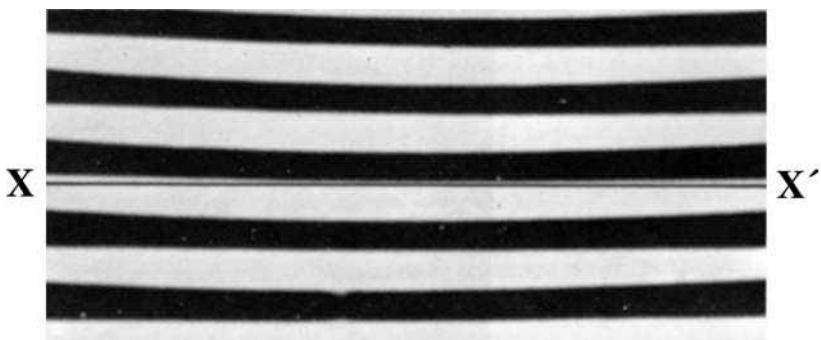


Fig. 2-9. Franjas rectas formadas por el interferómetro de Michelson. (Foto por Jon Rosenfeld, Education Research Center, M.I.T.)

estas franjas pueden hacerse horizontales. En tal caso se ve a través del telescopio la figura mostrada en la figura 2-9. Si se designa por l_1 y l_2 los caminos ópticos (PM_1 y PM_2) que dan origen a una franja particular tenemos la condición

$$2(l_1 - l_2) = m\lambda \quad (2-8)$$

en donde m es un número entero. Si se varía l_1 o l_2 en $\lambda/2$, por ejemplo, moviendo uno de los espejos, la figura de interferencia mostrada en la figura 2-9 se correrá una franja por encima del retículo XX' del telescopio.

Supongamos ahora que el aparato de Michelson se encuentra en movimiento según la dirección PM_1 con una velocidad v medida respecto al sistema inercial definido por el éter hipotético. Desde el punto de vista del laboratorio, existe un "viento de éter" que está soplando sobre el aparato (figura 2-10). La luz que marcha desde P hasta M_2 y en sentido contrario debe penetrar en el viento formando un ángulo tal que la velocidad resultante esté dirigida según PM_2 . De acuerdo con la ley de composición de velocidades de Galileo el valor de la velocidad resultante relativa al interferómetro es $(c^2 - v^2)^{1/2}$. La luz que marcha entre P y M_1 tendría (de nuevo con relación al interferómetro) una velocidad resultante $c - v$ cuando marchase hacia M_1 y una velocidad resultante $c + v$ en el recorrido de retorno. Podemos, por tanto, calcular los tiempos que emplea la luz en ir desde P hasta los espejos y volver:

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v}$$

es decir,

$$t_1 = \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2} = \frac{2l_1/c}{(1 - v^2/c^2)} \quad (2-9)$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2l_2/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (2-10)$$

Esto define una diferencia de tiempos Δ , que para $v \ll c$ viene dada aproximadamente por:

$$\Delta = t_1 - t_2 \approx \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

es decir,

$$\Delta \approx \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{2l_1 v^2}{c^3} - \frac{l_2 v^2}{c^3} \quad (2-11)$$

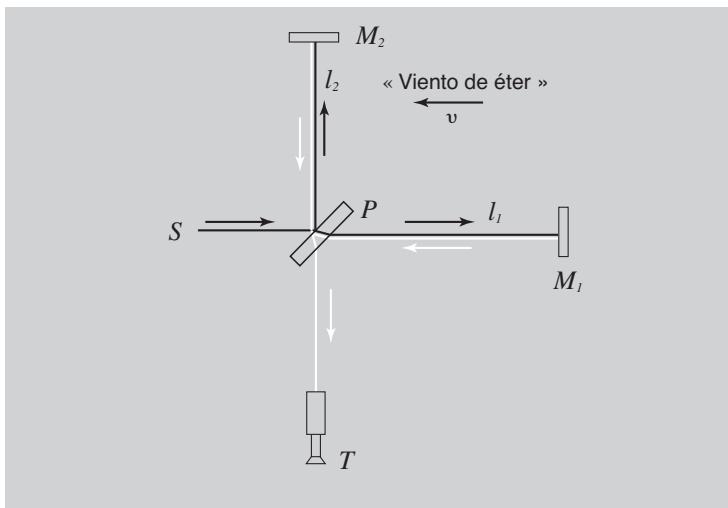


Fig. 2-10. Fundamento del experimento de Michelson-Morley en función del «viento de éter».

Si el aparato en su conjunto se gira 90° , de forma que PM_2 señale ahora según el sentido del movimiento, obtenemos una nueva diferencia de tiempos Δ' :

$$\Delta' = t_1' - t_2' \approx \frac{2l_1}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) - \frac{2l_2}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

es decir,

$$\Delta' \approx \frac{2(l_1 - l_2)}{c} + \frac{l_1 v^2}{c^3} - \frac{2l_2 v^2}{c^3} \quad (2-12)$$

La variación en la diferencia de tiempos dará lugar a un corrimiento de la figura de interferencia en una cantidad correspondiente a δ franjas, en donde $\delta = c(\Delta - \Delta')/\lambda$, es decir,

$$\delta = \frac{(l_1 + l_2)v^2}{\lambda c^2} \quad (2-13)$$

Si $l_1 = l_2 = l$, podemos expresar este resultado de la manera siguiente:

$$\delta = \frac{2(v/c)^2}{\lambda/l} \quad (2-14)$$

Los valores de λ , l y c son conocidos, pero, ¿qué valor deberemos dar a v ? Para Michelson y para todos aquellos que investigaron el problema una contribución claramente identificable era la velocidad de la Tierra alrededor de su órbita —de unos 30 km/s. Se vio anteriormente que esto suponía $v/c \approx 10^{-4}$. Podemos hacer $\lambda \approx 6 \times 10^{-7}$ m, y como para el primer aparato de Michelson $l = 1,2$ m, se tiene que $\lambda/l \approx 5 \times 10^{-7}$. Teniendo en cuenta todo esto se obtiene $\delta \approx 0,04$ franjas. Este efecto es muy pequeño, pero en las expertas manos de Michelson hubiera sido perfectamente medible. Sin embargo, para sorpresa y disgusto de Michelson, cuando dispuso su interferómetro y lo hubo girado 360° no se produjo ningún corrimiento apreciable de la figura de interferencia. Su lacónica comunicación de este resultado, tomada de su primer trabajo sobre el tema,¹ ya fue presentada al comienzo de este capítulo. Añadió el siguiente comentario: “El resultado de la hipótesis de la existencia de un éter estacionario demuestra, por tanto, que es incorrecto.”

¹ A. A. Michelson, *Am. J. Sci.*, **122**, 120 (1881).

Este resultado era tan inesperado y tan difícil de explicar que condujo a renovados esfuerzos, en especial por parte del gran físico holandés H. A. Lorentz, para reconciliarlo con otros fenómenos ópticos como los que hemos descrito en este capítulo. Lorentz propuso una teoría de acuerdo con la cual, sin contradecir los experimentos sobre aberración estelar, podría existir un arrastre parcial del éter por parte de la Tierra. Era oportuna una repetición más precisa del experimento de Michelson y Lord Rayleigh escribió a Michelson urgéndole para que la realizara. Así fue cómo Michelson, ahora en colaboración con E. W. Morley, emprendió una investigación mucho más precisa, basada en caminos ópticos unas 10 veces más largos que en el primer experimento. El corrimiento esperado ahora era de unas 0,4 franjas, pero en los resultados obtenidos se observó un corrimiento de unas 0,005 franjas, a lo sumo. Esta versión refinada del experimento, llevada a cabo en 1887,² ha sido considerada durante mucho tiempo como uno de los pilares experimentales básicos sobre los que descansa la relatividad especial. En las páginas 58 y 59 se muestra un dibujo del aparato de Michelson-Morley y se recogen algunos de los resultados obtenidos.

OBSERVACIONES FINALES

Los fenómenos que hemos descrito en este capítulo se caracterizan por comunicar un fuerte sentimiento de frustración a cualquiera que pretenda aferrarse a la imagen de la luz como formada por ondas propagándose en el éter. Todo experimento encaminado a revelar nuestro movimiento a través de este medio conduce al mismo resultado: todo ocurre como si no existiese movimiento alguno, o bien parece como si el propio medio no existiese. El resultado del experimento de Michelson-Morley, al igual que la aberración estelar, se explica con facilidad en términos de un modelo balístico de la luz, en el cual la velocidad viene definida unívocamente con respecto a la fuente, pero no con respecto a un medio. Estaría perfectamente de acuerdo con la proposición inicial de Galileo de que los movimientos en un barco que se moviese uniformemente o en cualquier otro sistema inercial de referencia, tal como son observados en dicho sistema, no suministran información alguna sobre la velocidad con que se traslada el sistema en su totalidad. Pero, tal como la mayoría de los físicos lo consideraban hacia finales del siglo XIX, el modelo corpuscular no era adecuado; había que buscar las explicaciones dentro del contexto de lo que apa-

² A. A. Michelson y E. W. Morley, *Am. J. Sci.*, **134**, 333 (1887).

TABLA 2-1: EVIDENCIA RELATIVA SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ

	<i>Modelo corpuscular</i>	<i>Modelo onda/éter</i>
1. La luz viaja en línea recta	Correcto	Válido si long. de onda \ll anchura del rayo
2. Efectos de interferencia y difracción	No ofrece explicación convincente	Correcto
3. Polarización de la luz	No ofrece explicación convincente	Correcto
4. La velocidad de la luz independiente de la velocidad de la fuente	<i>Desacuerdo claro</i>	Correcto
5. La velocidad de la luz mayor en el aire que en el agua	<i>Desacuerdo claro</i>	Correcto
6. Experimento de Fizeau y experimento de Airy (con el telescopio lleno de agua)	Requiere un arrastre parcial de la luz por el medio	Requiere un arrastre parcial de la luz por el medio
7. Aberración estelar (Bradley)	Correcto	Válido si la Tierra se mueve respecto al éter
8. Experimento de Michelson-Morley	Correcto	Implica que la Tierra no se mueve respecto al éter

rentaba ser claramente un problema de propagación de ondas.¹ Al examinar la evidencia de la experiencia se llegaba a la conclusión de que las únicas observaciones que no daban resultado nulo eran aquellas en las que intervenían velocidades *relativas* bien definidas. En el caso de la aberración estelar era la velocidad de la Tierra en algún punto de su órbita relativa a la velocidad en algún otro punto. En el caso del experimento de Fizeau era la velocidad del agua que fluía relativa al resto del aparato. Y, en especial, había que resaltar el aparente conflicto desde el punto de vista de una teoría ondulatoria, entre la existencia de la aberración estelar y la ausencia de corrimiento de las franjas en el experimento de Michelson-Morley.

¹ Quizá la evidencia más definitiva en contra de cualquier teoría corpuscular fue la demostración experimental (realizada por primera vez por Foucault y Fizeau en 1850) de que la luz viaja más lentamente a través del agua que del aire, en contradicción con la teoría de la refracción, que predeciría exactamente lo contrario para un modelo corpuscular.

En la tabla 2-1 mostramos a modo de resumen de las discusiones y de la evidencia presentada en este capítulo, la forma en que los diversos resultados observados pueden describirse considerando la luz como compuesta de partículas que recorren el espacio o bien como formada por ondas que se propagan a través de un medio luminífero. Esto puede proporcionar una idea mejor de la relación que guardan los diversos resultados experimentales con el problema general de la propagación de la luz.

En la tabla se señala la validez de cada modelo teórico para explicar sencilla y convincentemente los diversos fenómenos. Sin embargo, el modelo corpuscular debe descartarse definitivamente a la vista de que la velocidad de la luz no es afectada en absoluto por el movimiento de su fuente, y de que la luz atraviesa más rápidamente el aire que el agua (o cualquier otro medio denso). Sin embargo, al considerar la teoría ondulatoria, que ha constituido la base de todas nuestras discusiones en el capítulo presente, nos encontramos con un conflicto aparente entre los dos resultados que se presentan en último lugar de la tabla —la aberración estelar y el experimento de Michelson-Morley. Einstein fue la primera persona en darse cuenta de que la situación a la que se había llegado no podía afrontarse mediante una refundición de las teorías tradicionales. Su solución radical y profunda al problema es el objeto principal del capítulo 3.

PROBLEMAS

2-1. (a) El jefe de "Spectra" ha maquinado un plan diabólico para aniquilar a su enemigo mortal, 007; hará que caiga una lluvia tóxica en el valle desierto en el que el agente se encuentra con un acompañante. Afortunadamente, Mr. Bond posee un paraguas entre su equipo de utensilios. Si la lluvia cae a una velocidad de 10 m/s, ¿a qué ángulo deberá mantener 007 su paraguas respecto a la vertical de manera que él y su acompañante permanezcan secos mientras corren a una velocidad de 10 millas/hora y puedan coger el próximo autobús para salir así del valle desierto?

(b) Se observa desde la Tierra que una estrella describe una trayectoria elíptica cuyo eje menor subtende un ángulo de $36''$. ¿Qué ángulo forma la estrella con la eclíptica?

(c) Supóngase que el movimiento aparente elíptico de la parte (b) se debiese por entero al efecto de paralaje. ¿A qué distancia aproximada se encontraría la estrella del Sol en años-luz?

2-2. A continuación se ofrecen algunos datos relativos al experimento del “arrastre debido al éter” de Fizeau tal como Michelson y Morley lo repitieron en 1886:

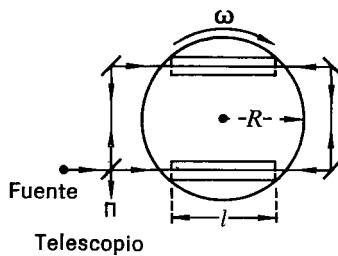
Longitud de onda media de la luz empleada	5700 Å
Longitud de cada tubo	6,15 m
Velocidad de la corriente de agua	7,65 m/s
Corrimiento medio de las franjas al invertir el flujo de agua	$0,86 \pm 0,01$

Comparar el valor del “coeficiente de arrastre” correspondiente a los valores anteriores con el valor de $1 - 1/n^2$ para el agua ($n = 1,33$).

2-3. El experimento de Fizeau tal como se ha descrito en el texto necesita de un flujo rápido de agua a través del aparato, lo cual da lugar a frecuentes turbulencias. Una alternativa posible a esta situación puede lograrse disponiendo dos tubos de agua idénticos sobre una mesa giratoria (ver la figura).

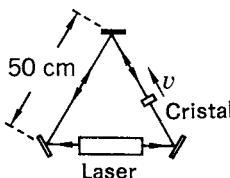
(a) Demostrar que la expresión de la diferencia de caminos ópticos entre los rayos es $2n^2fl\omega(4R^2 - l^2)^{1/2}/c$, en donde n es el índice de refracción del agua, f el coeficiente de arrastre, ω la frecuencia angular de rotación y c la velocidad de la luz.

(b) Si $f = 1 - n^{-2}$, $n = 1,33$, $l = 20$ cm, $R = 20$ cm y $\lambda = 5300$ Å, ¿a qué velocidad deberá girar el soporte para que la máxima diferencia de camino óptico sea $0,2\lambda$?



2-4. En una versión moderna del experimento de Fizeau se dispone un laser en uno de los lados del triángulo que determinan los espejos de la figura adjunta. Se inserta asimismo una lámina de cristal ($n = 1,5$) de 1 cm de espesor en otro de los lados. El rayo de luz del laser puede efectuar de esta manera un recorrido cerrado en cualquier dirección. Cuando se mantiene en reposo la lámina de cristal ambos caminos ópticos son idénticos. Supongamos ahora que se mueve la lámina a una velocidad de 1 cm/s en la dirección indicada. ¿Cuál es ahora la diferencia de

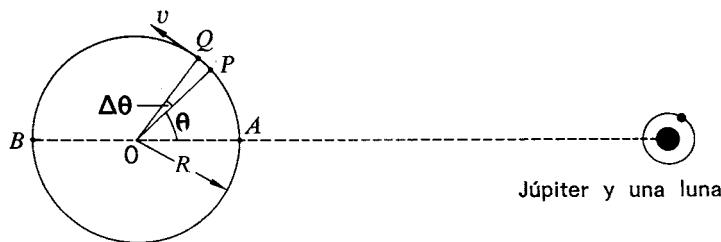
camino óptico? (Esta diferencia aunque mínima, da lugar a un desdoblamiento de la frecuencia del laser que puede convertirse así en una pulsación audible si se combinan adecuadamente en un detector muestras de cada uno de los rayos que circulan en sentido opuesto.) Observación importante: Existe una diferencia fundamental con la disposición original de Fizeau, ya que los límites del medio cambian de posición mientras está pasando luz. Debe tenerse esto en cuenta al efectuar los cálculos



2-5. El texto menciona la medición de Roemer de la velocidad de la luz a partir de las variaciones aparentes de los intervalos de tiempo entre los sucesivos eclipses de las lunas de Júpiter. Para analizar esto cuantitativamente, considérense las posiciones P y Q de la Tierra correspondientes a observaciones de dos eclipses sucesivos de una de las lunas de Júpiter (ver la figura).

(a) Demostrar que, si el intervalo de tiempo real entre los eclipses es τ (igual al período orbital de una luna) el intervalo de tiempo observado es $\tau + \Delta\tau$, en donde $\Delta\tau \approx R\Delta\theta \operatorname{sen} \theta/c$ y $\Delta\theta \approx vr/R$. Demostrar entonces que el retraso de tiempo acumulado al pasar la Tierra desde A hasta B (sin tener en cuenta la variación propia de la posición de Júpiter) viene dada por $2R/c$.

(b) El período de la segunda luna de Júpiter, Europa, es de 3,55 días. ¿Cuál es la discrepancia máxima entre este período real y el intervalo de tiempo entre eclipses sucesivos, tal como se observa en la Tierra? ¿Cuál es el retraso de tiempo acumulado entre A y B ? (Velocidad de la Tierra a lo largo de su órbita = 30 km/s; radio de la órbita = $1,49 \times 10^8$ km.)



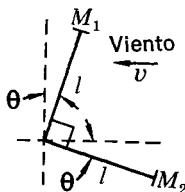
2-6. En uno de los brazos de un interferómetro de Michelson se coloca un tubo cerrado de longitud 0,2 m con tapas transparentes a través de las cuales la luz

puede pasar libremente. Empleando luz de longitud de onda $5,9 \times 10^{-7}$ m se observa un cierto espectro de rayas. A continuación se elimina el aire del tubo haciendo el vacío. ¿En cuántas franjas se desplazará el espectro anteriormente observado? La velocidad de la luz en el aire es de $(1 - 2,9 \times 10^{-4})c$.

2-7. En el experimento de Michelson-Morley de 1887, la longitud l de cada uno de los brazos del interferómetro valía 11 m, empleándose luz de sodio de longitud de onda $5,9 \times 10^{-7}$ m. El experimento hubiese revelado un corrimiento del espectro mayor de 0,005 franjas. ¿Qué límite superior supone esto para la velocidad de la Tierra a través del hipotético éter?

2-8. En el texto se discute la teoría del viento de éter del experimento de Michelson-Morley para el caso especial en que los brazos del interferómetro sean paralelos y perpendiculares al viento. Considérese el caso general para un ángulo θ como el que se muestra en la figura. Demostrar que, para brazos de longitud igual, l , la diferencia de tiempo para ambos caminos viene dada muy aproximadamente por

$$\Delta t(\theta) = \frac{v^2 l}{c^3} \cos 2\theta$$

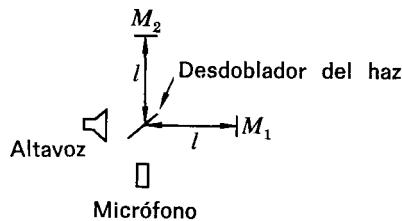


2-9. Se construye un interferómetro de Michelson para ondas sonoras empleando un altavoz como fuente, un micrófono como detector, una delgada hoja de papel para desdobljar el haz y dos cartones como espejos, según se muestra en la figura. Los brazos del interferómetro poseen igual longitud l , y el aparato en su conjunto puede girarse. Se hace que sopla un viento cuya velocidad y sentido permanecen constantes. El altavoz emite un corto pulso de sonido por cada segundo que transcurre. Responder a las preguntas siguientes utilizando el resultado del problema 2-8.

(a) En la mayor parte de las orientaciones del interferómetro el eco que recibe el micrófono consta de dos pulsos que se suceden rápidamente. ¿Por qué?

(b) Para ciertas orientaciones del interferómetro la diferencia de tiempos entre ambos ecos es máxima. ¿Cuántas posiciones existen para una revolución completa del aparato? ¿Qué orientaciones son éstas, relativas a la dirección del viento?

(c) Si la longitud de cada brazo del interferómetro es de 3 m y el tiempo máximo que transcurre entre los ecos es de 10^{-5} s, ¿cuál es la velocidad del viento? Las ondas sonoras viajan a velocidad constante con relación al aire. Tómese el valor de esta velocidad igual a 300 m/s.



En el otoño de [1905]... Einstein publicó un trabajo en el que se exponía la teoría de relatividad de Poincaré y Lorentz con algunas ampliaciones, trabajo que llamó grandemente la atención.

E. T. WHITTAKER

*History of the Theories
of Aether and Electricity (1953)*

Esta cita se ha hecho famosa por no conceder el crédito debido a Einstein.
Véase la discusión en el Epílogo de este libro.

3

Einstein y las transformaciones de Lorentz-Einstein

PREÁMBULO: LA HIPÓTESIS DE CONTRACCIÓN

¿POR QUÉ DIO el experimento de Michelson-Morley un resultado nulo? Se trataba de una interrogante que preocupaba a algunas de las mentes más lúcidas de la física del siglo XIX. No existía duda alguna respecto a los hechos; como vimos en el capítulo 2 estaban apoyados por gran número de observaciones ópticas diversas que conducían todas a la misma conclusión: la naturaleza parecía no querer suministrar información alguna de nuestro estado de movimiento con respecto a un supuesto sistema de referencia fundamental. Este punto de vista fue precisamente el que la mayoría de los físicos adoptó: el éter existía, y el movimiento a su través era real, pero intervenían mecanismos de compensación. El más claro de estos mecanismos especiales fue el que propusieron el irlandés G. F. Fitzgerald y el holandés H. A. Lorentz (independientemente) en 1892 para explicar el resultado del experimento de Michelson-Morley —la contracción real de un cuerpo según la dirección en que se mueva a través del éter. Si la contracción tiene lugar según el factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ se desprende directamente que el corrimiento de franjas será nulo. Esto resulta evidente si se considera el caso en que los brazos del interferómetro de Michelson se suponen respectivamente dirigidos a lo largo y perpendicularmente a la dirección del movimiento de la Tierra (tal como hicimos en el capítulo 2). Los tiempos que invierte la luz en recorrer sus dos trayectorias posibles fueron obtenidas anteriormente [ecuaciones (2-9) y (2-10)]:

$$t_1 = \frac{2l_1/c}{1 - v^2/c^2} \quad (3-1)$$
$$t_2 = \frac{2l_2/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

Supongamos que una barra de longitud normal l_0 mantiene esa longitud si se mueve transversalmente a sí misma, pero se contrae tomando el valor $l_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ si se mueve paralelamente. En estas condiciones en la figura 3-1 (a) deberíamos tener

$$l_1 = l_{10}(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad l_2 = l_{20}$$

y por tanto,

$$t_1 = \frac{2l_{10}/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad t_2 = \frac{2l_{20}/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

y entonces

$$t_1 - t_2 = \frac{2(l_{10} - l_{20})/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (3-2)$$

Por consiguiente, si el interferómetro girase 90° , de manera que los dos brazos intercambiaran su papel, la diferencia de tiempos tendría de nuevo el mismo valor. Estas dos posiciones son evidentemente bastante especiales, pero el cálculo demuestra que con una orientación arbitraria, como la indicada en la figura 3-1 (b), la diferencia de tiempos sigue vieniendo expresada correctamente por la ecuación (3-2) si se supone que, en el caso de un brazo inclinado, la com-

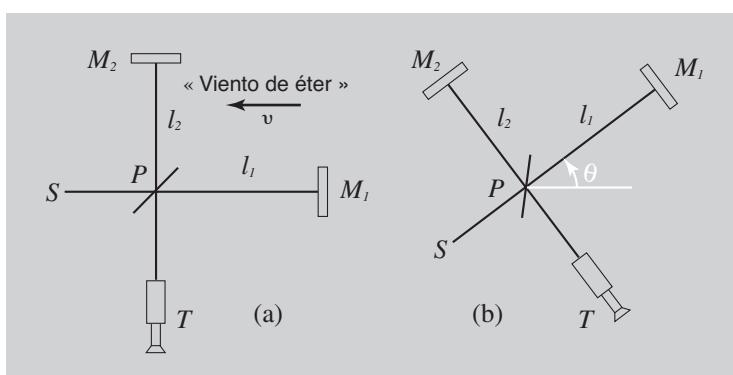


Fig. 3-1. (a) El dispositivo de Michelson-Morley con un brazo apuntando hacia un supuesto "viento de éter". (b) El mismo dispositivo orientado arbitrariamente.

ponente de longitud paralela a \mathbf{v} se contrae y la componente transversal a \mathbf{v} permanece inalterada. Por consiguiente, para el brazo 1, por ejemplo, la relación entre l_1 y la longitud normal l_{10} vendría dada por

$$l_{10}^2 = (l_1 \operatorname{sen} \theta)^2 + \frac{(l_1 \cos \theta)^2}{1 - v^2/c^2} \quad (3-3)$$

El lector debería comprobar personalmente que esta condición y una condición análoga para el brazo 2, conducen a la ecuación (3-2) para cualquier valor de θ .

EINSTEIN REAFIRMA LA RELATIVIDAD

Ante esta situación de teorización habilidosa (y de hecho muy inteligente) aunque en esencia, de teorización *ad hoc*, Einstein ofreció una nítida visión de conjunto, de una sencillez manifiesta que tan sólo un genio podía conseguir. En lugar de imponer ideas preconcebidas se dejó guiar por un mínimo escuento de hechos con vistas a una revisión fundamental de ideas. Se trataba de un resultado sorprendente conseguido en un campo repleto de gigantes intelectuales. Al comienzo del maravilloso trabajo en el que trae a la luz la relatividad especial,¹ comenta el hecho de que en aquellos fenómenos como la interacción mutua de un imán y un conductor, es sólo el movimiento relativo lo que importa y no el movimiento por separado de imán y conductor. Y señala lo siguiente :

Los ejemplos de este tipo, unidos a los intentos infructuosos para descubrir el movimiento de la Tierra con respecto al “medio luminoso” sugieren que los fenómenos de la electrodinámica lo mismo que los de la mecánica no poseen propiedades correspondientes a la idea de reposo absoluto. Sugieren en cambio que... las mismas leyes de la electrodinámica y de la óptica serán válidas para todos los sistemas de referencia en los cuales sean aplicables las ecuaciones de la mecánica. Elevaremos esta conjeta... al nivel de postulado e introduciremos también otro postulado que será *tan sólo aparentemente* irreconciliable con el primero: el que la luz se propaga siempre en el espacio con una velocidad fija c que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor.

Con estas palabras proclamó Einstein la universalidad de c y la equivalencia de los sistemas inerciales para todos los propósitos. Se trata de un gran paso

¹ A. Einstein, *Ann. Physik*, 17, 891 (1905); traducido por W. Perret y G. B. Jeffery, 1923, en *The Principle of Relativity*, Dover, Nueva York.

en la historia de las ideas. Hermann Bondi, el cosmólogo británico lo había comentado de una manera muy interesante¹:

Si se aplica el espíritu de los principios de la relatividad newtoniana, se desprende que esta característica básica, la velocidad de la luz, debe ser independiente del sistema inercial desde el que se la observa. La afirmación de que así sucede... se conoce como teoría especial de la relatividad... Por consiguiente, la teoría es, en cierto sentido, profundamente conservadora; los principios que se han encontrado válidos para la dinámica resultan ser válidos para toda la física. La teoría especial de la relatividad es una consecuencia necesaria de cualquier afirmación de que la unidad de la física es esencial, puesto que resultaría intolerable una equivalencia entre todos los sistemas inerciales desde un punto de vista dinámico, siendo posible por otro lado su diferenciación mediante medidas ópticas. Actualmente parece casi increíble que la posibilidad de una tal discriminación fuese admitida como cierta en el siglo XIX, pero en aquella época no resultaba fácil ver algo de una importancia aún mayor —la validez universal del principio newtoniano de relatividad o la naturaleza absoluta del tiempo...

Esta frase última de Bondi nos lleva al centro del pensamiento de Einstein. La naturaleza de la luz era la piedra de toque. El mérito de Einstein consistió en darse cuenta de la necesidad de un análisis fundamental de este tipo. Pero igualmente impresionante fue la convicción de Einstein de que todos los fenómenos físicos observables debían depender tan sólo de movimientos *relativos*. Antes de que nos internemos en la relatividad especial siguiendo los pasos de Einstein, será adecuado decir algo acerca de los principios de relatividad en general y acerca del esquema newtoniano, que, tal como señalara Bondi, posee mucho en común con la nueva dinámica de Einstein.

LA RELATIVIDAD SEGÚN GALILEO Y NEWTON

¿Qué es un principio de relatividad? Es una afirmación acerca de las leyes de la naturaleza tal como vendrían determinadas por observaciones llevadas a cabo en diferentes sistemas de referencia. La afirmación se hace de una forma explícita, fundamentada en la experiencia, y se refiere a la existencia de clases de sistemas de referencia con respecto a los cuales las leyes de la física poseen exactamente la misma forma. Una serie de observadores situados en estos distintos sistemas efectúan medidas, que pueden ser diferentes entre sí pero que conducen a las mismas conclusiones relativas a leyes de fuerza, etc. Un

¹ H. Bondi, *Endeavour*, 20, 121 (1961).

principio de la relatividad es, en otras palabras, una afirmación acerca de una ausencia de privilegio esencial de la naturaleza: sitúa a un grupo entero de sistemas de referencia en un nivel equivalente. Bondi expresa esto de la siguiente manera al comienzo de un artículo en el que pasa revista a la relatividad¹:

El propósito de cualquier teoría física es describir de una manera concisa una gran variedad de fenómenos. En muchos casos esto necesitará, como parte de la teoría, una prescripción para aplicar la teoría a sistemas que se encuentren en estados de movimiento diferentes. Una prescripción de este tipo, es decir, una especie de código de traducción, consistirá generalmente en un sistema matemático de leyes de transformación.

Pertenece a la naturaleza de las leyes de transformación el cambiar la mayor parte de las cantidades y el dejar invariantes algunas de ellas. Estas últimas son las denominadas invariantes de la transformación y sirven para definir su carácter. Una afirmación en el terreno de la física de cuáles son estas invariantes se denomina principio de relatividad, y las ecuaciones fundamentales de una teoría definen generalmente el principio de relatividad que le es aplicable.

En este sentido puede decirse que la relatividad se encuentra formando parte integrante de la mecánica newtoniana, la cual atribuye un interés y una importancia única a los sistemas de referencia inerciales —es decir, a aquellos sistemas (relacionados entre sí mediante una velocidad constante) en los cuales se cumple la ley de inercia de Galileo.

Es a Galileo a quien debemos la primera discusión clara de tales cuestiones. En el libro famoso en el que abogaba en favor de la concepción de Copérnico del sistema solar en contra de la concepción de Ptolomeo, decía que la trayectoria vertical de un objeto que cae libremente no conduce a la conclusión de que la Tierra se encuentre en reposo.² A modo de analogía representaba el ejemplo de una piedra que se dejase caer desde lo alto del mástil de un barco. Con independencia de que el barco se encontrase en reposo o se moviese con una velocidad constante, la piedra caería siempre al pie del mástil. Por consiguiente la observación del punto en que la roca cae sobre la cubierta no revela absolutamente nada acerca del estado de movimiento del barco. La trayectoria observada descrita por una piedra que cae es siempre, en el sistema en el que se deja caer partiendo del reposo, una línea recta vertical con independencia de que el sistema permanezca en reposo o posea una velocidad horizontal cons-

¹ H. Bondi, *Rept. Progr. Phys.*, 22, 97-120 (1959).

² Galileo, *Diálogos acerca de los dos sistemas principales del Universo —el de Ptolomeo y el de Copérnico*, traducido al inglés por Stillman Drake, Imprenta de la Univ. de California, Berkeley, 1953.

tante con respecto a la Tierra. Expresado de esta manera, el resultado es una manifestación de un principio de relatividad, puesto que contiene la afirmación de que una cierta ley de la naturaleza (la ley de la caída libre de los cuerpos) es la misma en todos los sistemas de referencia que difieran tan sólo en una velocidad horizontal constante.

Un ejemplo que guarda una relación bastante próxima es el que se refiere a un mismo objeto cuya caída es observada desde dos sistemas de referencia distintos. Supóngase, por ejemplo, que una piedra dejada caer desde un barco en movimiento es observada conjuntamente desde el barco y desde tierra. En un caso la trayectoria observada sería una línea recta vertical, y en otro caso una parábola. Sin embargo, si analizamos estos movimientos mediante la dinámica de Newton descubrimos que, aunque los movimientos son diferentes, las conclusiones que pueden obtenerse acerca del valor de la aceleración, y por consiguiente de la fuerza que causa el movimiento, son idénticas.

La relación entre las medidas de un movimiento dado observado desde sistemas de referencia diferentes viene expresada mediante un conjunto de ecuaciones de transformación. En la mecánica newtoniana las ecuaciones pertinentes llevan el nombre de Galileo, quien fue el primero en señalar el principio de la inercia. Relacionan las medidas de posición, tiempo, velocidad y aceleración en un sistema inercial S con las medidas correspondientes efectuadas en un sistema S' que posee una velocidad constante v relativa a S según el eje de las x :

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - vt \quad (\text{y } x = x' + vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \\ u_x' = u_x - v \quad (\text{y } u_x = u_x' + v) \\ a_x' = a_x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{de transformación} \\ \text{de Galileo} \end{array} \quad (3-4)$$

De hecho, cualquier seguidor de Newton hubiese considerado que las tres primeras ecuaciones bastan por sí solas para definir la relación entre dos sistemas iniciales en movimiento relativo. No se hubiese considerado necesario el explicar la relación $t' = t$, puesto que el concepto de tiempo universal era inherente al fundamento de la mecánica newtoniana: "El tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo y debido a su propia naturaleza transcurre sin relación alguna con el exterior."¹ Dado este tiempo universal y las tres primeras

¹ Newton, *Principia*, Libro I, "Scholium after Definitions".

ecuaciones (3-4), la relación de las medidas de la velocidad en sistemas inertiales diferentes queda definida por completo y la medida de una aceleración es la *misma* para todos esos sistemas. *En la mecánica newtoniana la aceleración es un invariante.*

Veamos a continuación cómo el enunciado de una ley física viene afectado (o no) por la transformación a un sistema de referencia diferente. Estaremos entonces preparados para considerar más plenamente las ideas de Einstein.

LA TRANSFORMACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON

El fundamento de la mecánica newtoniana descansa en la relación $F = ma$. ¿Qué entendemos por una transformación de esta ley? A menos que poseamos una ley de fuerza explícita, $F = ma$ es tan sólo una definición de F . Consideremos por tanto la fuerza debida a la interacción entre dos cuerpos. Supongamos que es función tan sólo de la distancia entre ellos y que no depende de sus velocidades ni de sus aceleraciones. Podemos escribir entonces

$$F_{12} = f(x_2 - x_1) \quad (3-5)$$

Ésta es la fuerza ejercida sobre el cuerpo 2 por el cuerpo 1. Por consiguiente, la ecuación del movimiento del cuerpo 2, tal como se observa en un sistema inercial S , viene dada por

$$f(x_2 - x_1) = m_2 a_2 \quad (3-6)$$

Con el auxilio de la transformación de Galileo dada por las ecuaciones (3-4), podemos escribir la ecuación (3-6) en términos de medidas llevadas a cabo en el sistema S' . El valor transformado de la fuerza viene definido por

$$F_{12'} = f(x_2' - x_1')$$

Pero tenemos

$$x_2' - x_1' = (x_2 - vt) - (x_1 - vt) = x_2 - x_1$$

Por tanto

$$F_{12'} = f(x_2 - x_1) = F_{12}$$

Volviendo ahora al segundo miembro de la ecuación (3-6), la transformación de Galileo nos da $a = a'$, y en la dinámica newtoniana la masa inercial m es una constante: $m_2 = m'_2$. Por tanto, podemos escribir

$$F_{12'} = f(x_{2'} - x_1') = m_2' a_2' \quad (3-7)$$

Vemos, pues, en este sencillo ejemplo cómo la ley de movimiento newtoniana permanece inalterada por la transformación de Galileo. Esta misma propiedad denominada *invarianza* se cumple también por una ley de fuerzas más complicada, siempre que en ella intervengan únicamente las posiciones y las velocidades *relativas* de dos partículas en interacción. Sin embargo, si la fuerza dependiese de las posiciones y velocidades *absolutas*, es decir, si contuviese términos del tipo $x_2^2 - x_1^2$, la forma de la ecuación del movimiento dejaría de ser la misma en todos los sistemas inerciales. Nuestra experiencia no conoce ninguna situación de este tipo, que haría que las leyes de la física pareciesen diferentes en nuestro laboratorio y en un tren o avión que se moviese a velocidad constante. Considérese, por ejemplo, el fenómeno sencillo consistente en el choque de dos bolas de billar, tal como lo perciben diversos observadores situados en sistemas de referencia inerciales diferentes. Cada observador analiza este mismo proceso de choque desde su propio punto de vista y anota la información pertinente —posición, velocidad, etc.— medida con respecto a su propio sistema. Sin embargo, a pesar de que en general las diversas informaciones recogidas no estarán de acuerdo entre sí, las leyes dinámicas del choque que se deducen de las medidas efectuadas son las mismas para todos los observadores. Si las leyes físicas resultasen diferentes para uno o más observadores esto podría constituir una pista acerca de la unicidad de ciertos sistemas de referencia y en consecuencia todos los sistemas de referencia inerciales no poseerían el mismo status.

La óptica del siglo XIX descansaba en el supuesto de la existencia de un sistema de referencia único definido por el éter luminífero. Sin embargo, hemos visto algunas de las dificultades y contradicciones que surgían a raíz de este supuesto. No logramos encontrar evidencia positiva en favor de la existencia de un sistema de referencia de este tipo; parece como si toda nuestra experiencia física fuese consistente con la equivalencia dinámica de todos los sistemas inerciales. Sin embargo, tal como vimos en el capítulo I, las predicciones de la mecánica newtoniana no se cumplen en la práctica cuando intervienen velocidades suficientemente elevadas. ¿Qué es lo que ha sucedido ahora? Mejor aún, ¿en qué esquema teórico nuevo pueden integrarse ahora estos hechos experimentales? La respuesta a estos interrogantes resulta ser la siguiente:

Todos los sistemas inerciales son efectivamente equivalentes bajo cualquier tipo de condiciones, pero las leyes del movimiento y de la transformación deben ser modificadas.

Procederemos ahora a sustituir las transformaciones de Galileo por unas nuevas —las transformaciones de Lorentz-Einstein— que nos permitirán mantener el principio newtoniano de relatividad y abarcar al mismo tiempo las desviaciones con respecto a la dinámica newtoniana. Comenzaremos formulando de nuevo las ideas básicas de Einstein.

EINSTEIN Y LA UNIVERSALIDAD DE c

La nueva idea que Einstein aportó a la física era muy profunda a la vez que muy fácil de entender. Señaló que el análisis de los movimientos se había basado en una abstracción —la existencia de un tiempo universal y absoluto. Señaló que esta hipótesis era insostenible y que como principio fundamental, “la justificación de un concepto físico descansa exclusivamente en su relación clara y libre de ambigüedades con hechos que pueden experimentarse”.¹ Puede tenerse una noción metafísica del tiempo, pero cuando hay que efectuar mediciones se debe estar en el terreno de las observaciones realizadas mediante dispositivos físicos reales que denominaremos relojes. Como ejemplos pueden citarse:

Un reloj mecánico con todos sus mecanismos y su cuerda.

La Tierra en su movimiento de giro.

Un rayo de moléculas de amoniaco en un maser.

Un cristal de cuarzo.

Un grupo de partículas radiactivas.

El propio pulso del lector.

Si deseamos describir cuantitativamente el movimiento de un cuerpo debemos ser capaces de expresar sus coordenadas en función del tiempo. ¿Qué implica esto? Citaremos de nuevo el trabajo de Einstein de 1905 que explica la cuestión con mayor claridad que cualquier otra referencia a la misma cuestión:

Debemos tomar en consideración que todos aquellos juicios nuestros en los que interviene el tiempo son siempre juicios sobre sucesos simultáneos. Si, por ejemplo, yo digo: “Ese tren llegará aquí a las 7 de la

¹ Cita tomada de una conferencia dada por Einstein en 1921 (reimpresa en su libro *Ideas and opinions*).

tarde", quiero decir algo parecido a esto: "El apuntar la manecilla pequeña de mi reloj a las 7 y la llegada del tren son sucesos simultáneos."

Esto parece claro —casi trivial. Pero Einstein procede a continuación a señalar la aparición de un problema si se desea establecer una relación en el tiempo entre sucesos que tienen lugar en sitios diferentes, como ocurre al describir el movimiento de un cuerpo. Supongamos, por ejemplo, que deseamos medir la velocidad de un cuerpo. Observemos su posición \mathbf{r}_1 en un instante t_1 y su posición \mathbf{r}_2 en un instante t_2 . Entonces

$$v = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Pero, en términos del análisis de Einstein, esto significa que debemos hacer uso de "una lectura en el reloj t_1 que sea simultánea a la llegada del cuerpo a \mathbf{r}_1 y otra lectura en el reloj t_2 que sea simultánea con la llegada \mathbf{r}_2 . Y, cualquiera que sea el método de medida particular que se emplee, nuestras observaciones no poseerán significado alguno a menos que podamos definir también qué es lo que entendemos por el *mismo* tiempo en los dos lugares distintos. Si pudiésemos transmitir la información a una velocidad infinita no existiría problema alguno. Pero no podemos hacer esto. Por el contrario, dependemos de la velocidad enorme, pero finita, de las señales electromagnéticas en el vacío para relacionar la medida del tiempo en lugares diferentes. Éste era el argumento de Einstein que procedía aproximadamente de la manera siguiente:

Supongamos que establecemos puestos de observación en dos lugares distintos A y B . Un reloj situado en A puede indicar las diferencias de tiempo entre sucesos que tienen lugar en la vecindad inmediata de A . De manera análoga, un reloj situado en B puede indicar los tiempos de los sucesos que tienen lugar en la vecindad inmediata de B . Poseemos por consiguiente un "tiempo A " y un "tiempo B ". Para establecer un tiempo *común* para A y B conjuntamente diremos, *por definición*, que el tiempo que tarda una señal luminosa en ir desde A hasta B es igual al tiempo que tarda una señal luminosa en ir desde B hasta A . Por consiguiente, si una señal luminosa parte de A cuando $t = 0$, es reflejada por un espejo situado en B y vuelve a A cuando $t = t_0$, el tiempo en que la señal llega a B se *define* como $t_0/2$. Se tiene de esta manera un procedimiento específico para la sincronización de relojes situados en lugares diferentes.

Como corolario de esta definición de la relación de las medidas de tiempo en lugares diferentes se tiene que, de nuevo por definición, la velocidad de la luz en el vacío posee el mismo valor de todos los casos. Einstein incorporó

esta afirmación en su formulación original de la teoría especial de la relatividad. Su teoría descansa en realidad sobre los dos postulados siguientes:

Postulado 1: Todos los sistemas inerciales son equivalentes con respecto a todas las leyes de la física.

Postulado 2: La velocidad de la luz en el espacio libre posee siempre el valor constante c .

Resulta muy notable el que se pueda basar toda una dinámica nueva sobre estas dos breves proposiciones. Sólo una mente extraordinaria podía haber discernido esta posibilidad.

EL SEGUNDO POSTULADO Y LA EVIDENCIA QUE APORTA LA OBSERVACIÓN

El segundo postulado de Einstein acerca de la universalidad de c constituyó una innovación dramática. En la forma presentada parecía no existir la posibilidad de comprobación alguna por vía experimental. Se ha hecho notar, sin embargo, que esta característica de la relatividad especial descansa de hecho sobre una base de observación experimental (que en su mayor parte no se conoció hasta mucho tiempo después que Einstein desarrollase la teoría).¹ Pasaremos a comentar brevemente algunos aspectos de este punto de vista en términos de experimentos concretos.

El experimento de Michelson-Morley

En este experimento se construyó el interferómetro de Michelson con brazos de igual longitud. No se produjo corrimiento alguno de las franjas al girar 360° el aparato —operación que requería tan sólo unos pocos minutos durante los cuales el estado de movimiento del laboratorio no variaba apreciablemente. Este resultado nulo es consistente con la proposición de que la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones respecto a un sistema de referencia que posea un movimiento arbitrario (y desconocido) a través del espacio.

¹ Esto fue objeto de discusión por H. P. Robertson en un artículo de un número especial de *Reviews of Modern Physics*, en conmemoración del septuagésimo aniversario de Einstein [*Rev. Mod. Phys.*, **21**, 378 (1949)].

El experimento de Kennedy-Thorndike.¹

En 1932 R. J. Kennedy y E. M. Thorndike llevaron a cabo un experimento que poseía una gran semejanza con el experimento de Michelson-Morley, pero que difería de él en dos aspectos importantes. En primer lugar, los brazos del interferómetro poseían longitudes diferentes. (La diferencia de longitudes era de unos 10 cm, valor suficientemente grande como para permitir la obtención de franjas de interferencia de buena calidad.) En segundo lugar el aparato estaba fijo en el laboratorio y las franjas de interferencia fueron observadas a lo largo de un período de varios meses, lo cual requirió imponer severas condiciones a la estabilidad mecánica así como a la constancia del aparato. No se obtuvieron corrimientos en las franjas asociadas a las variaciones diurnas o debidas a las estaciones en el movimiento del laboratorio. Si interpretamos el experimento de Michelson-Morley en la forma expresada anteriormente, el resultado nulo del experimento de Kennedy-Thorndike puede tomarse como evidencia de que el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia extra $2|l_2 - l_1|$ en el brazo de mayor longitud del interferómetro es la misma en sistemas de referencia que poseen velocidades bastante diferentes. (Puede observarse, entre paréntesis, que si se adoptase la hipótesis de contracción para explicar el resultado del experimento de Michelson-Morley, no se podría explicar ahora el experimento de Kennedy-Thorndike. Refiriéndonos a la ecuación (3-2) que incorpora una contracción de Lorentz-Fitzgerald, la diferencia de tiempos calculada empleando la hipótesis del viento de éter seguirá variando al variar la velocidad v , excepto para el caso especial en que $l_{10} = l_{20}$. Esto lleva implícito el que nuestras medidas, tanto del tiempo como de la distancia, deban ser modificadas.)

Luz procedente de una fuente en movimiento

Una característica esencial del segundo postulado de Einstein es que la velocidad con la cual las señales de luz se alejan de una fuente dada es totalmente independiente del movimiento propio de la fuente. En nuestra primera discusión acerca del experimento de Michelson-Morley señalamos que efectivamente sucedía así. Durante largo tiempo se creyó que esto quedaba probado por las observaciones relativas a la luz procedente de estrellas binarias cercanas. Los dos miembros de uno de estos sistemas binarios poseen elevadas velocidades relativas, y cuando una de las estrellas posee una componente de velocidad hacia la Tierra, la otra se aleja. Se argumentó que si estas velocidades

¹ R. J. Kennedy y E. M. Thorndike, *Phys. Rev.*, **42**, 400 (1932).

eran transmitidas a la luz emitida, los movimientos *aparentes* de las estrellas serían distorsionados fuera de las órbitas newtonianas requeridas por la ley de gravitación. No se observó ninguna de estas distorsiones. Más recientemente se ha argumentado que, puesto que estos sistemas de estrellas binarias se encuentran rodeados generalmente por una nube gaseosa que absorbe y procede a radiar a su vez la luz de las estrellas, la velocidad de la luz que atraviesa el espacio interestelar será independiente de cualquier influencia posible procedente de las fuentes originales en movimiento.¹ Sin embargo, experimentos realizados posteriormente con fuentes de radiación terrestre que se movían rápidamente han verificado de manera convincente este aspecto del segundo postulado de Einstein. En uno de estos experimentos llevado a cabo con fotones de elevada energía en lugar de luz visible, la fuente estaba constituida por partículas inestables (mesones π neutros) que marchaban a una velocidad de un 99,975 % de la velocidad de la luz. La velocidad medida para los fotones emitidos hacia adelante con respecto a este movimiento era de $(2,9977 \pm 0,0004) \times 10^8$ m/s.² Una ojeada a la tabla 1-2 mostrará que esto presenta un acuerdo excelente con los mejores valores de c obtenidos para fuentes en reposo. En los capítulos 5 y 6 discutiremos con más detalle la radiación procedente de fuentes en movimiento, en conexión con la ley relativista de adición de velocidades y los fenómenos relacionados.

LA RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD

Como consecuencia inmediata de la prescripción einsteniana para la sincronización de relojes situados en puntos diferentes se deduce que la simultaneidad es relativa y no absoluta. Veamos la manera en que esto ocurre.

Supongamos que se tienen tres puntos de observación A , B y C , espaciados uniformemente a lo largo del eje x de un sistema inercial con respecto al cual permanecen todos en reposo. Podemos construir un sencillo sistema de coordenadas $x - t$ sobre el cual trazaremos las "líneas del universo" (según la terminología aceptada) que muestran la evolución del sistema en el espacio y el tiempo [figura 3-2(a)]. La línea del universo de una partícula es un gráfico de su posición en función del tiempo; ofrece una imagen completa de la historia de la partícula tal como se la observa dentro de un sistema de referencia dado. Las líneas del universo de A , B y C , son por supuesto, rectas verticales paralelas al eje de las t correspondientes a $x = \text{constante}$. Supongamos que una

¹ J. G. Fox, *Am. J. Phys.*, **30**, 297 (1962).

² T. Alväger, F. J. M. Farley, J. Kjellman e I. Wallin, *Phys. Letters*, **12**, 260 (1964).

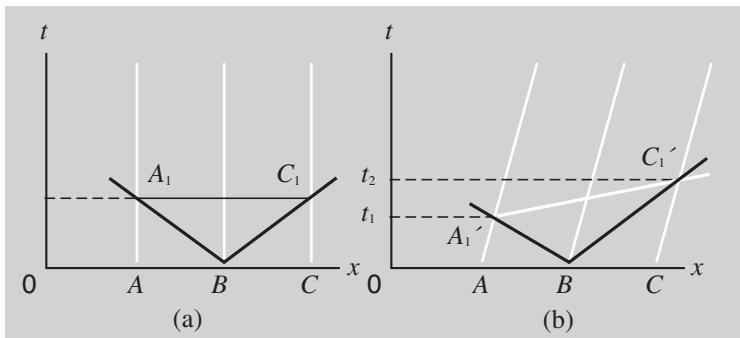


Fig. 3-2. (a) Diagrama espacio-tiempo en el que se muestra un experimento para definir la simultaneidad en los puestos de observación A y C (en reposo en este sistema de referencia) mediante señales luminosas emitidas desde otro punto de observación B situado a mitad de camino entre los dos primeros. (b) Experimento equivalente para el caso en que A , B y C posean todos una determinada velocidad respecto al sistema de referencia.

señal de radio o de luz es emitida desde B en $t = 0$. Marcha a una misma velocidad c en sentido directo e inverso a lo largo del eje de las x —lo cual implica la universalidad de c . Esta señal puede describirse mediante dos rectas inclinadas $x = x_B \pm ct$. La llegada de la señal a los puntos A y C viene dada entonces por los puntos de corte A_1 , C_1 y la simultaneidad en los puntos A y C se define mediante la recta A_1C_1 paralela al eje de las x que une a una serie de puntos que poseen el mismo valor de t .

Pero supongamos ahora que A , B y C se encuentran en reposo en un sistema inercial S' que se encuentra en movimiento con respecto a S y con una velocidad v según la dirección de las x [figura 3-2(b)]. Las líneas del universo de A , B y C estarán ahora inclinadas. Una señal emitida desde B en $t = 0$ viene descrita de nuevo (en S) mediante las rectas $x = x_B \pm ct$, y la llegada de la señal a los puntos A y C viene dada ahora por las intersecciones A'_1 , C'_1 . Está claro que éstas no son simultáneas en S , ya que la recta $A'_1C'_1$ no es paralela al eje x . O bien, para expresarlo más concretamente, la señal llega a A antes que a C porque, tal como se observa en S , A avanza para encontrarse con el pulso de señal mientras que C retrocede de él. Sin embargo, B debe encontrarse a mitad de camino entre A y C en S' al igual que en S . Aceptando la universalidad de c y la equivalencia de los sistemas inertiales, exigimos por tanto que A'_1 y C'_1 representen sucesos simultáneos en S' . (Un suceso desde el punto de vista de la teoría de la relatividad, viene caracterizado, por completo, por sus coordenadas

de espacio y tiempo en un sistema de referencia dado.) *Nuestro criterio de simultaneidad es función del sistema de referencia utilizado.*

Resulta natural preguntarnos por qué hacemos descansar esta definición de simultaneidad sobre la velocidad c en particular y no en otra velocidad cualquiera de señal. Se puede responder a esto con facilidad señalando la unicidad de c , no sólo en cuanto velocidad de la luz, sino en cuanto velocidad límite de toda la dinámica. Una respuesta más convincente (al menos a largo plazo) es el hecho de que esta elección acarrea como consecuencia el que toda ley física conocida posea la misma forma en todos los sistemas inerciales.

En la discusión precedente hemos demostrado de una forma cualitativa la relatividad de la simultaneidad. Nuestro paso siguiente consistirá en desarrollar los aspectos cuantitativos de las medidas del tiempo y del espacio de acuerdo con la relatividad especial.

LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ-EINSTEIN

La figura 3-3 representa la operación de definir la simultaneidad en las estaciones A y C que se están moviendo a una velocidad v con respecto a un sistema inercial S . Hemos discutido anteriormente representaciones de este tipo (figura 3-2). En el caso presente hemos añadido líneas rectas para repre-

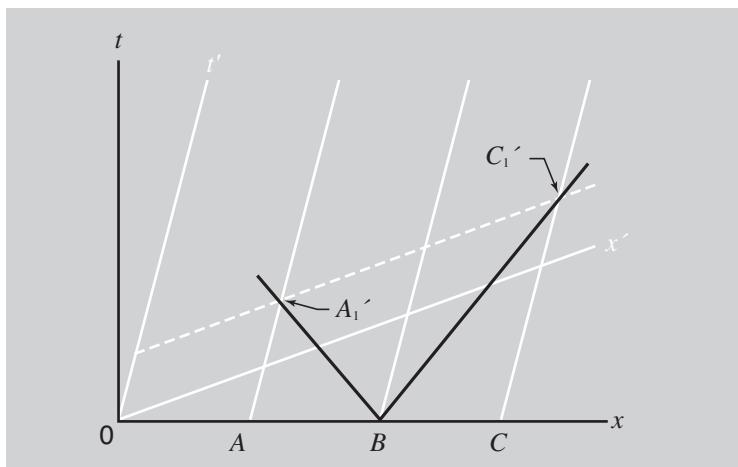


FIG. 3-3. Ejes de coordenadas (x, t) y (x', t') para dos sistemas de referencia que se encuentran en movimiento relativo.

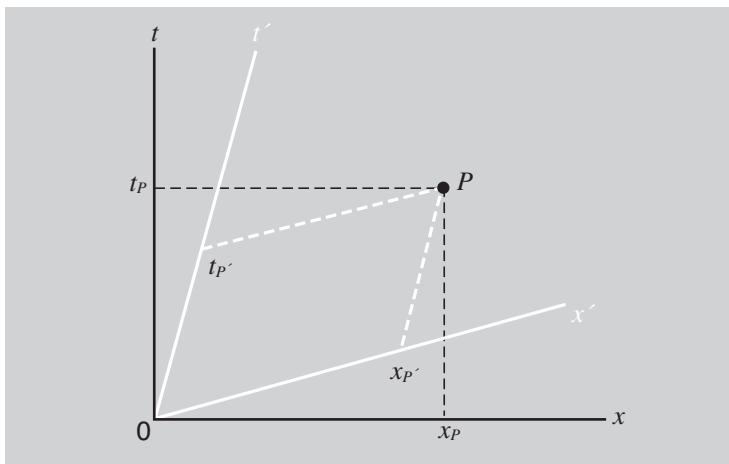


Fig. 3-4. Coordenadas espacio-tiempo de un suceso puntual dado en dos sistemas inerciales diferentes.

sentar los ejes coordenados del sistema S' en el cual A y C se encuentran en reposo. ¿Cómo hemos hecho esto? El eje de t' se traza con facilidad; es la recta $x' = 0$, es decir, la línea del universo del origen de S' . Y, puesto que el sistema S' posee una velocidad v según el eje x con relación a S , la posición de este origen viene descrita en S mediante la ecuación $x = vt$ si los orígenes de S y S' coinciden en el instante $t = 0$.

¿Qué ocurre con el eje x' ? Esta es la línea que une todos los puntos que corresponden a $t' = 0$. Toda línea de la forma $t' = \text{constante}$ es paralela a este eje x' . Pero la recta $A_1'C_1'$, es una de estas rectas, ya que A_1' y C_1' son sucesos mediante los cuales se define la simultaneidad en S' . Por consiguiente, obtendremos el eje x' trazando una recta paralela a $A_1'C_1'$, que, por comodidad, haremos pasar por O , con lo que puede describirse mediante $x = 0$, $t = 0$ y $x' = 0$, $t' = 0$. La no coincidencia de los ejes de x y x' no implica, por supuesto, ninguna inclinación relativa de uno con respecto al otro; se trata de una inclinación puramente formal en el espacio abstracto construida a partir de las coordenadas x y t .

Este tipo de diagrama pone de manifiesto una característica fundamental de las transformaciones cinemáticas de la relatividad especial. En la figura 3-4 cualquier punto P en el plano de la figura representa lo que se denomina un *suceso puntual* que puede caracterizarse mediante valores de x y de t o me-

diente valores de x' y t' . Nuestra construcción implica que x' y t' sean funciones lineales, tanto de x como de t . De manera análoga se tiene que x y t son funciones lineales de x' y t' . Esta linealidad es una propiedad fundamental de las ecuaciones de las transformaciones. De no poseer esta propiedad resultaría que un movimiento que en un sistema dado (el S , por ejemplo) fuese rectilíneo y de velocidad constante, en otro sistema S' no sería uniforme y rectilíneo. Esto estaría en desacuerdo con la ley de inercia de Galileo y con nuestra condición dinámica básica de que todos los sistemas iniciales se encuentran en reposo.

La simetría que implica el principio de relatividad trae como consecuencia el que la forma de las ecuaciones sea la siguiente:

$$x = ax' + bt' \quad (3-8)$$

con

$$x' = ax - bt$$

Estas ecuaciones han sido escritas así de forma que se parezcan lo más posible a la transformación de Galileo [ecuaciones (3-4)] a la cual se reducen para valores suficientemente pequeños de la velocidad v de S' relativa a S . El movimiento del origen de S , tal como se mide en S' , se define haciendo $x = 0$ en la primera de estas ecuaciones. Análogamente, el movimiento del origen de S' , tal como se mide en S , viene definido haciendo $x' = 0$ en la segunda ecuación. Las velocidades son iguales y opuestas y ambas de valor v . Esto nos da la condición

$$b/a = v \quad (3-9)$$

Consideraremos a continuación las descripciones según S y S' de una señal lumínosa que marcha según el sentido positivo del eje de las x . Supongamos que la señal se origina en el punto O de la figura 3-3. Puede entonces describirse en S y S' respectivamente mediante el sencillo par de ecuaciones

$$x = ct \quad x' = ct' \quad (3-10)$$

Al sustituir estas expresiones particulares para x y x' en las ecuaciones (3-8) obtenemos

$$\begin{aligned} ct &= (ac + b)t' \\ ct' &= (ac - b)t \end{aligned} \quad (3-11)$$

Eliminando t y t' entre estas últimas ecuaciones y haciendo uso de la condición $b = av$ de la ecuación (3-9) obtenemos

$$c^2 = a^2(c^2 - v^2)$$

Por tanto,

$$a = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (3-12)$$

Obsérvese que este coeficiente, a , es precisamente el factor $\gamma(v)$ que surgió en nuestro análisis dinámico del capítulo 1 —ecuación (1-22). Podemos escribir de nuevo las ecuaciones (3-8) de la siguiente forma explícita:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} (x' + vt') = \gamma(x' + vt') \\ y &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} (x - vt) = \gamma(x - vt) \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

en donde

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Estas ecuaciones difieren de las transformaciones de Galileo en el factor $\gamma(\geq 1)$ que se encuentra multiplicando el segundo miembro; claramente se ve que las ecuaciones de Galileo son un caso límite de las ecuaciones (3-13) para $v/c \rightarrow 0$.

Dadas las ecuaciones (3-13) es una cuestión de álgebra elemental el obtener las expresiones siguientes para t y t' :

$$\left. \begin{aligned} t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

La reducción de éstas a la relación de Galileo $t = t'$ requiere que $x \ll ct$ y que $v/c \ll 1$. Las ecuaciones (3-13) y (3-14) son una versión revisada de las transformaciones que relacionan x y t para el caso de dos sistemas inerciales que se encuentran en movimiento relativo según la dirección de las x .

Para acabar de completar nuestra exposición de la transformación de las medidas entre dos sistemas de referencia en movimiento relativo, necesitamos conocer la conexión entre las medidas de una distancia (y o z) transversal a la dirección del movimiento relativo de los sistemas. Está claro que, si el espacio es isótropo, todos los desplazamientos transversales a la dirección única de-

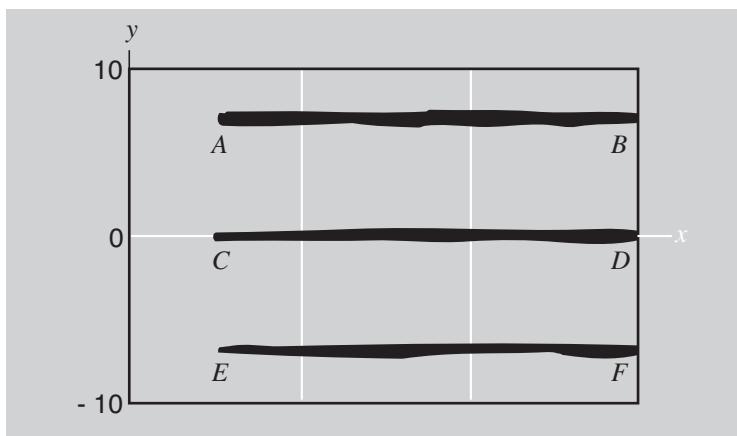


Fig. 3-5. *Experimento imaginario para comparar las escalas transversales de distancia (y) para dos sistemas en movimiento relativo según x .*

finida por el movimiento relativo son equivalentes, y no resulta difícil concluir que las transformaciones adecuadas son sencillas igualdades:

$$y = y' \quad z = z' \quad (3-15)$$

Podemos defender este razonamiento basándonos en que, de *no* ser cierto, poseeríamos un método para detectar los desplazamientos y movimientos absolutos. Supongamos, por ejemplo, que construimos dos cuadrículas idénticas que representen sistemas de coordenadas xy , uno de los cuales lo vamos a asociar a un sistema S y el otro a un sistema S' . Supongamos que se ha comprobado la igualdad del espacio de ambas cuadrículas cuando se encontraban en reposo relativo. Supongamos también que se las pone en movimiento relativo según x y que una serie de pinceles dispuestos cada 10 cm según el eje de las y de S van marcando franjas en la cuadrícula S' . De manera análoga, una serie de pinceles dispuestos cada 10 cm según el eje de las y' van marcando unas franjas en S . Cada sistema inercial registra por tanto el proceso de una forma permanente característica. No podemos concebir que las franjas sean otra cosa que líneas rectas paralelas al eje de las x ; de otra manera tendríamos, en efecto, un detector de posición absoluta según x . Supongamos que en la cuadrícula S se van trazando las franjas en la manera que se muestra en la figura 3-5 debido a los pinceles situados en $y' = 10$ cm, 0 cm y -10 cm. Llegamos así a la conclusión de que no sólo se han contraído los intervalos de 10 cm de S' medidos

en S , sino que los intervalos de 10 cm de S aparecen mayores de 10 cm en el registro que van dejando en S' . Pero esto implicaría una cierta asimetría dependiente del sentido del movimiento —según fuese hacia la derecha o hacia la izquierda en la dirección de x . Este resultado violaría nuestras ideas esenciales acerca de la relatividad y de la homogeneidad e isotropía del espacio. Concluimos, por consiguiente, que la medida de una distancia transversal (y o z) debe ser la misma para todos los sistemas inerciales que se encuentran en movimiento relativo según x , tal como se expresa en las ecuaciones (3-15).

Por comodidad y a modo de futura referencia ofrecemos a continuación el conjunto completo de las transformaciones, expresadas de ambas formas, es decir, las coordenadas de S' en función de las de S y recíprocamente:

LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ-EINSTEIN

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) & x &= \gamma(x' + vt') \\y' &= y & y &= y' \\z' &= z & z &= z' \\t' &= \gamma(t - vx/c^2) & t &= \gamma(t' + vx'/c^2)\end{aligned}$$

$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, en donde v es la velocidad de S' medida en S

(3-16)

Este conjunto de ecuaciones de transformación fue introducido por H. A. Lorentz en 1904 como fundamento de una modificación de la teoría electromagnética encaminada a reconciliar el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley con la existencia de un sistema inercial único constituido por el éter luminífero. Pero Einstein descubrió las ecuaciones de manera independiente con ayuda de un tratamiento nuevo y radical de todo el problema.

ALGO MÁS ACERCA DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ¹

Al obtener las transformaciones de Lorentz en el apartado anterior consideramos sólo las condiciones impuestas por las señales luminosas que marchaban según la dirección de las x . Se las podría haber obtenido de una manera

¹ Una vez visto que tanto Einstein como Lorentz llegaron a estas transformaciones, nos referiremos a ellas en el futuro de esta manera.

más general aplicando las condiciones del segundo postulado de Einstein a una señal luminosa que marcha según una dirección arbitraria. Sin embargo, una vez obtenidas las transformaciones, podemos emplearlas para ilustrar una paradoja aparente que está contenida en el postulado de Einstein. Se trata de lo siguiente: Supongamos que un destello luminoso se propaga en el vacío en todas las direcciones desde el origen del sistema S en $t = 0$. En cualquier instante posterior t la luz habrá alcanzado todos los puntos de una esfera de radio r , centrada en el origen de S , que verifiquen $r = ct$. Si se observa este mismo fenómeno con relación a un sistema S' que se mueve respecto a S con una velocidad cualquiera v , la propagación del destello luminoso puede describirse también mediante una esfera, centrada en este caso en el origen de S' —a pesar de que, por definición, los orígenes de S y S' coinciden tan sólo en el instante $t = t' = 0$.

Para ver la causa de esto tomamos la ecuación $r = ct$ y la volvemos a escribir en términos de las coordenadas de espacio y de tiempo medidas en S' . Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Empleando ahora el conjunto de ecuaciones de la derecha de (3-16), la ecuación anterior se nos convierte en:

$$\gamma^2(x' + vt')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \gamma^2c^2(t' + vx'/c^2)^2$$

Obsérvese que los términos cruzados de la forma $x't'$ a ambos lados de la ecuación son iguales, por lo que se cancelan. Al reagrupar los otros términos tenemos

$$\gamma^2(x')^2(1 - v^2/c^2) + (y')^2 + (z')^2 = \gamma^2(t')^2(c^2 - v^2)$$

Pero

$$\gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$$

Por tanto

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2$$

que define una esfera de radio r' tal que

$$r' = ct'$$

Este resultado, que a primera vista parece ir contra el sentido común, está ligado con la relatividad de la simultaneidad. Los puntos que, medidos en S , se alcanzan en el *mismo* instante t , se alcanzan en tiempos *diferentes* medidos en S' , de tal forma que puede decirse con propiedad que la luz se encuentra en una superficie esférica que se expansiona a la velocidad c en ambos sistemas.

DIAGRAMAS DE MINKOWSKI: ESPACIO-TIEMPO

Los razonamientos seguidos en este capítulo han encontrado una valiosa ayuda en el empleo de gráficos cuyos ejes representaban la posición y el tiempo y que permitían representar la historia completa de un movimiento unidimensional. El empleo de diagramas de este tipo en relatividad especial fue introducido por H. Minkowski en 1908 y se conocen generalmente como *diagramas de Minkowski*. En un diagrama de éstos un suceso individual cualquiera —como por ejemplo una señal luminosa que es recogida por un detector, o bien el tic-tac de un reloj— viene representado únicamente mediante un punto P (figura 3-6). La especificación detallada de este suceso en función de valores numéricos x y t puede efectuarse, sin embargo, de infinitas maneras diferentes, de acuerdo con el sistema de referencia particular que se elija. La descripción de un suceso puntual se realiza en el sistema S mediante las coordenadas (x, t) y en S' mediante las coordenadas (x', t') . Si se eligen los orígenes de S y S' , de forma que coincidan para $t = t' = 0$, la relación entre (x, t) y (x', t') está contenida en las transformaciones de Lorentz de ecuaciones (3-16).

Resulta muy adecuado el empleo de ct en lugar de t para describir la coordenada tiempo. Ambas coordenadas ct y x se expresan entonces como distancias, y si la escala de distancia es la misma para ambas, la línea del universo de una señal de luz que parte de $x = 0, t = 0$ es la bisectriz del ángulo entre los ejes. Esto es válido para todos los sistemas de referencia. Podemos representar uno de tales sistemas (el S , por ejemplo) trazando los ejes de x y ct perpendiculares entre sí. En tal caso pueden caracterizarse otros sistemas de referencia (S' y S'' , por ejemplo) mediante ejes no ortogonales para distancia y tiempo. (En la figura 3-6, S' posee una velocidad positiva según x con respecto a S , y S'' una velocidad negativa.) No hay nada especial ni ningún privilegio referente al sistema indicado con ejes de espacio y tiempo ortogonales.

Para conocer las coordenadas de espacio y tiempo de un suceso puntual P , trazamos por este punto rectas paralelas a los ejes de espacio y de tiempo de

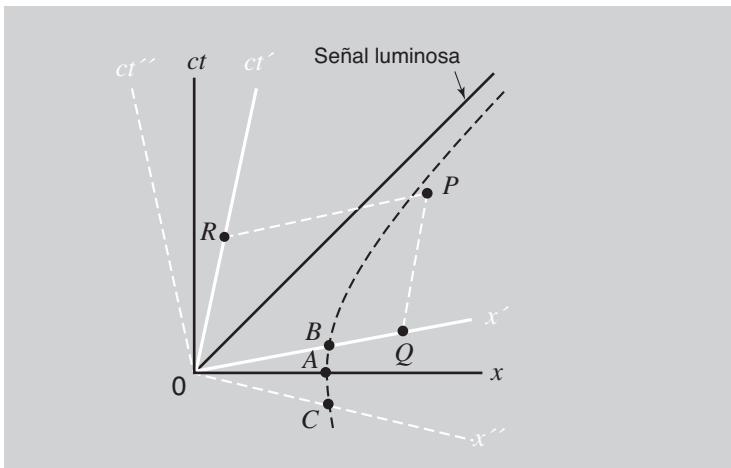


Fig. 3-6. Diagrama de Minkowski en el que pueden verse tres sistemas de coordenadas diferentes y una hipérbola de calibración para definir la distancia unidad a lo largo de x para cada sistema.

cualquier sistema que se haya elegido, viniendo dado el resultado por los puntos de intersección. En la figura 3-6 hemos tomado S' como sistema de referencia, de modo que OQ da la medida de x' y OR la medida de ct' . Es muy importante observar que en una representación como la de la figura 3-6, *la escala, que representa la distancia unidad, no es la misma a lo largo de los diferentes ejes x , x' , x'' , etc.* Para ser concretos, si trazamos la hipérbola rectangular definida por :

$$x^2 - (ct)^2 = 1 \quad (3-17)$$

sus puntos de intersección A , B y C con los ejes x , x' y x'' definirán en cada caso una distancia unidad desde O para el sistema de referencia particular de que se trate (ver la figura 3-6). En la sección siguiente se justificará este modo de proceder.

EL INVARIANTE ESPACIO-TIEMPO

Volvamos ahora a las relaciones fundamentales de la cinemática de la relatividad especial, expresadas por las transformaciones de Lorentz. Hemos visto

la forma en que surgió la relatividad especial a raíz de señalar Einstein que tanto “dónde” como “cuándo” eran términos que carecían de un sentido absoluto. ¿Es posible rescatar algo de entre todo este estado de cosas que *esté* bien definido? La respuesta es afirmativa. Supongamos que un suceso identificable tiene lugar en un punto x y en un instante t , medidos ambos con referencia a un sistema S . Otro observador, moviéndose respecto al primero en un sistema S' señalará que el suceso ha tenido lugar en x' y t' , tales que

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\t' &= \gamma(t - vx/c^2)\end{aligned}$$

Calculemos $(ct')^2 - (x')^2$:

$$\begin{aligned}(ct')^2 - (x')^2 &= \gamma^2[(ct - vx/c)^2 - (x - vt)^2] \\&= \gamma^2[(c^2 - v^2)t^2 - (1 - v^2/c^2)x^2]\end{aligned}$$

es decir,

$$(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - (x)^2 = s^2 \quad (3-18)$$

en donde el valor s^2 es el mismo para todos los observadores inerciales, es decir, es un invariante.

La manera de calibrar las escalas de los ejes en un diagrama de Minkowski se desprende directamente de lo anterior. Si hacemos $s^2 = -1$, resultan de la ecuación (3-18) las dos expresiones duales

$$\begin{aligned}x^2 - (ct)^2 &= 1 \\(x')^2 - (ct')^2 &= 1\end{aligned} \quad (3-19)$$

Si tomamos x y ct como ejes ortogonales, como en la figura 3-6, la primera de las dos ecuaciones precedentes define la hipérbola rectangular de aquella figura. El eje de las x de S es la recta $ct = 0$ y la intersección de esta recta con la rama de la hipérbola define $x = 1$. Pero, de modo similar, la recta $ct' = 0$ define el eje x' de S' , y de la segunda ecuación de (3-19) podemos deducir que la intersección de esta recta con la misma hipérbola corresponde a $x' = 1$. Esta hipérbola se comporta por consiguiente como una curva para todos los sistemas inerciales que pueden representarse sobre un mismo diagrama de Minkowski. En consecuencia, la hipérbola de la ecuación (3-17), que define una relación particular entre x y t para un número finito de sucesos diferentes descritos en el sistema S , es también el lugar geométrico en el espacio-tiempo de todos los sucesos que representan el tiempo cero y la coordenada x igual a la unidad en sistemas inerciales diferentes.

¿Qué significado posee el invariante s^2 ? Dimensionalmente, su raíz cuadrada s es una distancia, por lo que podemos caer en la tentación de considerar s como una especie de medida de la distancia (en el espacio-tiempo) mediante la cual un suceso dado puede retirarse del origen de las coordenadas del espacio-tiempo. Sin embargo, puede observarse que s^2 puede ser tanto positivo como negativo (también cero, por supuesto) y por tanto s puede ser real o imaginario. Toda interpretación física del significado de s debe ser, por tanto, sólo formal. Introduciendo ahora la variable ict puede darse a las ecuaciones (3-19) una forma semejante, en esencia, al teorema de Pitágoras. Por tanto, se puede proceder a hablar del tiempo como una cuarta dimensión, etc. Sin embargo, estos desarrollos añaden muy poco en realidad al significado básico de las transformaciones espacio-tiempo, y los dejaremos de lado por ahora. Señalaremos únicamente que como s^2 es un invariante resulta ser un valor útil para la caracterización de los sucesos y que $s^2 = 0$, en particular, define la línea del universo de una señal luminosa que atraviesa el origen del espacio-tiempo ($x = 0$, $t = 0$).

PROBLEMAS

3-1. Comprobar que una contracción de Lorentz según la dirección del movimiento conduce a una diferencia de tiempos que resulta ser independiente de la orientación de los rayos de luz en un interferómetro de Michelson con brazos de longitud desigual [referirse a la ecuación (3-2)].

3-2. En el experimento de Kennedy-Thorndike que se describe en el texto, la diferencia entre las longitudes de los dos brazos del interferómetro era, aproximadamente, de 16 cm.

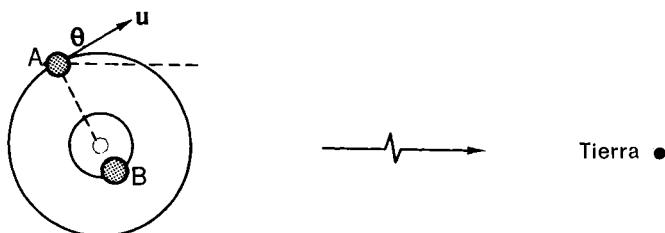
(a) Si se supone que el Sol se encuentra en reposo en el éter, la velocidad del aparato en cualquier instante es la suma vectorial de la velocidad de la Tierra a lo largo de su órbita, \mathbf{v} (30 km/s) y de la velocidad superficial \mathbf{u} debida al giro de la Tierra, con un valor aproximado de 0,5 km/s en el ecuador. Demostrar que el corrimiento máximo del espectro $\delta (= c\Delta t/\lambda)$ que cabe esperar en el transcurso de un día, de acuerdo con la ecuación (3-2), viene dado por

$$\delta \approx \frac{4uv}{c^2} \frac{l_{10} - l_{20}}{\lambda}$$

Obtener el valor numérico de δ para $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m.

(b) Las observaciones astronómicas efectuadas indican que el Sol posee una velocidad aproximada de 220 km/s relativa al centro de nuestra galaxia. Si se

supone que el centro de la galaxia se encuentra en reposo en el éter, ¿cuál será el corrimiento máximo de las franjas que el experimento de Kennedy-Thorndike revelará al cabo de 1 año?



3-3. La figura muestra un sistema de estrellas dobles con dos estrellas, *A* y *B* que describen una órbita circular con el mismo período *T* alrededor de su centro de masas. La Tierra se encuentra situada en el plano definido por estas órbitas a una distancia *R* de muchos años-luz. Sea *u* la velocidad de *A* al describir su órbita; en cada instante posee una velocidad *v_r* ($= u \cos \theta$), dirigida según la recta que va desde el sistema constituido por la doble estrella hacia la Tierra. Cuando la luz emitida desde *A* alcanza la Tierra el corrimiento Doppler observado (variación de la longitud de onda de las líneas espectrales características) da el valor de *v_r*, en el instante de la emisión.

(a) Si la velocidad de la luz desde *A* hasta la Tierra fuese modificada por el movimiento de *A*, pasando a valer $c + v_r$, demostrar que el valor de *v_r*, obtenido en la Tierra mediante observaciones realizadas con el espectroscopio apparentaría variar con el tiempo según la ecuación siguiente (para $u \ll c$):

$$v_r = u \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{R}{c} + \frac{Rv_r}{c^2} \right)$$

(Puede preguntarse uno cómo es posible que si no poseemos certeza acerca de la naturaleza de la luz y de su velocidad podamos inferir correctamente la velocidad de una estrella a partir del corrimiento Doppler de sus líneas espectrales. La respuesta reside en que tenemos confianza en tales medidas en base a nuestra experiencia relativa al corrimiento Doppler observado directamente en el caso de fuentes terrestres con velocidades conocidas.)

(b) Para el sistema de las estrellas dobles Castor C, $u = 120$ km/s, $T = 0,81$ días y $R = 48$ años-luz. Estudiar si de la teoría anterior se desprende que la velocidad radial observada en función del tiempo se va a desviar apreciablemente de la ecuación $v_r = u \operatorname{sen} 2\pi(t - R/c)/T$. A. H. Jay y R. F. Sanford encontraron experimentalmente que no ocurría así. *Astrophys. J.*, **64**, 250 (1926). (Tomado de J. H. Smith, *Introduction to Special Relativity*, Benjamin, Nueva York, 1965.)

3-4. Dado que

$$x' = \gamma(x - vt)$$

y que

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

obtener las expresiones de x y de t en función de x' y de t' .

3-5. Un suceso tiene lugar en $x' = 60$ m, $t' = 8 \times 10^{-8}$ s en un sistema S' ($y' = 0$, $z' = 0$). El sistema S' posee una velocidad $3c/5$ según el eje de las x con relación a un sistema S . Los orígenes de S y S' coinciden para $t = 0$, $t' = 0$. ¿Cuáles son las coordenadas espacio-tiempo del suceso en S ?

3-6. Las coordenadas espacio-tiempo de dos sucesos medidas en un sistema S son las siguientes:

Suceso 1: $x_1 = x_0$, $t_1 = x_0/c$ ($y_1 = 0$, $z_1 = 0$)

Suceso 2: $x_2 = 2x_0$, $t_2 = x_0/2c$ ($y_2 = 0$, $z_2 = 0$)

(a) Existe un sistema en el cual estos sucesos tienen lugar en el mismo instante. Hallar la velocidad de este sistema respecto a S .

(b) ¿Cuál es el valor de t para el que ambos sucesos tienen lugar en el nuevo sistema de referencia?

3-7. El sistema S' posee una velocidad $v = 0,6 c$ relativa a S . Se ajustan los relojes de tal forma que $t = t' = 0$ para $x = x' = 0$.

(a) Un suceso tiene lugar en S para $t = 2 \times 10^{-7}$ s en un punto para el cual $x = 50$ m. ¿En qué instante tiene lugar el suceso en S' ?

(b) Si un segundo suceso tiene lugar en $(10$ m, 3×10^{-7} s) en S , ¿cuál es el intervalo de tiempos entre los sucesos medido en S' ?

3-8. Dos sistemas de coordenadas iniciales S y S' se mueven con una velocidad $c/2$ el uno respecto al otro. Trazar un diagrama de Minkowski en el que se relacionen ambos sistemas. (Tómense perpendicularmente entre sí los ejes de x y ct para S .)

(a) Dibujar las hipérbolas de calibración que permitan definir las distancias a lo largo de los ejes de x , x' , ct y ct' .

(b) Situar en el diagrama los siguientes sucesos puntuales:

(1) $x = 1$, $ct = 1$; (2) $x' = 1$, $ct' = 1$; (3) $x' = 2$, $ct' = 0$; (4) $x = 0$, $ct = 2$.

(c) Mediante el diagrama obtenido determinar las coordenadas en S' (o S) correspondientes a los sucesos anteriores.

3-9. (a) Compruébese que las ecuaciones que describen un giro de coordenadas (x, y) según un ángulo θ son efectivamente

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

(b) Demostrar que la transformación de Lorentz corresponde a un giro de coordenadas (x, ict) según un ángulo $\theta = \text{arc tg}(i\beta)$, en donde $\beta = v/c$.

Cierto número de problemas que exigen el empleo de las transformaciones de Lorentz se hallan al final del capítulo 4.

En la fisica clásica se supone siempre que los relojes en movimiento o en reposo marchan a igual velocidad; que las barras poseen la misma longitud, tanto cuando están en movimiento como cuando se encuentran en reposo. Si la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de coordenadas, si la teoría de la relatividad es válida, nos vemos obligados a abandonar este supuesto. Resulta difícil deshacerse de prejuicios profundamente enraizados, pero no hay más remedio que actuar así.

A. EINSTEIN y L. INFELD
The Evolution of Physics (1938)

4

La relatividad y la medición de longitudes e intervalos de tiempo

En los capítulos precedentes hemos intentado mostrar principalmente la necesidad de una revisión de la cinemática y de la dinámica y de ofrecer los fundamentos de las ideas de Einstein. Comenzaremos ahora el estudio de la aplicación de su teoría a diversas cuestiones de la dinámica. Es ésta la ocasión de hacer algunas observaciones de interés.

En el primer encuentro con la relatividad einsteniana pueden sacarse las siguientes impresiones :

1. Se trata de algo bastante alejado de las mecánicas de Newton y de Galileo.
2. Existen muchas truculencias algebraicas que causan algo de desconcierto. Pueden aprenderse algunos de los trucos, pero todo ello no tiene mucho significado físico.

Esto es, en cierto modo, natural. Con independencia del tiempo que uno haya estado familiarizado con los resultados de la relatividad especial, existe algo en ella que escapa a la intuición. En nuestra experiencia cotidiana jamás intervienen velocidades superiores a $10^{-8}c$ (velocidad de un avión supersónico). Ni siquiera el tripulante de un satélite espacial supera nunca $2 \times 10^{-5}c$. Pero la relatividad sí que posee sentido y *de ninguna manera* puede considerársela situada en un compartimento separado de Galileo y de Newton. Esto deberá tenerse muy en cuenta a lo largo de todo nuestro estudio. Siempre que sea posible deberá comprobar el lector que las ecuaciones del movimiento y de las

transformaciones de la relatividad especial se reducen a las ecuaciones newtonianas para velocidades pequeñas en comparación con c .

OBSERVADORES

La literatura sobre relatividad está llena de referencias a *observadores* cuyo papel es emitir juicios acerca de las posiciones y los tiempos para los cuales tienen lugar los sucesos. (Nosotros introdujimos tales observadores hipotéticos en determinada etapa del capítulo anterior.) El observador se supone casi siempre en reposo con respecto a alguno de los sistemas de referencia; suponiendo que existe un observador en cada sistema se tiene un método para efectuar dos descripciones diferentes en el *espacio-tiempo* de un mismo suceso. Todo esto parece a la vez inocente y razonable. Cabe especular, junto con el obispo Berkeley, si tiene sentido el hablar de un suceso en ausencia de alguien que lo esté observando.¹ Sin embargo, el empleo de este lenguaje entraña ciertos peligros. Es muy importante tener presente que, como Einstein señaló, el papel de un observador consiste únicamente en registrar coincidencias, es decir, parejas de sucesos que tienen lugar en el mismo punto del espacio-tiempo. Una lectura de reloj en un punto particular de un sistema de referencia dado es un suceso desde este punto de vista; de hecho, nuestro interés se centra en este capítulo en sucesos de este tipo. Aquello que estamos acostumbrados a considerar como sucesos físicos —como, por ejemplo, el choque entre dos objetos o la emisión de un fotón por un átomo— son, para nuestros propósitos, cosas que suceden y que coinciden con sucesos que pueden describirse en función de lecturas en relojes. Las referencias constantes a lecturas en relojes pueden parecer artificiales y algo monótonas, pero sirven para hacer hincapié en una característica absolutamente esencial: la de que estamos considerando un problema muy explícito de *medición*.

Para prevenir o despejar algunos posibles malentendidos son necesarios los comentarios siguientes:

1. Aunque un suceso viene representado por definición mediante un punto en el espacio-tiempo, puede dejar una huella permanente de sí mismo. Por ejemplo, un asesino toca un vaso y deja su huella en él. El tocar el vaso es un suceso, que se desarrolla en un lugar y en un instante único en un sistema de referencia dado. Un segundo después, aun cuando el vaso no haya sido movido de su lugar, las huellas se encuentran en un lugar diferente del espacio-

¹ Por supuesto, los físicos aceptan en general la realidad de cualquier suceso que sea observable *en principio*.

tiempo. Pero queda registrado que un cierto suceso tuvo lugar. Otro ejemplo que puede presentarse es el de un reloj que cae sobre un suelo de cemento y se queda parado. Si se le deja allí donde cayó representa una prueba permanente del suceso "un reloj ha chocado contra el suelo". Un observador que apareciese en escena transcurrido cierto tiempo puede anotar las coordenadas de espacio y de tiempo del suceso medidas en un sistema de referencia definido por el suelo (para las coordenadas espaciales) y las manecillas del reloj (para la coordenada tiempo).

2. Esta última observación debería dejar claro que un observador no está necesariamente limitado a realizar medidas en un sistema de referencia al cual esté ligado él mismo. Puede hacerse referencia a todo tipo de experiencias comunes que comprenden este hecho. Por ejemplo, supongamos que estamos desempeñando el papel de pasajeros de un tren que atraviesa rápidamente una estación. En el andén hay una señal con una flecha que apunta en el sentido del movimiento del tren y que dice: "A Nueva York, 10 millas". Encima de esta señal el reloj de la estación indica que son las 10:53 A.M. Como observadores sujetos a un cierto sistema de referencia definido por el tren, nos resulta posible medir las coordenadas espacio-tiempo de un suceso, "el tren pasa por la estación", con relación al sistema de referencia en movimiento relativo formado por la estación y el suelo a la cual se encuentra fijo.¹ Sin embargo, muy a menudo se encontrarán afirmaciones del tipo siguiente: "Un observador *A* situado en un sistema *S* observa que un suceso tiene lugar en el punto x y en el instante t ; el mismo suceso tiene lugar en el punto x' y en el instante t' para un observador *B* situado en el sistema *S'*." Lo que realmente se está diciendo aquí es que el suceso posee las coordenadas espacio-tiempo (x, t) en un sistema y (x', t') en el otro. Sin embargo, se está pensando siempre en un observador encerrado en su propio sistema de referencia e incapaz de registrar nada que no sean las medidas de posición y tiempo en ese sistema. Nuestro ejemplo del pasajero del tren muestra lo innecesariamente restrictivo que es esto. El pasajero puede conocer no sólo la lectura del reloj de la estación sino también la lectura de su propio reloj. Por supuesto que *pueden existir* situaciones en las que un observador se vea limitado a realizar observaciones sobre instrumentos en su propio sistema inercial, pero esto no implica que no puede recibir información sobre los resultados de las observaciones llevadas a cabo en algún otro sistema. De hecho, tales comunicaciones ocurren con frecuencia.

¹ Consideremos que el tiempo que invierte la luz en ir desde el reloj de la estación al pasajero del tren es despreciable.

3. El último aspecto y quizás el más peligroso relativo a la introducción de un observador fijado en un sistema de referencia es que puede tenerse la impresión de que este observador posea cierta visión de conjunto de todo su sistema de referencia en un instante determinado. *Esto es algo totalmente falso.* Un solo observador no es omnipresente; en un instante dado tiene conciencia tan sólo de aquellos sucesos que ocurren en el lugar que él ocupa —como, por ejemplo, una ráfaga de protones que alcanza su retina. Si esos fotones constituyen la imagen visual de un objeto lejano, está claro que representan el objeto tal como estaba en un tiempo anterior —anterior debido al tiempo de tránsito de la propia luz. Un observador situado en un punto dado puede ser capaz de recoger información suficiente con la cual construir una descripción de lo que ocurrió en un instante anterior determinado en su sistema de referencia, pero *no puede* poseer esta imagen completa en ese mismo instante. Habrá que ponerse inmediatamente en guardia al leer afirmaciones del tipo “Un observador unido a un sistema S observa que un suceso tiene lugar en el punto x y en el instante t ” o bien “A un observador situado en el sistema S le parece...” Casi siempre tales afirmaciones se refieren sencillamente a las coordenadas *espacio-tiempo* de un suceso particular tal como las medidas llevadas a cabo en un sistema S lo establecen. Si realmente se quiere hablar de mirar o de ver habrá que tener en cuenta otra característica fundamental: la transmisión de la información de un punto a otro.

El propósito de esta discusión reside entonces en centrar la atención allí donde realmente se debe: en la especificación de sucesos puntuales según las medidas del espacio y del tiempo en sistemas de referencia dados. Al mencionar los observadores lo haremos, a menos que indiquemos lo contrario, en términos de su papel como registradores de estas medidas.

SUCESOS PUNTUALES Y SUS TRANSFORMACIONES

El concepto de suceso puntual individual, introducido ya en el capítulo 3, es de una importancia fundamental dentro de la cinemática relativista. Cualquier suceso dado, tal como hemos señalado anteriormente, es en esencia transitorio —viene representado mediante un solo punto en el espacio-tiempo. Pero las coordenadas espacio-tiempo del suceso difieren según el sistema inercial en que se las mida. Esto tiene la misma validez para el sistema de Galileo-Newton que para la relatividad especial. Pero las transformaciones de Einstein-Lorentz sustituyen ahora a las de Galileo y se reducen a ellas, como ya hemos visto, en el caso de que el valor de c pueda tomarse, en efecto, como infinito.

Todo lo que hagamos en este capítulo estará basado en las transformaciones de Lorentz. Por comodidad las expresaremos a continuación en la forma corriente:

$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + vx'/c^2) \end{array} \right\} \quad (4-1)$$

con

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Si un suceso tiene lugar en el punto de coordenadas (x, y, z, t) de S y en el punto (x', y', z', t') de S' , las medidas efectuadas en S y S' están relacionadas entre sí por las expresiones anteriores. Las ecuaciones situadas a la izquierda describen adecuadamente la transformación de S a S' y las ecuaciones situadas a la derecha describen la transformación correspondiente de S' a S . Dada una de las dos columnas la otra se desprende inmediatamente. Las ecuaciones (4-1) constituyen en esencia la relación existente entre dos descripciones del mismo suceso puntual.

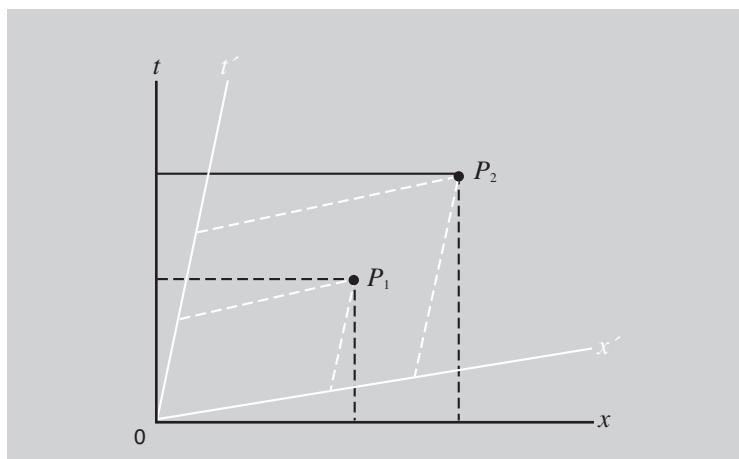


Fig. 4-1. Dos sucesos puntuales diferentes, cada uno de los cuales puede describirse en S o S' .

Si tenemos dos sucesos puntuales, cada uno de ellos puede representarse mediante sus coordenadas de espacio-tiempo en S y/o S' . Para una dimensión espacial podemos trazar un gráfico de x en función de t y señalar los sucesos puntuales individuales como en la figura 4-1. Tenemos por tanto:

Suceso 1:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 - vt_1) & x_1 &= \gamma(x_1' + vt_1') \\ t_1' &= \gamma(t_1 - vx_1/c^2) & t_1 &= \gamma(t_1' + vx_1'/c^2) \end{aligned} \right\}$$

Suceso 2:

$$\left. \begin{aligned} x_2' &= \gamma(x_2 - vt_2) & x_2 &= \gamma(x_2' + vt_2') \\ t_2' &= \gamma(t_2 - vx_2/c^2) & t_2 &= \gamma(t_2' + vx_2'/c^2) \end{aligned} \right\}$$

Podemos calcular entonces la separación de los sucesos en el espacio y en el tiempo en cada sistema. Por tanto,

$$x_2' - x_1' = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \quad (4-2)$$

$$t_2' - t_1' = \gamma[(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2] \quad (4-3)$$

Ejemplo. El sistema S' posee una velocidad $v = 0,6 c$ con relación a S . Se ajustan los relojes de manera que $t = t' = 0$ en $x = x' = 0$. Dos sucesos tienen lugar. El suceso 1 tiene lugar en $x_1 = 10$ m, $t_1 = 2 \times 10^{-7}$ s ($y_1 = 0$, $z_1 = 0$). El suceso 2 tiene lugar en $x_2 = 50$ m, $t_2 = 3 \times 10^{-7}$ s ($y_2 = 0$, $z_2 = 0$). ¿Cuál es la distancia entre los sucesos medida en S' ?

En primer lugar tenemos

$$v^2/c^2 = \frac{9}{25}$$

y por consiguiente,

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \frac{5}{4}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= \frac{5}{4}[(50 - 10) - \frac{3}{5}(3 \times 10^8)(3 - 2)10^{-7}] \\ &= 27,5 \text{ m} \end{aligned}$$

MEDICIÓN DE TIEMPOS

Es aquí donde nuestra intuición puede llevarnos por el mal camino. En

realidad no existe *el* tiempo. "El tiempo" no es una abstracción metafísica, sino lo que señala un reloj. Si se efectuasen todas las medidas en un solo sistema inercial no existiría problema alguno. Podríamos sincronizar todos los relojes mediante una señal de radio y aquí acabaría todo el problema. Pero al aplicar esto a dos sistemas inerciales en movimiento relativo se observa que la sincronización de relojes en lugares diferentes no es absoluta; cada sistema posee su propio criterio de simultaneidad. De aquí se obtienen las ecuaciones de transformación para las medidas del tiempo:

$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

Estas ecuaciones dicen en realidad lo siguiente:

Supongamos que poseemos dos sistemas de relojes idénticos con un número infinito de relojes en cada sistema —dispuestos según una línea recta (el eje de x o x'). Todos los relojes de S se disponen de forma que indiquen el mismo tiempo t en lo que se considere como el mismo instante en S . Todos los relojes de S' se sincronizan de manera análoga de acuerdo con el criterio de simultaneidad en S' . Pero los relojes de S' poseen todos una velocidad v (según x) relativa a los relojes de S y los relojes de S poseen todos la velocidad — v relativa a los relojes de S' . Por tanto:

1. Las mediciones realizadas (en S) mediante las lecturas de los relojes S' en un instante determinado t (en S) mostrarán una variación progresiva de la lectura (t') con respecto a la posición (x) medida en S .

Pero análogamente:

2. Las mediciones efectuadas (en S') mediante las lecturas de los relojes de S en un instante determinado t' (en S') mostrarán una variación progresiva de la lectura (t) con respecto a la posición (x') medida en S' .

Obsérvese los condicionamientos de la medición —en un punto determinado, en un instante determinado, en un sistema determinado.

Ejemplo. ¿Cuál es la diferencia de tiempos, medida en S' , entre los dos sucesos iguales considerados en el ejemplo de la sección anterior?

Haciendo uso de la ecuación (4-3), tenemos que

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \gamma \left[\left((t_2 - t_1) - \frac{v}{c} \frac{x_2 - x_1}{c} \right) \right] \\ &= \frac{5}{4} \left[(3 - 2)10^{-7} - \frac{3}{5} \left(\frac{50 - 10}{3 \times 10^8} \right) \right] \\ &= 2,5 \times 10^{-8} \text{ s} \end{aligned}$$

En los ejemplos precedentes hemos tomado dos puntos arbitrarios no relacionados entre sí y hemos mostrado la manera de calcular su separación en posición o en el tiempo en otro sistema de referencia. Abordaremos ahora otra cuestión más específica y más sutil. ¿Cómo puede identificarse, en un sistema de referencia arbitrario, una pareja de sucesos puntuales cuya separación en el espacio pueda tomarse justificadamente como medida de la longitud de un objeto concreto o, en otro caso, cuya separación en el tiempo pueda tomarse justificadamente como una medida del intervalo de tiempo entre los tic-tacs consecutivos de un reloj determinado? Es aquí donde aparecerán claramente las consecuencias e implicaciones de la descripción revisada de los sucesos en el espacio-tiempo. Nos enfrentamos con el problema de conocer lo que realmente significa el efectuar una medición una vez que se han dejado de lado las hipótesis tácitas e insostenibles de la mecánica clásica. Como consecuencia de este análisis se obtendrán los célebres resultados de que un objeto en movimiento aparenta sufrir una contracción y que un reloj en movimiento aparenta marchar más despacio.

LA CONTRACCIÓN DE LORENTZ

Un objeto que permanezca en reposo en un sistema inercial S (siendo x, y, z constantes) experimenta una variación continua de su coordenada tiempo. Viene descrito mediante una sucesión infinita de sucesos espacio-tiempo. Una partícula puntual en reposo respecto a un sistema inercial S viene descrita en el espacio-tiempo mediante una recta constituida por todos los sucesos puntuales que poseen los mismos valores de (x, y, z) en S .

Por tanto, en la figura 4-2, las dos rectas paralelas al eje t y que representan $x = x_1$ y $x = x_2$, podrían ser las líneas del universo de los dos extremos de un cuerpo cuya longitud en S viene siempre medida como l_0 :

$$l_0 = x_2 - x_1$$

Supongamos ahora que queremos definir un procedimiento para encontrar la longitud del cuerpo a partir de mediciones llevadas a cabo en algún otro sistema S' . ¿Qué habría que hacer? La respuesta es muy sencilla: Medir las posiciones de los dos extremos del cuerpo en el mismo instante t' como se ven en S' . Ahora bien, cualquier línea recta que represente $t' = \text{constante}$ (fig. 4-2) correrá a las rectas del universo de los extremos del cuerpo en dos puntos del diagrama $x-t$. Estos dos sucesos puntuales (P_1 y P_2) poseen las coordenadas

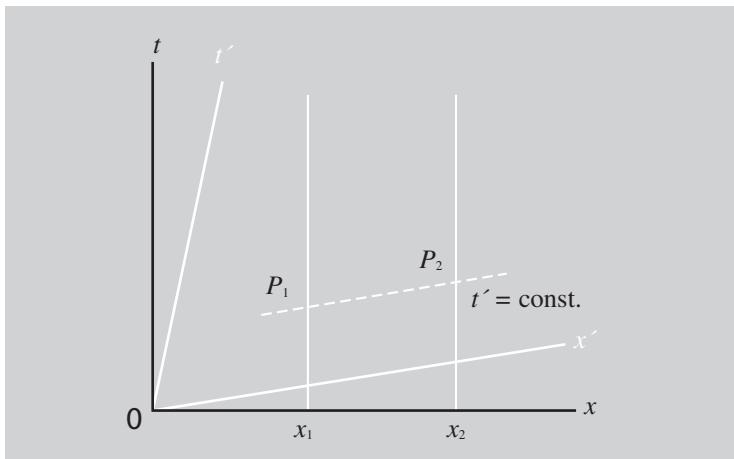


Fig. 4-2. Contracción de Lorentz. El intervalo espacial entre los extremos de un objeto en reposo en S es medido en S' en un instante t' .

(x'_1, t') y (x'_2, t') con la misma t' en cada caso. La longitud l del objeto medido en S' viene dada por

$$l = x'_2 - x'_1$$

Ahora bien, medidos en S estos dos sucesos puntuales poseen coordenadas x de valor x_1 y x_2 , respectivamente, independientes del tiempo medido en S . Por tanto, utilizando las transformaciones de Lorentz, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x'_1 + vt') \\ x_2 &= \gamma(x'_2 + vt') \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

y en consecuencia,

$$l = l_0/\gamma = l_0(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (4-4)$$

que se corresponde exactamente con la contracción de Fitzgerald-Lorentz que fue propuesta para explicar el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley. Debe comprenderse perfectamente lo que representa l . Es la distancia

entre los extremos de un objeto en el mismo instante en que se le está midiendo en el sistema particular S' . El criterio de simultaneidad es diferente en cualquier otro sistema y, en consecuencia, el resultado de medir la longitud será también diferente. Esto puede parecer extraño a primera vista, pero, de acuerdo con las ideas de Einstein es inherente al único tipo de observaciones que poseen sentido físico.

(*Observación:* Una inspección somera de la figura 4-2 puede conducir a error, ya que puede hacer creer que l , que viene representada por la recta P_1P_2 , es más larga que l_0 , que viene representada por $x_2 - x_1$. Recuérdese la discusión que se efectuó en el capítulo 3 acerca de los diagramas de Minkowski, en donde se señaló que la distancia unidad viene representada mediante rectas de diferente longitud según x y x' en un diagrama de este tipo. Al tomar esto en consideración la medida de l es siempre *inferior* a la de l_0 .)

DILATACIÓN DE TIEMPOS

Hemos mencionado que es principalmente en lo que se refiere al tiempo en lo que nuestra intuición puede llevarnos a engaño. Esto cobra la máxima importancia en el fenómeno conocido como *dilatación de tiempos*. La esencia del fenómeno es la siguiente: un lapso registrado *en un solo reloj* se compara con los resultados de mediciones llevadas a cabo en un sistema de referencia con relación al cual se mueve este reloj. En cualquier comparación de este tipo se obtiene que el tiempo transcurrido medido en el reloj único es inferior a la diferencia entre las dos lecturas que describen el comienzo y el final de este intervalo en el otro sistema. La escala de tiempo medida por el reloj único experimenta una dilatación aparente; de ahí la expresión dilatación de tiempo para referirse a este fenómeno.

Para poder apreciar la manera en que esta notable característica es inherente a la relatividad especial supóngase que un solo reloj se encuentra en reposo en el punto $x = x_0$ relativo al sistema S . Considérense dos sucesos correspondientes a dos lecturas diferentes del reloj:

$$\text{Suceso 1: } (x_0, t_1) \quad \text{Suceso 2: } (x_0, t_2)$$

Procedamos ahora al cálculo de las coordenadas del tiempo de estos sucesos medidos en el sistema S' que se está moviendo a una velocidad v con respecto a S . Haciendo uso de las transformaciones de Lorentz tenemos

Por tanto,

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1)$$

Si se expresa la diferencia $t_2 - t_1$ mediante τ_0 y $t_2' - t_1'$ mediante τ , tenemos que

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (4-5)$$

Al comparar las ecuaciones (4-5) y (4-4) observamos que la *longitud* medida para un cuerpo es *mayor* en su sistema en reposo que en cualquier otro sistema, mientras que la *diferencia de tiempos* existente entre sucesos que vienen dados mediante dos lecturas de un reloj dado es menor en el sistema del reloj en reposo que en cualquier otro sistema. El fenómeno de dilatación del tiempo pierde gran parte de su misterio cuando se observa que es debido fundamentalmente a la consecuencia de comparar lecturas sucesivas en un reloj dado con las lecturas efectuadas *en dos relojes diferentes*. Por consiguiente, lo que las ecuaciones (4-5) expresan, en esencia, no es únicamente la velocidad de un reloj dado sino también la manera de *sincronizar* relojes diferentes. Las mediciones que hemos descrito necesitan del empleo de tres relojes, dos de los cuales se encuentran en el mismo sistema inercial, pero situados en coordenadas espaciales diferentes de ese sistema. Podemos suponer que los tres relojes son exactamente iguales —es decir, que se trata de osciladores de cuarzo gobernados por ecuaciones dinámicas exactamente iguales para todos los sistemas inerciales. Mantenidos en reposo en un sistema dado seguirían marchando a la misma velocidad. Para poder observar la dilatación de tiempos es necesario que dos de los relojes, en reposo relativo pero alejados entre sí, se dispongan de manera que registren $t = 0$ en el mismo instante medido en su sistema. Interviene entonces la definición einsteniana de simultaneidad mediante el intercambio de señales luminosas o de radio. En nuestro empleo de las transformaciones de Lorentz suponemos que se han llevado a cabo estas sincronizaciones y, por lo tanto, la dilatación de tiempos como fenómenos observables es una consecuencia.

OBSERVACIÓN DE LA DILATACIÓN DEL TIEMPO MEDIANTE MESONES DE RAYOS CÓSMICOS

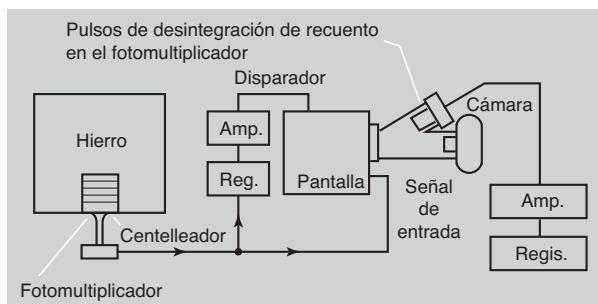
El notable resultado que expresa la ecuación (4-5) socava los cimientos sobre los que descansan las transformaciones de Galileo. Puede considerarse que

EL EXPERIMENTO DE LA DILATACIÓN DEL TIEMPO

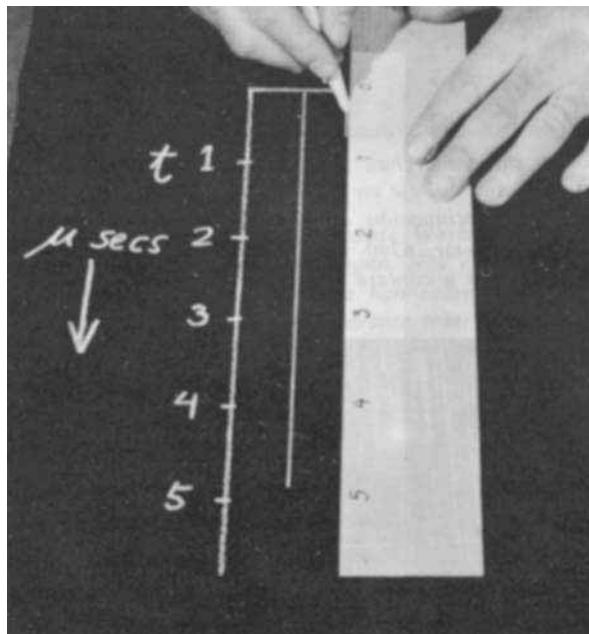
Diversos fotogramas de la película "Dilatación del tiempo —Experimento con los mesones mu", Education Development Center, Newton, Massachusetts. El texto ha sido adaptado del guión de la película, con la autorización correspondiente.



Nos encontramos en la cima de una montaña, el monte Washington de New Hampshire. Contaremos el número de mesones que lleguen aquí y bajaremos a continuación al nivel del mar y contaremos el número que pudieron sobrevivir para llegar allí. Al comparar ambos números mostraremos que estos "relojes en movimiento" experimentan un retraso. En primer lugar tendremos que detectar los mesones mu.

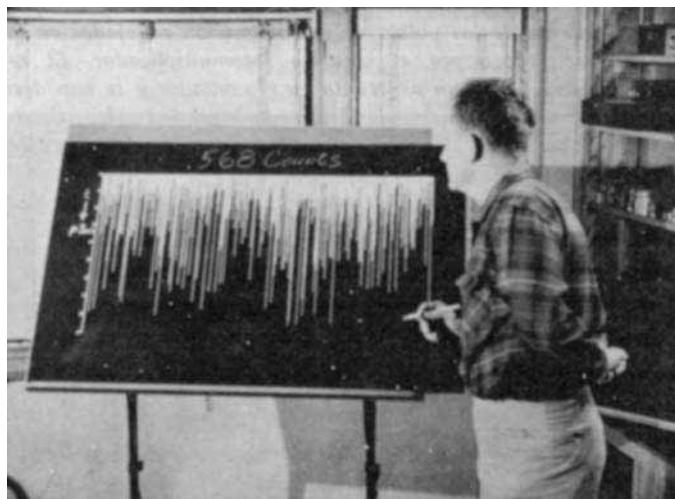


Cada vez que un mesón mu pasa a través del contador de centelleo de plástico se emite un destello luminoso. Los detectamos mediante el fotomultiplicador que convierte los destellos en señales eléctricas. Si un mesón mu se detiene en el contador y se desintegra allí emite un segundo destello y hemos dispuesto el osciloscopio de manera que muestre sólo estos pulsos debidos a la desintegración. La luz procedente de los pulsos de desintegración reflejados en la pantalla del osciloscopio se recoge por el segundo fotomultiplicador. El registrador cuenta los mesones mu que han penetrado en el contador y se han desintegrado allí. Nos interesa también saber en dónde tienen lugar los pulsos de desintegración en nuestra escala de tiempos y la forma más sencilla de su registro consiste en una cámara Polaroid. [Esquema según Frisch y Smith, "Measurement of the Relativistic Time-Dilation Using Mu-Mesons", Am. J. Phys., 31, 342 (1963).]

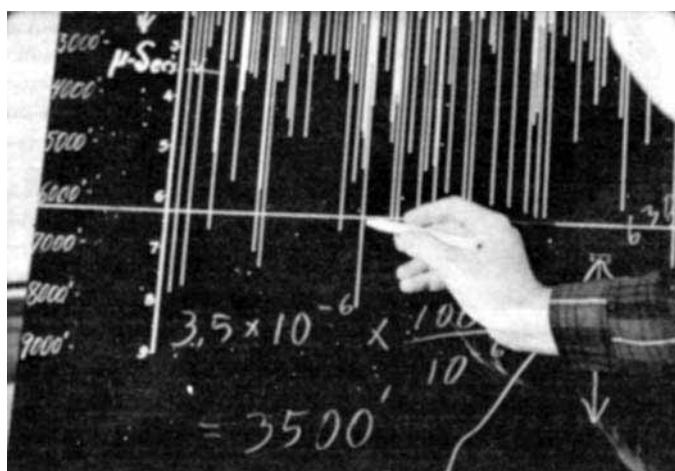


Estamos midiendo los tiempos de desintegración de muchos mesones y representándolos en un gráfico. Este mesón particular vivió durante $4.85 \mu s$, y en el gráfico se ha dibujado una línea cuya longitud representa el tiempo de desintegración del mesón.

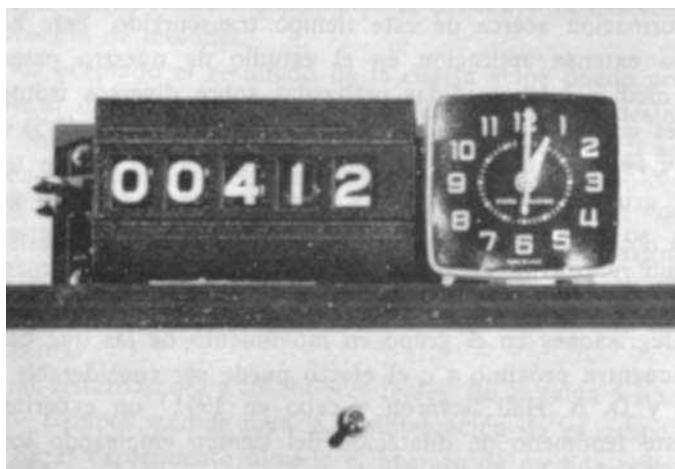
Para estudiar la forma de la distribución de los tiempos de desintegración tendremos que efectuar muchos cientos de recuentos diferentes, y por ello, hemos efectuado varias observaciones de una hora. Mostramos aquí un diagrama con 568 recuentos que obtuvimos en el transcurso de una hora.



Sabemos que los mesones marchan prácticamente a la misma velocidad de la luz; por tanto, si calibrámos el eje en miles de pies en lugar de en microsegundos, podemos preguntar a continuación el número de mesones que sobrevivirían al alcanzar el nivel del mar, 6300 pies más abajo. Colocaré un cordel aquí, en $6,3 \mu s$ o bien 6300 pies y contaré el número de mesones que alcanzarán este



nivel. Hay 27, basándose en la suposición de que los mesones mu se desintegran cuando están en pleno vuelo de la misma manera que cuando se encuentran en reposo con respecto a nosotros. Bajo este supuesto, llevando nuestro equipo a nivel del mar lógicamente encontrariamos que en cada hora se detendrían y extinguirían 27 mesones en el contador de centelleo de plástico.



Contamos 568 mesones en la cima del monte Washington y ahora hemos bajado a nivel del mar para ver cuántos quedan. Nos encontramos en Cambridge, Massachusetts, contando los mesones que han sobrevivido de los que incidieron a un nivel de 6000 pies. Contemos durante una hora. Cuatrocientos nueve, cuatrocientos diez, cuatrocientos once, cuatrocientos doce... ya ha pasado una hora. En lugar de 27 encontramos 412 mesones a nivel del mar. 412 corresponde aproximadamente a 0,7 μ s en nuestro reloj de distribución de la desintegración de mesones. 0,7 dividido entre 6,3 da 1/9. Estos mesones que se mueven a una velocidad 0,99 veces la velocidad de la luz mantienen el tiempo a 1/9 de la velocidad que poseen cuando se encuentran en reposo con relación a nosotros.

expresan la proposición siguiente: "Los relojes en movimiento marchan despacio." Pero aun teniendo en cuenta toda la discusión del apartado anterior es difícil eludir la siguiente pregunta: ¿Es esta extraña conclusión verdaderamente cierta? La respuesta es afirmativa, existiendo una firme base experimental en la desintegración de las partículas que se mueven rápidamente.

La desintegración radiactiva es uno de los muchos fenómenos en los que procesos aleatorios individuales dan lugar a una imagen bien definida. Para cualquier tipo dado de partículas inestables resulta posible medir qué fracción

de una muestra de ellas, observada por primera vez en un instante t_0 , sobrevivirá todavía en un instante posterior t . Puede predecirse entonces que, dentro de la incertidumbre estadística de los números finitos que intervienen, se obtendrá el mismo resultado con cualquier muestra del mismo tipo de partículas. Desde este punto de vista estadístico las partículas inestables son una especie de reloj; la fracción que sobrevive al cabo de un cierto tiempo proporciona información acerca de este tiempo transcurrido. Este hecho ha encontrado una extensa aplicación en el estudio de nuestro pasado histórico y geológico mediante las medidas realizadas sobre diversos isótopos de larga vida presentes en la naturaleza. No obstante, de la ecuación (4-5) se desprende que si tomamos dos grupos de partículas inestables del mismo tipo, suministramos a un grupo una velocidad v y dejamos que el segundo grupo permanezca en reposo con respecto a nuestro propio sistema de referencia, el reloj radiactivo que representa el grupo en movimiento marchará más lentamente que el del grupo en reposo. En un tiempo dado medido por nosotros, habrá menos desintegraciones en el grupo en movimiento de las que cabría esperar, y si v se encuentra próximo a c el efecto puede ser considerable.

B. Rossi y D. B. Hall llevaron a cabo en 1941¹ un experimento clásico relativo a este fenómeno de dilatación del tiempo empleando los mesones μ (muones) producidos por los rayos cósmicos que penetran en la atmósfera terrestre procedentes del espacio exterior. Con posterioridad se ha realizado una versión filmada de esta investigación.² Los hechos fundamentales relativos a este experimento son los siguientes:

1. Un mesón μ es una partícula cargada que se desintegra y da lugar a un electrón (+ o -), un neutrino (ν) y un antineutrino ($\bar{\nu}$):

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_1 + \bar{\nu}_2$$

(Debiera mencionarse de pasada que tanto ν_1 como $\bar{\nu}_2$ poseen un carácter diferente, aunque no nos ocuparemos de estos neutrinos por el presente.)

2. Los mesones producidos por los rayos cósmicos atraviesan la atmósfera terrestre en sentido radial y con velocidades muy próximas a c .
3. Mediante el empleo de detectores de partículas con carga puede registrarse la llegada de un mesón μ y, para un tiempo posterior, puede regis-

¹ B. Rossi y D. B. Hall, *Phys. Rev.*, **59**, 223 (1941).

² Se trata de la película titulada *Dilatación de tiempos—Un experimento con los mesones μ* , por D. H. Frisch y J. H. Smith, Education Development Center, Newton, Mass., 1963. Véase también D. H. Frisch y J. H. Smith, *Am. J. Phys.*, **31**, 342-355 (1963).

trarse también la emisión del electrón de alta energía resultante del proceso de desintegración. La observación de la segunda etapa implica que el mesón ha sido retenido en el detector, y por tanto la desintegración de los mesones en reposo puede registrarse.

4. A partir de la etapa tercera puede construirse una representación estadística de los intervalos de tiempo entre la llegada y la desintegración para un número elevado de mesones.

5. Una vez aceptado el resultado de la cuarta etapa puede predecirse qué tanto por ciento de un grupo de mesones se perderá por desintegración al recorrer una distancia determinada (l) durante un tiempo ($\approx l/c$) a través de la atmósfera (una vez tenida en cuenta la desaparición de mesones como consecuencia de los choques con los átomos de la atmósfera).

6. Se realizan mediciones sobre la velocidad de llegada de los muones en la cima de una montaña y a nivel del mar. Los mesones sobreviven la trayectoria en sentido descendente en un número muy superior al que cabría esperar de la etapa quinta.

Echemos un vistazo ahora a los valores reales. En la tabla 4-1 se muestra la distribución de tiempos medida para la desintegración de un grupo de mesones μ en reposo. En el experimento filmado el aparato de medida registró la llegada de 563 muones/hora por término medio a una altitud próxima a los 2000 m. Para una velocidad $\approx c$, los mesones invierten cerca de 6,5 μs en alcanzar el nivel del mar desde esta altura y por tanto, de acuerdo con la tabla 4-1, el número de mesones que se contarían por hora a nivel del mar sería de 25. Sin embargo, al llevar a cabo la medida se encontró que podían contarse más de 400 mesones por hora. De acuerdo con el reloj que representan los propios mesones el recorrido se efectuaba en menos de 1 μs —de hecho, tan sólo

TABLA 4-1: DESINTEGRACIÓN DE LOS MUONES EN REPOSO

<i>Tiempo transcurrido en μs</i>	<i>N.^o de muones que sobreviven</i>
0	568
1	373
2	229
3	145
4	99
5	62
6	36
7	17
8	6

0,7 μ s. En las páginas 112 a 115 se describe gráficamente el experimento filmado.

El factor de dilatación de tiempo próximo a 9 para las observaciones anteriores corresponde, por supuesto, a un valor particular de v . A partir de las ecuaciones (4-5) resulta

$$1 - v^2/c^2 = (\tau_0/\tau)^2 \approx \frac{1}{81}$$

lo cual nos da

$$v/c \approx 0,994$$

Quizá deba señalarse que los muones producidos por los rayos cósmicos poseen un amplio margen de energías; la selección de un valor particular de v/c se consigue efectuando observaciones únicamente en aquellos mesones que son retenidos dentro de una capa relativamente delgada de material (detector de centelleo de plástico) después de haber atravesado un gran espesor de materia (hierro + atmósfera). Los muones de velocidad menor son retenidos antes de alcanzar el plástico; los que poseen una velocidad superior prosiguen su camino, no siendo registrados en ninguno de los dos casos puesto que para ser aceptado un muon debe quedarse parado en el detector de centelleo de plástico y desintegrarse allí.

Tal como se muestra en el experimento precedente, la dilatación de tiempos no es sólo un hecho observable, sino también un importante efecto que se manifiesta en los relojes que se mueven a velocidades próximas a c con relación a un sistema de referencia dado.

OTRA INTERPRETACIÓN DEL EXPERIMENTO DE LA DILATACIÓN DEL TIEMPO

Al discutirse el fenómeno de dilatación del tiempo que presentan los mesones μ estuvimos considerando el proceso desde el punto de vista de un sistema de referencia fijo al laboratorio. En este sistema se ha visto que el reloj representado por un grupo de mesones que se movían rápidamente marchaba más despacio. ¿Qué ocurrirá ahora si intentamos describir la situación de acuerdo con las mediciones efectuadas en un sistema inercial que se mueve conjuntamente con los mesones? En este sistema los mesones se están desintegrando en reposo. Observado de este modo (es decir, desde el punto de vista de uno de los mesones), la Tierra y su atmósfera se mueven hacia arriba a una velocidad casi igual a c . Primeramente pasa la cima de una montaña y a continuación

aparece el suelo. Ahora bien, si los sistemas con movimiento uniforme son equivalentes, los valores referentes a la desintegración de los muones en reposo con relación al laboratorio (tabla 4-1) deben poder aplicarse a los muones en reposo en nuestro nuevo sistema. Pero no podemos alterar el resultado del experimento que indica que el 75 % de los mesones (en lugar del 5 %) sobreviven el recorrido desde la cima de la montaña hasta el nivel del mar. ¿Cómo resolver esta inconsistencia aparente? La respuesta es que, desde el punto de vista de los mesones en movimiento, la distancia entre la cima de la montaña y el nivel del mar experimenta una fuerte contracción. Veamos esto de un modo cuantitativo.

Supongamos que la distancia vertical que recorren los mesones viene dada por H (valor obtenido por métodos topográficos) en el sistema S fijo a la Tierra. Los mesones poseen una velocidad v al atravesar la atmósfera hacia abajo. La duración Δt del recorrido medida en S es H/v ($\approx H/c$). De acuerdo con la ecuación de dilatación del tiempo [ecuación (4-5)] el recorrido se efectúa en un tiempo $\Delta t' = \Delta t(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ medido en el sistema S' en reposo respecto a los mesones.¹ Sin embargo, este tiempo debe poderse medir también como una cierta distancia vertical H' (medida en S') dividida por la velocidad con que la atmósfera se mueve hacia arriba con relación a los mesones. Esta velocidad es v , ya que se trata de una característica esencial de cualquier teoría de relatividad el que exista un acuerdo entre el valor de la velocidad relativa de dos sistemas; sólo varía el signo de la velocidad relativa según el punto de vista adoptado. Por tanto, tenemos

$$\Delta t = \frac{H}{v}$$

$$\Delta t' = \frac{H'}{v}$$

y entonces,

$$\frac{H'}{H} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

o bien,
$$H' = H(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (4-6)$$

¹ Obsérvese que al deducir la ecuación (4-5) se supuso que el reloj (representado ahora por un grupo de mesones) se encontraba en reposo en el sistema S , en lugar del S' , pero el resultado esencial puede expresarse siempre de una manera idéntica —el reloj registra un tiempo transcurrido inferior al que registran los relojes del otro sistema.

En otras palabras, la distancia entre la cima de la montaña y el nivel del mar viene modificada por la contracción de Lorentz [ecuación (4-4)] respecto a las mediciones llevadas a cabo en el sistema de referencia de los mesones. Vemos entonces que un resultado sobre el cual todos los observadores están de acuerdo —en concreto, la fracción de un grupo de partículas inestables que sobrevive entre un suceso puntual y otro— puede atribuirse a la dilatación de tiempos o bien a la contracción de Lorentz, según sea el punto de vista que se adopte.

La discusión precedente hace hincapié en el hecho de que la dilatación de tiempos es una expresión de la definición de simultaneidad, por una parte, y de un tipo especial de medición, por otra. Simplemente resulta adecuado decir que “los relojes en movimiento marchan más despacio”, pero esto es quizás algo impreciso y puede conducir a error. En efecto, por un lado sugiere, en contra de las ideas relativistas, que existe algo absoluto acerca del movimiento. Y sugiere también que alguna variación esencial en la marcha del propio reloj ha tenido lugar; que la base física de su funcionamiento ha sido alterada de alguna manera mientras que, por el contrario, es una característica fundamental de la teoría de relatividad que suceda precisamente lo contrario —el funcionamiento del reloj, descrito desde su propio sistema de referencia, permanece inalterado por completo. Debemos observar que siempre que hablamos de un objeto en movimiento, esto tiene sentido tan sólo con respecto a un sistema de referencia dado (por lo general el nuestro propio). Mientras esto se tenga en cuenta, será legítimo hablar de relojes o metros en movimiento. Sin embargo, debe andarse con cuidado.

ALGO MÁS SOBRE LA MEDICIÓN DE LONGITUDES Y DE TIEMPOS

De la lectura de los últimos apartados se desprende la importancia y el interés especial que poseen los sistemas de referencia fijos (al menos en nuestra imaginación) a un objeto determinado y que se mueven siempre con él. Éste es el *sistema en reposo*, y las medidas que se llevan a cabo en él se denominan *propias*. Aquí no se abandonan en modo alguno las ideas relativistas. Aunque para cada observador u objeto se tiene un sistema en reposo unívocamente definido, no existe razón extrínseca alguna para preferir uno a otro. La longitud de un cuerpo medida en un sistema en reposo se denomina *longitud propia*; la designaremos mediante l_0 . Cualquier otra medición de esta longitud se denomina *no propia* y, como hemos visto, da un valor inferior a l_0 según un factor correspondiente a la contracción de Lorentz. Haciendo empleo de la

misma terminología introduciremos la noción de tiempo propio. Éste es el tiempo que se mide siempre en un punto fijo en un sistema de referencia determinado. La medida de un intervalo de tiempo entre dos sucesos es *no propia* a menos que ambos sucesos se registren en términos del mismo reloj. Refiriéndonos de nuevo al experimento de la desintegración de los muones podemos describir el fenómeno de dilatación del tiempo como una manifestación de la distinción entre tiempos propios y tiempos no propios. Quizá presente interés volver a obtener los resultados de la dilatación de tiempos y contracción de longitudes aplicando el segundo postulado de Einstein (sobre la universalidad de c) a algunas observaciones hipotéticas, aunque muy concretas, en las que intervienen medidas propias y no propias.

Consideraremos un reloj que se encuentra en reposo en un sistema S' y que se mueve a velocidad constante respecto a otro sistema S . ¿Qué tipo de reloj debe ser? No importa en realidad. Si los relojes de diferente tipo respondiesen de manera diferente al movimiento uniforme tendríamos entonces una forma de detectar tal movimiento sin referirnos al mundo externo. Esto constituiría, de hecho, una manera de determinar la velocidad absoluta y entraría en contradicción con el principio de relatividad. Por tanto, podemos elegir libremente y tomaremos entonces un reloj cuyo funcionamiento puede analizarse de una manera particularmente sencilla. Consiste en una caja que contiene dos espejos entre los cuales marcha un pulso luminoso que se refleja en uno y otro espejo y un dial que va registrando una cuenta cada vez que retorna el pulso.¹ Si la distancia entre los espejos (es decir, la longitud propia) es l_0 , el intervalo entre cada cuenta sucesiva es $2l_0/c$ del tiempo propio. Supongamos que tal reloj se mueve transversalmente a su longitud a una velocidad v con relación a algún otro sistema inercial S (fig. 4-3). La trayectoria del pulso luminoso con relación a este sistema es ABC e invierte un tiempo Δt medido a partir de la diferencia de lecturas de dos relojes sincronizados previamente (situados en A y C) y en reposo en S . Podemos razonar la invariancia de las longitudes transversales de una manera análoga a como lo hicimos en el capítulo 3; tenemos, por tanto,

$$AN = NC = v \Delta t / 2$$

$$BN = l_0$$

¹ Este reloj idealizado ha existido en la literatura sobre relatividad durante muchos años. No guarda más que una ligera semejanza con un brazo de un interferómetro de Michelson.

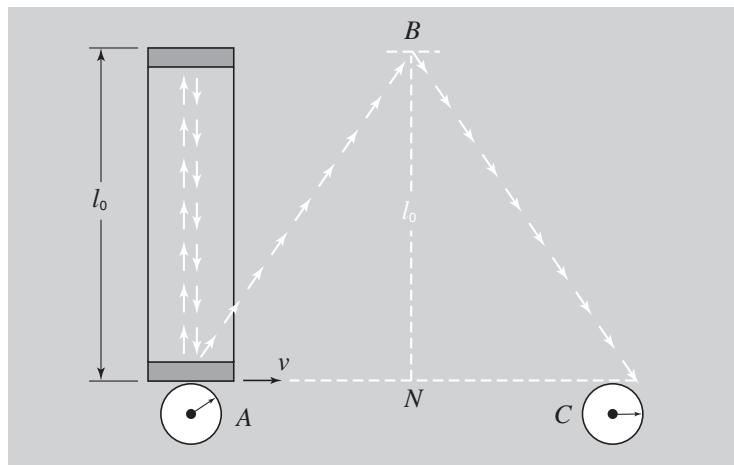


Fig. 4-3. Reloj de pulsos luminosos empleado para ilustrar la dilatación de los tiempos.

y entonces

$$AB + BC = 2 [l_0^2 + (v \Delta t/2)^2]^{1/2}$$

No obstante, la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores, lo cual quiere decir que la distancia total recorrida por el pulso luminoso (observada en el sistema S) debe ser igual a $c\Delta t$. Por tanto,

$$\begin{aligned} c\Delta t &= 2 [l_0^2 + (v \Delta t/2)^2]^{1/2} \\ \Delta t &= \frac{2l_0}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Sin embargo, el intervalo de tiempo propio $\Delta t'$ medido en el reloj en movimiento es tan sólo $2l_0/c$. Por consiguiente,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (4-5a)$$

que representa de nuevo la expresión de la dilatación del tiempo.

De manera semejante podemos razonar el resultado de la contracción de longitudes. Supongamos que nuestro reloj de pulsos luminosos se está movien-

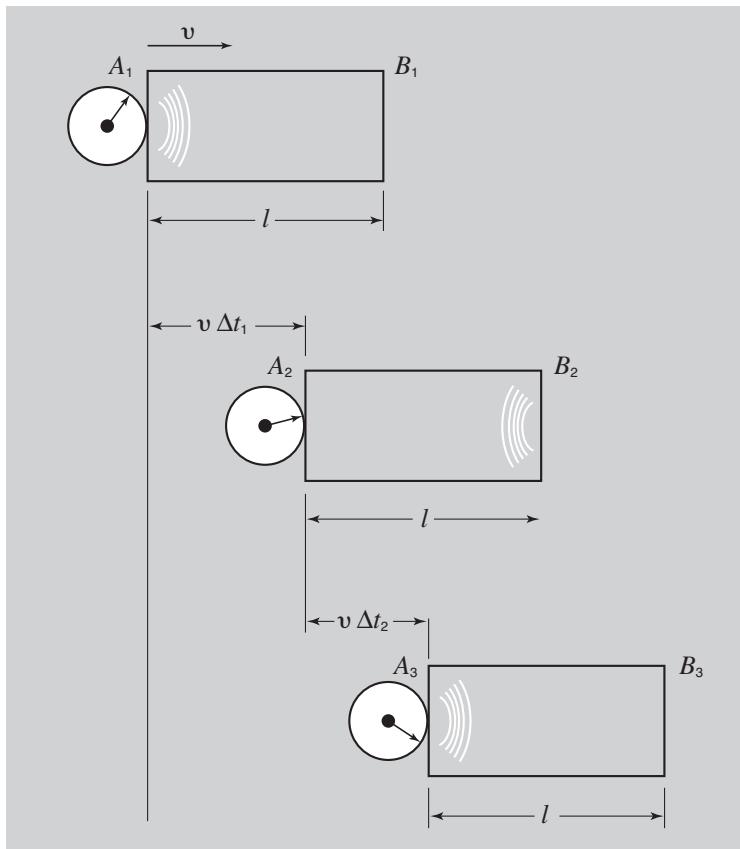


Fig. 4-4. Reloj de pulsos luminosos empleado para ilustrar la contracción de Lorentz.

do en sentido longitudinal a una velocidad v con respecto a algún otro sistema S . De nuevo el tiempo propio que invierte la luz en un recorrido de ida y vuelta es $2l_0/c$, y podemos entonces emplear la ecuación (4-5a) para obtener el tiempo transcurrido medido en S . Sin embargo, podemos calcular este tiempo a partir de la longitud del recorrido de la luz medida en S . Para esto supondremos que la longitud del reloj es l medida en S (fig. 4-4). Supongamos que la luz invierte un tiempo Δt_1 en desplazarse desde A_1 hasta B_2 (en donde es

reflejada de nuevo) y un tiempo Δt_2 en volver desde B_2 hasta A_3 . Entonces se tiene

$$l + v \Delta t_1 = c \Delta t_1$$

$$l - v \Delta t_2 = c \Delta t_2$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l/c}{(1 - v^2/c^2)}$$

Sin embargo, haciendo uso de la ecuación (4-5a), tenemos también

$$\Delta t = \frac{2l_0/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

y al combinar las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$l = l_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

que es de nuevo la ecuación (4-4).

El análisis anterior no es más que una descripción en función de un ejemplo concreto de las transformaciones de Lorentz aplicadas a mediciones de tiempo y de longitud.

Hagamos un último comentario sobre el problema de registrar sucesos puntuales que pueden tener lugar en cualquier lugar dentro de un sistema de referencia dado. Una vez fijada una cuadrícula de coordenadas espaciales debemos encontrar la forma de medir el instante en el que cualquier suceso tiene lugar. El procedimiento más satisfactorio de hacer esto consiste en disponer registradores de tiempo (relojes) por toda la cuadrícula (por ejemplo, en cada punto de cruce de la cuadrícula); en caso contrario deberían hacerse correcciones para tener en cuenta el tiempo que tarda la información en pasar desde un punto dado de la cuadrícula hasta algún punto central de registro. Por supuesto que se necesita que todos los registradores de tiempo estén ajustados de manera que señalen $t = 0$ simultáneamente. Pero, ¿por qué debe uno siempre seguir el procedimiento de Einstein consistente en intercambiar señales de luz o de radio y tener en consideración el tiempo de tránsito? ¿Por qué no comprobar todos los registradores entre sí en algún punto central y llevarlos entonces a sus puestos individuales respectivos? La clave reside en la dilatación del tiempo. Los registradores mismos deben tratarse como relojes en movimiento durante su paso del origen a otros lugares; por consiguiente,

aparentarán haber perdido tiempo al compararlos en sus posiciones con relojes sincronizados mediante la técnica de señales de radio. El error es $\Delta t - \Delta t'$ y es, por tanto, prácticamente igual a $\frac{1}{2}v^2 \Delta t/c^2$ para $v/c \ll 1$, teniendo en cuenta la ecuación (4-5a). Una vez en reposo en esta nueva posición, un reloj transportado marchará a la velocidad normal, pero su error inicial persistirá. Puesto que $\Delta t = s/v$, en donde s es la distancia desde el origen a cualquier punto particular, el error para cualquier valor particular de s es proporcional a v y puede hacerse arbitrariamente pequeño si v/c se hace suficientemente pequeño. En otras palabras, este método de normalizar el tiempo en un sistema de referencia determinado es válido sólo bajo condiciones definidas adecuadamente.

UN EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY CON LASERS

En la discusión sobre relojes de pulsos luminosos llevada a cabo en el apartado anterior queda implícito que si tuviéramos dos relojes iguales de este tipo, dispuestos formando ángulo recto entre sí, no existiría diferencia relativa de tiempos alguna y ambos aparentarían disminuir su velocidad de manera idéntica, desde el punto de vista de un sistema con respecto al cual se mueven con cierta velocidad. En efecto, ésta es una descripción del interferómetro de Michelson y el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley. Sin embargo, ha podido establecerse una analogía aún más completa mediante dos lasers en un moderno experimento para comprobar los fundamentos de la relatividad especial.¹ En la figura 4-5 se muestra la disposición de los aparatos.

Aunque la frecuencia a la cual funciona un laser debe estar comprendida dentro de la anchura de una línea espectral atómica (en este caso del átomo de neón), la frecuencia precisa viene controlada por la velocidad de la luz y la distancia entre los espejos a ambos extremos del laser.² Por consiguiente, el laser actúa realmente como un reloj de pulsos luminosos. En el experimento, la frecuencia característica de ambos lasers era próxima a 3×10^{14} cps (con una anchura de banda de sólo 20 cps). La diferencia de frecuencia (frecuencia pulsante) entre los dos lasers fue registrada haciendo girar el aparato un ángulo de 90° . No se detectó variación alguna de la frecuencia pulsante (aparte

¹ T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murray y C. H. Townes, *Phys. Rev.*, **133**, A1221 (1964).

² Exactamente, la frecuencia vale $nc/2L$, en donde L es la longitud del laser y n es un número entero grande. Intenta el lector explicar por sí mismo de dónde surge esta condición.

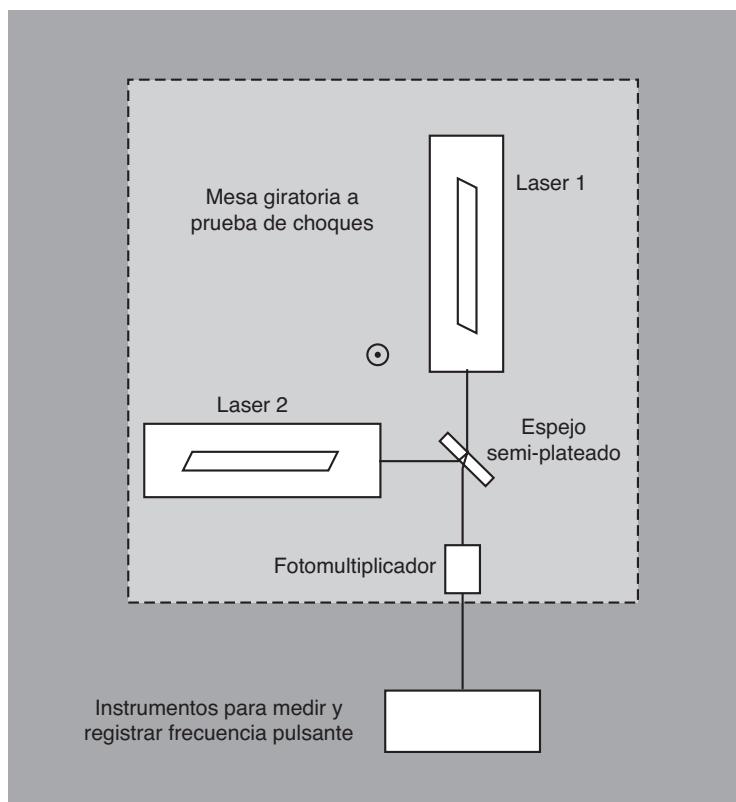


Fig. 4-5. *Disposición experimental para comparar las frecuencias de dos láseres dispuestos formando un ángulo recto entre si —versión moderna del experimento de Michelson-Morley llevada a cabo por T. S. Jaseja y colaboradores.*

de las variaciones inevitables debidas a los campos magnéticos locales, etcétera) dentro de la exactitud del experimento (alrededor de ± 3 kc/s). Esto es inferior a 1/1000 de la variación que cabría esperar de la hipótesis de viento de éter (cf. capítulo 2) y representa la comprobación más sensible que se ha llevado a efecto hasta la fecha sobre la isotropía del espacio con respecto a la velocidad de las señales luminosas.

LA RELATIVIDAD ES AUTÉNTICAMENTE RELATIVA

A pesar de que las transformaciones relativistas están basadas en la equi-

valencia absoluta de los sistemas iniciales puede seguir teniéndose la sensación de que en los fenómenos de contracción de longitudes y dilatación del tiempo existe algo de paradoja. Supongamos, en efecto, que poseemos dos barras iguales con una longitud de 1 metro que se mueven según la dirección de su longitud. Si yo voy en el sistema en reposo de una de ellas la longitud que mediré en la otra será inferior a 1 m. ¿Cómo puedo evitar entonces llegar a la conclusión de que mi barra de un metro parecerá superior a un metro para un observador situado en el sistema en reposo de la otra barra? No debemos dejarnos sorprender por tal pregunta, ya que debemos tener presente que cada sistema en reposo debe hablar por sí mismo. Las observaciones llevadas a cabo en un sistema ofrecen una descripción de los sucesos desde el punto de vista de ese solo sistema. Las observaciones obligan a decir a *A* que la barra de un metro de longitud en *B* ha encogido con las observaciones propias de *A*; las conclusiones que se desprenden de esas observaciones son válidas para *A*, pero no para *B*. *B* puede efectuar sus propias observaciones —semejantes a las de *A*, pero no iguales— y su conclusión será que la barra *A* de un metro se ha contraído. Ambos tienen razón. No existe contradicción alguna, ya que resulta físicamente imposible el que ambos conjuntos de observaciones se refieran al mismo sistema de referencia.

Esta reciprocidad puede ilustrarse elegantemente con la ayuda de los diagramas de Minkowski. En la figura 4-6 mostramos (para dos casos) la representación entre sí en la forma usual. Supongamos ahora que hay dos objetos, cada uno de los cuales posee una longitud propia que vale una unidad, uno de los cuales permanece en reposo en *S* mientras que el otro permanece en reposo en *S'*. En la figura 4-6(a) mostramos las líneas del universo de los extremos del primer objeto. Situando el origen en el extremo izquierdo, estas líneas del universo son el eje *ct* y la línea *AQ*. De manera análoga mostramos en la figura 4-6(b) las líneas del universo de los extremos del segundo objeto, el eje *ct'* y la línea *B'R'*. Ambos diagramas muestran la curva de calibración definida mediante la ecuación

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2 = 1$$

Esta curva, como ya discutimos en el capítulo 3, corta el eje *x* de cualquier sistema de referencia al que corresponde (en ese sistema) a una distancia unidad desde el origen. Por tanto, como se muestra en ambas partes de la figura 4-6, la curva pasa por el punto *A* del eje de las *x* que cumple *OA* = 1 y por el punto *B'* del eje *x'* que verifica *OB'* = 1.

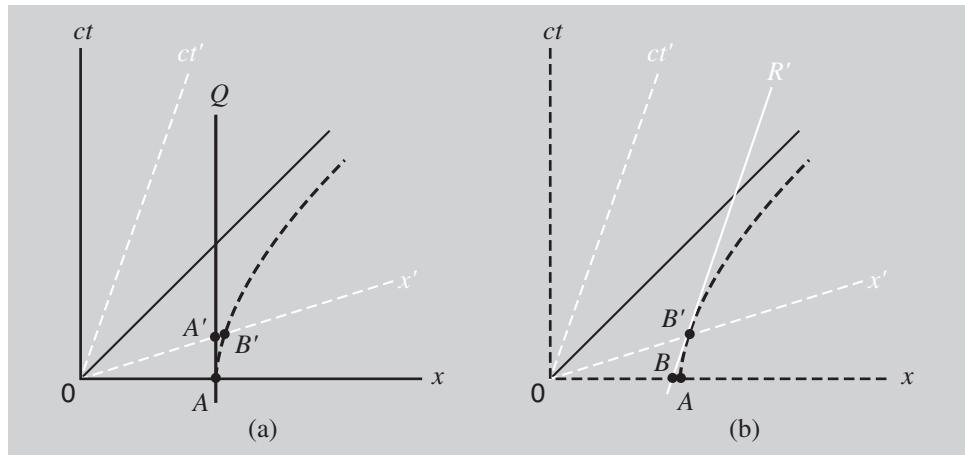


Fig. 4-6. Empleo de los diagramas de Minkowski para demostrar la naturaleza simétrica de la contracción de Lorentz. (a) Un cuerpo de longitud unidad (OA) en reposo en S aparece poseer una longitud inferior a la longitud unidad en S' . (b) Un cuerpo de longitud unidad (OB') en S' aparece poseer una longitud inferior a la longitud unidad en S .

Ahora bien, en la figura 4-6(a) la línea del universo AQ es tangente a la hipérbola de calibración en A , y en la figura 4-6(b) la línea del universo $B'R'$ es tangente a la hipérbola de calibración en B' . La razón estriba en que, en estos diagramas de Minkowski, el eje del tiempo de cualquier sistema es paralelo a la tangente trazada en el punto en donde la hipérbola de calibración corta al eje de las x correspondiente. En efecto, tomemos la ecuación de la hipérbola como viene descrita en las coordenadas de espacio y de tiempo de S y obtenemos la pendiente en cualquier punto:

$$x^2 - (ct)^2 = 1$$

Por tanto,

$$2x - 2(ct) \frac{d(ct)}{dx} = 0$$

o bien,

$$\frac{d(ct)}{dx} = \frac{x}{ct} \quad (4-7)$$

Obtengamos ahora la pendiente de la tangente en el punto de cruce de la hipérbola con el eje x' . Este eje x' es la recta $t' = 0$. Pero, por las transformaciones de Lorentz, resulta

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

Por tanto, en este punto

$$t = vx/c^2$$

y en consecuencia, de la ecuación 4-7 tenemos (en S')

$$\frac{d(ct)}{dx} = \frac{x}{ct} = \frac{x}{vx/c} = \frac{c}{v} \quad (4-7a)$$

Pero el eje ct' para el sistema S' es la recta $x' = 0$ y, ya que de acuerdo con las transformaciones de Lorentz,

$$x' = \gamma(x - vt)$$

la ecuación del eje ct' en términos de las coordenadas x y ct es

$$x - \frac{v}{c}(ct) = 0$$

En consecuencia, la pendiente de esta recta viene dada por

$$\text{pendiente del eje } ct' \text{ (medida en } S\text{)} = ct/x = c/v \quad (4-7b)$$

lo cual verifica que la construcción anteriormente analizada posee las propiedades adecuadas.

Una vez realizadas estas consideraciones de geometría analítica vemos que la línea del universo AQ (del extremo derecho del objeto que se encuentra en reposo en S) corta al eje x' de S' en un punto A' que se encuentra a una distancia menor que la distancia unidad (OB') a partir de O . Pero, de una manera exactamente equivalente, la recta del universo $B'R'$ (del extremo derecho del objeto en reposo en S') corta al eje x de S en el punto B que se encuentra a una distancia menor que la unidad (OA) con respecto a O . De esta discusión debe quedar claro que la pregunta “¿Tiene *realmente* lugar la contracción de Fitzgerald-Lorentz?” no posee una respuesta determinada e inequívoca desde

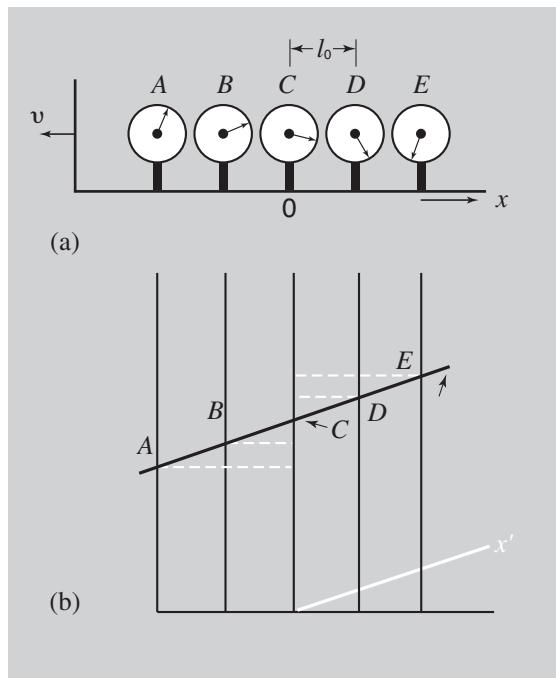


Fig. 4-7. (a) Lecturas, en un instante dado en S' , de una hilera de relojes que están sincronizados en S . (b) Gráfico en el espacio-tiempo de esta situación.

el punto de vista relativista. Nos hemos dedicado realmente a establecer las observaciones que debemos efectuar para medir la longitud de un objeto que se encuentra en movimiento relativo para nosotros. El método a seguir consiste sencillamente en medir las posiciones de sus extremos en un mismo instante de nuestro sistema. ¿Qué otra cosa podríamos hacer?¹ Por consiguiente, la contracción observada no es una propiedad inherente a la materia, sino una consecuencia del proceso de medición.

La simetría completa de la dilatación de tiempos puede discutirse en términos parecidos. Para dos sistemas en movimiento relativo uniforme lo que se compara con un intervalo de tiempo impropio obtenido a partir de relojes separados espacialmente en el otro sistema, es siempre un intervalo de tiempo

¹ Distinta a la operación equivalente consistente en anotar los tiempos para los cuales sus dos extremos pasan frente a un punto fijo en nuestro sistema, suponiendo conocida su velocidad con respecto a este sistema.

propio, registrado por su único reloj en reposo en el primer sistema. Como punto de partida para discutir esto de una manera algo más explícita, supongamos que tenemos cinco relojes igualmente espaciados y en reposo en un sistema S . Los relojes están todos sincronizados de acuerdo con la definición de simultaneidad en S . Pero supongamos ahora que este sistema S se está moviendo hacia la izquierda con una velocidad v relativa a otro sistema de referencia S' . Entonces, de acuerdo con el criterio de simultaneidad en S' , en cualquier instante dado t' medido en S' los relojes dan muestra de una diferencia progresiva en sus lecturas, como se indica en la figura 4-7(a). Esta situación se describe en términos diferentes mediante el gráfico espacio-tiempo de la figura 4-7(b). Las rectas verticales son las líneas del universo de los relojes y los puntos señalados A, B, C, D y E son las coordenadas espacio-tiempo de los relojes en un instante dado t' en S' , señalado mediante una recta trazada paralelamente al eje x' de S' . De acuerdo con la transformación de Lorentz, tenemos

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

Si el reloj C situado en el punto $x = 0$ de S , señala t_0 en el instante t' , tenemos

$$t' = \gamma t_0$$

y al sustituir este valor particular de t' en la ecuación de la transformación de Lorentz vemos que la lectura de un reloj en S para cualquier otro valor de x viene dada por

$$t(x) = t_0 + vx/c^2 \quad (4-8)$$

Este “error” progresivo (desde el punto de vista S') está, por supuesto, relacionado de una forma muy directa con el procedimiento para definir la simultaneidad mediante señales de radio. Si se emitiese una señal desde C , de acuerdo con los observadores de S' los relojes A y B se alejarían de ella, mientras que los relojes D y E irían a su encuentro. Por desconocer esto, los observadores situados en S tendrán sus relojes adelantados si se encuentran en $x > 0$ y retrasados si estuvieran en $x < 0$, precisamente como señala la ecuación (4-8).

Consideremos ahora la propia dilatación de tiempos y su naturaleza simétrica. Supongamos que poseemos dos sistemas inerciales, S y S' , en cada uno de los cuales se han dispuesto (de acuerdo con las propias medidas efectuadas) una serie de relojes sincronizados dispuestos a lo largo del eje de las x y es-

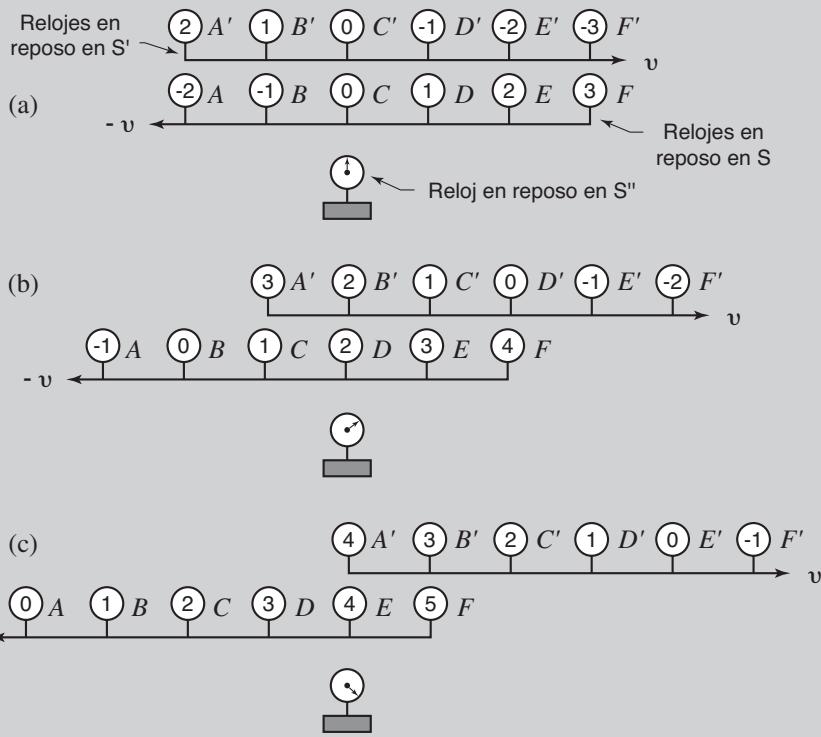


Fig. 4-8. Dos hileras de relojes sincronizados por separado que se mueven con velocidades iguales y opuestas con respecto a un sistema S'' . Los diagramas (a), (b) y (c) muestran las lecturas de los relojes que pueden observarse en tres instantes sucesivos en S'' .

paciados según intervalos iguales de valor l_0 . Pero supongamos que un sistema posee la velocidad $+v$ y el otro la velocidad $-v$, dirigida según x y con respecto a un tercer sistema inercial S'' . Puesto que en la contracción de Lorentz interviene tan sólo v^2 , ambas series de relojes aparecen igualmente espaciados para S'' . Para simplificar más aún la cuestión supondremos que el error progresivo, visto desde S'' entre los relojes sucesivos de S o de S' es exactamente 1 s, según señalan los propios relojes; estos errores poseen sentidos opuestos debido al sentido contrario de las velocidades. Supongamos que se anotan las lecturas de los relojes de S y S' (lecturas realizadas en S'') en aquellos instantes en que los relojes se encuentran frente a frente. En la figura 4-8 se muestran

los resultados posibles de tres observaciones consecutivas. Si suponemos que marchamos junto a cualquier reloj en uno cualquiera de los dos sistemas, vemos que irá perdiendo tiempo de una forma continua con relación a los relojes cercanos con los que se está comparando su lectura. Por ejemplo, el reloj B' de S' va adelantado 2 s con respecto al B de (a), señala la misma hora que el reloj D de (b) y está retrasado 2 s con respecto al reloj F de (c). Pero de una manera totalmente análoga cada reloj de S pierde 2 s con respecto a los relojes de S' en cada etapa [por ejemplo, F va adelantado 6 s con respecto a F' de (a), 4 s con respecto a D' de (b) y 2 s con respecto a B' de (c)]. No existe asimetría alguna siempre que se elijan observaciones correspondientes en los dos sistemas. La relatividad es, por tanto, algo realmente relativo.¹

INTERVALOS DE ESPACIO-TIEMPO Y CAUSALIDAD²

En el capítulo 3 introdujimos la cantidad invariante s^2 que puede obtenerse a partir de las coordenadas de espacio y de tiempo de un suceso puntual dado, medido en cualquiera de los sistemas de referencia iniciales que poseen un origen común en el espacio-tiempo. La relación, descrita mediante la ecuación (3-18), era la siguiente:

$$(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - (x)^2 = s^2$$

Si hubiéramos considerado dos sucesos diferentes hubiéramos encontrado un acuerdo entre todos los sistemas iniciales sobre el valor de $(\Delta s)^2$, definido como la medida de $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ en cualquier sistema. (Y, puesto que $y' = y$, $z' = z$, podríamos extender esta igualdad al espacio tridimensional sin más justificación.) El valor Δs que posee dimensiones de distancia se denomina *intervalo entre dos sucesos en el espacio-tiempo*; se hace nulo para aquellos sucesos conectados mediante una señal luminosa. Por ser un invariante, Δs posee una importancia especial que puede ponerse de relieve mediante el empleo de diagramas de espacio-tiempo. No profundizaremos mucho en esta geometría del espacio-tiempo, aunque quizás resulte útil el ampliar un poco nuestra discusión anterior acerca de estos diagramas.

¹ Este argumento claro y fácil de representar ha sido tomado de W. Rindler, *Special Relativity*, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1966. Los valores particulares de las lecturas de los relojes postulados aquí requieren que $v = c/\sqrt{2}$ y que $l = \sqrt{2} c$ s luz. Intente demostrar esto el lector.

² Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

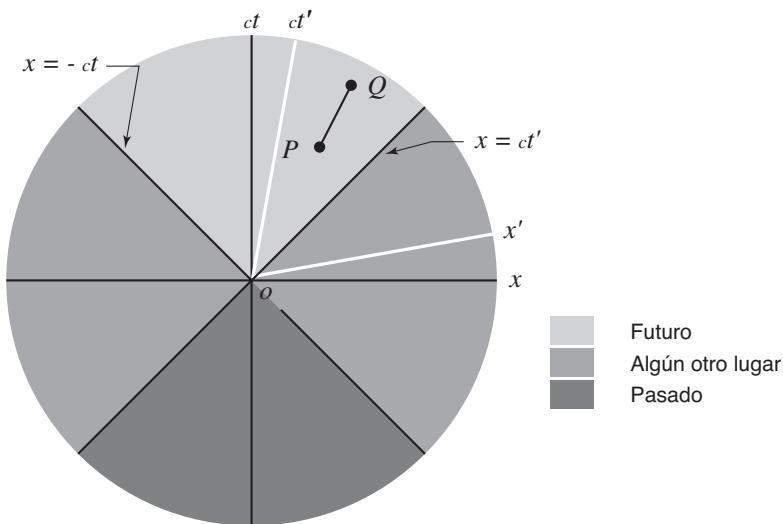


Fig. 4-9. División del espacio-tiempo (en un mundo unidimensional) en pasado, futuro y “algún otro lugar” desde el punto de vista de un observador situado en O . Se muestran también dos sucesos P y Q entre los cuales podría existir una conexión causal puesto que el intervalo entre ellos es “temporal”.

En la figura 4-9 mostramos un gráfico espacio-tiempo para problemas unidimensionales. En él se han señalado dos sucesos puntuales P y Q , junto con los ejes (x, ct) y (x', ct') adecuados a los diferentes sistemas inerciales. (Obsérvese que nuevamente se ha hecho empleo de la variable ct en lugar de t para designar las variables tiempo de modo que ambas coordenadas posean la dimensión de distancia.)

Las dos rectas $x = \pm ct$ representan las líneas del universo de señales de luz que pasan por el origen común O , y que dividen el espacio-tiempo completo en dos regiones. Las regiones designadas por “otro lugar” son imposibles de alcanzar por un observador cuya línea del universo pase por O , puesto que para entrar en ellas procedente de O se necesitarían velocidades superiores a c . Si las escalas de las coordenadas x y ct son iguales, los rayos de luz forman 45° con los ejes coordinados, como puede verse en la figura.

El valor $(\Delta s)^2$ cuya raíz cuadrada es el intervalo entre dos sucesos P y Q puede ser positivo, negativo o cero según que $c\Delta t$ sea mayor que, menor que o igual a Δx . Una línea de luz conecta sucesos puntuales entre los cuales el intervalo de espacio-tiempo es nulo. Si $c\Delta t > x$, como en la figura 4-9, resulta posible el pasar a un sistema de referencia cuyo eje ct' sea paralelo a PQ . Esto

significa que P y Q son sucesos que acontecen *en el mismo* lugar de S' y que están separados tan sólo por un intervalo de tiempo puro. El intervalo entre P y Q se dice entonces que es *temporal*.

Si $c\Delta t < \Delta x$, actuando de manera análoga puede efectuarse una transformación a un sistema en el que P y Q sean sucesos *simultáneos* que acontecen en lugares diferentes. La relación entre ellos se denomina entonces *espacial*. Para conectar dos sucesos separados por un intervalo espacial se necesita una velocidad mayor que c . Si esto fuese posible iría contra nuestras ideas acerca de la causalidad de la física. Supóngase, en efecto, que un suceso $P(x, t)$ pudiera causar un suceso $Q(x + \Delta x, t + \Delta t)$ mediante el empleo de una señal que poseyese una velocidad $u > c$. En tal caso el intervalo de tiempo entre los sucesos visto desde otro sistema que se moviese a una velocidad v vendría dado por

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \\ &= \gamma\Delta t(1 - uv/c^2)\end{aligned}\tag{4-9}$$

Por tanto, si $u > c$, podríamos encontrar un margen de valores de v ($< c$) para los cuales $\Delta t'$ y Δt tuvieran signo opuesto. Todos los observadores inertiales cuya velocidad fuese mayor que c^2/u concluirían de sus observaciones que el suceso P fue causado por el Q , al contrario de lo que debía ser. Sin embargo, esto sería muy difícil de asimilar, puesto que las leyes de la física aparentarían ser diferentes para observadores distintos —al menos mientras poseamos una base que nos permita saber el sentido en el que avanza el tiempo, base suministrada, por ejemplo, por nuestro propio envejecimiento.

Las consideraciones precedentes no nos impiden, sin embargo, el poseer velocidades geométricas mayores que c . Por ejemplo, puede lograrse con facilidad que la señal luminosa que incide en la Luna procedente de un rayo laser emitido desde la Tierra recorra la superficie de la Luna a una velocidad muy superior a la de la luz. La distancia de la Tierra a la Luna es de cerca de $3,8 \times 10^8$ m. Por tanto, un laser que girase alrededor de un eje con una velocidad de 1 rad/s (la cual es, evidentemente, bastante pequeña) bastaría para conseguir que el rayo que barre la superficie lunar tuviera una velocidad superior a c . Sin embargo, no se está violando la dinámica en modo alguno, ya que el recorrido del rayo no es más que el lugar geométrico del punto de impacto de los diferentes fotones, cada uno de los cuales marcha de la Tierra a la Luna con una velocidad c . La supervelocidad no está asociada al movimiento de ningún objeto material ni al transporte de energía ni de información desde un punto a otro de la superficie de la Luna.

Si consideramos un mundo bidimensional en lugar de un mundo unidimensional, el intervalo de espacio-tiempo viene definido mediante la ecuación

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 \quad (4-10)$$

Los sucesos que poseen un intervalo espacio-tiempo nulo con respecto al origen vienen dados entonces por

$$x^2 + y^2 = (ct)^2$$

Esta expresión define una superficie denominada *cono de luz*, parte de la cual se ha representado en la figura 4-10. Una figura como la 4-9 puede considerarse, pues, como una sección de la figura 4-10 tomada en el plano *xt*. Por supuesto que es posible continuar el análisis y escribir la ecuación del cono de luz en el caso de que se incluyan las tres direcciones del espacio ordinario, pero el lector tendrá que imaginarse por su propia cuenta la forma de *este* cono de luz.

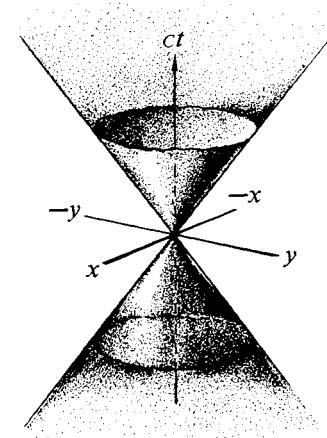


Fig. 4-10. Diagrama espacio-tiempo para un mundo bidimensional en el que se muestra el cono de luz.

PROBLEMAS

4-1. Dos sucesos tienen lugar en el mismo sitio en un determinado sistema de referencia y se encuentran separados por un intervalo de tiempo de 4 s. ¿Cuál es la separación espacial entre estos dos sucesos en un sistema inercial en el que los sucesos se encuentran separados por un intervalo de tiempo de 6 s?

4-2. Dos sucesos tienen lugar en el mismo instante en un sistema inercial S y están separados por una distancia de 1 km según el eje de las x . ¿Cuál es la diferencia de tiempos entre estos dos sucesos medida en un sistema S' que se mueve a velocidad constante según x y en el cual su separación espacial resulta ser de 2 km al medirla?

4-3. Como el texto indica, un observador no posee una visión completa de lo que sucede en todo punto de su sistema de referencia en un instante dado; tan sólo conoce aquello que sucede en ese instante en el punto en donde se encuentra. Supongamos que una barra de un metro de longitud dirigida según la dirección de las x se mueve según el eje de las x con una velocidad $0,8 c$ y que su centro de gravedad medio pasa por el origen en $t = 0$. Supongamos que un observador está situado en el punto $x = 0, y = 1 \text{ m}$.

(a) ¿En qué punto del sistema de referencia del observador se encuentran los puntos extremos de la barra en $t = 0$?

(b) ¿Cuándo ve el observador que el punto medio de la barra pasa por el origen?

(c) ¿En dónde aparentan estar los extremos en este instante?

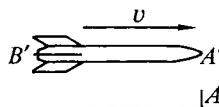
[Ver G. D. Scott y M. R. Viner, *Am. J. Phys.*, 33, 534 (1965), para una discusión más detallada de este problema.]

4-4. Nuestra galaxia mide de extremo a extremo cerca de 10^5 años-luz, y las partículas conocidas con mayor energía poseen una energía de unos 10^{19} eV. ¿Cuánto tiempo tardará un protón que posea esta energía en atravesar la galaxia si el tiempo se mide en el sistema en reposo de

(a) la galaxia?

(b) la partícula?

4-5. Un cohete espacial de longitud propia l_0 marcha a velocidad constante v relativa a un sistema S (ver la figura). La punta del cohete (A') pasa por el punto A de S en el instante $t = t' = 0$ y en este instante se emite una señal desde A' hasta B' .



- (a) ¿Cuánto tardará la señal en términos del tiempo del cohete (t') en alcanzar la cola (B') de la nave?
- (b) ¿En qué instante t_1 , medido en S , alcanza la señal la cola (B') de la nave?
- (c) ¿En qué instante t_2 , medido en S , pasa la cola de la nave (B') por el punto A ?

4-6. Un cohete de 100 m de longitud, que marcha con $v/c = 0,6$, lleva un receptor de radio en su punta. Se emite un pulso de radio desde una estación espacial en reposo en el momento en que pasa frente a ella la cola del cohete.

- (a) ¿A qué distancia de la estación espacial se encuentra la punta del cohete en el instante de llegada de la señal de radio a la punta?
- (b) En términos del tiempo de la estación espacial, ¿cuál es el intervalo de tiempo entre la llegada de esta señal y su emisión desde la estación?
- (c) ¿Cuál es el intervalo de tiempo de acuerdo con las medidas en el sistema en reposo del cohete?

4-7. Un electrón (con una energía en reposo de 0,51 MeV) es acelerado a partir del reposo a través de una diferencia de potencial de 0,13 MV, siguiendo su marcha a continuación a velocidad constante. ($1 \text{ MV} = 10^6 \text{ volts}$).

- (a) ¿Cuánto tardará el electrón (una vez alcanzada su velocidad final) en recorrer la distancia existente entre dos puntos separados 8,4 m?
- (b) ¿Cuál es la distancia entre los puntos medida en el sistema en reposo del electrón?

4-8. Un destello luminoso es emitido desde el punto x_1 del eje de las x y es absorbido en el punto $x_2 = x_1 + l$. En un sistema de referencia que se mueve a una velocidad $v = \beta c$ según el eje de las x :

- (a) ¿Cuál es la separación espacial l' entre el punto en que se emite la luz y el punto en que se absorbe?
- (b) ¿Cuánto tiempo transcurre entre la emisión y la absorción de la luz?

4-9. Dos naves espaciales, cada una de las cuales mide 100 m en su propio sistema en reposo, se cruzan entre sí. Los instrumentos de medida situados en la nave A señalan que la parte delantera de la nave B invierte $5,00 \times 10^{-6} \text{ s}$ al recorrer toda la longitud de A .

- (a) ¿Cuál es la velocidad relativa de ambas naves?
- (b) Un reloj situado en el extremo frontal de B señala exactamente 1 una al pasar por el extremo frontal de A . ¿Cuál será la lectura del reloj al pasar por el extremo posterior de A ?

4-10. Los mesones π con carga (piones) son producidos en los choques de alta energía entre protones y neutrones. Se desintegran en su propio sistema en reposo según la ley

$$N(t) = N_0(2)^{-t/T}$$

en donde T es la vida media y vale 2×10^{-8} s. Se produce una nube de piones en el blanco de un acelerador, y se observa que dos tercios de ellos sobreviven a una distancia de 30 m contada a partir del blanco. ¿Cuál es la energía de los piones? (Expresarla en términos de la energía de la masa en reposo.)

4-11. Un rayo de mesones K^+ inestables que marcha a una velocidad de $c\sqrt{3}/2$ pasa por delante de dos contadores separados una distancia de 9 m. Las partículas no experimentan pérdida alguna en su velocidad ni en su energía al pasar por delante de los contadores, pero proporcionan pulsos eléctricos que pueden contarse. Se observa que mientras el primer contador señala 1000 el segundo tan sólo 250. Suponiendo que la disminución es debida a la desintegración de las partículas durante el vuelo, ¿cuál es su media vida medida en su propio sistema en reposo?

4-12. A las doce del mediodía un cohete espacial pasa frente a la Tierra con una velocidad de $0,8 c$. Los observadores de la nave y los de la Tierra están de acuerdo en que, efectivamente, es mediodía.

(a) A las 12:30 P.M. según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra fija en relación a la Tierra y cuyos relojes señalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?

(b) ¿A qué distancia de la Tierra (en coordenadas terrestres) se encuentra la estación?

(c) A las 12:30 P.M., hora de la nave, se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuándo (en tiempo de la Tierra) recibe ésta la señal?

(d) La estación terrestre contesta inmediatamente. ¿Cuándo se recibirá la respuesta (hora de la nave)?

Es conveniente resolver este problema desde el punto de vista tanto de los sistemas de la Tierra como de los de la nave.

(Tomado de J. H. Smith, *Introduction to Special Relativity*, Benjamin, Nueva York, 1965.)

4-13. (a) En el experimento de la dilatación de tiempos con mesones descrito en el texto se empleó una capa de hierro con un espesor de 2,5 pies para deacelerar los mesones. Puede decirse de manera aproximada que los mesones μ que atraviesan el hierro experimentan una pérdida media de energía de $0,118 m_0 c^2/\text{cm}$, con independencia de su energía. Si la energía que pierden estas partículas en el propio detector de centelleo está comprendida entre cero y $0,45 m_0 c^2$, ¿cuál era la velocidad inicial de los mesones que fueron detenidos por el detector (y se desintegran en él)?

(b) Si los mesones μ marchasen todos en una dirección que formase un ángulo θ con la vertical, ¿cuál sería el cociente del número de mesones que se desintegran por hora en el detector de centelleo situado en la cima del monte Washington por el número de mesones que se desintegran en el aparato situado

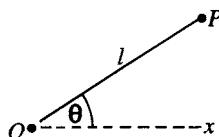
a nivel del mar? Demostrar que si $\gamma \gg 1$, la respuesta no depende de θ . En el experimento real se supuso que $\theta = 0$ para todos los mesones μ ; estimar el error debido a esta suposición si el sistema detector en la práctica acepta mesones dentro del margen comprendido entre $\theta = 0$ y $\theta = 45^\circ$.

4-14. Se conectan dos cohetes mediante un hilo inextensible con una longitud propia l_0 . En el instante $t = 0$ los cohetes parten del reposo con aceleraciones exactamente iguales y constantes medidas en S . En el instante $t = t_1$ cesa la aceleración y los cohetes prosiguen su marcha con velocidades iguales constantes medidas en S . ¿Por qué se rompió el hilo? [Para una discusión más amplia consultar los artículos de E. Dewan y M. Beran, *Am. J. Phys.*, 27, 517 (1959), y de E. Dewan, *Am. J. Phys.*, 31, 383 (1963).]

4-15. Se emite un destello luminoso desde un punto O , destello que es absorbido posteriormente en un punto P (ver la figura). En el sistema S , el segmento OP posee una longitud l y forma un ángulo θ con el eje de las x . En un sistema S' que se mueve a una velocidad constante v con respecto a S dirigida según el eje de las x :

(a) ¿Cuál es el tiempo τ' que transcurre entre la emisión y la absorción de la luz?

(b) ¿Cuál es la separación espacial l' entre el punto de emisión y el punto de absorción de la luz?

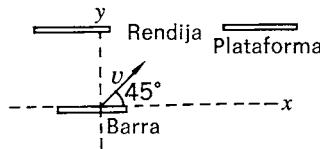


4-16. Una barra con una longitud propia l_0 se encuentra en reposo en un sistema S' . Se encuentra en el plano (x', y') y forma un ángulo arcsen $(3/5)$ con un eje x' . Si S' se mueve con una velocidad constante v paralelamente al eje x de otro sistema S :

(a) ¿Cuál será el valor de v si, en S , se mide que la barra forma un ángulo de 45° con el eje de las x ?

(b) ¿Cuál es la longitud de la barra medida en S bajo estas condiciones?

4-17. Una barra con una longitud propia L está dirigida según el eje de las x , pero se mueve en una dirección que forma un ángulo de 45° con este eje (ver la figura). Una plataforma, también paralela al eje de las x , intercepta la trayectoria de la barra, pero se ha cortado una rendija con una longitud propia de $1,1 L$, de manera que la barra pueda pasar con holgura si su velocidad es no relativista.



¿Qué sucede si su velocidad es $0,9 c$? Analizar el problema desde el punto de vista de ambos sistemas de referencia.

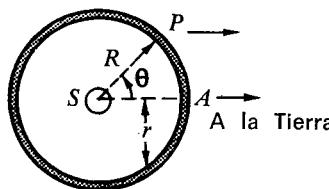
4-18. Se dan a continuación las coordenadas de espacio y de tiempo de dos pares de sucesos. Hallar el intervalo de *espacio-tiempo* entre los sucesos 1 y 2 en cada caso. Considerando cada uno de ellos como independiente, dar una respuesta a las preguntas siguientes:

- (a) ¿Puede existir una conexión causal entre ambos sucesos?
- (b) ¿Existe un sistema en el cual ambos sucesos puedan ser registrados como simultáneos? ¿En caso afirmativo, cuál será este sistema?

	<i>Suceso 1</i>				<i>Suceso 2</i>			
	x_1	y_1	z_1	t_1	x_2	y_2	z_2	t_2
Caso A	0,3 m	0,5 m	0	2×10^{-9} s	0,4 m	0,7 m	0	3×10^{-9} s
Caso B	0,7 m	0,5 m	0	5×10^{-9} s	0,4 m	0,6 m	0	4×10^{-9} s

4-19. Considérese una estrella S rodeada por una capa esférica de polvo con un radio R (ver la figura). Suponer que la luz emitida por la estrella es absorbida en primer lugar y radiada de nuevo por la capa de polvo. La estrella experimenta repentinamente una explosión del tipo *nova* y emite un pulso luminoso muy intenso. Un observador situado en la Tierra (a una gran distancia) ve la luz que vuelve a radiar A antes de ver la luz procedente de P . El efecto total podría describirse como un anillo de luz con centro en A que se propagase. Demostrar que la velocidad (dr/dt) a la cual el radio de este anillo parece aumentar viene dada por

$$dr/dt = c \cot \theta$$



y es, por tanto, mayor que c para $\theta < 45^\circ$. ¿Qué ocurre con la causalidad?

La velocidad de la luz es el límite superior de las velocidades que pueden alcanzar todos los cuerpos materiales... La sencilla ley de adición y substracción de velocidades ya no es válida o, para ser más exactos, es sólo aproximadamente válida para velocidades pequeñas, pero no para velocidades cercanas a la de la luz. El número que expresa la velocidad de la luz aparece de forma explícita en la transformación de Lorentz y desempeña el papel de valor límite, como en el caso de la velocidad infinita en la mecánica clásica.

A. EINSTEIN y L. INFELD
The Evolution of Physics (1938)

5

Cinemática relativista

TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES

UNA VEZ OBTENIDAS las transformaciones de Lorentz para la distancia y el tiempo, podemos pasar inmediatamente a considerar las derivadas de los desplazamientos con respecto al tiempo medidas en dos sistemas inerciales diferentes. Aunque nos interesa en general el movimiento en el espacio tridimensional pueden obtenerse la mayor parte de los resultados de interés en función del movimiento en dos dimensiones. Esto se debe a que (como señalamos en el capítulo 3) sólo interviene una dirección definida únicamente —la dirección del movimiento relativo de los sistemas inerciales. Ésta es un eje de simetría y cualquier desplazamiento puede descomponerse según componentes longitudinales y transversales a él. Lógicamente debiera ponerse de manifiesto este hecho en las ecuaciones expresadas en coordenadas cilíndricas, en las cuales un vector viene caracterizado por su componente según el eje de simetría, la componente transversal a este eje y un cierto ángulo —el azimut— que es el ángulo que forma un plano fijo que contiene el eje y el plano definido por el eje y el vector. En muchos casos el ángulo acimutal no aparecerá en los resultados. Sin embargo, tradicionalmente se han venido empleando coordenadas cartesianas con los ejes y y z perpendiculares entre sí y a la dirección (x) del movimiento relativo de los sistemas de referencia. Seguiremos empleando, pues, esta forma de representación. Pero las transformaciones adecuadas a las direcciones de las x y de las y indican realmente todo lo que sucede y las transformaciones para la dirección de las z pueden construirse, generalmente

por inspección, a partir de las correspondientes para la dirección de las y . Por tanto, a menos que exista algún motivo especial que fuerce a lo contrario, trataremos los vectores como si poseyesen tan sólo componentes x e y .

Comenzaremos entonces con las siguientes ecuaciones fundamentales:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \end{aligned} \quad (5-1)$$

con $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Supongamos que las componentes de la velocidad de un objeto, medidas en S' , son u'_x , u'_y . Según la definición de velocidad tenemos que:

$$u'_x = dx'/dt', \quad u'_y = dy'/dt'.$$

¿Cuál será la relación entre estas componentes y las componentes de la velocidad del objeto medida en S , con relación al cual el sistema S' posee la velocidad v ?

De las ecuaciones (5-1), derivando, obtenemos que:

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(u'_x + v) dt' \\ dy &= u'_y dt' \\ dt &= \gamma(1 + vu'_x/c^2) dt' \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \quad (5-2)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \quad u'_y = \frac{u_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \quad (5-3)$$

En las ecuaciones (5-2) y (5-3) hemos añadido, para mayor generalidad, las expresiones de u'_x y u'_y en función de las mediciones llevadas a cabo en S . Consideraremos la ecuación (5-2) en primer lugar. Representa la ley relativista de adición de dos velocidades que poseen la misma dirección. Si tanto u'_x como v son pequeñas frente a c , el término vu'_x/c^2 puede despreciarse frente a la unidad en

la mayoría de los casos. Volvemos, por tanto, al caso de adición directa de velocidades perfectamente válido para la cinemática de la vida corriente. Pero si alguna o ambas velocidades que se combinan fuese comparable a c , los resultados obtenidos diferirían en esencia de la cinemática de Galileo.

Supongamos, por ejemplo, que $u_x' = v = 0,5 c$, de modo que $u_x' + v = c$. Entonces

$$u_x = \frac{0,5c + 0,5c}{1 + (0,5)^2} = \frac{4}{5}c$$

La velocidad compuesta es inferior en un 20 % a la que se calcula mediante adición directa. Estudiemos esta ley de adición de velocidades con mayor generalidad escribiendo las velocidades a componer como fracciones de c :

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 c \\ u_x' &= \beta_2 c \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{u_x}{c} = \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \quad (5-4)$$

Mientras impongamos la restricción de que los valores de β_1 y β_2 sean inferiores a la unidad (es decir, que cada una de las velocidades que se componen sea inferior a c) el valor de u_x/c es también inferior a la unidad. Una forma sencilla de ver esto es considerar el valor de $1 - \beta$:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= 1 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \\ &= \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{1 + \beta_1\beta_2} \end{aligned}$$

Si β_1 y β_2 son ambas fracciones positivas, correspondientes a la adición de velocidades en el mismo sentido, está claro que el segundo miembro de la ecuación anterior se encuentra comprendido entre 1 y 0; por consiguiente, β es un número entre 0 y 1.

RADIACIÓN DE UNA FUENTE QUE SE MUEVE RÁPIDAMENTE

En el caso particular de que una de las velocidades a componer, u_x' por ejemplo, valga c , y por tanto $\beta_2 = 1$, la ecuación (5-4) da entonces el resultado

$u_x = c$ para cualquier valor de v . Se desprende, por tanto, que en el caso de una fuente luminosa que se mueve relativamente al laboratorio la luz emitida sigue teniendo la velocidad c con independencia de la velocidad a la que se mueve la fuente.

Como ya mencionamos en el capítulo 3, este resultado, a pesar de representar una característica esencial de la formulación de la relatividad especial, tal como lo estableció Einstein, no pudo ser demostrado de manera convincente hasta mucho más tarde. Uno de los motivos principales de ello es el hecho de que en la propagación de la luz a través de un medio (aun en el caso que éste sea transparente) tiene lugar un proceso continuo de absorción y de reemisión de la luz incidente en forma de radiación secundaria —siendo suficiente un espesor muy pequeño de materia para que esta sustitución se lleve a cabo. Así, por ejemplo, en el caso de la luz visible, un espesor de 10^{-5} cm de cristal o de 0,1 mm de aire a la presión atmosférica es casi suficiente para borrar cualquier memoria posible del movimiento de la fuente original. Este fenómeno —denominado *fenómeno de extinción* (a pesar de que no lleve consigo ninguna disminución apreciable en la intensidad del rayo de luz)— ha invalidado algunas de las observaciones (como las relativas a los movimientos aparentes de las estrellas binarias a los que se ha hecho ya referencia en el capítulo 3) que se creyeron en un principio que confirmaban el segundo postulado de Einstein acerca de la invariancia de c . Describiremos a continuación dos experimentos que *no* parecen estar viciados por el fenómeno de extinción.¹

Uno de estos experimentos² (realizado adecuadamente en el Michelson Laboratory de la Marina de los EE. UU.) utilizaba luz visible en un aparato que recordaba bastante al empleado en el experimento de Fizeau (capítulo 2). La luz de una fuente primaria S (fig. 5-1) pasaba mediante un espejo M a un separador de rayos luminosos P de manera que se creaban dos rayos que marchaban en sentido opuesto a lo largo del camino definido por los espejos M_1 — M_4 . Se montaron dos láminas delgadas de cristal, P_1 y P_2 , sobre un soporte capaz de girar alrededor del punto O de forma que P_1 y P_2 tuvieran velocidades iguales y opuestas de valor v ($= \omega r$). La fuente primaria S poseía una pulsación igual a la de la velocidad de giro de tal manera que no circulase luz alrededor de los espejos excepto durante unos pocos microsegundos en cada revolución, mientras P_1 y P_2 se encontraban en las posiciones indicadas.

¹ Su validez ha sido cuidadosamente estudiada en un artículo titulado "Evidence against Emission Theories", de J. G. Fox, *Am. J. Phys.*, **33**, 1 (1965).

² G. C. Babcock y T. G. Bergman, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 147 (1964).

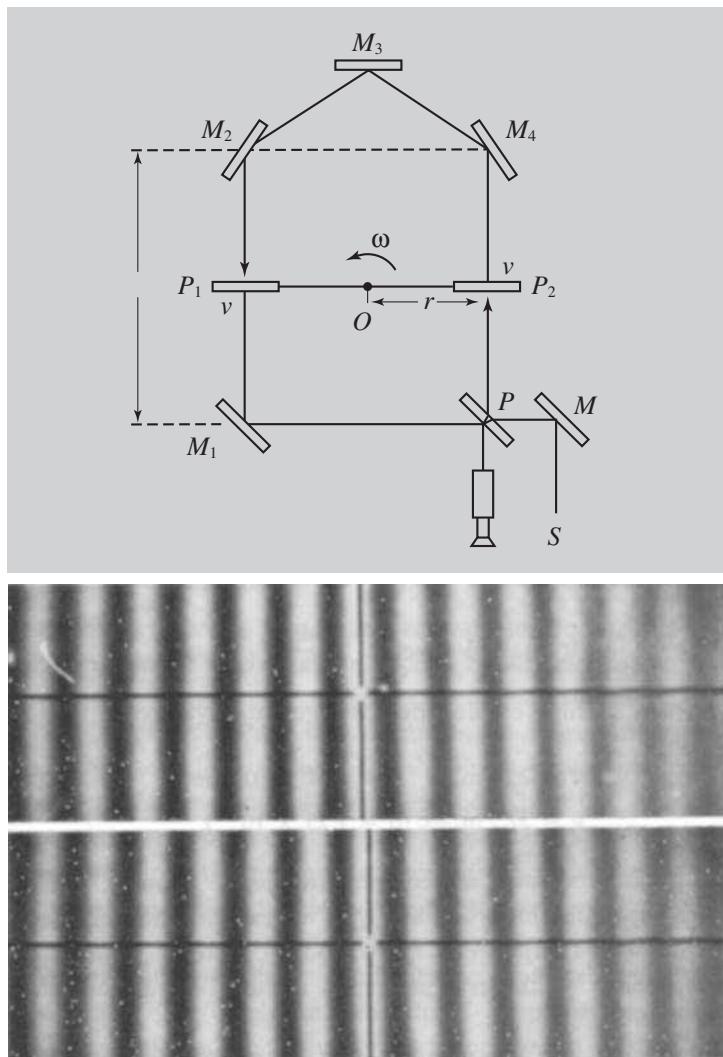


FIG. 5-1. (a) Diagrama esquemático del aparato empleado por Babcock y Bergman para medir la dependencia de la velocidad de la luz con respecto a la velocidad de la fuente. ¿Puede el lector sugerir el motivo por el cual el espejo M_3 se halla presente? (Considérense las trayectorias de los rayos luminosos que pasan por M_1M_2 y M_4P a diferentes distancias del eje de giro O .) (b) Franjas obtenidas (arriba) con el rotor en reposo y (abajo) con el rotor girando a 2800 rpm. No se produce ningún corrimiento apreciable. (Fotos cortesía de G. C. Babcock, Michelson Laboratory, Naval Weapons Center, China Lake, California.)

El aparato en su totalidad se encontraba dentro de un vacío moderado (de unos 0,02 mm de Hg).

Suponiendo que la luz reciba una velocidad cualquiera asociada con el movimiento de su fuente cabe esperar entonces que la velocidad modificada se puede aplicar al rayo en sentido opuesto al movimiento de las agujas del reloj según P_1M_1 y P_2M_4 y al rayo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj según P_1M_2 y P_2P . Debido al efecto de extinción cualquier modificación de la velocidad debe ser eliminada en el proceso de reflexión en cualquiera de los espejos fijos. En consecuencia, la velocidad modificada, si aparece, se aplica a una distancia total $l (= M_1M_3 = M_4P)$ para cada rayo. Si suponemos que una fracción f de v es suministrada a la luz, la diferencia de tiempos entre los rayos viene dada por

$$\Delta t = \frac{l}{c - fv} - \frac{l}{c + fv} \approx \frac{2lfv}{c^2}$$

El corrimiento de las franjas correspondientes sería $c\Delta t/\lambda$, y al invertir el sentido de giro puede duplicarse el efecto. Por consiguiente,

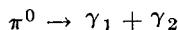
$$\text{Corrimiento de las franjas al invertir} = \frac{4lv}{\lambda c} f$$

En el experimento se hizo empleo de los siguientes valores:

$$l = 2,76 \text{ m}, \quad \lambda = 4,74 \times 10^{-7} \text{ m}, \\ v = 37,5 \text{ m/sec} (\beta = 1,25 \times 10^{-7})$$

Para $f = 1$ esto hubiera dado un corrimiento de 2,9 franjas. Un análisis detenido de las franjas obtenidas señaló que no existía un corrimiento que alcanzase a ser de 0,02 franjas. Por tanto podía concluirse que las láminas de cristal en movimiento suministraban menos de un 1 % de su velocidad a la luz que salía de ellas.

Una comprobación aún más convincente del teorema de adición de velocidades en el caso que una de las velocidades a componer sea c es la que suministra el experimento que citamos en el capítulo 3 sobre la radiación que emiten los mesones π neutros en su vuelo.¹ El mesón π neutro (pion) puede desintegrarse en dos fotones:



¹ Alväger y otros, *loc. cit.* [Para una mayor información por parte de los mismos autores y J. M. Bailey, véase *Arkiv Fysik*, **31**, 145 (1966).]

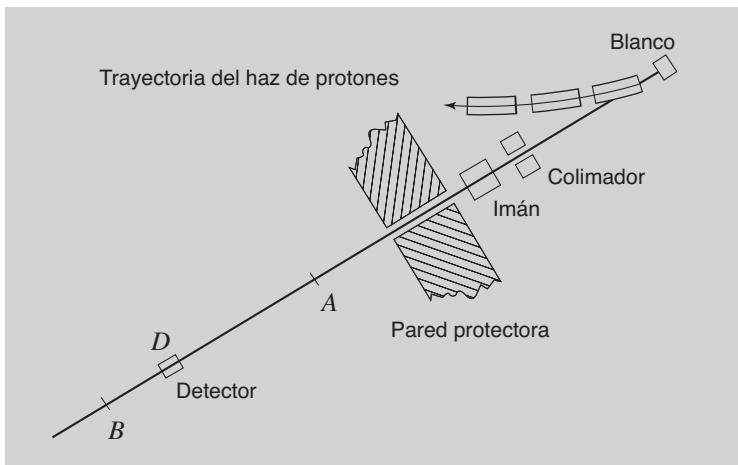


FIG. 5-2. Esquema del experimento de Alväger y otros para la medición de la velocidad de los rayos y procedentes de la desintegración de los mesones π^0 .

Los piones fueron producidos por el impacto de los fotones con una energía próxima a 20 GeV sobre nucleones en reposo en un blanco de un sincrotrón de protones.¹ Esto permitía crear piones con energías superiores a los 6 GeV, con $\gamma \geq 45$, $v/c \geq 0,99975$. (Para una discusión de tales procesos de creación de partículas, referirse a los capítulos 6 y 7.) Estos piones neutros poseen una vida media extremadamente corta —alrededor de 2×10^{-16} s— por lo que, a pesar de la ayuda que representa su gran factor de dilatación de tiempo, recorren una distancia prácticamente despreciable (de unos pocos micrones) antes de desintegrarse. Los fotones de la desintegración que emergían formando un ángulo de unos 6° con respecto al haz de protones fueron colimados, separados de las partículas cargadas mediante un imán y recorrieron una trayectoria AB de unos 30 m en el aire (véase fig. 5-2),² pudiéndose medir con gran exactitud el tiempo invertido en este último recorrido. La medida del tiempo se realizó porque los protones en el acelerador llegaban según ráfagas de duración muy breve, lo mismo que los fotones de la desintegración. Podrá medirse, por tanto, el retraso en el tiempo entre un pulso debido a los protones en el blanco y un pulso debido a los fotones en el detector D . La variación de este retraso al moverse el detector de A a B era, por tanto, susceptible de ser registrada. El resultado final obtenido (al cual ya se ha aludido en el capítulo 3) fue que

¹ En el CERN, centro de investigación nuclear europeo en Ginebra.

² El efecto de extinción no es importante en este caso, porque para esos fotones de energías tan altas la distancia de extinción es de unos 5 km de aire, a la presión atmosférica.

la velocidad de los fotones era de $(2,9977 \pm 0,0004) \times 10^8$ m/s, lo cual descartaba cualquier aumento de la velocidad de los fotones superior a un 10^{-4} de la velocidad de la fuente (en este caso los piones en movimiento). Por tanto, la ley relativista sobre composición de velocidades se verifica aún bajo condiciones muy severas y la inaplicabilidad de la ley de Galileo es algo indiscutible.

LA LUZ EN UN MEDIO MÓVIL: EL COEFICIENTE DE ARRASTRE

Hemos considerado dos casos en los que una de las dos velocidades a componer era la velocidad de la luz en el espacio libre. Pero apliquemos ahora la ley de adición de velocidades relativista al problema de la luz que marcha en el interior de un medio en movimiento, como en el caso del experimento de Fizeau. Veremos entonces que el coeficiente de arrastre famoso surge como una consecuencia natural de la nueva cinemática.

Indicaremos a continuación la manera en que sucede esto. El paso de la luz a través de un medio como el cristal o el agua viene caracterizado por un índice de refracción n , y la velocidad de la luz relativa al medio es c/n . Supongamos que tal medio se mueve a una velocidad v paralelamente a la dirección de la luz. ¿Qué velocidad, V , asignaría un observador en reposo a la luz? Teniendo en cuenta la ecuación (5-2) resulta

$$V = \frac{c/n + v}{1 + v/nc}$$

Ahora bien, para $v \ll c$ podemos desarrollar esta expresión en potencias de v/c y despreciar todas las potencias superiores a la primera:

$$\begin{aligned} V &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{vn}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{nc}\right)^{-1} \\ &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{vn}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{nc} + \dots\right) \\ &\approx \frac{c}{n} \left(1 + \frac{vn}{c} - \frac{v}{nc}\right) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$V \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \quad (5-5)$$

Por consiguiente, la composición relativista de velocidades conduce, sin necesidad de ninguna otra hipótesis, al resultado que Fresnel y los otros teóricos del éter tuvieron que explicar en términos de un arrastre parcial de la luz por el medio. Con anterioridad al desarrollo de la cinemática de Einstein el fenómeno poseía carácter misterioso y las explicaciones que se proponían eran tremadamente artificiales (como hemos visto en el capítulo 2). Para Einstein constituyó un resultado famoso e importante que desempeñó un papel destacado como guía suya hacia la teoría de la relatividad especial.

MOVIMIENTOS TRANSVERSALES; ABERRACIÓN ESTELAR

Consideremos ahora la transformación de la componente de velocidad perpendicular a la dirección del movimiento relativo de dos sistemas de referencia. Tenemos, según la ecuación (5-3),

$$u_y' = \frac{u_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2}$$

Si hacemos $u_x = 0$ (lo cual es un caso especial), obtenemos que

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma} \quad (\text{siendo } u_x = .0) \quad (5-6)$$

Esta reducción aparente de una componente transversal de la velocidad es, en esencia, una manifestación de la dilatación de los tiempos, como puede observarse considerando la obtención de la ecuación (5-3) a partir de la (5-1). En realidad, no hay nada más que decir. Pero si consideramos la forma general de la transformación de la velocidad transversal, ecuación (5-3), y la combinamos con la transformación longitudinal, ecuación (5-2), tenemos un medio de relacionar las *direcciones* de un movimiento rectilíneo dado descrito en dos sistemas diferentes. Esto tiene una aplicación interesante en el caso de la aberración estelar.

Suponiendo que la luz está compuesta por una lluvia de fotones podemos calcular con facilidad la variación de la dirección aparente de un objeto lejano, como por ejemplo una estrella. Sea S el sistema en reposo del Sol y sea S' el sistema de la Tierra, que marcha con una velocidad orbital v relativa a S (figura 5-3). Supongamos que la dirección de una estrella, medida desde el plano de la órbita terrestre, es θ en el sistema S y θ' en S' . Tenemos entonces, $u_x = -c \cos \theta$, $u_y = -c \sin \theta$ para las componentes de la velocidad de los

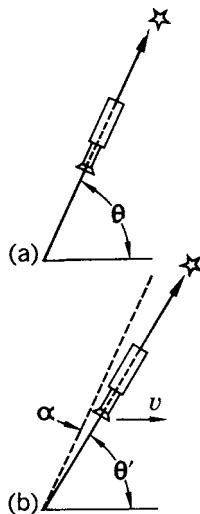


FIG. 5-3. Aberración estelar. (a) Telescopio en reposo enfocado hacia una estrella. (b) Telescopio en movimiento enfocado a la misma estrella.

fotones que llegan, medida en S . Por tanto, haciendo uso de las ecuaciones (5-2) y (5-3), tenemos

$$\begin{aligned} u_x' &= \frac{-(c \cos \theta + v)}{1 + v \cos \theta/c} \\ u_y' &= \frac{-c \sin \theta}{\gamma(1 + v \cos \theta/c)} \end{aligned} \quad (5-7)$$

La composición de las componentes u_x' y u_y' es, por supuesto, una velocidad de la cantidad inváriante c . (Verifique el lector esto por su propia cuenta.) Su dirección θ' observada en S' viene expresada de manera muy sencilla por

$$\cos \theta' = \frac{-u_x'}{c} = \frac{\cos \theta + v/c}{1 + v \cos \theta/c}$$

Como ocurre frecuentemente en los cálculos relativistas, resulta bastante cómodo el designar el cociente v/c mediante β ; por tanto, podemos escribir

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta} \quad (5-8)$$

Ahora bien, la Tierra en su movimiento alrededor del Sol nos lleva a través de una sucesión de sistemas de referencia cada uno de los cuales puede considerarse como aproximadamente inercial durante un corto período de tiempo. Puesto que la velocidad de la Tierra alrededor de su órbita es cercana a 30 km/s, el valor de β en la ecuación (5-8) vale aproximadamente 10^{-4} . Una aproximación excelente a la ecuación (5-8) es en este caso la siguiente:

$$\cos \theta' \approx (\cos \theta + \beta)(1 - \beta \cos \theta)$$

Es decir,

$$\cos \theta' \approx \cos \theta + \beta \sin^2 \theta \quad (5-9)$$

Introduciendo el ángulo de aberración α

$$\theta' = \theta - \alpha$$

resulta

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$$

Como α es un ángulo muy pequeño, tenemos, muy aproximadamente, $\cos \alpha = 1$ y $\sin \alpha = \alpha$, y en consecuencia,

$$\cos \theta' \approx \cos \theta + \alpha \sin \theta \quad (5-10)$$

Comparando las ecuaciones (5-9) y (5-10) vemos que

$$\alpha \approx \beta \sin \theta \quad (5-11)$$

que constituye la expresión aproximada para la aberración obtenida en el capítulo 2 en la discusión de las observaciones de Bradley.

EL EFECTO DOPPLER

En algunas de las observaciones más importantes de la física atómica intervienen mediciones acerca de la radiación de átomos o núcleos en movimiento. La frecuencia aparente (o energía cuántica) de la radiación emitida depende del movimiento relativo de la fuente y del observador. El término *efecto Doppler*

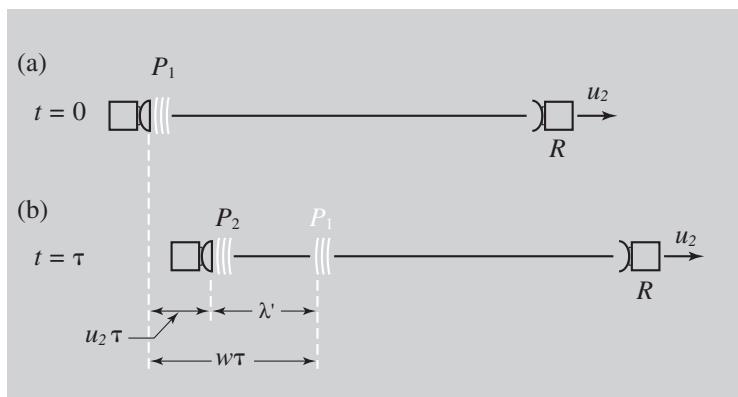


FIG. 5-4. *Efecto Doppler para la radiación procedente de una fuente en movimiento. (a) Un primer pulso abandona la fuente en $t = 0$. (b) Un segundo pulso abandona la fuente en $t = \tau$. El movimiento de la fuente es tal que la distancia entre los pulsos es menor que en el caso en que la fuente permaneciese en reposo.*

abarca todos los aspectos de este fenómeno según el cual se altera la frecuencia o longitud de onda observada para una perturbación periódica. Se denomina así este efecto en recuerdo de Christian Doppler, quien enunció los principios esenciales del mismo en 1842, en conexión con la espectroscopía atómica.

Todo el mundo está familiarizado con el efecto Doppler acústico —por ejemplo, con la variación en el tono de la sirena de un coche a medida que éste se acerca y se aleja. En este caso existe un medio fácil de identificar —el aire— y se tienen situaciones físicamente distintas según sea la fuente o el observador (o ambos) quienes se muevan con respecto al medio. En el caso de la luz en el vacío no existe tal distinción, y por tanto, la discusión del fenómeno es, en cierto modo, más sencilla. Sin embargo, puede resultar útil el empezar nuestro estudio recordando el efecto Doppler en acústica.

Consideremos un problema unidimensional en el cual una fuente \$S\$ y un receptor \$R\$ se están moviendo a lo largo de la misma línea recta (fig. 5-4). Sean \$u_1\$ y \$u_2\$ las velocidades respectivas de \$S\$ y \$R\$ relativas al aire. Supongamos que la fuente emite una señal de frecuencia \$\nu\$ y período \$\tau (= 1/\nu)\$. Para que la discusión resulte lo más sencilla posible supondremos que la señal tiene la forma de breves pulsos separados por \$\tau\$. Cada pulso marcha a través del aire a la velocidad del sonido, \$w\$. Supongamos que se emite un pulso \$P_1\$ en el instante \$t = 0\$, y un segundo pulso \$P_2\$ en \$t = \tau\$, como se muestra en la figura.

Durante el tiempo τ el pulso P_1 recorre una distancia $w\tau$ y la fuente S se mueve a una distancia $u_1\tau$. Por consiguiente, la distancia entre P_1 y P_2 , que podemos llamar longitud de onda efectiva λ' (aunque en rigor este término debíamos reservarlo al caso de ondas sinusoidales puras), viene dada por

$$\lambda' = (w - u_1)\tau = \frac{w - u_1}{v}$$

La velocidad de los pulsos relativa a R es $w - u_2$, y por tanto el intervalo de tiempo entre la llegada de P_1 y P_2 a R viene dado por τ' , en donde

$$\tau' = \frac{\lambda'}{w - u_2} = \frac{w - u_1}{v(w - u_2)}$$

El inverso de τ' define una frecuencia efectiva v' .¹ Por tanto, podemos escribir

$$v' = v \frac{w - u_2}{w - u_1} = v \frac{1 - u_2/w}{1 - u_1/w} \quad (5-12)$$

Para una velocidad *relativa* dada v entre R y S , el valor de v' sigue dependiendo de los valores individuales de u_1 y u_2 . Surgen dos casos de interés cuando :

(a) La fuente está en reposo y el receptor en movimiento:

$$(u_1 = 0, u_2 = v) \quad v' = v(1 - v/w) = v(1 - \beta)$$

(b) La fuente está en movimiento y el receptor en reposo:

$$(u_1 = -v, u_2 = 0) \quad v' = \frac{v}{1 + v/w} = \frac{v}{1 + \beta}$$

Tanto la fuente como el receptor se alejan entre sí en ambos casos y la frecuencia observada es menor que la frecuencia de la fuente. Sustituyendo v por $-v$ se obtiene el caso en que la fuente y el receptor se acercan mutuamente.

¹ El concepto de frecuencia, como el de longitud de onda, se aplica estrictamente sólo a ondas sinusoidales. Cualquier otra señal periódica con un tiempo de repetición τ tiene un espectro de frecuencias, que en general puede contener todos los armónicos de frecuencia $1/\tau$.

Una vez hechas estas consideraciones preliminares volvamos al problema correspondiente en relatividad especial. Supondremos que una fuente (por ejemplo un transmisor de pulso de radar) está situada en el origen de un sistema de referencia S y que un observador se mueve relativamente a S a una velocidad v , de tal modo que permanece en reposo en S' . Cada pulso emitido marcha a una velocidad c . Supongamos que un primer pulso se emite en $t = 0$ cuando el observador se encuentra en el punto $x = x_0$ y que el pulso $n + 1$ se emite en $t = n\tau$. Se han considerado n períodos de vibración, de modo que la frecuencia de la fuente medida en S es $\nu = 1/\tau$.

Para hallar qué es lo que registra el observador trazaremos un gráfico de x en función de t e identificaremos los sucesos que representan la llegada del primero y del último pulso hasta sí mismo (ver la figura 5-5). Empleando el lenguaje de estos diagramas espacio-tiempo, obtenemos las intersecciones de la línea del universo del observador con las líneas del universo de los pulsos. Supongamos que estas intersecciones son (x_1, t_1) y (x_2, t_2) , medidas en S . Entonces,

$$\begin{aligned}x_1 &= ct_1 = x_0 + vt_1 \\x_2 &= c(t_2 - n\tau) = x_0 + vt_2\end{aligned}$$

Por tanto,

$$t_2 - t_1 = \frac{cn\tau}{c - v}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{vcn\tau}{c - v}$$

Pero en S' se mide que

$$\begin{aligned}t_2' - t_1' &= \gamma[(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2] \quad (\text{por la transformación de Lorentz}) \\&= \gamma \left(\frac{cn\tau}{c - v} - \frac{v}{c^2} \frac{vcn\tau}{c - v} \right)\end{aligned}$$

Puesto que este intervalo de tiempo contiene n períodos de la señal recibidos por el observador, el período aparente τ' viene dado por

$$\begin{aligned}\tau' &= \frac{\gamma c \tau}{c - v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\&= \frac{\gamma(1 - \beta^2)}{1 - \beta} \tau \quad (\text{haciendo } v/c = \beta) \\&= \gamma(1 + \beta)\tau\end{aligned}$$

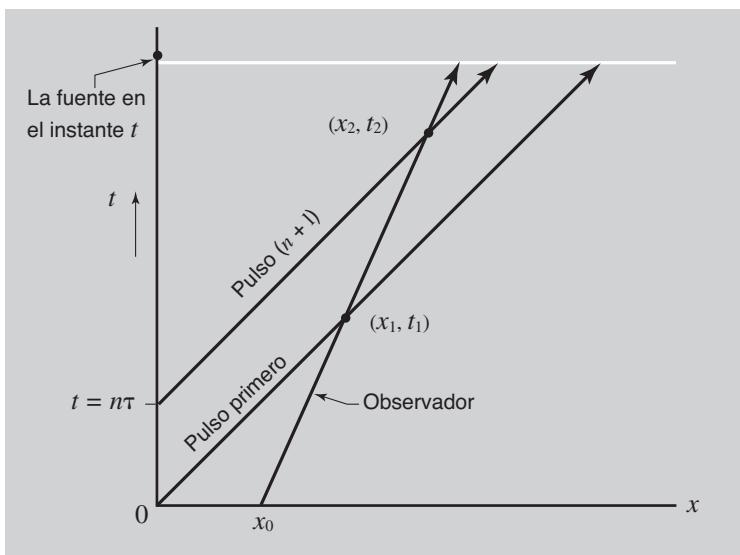


FIG. 5-5. Diagrama espacio-tiempo para ilustrar los procesos de emisión y de recepción de señales luminosas cuando, tanto la fuente como el receptor, se encuentran en movimiento relativo.

Pero

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

Por tanto,

$$\tau' = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} \tau \quad (5-14)$$

o bien, en términos de las frecuencias,

$$\nu' = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \nu \quad (5-15)$$

Si \$S'\$ se desplazara hacia \$S\$ en lugar de alejarse, los signos del numerador y denominador del radical se hubiesen intercambiado. Al comparar la ecuación (5-15) con las fórmulas para el efecto Doppler acústico de la ecuación (5-13) se observa que el resultado relativista representa en cierto modo una unifica-

ción de los resultados obtenidos para la fuente móvil y el observador en movimiento y puede hacerse igual a cualquiera de ellos si se desprecian los términos de orden superior al primero. Sin embargo, el resultado relativista posee una simetría especial de la que carece el resultado anterior.

La manifestación más dramática de esta forma del efecto Doppler para el movimiento relativo de la fuente y el observador según la línea recta que les une, es el célebre *corrimiento al rojo* de las galaxias lejanas. El espectro de una galaxia completa es una especie de mancha continua por ser una síntesis de todos los diferentes objetos radiantes que la componen. Pero los astrofísicos son capaces de distinguir unas pocas líneas oscuras muy marcadas —es decir, estrechas grietas dentro del espectro continuo— producidas por el paso de la radiación que escapa a través de gases o vapores a una temperatura inferior junto con la absorción selectiva que sufre antes de abandonar la galaxia. En concreto, dos de estas líneas, las denominadas líneas H y K de absorción del calcio ionizado, pueden distinguirse claramente aun cuando se hayan perdido todas las otras características típicas. (Los átomos de calcio ionizados presentan una sección transversal extraordinariamente elevada para la luz que posee esta precisa longitud de onda.) En el caso de una fuente en reposo se encuentran próximas al extremo violeta del espectro, pero se ha observado un corrimiento drástico hacia la región de longitudes de onda mayores para el caso de ciertas galaxias muy lejanas. En las páginas 160 a 162 se muestra una selección de galaxias cuyos corrimientos Doppler aumentan progresivamente. En cada fotografía aparece el espectro de la galaxia como un trazo horizontal un tanto borroso interrumpido por las grietas de absorción H y K. Por encima y por debajo del espectro de cada galaxia se ha colocado el espectro de líneas de una fuente de laboratorio con el propósito de poder establecer una comparación. En la fotografía última, por ejemplo, se observa que las líneas de absorción se han desplazado a una longitud de onda de 4750 Å, frente a los 3940 Å para el caso de una fuente en reposo. Esto representa un gran aumento en la longitud de onda, cercano al 25 %. Teniendo en cuenta la ecuación (5-14) resulta

$$\lambda' = c\tau' = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} c\tau = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} \lambda$$

Por tanto,

$$\beta = \frac{(\lambda'/\lambda)^2 - 1}{(\lambda'/\lambda)^2 + 1} \quad (5-16)$$

Haciendo $\lambda'/\lambda \approx 4750/3940 = 1,21$, encontramos que

$$\beta = \frac{0,46}{2,46} \approx 0,2$$

Por tanto,

$$v = 0,2c \approx 6 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Es ampliamente conocida la manera en que el distinguido astrónomo Edwin Hubble, uno de los primeros en estudiar las profundidades del espacio cósmico exterior a nuestra galaxia, estableció la existencia de una relación lineal entre velocidad de recesión y la distancia para las galaxias remotas. En la parte B de la ilustración de las páginas 160 a 162 se muestra una representación de los datos de la parte A encaminada a poner de manifiesto esta relación espectacular conocida como *ley de Hubble*. La determinación de las distancias galácticas es mucho menos directa y definida que en el caso de la medida de los corrimientos Doppler, interviniendo en última instancia consideraciones de un carácter tan profundo como puede ser si el espacio en gran escala puede describirse mediante la geometría euclídea. Sin embargo, este estudio desbordea los límites de nuestro tema y el lector interesado en más detalles deberá buscarlos por su cuenta en libros sobre astronomía.¹ Bastará aquí con que hagamos un mayor hincapié sobre los propios corrimientos Doppler.

ALGO MÁS SOBRE LOS EFECTOS DOPPLER

El primer “Sputnik” emitía una señal de radiofrecuencia en su movimiento de giro alrededor de la Tierra que era recogida por muchas estaciones seguidoras. En la figura 5-6 se muestra un ejemplo de tales observaciones.² Cuando el satélite se encuentra muy distante, acercándose o alejándose, es cuando se obtienen unos corrimientos Doppler de frecuencia máximos o mínimos correspondientes al problema unidimensional que hemos estado discutiendo. Pero el paso de la frecuencia aumentada a la frecuencia disminuida no es instantáneo, como ocurriría si el objeto en movimiento pasase directamente por el lugar ocupado por el observador. Por el contrario, sigue una curva no

¹ Vease, por ejemplo, F. Hoyle, *Frontiers of Astronomy*, Harper, Nueva York, 1955. o su hermoso, y más reciente libro, *Astronomy*, Doubleday, Nueva York, 1962.

² R. R. Brown y otros (M.I.T. Lincoln Lab.), *Proc. IRE* 45, 1552 (1957).

CORRIMIENTO AL ROJO DE LAS GALAXIAS LEJANAS

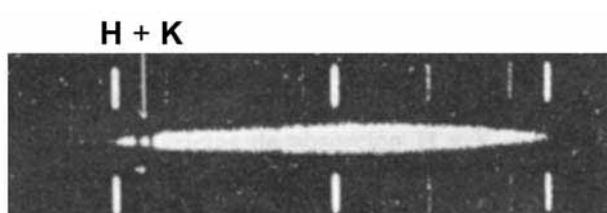
A. EVIDENCIA EN FAVOR DE LA HIPÓTESIS DE UN UNIVERSO EN EXPANSIÓN¹

Resulta extremadamente difícil fotografiar el espectro de las galaxias lejanas. Son imágenes tan tenues que resulta imposible observarlas por medios visuales, ni aun con el auxilio de los mayores telescopios. La dirección correcta del telescopio debe calcularse, por tanto, a partir de la posición de la nebulosa en una fotografía. El telescopio debe estar enfocado entonces hacia el objeto durante un intervalo de varias horas para poder fotografiar su espectro, el cual, al final puede medir sólo 2×1 mm. El espectro obtenido es como el de una estrella media (tipo espectral G) continuo y con líneas de absorción. Pero las líneas de absorción destacan muy poco, constituyendo en realidad un valor medio de todos los objetos en la galaxia entera. En 1917 Slipher logró fotografiar el espectro de 15 nebulosas en espiral. Le sorprendió encontrar que las líneas de absorción de 13 de estos espectros presentaban un corrimiento hacia el rojo. Esto podría hacer pensar que las galaxias se alejaban de nosotros. Del corrimiento observado resultaba posible calcular que se alejaban a una velocidad de 400 millas/s (640 km/s), por término medio. En 1919 Hubble descubrió que todas las galaxias externas cuyo espectro había sido fotografiado y cuyas distancias habían sido determinadas se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia que nos separa de ellas. Esto pudo demostrarse de una manera más general en los años siguientes a partir de los datos procedentes de observaciones que Humason logró recopilar haciendo empleo de los telescopios de Hooker y Hale. (Fotografías de los observatorios de Monte Wilson y de Monte Palomar.)

Comentarios de Ernst y De Vries, *Atlas of the Universe*, Thomas Nelson, Londres, 1961.



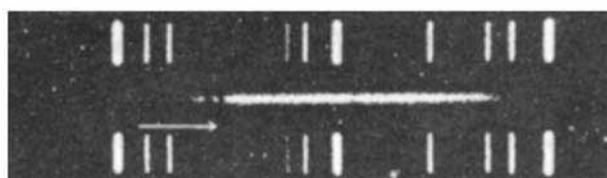
Virgo



750 millas / s



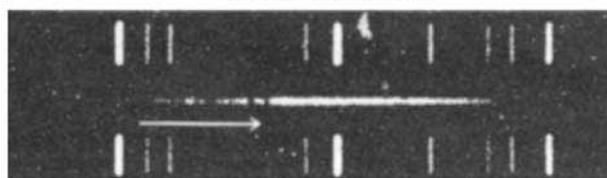
Osa Mayor



9300 millas / s



Aurora boreal



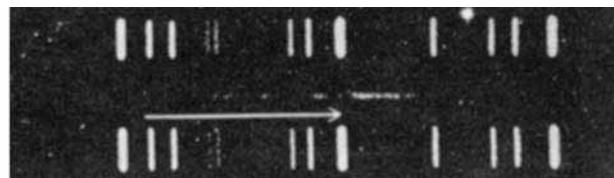
13,400 millas / s

Líneas de comparación para el H y el He
(longitudes de onda correspondientes):

3889	3970	4026	4100	4143	4340	4387	4471	4713	4860	4922	5016
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------



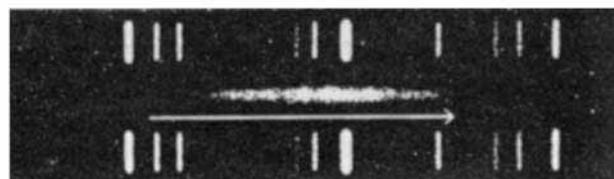
Boötes



24 400 millas / s



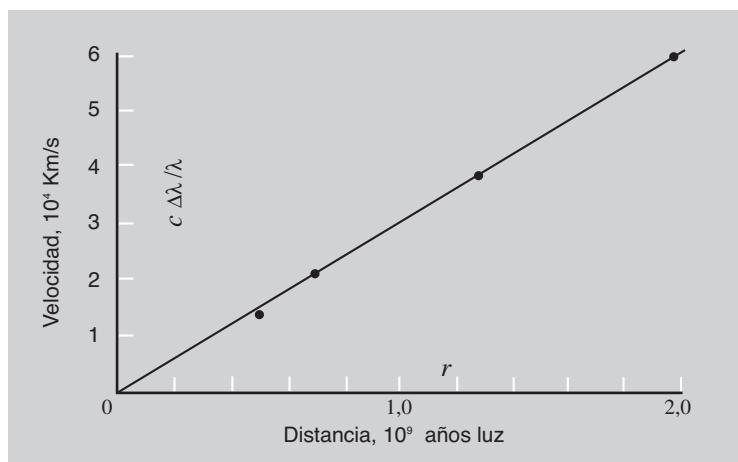
Hydra



38 000 millas / s

B. LEY DE HUBBLE

Las distancias de la tabla (pág. 162) están basadas en una revisión de la escala de distancias llevada a cabo en 1958. Las velocidades fueron calculadas sencillamente como $c \Delta\lambda/\lambda$, sin tener en cuenta las modificaciones relativistas de la fórmula de Doppler.



<i>Galaxia en</i>	<i>Velocidad, $\times 10^4$ km/s</i>	<i>Distancia en años luz</i>
Virgo	0,12	$0,4 \times 10^8$
Osa Mayor	1,40	$5,0 \times 10^8$
Corona Boreal	2,14	$7,0 \times 10^8$
Boötes	3,90	$1,3 \times 10^9$
Hydra	6,10	$2,0 \times 10^9$

muy pronunciada que puede suministrar información sobre la altitud, así como la velocidad de la fuente en movimiento. Pasemos a analizar una situación de este tipo.

En la figura 5-7 mostramos la trayectoria de un satélite que pasa a una altura h por encima de un puesto de observación O . Consideraremos que la trayectoria se puede aproximar por una línea recta horizontal, y por tanto, la posición del satélite viene dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = vt \quad y = h$$

En el instante $t = 0$ el satélite está exactamente encima del puesto de observación.

Supondremos que el satélite está equipado con un transmisor que emite pulsos a una frecuencia ν en su propio sistema en reposo. Consideraremos dos pulsos emitidos desde los puntos x_1 y x_2 , en tiempos que designaremos mediante t_1 y t_2 . El intervalo de tiempo τ entre los pulsos es $1/\nu$ en el sistema inercial del satélite, pero es superior a este valor según el factor γ de dilatación de tiempos en el sistema del observador. Por tanto,

$$t_2 - t_1 = \gamma\tau = \gamma/\nu$$

Los pulsos invierten unos tiempos r_1/c y r_2/c , respectivamente, en alcanzar O , y en consecuencia, la separación de tiempos medida entre ellos viene dada por

$$\begin{aligned}\tau' &= t_2 + r_2/c - t_1 - r_1/c \\ &= \gamma\tau - (r_1 - r_2)/c\end{aligned}$$

Ahora bien, si la distancia $x_2 - x_1$ es mucho menor que r_1 (es decir, si el satélite recorre una distancia muy pequeña en el transcurso de cada ciclo de las

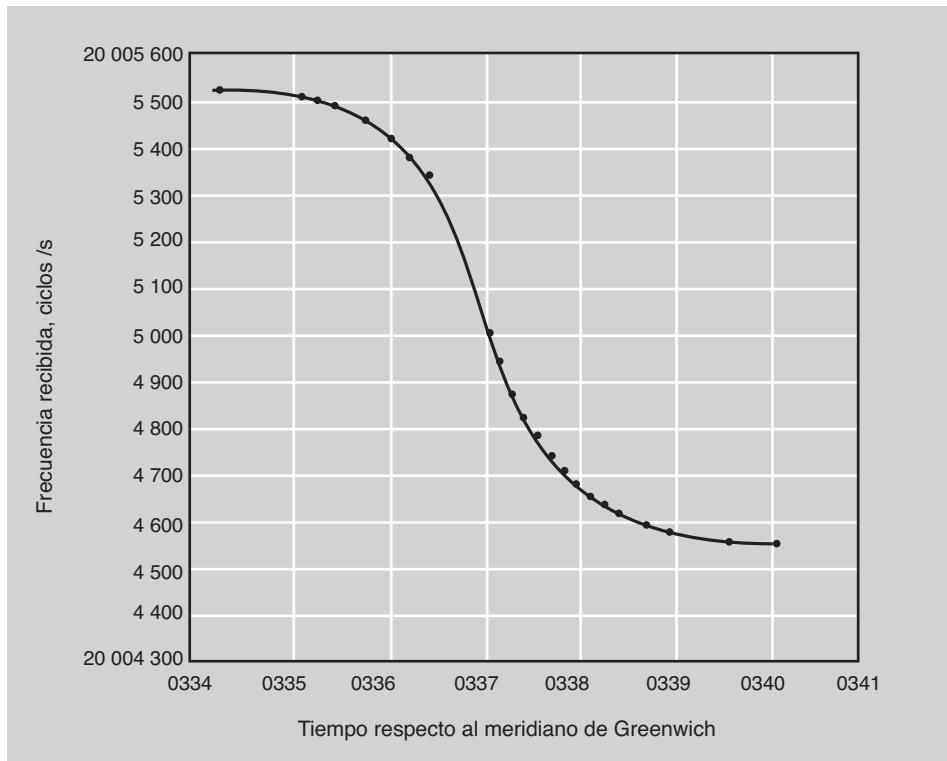


FIG. 5-6. Efecto Doppler del Sputnik 1, observado en el M.I.T. Lincoln Laboratory, 7 de octubre de 1957. (Basado en datos recogidos por R. R. Brown y otros.)

señales de su transmisor), podemos escribir con bastante aproximación que

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &\approx (x_2 - x_1) \cos \theta \\ &= v \gamma \tau \cos \theta \end{aligned}$$

en donde θ es la elevación angular del satélite en el instante t_1 medida en el sistema de referencia fijo al suelo. Por tanto, tenemos que

$$\tau' = \gamma \tau (1 - v \cos \theta / c)$$

Pero $1/\tau'$ representa la frecuencia recibida ν' de las señales bajo estas condiciones. Por tanto,

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

es decir,

$$\nu' = \nu \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (5-17)$$

Si quisiéramos representar (o analizar) la frecuencia observada en función del tiempo (fig. 5-6), utilizaríamos la relación

$$\cos \theta = \frac{-vt}{(h^2 + v^2 t^2)^{1/2}} \quad (5-18)$$

En realidad, no necesitamos emplear la relatividad especial para discutir el efecto Doppler del "Sputnik I", ya que las mediciones que se efectuaron no eran capaces de detectar diferencias del orden de magnitud de β^2 —es decir, de unas pocas partes en 10^{10} — entre el comportamiento relativista y el no relativista en este caso. Es cierto que, utilizando los relojes atómicos de que hoy se dispone como patrones de medida, estas minúsculas variaciones pueden detectarse perfectamente. Sin embargo dejaremos de lado este tema. El problema del satélite se limitaba a ofrecer un marco adecuado para desarrollar con comodidad la teoría de los efectos Doppler para el caso de una fuente que se

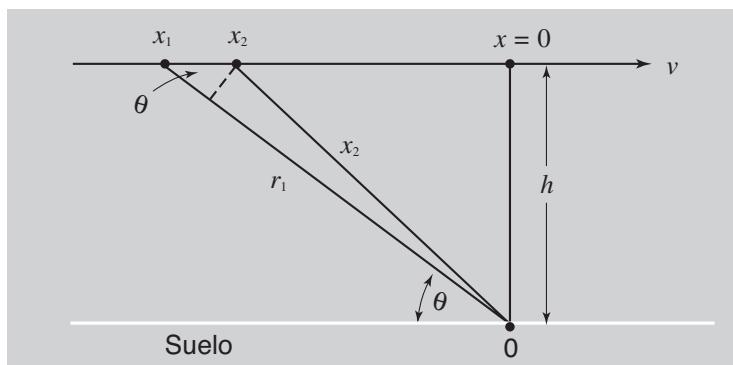


FIG. 5-7. Diagrama para considerar el efecto Doppler con las señales emitidas formando un ángulo θ con la linea a lo largo de la cual se mueve la fuente.

mueve en sentido arbitrario. Las aplicaciones realmente importantes de la fórmula de Doppler expresada mediante la ecuación (5-17) radican en el análisis de la radiación procedente de los átomos, núcleos y demás partículas subatómicas que se mueven a gran velocidad. A modo de ejemplo pasaremos a discutir a continuación un experimento clásico que utiliza el efecto Doppler para suministrar evidencia cuantitativa del fenómeno de la dilatación del tiempo.

EL EFECTO DOPPLER Y LA DILATACIÓN DEL TIEMPO

En 1907 Einstein sugirió que podría efectuarse una medición de la longitud de onda aparente de la luz emitida transversalmente al sentido de movimiento de átomos que marchasen rápidamente. De acuerdo con la ecuación (5-17), la radiación que se propague formando un ángulo θ con la dirección del movimiento de una fuente móvil tiene una frecuencia observada que viene dada por

$$\nu'(\theta) = \nu \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos \theta}$$

Esto define una longitud de onda aparente que puede expresarse mediante:

$$\lambda'(\theta) = \lambda \frac{1 - \beta \cos \theta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \gamma \lambda (1 - \beta \cos \theta) \quad (5-19)$$

El ángulo θ es la dirección medida por el observador. Si hacemos $\theta = \pi/2$, la longitud de onda aparente es superior a λ según el factor γ . Ahora bien, si un protón acelerado a través de una diferencia de potencial de 5 kV capta un electrón, se forma un átomo de hidrógeno que se mueve a una velocidad de unos 10^6 m/s, de modo que $\beta \approx 1/300$ y $\gamma - 1 \approx 5 \times 10^{-6}$. Este valor de $\gamma - 1$ representa la variación en tanto por ciento de la longitud de onda medida para cualquier luz emitida lateralmente por el átomo en movimiento, y para una línea en el espectro visible de 5000 Å representaría un corrimiento absoluto de la longitud de onda de 0,025 Å. Este corrimiento es extremadamente pequeño, aunque en principio puede medirse. Sin embargo, existe una dificultad prácticamente muy seria. Si se intenta establecer la existencia de este efecto transversal, o efecto Doppler de segundo orden (como también se le denomina), hay que estar bien seguros de que el ángulo θ es exactamente $\pi/2$. Una desviación de este valor del orden de los β radianes (correspondiente a unos $0,2^\circ$ en este ejemplo) haría que el factor Doppler de primer orden (es decir, $1 - \beta \cos \theta$) absorbiese el efecto que se intenta detectar.

En 1938 H. E. Ives y G. R. Stilwell publicaron los resultados de un hermoso experimento en el que se eliminaba la anterior dificultad.¹ En lugar de intentar observar la luz emitida transversalmente a la dirección del movimiento de los átomos, midieron la radiación emitida hacia adelante o hacia atrás con respecto a esta dirección. De la ecuación (5-19) resulta que

$$\begin{aligned}\lambda'(\pi) &= \lambda \frac{1 + \beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \lambda \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} \\ \lambda'(0) &= \lambda \frac{1 + \beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \lambda \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (5-20)$$

Desarrollemos estas expresiones en potencias crecientes de β :

$$\begin{aligned}\lambda'(\pi) &= \lambda(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots) \\ \lambda'(0) &= \lambda(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots)\end{aligned}$$

Haciendo la aproximación de que β^2 sea despreciable frente a la unidad, cada una de estas longitudes de onda difiere de λ según el corrimiento Doppler de primer orden $\beta\lambda$ —es decir, unos 15 Å para el caso hipotético que consideramos anteriormente. Sin embargo, al tomar en consideración los efectos de segundo orden se ve que el valor promedio de $\lambda'(\pi)$ y $\lambda'(0)$ difiere de λ ; de hecho, es mayor que λ según el factor de dilatación de tiempo γ , es decir, según un corrimiento de longitud de onda de valor $(\gamma - 1)\lambda$, como puede verse mediante sustitución directa en la ecuación (5-19). Efectuando las aproximaciones pertinentes podemos escribir:

Efecto de primer orden:

$$\Delta\lambda_1 = \beta\lambda = \frac{v}{c}\lambda \quad (5.21a)$$

Efecto de segundo orden:

$$\Delta\lambda_2 = (\gamma - 1)\lambda \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \lambda = \frac{1}{2\lambda} (\Delta\lambda_1)^2 \quad (5.21b)$$

En ausencia de dilatación de tiempos el valor de $\Delta\lambda_2$ sería exactamente cero [véase la propia ecuación (5-19)]; por tanto, la medición presenta una clara alternativa entre ambas versiones de la cinemática.

¹ H. E. Ives y G. R. Stilwell, *J. Opt. Soc. Am.*, **28**, 215-226 (1938).

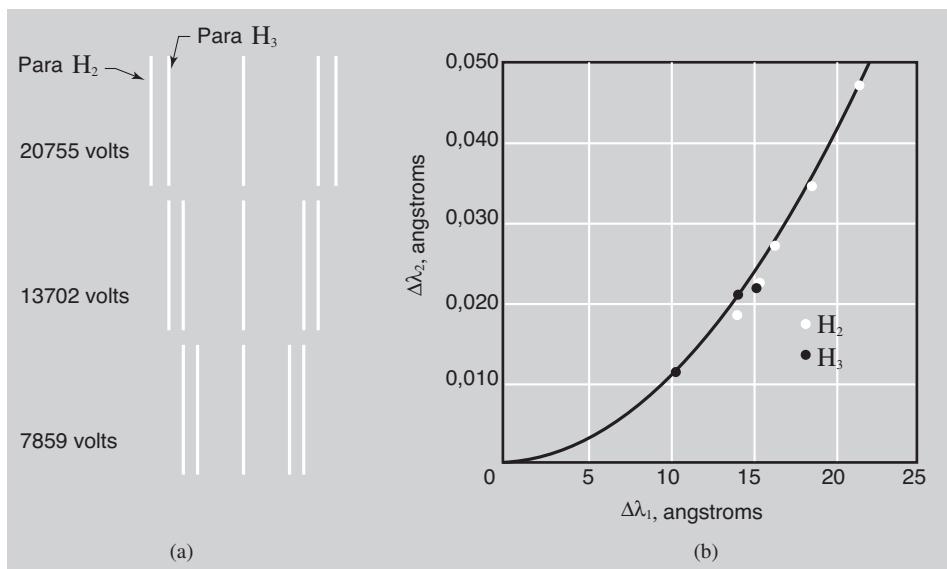


FIG. 5-8. *Experimento de Ives-Stilwell (acerca del efecto Doppler relativista).*
 (a) Espectrogramas de una línea de Balmer (H_{β}) emitida hacia adelante o hacia atrás por los átomos de H que marchan a velocidades diferentes. (b) Corrimientos de segundo orden de la longitud de onda calculados y observados, representados en función de los corrimientos Doppler de primer orden.

En el experimento, el manantial de iones de H_2^+ y H_3^+ estaba constituido por un tubo de descarga de hidrógeno. (No se observó cantidad apreciable alguna de protones libres, H^+ , puesto que éstos eran capturados rápidamente por las moléculas de hidrógeno para dar lugar a iones H_3^+ .) Estos iones, una vez acelerados a través de una diferencia de potencial establecida con gran exactitud, podían producir átomos de hidrógeno neutros, (mediante un proceso de neutralización y de disociación), aunque todavía excitados, átomos cuyas velocidades se encontraban en la razón $\sqrt{3}:\sqrt{2}$, según que procediesen del H_2 o del H_3 . Estos átomos emitían entonces las líneas Balmer características del hidrógeno atómico. Se llevaron a cabo observaciones con un cuidado extremo empleándose un retículo de difracción y un registro fotográfico de la longitud de onda aparente de una línea particular —la línea segunda de la serie de Balmer, designada mediante H_3 . (Es de color azul turquesa y posee una longitud de onda de unos 4861 Å.) En la figura 5-8(a) se ofrece una muestra de

los resultados obtenidos, con la línea invariante en el centro y a cada lado las líneas de corrimiento Doppler para tres tensiones diferentes.

A primera vista los corrimientos Doppler aparecen dispuestos simétricamente con respecto a la línea del centro, pero una medición detallada de las fotografías originales reveló un corrimiento sistemático de la longitud de onda media en función de la velocidad, según se desprende de la ecuación [5-21(b)]. La figura 5-8(b) es una reproducción de la gráfica que Ives y Stilwell incluyeron en su trabajo para mostrar la relación parabólica entre los corrimientos de primer orden y los de segundo orden. El experimento, independiente del interés intrínseco y la importancia de los resultados del mismo, constituye una lección maestra de lo que puede conseguirse por investigadores expertos que llevan una técnica hasta su límite.

Constituye un dato curioso el que los autores de este experimento no aceptaban la teoría de la relatividad especial (a pesar de encontrarse en el año 1938). Desde su punto de vista los resultados del experimento demostraban sencillamente que un reloj en movimiento marchaba más despacio (tal como Larmor y Lorentz habían sugerido) según el mismo factor y de una manera tan real como en el caso de la contracción esperada para una barra en movimiento que apuntase según la dirección de su movimiento absoluto a través del éter. Las viejas ideas a las que estamos acostumbrados son siempre difíciles de abandonar.

DE NUEVO EN BUSCA DEL ÉTER

Cuando Maxwell escribió su carta de 1879 en la que alentaba a Michelson en su búsqueda de un arrastre del éter no era posible concebir un experimento de laboratorio que revelase efectos proporcionales a la primera potencia de v/c . En efecto, cualquier experimento que se pudiera llevar a la práctica, como el propio experimento de Maxwell, requería rayos luminosos que retrocediesen siguiendo sus propios pasos, y como ya hemos visto (capítulo 2) esto reducía los efectos observables a términos del orden de v^2/c^2 . El desarrollo del láser de rayos moleculares alteró este estado de cosas e hizo posible un experimento de primer orden que imponía unos límites a v muy superiores a los que se habían logrado hasta la fecha.

El experimento, llevado a cabo por Cedarholm y Townes,¹ consistía en la

¹ J. P. Cedarholm y C. H. Townes, *Nature*, **184**, 1350-1351 (1959). Véase también J. P. Cedarholm y col., *Phys. Rev. Letters*, **1**, 342-343 (1958).

comparación de las frecuencias de dos máseres de haces moleculares cuyos haces marchasen en direcciones opuestas. Puede decirse de manera muy aproximada que la teoría del experimento desde el punto de vista de una teoría de éter es más o menos la siguiente: El máser de haces moleculares presenta cierto parecido con el reloj de pulsos luminosos que discutimos en el capítulo 4. Posee una frecuencia característica definida por el tiempo que tarda la radiación en reflejarse de uno de sus extremos al otro. (Es lo que se denomina una *cavidad resonante*.) La radiación viene suministrada por un haz de moléculas (moléculas de amoniaco excitadas) que marchan en sentido longitudinal en relación a la cavidad y a una cierta velocidad u [véase la figura 5-9(a)]. La cavidad ha sido dimensionada de forma que su frecuencia natural sea casi la misma que la de la radiación molecular, pero la definición exacta de la frecuencia viene proporcionada por las moléculas y no por la propia cavidad.¹

Ahora bien, si la cavidad se encuentra en reposo en el éter, los pulsos de radiación marchan exactamente perpendiculares a la dirección del movimiento de las moléculas, como en la figura 5-9(a). Sin embargo, si el aparato posee

¹ Notar que esto es justamente lo contrario del comportamiento de los láseres He/Ne usados en el experimento de Michelson-Morley actualizado (capítulo 4). Para éstos eran las dimensiones de la cavidad, y no los átomos, lo que definía la frecuencia exacta.

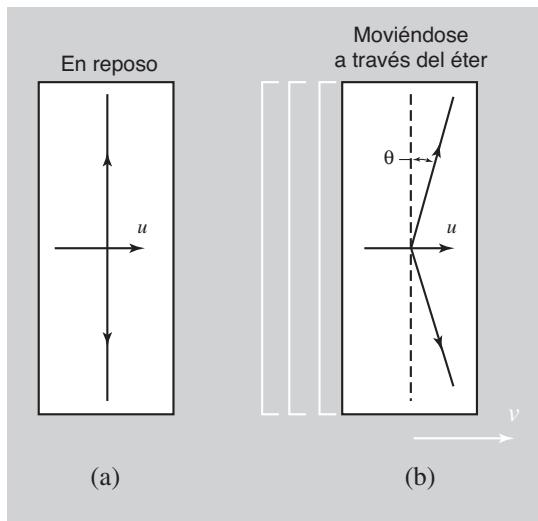


FIG. 5-9. Diagramas para ilustrar la emisión de radiación por parte de las moléculas de un máser de haz molecular que se supone (a) en reposo en el éter, (b) moviéndose en relación con el éter.

una velocidad v paralela al haz de moléculas a través del éter entonces, para que la radiación permanezca con la cavidad, debe ser emitida formando un ángulo $\pi/2 - \theta$ con respecto al haz de moléculas [fig. 5-9(b)]. El valor del ángulo θ es v/c . Esta misma imagen es válida para el caso de la luz emitida a lo largo del brazo transversal del interferómetro de Michelson, si contemplamos las cosas desde el sistema del éter y no del sistema del laboratorio. Pero con el maser de haces moleculares tenemos ahora un efecto nuevo. Como la radiación es suministrada por moléculas que se mueven a una cierta velocidad u relativa a la cavidad, estas moléculas actúan como fuentes con una componente de velocidad $u\theta$ según la dirección de los rayos. Esto representa un corrimiento Doppler, tal que

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{u\theta}{c} = \frac{uv}{c^2} \quad (5-22)$$

El corrimiento de frecuencia es proporcional a la primera potencia de u . Si se colocan entonces dos masers iguales, dispuestos con sus ejes paralelos pero con sus haces moleculares marchando en sentidos opuestos (ambos, sin embargo, paralelos a v), la frecuencia de uno aumenta, mientras que la del otro disminuye. Mezclando sus salidas puede obtenerse una frecuencia pulsante f dada por

$$f = (2uv/c^2)\nu$$

Al girar todo el sistema un ángulo de 180° se intercambiarán los papeles de los dos masers y el corrimiento de frecuencia resultante valdrá $(4uv/c^2)\nu$. La frecuencia de resonancia ν para un maser de amoniaco es, aproximadamente, $2,4 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$, y u es una velocidad térmica típica cuyo valor se apróxima a 600 m/s . Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned} f &\approx \frac{1,2 \times 10^3 \times 2,4 \times 10^{10}}{9 \times 10^{16}} \nu \text{ s}^{-1} \\ &\approx 3 \times 10^{-4} \nu \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

en donde ν es la velocidad a través del éter expresada en metros por segundo. Haciendo ν igual a la velocidad de la Tierra alrededor de su órbita ($3 \times 10^4 \text{ m/s}$) se obtiene una frecuencia pulsante de unos 10 cps y un corrimiento neto de dicha frecuencia de 20 cps al efectuar una rotación completa del aparato. En la figura 5-10 se ofrece una muestra de los resultados reales obtenidos al girar

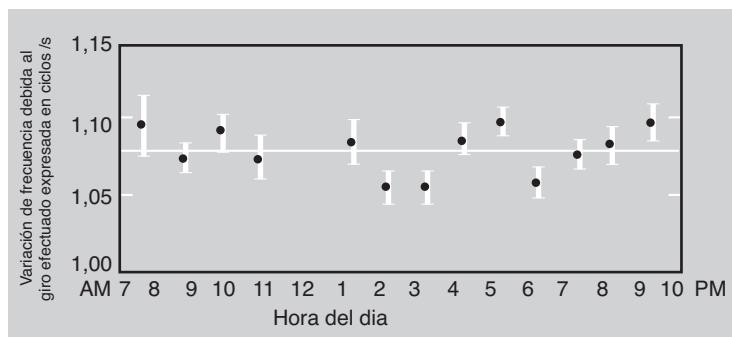


FIG. 5-10. Variación diurna de la alteración de la frecuencia relativa originada por un giro de 180° de una pareja de masers de haz de amoniaco (Cedarholm y Townes). Los haces de los dos masers se dispusieron en sentidos opuestos, según la dirección este-oeste. La variación constante de unos 1,08 cps es debida fundamentalmente a los campos magnéticos locales. Las longitudes de las líneas indican los errores probables en cada uno de los puntos marcados.

el aparato 360° debido a la rotación de la Tierra. Las mediciones fueron repetidas con diversos intervalos durante todo un año, no detectándose en ningún momento un corrimiento de frecuencia superior a 0,02 cps. Esto impone un límite superior cercano a 30 m/s (es decir, aproximadamente 1/1000 de la velocidad orbital de la Tierra) al valor de v , por lo que puede considerarse como el golpe de gracia a la hipótesis del éter fijo.

OBSERVANDO LOS RELOJES EN MOVIMIENTO Y OTROS OBJETOS

Es ésta la ocasión de hacer algunas observaciones sobre el contenido preciso de la proposición "los relojes en movimiento experimentan un retraso". Siempre que se oiga o lea esta afirmación deberá traerse a la mente la imagen (artificial) de un sistema de referencia cuajado de relojes idénticos que han sido sincronizados todos mediante el método de la señal de radio. Al marchar el reloj en movimiento a través de este territorio su lectura en un punto cualquiera es comparada con la lectura de un reloj fijo situado en ese mismo punto. A partir de estas observaciones se concluye, como ya vimos en el capítulo 4, que el reloj en movimiento experimenta un retraso, es decir, marcha más despacio según el factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Sin embargo, ¿qué sucede si miramos a un reloj en movimiento, es decir,

si lo miramos *realmente*, por ejemplo, con el auxilio de unos prismáticos? Éste no es, en manera alguna, el mismo caso. Significa que estamos situados en un punto particular de un sistema de referencia y que lo que vemos en el instante t en nuestro reloj representa la lectura en el reloj en movimiento en algún instante anterior $t - r/c$, en donde r era la distancia que existía entre nosotros y el reloj en el tiempo anterior. Puede suponerse que el reloj emite señales a intervalos iguales τ de su tiempo propio particular, señales que no son viistas por nosotros hasta más tarde. Pero esto no es más que el efecto Doppler. En un cierto instante, tal como nosotros medimos, vemos el reloj a través de nuestros prismáticos y observamos que señala un tiempo t . Un tiempo τ' después, también medido por nosotros, observamos que la lectura del reloj en movimiento es $t + \tau$. Si el reloj se mueve según una línea recta que pasa por nuestro propio punto de observación, la relación entre τ' y τ es precisamente la del efecto Doppler unidimensional:

$$\tau' = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} \tau \quad (5-23)$$

Si el reloj se mueve hacia nosotros, el valor de β en esta fórmula es negativo, por lo que $\tau' < \tau$ y el reloj en movimiento parecerá marchar más de prisa en lugar de más despacio. Si el reloj estuviese constituido por una colección de átomos en movimiento que emitiesen una línea espectral característica, la luz que observaríamos estaría desplazada hacia el azul.

La consecuencia que se desprende de esto es que, como ocurre siempre en relatividad, es esencial el especificar por completo el proceso o suceso particular que se esté describiendo. La palabra "observar" no debe usarse con descuido para referirse a sucesos que tengan lugar en puntos lejanos. Las palabras "ver" y "mirar" llevan implícitas en ellas el tiempo de tránsito finito de la luz. Aunque en retrospectiva parezca casi increíble, durante más de 50 años desde que Einstein publicara su trabajo de 1905 ha existido la creencia entre los físicos de que la contracción de Lorentz de un cuerpo podía ser vista o fotografiada. La diferencia entre este tipo de observaciones y las observaciones que originaron las transformaciones de Lorentz no fue considerada críticamente hasta 1959, fecha en la cual J. Terrell demostró que la contracción de Lorentz no puede ser percibida como tal por la vista.¹ Al tener debidamente en cuenta el tiempo que tarda en llegar al ojo de un observador en reposo la

¹ J. Terrell, *Phys. Rev.*, **116**, 1041-1045 (1959). Véase también V. F. Weisskopf, *Phys. Today*, **13**, 24-27 (1960), y G. D. Scott y M. R. Viner, *Am. J. Phys.*, **33**, 534 (1965).

luz procedente de las diferentes partes de un objeto en movimiento se reconoce que los instantes adecuados en los cuales debe ser emitida la luz desde los diversos puntos del cuerpo deben ser distintos y, por consiguiente, están asociados con posiciones diferentes del cuerpo en su totalidad. El resultado global es que el cuerpo aparece distorsionado. Sin embargo, tiene lugar un fenómeno de gran interés. Si el objeto en movimiento se encuentra lo suficientemente alejado como para abarcar un ángulo sólido muy pequeño (por lo que puede decirse con bastante aproximación que los rayos de luz que llegan al observador son todos paralelos), resulta que el objeto aparece estar en reposo, pero con cierto giro. Por tanto, una barra de un metro de longitud aparentaría haber encogido, pero sólo en la medida que corresponde a su giro aparente sin que intervenga ninguna contracción como tal. A continuación analizaremos

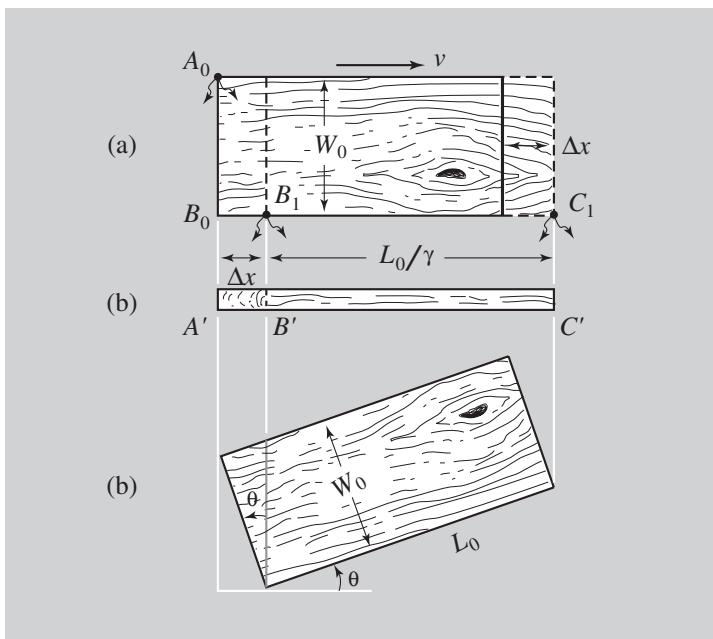


FIG. 5-11. (a) Objeto rectangular que se mueve a una velocidad v paralelamente al eje x . (b) Posiciones aparentes de las esquinas A , B , C registradas en un instante determinado por un observador lejano que mira según la dirección de las y en el plano del objeto. (c) Se desprende que el objeto gira en su propio plano, pero no experimenta ninguna contracción de Lorentz.

este fenómeno para un objeto rectangular que se mueva paralelamente a uno de sus lados.

Consideremos una placa rectangular de longitud L_0 y anchura W_0 medidas ambas en su propio sistema en reposo, que se mueve a una velocidad v paralelamente a los lados de longitud L_0 [véase la figura (5-11(a))]. Supongamos que observamos esta figura en su propio plano en una dirección perpendicular a v . Se tiene entonces que la luz procedente del extremo posterior (A_0) debe recorrer una distancia W_0 más que la luz procedente del extremo cercano (B_0), y por tanto, para que llegue al ojo del observador en el mismo instante, deberá partir un tiempo Δt antes, siendo $\Delta t = W_0/c$. Sin embargo, en este tiempo la placa se ha movido una distancia Δx igual a $v\Delta t$, es decir, vW_0/c , y sus extremos se encuentran en los puntos señalados por B_1 y C_1 en el instante en que la luz parte de estos extremos. Debido a la contracción de Lorentz, el lado más cercano de la placa aparece poseer una longitud L_0/γ ; puesto que sus extremos B_1 y C_1 están situados a igual distancia del observador, no hace falta corrección alguna para la diferencia de los tiempos de transmisión. Por tanto, en un instante dado, el observador ve el lado AB encogido debido a la perspectiva y el lado BC contraído en virtud de la contracción de Lorentz. Esto viene indicado en la figura 5-11(b), teniéndose las relaciones siguientes:

$$A'B' = vW_0/c \quad B'C' = L_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Si consideramos ahora la placa en reposo, pero girada un ángulo θ , tal como se muestra en la figura 5-11(c), las proyecciones de las longitudes de sus lados son $W_0 \sin \theta$ y $L_0 \cos \theta$. Estas longitudes corresponden precisamente a los valores anteriores de $A'B'$ y $B'C'$ si hacemos $\sin \theta = v/c$.

No se debe concluir de la discusión anterior que la contracción de Lorentz haya sido liquidada. Debe tenerse presente, en cambio, que se refiere a medidas de un cierto tipo que no son lo mismo que limitarse a "mirar". Este falso concepto, que seguramente ruborizó a todos los físicos cuando fue expuesto, era consecuencia directa de una incapacidad de analizar el proceso de visión en función de los sucesos puntuales particulares correspondientes. Al mirar a través de unos prismáticos un reloj en movimiento, es muy posible que, bajo ciertas circunstancias, se observe que marcha más de prisa, pero no tiene por qué versele contraído. Por tanto, conviene estar alerta y examinar fríamente y con espíritu crítico las afirmaciones en las que interviene la teoría de la relatividad.

MOVIMIENTOS ACCELERADOS

Para hacer más completa nuestra discusión obtendremos aquí las expresiones de las aceleraciones medidas en diferentes sistemas iniciales. Los resultados que se obtendrán van a presentar cierta complicación y no tiene sentido el intentar recordarlos a menos que se tenga un interés especial en la cinemática relativista. Aun cuando así suceda, es probable que los casos especiales y más sencillos sean de una utilidad mucho mayor que los resultados generales.

Conviene también hacer otra observación previa. Dado que Einstein desarrolló una teoría nueva por entero (su teoría general de la relatividad, publicada en 1916) basada en la equivalencia dinámica de un laboratorio acelerado y un laboratorio en un campo gravitatorio, se dice en ocasiones, implícita o explícitamente, que la relatividad especial no es adecuada para emplearla en el caso de movimientos acelerados. Esto es un error de concepto. Podemos discutir adecuadamente un desplazamiento y todas sus derivadas con el tiempo dentro del contexto de las transformaciones de Lorentz.

Al igual que con las transformaciones de velocidad, resulta muy conveniente el diferenciar entre aceleraciones longitudinales y aceleraciones transversales con respecto a la dirección del movimiento relativo de dos sistemas iniciales. Tenemos que

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2} \quad (5-2)$$

$$u_y = \frac{u_y'/\gamma}{1 + vu_x'/c^2} \quad (5-3)$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) \quad (5-1)$$

Por tanto,

$$du_x = \frac{du_x'}{1 + vu_x'/c^2} - \left[\frac{u_x' + v}{(1 + vu_x'/c^2)^2} \frac{v du_x'}{c^2} \right]$$

(Recordar que $v = \text{constante}$ para nuestros propósitos.) Reagrupando términos, tenemos

$$du_x = \frac{(1 - v^2/c^2) du_x'}{(1 + vu_x'/c^2)^2} = \frac{du_x'}{\gamma^2(1 + vu_x'/c^2)^2}$$

Además, de la ecuación (5-1),

$$dt = \gamma(dt' + v dx'/c^2) = \gamma(1 + vu_x'/c^2) dt'$$

Por tanto,

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du'_x/dt'}{\gamma^3(1 + vu_x'/c^2)^3}$$

es decir,

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(1 + vu_x'/c^2)^3} \quad (5-24)$$

De manera análoga, de la ecuación (5-3) tenemos

$$du_y = \frac{du'_y}{\gamma(1 + vu_x'/c^2)} - \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu_x'/c^2)^2} \frac{v du'_x}{c^2}$$

Por tanto,

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{du'_y/dt'}{\gamma^2(1 + vu_x'/c^2)^2} - \frac{u'_y}{\gamma^2(1 + vu_x'/c^2)^3} \frac{v du'_x/dt'}{c^2}$$

es decir,

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2(1 + vu_x'/c^2)^2} - \frac{(vu_y'/c^2)a'_x}{\gamma^2(1 + vu_x'/c^2)^3} \quad (5-25)$$

Sólo cuando $u_y' = 0$ o $a_x' = 0$ (o ambas) la expresión de a_y se vuelve relativamente sencilla. Mas para estos casos tenemos

Caso especial ($u_y' = 0$ o bien $a_x' = 0$):

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2(1 + vu_x'/c^2)^2} \quad (5-26)$$

Debe observarse que si un cuerpo se encuentra instantáneamente en reposo en S' ($u_x' = u_y' = 0$), las componentes de su aceleración medidas en S disminuyen según los factores γ^3 para la dirección de las x y según γ^2 para la dirección de las y , en comparación con las aceleraciones medidas en el sistema en reposo instantáneo S' .

La conclusión principal que debe sacarse de los cálculos anteriores es que la aceleración es una cantidad con un valor limitado y cuestionable en relatividad especial. No sólo no es un invariante, sino que las expresiones de la misma son bastante complejas y los diversos componentes se transforman de diferentes maneras. La posición privilegiada que ocupaba en la dinámica newtoniana no tiene cabida aquí.

LOS GEMELOS

De todas las supuestas paradojas a que da origen la teoría de la relatividad, la *paradoja de los gemelos* (o paradoja del reloj) es a la vez la más famosa y la que más controversias ha suscitado. Según esta paradoja, si un reloj permanece en reposo en un sistema inercial y otro, inicialmente cronometrado con él, describe una trayectoria cualquiera y vuelve al final de la misma a su punto de origen, el segundo reloj habrá perdido tiempo en comparación con el primero. Por ejemplo, el astronauta acabará siendo más joven que su hermano gemelo. Este resultado, expuesto por Einstein en su primer trabajo sobre relatividad (1905), fue objeto de una fuerte polémica reflejada en la literatura de la física durante el período 1957-1959, polémica precedida de algunos enfrentamientos que se remontan a 1939. Debemos esperar que la cuestión se haya aclarado ya definitivamente.¹

La “paradoja” consiste en una unilateralidad que aparece entrar en contradicción con los postulados básicos de la relatividad. Tanto el que se va como el que se queda están de acuerdo en que el primero ha envejecido menos que el segundo. Constituye una interesante aplicación de la teoría el ver por qué sucede así. Señalaremos dos maneras semejantes, aunque con una ligera diferencia, de analizar el problema.

En primer lugar, definimos el viaje realizado de la forma más sencilla posible, considerándolo compuesto de tres sucesos distintos separados por períodos de movimiento uniforme:

1. El viajero (*A*) parte, alcanzando una velocidad constante v en un tiempo despreciablemente pequeño.
2. Despues de viajar durante un cierto rato, el viajero invierte súbitamente el sentido de su marcha.
3. El viajero vuelve al punto de partida y se para.

¹ Véase, por ejemplo, *Selected Reprints on Special Relativity Theory*, American Institute of Physics, Nueva York, 1963; 9 de sus 17 artículos están dedicados exclusivamente a la paradoja de los relojes.

Método 1. Supongamos que el observador situado en la Tierra (*B*) registra un tiempo total *T* entre los sucesos 1 y 3. Puede inferir que los viajes de ida y de vuelta le llevaron cada uno un tiempo *T*/2. (*B*) conoce el fenómeno de la dilatación del tiempo y, por tanto, debe estar dispuesto a admitir que el viajero (*A*) registra un tiempo transcurrido *T*/2 γ para cada recorrido. Por tanto, no debe sorprenderle que *A* señale como tiempo total del viaje el valor *T*/ γ . Podemos reforzar esta conclusión apoyándonos en la contracción de Lorentz. El suceso 2 tiene lugar a una distancia *L*(= *vT*/2) del punto de partida. Pero *A*, una vez que ha alcanzado la velocidad *v*, a consecuencia de la aceleración, se encuentra en un sistema en el que la distancia es sólo *L*/ γ . De nuevo tenemos un valor menor para el tiempo de vuelo. Ambos cálculos son correctos.

Pero, ¿no puede suponerse que *B* es el viajero y que es *A* el que permanece inmóvil? En modo alguno. ¿Por qué ocurre así? Porque no existe simetría entre ambos. El suceso 2 es el decisivo. En el transcurso del mismo *A* pasa de estar en un sistema inercial a estar en otro, mientras que a *B* no le ocurre nada en absoluto. En el momento de volver, *A* experimenta una aceleración que puede detectarse de diversas maneras. (Por supuesto, si *A* debe partir y estar de vuelta en la posición de *B*, experimenta aceleraciones también en los sucesos 1 y 3.) Siente la acción de fuerzas iniciales que actúan sobre él. Puede ver las estrellas, y en el caso de que posea un telescopio puede ver un desplazamiento repentino de la posición de esas estrellas, como consecuencia de los efectos de aberración debidos a *v/c*. No existe, por tanto, paradoja alguna y el envejecimiento asimétrico es algo real.¹

Método 2. Este método tiene su fundamento en el efecto Doppler y es quizás aún más convincente que el método 1, del cual no es, en definitiva, más que una elaboración. Suponemos que cada persona manda a la otra señales de su tiempo propio igualmente espaciadas. Se comparan a continuación las cuentas de señales de tiempo acumuladas para todo el recorrido. Suponemos que cada persona transmite *f* pulsos por unidad de tiempo. A medida que *A* se aleja de *B* cada observador recibirá las señales del otro a un ritmo menor que viene dado por $f' = f[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{1/2}$. Pero, ¿durante cuánto

¹ Nótese, sin embargo, que nos basamos en la realidad de la aceleración de *A*, y en la posibilidad de observar las fuerzas iniciales asociadas a ella. ¿Existirían fenómenos como la paradoja de los gemelos si el sistema de referencia de las estrellas fijas y las galaxias distantes no estuviese presente? La mayoría de los físicos dirían que no. Nuestra definición final de sistema de referencia inercial puede consistir en que se trata, en definitiva, de un sistema de referencia que posee una aceleración nula con respecto a la materia del universo en su totalidad.

tiempo? Aquí es donde hace su aparición la asimetría. En el momento en que A cambia el sentido de su marcha empieza a recibir señales procedentes de B a un ritmo mayor dado por $f'' = f[(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{1/2}$. Con B ocurre algo totalmente diferente. La última señal emitida por A antes de cambiar el sentido de su marcha no alcanza B hasta un instante L/c posterior. Por tanto, durante mucho más de la mitad del tiempo total B está registrando las señales de A' a un ritmo menor f' . Tan sólo en las etapas posteriores recibe B pulsos a un ritmo mayor f'' . Construyendo una tabla (véase la tabla 5-1) podemos demostrar que cada observador recibe tantas señales como emite el otro entre el comienzo y el final del viaje. *Coinciden en no estar de acuerdo sobre sus medidas respectivas del tiempo total.* (Es interesante observar en la tabla 5-1 que aunque B no estaba presente en el suceso del espacio-tiempo que representa el cambio del sentido de la marcha de A , es capaz de deducir, a partir de sus observaciones, que este cambio tuvo lugar en la mitad del tiempo del viaje que mide A , puesto que B recibe igual número de señales a las dos velocidades diferentes, f' y f'' .)

Aun teniendo en cuenta el análisis anterior puede seguir pareciendo extraño que dos relojes, cada uno de los cuales ha estado señalando tiempo propio, al juntarlos de nuevo en un mismo lugar presenten desacuerdo. Después de todo, la separación en el espacio-tiempo entre los puntos de partida y los de llegada es un invariante, puede verificarse por ambos observadores, y es puramente temporal. Sin embargo, la suma de intervalos elementales de espacio tiempo ds a lo largo de una trayectoria real es, en palabras de Hermann Bondi, "un valor dependiente del camino".

Tenemos siempre que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = (c^2 dt'^2 - dx'^2)$$

Pero la integral de ds a lo largo de la línea del universo OCF del que permanece inmóvil (fig. 5-12) no es la misma que la integral a lo largo de la línea del universo ODF del viajero (ambas tal como se ven en el sistema en reposo de B).

A lo largo de OCF , siempre $dx = 0$. Por tanto,

$$\int_{1 \text{ camino } OCF}^3 ds = c \int_{1 \text{ camino } OCF}^3 dt = cT \quad (5-27)$$

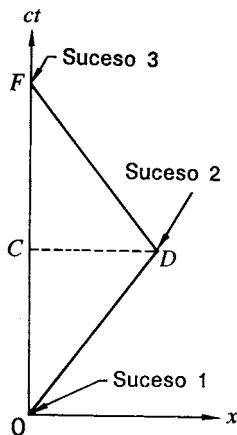


FIG. 5-12. Paradoja de los gemelos. Líneas del universo del astronauta (ODF) y de su hermano (OCF). El astronauta marcha hacia un punto lejano y vuelve de nuevo al punto de partida, marchando siempre a velocidad constante excepto a partir de (O), al iniciar la vuelta (D) y a la llegada (F).

A lo largo de OD , $dx = v dt$. Por tanto,

$$\int_{1 \text{ camino } OD}^2 ds = (c^2 - v^2)^{1/2} \int_{1 \text{ camino } OD}^2 dt = cT/2\gamma$$

A lo largo de DF , $dx = -v dt$, por lo que

$$\int_{2 \text{ camino } DF}^3 ds = cT/2\gamma$$

también. Por tanto,

$$\int_{1 \text{ camino } ODF}^3 ds = cT/\gamma \quad (5-28)$$

Vemos que las ecuaciones (5-27) y (5-28) contienen la asimetría ya familiar para nosotros. Esto no tiene por qué parecer tan extraño; existe una analogía en la geometría corriente. Considérese, por ejemplo, el caso de dos personas que deciden ir andando desde una ciudad P a una ciudad Q . Sin embargo, una de ellas atraviesa un pueblo C y la otra atraviesa un pueblo D . Consulte

TABLA 5-1: ANÁLISIS DE LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

<i>Item</i>	<i>Medido por B (El que permanece en reposo)</i>	<i>Medido por A (El viajero)</i>
Tiempo del viaje total	$T = 2L/v$	$T' = 2L/\gamma v$
Número total de señales emitidas	$fT = 2fL/v$	$fT' = 2fL/\gamma v$
Tiempo en el cual se detecta la vuelta de A	$t_1 = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = \frac{L}{v}(1 + \beta)$	$t_1' = \frac{L}{\gamma v}$
Número de señales recibidas según f'	$f't_1 = \frac{fL}{v}(1 + \beta) \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}$ $= \frac{fL}{v}(1 - \beta^2)^{1/2}$	$f't_1' = \frac{fL}{v}(1 - \beta^2)^{1/2} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}$ $= \frac{fL}{v}(1 - \beta)$
Tiempo para el resto del viaje	$t_2 = \frac{L}{v} - \frac{L}{c}$	$t_2' = \frac{L}{\gamma v}$
Número de señales recibidas según f''	$f''t_2 = \frac{fL}{v}(1 - \beta) \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2}$ $= \frac{fL}{v}(1 - \beta^2)^{1/2}$	$f''t_2' = \frac{fL}{v}(1 - \beta^2)^{1/2} \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2}$ $= \frac{fL}{v}(1 + \beta)$
Número total de señales recibidas	$\frac{2fL}{v}(1 - \beta^2)^{1/2} = \frac{2fL}{\gamma v}$	$\frac{2fL}{v}$
Conclusión relativa a la medición llevada a cabo por el otro gemelo respecto al tiempo invertido.	$T' = 2L/\gamma v$	$T = 2L/v$

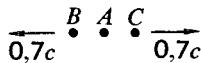
tando un mapa estiman el valor del intervalo espacial entre P y Q . No obstante, si llevasen aparatos para medir la distancia andada las lecturas de los mismos serían evidentemente diferentes para la distancia recorrida al ir de P a Q pasando por C o por D . La integral curvilínea de ds desde P hasta Q depende del camino seguido y queda fuera de lugar una discusión científica de por qué sucede así.

Una observación final. Algunos autores han señalado que la paradoja de los gemelos requiere para su explicación el empleo de la relatividad general. Esto tiene su origen en que los fenómenos que tienen lugar en un sistema de referencia acelerado (incluyendo el comportamiento de un reloj fijado a uno de estos sistemas) se consideran no distinguibles en relatividad general en una región limitada del espacio a partir de fenómenos que tienen lugar en un sistema de referencia incluido en un campo gravitatorio. Esto ha sido interpretado como indicio de que es imposible hablar del funcionamiento de los relojes acelerados *sin* utilizar la relatividad general. La formulación inicial de la relatividad especial, a pesar de que conduce a afirmaciones explícitas sobre las velocidades de los relojes que se mueven uniformemente, no contiene ningún tipo de generalización obvia respecto de los relojes acelerados. Y, como Bondi ha hecho notar, no todos los relojes acelerados se comportan de la misma manera. El reloj constituido por el pulso humano, por ejemplo, se parará si se le somete a una aceleración de $1000g$ —de hecho, $100g$ probablemente serían fatales—, mientras que un reloj nuclear puede experimentar una aceleración de $10^{16}g$ sin mostrar alteración alguna en su velocidad. Sin embargo, para cualquier reloj que no haya sido afectado por la aceleración, los efectos de un viaje pueden ser calculados sin hacer intervenir los conceptos de campos gravitatorios equivalentes. La relatividad especial resulta muy adecuada para predecir el tiempo perdido. En realidad así debiera ser, puesto que (como Bondi ha señalado humorísticamente) “es obvio que ninguna teoría que negara la posibilidad de poder observar la aceleración podría sobrevivir un viaje en coche por una carretera en mal estado”. Y la relatividad especial ha demostrado con larguezza ser una teoría capaz de aguantar embates mucho más fuertes.

PROBLEMAS

5-1. Consideremos tres galaxias A , B y C . Un observador situado en A mide las velocidades de C y B y encuentra que se están moviendo en direcciones opuestas y cada una de ellas con una velocidad de $0,7c$ relativa a él. Por tanto,

de acuerdo con las medidas en su sistema la distancia entre ellas aumenta a la velocidad $1,4c$. ¿Cuál es la velocidad de A observada en B ? ¿Cuál es la velocidad de C observada en B ?



5-2. Un mesón K° en reposo se desintegra dando lugar a un mesón π^+ y a un mesón π^- , cada uno de los cuales posee una velocidad de $0,85c$. Al desintegrarse un mesón K° que marcha a una velocidad de $0,9c$, ¿cuál es la máxima velocidad que puede alcanzar uno de los mesones π ? ¿Cuál es la velocidad mínima?

5-3. Considérense dos sistemas de referencia, S y S' , que se mueven a una velocidad v ($< c$) el uno con respecto al otro según el eje de las x .

(a) Si un cierto objeto se mueve con una velocidad u ($u < c$) con respecto a S y una velocidad u' con respecto a S' , utilizar las ecuaciones de composición de velocidades (tridimensionales) para demostrar que $u' < c$.

(b) Si $u = c$, demostrar que $u' = c$.

(c) Si $v = 3c/4$, y u' posee componentes $u'_x = -2c$, $u'_y = u'_z = 0$, demostrar que las componentes de u son $u_x = 5c/2$, $u_y = u_z = 0$. ¿Cómo puede explicarse que u_x y u'_x posean signos opuestos? Experimentar (sobre el papel) con algunos ejemplos en los cuales algunas o ambas de las velocidades a componer sean mayores que c . ¿Poseen estas situaciones algún significado físico?

5-4. Dos neutrones, A y B , se acercan mutuamente a lo largo de una línea recta. Cada uno posee una velocidad constante βc medida en el laboratorio. Demostrar que la energía total del neutrón B observada en el sistema en reposo del neutrón A viene dada por

$$(1 + \beta^2)(1 - \beta^2)^{-1}M_0c^2$$

en donde M_0 es la masa en reposo del neutrón.

5-5. Un haz de átomos de radio R_1 se mueve con una velocidad u y entra en una región del espacio que contiene un gas de átomos de radio R_2 . Si existen n de estos átomos por unidad de volumen de la región, ¿qué tanto por ciento del rayo incidente es dispersado en el tiempo t , medido en el sistema del laboratorio? ¿En qué forma variará la respuesta si los átomos dispersores penetran a una velocidad v (en el sistema del laboratorio) en el haz incidente? Suponer que la densidad de dispersores es n en el sistema de los mismos.

5-6. Las medidas llevadas a cabo en dos sistemas, S y S' , están relacionadas entre sí por las transformaciones de Lorentz corrientes, con $v = 0,6c$. En $t' = 10^{-7}$ s, una partícula parte del punto $x' = 10$ m con una velocidad constante u' igual

a — $c/3$. Se la lleva súbitamente al reposo en el instante $t' = 3 \times 10^{-7}$ s (todas las medidas llevadas a cabo en S'). Hallar, medidas en S :

- (a) La velocidad de la partícula durante su recorrido.
- (b) La distancia recorrida.

5-7. Un sistema inercial S_1 posee una velocidad constante v_1 según el eje de las x relativo a un sistema inercial S . Otro sistema inercial S_2 posee una velocidad v_2 relativa a S_1 . Dos transformaciones de Lorentz-Einstein sucesivas nos permiten pasar de (x, y, z, t) a (x_1, y_1, z_1, t_1) y a continuación de (x_1, y_1, z_1, t_1) a (x_2, y_2, z_2, t_2) . Demostrar que el resultado obtenido es el mismo que el de una transformación de Lorentz-Einstein desde (x, y, z, t) a (x_2, y_2, z_2, t_2) , si suponemos que la velocidad v de S_2 relativa a S tiene la siguiente expresión:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

5-8. Consideremos dos sistemas iniciales, S y S' , relacionados de la manera usual.

(a) En $t = 0$ un fotón parte de S y marcha en una dirección que forma un ángulo de 45° con el eje de las x . ¿Qué ángulo forma su trayectoria con el eje de las x' en S' ?

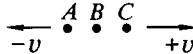
(b) Repetir la parte (a) para el caso de un cuerpo con masa m que se mueve en S con una velocidad u .

(c) Una barra que permanece en reposo en S forma un ángulo de 45° con el eje de las x . ¿Qué ángulo forma con el eje de las x' ?

5-9. Tres transmisores de radio idénticos A , B y C , cada uno de los cuales transmite a la frecuencia v_0 en su propio sistema en reposo, se encuentran en movimiento como se muestra en la figura adjunta.

(a) ¿Cuál es la frecuencia de las señales de B que recibe C ?

(b) ¿Cuál es la frecuencia de las señales de A que recibe C ?

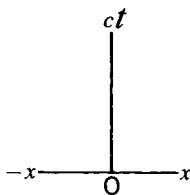


5-10. Una fuente de pulsos de radar se encuentra en reposo en el punto $x = 0$. Un gran meteorito se mueve con una velocidad constante v hacia la fuente. En $t = 0$ se encuentra en el punto $x = -l$. Un primer pulso de radar es emitido por la fuente en $t = 0$ y un segundo pulso en $t = t_0$ ($t_0 < l/c$). Los pulsos son reflejados por el meteorito y vuelven a la fuente.

(a) Dibujar un sistema de coordenadas como el que se muestra en la figura y trazar la posición en función del tiempo (es decir, las líneas del universo) para: (1) la fuente, (2) el meteorito, (3) los dos pulsos salientes, (4) los pulsos reflejados.

(b) Con o sin el auxilio del diagrama hallar el intervalo de tiempo entre las llegadas a $x = 0$ de los dos pulsos reflejados.

(c) Con o sin el auxilio del diagrama calcular el intervalo de tiempo entre las llegadas al meteorito de los dos pulsos salientes, medido en el sistema en reposo del meteorito.



5-11. Un astronauta se mueve alejándose de la Tierra con una aceleración constante (medida en el sistema de referencia de la Tierra) de $9,8 \text{ m/s}^2$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el corrimiento al rojo haga invisible el resplandor rojo de los signos de neón en la Tierra a su vista humana?

5-12. Existe un servicio de naves espaciales desde la Tierra a Marte. Cada nave está equipada con dos luces idénticas, una delante y otra detrás. Las naves marchan normalmente a una velocidad v_0 , relativa a la Tierra, de forma que el faro delantero de la nave espacial que se dirige hacia la Tierra aparenta ser verde ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$) y la luz de cola de una nave que despega aparenta ser roja ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$).

(a) ¿Cuál es el valor de v_0/c ?

(b) Una nave espacial acelera para adelantar a otra nave que marcha por delante de ella. ¿A qué velocidad deberá marchar la nave primera (relativa a la Tierra) para que la luz de cola de la nave que se dirige hacia la Luna por delante de ella parezca un faro delantero (5000 \AA verde)?

5-13. De acuerdo con la ley de Hubble, las galaxias distantes se alejan de nosotros a velocidades proporcionales a las distancias que nos separan de ellas:

$$v(r) = \alpha r \quad \text{con } \alpha \approx 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

(a) ¿A qué distancia se encontraría una galaxia cuya velocidad con respecto a la Tierra fuese c ? ¿Se la podría observar desde la Tierra?

(b) Responder a las mismas preguntas (incluyendo el efecto Doppler) para el caso de una galaxia imaginaria para la cual $v(r) = 1,1c$.

5-14. Una galaxia en Hydra emite luz con un corrimiento al rojo correspondiente a una velocidad de retroceso con respecto a la Tierra de $6 \times 10^4 \text{ km/s}$, y

por tanto, de acuerdo con la ley de Hubble, está situada a una distancia de alrededor de 3×10^9 años-luz. Si esta galaxia pasó frente a la Tierra hace T años y se ha movido a velocidad constante desde entonces, ¿cuál es el valor de T ?

5-15. Algunas observaciones efectuadas sobre un cuerpo celeste (quasar 3C-9) hacen pensar que, cuando emitió la luz que acaba de llegar a la Tierra, se estaba moviendo alejándose de la Tierra a una velocidad de $0,8c$.

(a) Una de las líneas identificadas en su espectro posee una longitud de onda de 1200 \AA cuando se emite desde una fuente estacionaria. ¿A qué longitud de onda debe haber aparecido esta línea en el espectro observado para el quasar?

(b) Los quasars emiten energía a una velocidad tan sumamente elevada que los astrónomos son de la opinión que deben quemarse por completo en un tiempo relativamente corto. Si el tiempo de vida del 3C-9 se supone de 10^6 años medido en su propio sistema de reposo, ¿durante qué intervalo de tiempo terrestre se recibiría radiación procedente de él en la Tierra? (Supóngase que su velocidad relativa a la Tierra permanece constante.)

5-16. Una línea correspondiente al calcio en el espectro de la estrella α Centauro posee una longitud de onda de $3968,20 \text{ \AA}$; la misma línea en el espectro solar posee una longitud de onda que resulta ser de $3968,49 \text{ \AA}$.

(a) ¿Cuál es la velocidad radial de la α Centauro relativa al sistema solar? ¿Se acerca o se aleja?

(b) La velocidad transversal de la α Centauro es prácticamente igual a su velocidad radial; su distancia al Sol es de $4,3$ años-luz. Obtener el valor del ángulo de variación de su posición aparente al cabo de 10 años.

(c) ¿Qué velocidad *transversal* con respecto a la visual deberían poseer los iones de calcio de forma que la luz con longitud de onda normal de $3968,49 \text{ \AA}$ variase en $0,29 \text{ \AA}$? ¿Se podría distinguir la luz de la que se recibe procedente de la α Centauro?

5-17. (a) Considérense dos sistemas iniciales, S y S' , relacionados de la manera usual. Una señal luminosa de frecuencia ν_0 en S es emitida desde el punto $x = -l$ en el instante $t = -l/c$. ¿Cuál es la frecuencia de la señal luminosa en S' ?

(b) Simplificar la respuesta para el caso en que $\beta c \ll 1$.

(c) Comprobar que, efectivamente, en $t = 0$, S' posee la misma velocidad que un sistema que partiese del reposo en el instante $t = -l/c$ y experimentase una aceleración $a = vc/l$.

(d) Por el principio de equivalencia esto implica que el corrimiento relativo en frecuencia de la luz en un campo gravitacional debería venir expresado por

$$|\Delta\nu|/\nu_0 = \beta = gl/c^2$$

en donde l es la distancia entre emisor y receptor. Un experimento clásico para demostrar este corrimiento fue llevado a cabo por Pound y Rebka [Phys. Rev.

Letters, 4, 337 (1960)]. El resultado que se obtuvo fue que (*corrimiento medido*)/(*corrimiento teórico*) = 1,05 ± 0,10. En este experimento concreto l valía 60 pies; ¿cuál era el valor de $|\Delta v|/v_0$?

(e) Demostrar que la variación relativa de la frecuencia de la luz (observada en el infinito) que parte de la superficie de una estrella de masa M y radio R viene dada por $\Delta v/v_0 = -GM/Rc^2$.

5-18. Un astronauta experimenta una aceleración continua de $9,8 \text{ m/s}^2$ en su sistema en reposo instantáneo. Si parte del reposo desde la Tierra, ¿qué distancia ha recorrido al cabo de un tiempo terrestre t ? ¿Cuánto tarda en alcanzar una velocidad $c/2$? (Puede emplearse la ecuación de la transformación para la componente de la aceleración a_x , ecuación (5-24), haciendo $u'_x = 0$ y observando que en este caso $\gamma(v)$ es una función del tiempo.)

5-19. El problema que sigue está basado en un ejemplo numérico sencillo a la vez que explícito relativo a la paradoja de los gemelos debido a Sir Charles Darwin [*Nature*, 180, 976 (1957)]. En el día de Año Nuevo de 1984, un astronauta (*A*) parte de la Tierra con una velocidad de $0,8c$ y marcha hacia la estrella más cercana, α Centauro, la cual se encuentra a una distancia de 4 años-luz, medida en el sistema de referencia de la Tierra. Una vez que ha llegado a las estrellas se vuelve inmediatamente y regresa a la Tierra a la misma velocidad, llegando al punto de partida el día de Año Nuevo de 1994, tiempo terrestre. El astronauta tiene un hermano (*B*) que permanece en la Tierra y acuerdan ambos felicitarse mutuamente el año nuevo mediante el teléfono-radar cada día de Año Nuevo hasta que el viajero regrese a casa.

(a) Comprobar que *A* manda sólo 6 mensajes (incluyendo el que manda el último día de su viaje), mientras que *B* manda 10.

(b) Dibujar el diagrama de espacio-tiempo del viaje de *A* trazado en el sistema de referencia de la Tierra. (Señalar las escalas tanto de x como de ct en años-luz.) Trazar también las líneas del universo de todas las señales de radar que transmite *B*. Verificar con el auxilio del diagrama que *A* (el astronauta) ha recibido sólo una señal hasta el momento de su vuelta y que recibe las otras nueve durante el viaje de retorno.

(c) Trazar otro diagrama de espacio-tiempo, también en el sistema de referencia de la Tierra, mostrando las líneas del universo del astronauta y de todas las señales que él emite. Verificar que su hermano recibe un mensaje cada tres años de tiempo terrestre durante los nueve primeros años siguientes a la partida de su hermano y recibe a continuación tres mensajes más a lo largo del último año, haciendo un total de 6, lo cual es correcto puesto que para el astronauta el viaje ha tenido una duración de 3 años para cada trayecto.

(d) Interpretar estos resultados en términos del efecto Doppler.

5-20. *A* y *B* son gemelos. *A* marcha hacia α Centauro (a una distancia de cuatro años luz) y regresa de nuevo a la Tierra. En ambos trayectos su velocidad con respecto a la Tierra es de 0,6c y transmite una señal de radio cada 0,01 de año en su sistema. Su hermano gemelo *B* emite de forma análoga una señal cada 0,01 años en su propio sistema en reposo.

- (a) ¿Cuántas señales de las emitidas por *A* antes de iniciar el regreso recibe *B*?
- (b) ¿Cuántas señales recibe *A* antes de iniciar el regreso?
- (c) ¿Cuál es el número total de señales que recibe cada gemelo procedente del otro?
- (d) ¿Quién es más joven al final del viaje? ¿Cuánto más joven es? Demostrar que los dos gemelos se muestran de acuerdo con este resultado.

5-21. Un astronauta da vueltas alrededor de la Tierra a una distancia de 7×10^6 m de su centro durante una semana. ¿Cuánto más joven será con relación a su hermano gemelo que permanece en la Tierra cuando él aterriza? (Despreciar la rotación de la Tierra.)

[Nota: En este caso el viajero pasa por un número infinito de sistemas inerciales diferentes (en vez de dos), debido al cambio constante de velocidad que experimenta. Sin embargo, todo se reduce a un sencillo caso de dilatación de tiempos. Surge una nueva complicación asociada a la relatividad general consistente en que el reloj constituido por su cuerpo se encuentra a un potencial gravitatorio diferente al de la superficie de la Tierra, lo cual afecta también a la marcha del reloj. Pero puesto que el radio de la órbita difiere poco del radio de la Tierra, este efecto resulta bastante pequeño al compararlo con la dilatación del tiempo.]

5-22. En el experimento pensado por Alväger y col. que se describe en el texto, se observa la desintegración de los mesones π^0 neutros para dar lugar a rayos γ (fotones de elevada energía). Estos mesones π^0 poseían energías comprendidas entre los 6,0 y los 18,0 GeV, energías en reposo de 135,1 MeV y vidas medias propias de 2×10^{-16} s.

- (a) ¿Cuál era el margen de velocidades de los mesones π^0 ?
- (b) ¿Cuál era el margen en que estaban comprendidas sus vidas medias (en el sistema del laboratorio)?
- (c) ¿Qué distancia recorrián antes de desintegrarse?
- (d) La velocidad de los rayos γ pudo determinarse creando los mesones π^0 (y en consecuencia los rayos γ) en ráfagas y midiendo a continuación el tiempo que invertían los rayos γ de cada ráfaga en recorrer una distancia determinada en una cierta dirección. Si esta distancia era de 60 m en el sistema del laboratorio, ¿cuál sería entonces el tiempo de vuelo para los rayos γ que se moviesen a una velocidad c ? ¿A una velocidad $2c$?

No debe dejar de insistirse en que la teoría especial de la relatividad descansa en innumerables verificaciones experimentales, ya que podemos obtener partículas con velocidades que se aproximan a la de la luz en el vacío, partículas para las cuales es necesario tener en cuenta las correcciones introducidas por la teoría especial de relatividad.

L. DE BROGLIE (1949)

De un ensayo contenido en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, P. A. Schilpp, editor, colección de ensayos publicados en honor del septuagésimo cumpleaños de Einstein, Harper Torchbooks, Nueva York, 1959.

6

Dinámica relativista Choques y leyes de conservación

A LA VISTA de los resultados de la relatividad especial parece que, en principio, deberíamos volver a escribir toda nuestra mecánica. Sin embargo, sabemos que esto no es necesario. La teoría de Newton, aunque válida sólo en el límite cuando las velocidades se hacen infinitamente pequeñas, es perfectamente aplicable a una gran cantidad de situaciones diversas. Esto se debe, como ya hemos visto, a que las velocidades máximas que vamos a manejar en la dinámica de los objetos macroscópicos corrientes son muy pequeñas en comparación con la velocidad de la luz ($v < 10^{-5}c$). Sin embargo, existe un terreno en el que se hace necesario el empleo de la relatividad especial: en aquellos problemas en los que intervienen velocidades que no son despreciables frente a la velocidad de la luz. Éste es fundamentalmente el caso de la física de las partículas atómicas y nucleares. El capítulo presente estará dedicado en su mayor parte a este tipo de problemas.

En este capítulo no intentaremos considerar en detalle los movimientos de las partículas bajo la acción de fuerzas específicas. Nuestra meta será más modesta. Sólo intentaremos mostrar el tipo de cálculos que pueden realizarse con la ayuda de estos dos principios: (1) conservación de la cantidad de movimiento y (2) conservación de la energía. El primero de estos principios será aplicable, como en el caso de los ya familiares problemas de la mecánica newtoniana, a cada uno de los tres componentes de la cantidad de movimiento por separado o a la cantidad de movimiento total considerada como un vector. El segundo principio se emplea sobreentendiéndose que la energía total en

todas sus formas, incluyendo la masa, es la magnitud que se conserva. Consideraremos que ambos principios son aplicables a cualquier sistema aislado, y nos centraremos en las situaciones en las cuales una interacción tiene lugar en su totalidad dentro de un cierto intervalo de tiempo. En otras palabras, fijaremos nuestra atención en los choques o procesos análogos y nuestro único interés consistirá en relacionar el “antes” y el “después”.

Antes de poder aplicar estos principios de conservación debemos considerar la manera de formularlos y justificarlos en términos relativistas. En el capítulo 1 obtuvimos las expresiones de la masa, la cantidad de movimiento y la energía total de una partícula con masa en reposo m_0 que se mueve con una velocidad v relativa al laboratorio:

$$\begin{aligned} m(v) &= \gamma m_0 \\ \mathbf{p} &= \gamma m_0 \mathbf{v} \\ E &= \gamma m_0 c^2 \end{aligned} \tag{6-1}$$

con $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Para la obtención de estas expresiones se utilizó explícitamente la relación entre la energía y la cantidad de movimiento para los fotones ($p = E/c$). Además, si se examinan con detalle los pasos seguidos, se verá que, de hecho, suponíamos el cumplimiento de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía y a continuación deducímos las fórmulas correspondientes a la cantidad de movimiento y a la energía que resultaban de este supuesto. Por tanto, al considerar el experimento de la presión de la luz no podríamos haber deducido absolutamente nada acerca de la cantidad de movimiento de los fotones sin admitir que esta cantidad de movimiento se transmitía en su totalidad a la superficie iluminada. En los cálculos efectuados en el caso de la caja de Einstein también se supuso explícitamente que se conservaba la cantidad de movimiento. Al discutir el experimento sobre la velocidad límite admitímos que, basándonos en el principio de la conservación de la energía, mediante una medida calorimétrica podríamos conocer con exactitud la energía cinética aportada por los electrones que viajaban a velocidades muy próximas a la de la luz.

Por tanto, no estamos ahora *descubriendo* estos importantes principios de conservación de la dinámica; estamos *afirmándolos* en realidad, basándonos en que el empleo de tales principios ha sido ya justificado ampliamente en la dinámica clásica. Y entonces, al pasar de la dinámica newtoniana a la einsteiniana no hacemos más que ampliar el número de problemas que pueden ser tratados de acuerdo con una cierta serie de reglas. A lo largo del proceso iremos obteniendo nuevas formas de calcular magnitudes como la cantidad

de movimiento y la energía cinética en función de la velocidad y de un parámetro inercial (la masa).

Sin embargo, la transición a la dinámica relativista no se efectúa de una forma arbitraria. Dada la cinemática relativista y conocidas las leyes de Newton, la formulación relativista es una consecuencia natural. En el capítulo 1 no nos encontrábamos aún en condiciones de hacer esto, como hicimos notar, y nuestros argumentos eran entonces mucho más sugestivos que convincentes. Sin embargo, llegados a este punto podemos proceder de una manera mucho más clara basándonos en situaciones fáciles de visualizar que pasamos a discutir a continuación. El razonamiento a seguir pone nuevamente de manifiesto la relación íntima existente entre la formulación particular de la cinemática y la dinámica correspondiente a ella.

DOS ASPECTOS DE UN CHOQUE ELÁSTICO

Vamos a considerar un tipo muy sencillo de choques —los choques perfectamente elásticos entre dos partículas idénticas. Será un choque en el cual el movimiento, en su totalidad, tiene lugar en un mismo plano, y realizaremos el análisis en función de la conservación de la cantidad de movimiento.

Recordemos brevemente la versión de este proceso en la mecánica de Newton. Los cuerpos A y B , que poseen unas velocidades iniciales \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 , respectivamente, chocan entre sí y pasan a tener las velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Para cualquier choque de este tipo resulta siempre posible encontrar un conjunto de cuatro factores escalares (α) que nos permitan escribir una ecuación del tipo

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \alpha_3 \mathbf{v}_1 + \alpha_4 \mathbf{v}_2$$

Sin embargo, esto no nos dice mucho. Pero ocurre que, teniendo en cuenta los experimentos realizados para infinidad de valores de \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 , en el caso de dos cuerpos dados que choquen, haciendo $\alpha_1 = \alpha_3 = m_A$ (propiedad escalar del cuerpo A) y $\alpha_2 = \alpha_4 = m_B$ (propiedad escalar característica del cuerpo B) se obtiene una identidad vectorial. En otras palabras, las observaciones puramente cinemáticas efectuadas para un proceso de choque nos conduce a introducir los parámetros que denominamos *masas inerciales* de los dos cuerpos y nos permiten escribir la conocida expresión de la conservación de la cantidad de movimiento.

Al introducir la cinemática relativista, la relación entre la velocidad inicial y la velocidad final de dos cuerpos que chocan no puede seguir expresándose de una manera tan sencilla. Sin embargo, intentamos mantener esta forma hasta donde nos es posible. Podemos hacer esto preguntándonos qué implica la cinemática de este tipo de choque si admitimos la conservación de la cantidad de movimiento en el sentido amplio que se verá a continuación.

En el choque elástico de dos cuerpos, A y B , descrito desde el punto de vista de un sistema de referencia particular, las velocidades inicial y final están relacionadas por la ecuación

$$m_A(u_1)\mathbf{u}_1 + m_B(u_2)\mathbf{u}_2 = m_A(v_1)\mathbf{v}_1 + m_B(v_2)\mathbf{v}_2 \quad (6-2)$$

en donde m_A es una propiedad inercial escalar de A que depende sólo de su velocidad y m_B es la propiedad escalar correspondiente de B . Sabemos que en la mecánica newtoniana esta ecuación se cumple para valores de m_A y m_B que no dependen de la velocidad. Veamos ahora la manera en que la cinemática relativista implica la dependencia de m con respecto a v , según señala la ecuación (6-1).

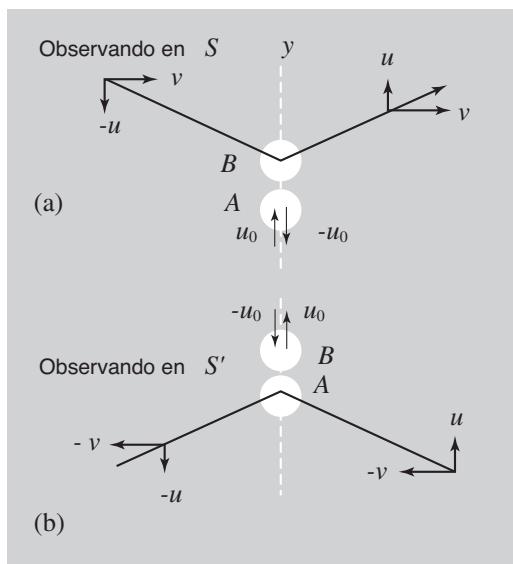


Fig. 6-1. Choque elástico entre dos objetos idénticos observados desde dos sistemas de referencia relacionados entre sí por una velocidad v según x .

Supongamos dos experimentos, el primero situado en el sistema inercial S y el segundo en el sistema inercial S' . Ambos emplean instrumentos idénticos para la medición de tiempos y de distancias y se ponen de acuerdo para conseguir un choque completamente simétrico entre dos partículas idénticas.¹ El experimento situado en S proyectará una partícula (A) según su propio eje y , con una velocidad u_0 (medida en S), y el experimentador situado en S' proyectará la otra partícula (B) según su eje y' con una velocidad $-u_0$ (medida en S'). La velocidad u_0 es pequeña, pero S y S' poseen una velocidad relativa v muy grande según x . Los experimentadores son tan hábiles que las partículas chocan cuando sus centros se encuentran situados en el eje de las y . El choque en S y S' adopta las formas que se muestran en la figura 6-1. La componente y (o la y') de la velocidad de cada partícula se invierte, y su velocidad según x (o según x') permanece inalterada. Esto corresponde a la reversibilidad completa en el tiempo para el choque en su totalidad.

Al analizar este proceso debemos observar lo siguiente:

1. La componente y de la velocidad A observada en S es u_0 inicialmente, pasando luego a ser $-u_0$. La componente y de la velocidad de B es inicialmente $-u$, y pasa a ser posteriormente u . La relación entre u_0 y u viene dada por la ecuación de transformación [ecuación (5-3)] para las componentes de la velocidad transversales a la dirección del movimiento relativo de dos sistemas de referencia:

$$u_y = \frac{u_y'/\gamma}{1 + vu_x'/c^2}$$

Como en el sistema S' la componente de velocidad u_x' de B es nula, la expresión se simplifica, quedando

$$u = u_0/\gamma = u_0(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (6-3)$$

2. Se observa en S' que los papeles de A y B se intercambian y el signo de v se invierte. Puede comprobarse la existencia de una simetría total girando 180° la figura 6-1(b), dentro de su propio plano; coincide entonces por completo con la figura 6-1(a).

3. La velocidad de cada partícula, tal como se observa en cada uno de los sistemas de referencia, permanece inalterada por el choque, y vale u_0 o bien

¹ Un experimento imaginario de este tipo fue propuesto por primera vez por G. N. Lewis y R. C. Tolman, *Phil. Mag.*, **18**, 510 (1909).

$(u^2 + v^2)^{1/2}$. Debido a esto y a la identidad de las partículas nos interesan sólo dos valores posibles para $m - m(u_0)$ y $m(V)$, en donde $V = (u^2 + v^2)^{1/2}$.

La conservación de la cantidad de movimiento según la dirección de y , tal como se observa en S , viene descrita entonces por la siguiente expresión:

$$p_y = m(u_0)u_0 - m(V)u = -m(u_0)u_0 + m(V)u$$

Por tanto,

$$\frac{m(V)}{m(u_0)} = \frac{u_0}{u} \quad (6-4)$$

Ahora bien, hemos postulado que u_0 es pequeño —todo lo pequeño que queramos. Por tanto, podemos tomar la cantidad inercial $m(u_0)$ igual a la masa inercial newtoniana m_0 . Además, puesto que $u_0 \ll v$, se desprende (a fortiori) de la ecuación (6-3) que $u \ll v$, y en consecuencia que $V \approx v$. Por tanto, suponiendo un choque de este tipo en el límite, con $u_0 \rightarrow 0$, resulta de la ecuación (6-4) que

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (6-5)$$

y en consecuencia que $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ es la definición adecuada de la cantidad de movimiento de una partícula con masa en reposo m_0 que se mueve con velocidad \mathbf{v} .

La discusión anterior se limita únicamente a la ecuación de la cantidad de movimiento. ¿Puede aplicarse la definición de masa que surge de este análisis —es decir, la definición dada por la ecuación (6-5)— a los cálculos en los que interviene la *energía* del sistema? Hemos señalado en el capítulo 1 que, efectivamente, sucede así, pero quizás añada más fuerza a este resultado un análisis basado en otro proceso de choque imaginario.

DOS ASPECTOS DE UN CHOQUE INELÁSTICO

Consideremos de nuevo el choque de dos partículas idénticas, pero en esta ocasión supondremos que el choque es completamente *inelástico*. Existirá un sistema S' en el cual las partículas se irán acercando una a la otra según una línea recta con velocidades iguales y opuestas de valor u [fig. 6-2(a)]. Existirá además otro sistema S , relativo al cual S' posee una velocidad u , y donde una de las partículas se encuentra inicialmente en reposo [fig. 6-2(b)].

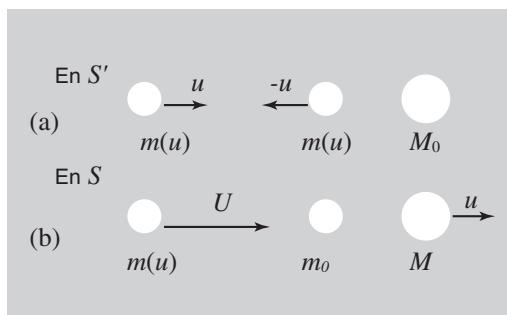


Fig. 6-2. Choque completamente inelástico entre dos objetos iguales observado (a) en el sistema de cantidad de movimiento nula, (b) en un sistema en el cual uno de los objetos se encuentra inicialmente en reposo.

Tal como se observa en el sistema S' , el choque da lugar a la formación de una partícula compuesta en reposo. Por tanto, en el sistema S esta partícula compuesta poseerá una velocidad u . Además, en este sistema S la partícula inicialmente en movimiento posee una velocidad U relacionada con u a través de la fórmula para la adición de las velocidades, ecuación (5-2):

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2}$$

en donde hemos hecho $u_x = U$, $u_x' = v = u$. Por tanto,

$$U = \frac{2u}{1 + u^2/c^2} \quad (6-6)$$

Escribiremos a continuación las expresiones correspondientes a la conservación de la cantidad de movimiento y a la conservación de la *masa*, desde el punto de vista del sistema S . (Al igual que en la sección anterior, supondremos que la masa es una función de la velocidad.)

Cantidad de movimiento:

$$m(U)U = Mu \quad (6-7)$$

Masa:

$$m(U) + m_0 = M \quad (6-8)$$

Eliminando M entre ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{m(U)}{m_0} = \frac{u}{U-u} \quad (6-9)$$

Ahora bien, la ecuación (6-6) nos relaciona U y u ; por tanto, podemos obtener el cociente $m(U)/m_0$ en forma de una función explícita de U . De la ecuación (6-6) resulta

$$u^2 - 2(c^2/U)u + c^2 = 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u &= \frac{c^2}{U} \pm \left[\left(\frac{c^2}{U} \right)^2 - c^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{c^2}{U} [1 \pm (1 - U^2/c^2)^{1/2}] \end{aligned}$$

Puesto que $u \rightarrow U/2$ para $U \ll c$, debemos elegir signo negativo. (Observar que el radical puede aproximarse por $1 - U^2/2c^2$ cuando $U \ll c$.) Tenemos, por tanto,

$$u = \frac{c^2}{U} [1 - (1 - U^2/c^2)^{1/2}] \quad (6-10a)$$

Y entonces,

$$U - u = \frac{c^2}{U} [U^2/c^2 - 1 + (1 - U^2/c^2)^{1/2}]$$

es decir,

$$U - u = \frac{c^2}{U} (1 - U^2/c^2)^{1/2} [1 - (1 - U^2/c^2)^{1/2}] \quad (6-10b)$$

Al sustituir las ecuaciones (6-10) en (6-9), obtenemos

$$\frac{m(U)}{m_0} = \frac{1}{(1 - U^2/c^2)^{1/2}} = \gamma(U) \quad (6-11)$$

que posee la misma forma que la expresión obtenida para la masa en la ecuación (6-5).

Este cálculo que acabamos de realizar ha requerido una manipulación algebraica algo mayor que el de la sección anterior, pero sin embargo resulta más satisfactorio en varios aspectos:

1. El choque considerado es extremadamente sencillo, puesto que el movimiento tiene lugar en su totalidad según una línea recta.
2. El cálculo es exacto. Una de las partículas se encuentra, por definición, totalmente en reposo en el sistema S antes del choque (y no sólo aproximadamente, como se supuso en el caso anterior).
3. El uso explícito que se hace de la ecuación de la conservación de la masa conduce de manera natural a la equivalencia entre masa y energía. Ya hemos establecido la conexión en estos términos en el capítulo 1; el propósito fundamental de señalarlo de nuevo aquí es resaltar una vez más la conexión íntima existente entre la cinemática y la dinámica. De la ecuación (6-11) tenemos que

$$\begin{aligned} m(U) &= m_0(1 - U^2/c^2)^{-1/2} \\ &= m_0 + \frac{1}{2}m_0U^2/c^2 + \dots \end{aligned}$$

Por tanto,

$$m(U)c^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0U^2 + \dots \quad (6-12)$$

Puesto que el segundo término de la derecha de la ecuación (6-12) corresponde exactamente a la energía cinética clásica de una partícula de masa m_0 y velocidad U , llegamos a la conclusión ya conocida de que la energía *total* de una partícula con masa en reposo m_0 y velocidad U viene dada por

$$E = \frac{m_0c^2}{(1 - U^2/c^2)^{1/2}} = m(U)c^2 \quad (6-13)$$

en donde $E_0 = m_0c^2$ define la energía en reposo de la partícula.

4. Siguiendo con el estudio del choque, podemos demostrar que el empleo consistente de una relación masa/velocidad como la que viene expresada por la ecuación (6-11) no implica contradicción alguna. La ecuación (6-11) constituye una relación de la masa de la partícula que interviene en el choque con

una velocidad U observada en el sistema S . Expresemos esto en términos de u haciendo empleo de la ecuación (6-6); tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 1 - U^2/c^2 &= 1 - \frac{4(u^2/c^2)}{(1 + u^2/c^2)^2} \\ &= \frac{(1 - u^2/c^2)^2}{(1 + u^2/c^2)^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$m(U) = \frac{(1 + u^2/c^2)}{(1 - u^2/c^2)} m_0$$

Al sustituir esta última expresión en la ecuación (6-8) encontramos que la masa de la partícula compuesta, medida en el sistema S , viene dada por

$$M = \frac{2m_0}{1 - u^2/c^2} \quad (6-14)$$

Sin embargo, en el sistema S esta partícula compuesta posee una velocidad u . Considerando la ecuación (6-11) cabe esperar que su masa en reposo sea M_0 , en donde

$$M_0 = M(1 - u^2/c^2)^{1/2}$$

Haciendo empleo de la ecuación (6-14) obtenemos

$$M_0 = \frac{2m_0}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \quad (6-15)$$

Pero consideremos ahora el choque descrito en el sistema S' . Aquí la partícula compuesta se encuentra realmente en reposo y ha surgido del choque de dos partículas, cada una de ellas con una masa en reposo m_0 y una velocidad u . Suponemos que toda la energía mecánica introducida por las partículas que chocan es retenida dentro de la partícula compuesta. Por tanto, no podemos (ni debemos) decir que M_0 es igual a $2m_0$. Teniendo en cuenta la conservación de la masa para el sistema S' , resulta

$$M_0 = 2m(u) \quad (6-16)$$

expresión idéntica a la ecuación (6-15) si aceptamos una dependencia de la masa con la velocidad del tipo de la expresada mediante la ecuación (6-11) y hacemos $m(u) = \gamma(u)m_0$.

ALGUNAS OTRAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LAS LEYES DE CONSERVACIÓN

De la discusión anterior debiera quedar bien claro que las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía no son sagradas, pero la verdad es que no se ha dado aún ningún caso que haya obligado a abandonarlas. Sin embargo, ha habido ocasiones en las cuales se ha estado a punto de hacerlo —como, por ejemplo, cuando Pauli, en 1930, postuló la existencia del neutrino, una partícula hasta entonces no observada, para evitar tener que abandonar la conservación de la energía en la desintegración de los rayos beta. Se tardó 20 años en detectar el neutrino, y cuando se consiguió,¹ la confianza en las leyes de conservación se vio altamente reforzada.

Está claro que las leyes de conservación no nos van a resolver nuestro problema por completo. Por ejemplo, en el choque de dos partículas atómicas precisaremos de una información detallada acerca de las fuerzas interatómicas antes de poder dar respuesta a muchas de las cuestiones más importantes, como pueden ser las siguientes: ¿Se quedarán pegadas las partículas entre sí? ¿Experimentarán quizás un choque elástico? ¿O será quizás un choque parcialmente inelástico? ¿Cuál será la probabilidad de que se dispersen según una dirección determinada? ¿Cuál es el área efectiva que presentan cuando desempeñan el papel de blancos para el choque? ¿Se emitirá radiación después del impacto, y en caso afirmativo, de qué tipo? Para poder suministrar respuestas a estas preguntas dentro de un amplio margen de condiciones se necesitarán muchos años-hombre de investigación. Sin embargo, las leyes básicas de conservación constituyen el fundamento para todo lo demás y su generalidad las convierte en una poderosa herramienta. Lo que haremos, por tanto, será ceñirnos a las proposiciones siguientes (para el caso de un sistema aislado) y ver a dónde nos llevan:

$$E_{\text{total}} = c^2 m_{\text{total}} = \text{constante} \quad (6-17)$$

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \text{constante} \quad (6-18)$$

F. Reines y otros, *Phys. Rev.*, **92**, 830 (1953).

Utilizaremos también las relaciones dinámicas ya introducidas en el capítulo 1, que pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (6-1):

$$\begin{aligned} E^2 &= (cp)^2 + E_0^2 \quad (\text{con } E = mc^2, E_0 = m_0c^2) \\ v &= \frac{p}{m} = \frac{c^2 p}{E} \end{aligned} \tag{6-19}$$

o bien

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{p}{mc} = \frac{cp}{E} \tag{6-20}$$

Ni las fuerzas ni las aceleraciones intervendrían en esta etapa de nuestra discusión.

Empezaremos considerando algunos problemas sobre choques en los que intervengan fotones, ya que como carecen de masa en reposo, las ecuaciones que resultan son menos complicadas.

ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE FOTONES

Absorción

Supongamos que una partícula en reposo (por ejemplo, un átomo o un núcleo) con una masa (masa en reposo) M_0 es alcanzada por un fotón (un cuanto) de energía Q , el cual es completamente absorbido. El sistema así formado poseerá una masa M' y retrocederá con una velocidad v . En consecuencia, se tendrá:

Conservación de la energía:

$$E = M_0c^2 + Q = M'c^2$$

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$p = Q/c = M'v$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} M' &= M_0 + Q/c^2 \\ \beta &= v/c = Q/(M_0c^2 + Q) \end{aligned} \tag{6-21}$$

Observar que cuando $Q \ll M_0c^2$ resulta simplemente que $\beta \approx Q/M_0c^2$, lo cual corresponde al tipo de cálculo newtoniano en donde un cuerpo con una masa invariable M_0 recibe un impulso de valor Q/c por el fotón.

Emisión

Considérese un átomo en reposo con una masa M_0 que emite un fotón de energía Q . Este caso es más complicado que el del ejemplo anterior, puesto que el átomo emisor experimenta un retroceso. Supongamos que el átomo que retrocede posee una masa M' (y una masa en reposo M'_0) y una velocidad v . Entonces

$$\begin{aligned} E &= M_0c^2 = M'c^2 + Q = E' + Q \\ p &= 0 = M'v - Q/c = p' - Q/c \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} E' &= M_0c^2 - Q \\ cp' &= Q \end{aligned}$$

Despejaremos Q de estas ecuaciones haciendo uso de la relación entre E' y p' para el átomo que retrocede. Utilizando la ecuación (6-19) tenemos

$$\begin{aligned} (M'_0c^2)^2 &= (E')^2 - (cp')^2 \\ &= (M_0c^2 - Q)^2 - (Q)^2 \end{aligned}$$

es decir,

$$(M'_0c^2)^2 = (M_0c^2)^2 - 2M_0c^2Q \quad (6-22)$$

Ahora bien, M_0c^2 y M'_0c^2 , energías en reposo del átomo en sus estados inicial y final, poseen ciertos valores definidos y la diferencia entre ellos es una energía fija bien definida. Hagamos, por tanto,

$$M'_0c^2 = M_0c^2 - Q_0 \quad (6-23)$$

Entonces,

$$(M'_0c^2)^2 = (M_0c^2)^2 - 2M_0c^2Q_0 + Q_0^2 \quad (6-24)$$

Al combinar las ecuaciones (6-22) y (6-24), resulta

$$Q = Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2M_0 c^2} \right) \quad (6-25)$$

Como la energía del fotón es proporcional a la frecuencia, la energía correspondiente disminuye y la longitud de onda aumenta. Únicamente si se pudiera impedir de alguna manera que el átomo emisor retrocediese se transmitiría íntegramente al fotón la energía total desprendida, Q_0 .

Estos resultados poseen importantes implicaciones físicas, ya que imponen restricciones a la capacidad de los átomos y de los núcleos para reabsorber sus propias radiaciones características. Cuando se estimula adecuadamente un elemento cualquiera (como en el caso de un tubo de descarga eléctrica) se consigue que éste emita un espectro de líneas característico —por ejemplo, la serie de Balmer del hidrógeno. Estas líneas presentan una gran definición, es decir, cada línea presenta una dispersión de longitudes de onda con una desviación muy pequeña con respecto a un cierto valor medio. Esta definición expresa el hecho de que los propios átomos emisores no pueden existir en estados con una energía arbitraria, sino que están restringidos a una serie de niveles de energía determinados. La emisión de un fotón corresponde a una cierta disminución en la masa o en la energía de un átomo, tal como lo describe la ecuación (6-23), cuando el átomo pasa de un estado A a un estado B . El fotón, en cambio, es despojado de una pequeña fracción de esta energía por el retroceso atómico. Por tanto, si uno de estos fotones tropieza con otro átomo semejante que se encuentre en su estado inferior B y en reposo no hay energía suficiente para llevar al átomo de nuevo al estado A (y la situación empeora además, ya que, por otra parte, el proceso de absorción involucra a su vez un retroceso). Si los estados de energía de los átomos estuviesen *perfectamente* definidos y si los átomos emisores y receptores estuviesen ambos inicialmente en reposo un vapor sería transparente a su propia radiación. Sin embargo, es evidente que la situación que hemos descrito está muy alejada de la realidad debido a dos factores. Por un lado, los niveles de energía atómicos no están perfectamente definidos y los átomos de un vapor poseen movimientos térmicos que pueden enmascarar por completo los efectos de retroceso si las velocidades poseen el valor adecuado. De hecho, en el caso de la luz visible, los movimientos térmicos enmascaran por completo el efecto. En el caso de los fotones de energía mucho mayor, que son emitidos por los núcleos en forma de rayos γ , el efecto de retroceso es, relativamente, mucho más mar-

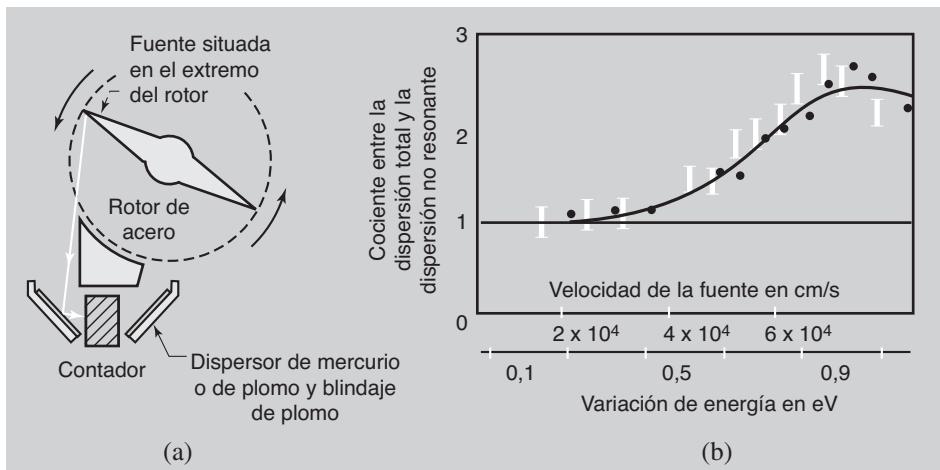


Fig. 6-3. Demostración de la dispersión resonante de núcleos por átomos de ^{198}Hg que retroceden libremente. (a) Esquema del aparato. (b) Relación entre la dispersión por el mercurio y la dispersión por el plomo representada en función de la velocidad del extremo del rotor [P. B. Moon, Proc. Phys. Soc. (Londres) **A64**, 76 (1951); W. G. Davey y P. B. Moon, Proc. Phys. Soc. (Londres), **A66**, 956 (1953)]. Es imposible dibujar la curva de resonancia en su totalidad, ya que el rotor de acero no aguanta las tensiones debidas a las fuerzas centífugas en el caso de velocidades elevadas.

cado [observar que, de acuerdo con la ecuación (6-25), la expresión del corrimiento *relativo* de energía es igual a $Q_0/2M_0c^2$, es decir, ésta aumenta proporcionalmente a Q_0 para un valor dado de M_0]. A continuación referiremos un experimento que confirma lo anterior.

El experimento en cuestión fue llevado a cabo por P. B. Moon, con la ayuda de un rotor de velocidad ultrarrápida. En la figura 6-3(a) se muestra la disposición de los elementos. En la punta del rotor se dispuso una fuente radiactiva de átomos excitados de ^{198}Hg . Los rayos gamma (cuyos fotones poseen una energía de 412 keV) emitidos por la fuente en movimiento incidían sobre un blanco en reposo de mercurio, siendo dispersados una pequeña fracción a un contador y, por tanto, quedaban detectados. La dispersión, al igual que la absorción, es máxima cuando la energía es suficiente para llevar el núcleo alcanzado a un nivel superior. El experimento mostró [véase la figura 6-3(b)] que esta condición se alcanzaba para una velocidad de la fuente de unos 700 m/s para el ^{198}Hg .

Está claro que el retroceso nuclear representa una fracción extremadamente pequeña de la energía liberada. Viene determinado por el cociente $Q_0/2M_0c^2$ que aparece en la ecuación (6-25), y para el caso en discusión tenemos

$$Q_0 = 4,12 \times 10^5 \text{ eV}$$

$$M_0 = 198 \text{ u} = 3,28 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

$$M_0c^2 = 2,95 \times 10^{-8} \text{ joule} = 1,84 \times 10^{11} \text{ eV}$$

$$Q_0/2M_0c^2 \approx 10^{-6}$$

Puede observarse que para los fotones de la luz visible, con $Q_0 \approx 2 \text{ eV}$, el efecto es aún menor en cinco órdenes de magnitud.

Cada fotón retrocede, pues, en dos ocasiones: una vez cuando se emite y otra cuando se absorbe o se dispersa. El factor $(1 - Q_0/2M_0c^2)$ debe aplicarse en ambas ocasiones y la velocidad que debe darse a la fuente debe ser suficiente para compensar la fracción Q_0/M_0c^2 de la energía de excitación original que se pierde. El cálculo de la velocidad necesaria puede efectuarse considerando la teoría cinemática del efecto Doppler (capítulo 5). Como el retroceso nuclear es muy pequeño, la frecuencia ν , y en consecuencia la energía $h\nu$, de la radiación aumenta según la fracción v/c con mucha aproximación, como en el caso de cualquier tipo de fuente que se mueva hacia un observador a una velocidad v mucho menor que c . Por tanto, se cumple entonces que

$$v/c \approx Q_0/M_0c^2$$

Al sustituir los valores de Q_0 , M_0 y c obtenemos

$$v/c = 2,24 \times 10^{-6}$$

es decir,

$$v \approx 670 \text{ m/s}$$

El pico de la curva de dispersión observada posee muy aproximadamente este mismo valor.

EL EFECTO MÖSSBAUER

Quizá parezca que el retroceso atómico o nuclear sea una característica ineludible de la emisión de fotones. Sin embargo, no ocurre así. Existe un

efecto muy notable (que lleva el nombre de R. Mössbauer, quien recibió el premio Nobel en 1961 por descubrirlo) según el cual el retroceso puede suprimirse por completo en el caso de los átomos de una red cristalina. Lo que ocurre es que, bajo ciertas circunstancias, la cantidad de movimiento del retroceso asociada a la emisión y a la absorción de un rayo nuclear γ se efectúa por todos los átomos del cristal y no por un solo núcleo. Aun cuando el cristal sea de un tamaño minúsculo, desde el punto de vista macroscópico, contiene una cantidad tan sumamente elevada de átomos (por ejemplo, de 10^{10} en el caso de un cristal cuyo volumen sea $1 \mu^3$) que el cociente $Q_0/2M_0c^2$ en la ecuación (6-25) puede decirse que prácticamente tiende a cero. En el caso del isótopo del iridio ^{191}Ir (con el cual Mössbauer llevó a cabo sus experimentos iniciales) la energía desprendida, Q_0 , vale 129 keV, es decir, alrededor de 2×10^{-14} joule. Si tomamos M_0 como la masa de 10^{10} átomos de iridio, es decir, alrededor de 3×10^{-15} kg, tenemos que

$$\frac{Q_0}{2M_0c^2} \approx \frac{2 \times 10^{-14}}{2 \times 3 \times 10^{-15} \times 9 \times 10^{16}} \approx 3 \times 10^{-17}$$

Ahora bien, ya hemos señalado anteriormente que la existencia de un retroceso atómico o nuclear no garantiza por sí misma que los fotones emitidos no puedan ser reabsorbidos por átomos semejantes. Podemos entonces introducir el valor de una energía Q_0 que caracteriza la diferencia de energías en reposo del átomo en sus estados normal y excitado, pero éste es sólo un valor altamente probable. El átomo excitado posee una probabilidad finita de ser formado a partir del estado inferior si la absorción de energía se aproxima a Q_0 en lugar de valer exactamente esta cantidad. Esta "anchura" característica de un estado atómico o nuclear es algo muy particular. Si la anchura es muy pequeña la absorción presenta una especie de sintonía muy fina. Es en estos casos, en los cuales el más ligero corrimiento de energías hace imposible la reabsorción, donde el efecto Mössbauer adquiere el carácter de fenómeno espectacular. En el caso del ^{191}Ir , los rayos γ de 129 keV libres de retroceso poseen energías comprendidas dentro de un margen aproximado de 5×10^{-6} eV. Por consiguiente,

$$\frac{\Delta Q}{Q_0} = \frac{5 \times 10^{-6}}{10^5} \approx 5 \times 10^{-11}$$

Notemos en primer lugar que este cociente es inferior en varios órdenes de magnitud al cociente $Q_0/2M_0c^2$, puesto que para M_0 tomamos la masa de un

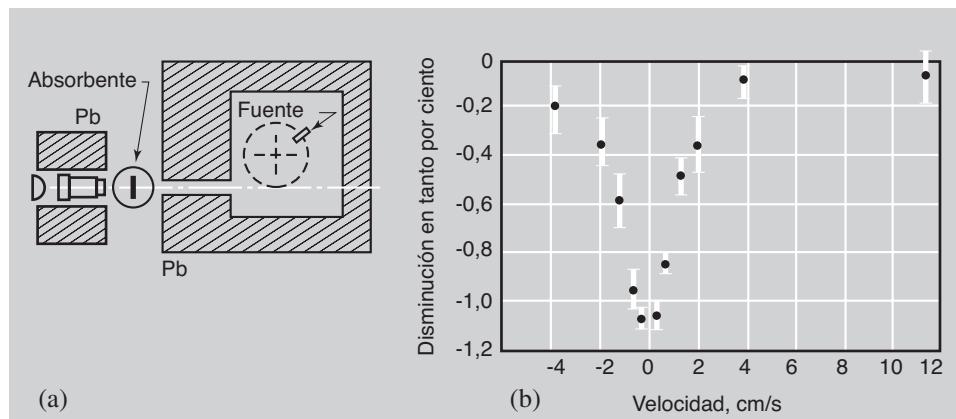


Fig. 6.4. Efecto Mössbauer. (a) Dispositivo experimental. El detector D está protegido de la fuente excepto cuando esta última se mueve según la línea recta que atraviesa el largo agujero efectuado en la coraza protectora. (b) Diferencia de intensidades, expresada en tanto por ciento, entre los rayos γ de 129 keV del ^{191}Ir [medidas] detrás de un medio absorbente resonante (iridio) y un medio absorbente de comparación (de platino).

solo átomo. Por tanto, la reabsorción de estos rayos gamma sería imposible si el núcleo emisor o el núcleo absorbente pudieran retroceder libremente. Por otro lado, el valor de $\Delta Q/Q_0$ es superior en muchos órdenes de magnitud a $Q_0/2M_0c^2$, si por M_0 tomamos la masa de miles de millones de átomos. Por tanto, si los núcleos excitados de ^{191}Ir que emiten los rayos gamma y los núcleos normales de ^{191}Ir que los absorben, están incrustados ambos en redes cristalinas, los efectos del retroceso son despreciables por completo y la absorción puede tener lugar.

Sin embargo, es aquí donde aparece la característica realmente sorprendente. El cociente $\Delta Q/Q_0$ es tan minúsculo que al introducir una pequeñísima velocidad relativa entre la fuente y el receptor resulta posible, debido al corrimiento Doppler resultante, el destruir la condición para la reabsorción. En el caso del ^{191}Ir tenemos que

$$\frac{v}{c} \left(= \frac{\Delta Q}{Q_0} \right) \approx 5 \times 10^{-11}$$

y en consecuencia,

$$v \approx 2 \text{ cm/s}$$

velocidad que es ligeramente superior a la de un caracol.

La figura 6-4(a) muestra la disposición experimental empleada por Mössbauer para demostrar el efecto. La fuente se montó sobre una plataforma que giraba lentamente. La figura 6-4(b) muestra los resultados obtenidos en este experimento concreto. Se trata de un fenómeno realmente notable, que ha podido comprobarse también para un número bastante elevado de emisores de rayos γ de baja energía. Algunos de ellos muestran una sensibilidad aún mayor que la del ^{191}Ir para el movimiento relativo de la fuente y el receptor. Sin embargo, el lector deberá consultar por su cuenta algunas de sus maravillosas aplicaciones.¹ El extraordinario interés que posee el efecto Mössbauer ha motivado que nos hayamos entretenido en su estudio. A pesar de que nuestro tema era en realidad el retroceso que acompaña a la emisión de fotones, hemos dedicado una sección entera al estudio de aquellos retrocesos que no tienen lugar.

EL COHETE DE FOTONES²

Los interesados en los viajes espaciales han propuesto en ocasiones el empleo de la radiación para impulsar las naves espaciales. La propuesta se basaba, al menos en parte, en que el empuje de un cohete es proporcional a la velocidad del combustible expulsado; por tanto, introducir $c (3 \times 10^8 \text{ m/s})$ en lugar de las velocidades del orden de los 10^4 m/s que representan el límite alcanzable en el caso de los propulsores líquidos, representa una enorme ventaja. El hecho de comunicar a una nave espacial una velocidad lo suficientemente próxima a c como para poder ofrecer a los viajeros las ventajas de una enorme dilatación de tiempos en un largo viaje interestelar sería altamente sugestivo.

Supongamos que partimos con un cohete con una masa en reposo m_0 que posee una carga cuya masa en reposo es igual a cierta fracción f de m_0 . Partiendo del reposo, la carga de la nave alcanza una velocidad v . Una cantidad total de energía radiada, E_r , marcha en sentido opuesto. Haciendo uso de las ecuaciones que expresan la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento tenemos entonces que

$$E_{\text{total}} = m_0 c^2 = \frac{f m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + E_r$$

$$p_{\text{total}} = 0 = \frac{f m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - \frac{E_r}{c}$$

¹ Véase, por ejemplo, la excelente descripción que realiza H. Lustig, en *Am. J. Phys.*, 29, 1-18 (1961).

² Hacemos constar nuestro agradecimiento a J. R. Pierce, *Proc. IRE*, 47, 1053-1061 (1959).

Eliminando E_r , entre ambas ecuaciones, obtenemos

$$m_0c^2 = \frac{fm_0c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{fm_0vc}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

es decir,

$$\gamma f + \gamma\beta f = 1 \quad \text{en donde } \beta = v/c, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (6-26)$$

Supongamos que se efectúa el proyecto para un valor dado del factor de dilatación de tiempo γ , y despejamos f de la ecuación (6-26). Ahora bien, β y γ están relacionados entre sí por la ecuación

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\beta^2 &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} \\ \gamma\beta &= (\gamma^2 - 1)^{1/2}\end{aligned}$$

La ecuación (6-26) puede escribirse entonces de la forma

$$\gamma f + (\gamma^2 - 1)^{1/2}f = 1$$

Con lo que se obtiene para f la siguiente ecuación:

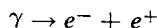
$$f^2 - 2\gamma f + 1 = 0$$

Sea, por ejemplo, $\gamma = 10$, con lo cual, la dilatación de tiempos pasa a desempeñar un papel realmente importante en el caso de un largo y aburrido viaje interestelar. Encontramos entonces $f \approx 0,05$. Pero supongamos que debido a un sentimiento humanitario deseamos que los viajeros espaciales regresen. Esto implicará tener que pasar por tres etapas más del mismo tipo, puesto que tenemos que hacer que la nave se detenga, se vuelva a acelerar para el viaje de regreso y, por último, se pare al llegar a la Tierra. La masa del sistema que retorna podrá ser sólo una fracción f^* de la masa original m_0 —es decir, en el caso del ejemplo que hemos elegido, inferior a $10^{-5}m_0$. Bien mirado el resultado no resulta demasiado prometedor.

LA CREACIÓN DE PARTÍCULAS

Quizás una de las posibilidades más notables entre todas las que sugiere la equivalencia masa-energía es la creación de partículas nuevas, si se dispone de una cantidad adecuada de energía. Una parte importante de toda la actividad que se lleva a cabo hoy día en el terreno de la física descansa en este fenómeno y está encaminada, en especial, a la creación y al estudio de partículas que poseen una vida demasiado corta para poderse encontrar libremente en la Naturaleza. Para crear una partícula de masa en reposo m_0 se necesitará, evidentemente, una energía de valor m_0c^2 , al menos. En la práctica debe emplearse una energía superior a ésta, y en una gran cantidad de casos una energía muchísimo mayor. El motivo de ello es doble:

1. Existen leyes de conservación fundamentales por encima de aquellas que rigen para la energía y la cantidad de movimiento, las cuales hacen que en muchos casos sea imposible la creación de una partícula nueva mediante un proceso de choque. La ley más conocida de éstas es la que se refiere a la conservación de la carga eléctrica. Por ejemplo, el primero de los procesos que se descubrió fue la creación de una pareja electrón-positrón a partir de la energía de un fotón de rayos γ :¹

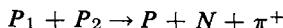


Aunque, basándonos en consideraciones energéticas, cabría pensar que un rayo γ de 0,51 MeV fuese suficiente para obtener la energía de la masa en reposo de un electrón, el único tipo de proceso permitido en la Naturaleza requiere, al menos, el doble de esta cantidad.

De hecho, a pesar de que la conservación de la carga se cumple siempre en estas transformaciones, no es en modo alguno la única restricción. Por ejemplo, podría creerse posible la creación de los constituyentes de un átomo de hidrógeno neutro —un protón y un electrón— haciendo uso de la energía de un solo fotón (≥ 938 MeV). Sin embargo, este proceso no ha sido observado. Sigue que muchos tipos de partículas (entre las que cabe incluir los electrones, los protones y los neutrones) no pueden ser creados sin que aparezcan también las llamadas antipartículas —partículas con masa en reposo igual pero con carga eléctrica, momento magnético, etc., de signo opuesto. Al crearse un neutrón, aun cuando se trata de una partícula sin carga, se crea también un antineutrón (que difiere de él en el signo del momento magnético).

¹ Observado en primer lugar por C. D. Anderson en 1932. Se le concedió el premio Nobel en reconocimiento a esta investigación en el año 1936.

2. La otra razón de que la energía necesaria para la creación de partículas sea mayor es de orden puramente práctico. Surge del hecho de que el proceso de creación tiene lugar normalmente a partir de choques de alta energía entre partículas preexistentes. Así, por ejemplo, los mesones π cargados positivamente (piones) pueden obtenerse mediante bombardeo de un blanco de hidrógeno con protones de elevada energía:



Los protones que intervienen en el choque, P_1 y P_2 , dan origen a un protón, un neutrón y un pion, como se indica. (El mesón π es una partícula que puede crearse aisladamente, sin una antipartícula asociada.) Puesto que el neutrón y el protón poseen una masa en reposo casi igual, la única energía en reposo nueva que se necesita es la representada por el pion, de unos 140 MeV. Pero si el protón utilizado de blanco, P_2 , se encuentra inicialmente en reposo y P_1 posee una gran cantidad de movimiento, interviene en el citado movimiento de todo el sistema una gran cantidad de energía cinética, la cual no está disponible para la conversión en masa en reposo de partículas nuevas.

Está claro que (2) no representa, en principio, una limitación fundamental. Si se pudiera lograr que las partículas P_1 y P_2 chocasen entre sí con una cantidad de movimiento igual y opuesta, la cantidad de movimiento asociada al movimiento general del sistema sería nula. Toda la energía cinética del choque estaría disponible entonces para la creación de partículas. La producción de chorros de partículas que marchen en sentidos opuestos y que entren en colisión es mucho más difícil desde el punto de vista técnico que el conseguir que un chorro de partículas incida sobre un blanco en reposo, pero como veremos los resultados pueden ser muy interesantes.

Consideremos ahora en detalle alguno de estos procesos de creación de partículas.

Creación de piones

Con independencia de que tengamos o no dos chorros de partículas que choquen, podemos *suponer* siempre que estamos situados en un sistema de referencia en el cual la cantidad de movimiento total es nula. Supongamos que actuamos así en el caso de dos protones que chocan, lo cual significa que ambos poseen una cantidad de movimiento igual y de signo contrario, $\pm p$, y una energía total $2mc^2$ [fig. 6-5(a)]. Cabe esperar que en este sistema con una cantidad de movimiento nula lleguemos a un estado final representado por la figu-

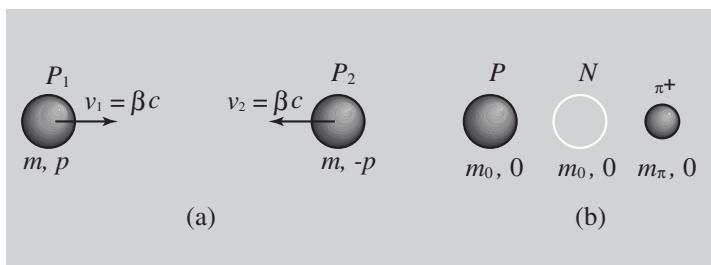


Fig. 6-5. (a) Dos protones chocan con velocidades iguales y opuestas en el sistema con cantidad de movimiento nula. (b) Estado final de este sistema en el umbral para la producción del pion, formado por un protón, un neutrón y un mesón π^+ en reposo.

ra 6-5(b), en el cual todas las partículas se encuentran en reposo. Éste será el caso más ventajoso, desde el punto de vista económico, para la creación de partículas, puesto que no se desaprovecha nada en energía cinética, y tenemos que

$$E = 2mc^2 = 2m_0c^2 + m_\pi c^2$$

en donde m_0 es la masa en reposo de un nucleón —es decir, de un protón o un neutrón, sin tener en cuenta la ligera diferencia que existe entre sus masas— y m_π es la masa en reposo de un pion cargado.¹ Por tanto, tenemos que

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{m}{2m_0}$$

Haciendo $m_\pi = 273m_e$, $m_0 = 1837m_e$, se obtiene $m/m_0 = 1,074$, y $m_0/m = 0,93$. Podemos utilizar este valor de m_0/m para fijar la velocidad (β) de cada protón en el sistema de referencia con una cantidad de movimiento nula, puesto que

$$m/m_0 = \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (6-27)$$

$$\beta^2 = 1 - (m_0/m)^2 = 0,135$$

$$\beta \approx 0,37$$

¹ Tomando la masa del electrón como unidad, la masa del protón es 1836,1 y la masa del neutrón es 1838,6, existiendo, por consiguiente una diferencia de sólo el 0,14 %. La masa de un pion cargado (+ o -) es 273,2m_e. (Los piones neutros son de sólo 264,2m_e.)

Ahora bien, si el protón P_2 se encuentra en reposo en el sistema de referencia del laboratorio, el sistema con una cantidad de movimiento nula debe poseer una velocidad β relativa al laboratorio. Por tanto, el protón P_1 , que posee una velocidad β en el sistema con una cantidad de movimiento nula, posee una velocidad β_1 en el sistema de referencia del laboratorio, que viene dada por

$$\beta_1 = \frac{\beta + \beta}{1 + \beta^2} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \approx 0,65$$

de acuerdo con el teorema relativista para la adición de velocidades [véase la ecuación (6-7)]. Tenemos entonces que

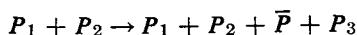
$$\gamma_1 = (1 - \beta_1^2)^{-1/2} \approx 1,31$$

Esto significa que el protón empleado para el bombardeo debe poseer una energía *cinética* de valor $(\gamma_1 - 1)m_0c^2$ o bien $0,31m_0c^2$. La energía en reposo de un nucleón es de 938 MeV, y por tanto la energía cinética necesaria es de unos 290 MeV, es decir, más del doble de la energía en reposo del pion así creado. Si hubiésemos podido despreciar el aumento relativista de la masa con la velocidad para los protones el factor hubiese sido 2 exactamente. (Compruebe el lector que, efectivamente, sucede así.)

La energía necesaria para el bombardeo que hemos calculado se denomina *energía umbral* para el proceso. Un valor inferior a éste resultaría insuficiente, y en la práctica el bombardeo se efectúa con energías bastante superiores a las del umbral, puesto que esto eleva el rendimiento del proceso —es decir, la probabilidad de que en un choque protón-protón se cree efectivamente un pion. Sin embargo, esta última afirmación da origen a preguntas que caen fuera de nuestra discusión actual, que está limitada estrictamente a la dinámica de los choques y al cálculo de las energías de umbral. La figura 6-6 es una fotografía de una cámara de burbujas en la que se muestra el tipo de evidencia de la que puede inferirse el proceso de creación de partículas.

Creación de antiprotones

Hemos mencionado anteriormente que el antiproton cargado negativamente no puede crearse sin engendrar también al mismo tiempo una antipartícula, es decir, otro protón del tipo corriente. Resulta posible la creación de una pareja protón-antiproton mediante un choque protón-protón. La reacción puede escribirse



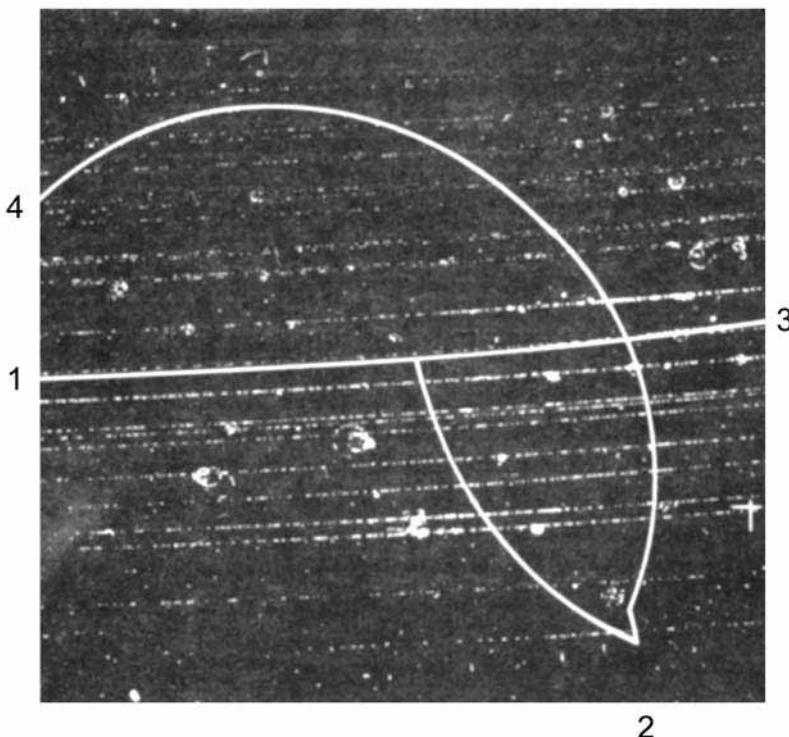


Fig. 6-6. Fotografía de una cámara de niebla en la que puede verse la creación de un mesón π^+ a través del proceso $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$, empleando protones de unos 3 GeV y una cámara de niebla de hidrógeno líquido. El protón incidente (1) choca con un protón en el hidrógeno líquido, produciéndose un π^+ (2), un protón (3) y un neutrón (que no deja rastro alguno). El π^+ es reconocido por su desintegración posterior a consecuencia de la cual se produce un mesón μ^+ (recorrido corto) que se desintegra a su vez y da lugar a un positrón (4). Todas las trayectorias se curvan por un fuerte campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la figura. Las trayectorias de interés están convenientemente acentuadas (Laboratorio Nacional de Brookhaven).

en donde \bar{P} es el antiproton y P_3 es el protón ordinario asociado. Por tanto, aun antes de considerar la energía cinética no disponible, sabemos que habrá que suministrar, al menos, el doble de la energía en reposo de la partícula deseada. La manera más eficaz para obtener antiprotones mediante choques protón-protón es alcanzando un estado final como el supuesto en el caso de la creación de piones, es decir, un estado en el que todas las partículas se encuentren en reposo en algún sistema de referencia. El que tengamos cuatro

partículas después del choque (tres protones y un antiproton), en lugar de tres, no complica grandemente los cálculos. De hecho, el que todas las partículas posean la misma carga en reposo m_0 hace que el problema sea más sencillo de tratar desde el punto de vista matemático.

La figura 6-5(a) puede emplearse de nuevo para representar el estado inicial en el sistema con cantidad de movimiento nula. La energía total en este sistema debe ser igual a (o mayor que) la energía en reposo de cuatro nucleones. Por tanto, en el umbral tenemos que

$$E = 2mc^2 = 4m_0c^2$$

La ecuación (6-27) nos da

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = m/m_0 = 2 \quad \text{en donde } \beta^2 = \frac{3}{4}$$

Si suponemos de nuevo que el protón P_2 es un protón que desempeña el papel de blanco y se encuentra en reposo en el sistema de referencia del laboratorio, la velocidad que necesita llevar P_1 en el laboratorio viene dada de nuevo por

$$\beta_1 = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$$

En esta ocasión, en lugar de calcular β_1 , procederemos a calcular directamente el valor correspondiente de γ_1 :

$$\frac{1}{\gamma_1^2} = 1 - \beta_1^2 = \frac{(1 + \beta^2)^2 - (2\beta)^2}{(1 + \beta^2)^2} = \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 + \beta^2)^2}$$

Por tanto,

$$\gamma_1 = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1 + 3/4}{1 - 3/4} = 7$$

El protón utilizado para el bombardeo debe poseer, por tanto, una energía total de $7m_0c^2$, es decir, una energía cinética de $6m_0c^2$. Puesto que la energía en reposo de un protón es 0,938 GeV (BeV), se necesita un rayo de protones incidentes de, al menos, 5,62 GeV. Fue esto lo que condujo a la creación del bevatrón de la Universidad de California, primera fuente artificial de antiprotones (1955), diseñada para suministrar protones con una energía cinética de 6 GeV.

Producción de pares por fotones

En la figura 6-7 se muestra un interesante ejemplo de creación de un par electrón-positrón por un fotón de elevada energía. Las trayectorias en espiral casi simétricas que describen las partículas con carga de signo opuesto en un campo magnético muestran que, en este caso particular, el electrón y el positrón producidos poseían energías prácticamente iguales. No cabe duda alguna de que el fotón que creó este par procedía de la parte inferior de la figura aunque no dejó huella alguna de su paso, puesto que carecía de carga. Sin embargo, el proceso es más complejo de lo que parece. Puede creerse que un fotón, por sí mismo, se ha transformado espontáneamente en un electrón y un positrón. Sin embargo, esto es imposible desde el punto de vista dinámico, puesto que la cantidad de movimiento no se podría conservar. Para ver que efectivamente sucede así, téngase presente que cualquiera que sean las velocidades del electrón y del positrón en el laboratorio, siempre puede encontrarse un sistema de referencia en el cual sus cantidades de movimiento sean iguales y opuestas, de tal manera que la cantidad de movimiento total sea nula. Pero

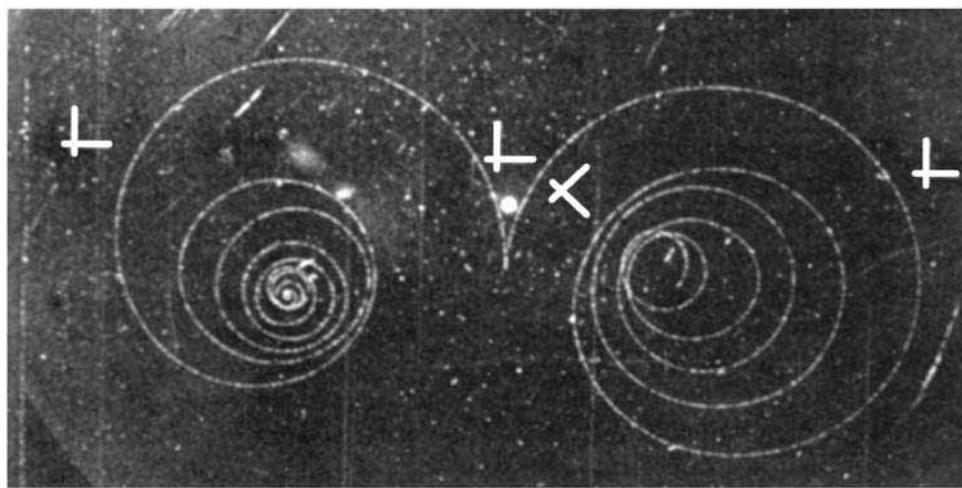


Fig. 6-7. Producción de una pareja electrón-positrón en una cámara de niebla de hidrógeno líquido en presencia de un campo magnético. (Foto cortesía del profesor Irwin Pless y del grupo de la cámara de niebla de Harvard-M.I.T.)

nunca podrá anularse la velocidad c de un fotón, y, aunque su cantidad de movimiento posea valores diferentes en sistemas distintos, nunca podrá valer cero. Por tanto, deberá haber otra partícula en el acto de creación de pares. Esta otra partícula puede ser un electrón o (más corrientemente) un núcleo atómico.

Si suponemos que la cuarta partícula es un núcleo, el análisis de la dinámica, al menos de manera aproximada, se simplifica bastante. Ocurre así, puesto que un núcleo puede absorber una gran cantidad de movimiento sin que, debido a la gran cantidad de masa que posee, trasvase una gran cantidad de energía cinética —considérese que en mecánica newtoniana la energía cinética de una partícula de masa m y cantidad de movimiento p vale $p^2/2m$ y puede hacerse muy pequeña si m es muy grande. Por tanto, puede decirse de manera aproximada que toda energía del fotón pasa al electrón y al positrón y que el núcleo se ocupa de equilibrar la cantidad de movimiento.

En la fotografía de la figura 6-7 la creación del par ha tenido lugar en una cámara de niebla de hidrógeno líquido. De la ausencia de cualquier otra huella visible de retroceso puede deducirse que la cuarta partícula presente en el proceso era un protón de uno de los átomos de hidrógeno, en lugar de un electrón. El rápido arrollamiento en espiral de las trayectorias del electrón y del positrón muestra que las partículas pierden energía con una gran rapidez al atravesar el hidrógeno líquido.

Este tipo de generación de pares por fotones con elevada energía no está limitado a los electrones, aunque la energía mínima de los fotones suele ser muy superior a los 1,02 MeV que representan el umbral para la creación de parejas electrón/positrón.

Resulta adecuado mencionar aquí otro proceso que puede considerarse como el inverso de la creación de pares. Se trata de la aniquilación mutua de una partícula y de su antipartícula correspondiente con la producción de energía radiante. Un positrón y un electrón se combinan y como resultado aparecen dos fotones. ¿Por qué dos y no uno solamente? La respuesta reside en la conservación de la cantidad de movimiento. Existe un sistema de referencia (por lo general el mismo laboratorio) en el cual la cantidad de movimiento total del sistema electrón-positrón es nula. Como mínimo deberemos tener dos fotones (con la misma energía y que marchen en direcciones opuestas dentro de este sistema) para mantener el equilibrio, tanto de la cantidad de movimiento como de la energía —en cualquier caso, si el electrón y el positrón al aniquilarse mutuamente, se encuentran aislados de manera efectiva de cualquier otra partícula.

DISPERSIÓN

Dentro de este breve estudio de los problemas de choques relativistas pasaremos a considerar seguidamente dos problemas sobre dispersión elástica —es decir, sobre choques elásticos entre partículas. Como el estudio de la dispersión es una de las principales herramientas para el estudio y la investigación de estructuras y fuerzas a escala atómica, será necesario familiarizarnos con la dinámica básica.

Dispersión elástica de partículas idénticas

En primer lugar consideraremos el choque entre dos partículas idénticas, como por ejemplo dos protones o dos electrones. De la mecánica newtoniana se conoce ya que si una partícula en reposo es alcanzada por una partícula idéntica y el choque es elástico, el ángulo que forman sus trayectorias subsiguientes es de 90° . En la figura 6-8 se muestra un ejemplo típico para un cho-

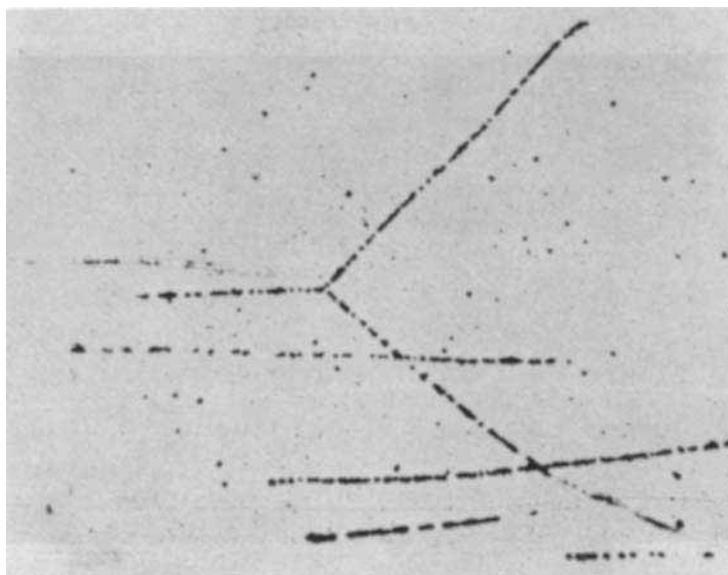


Fig. 6-8. *Dispersión elástica de un protón incidente con unos 5 MeV por un protón inicialmente en reposo en una emulsión fotográfica. El choque es "no-relativista" ($K/m_0c^2 \ll 1$) existiendo un ángulo de 90° entre las trayectorias de los protones después del choque.* (Tomado de C. F. Powell y G. P. S. Occhialini, *Nuclear Physics in Photographs*, Oxford Univ. Press, Nueva York.)

que protón-protón a baja energía ($K \approx 5$ MeV, $v/c \approx 0,1$) que tiene lugar cuando un protón incidente choca con un protón en reposo en uno de los átomos de hidrógeno de una emulsión fotográfica. Debido al aumento de la masa inercial con la velocidad, el resultado anterior deja de ser cierto en la denominada *región relativista* de las energías. Las direcciones aparentan juntarse y el ángulo que forman se hace menor que 90° .

Para mayor simplicidad nos limitaremos a considerar el caso especial en el que, después del choque, las dos partículas marchan simétricamente formando el mismo ángulo con la dirección de la partícula incidente (tal como se observa en el sistema de referencia del laboratorio S). Supongamos que la partícula incidente posee una energía total E_1 y una cantidad de movimiento \mathbf{p}_1 , y supongamos también que la cantidad de movimiento de las partículas después del choque es \mathbf{p}_2 , formando un ángulo $\pm \theta/2$ con \mathbf{p}_1 , como se muestra en la figura 6-9. Teniendo en cuenta la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, resulta

$$E_1 + E_0 = 2E_2 \quad (6-28)$$

$$p_1 = 2p_2 \cos \frac{\theta}{2} \quad (6-29)$$

También tenemos que

$$c^2 p_1^2 = E_1^2 - E_0^2 \quad c^2 p_2^2 = E_2^2 - E_0^2 \quad (6-30)$$

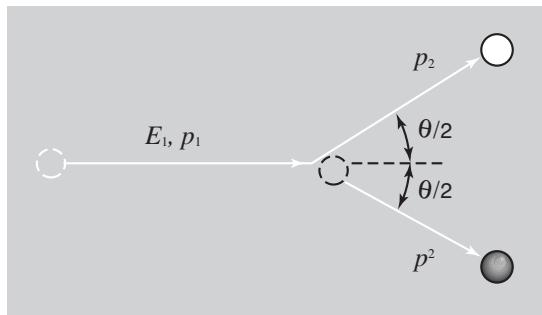


Fig. 6-9. Choque elástico relativista de una partícula con otra semejante inicialmente en reposo. El estado final se supone simétrico; las partículas poseen velocidades iguales y, por consiguiente, forman ángulos iguales con la dirección inicial de la partícula 1.

Resulta más cómodo el hacer intervenir la energía cinética K_1 de la partícula incidente, en la forma

$$E_1 = E_0 + K_1$$

De las ecuaciones (6-28) y (6-30) resulta:

$$\begin{aligned}c^2 p_1^2 &= (E_0 + K_1)^2 - E_0^2 = K_1(2E_0 + K_1) \\c^2 p_2^2 &= (E_0 + K_1/2)^2 - E_0^2 = K_1(E_0 + K_1/4)\end{aligned}$$

y al sustituir estas expresiones en la ecuación (6-29) obtenemos

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2E_0 + K_1}{4E_0 + K_1}$$

Haciendo ahora

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

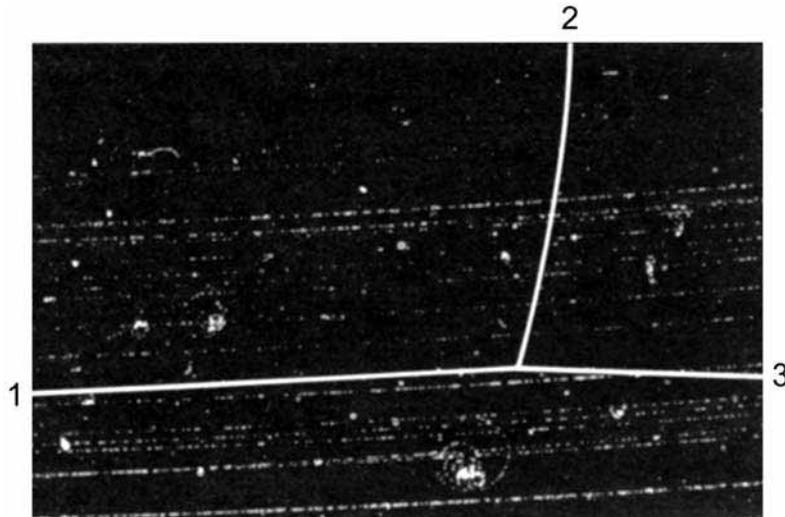


Fig. 6-10. Choque elástico protón-protón en una cámara de niebla de hidrógeno líquido a partir de protones incidentes de unos 3 GeV. El protón incidente entra por 1 y los dos protones que retroceden salen por 2 y 3. No puede saberse de antemano cuál era el fotón incidente. Las trayectorias de interés han sido destacadas. (Laboratorio Nacional de Brookhaven.)

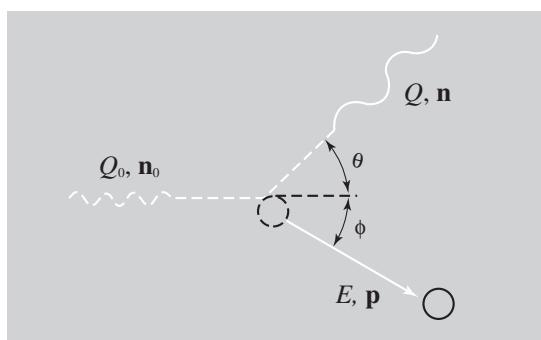


Fig. 6-11. *Efecto Compton. Un fotón incidente es dispersado y su energía experimenta una degradación como consecuencia de un choque elástico con un electrón inicialmente en reposo.*

encontraremos finalmente que

$$\cos \theta = \frac{K_1}{4E_0 + K_1} \quad (6-31)$$

Esta ecuación muestra claramente la variación del aspecto del choque al pasar de energías bajas a energías altas. Para $K_1 \ll E_0$ tenemos $\cos \theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$. Cuando $K_1 \gg E_0$ resulta $\cos \theta \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow 0$. Esta disminución relativista de los ángulos de dispersión fue comprobada experimentalmente por vez primera por F. C. Champion en 1932 para electrones rápidos (partículas β).¹ Utilizando una cámara de niebla estudió los choques elásticos de estos electrones con los electrones de los átomos de aire de la cámara. Desde esa fecha el efecto ha pasado a ser muy corriente en la física de partículas de alta energía. En la figura 6-10 se muestra una fotografía en una cámara de niebla de un choque de este tipo, poseyendo el protón incidente una energía equivalente a varias masas en reposo del protón.

El efecto Compton

De todos los fenómenos que ponen de relieve las propiedades corpusculares de los fotones, el efecto Compton es quizás el más directo y el más convincente. Consiste en el choque de un fotón con un electrón libre —lo que en la práctica

¹ F. C. Champion, *Proc. Roy. Soc. (Londres)*, **A 136**, 630 (1932).

significa un electrón que se encuentra poco ligado a un átomo y por tanto puede considerársele como efectivamente libre. El choque es elástico, en el sentido de que no existe trasvase alguno de energía cinética a otras formas, pero, puesto que el electrón retrocede, el fotón difundido posee una energía menor y, en consecuencia, una longitud de onda mayor que la del fotón incidente. El estudio sistemático de este fenómeno que a lo largo de los años 1919-1923 llevó a cabo A. H. Compton,¹ con el empleo de fotones de rayos X, le valió el premio Nobel en 1927.

El proceso de dispersión de Compton es, en esencia, un proceso de choque relativista y puede describirse de la manera siguiente. Un fotón de energía Q_0 choca con un electrón en reposo, el cual retrocede según la dirección dada por φ (fig. 6-11). El fotón se dispersa según la dirección θ con una energía Q . De la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento resulta

$$Q_0 + m_0 c^2 = E + Q \quad (6-32)$$

$$\mathbf{n}_0 Q_0 / c = \mathbf{n} Q / c + \mathbf{p} \quad (6-33)$$

en donde E y \mathbf{p} son la energía y la cantidad de movimiento del electrón que retrocede. Si lo que nos interesa es el fotón que se dispersa y no el electrón, procederemos de la manera siguiente:

$$(Q_0 - Q) + m_0 c^2 = E$$

$$(\mathbf{n}_0 Q_0 - \mathbf{n} Q) = \mathbf{c} \mathbf{p}$$

en donde \mathbf{n}_0 y \mathbf{n} son vectores unitarios según las direcciones inicial y final de los fotones, tal como se muestra en la figura. Elevando al cuadrado las expresiones anteriores (es decir, en el caso de la segunda expresión formando el producto escalar de cada miembro de la ecuación consigo mismo):

$$(Q_0 - Q)^2 + 2(Q_0 - Q)m_0 c^2 + (m_0 c^2)^2 = E^2 \quad (6-34)$$

$$Q_0^2 - 2Q_0 Q \cos \theta + Q^2 = c^2 p^2 \quad (6-35)$$

Restando la ecuación (6-34) de la (6-35),

$$2Q_0 Q(1 - \cos \theta) - 2(Q_0 - Q)m_0 c^2 = 0$$

¹ A. H. Compton, *Phys. Rev.*, **22**, 409 (1923).

Por lo cual,

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)$$

Si la energía cuántica es Q , la longitud de onda viene dada por

$$Q = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

y entonces, en función de la longitud de onda, el efecto Compton puede describirse mediante la ecuación siguiente:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad (6-36)$$

Para los electrones, $h/m_0 c = 0,02426 \text{ \AA}$, es decir, $2,4 \times 10^{-10} \text{ m}$. Lo que Compton hizo fue establecer que la longitud de onda de los rayos X dispersados verificaba la ecuación (6-36), considerando tanto su dependencia con el ángulo θ como el valor absoluto del corrimiento.¹ La figura 6-12 se obtuvo teniendo en cuenta la información publicada por Compton. Sin embargo, seguía siendo una cuestión del mayor interés el demostrar la naturaleza balística del choque, haciendo ver que el electrón que retrocedía aparecía conjuntamente con el fotón y según una dirección φ que venía definida unívocamente por la dinámica. Esta última característica fue demostrada convincentemente por Cross y Ramsey en 1950 utilizando fotones incidentes (rayos γ en este caso) que poseían una energía de 2,6 MeV muy bien definida. El experimento confirmó que el ángulo comprendido entre el fotón y el electrón después de la dispersión poseía el valor teórico dentro de un margen muy pequeño (ver la fig. 6-13). La coincidencia en el tiempo entre las partículas en un proceso de dispersión de Compton se considera válida para 10^{-11} segundos o aún menos.² Aunque 10^{-11} s no es un intervalo de tiempo particularmente pequeño, dentro de la escala de tiempos de los procesos atómicos, la estrecha asociación de un electrón con cada fotón dispersado se pone en evidencia claramente a la luz de este resultado.

¹ Esto último es importante, pues aun en el caso de considerar la radiación según la imagen ondulatoria clásica, se puede imaginar que la presión de radiación comunica a un electrón cierta velocidad. La radiación dispersada experimentará un corrimiento Doppler con la misma variación angular que la que expresa la ecuación (6-36). Sin embargo, la magnitud del corrimiento no estará definida muy precisamente, puesto que la velocidad del electrón aumentará continuamente a partir de cero.

² Z. Bay, V. P. Henri y F. McLernon, *Phys. Rev.*, **97**, 1710 (1955).

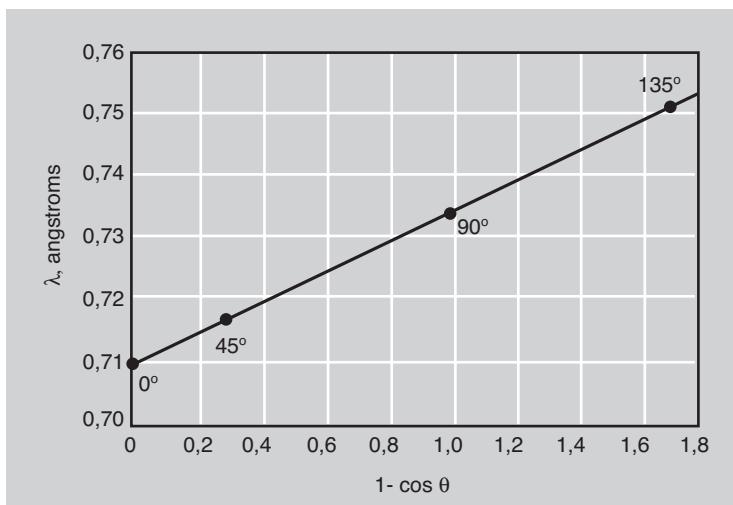


Fig. 6-12. Resultado del experimento original de A. H. Compton acerca de la dispersión de los rayos X mediante electrones efectivamente libres.

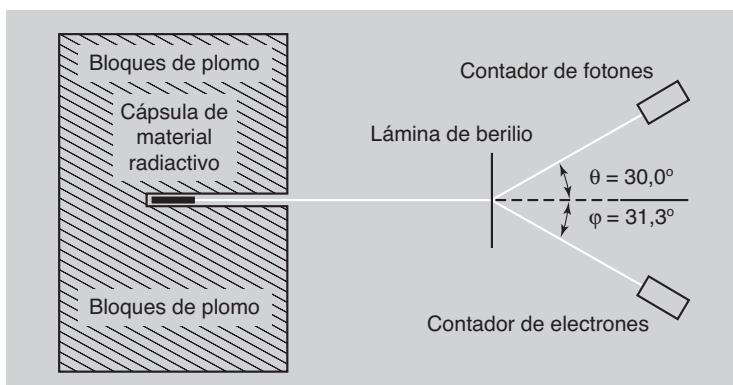


Fig. 6-13. Esquema del experimento llevado a cabo por Cross y Ramsey para verificar la dinámica total de un proceso de dispersión de Compton. Un estrecho haz de rayos gamma de 2,6 MeV, colimado mediante bloques de plomo, caía sobre una lámina delgada de berilio. Los fotones que se dispersaban 30° eran detectados por los destellos luminosos que producían en un cristal de antraceno. Los electrones asociados que retrocedían formando un ángulo de $31,3^\circ$ se detectaban de manera similar y un circuito de coincidencia registraba estos sucesos si eran simultáneos dentro de un margen de $1,5 \times 10^{-8}$ s. Cada cuenta representaba entonces un solo choque entre un fotón y un electrón. [Según W. G. Cross y N. F. Ramsey, Phys. Rev., 80, 929 (1950).]

EL EFECTO DOPPLER CONSIDERADO DE NUEVO

En el capítulo 5 consideramos el efecto Doppler desde un punto de vista exclusivamente cinemático. Nuestra alusión a este efecto en la discusión de la dispersión de los rayos γ al comienzo del capítulo fue también cinemática en esencia, aunque introducimos una consecuencia dinámica al tener en cuenta la proporcionalidad existente entre la frecuencia y la energía para los fotones. Aplicaremos ahora la argumentación energía-cantidad de movimiento al problema general de la emisión de fotones por una partícula en movimiento.

Supongamos que una partícula de masa M y cantidad de movimiento \mathbf{p} emite un fotón de energía Q' formando un ángulo θ con la dirección inicial del movimiento de M , tal como se muestra en la figura 6-14. La partícula, una vez emitida, posee una masa M' diferente y una cantidad de movimiento \mathbf{p}' que puede diferir tanto en valor como en dirección de la cantidad de movimiento inicial \mathbf{p} . Por tanto, tenemos que

$$Mc^2 = M'c^2 + Q' \quad (6-37)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{n}Q'/c \quad (6-38)$$

(en donde \mathbf{n} es un vector de longitud unidad según la dirección de las θ). Fijaremos nuestra atención en el fotón y no en la partícula que retrocede, y modificaremos adecuadamente las ecuaciones de manera que las cantidades no deseadas sean eliminadas. La manera de hacerlo es la siguiente. Escribamos las ecuaciones (6-37) y (6-38) de esta forma:

$$Mc^2 - Q' = M'c^2 \quad (6-39)$$

$$c\mathbf{p} - \mathbf{n}Q' = c\mathbf{p}' \quad (6-40)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (6-39) y formando el producto escalar de cada miembro de la ecuación (6-40) consigo mismo obtenemos

$$(Mc^2)^2 - 2Mc^2Q' + (Q')^2 = (M'c^2)^2 \quad (6-41)$$

$$(c\mathbf{p} - \mathbf{n}Q') \cdot (c\mathbf{p} - \mathbf{n}Q') = (c\mathbf{p}') \cdot (c\mathbf{p}')$$

es decir,

$$(cp)^2 - 2cQ'(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) + (Q')^2 = (cp')^2$$

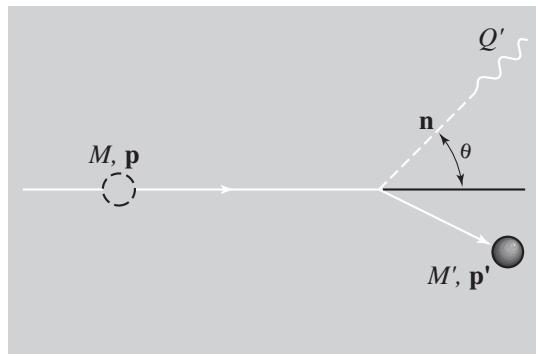


Fig. 6-14. Efecto Doppler, considerado dinámicamente en función de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

o bien

$$(cp)^2 - 2cpQ' \cos \theta + (Q')^2 = (cp')^2 \quad (6-42)$$

Restando la ecuación (6-42) de la (6-41):

$$\begin{aligned} [(Mc^2)^2 - (cp)^2] - 2Mc^2Q'[1 - (p/Mc) \cos \theta] \\ = (M'c^2)^2 - (cp')^2 \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} (Mc^2)^2 - (cp)^2 &= (M_0c^2)^2 \\ (M'c^2)^2 - (cp')^2 &= (M'_0c^2)^2 \end{aligned}$$

y

$$p/Mc = v/c = \beta$$

Por lo que

$$(M_0c^2)^2 - 2Mc^2Q'(1 - \beta \cos \theta) = (M'_0c^2)^2 \quad (6-43)$$

Siguiendo la notación empleada en nuestra discusión anterior más restringida acerca de la emisión de fotones, designaremos la disminución de la energía en reposo mediante Q_0 , de manera que

$$M'_0c^2 = M_0c^2 - Q_0$$

Por tanto,

$$(M_0c^2)^2 - (M_0'c^2)^2 = 2M_0c^2Q_0 - Q_0'^2$$

Con lo que la ecuación (6-43) nos da

$$2Mc^2Q'(1 - \beta \cos \theta) = 2M_0c^2Q_0(1 - Q_0/2M_0c^2)$$

o bien

$$Q' = \frac{M_0}{M} \frac{Q_0(1 - Q_0/2M_0c^2)}{1 - \beta \cos \theta}$$

Ahora bien, $M_0/M = (1 - \beta^2)^{1/2}$, por lo que finalmente resulta

$$Q'(\beta, \theta) = Q \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (6-44)$$

en donde Q es la energía del fotón para $v = 0$, dada por la ecuación (6-25) en nuestro análisis de este caso especial.

En la ecuación (6-44) se expresa la energía de un fotón emitida en cualquier dirección θ desde una fuente en movimiento, incluyendo los efectos del retroceso. La forma es exactamente análoga a la que se obtuvo en el caso del estudio cinemático de la relación entre la frecuencia recibida ν' con la frecuencia propia ν para una fuente en movimiento.

$$\nu' = \nu \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos \theta}$$

[ver la ecuación (5-17)]¹.

¹ ¿Debe decirse sencillamente "está claro" a la vista de que la energía del fotón y la frecuencia presentan una dependencia exactamente igual con respecto a la velocidad y el sentido de movimiento de la fuente? La imagen cuántica de la radiación electromagnética recibiría, ciertamente, un duro golpe si no existiese esta similitud. Y quizás pueda expresarse esto de una manera mucho más radical. Suponga el lector que él mismo poseyese una firme convicción sobre la validez de la teoría de la relatividad y que se pusiese entonces a especular acerca de la cuantización de la energía radiante. Al comparar las expresiones para Q' y ν' se vería prácticamente forzado a concluir que la energía cuántica y la frecuencia deben ser proporcionales entre sí —en otras palabras, para que la idea cuántica posea algún sentido debe ser $E/\nu = \text{constante}$ por necesidad. (La relatividad no nos dice nada en absoluto acerca de cuál debería ser el valor de la constante.) Podemos caer en la tentación de suponer que el propio Einstein siguió este camino, ya que en el mismo año (1905) publicó la teoría de la relatividad señalando a la vez que en el caso de los fotones se cumplía que $E/\nu = h$. (Sin embargo, sus escritos no justifican en manera alguna tal suposición.)

El análisis precedente puede parecer a primera vista bastante complicado, pero en realidad no lo es tanto. El origen de las expresiones (6-37) y (6-38) para la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento está perfectamente claro. A partir de estas expresiones lo único que se hace es un empleo sistemático de la relación fundamental

$$E^2 - (cp)^2 = E_0^2$$

mediante la cual pueden combinarse la energía, la cantidad de movimiento y la energía en reposo de una partícula dada.

En espectroscopía óptica el efecto Doppler se manifiesta como un ensanchamiento pequeño, aunque perfectamente medible, de las líneas espectrales resultantes del movimiento térmico caótico de los átomos emisores. En la física de las partículas de alta energía ocurre a menudo que los fotones son emitidos desde partículas inestables que marchan con velocidades comparables a c , por lo cual tienen lugar corrimientos Doppler que representan una elevada proporción de la energía total del fotón.

PROBLEMAS

6-1. Supongamos que un fotón posee una energía de 200 MeV y marcha según el eje de las x . Supongamos que otro fotón posee una energía de 100 MeV y marcha según el eje de las y . ¿Cuál es la energía total de este sistema? ¿Cuál es la cantidad de movimiento total? Si una partícula aislada poseyese esta misma energía y cantidad de movimiento totales, ¿cuál sería su masa? ¿En qué dirección marcharía? ¿Con qué velocidad?

6-2. En cierto sistema de referencia se observa que una partícula posee una energía total de 5 GeV y una cantidad de movimiento de 3 GeV/ c (es decir, cp , que posee dimensiones de energía vale 3 GeV).

(a) ¿Cuál es la energía de esta partícula en un sistema en el que su cantidad de movimiento vale 4 GeV/ c ?

(b) ¿Cuál será su masa en reposo en una?

(c) ¿Cuál es la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia?

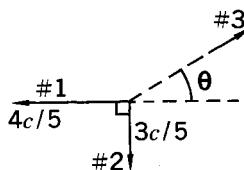
6-3. Una partícula con masa en reposo m_0 y energía cinética $2m_0c^2$ choca contra una partícula en reposo cuya masa es $2m_0$ y se adhiere a ella. Calcular la masa en reposo M_0 de la partícula compuesta.

6-4. (a) Un fotón de energía E choca con una partícula estacionaria de masa en reposo m_0 y es absorbido. ¿Cuál es la velocidad de la partícula compuesta resultante?

(b) Una partícula con una masa en reposo m_0 que se mueve a una velocidad de $4c/5$ choca con una partícula semejante que está en reposo y se forma entonces una partícula compuesta. ¿Cuál es la masa en reposo de la partícula compuesta y cuál es su velocidad?

6-5. Una partícula de masa en reposo M_0 se encuentra en reposo en el laboratorio cuando se descompone en tres partículas iguales, cada una de las cuales posee una masa en reposo m_0 . Dos de las partículas (denominadas # 1 y # 2) poseen las velocidades y direcciones indicadas.

- (a) Calcular la dirección y la velocidad de la partícula # 3.
- (b) Obtener el cociente M_0/m_0 .



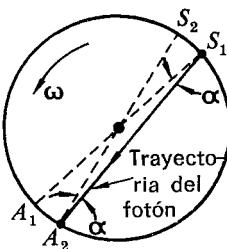
6-6. (a) Un volante que gira a una elevada velocidad posee una fuente de rayos γ sin retroceso en su eje y un medio absorbente adecuado en su periferia. Diseñar el tamaño de la rueda y calcular la velocidad que deba llevar de tal forma que la actividad del iridio empleado por Mössbauer suministre un efecto Doppler transversal suficiente como para ser detectado. ¿Cuál será la velocidad de la periferia?

(b) Si el absorbente estuviese situado en el centro y la fuente en la periferia de la rueda, ¿en qué forma variaría el análisis (así como el efecto)?

(c) Supongamos ahora que tanto la fuente como el detector están situados en la periferia de la rueda, en los extremos opuestos de un diámetro. Un fotón que parte de la fuente situada en S_1 (véase la figura) deberá marchar a lo largo de una cuerda para entrar en el absorbente en un tiempo posterior y en un punto A_2 . Los fotones forman ángulos con las direcciones del movimiento de la fuente y el absorbente que difieren en α de 90° . El análisis requiere, por tanto, el empleo de la expresión completa de la fórmula de Doppler, ecuaciones (5-17) o (6-44). ¿Qué ocurre en este caso?

(d) Todas estas situaciones pueden considerarse desde el punto de vista del sistema de la rueda que gira. Tanto la fuente como el detector permanecen ahora en reposo en cualquier caso, pero los fotones se mueven en un campo gravitatorio efectivo de valor $\omega^2 r$, asociado a la fuerza centrífuga (que aumenta, por tanto, proporcionalmente a la distancia radial al eje de la rueda). Utilizando el

principio de equivalencia considérese la variación que este campo ejerce sobre la energía de los fotones para cualquier valor particular de r .



6-7. Un "cohete de fotones" emplea radiación pura para lograr la propulsión. Si las masas inicial y final en reposo del cohete son M_i y M_f , demostrar que la velocidad final v del cohete relativa a su sistema en reposo inicial viene dada por la ecuación

$$M_i/M_f = [(c + v)/(c - v)]^{1/2}$$

6-8. Una nave espacial lleva una especie de vela que recibe el empuje de un fuerte rayo laser dirigido hacia ella desde la Tierra. Si la vela es perfectamente reflectora, calcular la masa de luz que se necesita para acelerar un vehículo de masa en reposo M_0 hasta un valor dado de gamma.

6-9. Un laser con una masa de 10 kg está situado en el espacio libre con su rayo dirigido hacia la Tierra. El laser emite continuamente 10^{20} fotones/s con una longitud de onda de 6000 Å (medida en su propio sistema en reposo). En $t = 0$ el laser se encuentra en reposo respecto a la Tierra.

(a) Inicialmente, ¿cuánta energía radiante se recibe en la Tierra en la unidad de tiempo?

(b) La radiación emitida hacia la Tierra hace que el laser se aleje de la Tierra. ¿Cuál será la velocidad del laser relativa a la Tierra después que hayan transcurrido 10 años (tiempo del laser)?

(c) En el instante en que el laser se mueve a una velocidad βc relativa a la Tierra, ¿cuánto menor es la velocidad a la que se recibe la energía en la Tierra con respecto a la velocidad original cuando $\beta = 0$? Calcular este valor para $t = 10$ años (tiempo del laser).

(d) Indicar la forma en que un observador situado en la Tierra puede explicar (en primera aproximación) por qué la velocidad de recepción disminuye continuamente en función de la conservación de la energía.

6-10. Un átomo con un estado excitado de energía Q_0 por encima del estado fundamental se mueve con una velocidad v hacia un contador de destellos. El

átomo se desintegra y pasa a su estado fundamental mediante la emisión de un fotón de energía Q (tal como el contador señala), alcanzando de esta manera el reposo absoluto. Si la masa en reposo del átomo es m , demostrar que $Q = Q_0[1 + (Q_0/2mc^2)]$.

6-11. El mesón neutro π (π^0) se descompone en dos rayos γ (y nada más). Si un π^0 (cuya masa en reposo es de 135 MeV) se mueve con una energía cinética de 1 GeV:

(a) ¿Cuáles son las energías de los rayos γ si el proceso de desintegración hace que sean emitidos en sentido opuesto según la trayectoria original del pion?

(b) ¿Qué ángulo forman los rayos γ si son emitidos formando un ángulo igual con respecto a la dirección del movimiento del pion?

6-12. Un antiproton \tilde{p} con una energía cinética de $2/3$ GeV choca contra un protón p que se encuentra en reposo en el laboratorio. Se destruyen (mediante la reacción: $\tilde{p} + p \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$), dando lugar a dos fotones que marchan en sentido directo o inverso según la línea que recorría el antiproton al incidir. Las energías del protón y del antiproton son de 1 GeV cada una.

(a) ¿Cuáles son las energías que poseen los fotones?

(b) ¿En qué dirección marcha cada fotón?

(c) ¿Qué energía posee cada uno de los fotones medido en el sistema de referencia fijado al \tilde{p} incidente?

6-13. Un positrón con una energía cinética de 0,51 MeV choca inelásticamente con un electrón en reposo dando lugar a un átomo de positronio que retrocede libremente. El electrón y el positrón que forman el positronio se destruyen mutuamente en vuelo, dando lugar a dos rayos γ .

(a) ¿Cuál es la velocidad del átomo de positronio?

(b) ¿Cuál es la energía máxima posible para uno de los protones producidos mediante este proceso de destrucción mutua?

6-14. Demostrar que los procesos que se señalan a continuación son imposibles desde un punto de vista dinámico:

(a) Un fotón choca con un electrón en reposo y entrega toda su energía al electrón.

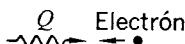
(b) Un fotón situado en el espacio libre se transforma en un electrón y un positrón.

(c) Un positrón rápido y un electrón en reposo se destruyen mutuamente dando lugar a un solo fotón.

6-15. (a) Si un protón con una energía cinética de 437 MeV choca elásticamente con un protón en reposo y los dos protones rebotan con energías iguales, ¿cuál es el ángulo existente entre ambos? [R. B. Sutton y otros, *Phys. Rev.*, **97**, 783 (1955), hallaron experimentalmente el valor $84,0^\circ \pm 0,2^\circ$.]

(b) Si el fotón entrante posee una energía total de 33 GeV, ¿cuál es el ángulo que forman ambos?

6-16. La teoría usual del efecto Compton considera el caso de un electrón libre en reposo que es alcanzado por un fotón resultando dispersado un fotón de energía menor. Supongamos que un fotón (de energía Q) choca con un electrón *en movimiento* (de masa en reposo m_0 ; véase la figura). ¿Qué velocidad inicial deberá poseer el electrón si, como consecuencia del choque, el fotón retrocede con la misma energía Q que el fotón incidente?



6-17. Un haz de fotones de elevada energía ($\gg 10$ MeV) es dirigido hacia un bloque de materia. Demostrar que la energía Q de los fotones dispersados directamente hacia atrás no depende, en esencia, de la energía de los fotones incidentes. ¿Cuál es el valor de Q ?

6-18. (a) Un fotón de energía hv choca elásticamente con un electrón en reposo. La energía del fotón después del choque es de $hv/2$ y marcha formando un ángulo de 60° con su dirección original. ¿Cuál es el valor de v ? ¿Qué tipo de fotón es éste?

(b) Un fotón con una energía hv choca con un átomo excitado que se encuentra en reposo. Después del choque el fotón sigue teniendo una energía hv , pero el sentido de su marcha experimenta un cambio de 180° . Si el átomo se encuentra en su estado fundamental después del choque, ¿cuál era su energía de excitación inicial?

6-19. Un fotón de elevada energía choca y es dispersado por un protón que se encuentra inicialmente en reposo y puede retroceder libremente. El protón retrocede formando un ángulo $\varphi = 30^\circ$ con una energía cinética de 100 MeV.

(a) ¿Cuál era la energía del fotón incidente?

(b) ¿Cuál es la dirección y la energía del fotón dispersado?

6-20. Se cree que la dispersión de Compton por cuantos de luz estelar puede ser un mecanismo de la degradación energética de electrones de elevada energía en el espacio interestelar. Se ha propuesto un experimento [por R. Milburn, *Phys. Rev. Letters*, **10**, 75 (1963)] en el cual este fenómeno puede observarse directamente en el laboratorio mediante la dispersión de un haz de electrones de elevada energía contra el flujo intenso de fotones visibles producido por un laser típico. Demostrar que en tal proceso la energía del laboratorio del fotón dispersado viene dada con una aproximación excelente ($\beta \approx 1$) por

$$E_2 \approx \gamma m c^2 \left[\frac{\lambda(1 - \beta \cos \theta_0)}{1 + \lambda(1 - \cos \theta_0)} \right]$$

en donde $\lambda = 2\gamma E_1/mc^2$ (E_1 es la energía del fotón incidente) y θ_0 es el ángulo de dispersión del fotón en el sistema en reposo del electrón. Demostrar también que θ , ángulo de dispersión del fotón, viene dado por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta_0}{\gamma(\cos \theta_0 - \beta)}$$

Si el haz de electrones incidentes se acelera con una energía de 6,00 GeV y los fotones son engendrados por un laser de rubí de 6943 Å (de forma que su energía sea 1,79 eV), ¿cuál será la energía máxima de los fotones que se dispersan?

En relatividad debemos completar la ley de conservación de la cantidad de movimiento y ampliarla con vistas a incluir la componente tiempo... La conservación de la energía es la cuarta ecuación que, juntamente con la conservación de la cantidad de movimiento, permite obtener una relación válida en términos de cuadrvectores para la geometría del espacio y del tiempo.

R. P. FEYNMAN, *Lectures on Physics* (1963)

7

Más acerca de la dinámica relativista

DISCUTIREMOS EN ESTE capítulo dos temas en especial. El primero consistirá en una discusión más extensa acerca de la energía y la cantidad de movimiento, haciéndose particular hincapié en la transformación de estas cantidades entre dos sistemas inerciales. El segundo tema será el relacionado con el concepto de fuerza en dinámica relativista —la manera en que se define, sus transformaciones y las limitaciones que encuentra su empleo. Comenzaremos considerando un importante invariante que puede construirse a partir de los valores medidos para la energía y la cantidad de movimiento en un sistema dado.

INVARIANTE ENERGÍA-CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y SU EMPLEO

Hasta ahora hemos venido afirmando que la energía y la cantidad de movimiento son constantes separadas para todo sistema contenido en sí mismo. Sin embargo, al aplicar esta afirmación damos por supuesto la elección de un sistema inercial particular y nos ceñimos a él a través de los cálculos. Lo que haremos ahora es preguntarnos a nosotros mismos la forma en que están relacionadas entre sí las medidas realizadas en sistemas *diferentes* de E y p para un sistema de partículas. La respuesta a esta pregunta está contenida, en esencia, en las expresiones relativistas de la cantidad de movimiento y de la energía de una partícula aislada:

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$$

$$E = \gamma m_0 c^2$$

Ya hemos visto cómo están relacionadas ambas expresiones mediante la ecuación

$$E^2 = (cp)^2 + E_0^2$$

en donde $E_0 (= m_0 c^2)$ es la energía en reposo de la partícula.

Ahora bien, una manera sencilla de expresar este resultado consiste en observar que si una partícula posee una energía en reposo E_0 (es decir, una energía total E_0 medida en el sistema en el cual su cantidad de movimiento es nula), su energía y cantidad de movimiento medida en cualquier otro sistema pueden combinarse para dar lugar a una cantidad invariante de la forma siguiente:

$$E^2 - (cp)^2 = E_0^2$$

(relación que ya empleamos en diversas ocasiones en el capítulo 6). Puesto que esto se cumple para E y p medidos en *cualquier* sistema, las medidas de la energía y de la cantidad de movimiento para una partícula en *dos sistemas cualesquiera* están relacionadas entre sí según la ecuación

$$E^2 - (cp)^2 = (E')^2 - (cp')^2 = E_0^2 \quad (7-1)$$

en donde E_0^2 desempeña el papel de propiedad dinámica invariante de la partícula.

La ecuación (7-1) es válida, no solamente para una partícula aislada, sino para una colección arbitraria de partículas de la manera siguiente. En efecto, si se miden en un sistema de referencia cualquiera, la suma de las energías de las partículas es E y la suma vectorial de todas las cantidades de movimiento tiene el valor p ; el valor $E^2 - (cp)^2$ posee el mismo valor que la combinación correspondiente $(E')^2 - (cp')^2$ medido en cualquier otro sistema. Este valor invariante es igual al cuadrado de la energía total E_0 de todas las partículas medido en un sistema en el cual la suma vectorial de las cantidades de movimiento es cero. Observar en especial que en esta forma ampliada de la ecuación (7-1), la energía E_0 no es, en general, meramente una suma de energías en reposo. La colección de partículas considerada puede tener todo tipo de movimientos relativos entre sí; no exige un sistema en el cual se encuentren todas en reposo.

Una justificación formal de esta aplicación de la ecuación (7-1) a un grupo arbitrario de partículas será tratada en la sección siguiente. Sin embargo, señalemos que a menudo tratamos justificadamente una colección de partículas como si se tratase de una partícula tan sólo. Consideraremos, por ejemplo, un

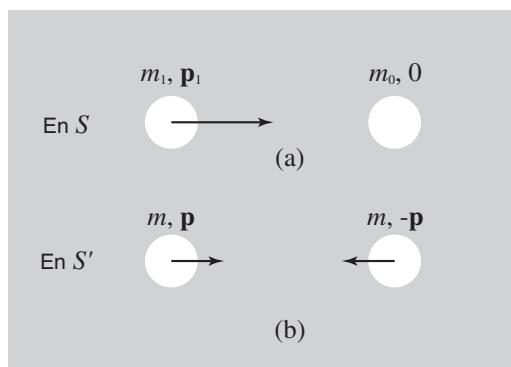


Fig. 7-1. Choque protón-protón (a) en un sistema de referencia de laboratorio en el cual un protón se encuentra inicialmente en reposo; (b) en el sistema con cantidad de movimiento nula.

átomo de argón que contenga numerosos electrones en estado de rápido movimiento y que en su centro posea un núcleo compuesto por neutrones y protones con elevadas energías cinéticas. No dudamos en describir este átomo, desde el punto de vista de la teoría cinética de los gases, como una sola partícula que posee una cierta velocidad. Y el teorema de la inercia de la energía nos facilita el imaginar que esta complicada estructura puede describirse en función de una sola masa que posee una cierta cantidad de movimiento, a pesar de su complicada estructura interna.

Un buen ejemplo, que pone de relieve la utilidad de la ecuación (7-1) en su forma generalizada, es el que suministra el problema de creación del antiproton que ya hemos tratado siguiendo un método diferente. La figura 7-1(a) muestra el sistema protón-protón inicial visto en el laboratorio; la figura 7-1(b) muestra el mismo conjunto en su propio sistema de referencia con cantidad de movimiento cero. En este último sistema la energía total $2mc^2$ de los protones que chocan debe ser por lo menos la suficiente para representar cuatro masas en reposo de protón. Bajo estas condiciones mínimas el estado final, observado en S' , consistirá de tres protones y un antiproton, todos ellos con energía cinética nula. Por consiguiente, tenemos las relaciones siguientes:

En S' :

$$E' = 2mc^2 = 4m_0c^2 \quad p' = 0$$

En S :

$$E = (m_1 + m_0)c^2 \quad p = p_1$$

Por tanto, según la ecuación (7-1),

$$(m_1c^2 + m_0c^2)^2 - (cp_1)^2 = (4m_0c^2)^2$$

Por tanto,

$$(m_1c^2)^2 + 2(m_1c^2)(m_0c^2) + (m_0c^2)^2 - (cp_1)^2 = 16(m_0c^2)^2$$

Pero

$$(m_1c^2)^2 - (cp_1)^2 = (m_0c^2)^2$$

puesto que esto representa la ecuación (7-1) aplicada a un solo protón. Por tanto,

$$2(m_1c^2)(m_0c^2) + 2(m_0c^2)^2 = 16(m_0c^2)^2$$

o bien,

$$m_1c^2 = 7m_0c^2$$

Podemos calcular, por tanto, la energía necesaria para la reacción sin considerar las velocidades que intervienen, al contrario de lo que hicimos en el capítulo 6 para la resolución de este mismo problema.

LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ PARA LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Consideraremos la energía y la cantidad de movimiento de una partícula medidas ambas con respecto a dos sistemas de referencia que están relacionados entre sí por medio de las transformaciones de Lorentz corrientes. Supongamos que su velocidad es \mathbf{u} medida en S y \mathbf{u}' medida en S' (fig. 7-2). Entonces, según las fórmulas de transformación de velocidades, resulta

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y/\gamma(v)}{1 - vu_x/c^2} \end{aligned} \right\} \text{en donde } \gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (7-2)$$

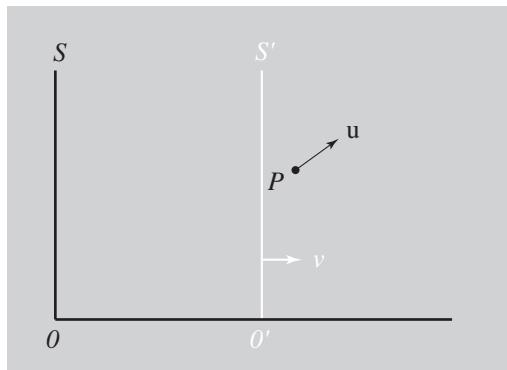


Fig. 7-2. Partícula que posee una velocidad arbitraria \mathbf{u} con respecto al sistema S . Con el auxilio de las leyes para la adición de velocidades, los valores de las componentes de su energía y de su cantidad de movimiento, medidos en S y S' , se observa que están relacionados linealmente.

La energía y la cantidad de movimiento de la partícula en los dos sistemas se expresan del modo siguiente:

En S :

$$\left. \begin{array}{l} E = \gamma(u)m_0c^2 \\ p_x = \gamma(u)m_0u_x \\ p_y = \gamma(u)m_0u_y \end{array} \right\} \text{en donde } \gamma(u) = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \quad (7-3)$$

En S' :

$$\left. \begin{array}{l} E' = \gamma(u')m_0c^2 \\ p'_x = \gamma(u')m_0u'_x \\ p'_y = \gamma(u')m_0u'_y \end{array} \right\} \text{en donde } \gamma(u') = (1 - u'^2/c^2)^{-1/2} \quad (7-4)$$

El gran paso que hay que dar para relacionar estos dos conjuntos de valores dinámicos consiste en expresar $\gamma(u)$ en función de cantidades medidas en S' o en $\gamma(u')$ en función de cantidades medidas en S . Consideraremos este último caso. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \gamma(u') &= [1 - (u')^2/c^2]^{-1/2} \\ &= [1 - (u'_x)^2/c^2 - (u'_y)^2/c^2]^{-1/2} \end{aligned} \quad (7-5)$$

Procederemos por etapas sencillas. En primer lugar consideraremos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}1 - (u'_x)^2/c^2 &= 1 - \frac{(u_x - v)^2}{c^2(1 - vu_x/c^2)^2} \\&= \frac{(1 - vu_x/c^2)^2 - (u_x - v)^2/c^2}{(1 - vu_x/c^2)^2} \\&= \frac{1 - u_x^2/c^2 - v^2/c^2 + (vu_x/c^2)^2}{(1 - vu_x/c^2)^2}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$1 - (u'_x)^2/c^2 = \frac{(1 - u_x^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2} \quad (7-6a)$$

Observemos ahora que, de las ecuaciones (7-2), tenemos que

$$(u'_y)^2/c^2 = \frac{(u_y^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2} \quad (7-6b)$$

Restando la ecuación (7-6b) de la (7-6a), obtenemos

$$1 - (u')^2/c^2 = \frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2}$$

en donde reconocemos los cuadrados de los valores inversos de $\gamma(u')$, $\gamma(u)$ y $\gamma(v)$. En realidad, resulta que

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u)(1 - vu_x/c^2) \quad (7-7)$$

Considerando ahora este resultado conjuntamente con la primera de las ecuaciones (7-4), tenemos

$$E' = \gamma(v)[\gamma(u)m_0c^2 - v\gamma(u)m_0u_x]$$

la cual, con referencia a las ecuaciones (7-3), podemos expresar de la siguiente manera:

$$E' = \gamma(v)(E - vp_x) \quad (7-8)$$

Considerando de nuevo la ecuación de p_x' resulta

$$p_x' = \gamma(v)\gamma(u)m_0(u_x - v)$$

es decir,

$$p_x' = \gamma(v)(p_x - vE/c^2) \quad (7-9)$$

Finalmente, considerando la ecuación para p_y' encontramos que

$$p_y' = \gamma(u)m_0u_y$$

Por tanto,

$$p_y' = p_y \quad (7-10)$$

Recojamos las transformaciones de S a S' expresadas por las ecuaciones (7-8), (7-9) y (7-10), junto con las transformaciones correspondientes de S' a S :

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ PARA
LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y ENERGÍA

$$p_x' = \gamma(p_x - vE/c^2) \quad p_x = \gamma(p_x' + vE'/c^2)$$

$$p_y' = p_y \quad p_y = p_y'$$

$$p_z' = p_z \quad p_z = p_z'$$

$$E' = \gamma(E - vp_x) \quad E = \gamma(E' + vp_x')$$

con $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, en donde v es la velocidad de S' medida en S

(7-11)

Una característica notable de las ecuaciones (7-11) es que las componentes de la cantidad de movimiento y la energía aparecen sólo en combinaciones *lineales*; no existe ninguna conexión tan sencilla en la mecánica newtoniana. Esta linealidad no es solamente interesante; acarrea consecuencias de un gran interés. Pues aunque obtuvimos las ecuaciones en función de una sola partícula, nada nos impide tomar E y \mathbf{p} como la energía y la cantidad de movimiento totales de una colección de partículas, que no interactúan entre sí, con velocidades arbitrarias. Se reduce todo a escribir ecuaciones como las (7-8), (7-9) y (7-10).

para cada partícula por separado sumándolas todas a continuación. Por tanto, las ecuaciones (7-11) son a su vez válidas para un sistema de partículas cualquiera, lo mismo que la invariancia expresada por la ecuación (7-1) (según razonamos de una manera algo más informal en la sección última).

Un ejemplo: la dispersión elástica de partículas idénticas. Veamos cómo pueden aplicarse las transformaciones energía-cantidad de movimiento a nuestro problema, ya discutido en el capítulo 6, del choque elástico simétrico de dos partículas idénticas, por ejemplo, dos protones. En la figura 7-3 se muestra este choque, observado primeramente en el sistema S' con cantidad de movimiento nula y luego en el sistema del laboratorio S (en el cual una de las partículas se supone que se encuentra inicialmente en reposo). Se observa en S' que cada partícula posee una cantidad de movimiento p' , tanto antes como después del choque, pero la colisión hace girar 90° cada vector cantidad de movimiento. La velocidad v que relaciona S' y S viene definida por la ecuación (6-20):

$$v = \frac{c^2 p'}{E'} \quad (7-12)$$

la cual expresa la conexión general, que ya propusimos por primera vez en la ecuación (1-13) que relaciona la velocidad, la cantidad de movimiento y la energía para cualquier partícula. Podemos utilizar esta expresión aquí puesto que v no es sólo la velocidad relativa de S y S' , sino también la velocidad, me-

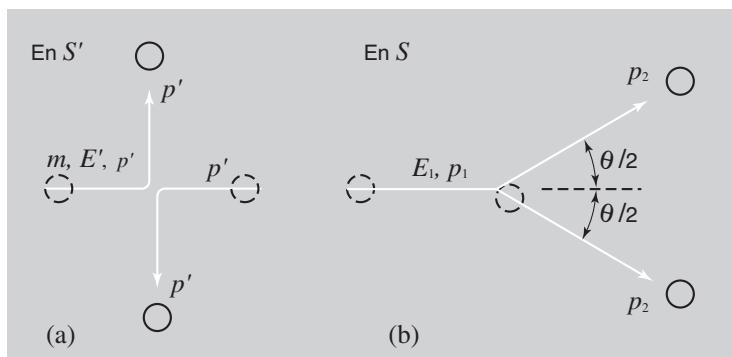


Fig. 7-3. Dos vistas de un choque elástico de tipo simétrico (a) en el sistema con cantidad de movimiento nula, (b) en un sistema en el cual una partícula se encuentra inicialmente en reposo.

dida en S' , de la partícula que inicialmente se encontraba en reposo en S . (Debido a la simetría de este problema particular resulta que ésta es también la velocidad en S' de la otra partícula.)

Consideremos ahora lo que sucede a cada partícula *después* del choque.

En S' :

$$\left. \begin{array}{l} p_x' = 0 \\ p_y' = p' \\ E' = mc^2 = \gamma(v)m_0c^2 \end{array} \right\} \quad (7-13)$$

Usando las ecuaciones para la transformación de las componentes de la cantidad de movimiento entre los diferentes sistemas tenemos:

En S :

$$p_x = \gamma(v)(p_x' + vE'/c^2)$$

En esta expresión hacemos $p_x' = 0$ y, mediante la ecuación (7-12), resulta $vE'/c^2 = p'$. Por tanto,

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(v)p' \\ p_y &= p_y' = p' \end{aligned}$$

y entonces,

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{\gamma(v)} \quad (7-14)$$

en donde θ es el ángulo formado por las direcciones de los protones después de la dispersión, tal como se observa en el sistema de referencia del laboratorio [fig. 7-3(b)].

Está claro que $\operatorname{tg}(\theta/2) < 1$, por lo que $\theta/2 < 45^\circ$, $\theta < 90^\circ$. Para obtener $\gamma(v)$ en función de la energía inicial total E_1 del protón incidente (medida en el laboratorio) podemos usar de nuevo el invariante energía-cantidad de movimiento de la ecuación (7-1):

$$\begin{aligned} (2mc^2)^2 &= (E_1 + m_0c^2)^2 - (cp_1)^2 \\ &= [E_1^2 - (cp_1)^2] + 2E_1m_0c^2 + (m_0c^2)^2 \\ &= (m_0c^2)^2 + 2E_1m_0c^2 + (m_0c^2)^2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 = \frac{E_1 + m_0c^2}{2m_0c^2}$$

$$\gamma(v) = \left(\frac{E_1 + m_0c^2}{2m_0c^2}\right)^{1/2} \quad (7-15)$$

Resulta así sencillo el relacionar la ecuación (7-14) con la ecuación (6-31), bastante diferente.

CUADRIVECTORES

El sistema de ecuaciones (7-11) presenta un notable parecido con el correspondiente a las transformaciones de Lorentz para el espacio y el tiempo [ecuaciones (3-16)]. Si hacemos que las componentes de la cantidad de movimiento desempeñen un papel análogo al de las coordenadas de posición, al comparar las ecuaciones (7-11) con las transformaciones de Lorentz originales se encuentra que E/c^2 es la cantidad análoga a t . Podemos decir, de hecho, que las tres componentes del vector representativo de la cantidad de movimiento se transforman como las tres componentes de un vector de posición y que la energía total (cantidad escalar) se transforma como el tiempo. La invariancia de la expresión $E^2 - (cp)^2$, puesta de manifiesto en la ecuación (7-1), es una consecuencia directa. La energía en reposo E_0 es el invariante de las transformaciones energía-cantidad de movimiento, lo mismo que el intervalo espacio-tiempo s es el invariante de las transformaciones de Lorentz propias.

En mecánica newtoniana estamos acostumbrados a pensar que las medidas del espacio pueden definirse sin referencia alguna al tiempo y recíprocamente. De igual modo razonamos que la cantidad de movimiento y la energía expresan propiedades diferentes en esencia de un mismo cuerpo (aunque relacionadas entre sí hasta cierto punto). Hemos visto ahora la forma en que estas distinciones, tanto cinemáticas como dinámicas, desaparecen en la relatividad especial. En la especificación del tiempo en un sistema intervienen, tanto la posición como el tiempo en otro sistema; en la especificación de la energía intervienen, tanto la energía como la cantidad de movimiento en otro sistema. Debido a esto, y sin pretensión alguna de remontarnos a la metafísica, resulta perfectamente adecuado el ampliar el marco de nuestra descripción de los fenómenos mediante la consideración de una estructura espacio-tiempo tetradimensional, en sustitución de una estructura espacial tridimensional que adopta aspectos distintos

en instantes diferentes. En el capítulo 3 hicimos una breve alusión a esta unificación en la descripción de sucesos puntuales. Expresaremos esto de una manera más formal diciendo que el estado *cinemático* de una partícula puede expresarse mediante un cuadrvector de componentes (x, y, z, ict) y de longitud $s\sqrt{-1}$ medido en cualquier sistema :

$$-s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$$

De manera análoga, el estado *dinámico* de una partícula puede expresarse por un simple cuadrvector cuyos componentes sean ($p_x, p_y, p_z, iE/c$) y cuya “longitud” (en unidades de cantidad de movimiento) es iE_0/c , medida en cualquier sistema :

$$-E_0^2/c^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + (iE/c)^2$$

Las transformaciones de Lorentz pueden considerarse entonces como la manera de transformar las diversas componentes de un cuadrvector de un sistema de ejes a otro —proceso designado a menudo como “aplicación” del vector a diversos sistemas de coordenadas en el mundo tetradimensional. Esta forma de representar el aspecto relativista de las cosas es atractiva desde el punto de vista formal y puede resultar también muy útil una vez que se haya aprendido a manejarla —lo cual se traduce en adquirir la soltura debida en álgebra matricial. Sin embargo, no proseguiremos este camino, ya que no es, en modo alguno, esencial y en realidad no añade nada nuevo a la física básica de la relatividad.

LA FUERZA EN LA MECÁNICA RELATIVISTA

En contraste con la concepción newtoniana resulta fácil demostrar que en relatividad la magnitud fuerza no posee la misma dirección, en general, que la aceleración que produce... También resulta fácil demostrar que las componentes de esta fuerza no poseen propiedades sencillas de transformación... Sin embargo, todas estas modificaciones, a pesar de su innegable importancia desde el punto de vista matemático, no afectan radicalmente al concepto de fuerza. Sin embargo, debe tenerse presente un aspecto importante: puesto que es inadmisible pensar en la simultaneidad absoluta de dos sucesos que acontecen en dos lugares lejanos, la relatividad especial nos lleva a la conclusión de que la acción a distancia no debe considerarse como un concepto físico justificado.

Max Jammer, *Concepts of Force* (1957)

En toda la discusión sobre dinámica relativista que hasta ahora hemos venido efectuando, hemos insistido de modo casi exclusivo en el empleo de las leyes de conservación de la energía y la cantidad de movimiento para un sistema aislado de partículas. Hemos intentado dar una idea de la gran variedad de problemas que pueden ser discutidos en estos términos. Pero una vez que se ha dicho y hecho todo, este tratamiento del problema no es siempre el más adecuado. Una gran cantidad de problemas de la dinámica pueden ser resueltos con una gran comodidad en función del movimiento de partículas bajo la acción de un sistema dado de fuerzas. Consideremos, por ejemplo, la dispersión de partículas α de Rutherford. Siempre que la fuerza tienda a cero a medida que aumenta la separación entre dos partículas (y éste es el supuesto bajo el cual hemos efectuado todos los cálculos del capítulo 6 y éste último), puede conocerse perfectamente la relación entre las direcciones finales y las velocidades de los núcleos que chocan. Sin embargo, esto no nos dice cuál será la probabilidad de que una partícula α sea realmente desviada un cierto ángulo. Sólo cuando expresemos de una forma explícita la ley de fuerza particular obtendremos la respuesta a preguntas de este tipo. Y el descubrimiento y la expresión de las leyes de fuerza operantes es una de las preocupaciones fundamentales de la física. Por tanto, es de vital importancia conocer la manera en que se pueden transformar las fuerzas y las ecuaciones del movimiento de manera que se las pueda describir desde el punto de vista de sistemas inerciales diferentes. Como en relatividad especial la aceleración no es un invariante, sabemos que no contamos con la sencillez de la mecánica newtoniana, pero, sin embargo, podremos llegar a ciertas expresiones útiles y llenas de significado.

El punto de partida en nuestro encuentro inicial con la relatividad (véase el capítulo 1) fue la segunda ley de Newton en la forma siguiente:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \text{en donde } m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (7-16)$$

Tomaremos esto como definición de \mathbf{F} . Se trata de una ampliación natural (y de hecho, la ampliación más sencilla posible) del resultado no relativista. No se trata de una expresión que pueda demostrarse de un modo independiente. Por el contrario, si se da la expresión analítica de \mathbf{F} en función de las coordenadas, velocidades, etc., debemos exigir, ciertamente, que los primeros y segundos miembros de la ecuación (7-16) se transformen de la misma manera al emplear las transformaciones de Lorentz. Suponiendo que se cumple esta condición necesaria, las transformaciones de las componentes de $d\mathbf{p}/dt$ nos dicen

la forma en que las componentes de la fuerza se transforman en relatividad especial.

Nuestro tratamiento del problema será el siguiente: en cualquier instante una partícula posee una velocidad \mathbf{v} bien definida y medida en el sistema de referencia de un laboratorio. Podemos imaginar la partícula situada instantáneamente en un sistema en reposo que posee esta velocidad \mathbf{v} con respecto al laboratorio. Supondremos que, medida en el sistema en reposo, se aplica una fuerza F_{0x} paralelamente a \mathbf{v} , con lo cual se obtiene una aceleración a_{0x} . La masa medida en este sistema es la masa en reposo m_0 . Por tanto, tenemos

$$F_{0x} = m_0 a_{0x} \quad (7-17)$$

Ahora bien, en el sistema de referencia del laboratorio la expresión de la cantidad de movimiento es la siguiente:

$$p_x = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

y la fuerza será F_x , en donde

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{dv}{dt} + m_0 v \frac{d}{dt} [(1 - v^2/c^2)^{-1/2}]$$

Si hacemos $dv/dt = a_x$ (aceleración observada en el laboratorio) tenemos que

$$F_x = \frac{m_0 a_x}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_0 (v^2/c^2) a_x}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

y entonces, simplificando, obtenemos

$$F_x = \gamma^3 m_0 a_x \quad (7-18)$$

Existe, sin embargo, una relación muy sencilla entre a_x y a_{0x} :

$$a_x = \frac{1}{\gamma^3} a_{0x} \quad (7-19)$$

Este es el caso particular de la transformación de aceleraciones según x para $a_{0x} = 0$ [referirse a la ecuación (5-24)]. Por tanto, la ecuación (7-18) puede escribirse

$$F_x = \gamma^3 m_0 \frac{a_{0x}}{\gamma^3} = m_0 a_{0x}$$

es decir,

$$F_x = F_{0x} \quad (7-20)$$

Este resultado es muy notable. A pesar de la variación de las medidas de la masa y de la aceleración en los dos sistemas, la medida de la componente x de la fuerza permanece la misma.

Cuando efectuamos un cálculo semejante para la fuerza transversal encontramos que esta invariancia no se cumple. En el sistema en reposo instantáneo tenemos

$$F_{0y} = m_0 a_{0y} \quad (7-21)$$

En el sistema del laboratorio, la fuerza F_y aplicada perpendicularmente al vector cantidad de movimiento $m\mathbf{v}$ no alterará el valor de la velocidad durante un intervalo muy breve de tiempo; sólo altera ligeramente la dirección de \mathbf{v} introduciendo una pequeña componente transversal. Por tanto, en una buena aproximación (que da lugar a una expresión exacta en el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$) la masa permanece inalterada, valiendo γm_0 , y el impulso transversal puede escribirse

$$F_y \Delta t = \gamma m_0 \Delta v_y$$

Tenemos, por tanto, en este caso que

$$F_y = \gamma m_0 a_y \quad (7-22)$$

De nuevo existe una relación sencilla entre las aceleraciones en ambos sistemas, siempre que una de ellas se mida en el sistema en reposo:

$$a_y = \frac{1}{\gamma^2} a_{0y} \quad (7-23)$$

siendo éste un caso especial de la ecuación (5-26). Tenemos, por tanto, que

$$F_y = \gamma m_0 \frac{a_{0y}}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma} m_0 a_{0y}$$

es decir,

$$F_y = \frac{1}{\gamma} F_{0y} \quad (7-24)$$

Se desprende de los resultados precedentes que, en general, la fuerza y la aceleración no son, en general, vectores paralelos (característica mencionada en la cita al comienzo de este apartado). Combinando las ecuaciones (7-18) y (7-22) tenemos

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{a_y}{a_x}$$

Sólo en el sistema en reposo instantáneo de un cuerpo ($\gamma = 1$) puede garantizarse que \mathbf{F} , definida como la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento, posee la misma dirección que la aceleración.

Es quizás de interés señalar que los casos especiales de transformación de fuerzas representados por las ecuaciones (7-20) y (7-24) pueden obtenerse basándose en consideraciones físicas sencillas.¹ Para la transformación de x podemos considerar el trabajo efectuado por la fuerza y el aumento resultante de la energía, puesto de manifiesto en un aumento de la masa:

$$\Delta E = F_x \Delta x = c^2 \Delta m$$

en donde,

$$\begin{aligned}\Delta x &= v \Delta t \\ \Delta m &= \Delta \left[\frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \frac{m_0 v \Delta v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2} c^2}\end{aligned}$$

De aquí se desprende inmediatamente que

$$F_x = \gamma^3 m_0 a_x$$

cuya forma es análoga a la de la ecuación (7-18).

Para relacionar la aceleración a_x con la aceleración a_{0x} medida en el sistema en reposo instantáneo de la partícula tomamos las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

En el instante t :

$$x = x_1 \quad (\text{por ejemplo})$$

En el instante $t + \Delta t$:

$$x + \Delta x = x_1 + v \Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2$$

¹ Véase una buena discusión, por ejemplo, en W. P. Ganley, *Am. J. Phys.*, **31**, 510-516 (1963)

Las coordenadas de espacio y tiempo (x, t) y ($x + \Delta x, t + \Delta t$) definen dos sucesos observados en S . Obtengamos ahora las coordenadas de estos mismos sucesos observados en el sistema en reposo S' de la partícula. Para ello emplearemos las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned}x_0 &= \gamma(x - vt) \\t_0 &= \gamma(t - vx/c^2)\end{aligned}$$

Aplicándolas a los dos sucesos consecutivamente obtenemos:

Primer suceso:

$$\begin{aligned}x_0 &= \gamma(x_1 - vt) \\t_0 &= \gamma(t - vx_1/c^2)\end{aligned}$$

Segundo suceso:

$$\begin{aligned}x_0 + \Delta x_0 &= \gamma[x_1 + v\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 - v(t + \Delta t)] \\&= \gamma[x_1 + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 - vt] \\t_0 + \Delta t_0 &= \gamma[t + \Delta t - (v/c^2)\{x_1 + v\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2\}]\end{aligned}$$

Restando,

$$\begin{aligned}\Delta x_0 &= \gamma[\frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2] \\ \Delta t_0 &= \gamma[(1 - v^2/c^2)\Delta t - \frac{1}{2}(va_x/c^2)(\Delta t)^2]\end{aligned}\tag{7-25}$$

Si Δt es suficientemente pequeño, el segundo término de la expresión Δt_0 puede despreciarse frente al primero, por lo que podemos aproximar

$$\Delta t_0 \approx \gamma(1 - v^2/c^2)\Delta t = \Delta t/\gamma$$

Al sustituir $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ en la ecuación (7-25) obtenemos

$$\Delta x_0 = \gamma[\frac{1}{2}a_x(\gamma \Delta t_0)^2]$$

o bien

$$\Delta x_0 = \frac{1}{2}(\gamma^3 a_x)(\Delta t_0)^2$$

Pero ésta es la ecuación del movimiento uniformemente acelerado para una partícula que parte del reposo. Por consiguiente, la aceleración a_{0x} medida en

el sistema en reposo viene dada por $a_{0x} = \gamma^3 a_x$, con lo cual se tiene de nuevo la ecuación (7-19). Por tanto, hemos obtenido de nuevo las ecuaciones (7-18) y (7-19) y las podemos combinar para demostrar la invariancia de F_x . Esta manera de proceder puede parecer a primera vista un tanto rebuscada, puesto que hemos considerado las transformaciones con gran detalle. Puede resumirse brevemente (aunque quizás de una manera un tanto superficial) diciendo que la dilatación del tiempo hace que el tiempo Δt_0 en el sistema en reposo corresponda a $\gamma \Delta t_0$ en el sistema S y que la contracción de Lorentz es la causa de que Δx_0 , distancia recorrida en el sistema en reposo a consecuencia de la aceleración, corresponda a $\Delta x_0/\gamma$ en S . Basándonos en esto llegamos inmediatamente a la relación siguiente:

$$\Delta x_0/\gamma = \frac{1}{2} a_x (\gamma \Delta t_0)^2$$

Sin embargo, siempre que intervengan medidas no propias, como en este caso, es conveniente ser metódico y explícito.

Para obtener la transformación de F_y consideraremos la ecuación (7-22) y deducimos la transformación de la aceleración transversal a partir de las dos expresiones

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2$$

$$\Delta y' = \frac{1}{2} a_{0y} (\Delta t')^2$$

con $\Delta y = \Delta y'$ y $\Delta t = \gamma \Delta t'$. En este caso, puesto que el movimiento tiene lugar para un valor constante de x' en el sistema en reposo podemos aplicar la dilatación de tiempos directamente sin necesidad de vacilación alguna.

ANÁLISIS MAGNÉTICO DE LAS PARTÍCULAS RELATIVISTAS

Existe una aplicación directa de las leyes de fuerza en los movimientos relativistas que no podemos pasar por alto en un capítulo tan relacionado con las partículas atómicas como es el capítulo presente. Nos referimos a la desviación de una partícula cargada en un campo magnético. Es uno de los principales medios para conocer la naturaleza de las partículas empleados en la física corpuscular, puesto que permite conocer tanto el signo de la carga como el valor de la cantidad de movimiento de la partícula. La fotografía de la cámara de niebla que se muestra en la figura 7-4 constituye un buen ejemplo del empleo de esta técnica. El fundamento estriba en que una carga q en movimiento

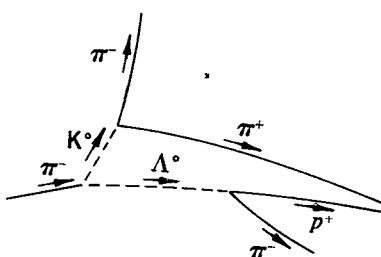
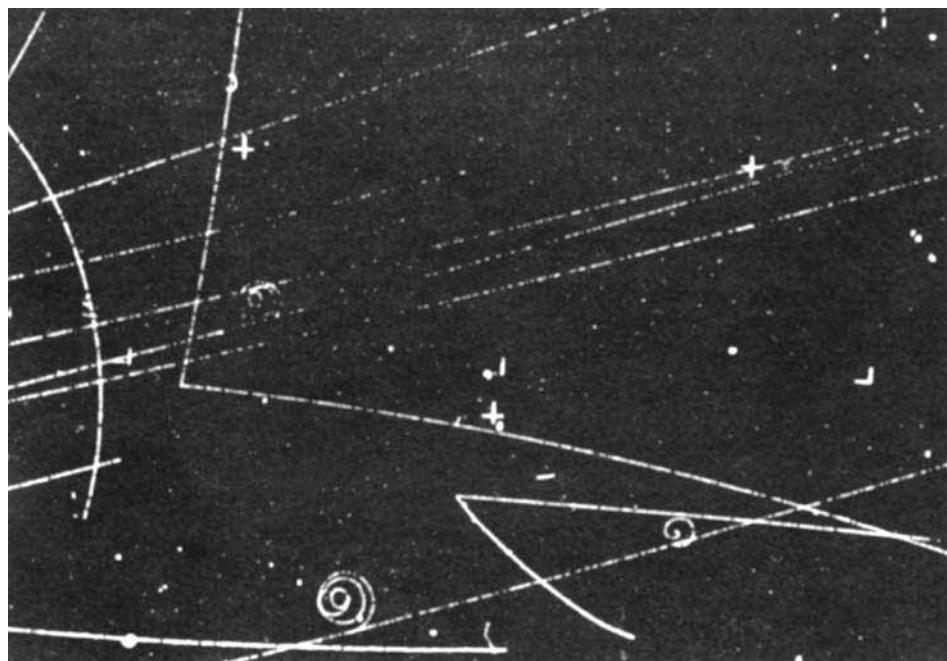


Fig. 7-4. Fotografía de la creación en una cámara de niebla de hidrógeno de dos partículas neutras inestables (K^0 y Λ^0) mediante el choque de un mesón π^- con un protón en una cámara de niebla de hidrógeno líquido de 500 litros diseñada por el profesor L. W. Alvarez y su grupo en Berkeley. (Foto cortesía del profesor Alvarez y el Laboratorio de Radiación de Lawrence, Berkeley, Calif.) El π^- entra por la izquierda y su trayectoria acaba abruptamente en el punto de origen de las partículas K^0 y Λ^0 . Éstas se descomponen a continuación en parejas de partículas cargadas ($K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$), dando origen a dos parejas de trayectorias con bifurcación. El análisis de las trayectorias de las partículas cargadas en cada bifurcación muestra que el vector representativo de la cantidad de movimiento total en cada bifurcación está dirigido de modo que se aleja del punto en el cual tuvo lugar la interacción inicial. Esta fotografía fue empleada como ilustración por el profesor D. A. Glaser, inventor de la cámara de niebla, en la conferencia que dio en 1960 al recibir el premio Nobel. (Véase *Nobel Lectures, Physics, 1942-1962*, Elsevier, 1964.)

en un campo magnético \mathbf{B} experimenta una fuerza transversal proporcional a su velocidad según la ley de fuerzas vectorial

$$\mathbf{F} = \text{const. } (q\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

En el sistema de medidas MKS, el valor de la constante es, por definición, la unidad. Si la dirección del campo y la velocidad de la partícula son perpendiculares, el movimiento de la partícula queda restringido a un plano perpendicular al campo magnético. En todo instante la fuerza que se ejerce sobre la partícula forma un ángulo recto con el vector cantidad de movimiento \mathbf{p} , y el valor de la fuerza viene dado por

$$F = qvB \quad (\text{sistema MKS})$$

Por tanto, en un breve intervalo Δt la partícula adquiere una cantidad de movimiento transversal que viene dada por

$$\Delta p = F \Delta t = qvB \Delta t$$

Esto quiere decir que el vector cantidad de movimiento gira un pequeño ángulo $\Delta\theta$, tal que

$$\Delta\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{qvB}{p} \Delta t \quad (7-26)$$

Por consiguiente, el vector velocidad experimenta también una variación $\Delta\theta$ en el tiempo durante el cual la partícula recorre una distancia Δs , tal que

$$\Delta s = v \Delta t$$

Pero Δs y $\Delta\theta$ definen un radio de curvatura, verificándose, de hecho,

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v \Delta t}{R} \quad (7-27)$$

Combinando las ecuaciones (7-26) y (7-27) obtenemos

$$p = qBR \quad (\text{unidades MKS}) \quad (7-28)$$

Resulta interesante observar que éste es precisamente el mismo resultado que se obtiene de la mecánica newtoniana, exceptuando que en la ecuación (7-28) debe recordarse que $p = \gamma m_0 v$, en lugar de $m_0 v$. En muchos casos podemos estar seguros de que $q = \pm e$, por lo que una vez conocido B y medido el radio de curvatura de la trayectoria, resulta sencillo determinar la cantidad de movimiento de la partícula. La figura 7-4 muestra un conjunto de tales movimientos y ofrece un ejemplo de la gran cantidad de información que puede suministrar una sola figura si se hace empleo de las técnicas que han sido desarrolladas en la física de partículas.

TRANSFORMACIONES GENERALES DE FUERZAS; ACCIÓN Y REACCIÓN

En la penúltima sección consideramos algunos casos bastante especiales de transformaciones de fuerzas, ya que uno de los dos sistemas elegidos era el sistema en reposo instantáneo de la partícula. Podemos ampliar el análisis a las transformaciones de fuerza entre dos sistemas cualesquiera utilizando las definiciones

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

Para el cálculo deben emplearse las transformaciones relativistas para la velocidad, la cantidad de movimiento y la energía (así como para x y t) y, por tanto, por comodidad, señalaremos a continuación el número mínimo de fórmulas necesarias para obtener las dos formas fundamentales de la transformación —para las componentes de la fuerza que sean paralelas o perpendiculares a la dirección del movimiento relativo de dos sistemas de referencia.

Supongamos que la cantidad de movimiento y la energía de una partícula, medidas en S , son \mathbf{p} y E , respectivamente, en el punto (x, y, z, t) del espacio-tiempo y supongamos asimismo que \mathbf{p}' y E' representan la cantidad de movimiento y la energía de la partícula medida en S' en *el mismo* punto del espacio-tiempo (x', y', z', t') . Tenemos entonces

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \right\} \quad (7-29)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x' &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u_y' &= \frac{u_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-30)$$

$$\left. \begin{aligned} p_x' &= \gamma(p_x - vE/c^2) \\ p_y' &= p_y \\ E' &= \gamma(E - vp_x) \end{aligned} \right\} \quad (7-31)$$

Puesto que la fuerza \mathbf{F}' sobre una partícula, medida en S' , viene dada por

$$\mathbf{F}' = d\mathbf{p}'/dt'$$

se desprende de las ecuaciones (7-31) y la transformación de Lorentz para el tiempo que

$$F_x' = \frac{dp_x'}{dt'} = \frac{\frac{dp_x'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\gamma \left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt} \right)}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)}$$

es decir,

$$F_x' = \frac{F_x - (v/c^2) dE/dt}{1 - vu_x/c^2} \quad (7-32)$$

Ahora bien, dE/dt es la variación en la unidad de tiempo de la energía de la partícula medida en S . En mecánica newtoniana identificaríamos inmediatamente la cantidad $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$, como el trabajo efectuado por la fuerza \mathbf{F} en la unidad de tiempo. Esto también es válido en dinámica relativista, como se desprende del razonamiento siguiente:

Tenemos

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 = c^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) + E_0^2$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E dE/dt &= c^2 \mathbf{p} \cdot (d\mathbf{p}/dt) \\ &= c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} \end{aligned}$$

Pero $E = mc^2$. Por consiguiente,

$$dE/dt = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{p}/m) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

La ecuación (7-23) se nos convierte entonces en

$$F_x' = \frac{F_x - (v/c^2)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})}{1 - vu_x/c^2} \quad (7-33)$$

De manera análoga (aunque mucho más sencilla) obtenemos

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \quad (7-34)$$

(Observar que si $\mathbf{u} = 0$, obtenemos de nuevo las expresiones sencillas $F_x' = F_x$, $F_y' = F_y/\gamma$.) Entre F_x' y F_z existe una relación exactamente análoga a la ecuación (7-34), y para obtener las expresiones de F_x , F_y , F_z en función de medidas efectuadas en S' deberemos escribir ecuaciones equivalentes a las (7-33) y (7-34), cambiando el signo de v .

La ecuación (7-33) presenta un gran interés puesto que nos dice que para la medida de una fuerza en un sistema debe medirse la *potencia* desarrollada por la fuerza en otro sistema. Es una manifestación más de la interdependencia de las medidas del espacio y del tiempo inherentes a la descripción relativista de las cosas y no existe nada análogo en mecánica clásica. Se ha hecho el siguiente comentario acerca de ello:¹

En mecánica clásica ha habido siempre dos puntos de vista diferentes relativos al concepto de "fuerza." Desde uno de estos puntos de vista se consideraba la fuerza como la "variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento", mientras que desde el otro se la consideraba como "la variación de energía por unidad de longitud". Los diferentes autores han destacado alguno de estos aspectos con preferencia sobre el otro. Así, Galileo desarrolló el primero, mientras que Huyghens se ocupó del segundo. A la luz de los vectores tetradimensionales ambas ideas pueden unificarse y difieren sólo si se las considera como aspectos parciales de un concepto más amplio...

¹ Cita tomada del libro algo antiguo, pero excelente de todos modos, de E. Cunningham, *Relativity, The Electron Theory and Gravitation*, Longmans, Green, Londres, 1921.

Observemos que en el mundo tetradimensional del espacio-tiempo las componentes de las fuerzas F_x , F_y y F_z representan sólo tres de las componentes de un cierto cuadrivector. ¿Cuál es la cuarta componente y cuál es el vector? La ecuación (7-33) suministra una respuesta debido a la aparición del valor $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$. Un cálculo sencillo muy semejante al necesario para la transformación de F'_x conduce al resultado siguiente:

$$\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' = \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) - vF_x}{1 - vu_x/c^2} \quad (7-35)$$

El valor $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})/c$ posee las mismas dimensiones que las componentes espaciales de \mathbf{F} y resulta posible obtener un invariante a partir de estas cuatro cantidades mediante una pequeña manipulación. El ejercicio es en realidad un tanto artificial y sirve sólo para poner de manifiesto la forma en que la cantidad de movimiento y la energía desplazan a la fuerza en el papel de fundamentos básicos de la dinámica relativista.

Es adecuado señalar que una de las afirmaciones básicas de Newton relativas a las fuerzas entre los cuerpos —la igualdad de la acción y la reacción— no tiene sentido en la mecánica relativista. Debe ser, en esencia, una afirmación acerca de las fuerzas que actúan sobre dos cuerpos como resultado de su interacción mutua *en un instante dado*. Y, debido a la relatividad de la simultaneidad, esta frase no posee un sentido único a menos que los puntos en los que se apliquen las fuerzas se encuentren separados por una distancia despreciable. Teniendo en cuenta todo esto, Max Jammer (en sus observaciones citadas anteriormente en este capítulo) afirma que el concepto de acción a distancia carece de sentido en la dinámica relativista. Aunque conoczamos que la fuerza ejercida sobre un objeto es debida sólo a la presencia de algún otro objeto, no existe una manera única de describir su interacción *mutua*; podemos describir sólo la fuerza ejercida sobre cada uno de los cuerpos, por separado en algún punto dado del espacio-tiempo. Esto *no* implica que no podamos efectuar una afirmación cuantitativa acerca de la fuerza ejercida sobre un cuerpo por otro, descrita en un sistema de referencia dado.¹ El análisis relativista, sin embargo, nos lleva a la conclusión de que, de acuerdo con las medidas en un sistema de referencia inercial, las fuerzas de acción y reacción, en general, *no* son iguales y opuestas y, por tanto, la cantidad de movimiento total de las partículas que interactúan no se conserva en todo instante. Esto conduce, si uno desea mantenerse aferrado a la conservación de la cantidad de

¹ En realidad usaremos esto en repetidas ocasiones en el capítulo 8.

movimiento, a la idea de que la cantidad de movimiento, lo mismo que la energía, puede residir en el campo que describe la interacción de las partículas separadas. Por lo que a las partículas concierne, la conservación de la cantidad de movimiento tiene lugar sólo cuando se comparan las situaciones inicial y final (antes de que dé comienzo la interacción y una vez que ésta ha cesado). En el transcurso de la interacción la cantidad de movimiento del campo de interacción debe intervenir, si se desea que se conserve la cantidad de movimiento en todos los instantes y para todos los sistemas de referencia.

Otra consecuencia de las transformaciones de fuerza es que si la fuerza ejercida sobre un cuerpo, medida en un cierto sistema de referencia, depende de su posición pero no de su velocidad, entonces la fuerza medida en otros sistemas de referencia depende de la velocidad del cuerpo, así como de su posición. Probablemente el ejemplo más importante de esto se encuentra en el electromagnetismo. La fuerza ejercida sobre un electrón en movimiento por las cargas en reposo viene dada sencillamente mediante la ley de Coulomb. Pero si nos suponemos situados en un sistema en el cual las cargas origen de la fuerza se encuentran en movimiento, la fuerza ejercida sobre el electrón depende tanto de su velocidad como del movimiento de las demás cargas. En realidad intervienen las fuerzas magnéticas creadas entre lo que constituyen, en efecto, dos corrientes. Vemos aquí el germen del desarrollo mediante el cual puede mostrarse la íntima relación existente entre los campos eléctrico y magnético. Para hacer justicia a la importancia de este tema procederemos a una discusión más extensa; la sugerencia que hemos dado resulta, evidentemente, muy inadecuada. Por tanto, dedicaremos el capítulo final de este libro, por entero, a discutir los elementos de este fascinante desarrollo.

PROBLEMAS

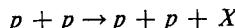
7-1. Un mesón K que recorre el laboratorio se descompone en dos mesones π . Uno de los mesones π permanece en reposo. ¿Cuál era la energía de K? ¿Cuál era la energía del mesón π restante? (La masa en reposo del mesón K = 494 MeV; masa en reposo del mesón $\pi \approx 137$ MeV.)

7-2. Un rayo γ alcanza a un electrón en reposo y da lugar a una pareja electrón positrón:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$$

¿Cuál será la energía mínima del rayo γ que haga posible este proceso?

7-3. Supongamos que un cierto acelerador puede suministrar a los protones una energía cinética de 200 GeV. La masa en reposo m_0 de un protón es 0,938 GeV. Calcular la máxima masa en reposo posible M_0 de una partícula X que pueda producirse por el choque de uno de estos protones de elevada energía con un protón en reposo según el proceso siguiente:



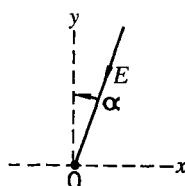
7-4. Una partícula de masa en reposo M choca elásticamente con una partícula inmóvil de masa en reposo $m \ll M$. Si la velocidad inicial de M es tal que $\gamma = M/m$, demostrar que el ángulo máximo a través del cual puede dispersarse M viene dado aproximadamente por $m/\sqrt{3}M$. Demostrar también que el ángulo máximo de retroceso de m es 90° .

7-5. Una partícula de masa en reposo m y una velocidad v choca elásticamente con una partícula estacionaria y de masa en reposo M . Expresar los ángulos de retroceso y de dispersión en función de los ángulos correspondientes en el sistema con cantidad de movimiento nula. Demostrar que las respuestas se reducen al caso no relativista si $v \ll c$.

7-6. La energía cinética K de un sistema en coordenadas de laboratorio está relacionada con la energía cinética K^* en el sistema del centro de masas en el caso no relativista mediante la expresión $K = K^* + MV^2/2$, en donde M es la masa total del sistema y V es la velocidad del centro de masas. ¿Cuál es la expresión análoga para el caso relativista? Demostrar que se reduce al caso anterior si todas las velocidades son mucho menores que c .

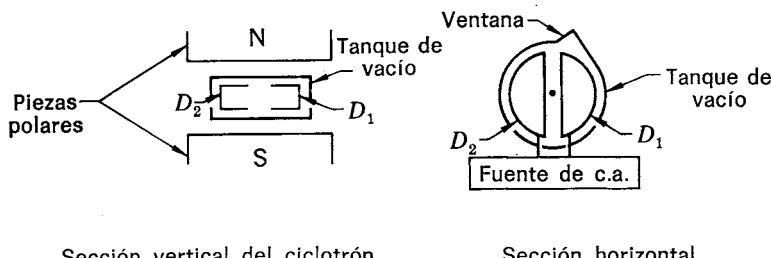
7-7. (a) Un fotón de energía E marcha hacia el origen O de un sistema de coordenadas S formando un ángulo α con el eje y (véase la figura). Utilizando las transformaciones de Lorentz para la energía y la cantidad de movimiento [ecuaciones (7-11)] calcular la energía del fotón en un sistema S' en el cual se observa que el fotón recorre hacia abajo el eje y' .

(b) Aplicar el mismo tipo de análisis al problema de Mössbauer (problema 6-6) calculando la energía del fotón recibido en el sistema en el que el observador situado en la periferia de la rueda se encuentra instantáneamente en reposo. Observar que esto nos suministra un método alternativo para la obtención de la fórmula del efecto Doppler.



7-8. En el problema 5-18 se trataba de analizar el problema de un objeto que marchaba durante un tiempo t (tiempo terrestre) con una aceleración constante de $9,8 \text{ m/s}^2$ (g) en su propio sistema en reposo. Resolver de nuevo este problema haciendo uso de la propiedad $F_x = F'_x$ junto con el factor variable de dilatación de tiempos $\gamma(v)$ que relaciona los elementos de tiempo dt y dt' en cualquier etapa.

7-9. El ciclotrón es una máquina empleada para acelerar los iones positivos a energías de unos pocos MeV (véase la figura). Las D son corazas metálicas que apantallan los campos eléctricos, pero no los magnéticos. Existe, por tanto, un campo magnético efectivo B en todo el interior del recipiente metálico en el que se ha efectuado el vacío y un campo eléctrico alterno (sinusoidal) en la pequeña ranura entre las D . Cuando este campo se encuentra en fase con los iones, éstos reciben un impulso cada semicírculo. Estos impulsos aumentan la energía y, por consiguiente, el radio de la órbita de los iones hasta que, finalmente, son expulsados por la ventana.



Sección vertical del ciclotrón

Sección horizontal

(a) ¿Cuál es la frecuencia a la cual los iones recorren el ciclotrón? Demostrar que la respuesta es independiente de la energía cinética de los iones si $v \ll c$. Obtener el resultado numérico correspondiente al caso de los protones suponiendo que $B = 1,5$ unidades MKS (webers/m²).

(b) Si el máximo diámetro que puede utilizarse en el interior de las D es 60 cm, ¿cuáles son la energía cinética máxima y la velocidad máxima que puede alcanzar este protón?

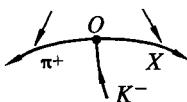
(c) Si los protones reciben un impulso de 10^5 volts cada vez que atraviesan la ranura, ¿cuántas revoluciones efectuarán antes de escapar por la ventana? ¿Cuánto tiempo dura el proceso entero?

(d) ¿Qué dificultades técnicas surgen si el máximo diámetro que se puede emplear aumenta grandemente (a 6 m, por ejemplo)?

7-10. En un experimento con una cámara de niebla [H. Whiteside, J. N. Palmieri y R. A. Burnstein, *Am. J. Phys.*, **34**, 1005 (1966)], se observó que un mesón K-interaccionaba con un protón en reposo y se obtenía, en consecuencia, un mesón π^+ y una partícula desconocida (X), obteniéndose las tres trayectorias que se

muestran en la figura. El campo magnético en el interior de la cámara de niebla era de $1,70 \pm 0,07$ webers/m² (unidades MKS).

Radio de curvatura = 34,0 cm



(a) ¿Por qué las trayectorias que tienen como origen el vértice O (punto de interacción) indican que el K^- se encontraba en reposo en el instante de la interacción?

(b) Identificar la partícula desconocida usando la tabla que se da a continuación.

Nombre y símbolo		Masa en reposo (MeV)	Carga, unidades de e
Positrón, electrón	e^+, e^-	0,511	± 1
Muon	μ^+, μ^-	105,7	± 1
Mesón pi	π^+, π^-	139,6	± 1
Mesón K	K^+, K^-	493,8	± 1
Protón	p^+	938,3	1
Neutrón	n	939,6	0
Lambda	Λ^0	1115,4	0
Sigma más	Σ^+	1189,4	1
Sigma cero	Σ^0	1192,3	0
Sigma menos	Σ^-	1197,2	-1
Xi cero	Ξ^0	1314,3	0
Xi menos	Ξ^-	1320,8	-1
Omega menos	Ω^-	1675	-1

Lo que me condujo más o menos directamente a la teoría especial de la relatividad fue la convicción de que la fuerza electromotriz que actúa sobre un cuerpo en movimiento en un campo magnético no era más que un campo eléctrico.

ALBERT EINSTEIN (1952)

De una carta dirigida al Michelson Commemorative Meeting de la Cleveland Physics Society, citada por R. S. Shankland, *Am. J. Phys.*, 32, 16 (1964), p. 35.

8

Relatividad

y

electricidad

HACIA FINALES del siglo XIX los fenómenos básicos de la electricidad y del magnetismo clásicos eran bien conocidos. Los cuerpos cargados eléctricamente ejercían fuerzas entre sí y los efectos podían describirse en función de campos eléctricos. Los hilos eléctricamente *neutros* por los cuales circulaban corrientes ejercían fuerzas entre sí y sobre los imanes, y los efectos podían describirse en función de campos magnéticos. Un campo magnético variable con el tiempo originaba una corriente que circulaba por un circuito conductor —fenómeno denominado *inducción electromagnética*. Y las perturbaciones eléctricas (como por ejemplo, las ondas de la radio) podían propagarse por el espacio. James Clerk Maxwell obtuvo, ya en 1864, un conjunto de ecuaciones que describían de manera adecuada las relaciones entre los campos eléctricos, los campos magnéticos y las cargas eléctricas en reposo y en movimiento. El principio de la relatividad exigía que estas relaciones fuesen exactamente las mismas con independencia del sistema de coordenadas inercial al cual se refiriesen las observaciones.

El principio de relatividad impone severas condiciones a cualquier teoría. Supongamos que mientras trabajamos en un sistema inercial de coordenadas S descubrimos la ley que describe el campo eléctrico producido por una carga en movimiento. En un sistema de coordenadas inercial diferente, S' , se observará la misma carga moviéndose a una velocidad diferente y el campo eléctrico puede tener valores diferentes. Si sabemos la forma de efectuar las transformaciones que relacionan las medidas en S con las medidas en S' podremos encontrar la forma de la ley que describe, en S' , la conexión existente allí entre

una carga en movimiento y su campo eléctrico. El principio de relatividad exige que la ley sea exactamente igual a la obtenida en *S*.

El principio de relatividad puede emplearse de diferentes maneras. Si creemos conocer una ley de la naturaleza que relaciona varias cantidades observadas podemos usar el principio de relatividad para averiguar la forma en que deben transformarse las magnitudes observadas. Si conocemos de antemano (o creemos conocer) cómo se transforman las magnitudes observadas, podemos comprobar si una teoría determinada satisface o no el principio de relatividad. En caso de que no lo satisfaga es que algo marcha mal. Procediendo de esta manera, Einstein logró descubrir que la mecánica newtoniana no soportaba la prueba, y procedió a proponer las modificaciones adecuadas.

Como hemos visto en reiteradas ocasiones a lo largo de este libro, las desviaciones con respecto a las predicciones de la mecánica newtoniana se van haciendo cada vez mayores a medida que las velocidades consideradas se van acercando a la velocidad de la luz. Esto no debe sorprender en modo alguno. Después de todo, la validez de la mecánica newtoniana fue comprobada tan sólo para velocidades bajas y es siempre arriesgado el aplicar una ley fuera del dominio de su validez.

Lo que realmente sorprende es que las leyes de la electricidad y magnetismo de Maxwell *no* necesiten variación alguna para el caso de velocidades elevadas. Las observaciones experimentales en las que se basó Maxwell al estudiar los efectos producidos por las cargas en movimiento fueron efectuadas todas con cargas que se movían con relativa lentitud. Sin embargo, hoy sabemos que las leyes de Maxwell siguen conservando su validez aun cuando las velocidades de las cargas tiendan a la velocidad de la luz. En realidad, la suposición de Einstein de que las ecuaciones de Maxwell representan adecuadamente los fenómenos del electromagnetismo en cualquier sistema de coordenadas inercial fue lo que permitió obtener las expresiones para las transformaciones de los campos eléctrico y magnético.

Desde el punto de vista histórico la teoría electromagnética precedió a la teoría de la relatividad especial —tal como lo atestigua el que el gran trabajo publicado por Einstein en 1905 llevara el título “Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento”. Sin embargo, hoy día poseemos la teoría de relatividad establecida sobre bases propias. Es un instrumento poderoso que puede servirnos para desarrollar la teoría electromagnética. En este capítulo nuestra empresa no será tan ambiciosa, pero servirá adecuadamente para demostrar cómo, mediante la aplicación de las ideas y las técnicas relativistas, puede establecerse la conexión íntima entre los fenómenos eléctricos y magnéticos.

A modo de introducción haremos un repaso de los principios del electromagnetismo que tengan interés para nuestra discusión.

LA LEY DE COULOMB

Los experimentos realizados por Coulomb y otros permitieron establecer que la fuerza que una carga en reposo q_1 ejerce sobre otra carga q_2 también en reposo es directamente proporcional al valor de ambas cargas, inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre ellas y dirigidas en el sentido de la recta que une ambas cargas. Podemos escribir esto de la manera siguiente:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (8-1)$$

en donde \mathbf{F} es la fuerza que ejerce q_1 sobre q_2 , k es una constante de proporcionalidad, r es el valor de la distancia entre q_1 y q_2 , y \mathbf{e}_r es un vector unitario según la dirección de la recta que pasa por q_1 y q_2 .¹ En el sistema de unidades CGS el valor de la constante k es la unidad, por definición, mientras que en el sistema MKS posee, aproximadamente, el valor $9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{coulomb}^2$. El valor de la fuerza se deduce del comportamiento de q_2 —o bien, para ser más precisos, del comportamiento del objeto sobre el cual reside la carga q_2 . Nos referiremos, por tanto, a la carga q_1 como la *carga fuente* y a q_2 como la *carga de prueba*, aunque, por supuesto, sus papeles pueden intercambiarse en el caso de que así se desee.

Puesto que \mathbf{e}_r vale \mathbf{r}/r , en donde \mathbf{r} es la distancia vectorial desde q_1 a q_2 , la ley de Coulomb puede escribirse también

$$\mathbf{F} = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (8-1a)$$

aunque debe observarse que la dependencia sigue siendo del tipo inverso-cuadrada, a pesar de que en el denominador aparece r^3 .

Si se coloca una carga de prueba entre dos placas cargadas (por ejemplo, en un aparato de Millikan) la fuerza que se ejerce sobre ella puede calcularse a partir de la ley de Coulomb. Si la carga de prueba se encuentra en movimiento, cuando se encuentra entre las placas cargadas, como en el caso de un tubo

¹ El empleo del símbolo \mathbf{e} para designar el vector unidad viene de la palabra alemana "einheit" (unidad).

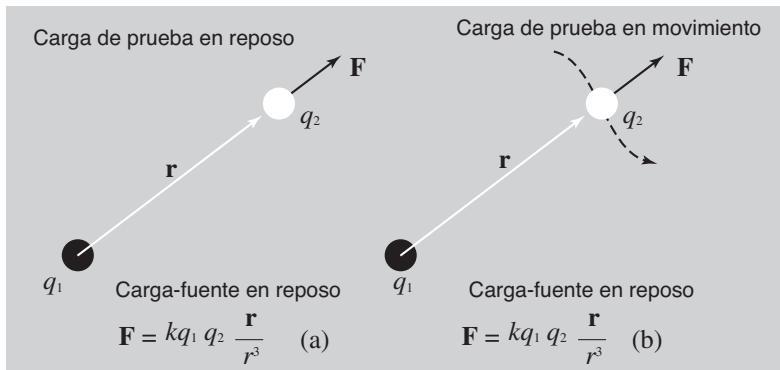


Fig. 8-1. *La ley de Coulomb (a) tal como se estableció inicialmente con ambas cargas en reposo. (b) Sigue siendo cierta en el caso que la carga de prueba se encuentre en movimiento, siempre que la carga-fuente permanezca en reposo.*

de rayos catódicos, las medidas experimentales de la desviación que sufre la partícula muestran que la fuerza que se ejerce sobre la carga en movimiento sigue viniendo expresada correctamente por la ecuación (8-1). Esto continúa siendo cierto aun cuando la velocidad de la carga de prueba tienda a la velocidad de la luz. La investigación descrita en la película titulada “La velocidad límite” muestra que la energía adquirida por un electrón que se mueve muy rápidamente por la acción de una fuerza eléctrica puede calcularse analíticamente suponiendo que la fuerza está correctamente expresada por la ecuación (8-1). Generalizando estas observaciones, podemos afirmar que *la ley de Coulomb expresa de forma correcta la fuerza ejercida sobre la carga de prueba para cualquier velocidad (por muy elevada que sea), siempre que la carga fuente permanezca en reposo* (véase la fig. 8-1). Puesto que \mathbf{F} es proporcional al valor de la carga de prueba, e independiente de su velocidad, podemos usar nuestro conocimiento de la expresión de la fuerza \mathbf{F}_{elec} para un valor dado de q_2 para definir lo que llamaremos el *campo eléctrico* $\boldsymbol{\epsilon}$ en el punto ocupado por la carga de prueba

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = q_2 \boldsymbol{\epsilon} \quad (8-2)$$

y por tanto, en el caso de una fuente compuesta por una sola carga en reposo, q_1 , resulta

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{kq_1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (8-2a)$$

Conocido el valor de ϵ podemos proceder a calcular la fuerza de Coulomb ejercida sobre una partícula cargada en un lugar determinado.

LA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

A pesar de lo que acabamos de decir acerca de la independencia de la fuerza de Coulomb que se ejerce sobre una partícula cargada, cualquiera que sea su estado de movimiento, se ha observado que una partícula cargada en un punto dado *puede* experimentar una fuerza que dependa de su velocidad. Esta fuerza aparece cuando en el punto que ocupa la carga existe lo que denominaremos un campo magnético. Este campo posee una dirección bien definida, que puede conocerse, por ejemplo, mediante el empleo de una aguja imantada que gire libremente, y la fuerza de origen magnético que se ejerce sobre la carga móvil se ha comprobado que viene dada por la expresión siguiente (ya mencionada en el capítulo 7):

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \text{const.} (q_2 \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

en donde \mathbf{u} es la velocidad de la partícula cargada (con una carga q_2) y \mathbf{B} representa la fuerza y la dirección del campo magnético. En el sistema de unidades MKS el valor de la constante es la unidad debido a la forma en que se definen las unidades de carga y de campo magnético. En el sistema CGS la constante resulta ser igual al valor numérico de $1/c$. ¿Por qué sucede así? Resultaría inadecuado el dedicarnos en este capítulo a hacer un estudio riguroso de las unidades y de los sistemas de medida. Nuestro interés principal es otro. Sin embargo, la claridad de ideas que la teoría de relatividad aporta al electromagnetismo disipa toda apariencia de arbitrariedad sobre este tema. Pone de manifiesto la relación esencial entre la ley de Coulomb y la ley de la fuerza magnética, así como entre las constantes que aparecen en ellas. Quizá sea conveniente hacer ahora, al comienzo de nuestra exposición, algunas observaciones más acerca de estas dos leyes de fuerza fundamentales.

Cuando se desarrolló la electrostática, utilizamos la ley de Coulomb para definir la unidad de carga eléctrica. Como el sistema CGS estaba en boga por aquella época, la carga unidad se definió como la carga que situada a 1 cm de otra semejante en el vacío ejercía (entre sí) una fuerza de 1 dina ($= 10^{-5}$ N). La fuerza entre dos cargas arbitrarias situadas en el vacío podía entonces hacerse igual a $q_1 q_2 / r^2$. Por consiguiente, utilizando el sistema CGS, la unidad de carga (1 ues) se definió en función de la fuerza ejercida entre cargas *en reposo*.

Con bastante posterioridad se observó que, puesto que las corrientes eléctricas estaban formadas por cargas en movimiento, una manera alternativa de definir la unidad de carga podía efectuarse a partir del análisis de la fuerza de tipo magnético ejercida por una corriente sobre otra. Esto se utilizó para definir la unidad práctica de carga (1 coulomb) que es el fundamento de las medidas eléctricas en el sistema MKS.¹ Dentro de este esquema, una vez definida la unidad pertinente de campo magnético, la ley fundamental que expresa la fuerza ejercida sobre una carga *en movimiento* puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q_2 \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (\text{sistema MKS}) \quad (8-3)$$

Una vez conocido el valor de \mathbf{B} en un punto determinado, podemos calcular el valor de la fuerza magnética ejercida sobre una partícula cargada en ese punto para cualquier velocidad.

La fuerza electromagnética *total* ejercida sobre una carga en un punto dado puede escribirse como suma de la fuerza eléctrica que experimentaría si estuviese en reposo más la fuerza magnética dada por la ecuación (8-3). Por tanto, en general, tenemos que

$$\mathbf{F} = q_2(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (\text{sistema MKS}) \quad (8-4)$$

relación conocida como *ley de fuerzas de Lorentz*. Podemos considerar a la ecuación (8-4) como una forma de *definir* el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} en función de las fuerzas que se ejercen sobre las cargas en diversos estados de movimiento (incluyendo el reposo) en un punto dado.

La ley de fuerzas de Coulomb expresa de manera definitiva la fuerza ejercida sobre una partícula cargada, en movimiento o en reposo, producida por cargas *en reposo*. La fuerza magnética está asociada a las *cargas fuente* que se encuentran en movimiento. Veremos esto de manera explícita en el caso de la interacción de hilos por los cuales circulen corrientes. Un hilo es eléctricamente neutro (al menos en muy buena aproximación) con independencia de que lleve o no una corriente eléctrica. No ejerce ninguna fuerza de Coulomb sobre una partícula cargada situada en su vecindad. Pero cuando por él circula una corriente se crea un campo magnético alrededor y se ejerce una fuerza, descrita por la ecuación (8-3), sobre cualquier partícula cargada situada en sus alrededores. La corriente consiste en el arrastre sistemático de los electrones

¹ La diferencia esencial, evidentemente, no reside en que empleemos centímetros y gramos en lugar de metros y kilogramos, sino en que basemos nuestra definición de la carga unidad en la ley de Coulomb o en la fuerza entre corrientes.

del interior del hilo y podemos atribuir la existencia del campo magnético a este movimiento. La fuerza ejercida por un hilo portador de corriente sobre otro hilo (ambos eléctricamente neutros) puede entenderse, desde un punto de vista microscópico, considerando las fuerzas magnéticas ejercidas sobre las cargas de prueba en movimiento en uno de los hilos debidas a las cargas fuente en movimiento del otro hilo. Más adelante, en este capítulo, desarrollaremos este mismo resultado. Al igual que ocurre con la ley de fuerzas de Coulomb, la denominación de una carga como carga fuente y la otra carga como carga de prueba es algo totalmente arbitrario, por supuesto.

INTRODUCCIÓN DE CONSIDERACIONES RELATIVISTAS

Desde el punto de vista de cualquier teoría que considere todos los sistemas inerciales físicamente equivalentes, la distinción entre los efectos debidos a las cargas en reposo y los debidos a las cargas en movimiento no puede tomarse como fundamental. Es una diferenciación que depende del empleo de un sistema de referencia particular. Una carga de prueba que se mueve con respecto a un sistema y está sujeta, por consiguiente, a una fuerza magnética, se encuentra en reposo con respecto a otro sistema y no experimenta, por consiguiente, fuerza magnética alguna, aunque exista un campo magnético en el punto ocupado por la carga. De igual manera, una carga fuente que esté en movimiento con respecto a un sistema y actúe, por tanto, como fuente de un campo magnético se encuentra en reposo respecto a otro sistema y, por tanto, en lo que se refiere a este último sistema, da origen sólo a un campo eléctrico. Resulta siempre posible elegir un sistema de referencia en el cual una partícula dada cualquiera se encuentre en reposo. En las discusiones que siguen haremos reiterado uso de esta posibilidad que nos permite (al menos en nuestra imaginación) convertir cualquier problema en otro para el cual la carga de la fuente o la carga de prueba permanece en reposo.

Efectuaremos nuestro análisis en función de las *fuerzas* que se ejercen entre cargas que se encuentren en estados de movimiento diferentes. Nuestro punto de partida (conseguido, quizás, mediante un cambio previo del sistema de referencia) será el efecto debido a una carga eléctrica estacionaria —es decir, a una interacción descrita mediante la ley de fuerzas de Coulomb y el campo eléctrico asociado para la carga en reposo. Observada desde un sistema de coordenadas diferente, la carga “en reposo” se encuentra en movimiento. Las relaciones para la transformación de la teoría de la relatividad nos permitirán

describir la forma en que las cosas son descritas en este nuevo sistema de coordenadas. Veremos cómo la ley que describe el campo eléctrico de una carga en movimiento difiere de la ley para el caso de una carga en reposo. Veremos también que una carga en movimiento ejerce una fuerza sobre una segunda carga en movimiento que depende de las velocidades de *ambas* cargas. Esta interacción nos permitirá identificar el *campo magnético* de la carga en movimiento, no existiendo tal campo en el caso de la carga en reposo. A esto se refiere Einstein en la cita presentada al comienzo del capítulo: Lo que en un sistema de coordenadas aparenta ser un campo magnético, en otro sistema de coordenadas resulta ser simplemente un campo eléctrico. *A partir de la ley de Coulomb únicamente* (y con el auxilio de la relatividad) podemos obtener una descripción cuantitativa de las interacciones eléctrica y magnética entre cargas que se muevan con velocidades constantes arbitrarias (y podemos tratar también muchos problemas, aunque no en todos intervengan cargas aceleradas).

Obsérvese en especial que a lo largo de toda la discusión se consideran las *fuerzas* como la magnitud fundamental. La identificación de los campos eléctrico y magnético constituye entonces una etapa secundaria, basada en la descomposición de la fuerza total en dos partes, la primera independiente de la velocidad de la carga de prueba (**E**), y la segunda función de la velocidad de la carga de prueba, (**B**).

LA TRANSFORMACIÓN DE LA LEY DE COULOMB

Cuando decimos que la fuerza ejercida por una carga fuente en reposo sobre una carga de prueba es $\mathbf{F} = k(q_1 q_2 / r^2) \mathbf{e}_r$, debemos tener presente el significado preciso de esta afirmación. Describe el estado de las cosas en un instante determinado medido en un cierto sistema de referencia —el sistema en el cual q_1 permanece en reposo. El vector \mathbf{r} tiene como módulo la separación espacial entre q_1 y q_2 en ese instante, y la fuerza \mathbf{F} actúa según la dirección de \mathbf{r} . Bajo la acción de esta única fuerza la cantidad de movimiento \mathbf{p}_2 de la partícula de prueba variaría a un ritmo dado por $d\mathbf{p}_2/dt = \mathbf{F}$; es decir, $d\mathbf{p}_2/dt$ es una medida de la fuerza \mathbf{F} . Sin embargo, todas las cantidades cinemáticas y dinámicas que intervienen: (la velocidad nula de la carga que desempeña el papel de fuente, la distancia entre la carga fuente y la carga de prueba y la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento de la carga de prueba) están medidas en un sistema de coordenadas particular. Referido a un segundo sistema de coordenadas que se mueve con relación al primero, la carga fuente

no se encontrará ya en reposo, la distancia (definida como medida en un instante dado en el sistema nuevo) entre la carga fuente y la carga de prueba puede ser diferente y la velocidad con que varía la cantidad de movimiento, la medida de la fuerza sobre la carga de prueba, puede ser diferente. Si podemos determinar los nuevos valores de estas diversas cantidades medidos en el nuevo sistema de coordenadas tendremos entonces una ley que nos expresará la fuerza ejercida sobre una carga de prueba en presencia de una carga fuente en movimiento. La base de todos nuestros cálculos radicará en las transformaciones

TABLA 8-1

$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{array} \right\} \quad (8-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x' = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u_y' = \frac{u_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \\ u_z' = \frac{u_z/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \end{array} \right\} \quad (8-6)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x' = \frac{F_x - (v/c^2)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})}{1 - vu_x/c^2} \\ F_y' = \frac{F_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \\ F_z' = \frac{F_z/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \end{array} \right\} \quad (8-7)$$

de Lorentz, junto con las transformaciones de fuerzas obtenidas en el último capítulo. El procedimiento puede parecer un tanto complicado a primera vista pero en realidad no es difícil.

Empezaremos entonces con algunas situaciones en las cuales la carga de prueba se encuentra en reposo con respecto a un sistema de referencia S . Por tanto, descrita en este sistema, la única fuerza que puede actuar en él es debida a un campo eléctrico. Pero supongamos que la *carga fuente* se mueve con respecto a S . Procederemos de la manera siguiente:

1. Mediante una transformación pasaremos a un sistema S' en el cual la carga-fuente se encuentra en reposo. La ley de Coulomb expresada por la ecuación (8-1) nos da la fuerza sobre la carga de prueba medida en S' . (La *carga de prueba* se encuentra en movimiento, observada en S' , pero, como ya hemos señalado anteriormente de manera detenida, el empleo de la ley de Coulomb requiere sólo que la carga-fuente se encuentre en reposo.)

2. Volveremos de nuevo desde S' a S para obtener una expresión de la fuerza, medida en S , en función sólo de las coordenadas en S . Para ello emplearemos las ecuaciones de la transformación para la posición, el tiempo, la velocidad y la fuerza. Para mayor comodidad y a modo de referencia las hemos recogido en la tabla 8-1.

LA FUERZA SOBRE UNA CARGA DE PRUEBA EN REPOSO

Caso 1. Supongamos que la carga-fuente q_1 se está moviendo a la velocidad constante $(v, 0, 0)$ relativa a S y que en el instante $t = 0$ está situada en el origen de S . Supongamos también que la carga de prueba q_2 permanece en reposo en el eje x en el punto $(x, 0, 0)$. Esta situación se ilustra en la figura 8-2(a).

No podemos aplicar directamente la ley de Coulomb para obtener la fuerza sobre q_2 , ya que q_1 se está moviendo y la ley de Coulomb no es válida cuando la carga-fuente se encuentra en movimiento. De hecho, veremos que la ley de Coulomb, aplicada directamente, *no* nos da el valor correcto de la fuerza ejercida sobre la carga de prueba.

Sin embargo, consideremos la situación vista desde S' . El sistema S' se mueve a una velocidad $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ relativa a S . Por consiguiente, en S' la carga-fuente q_1 se encuentra en reposo en el origen y la carga de prueba q_2 se está moviendo a lo largo del eje x' a una velocidad $\mathbf{u}' = (-v, 0, 0)$. En el instante t' la carga de prueba poseerá unas coordenadas espaciales $(x', 0, 0)$. Elegiremos x' y t' de manera que $(x, 0, 0, 0)$ y $(x', 0, 0, t')$ describan el mismo punto del espacio-tiempo relativo a S y S' , respectivamente. Esta situación es la que se muestra en la figura 8-2(b).

Antes de seguir adelante resaltaremos una característica muy importante que pudiera pasar inadvertida. El fin de nuestros cálculos es el obtener la fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 en un instante particular $t = 0$ medido en S . Si describimos un suceso puntual en términos de sus coordenadas (x, y, z, t) , entonces las coordenadas espacio-tiempo de q_1 y q_2 serían $(0, 0, 0, 0)$ y

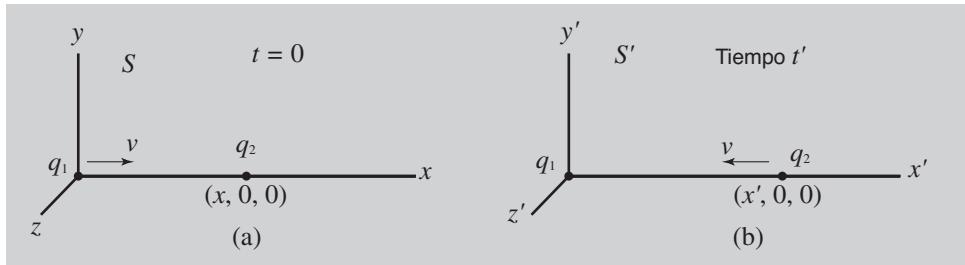


Fig. 8-2. En el caso (a) la carga-fuente se encuentra en movimiento y la carga de prueba se encuentra en reposo: efectuando una transformación a otro sistema (b) la carga-fuente permanece ahora en reposo y puede aplicarse entonces la ley de Coulomb.

$(x, 0, 0, 0)$, respectivamente. Efectuaremos la transformación a S' haciendo uso de las transformaciones de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

Esto nos da el siguiente resultado:

Coordenada espacio-tiempo de q_1 : $(0, 0, 0, 0)$

Coordenada espacio-tiempo de q_2 : $(x', 0, 0, t')$

en donde $x' = \gamma x$, $t' = -\gamma(vx/c^2)$. Las coordenadas anteriores no definen sucesos puntuales que tienen lugar en el mismo instante en S' . Mas para emplear la ley de fuerzas de Coulomb en S' debemos ser capaces de especificar las posiciones relativas de q_1 y q_2 en el mismo instante en aquel sistema. Podemos hacer esto, ya que en S' , q_1 permanece en reposo y por tanto su posición para $t' = -\gamma(vx/c^2)$ es la misma que para $t' = 0$. Sin embargo, debe tenerse en cuenta aquí algo de fundamental importancia. Dados dos sucesos puntuales (\mathbf{r}_1, t) y (\mathbf{r}_2, t) que ocurren en el mismo instante t en S , podemos describirlos como teniendo lugar en (\mathbf{r}'_1, t'_1) y (\mathbf{r}'_2, t'_2) en S' , y en general $t'_1 \neq t'_2$. Por consiguiente, el valor de $\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$ no representa, en general, la distancia entre dos partículas de acuerdo con el criterio (simultaneidad) para llevar a cabo tales medidas en S' . Por tanto, no es, en general, el valor apropiado para ser empleado en la ley de Coulomb —a pesar de que es perfectamente válido para el caso que estamos discutiendo.

Volvamos ahora a nuestro problema una vez justificado el empleo de la distancia $x' = \gamma x$ para describir la separación existente entre q_1 y q_2 en S' . La fuerza ejercida sobre q_2 por q_1 viene descrita entonces (en S') por las componentes siguientes, de acuerdo con la ley de Coulomb:

$$F'_x = kq_1q_2/x'^2 \quad F'_y = 0 \quad F'_z = 0$$

Procederemos a efectuar la transformación inversa a S , usando las ecuaciones de la tabla 8-1. Para q_2 tenemos $u_x' = -v$. Sustituyendo este valor y las componentes de \mathbf{F}' dadas anteriormente, obtenemos

$$F_x = F'_x = kq_1q_2/x'^2 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0$$

En este caso la fuerza ejercida sobre q_2 medida en S en el instante $t = 0$ posee el mismo valor que en S' en el instante t' . Sin embargo, la distancia entre q_1 y q_2 medida en S para $t = 0$ es menor que la medida en S' en el instante t' . Esto significa que la ley de fuerzas varía si la carga-fuente se encuentra en movimiento. Para ver cómo se modifica debemos expresar F_x en función de la separación de las cargas medidas en S . Puesto que $x' = \gamma x$,

$$F_x = \frac{1}{\gamma^2} \frac{kq_1q_2}{x^2}$$

Por tanto, la carga-fuente, moviéndose a velocidad v , actúa sobre la carga de prueba, en reposo en la recta que recorre la carga-fuente, con una fuerza de valor $1/\gamma^2$ veces la fuerza de Coulomb. Este resultado es válido con independencia de que la carga-fuente se mueva hacia la carga de prueba o retroceda de ella.

Caso 2. Consideraremos ahora una segunda situación en la cual la carga de prueba q_2 permanece en reposo en el eje de las y en el punto $(0, y, 0)$. Supongamos de nuevo que la carga-fuente q_1 se mueve a la velocidad constante $(v, 0, 0)$ relativa a S , y que, en el instante $t = 0$, se encuentra situada en el origen [fig. 8-3(a)]:

En S' las coordenadas espacio-tiempo de q_2 , correspondientes al punto espacio-tiempo $(0, y, 0, 0)$ de S , son $(0, y', 0, 0)$, y la situación para $t' = 0$ es la que se muestra en la figura 8-3(b), vieniendo expresada la velocidad de q_2 por $u_x' = -v$.

En S' , la carga q_1 se encuentra en reposo y podemos aplicar, por tanto, la

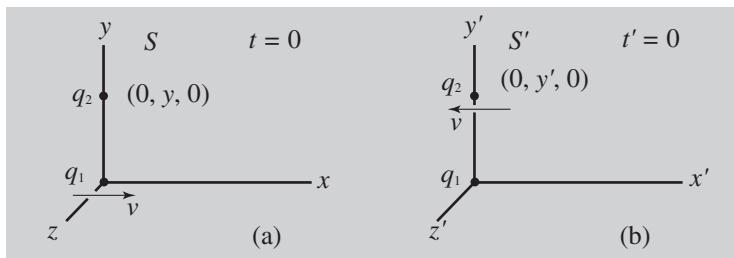


Fig. 8-3. Es un caso análogo al de la figura 8-2, variando sólo la geometría del problema.

ley de Coulomb para obtener la fuerza ejercida sobre q_2 observada en S' en el instante $t' = 0$, cuando q_2 está situada en $(0, y', 0)$. Esta fuerza es

$$F_x' = 0 \quad F_y' = kq_1q_2/y'^2 \quad F_z' = 0$$

Las ecuaciones (8-7) nos dan la siguiente expresión de la fuerza medida en S :

$$F_x = 0 \quad F_z = 0$$

$$F_y = \frac{F_y'/\gamma}{1 + vu_x/c^2} = \frac{F_y'}{\gamma(1 - v^2/c^2)} = \gamma F_y'$$

Por tanto, en *este* caso, la fuerza ejercida sobre q_2 resulta ser diferente según el sistema en que se la mida. Pero puesto que $y = y'$, la distancia entre las dos cargas, medida en S y S' , en $t = 0$ y $t' = 0$, es la misma. Por el contrario, en el caso 1 la fuerza medida en los dos sistemas seguirá siendo la misma, pero la distancia entre las cargas será diferente en los dos sistemas. De cualquier manera, la *ley* de fuerzas viene modificada —en el caso 1 por el factor $1/\gamma$; y en el caso presente por el factor γ , como veremos a continuación.

Expresando F_y en función de la separación entre las cargas medida en S , tenemos

$$F_y = \gamma \frac{kq_1q_2}{y^2}$$

Por consiguiente, en el instante en que la recta que va desde la carga-fuente en movimiento a la carga de prueba en reposo es perpendicular a la dirección del movimiento de la carga-fuente, la fuerza sobre la carga de prueba es superior a la fuerza de Coulomb en el factor γ .

Caso 3. En los casos 1 y 2 la carga de prueba ocupaba un lugar especial en relación con la carga-fuente. Supongamos ahora que q_2 se encuentra en reposo y que está situada en un punto cualquiera (x, y, z) . Supongamos que q_1 se mueve como antes. Entonces resulta que en S , para $t = 0$, se tiene la situación que se muestra en la figura 8-4(a). Las coordenadas de espacio-tiempo de q_2 son $(x, y, z, 0)$. En S' , el mismo punto espacio-tiempo poseerá las coordenadas (x', y', z', t') , dadas por las transformaciones de coordenadas de las ecuaciones (8-5). En S' en el instante t' tendremos el caso que muestra la figura 8-4(b).

En S' , q_1 permanece en reposo, y empleando la ley de Coulomb obtenemos que

$$F_x' = kq_1q_2 \frac{x'}{r'^3} \quad F_y' = kq_1q_2 \frac{y'}{r'^3} \quad F_z' = kq_1q_2 \frac{z'}{r'^3}$$

De las ecuaciones (8-7),

$$F_x = F_x' \quad F_y = \gamma F_y' \quad F_z = \gamma F_z'$$

Por lo que

$$F_x = kq_1q_2 \frac{x'}{r'^3} \quad F_y = \gamma kq_1q_2 \frac{y'}{r'^3} \quad F_z = \gamma kq_1q_2 \frac{z'}{r'^3}$$

Pero

$$x' = \gamma x \quad y' = y \quad z' = z$$

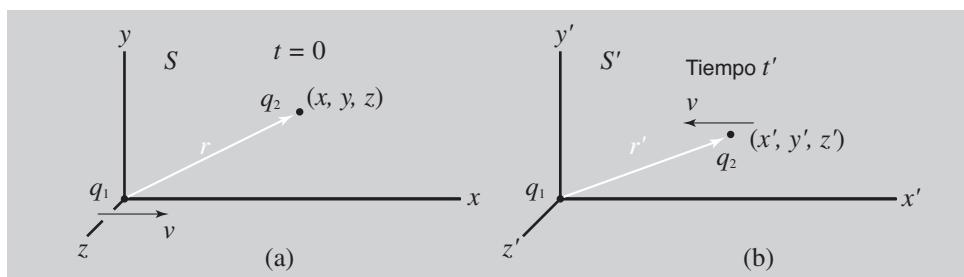


Fig. 8-4. (a) La carga fuente en movimiento y la carga de prueba en reposo se encuentran ambas en posiciones relativas arbitrarias. (b) Es el mismo caso una vez efectuada la transformación a un sistema en el cual la carga-fuente permanece en reposo.

Con lo cual, en S ,

$$F_x = \gamma k q_1 q_2 x / r'^3 \quad F_y = \gamma k q_1 q_2 y / r'^3 \quad F_z = \gamma k q_1 q_2 z / r'^3$$

en donde

$$r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} = (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Estos resultados pueden reunirse en una ecuación vectorial única:

$$\mathbf{F} = \gamma k q_1 q_2 \mathbf{r} / r'^3 = k q_1 q_2 \frac{\gamma \mathbf{r}}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (8-8)$$

Por consiguiente, la fuerza ejercida sobre la carga de prueba en reposo q_2 , en un instante dado, debido a la carga-fuente en movimiento q_1 , se encuentra dirigida según la recta que pasa por q_2 trazada desde el punto que ocupa q_1 en ese mismo instante. Comparada con la fuerza ordinaria de Coulomb que actuaría sobre q_2 si q_1 permaneciese también en reposo resulta que la fuerza en el caso presente disminuye según el factor $1/\gamma^2$ si la carga de prueba se encuentra alineada con respecto a la carga-fuente en movimiento y situada por delante o por detrás de ella, aumenta según el factor γ si q_2 se encuentra a un lado de q_1 , y varía continuamente de un valor al otro para posiciones intermedias de q_2 . Resulta interesante observar que la distorsión del campo, en comparación con la de una carga en reposo, es simétrica hacia adelante y hacia atrás —es decir, con relación a un plano que pasa a través de la carga formando 90° con su dirección de movimiento. Cabría esperar que, desde un punto de vista intuitivo el campo estuviese intensificado hacia adelante y debilitado hacia atrás, pero, sin embargo, no ocurre así.¹

Puesto que la ecuación (8-8) describe la fuerza ejercida sobre una carga de prueba *en reposo*, el valor de \mathbf{F}/q_2 es sencillamente el campo eléctrico \mathbf{E} debido a q_1 . Tenemos, por tanto, que

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \gamma k q_1 \mathbf{r} / r'^3 = k q_1 \frac{\gamma \mathbf{r}}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (8-9)$$

Ahora bien, el campo eléctrico debido a una carga-fuente en reposo es de tipo radial y presenta, por tanto, simetría esférica, es decir, es el mismo en

¹ Véase, sin embargo, el problema 8-3.

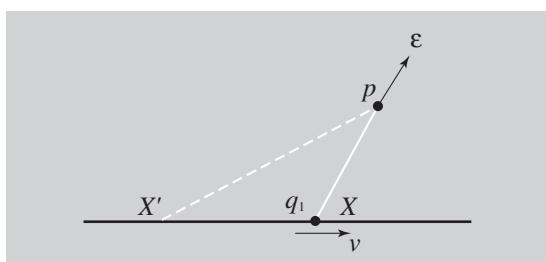


Fig. 8-5. Campo eléctrico creado en P por una carga q_1 que se mueve uniformemente y atribuible al instante en que esta carga se encontraba en la posición X' y que está dirigido radialmente hacia la posición X que ocupa la carga en el instante presente.

todas las direcciones. Es, sencillamente, el campo de Coulomb, $\epsilon = kq_1\mathbf{r}/r^3$. Si la carga-fuente se mueve uniformemente el campo eléctrico ya no presenta una simetría esférica. Su valor varía según las diferentes direcciones. Pero, en cada instante, la dirección del campo eléctrico sigue siendo radial con respecto a la posición de la carga-fuente en ese mismo instante.

Si meditamos un poco acerca de este último resultado —el que en cada instante el campo eléctrico debido a una carga fuente que se mueve uniformemente está dirigido radialmente hacia la posición de la carga fuente *en ese mismo instante*— observaremos que se trata en verdad de un resultado muy sorprendente.

Consideremos lo que en realidad se está diciendo. Una carga q_1 se está moviendo a velocidad constante según el eje x (fig. 8-5). Supongamos que en el instante presente, q_1 está situada en el punto X . El campo eléctrico ϵ en un punto P en ese instante estará dirigido radialmente hacia X , tal como se muestra en la figura. Esto significa que si se colocase una carga de prueba q_2 en P , experimentaría una fuerza ϵq_2 orientada según el sentido que se aleja de X . Todo esto parece muy razonable.

Sin embargo, si consideramos que ningún efecto —es decir, ninguna masa, ninguna energía, ninguna fuerza— puede ser transmitido con velocidad mayor que c , la carga de prueba q_2 , situada en P , no puede “conocer” la posición que en este instante ocupa q_1 . Debe transcurrir cierto tiempo antes de que cualquier señal, cualquier efecto que tenga su origen en el punto en que se encuentre q_1 , así como en su comportamiento en su posición presente X llegue a P —y para entonces q_1 ya no se encontrará en X .

Sea X' una posición anterior de q_1 —una posición tal, que una señal que parte de q_1 en el instante en que se encontraba en X' , y que marcha a una velocidad c , llega a P en el instante presente. Y en el instante considerado q_1 , que continúa su movimiento a una velocidad v , llega a X . En ambos recorridos se invierte el mismo tiempo. Esto significa que

$$\frac{X'P}{c} = \frac{X'X}{v} \quad \text{o bien} \quad \frac{X'X}{X'P} = \frac{v}{c}$$

X' se denomina *posición retardada* de q_1 con respecto al punto P . Cualquier señal que partiese de q_1 en un punto cualquiera en su marcha desde X' a X no hubiese llegado a P en el instante considerado. (Demuéstrese esto.) El campo, *ahora*, en P debe tener su origen en el comportamiento de q_1 en el punto X' o bien, si la velocidad de la señal fuese inferior a c , en su comportamiento en un punto anterior. Sin embargo, nada que haya hecho la carga q_1 después del instante en que se encontraba en X' puede ejercer efecto alguno sobre P en el instante presente.

Sin embargo, el campo en P señala en la dirección que se aleja de *la posición actual* de q_1 que se está considerando. La naturaleza se comporta de tal manera que, para una carga fuente que se mueva uniformemente, aun a pesar de que el campo producido en un cierto punto P creado por la posición y el comportamiento de la carga fuente en un *instante anterior*, el campo señala alejándose de la posición de la carga fuente en el instante considerado. Parece como si la naturaleza calculase en el lugar donde debiera encontrarse la carga fuente en el instante considerado y actuase de manera acorde. (En realidad, puede habersele ocurrido al lector notar que, aunque la carga continúe moviéndose a velocidad constante después de pasar por X' , puede *no estar* en X en el instante en el que se observa el campo en P . Sin embargo, X seguirá siendo el punto donde el campo aparenta originarse en este instante.) Por consiguiente, un resultado que a primera vista pudiera parecer bastante evidente resulta ser, al examinarlo más atentamente, bastante sorprendente —aunque cierto de todas maneras.

FUERZA EJERCIDA SOBRE UNA CARGA DE PRUEBA EN MOVIMIENTO

La ley de Coulomb nos permite conocer la fuerza ejercida sobre una carga en reposo o en movimiento debida a una carga fuente *en reposo*. En los cálculos

los precedentes el proceso seguido ha consistido, efectivamente, en crear una situación de este tipo en un sistema S' —compuesto de una carga-fuente en reposo y una carga de prueba en movimiento. El efecto ejercido sobre la carga de prueba venía dado por la ley de Coulomb. Pasábamos entonces a un sistema inercial diferente S . Pero, en cada caso, restringíamos nuestra elección de S de tal manera que la *carga de prueba* se encontrase en reposo en S . De esta manera podíamos obtener la fuerza ejercida sobre una carga de prueba en reposo debida a una carga-fuente que se moviese uniformemente.

Investigaremos ahora el efecto de una *carga-fuente que se mueva uniformemente* sobre una *carga de prueba en movimiento*. Nuestro punto de partida será nuevo, en lo que se refiere al cálculo de las fuerzas, en un sistema S' en el cual la carga-fuente se encuentra en reposo y, por tanto, la ley de Coulomb especifica la fuerza de una manera completa y exacta. Sin embargo, efectuaremos una transformación a un sistema S en el cual, tanto la carga-fuente como la carga de prueba, se encuentren en movimiento. Encontraremos un resultado nuevo e interesante: la fuerza ejercida sobre la carga de prueba incluye un término que depende de la velocidad de la carga de prueba. Ésta es exactamente la situación que se tiene cuando una carga se mueve en un campo magnético, y la emplearemos para identificar y calcular el campo magnético.

Comenzaremos, pues, con algunos casos sencillos de manera que podamos ir averiguando las propiedades de esta nueva característica sin vernos por ello comprometidos en complicadas manipulaciones algebraicas.

Caso 1. Supongamos que tanto la carga-fuente q_1 como la carga de prueba q_2 se mueven ambas a la misma velocidad constante ($v, 0, 0$) relativa a S . En el instante $t = 0$ supongamos que la línea recta que une las posiciones instan-

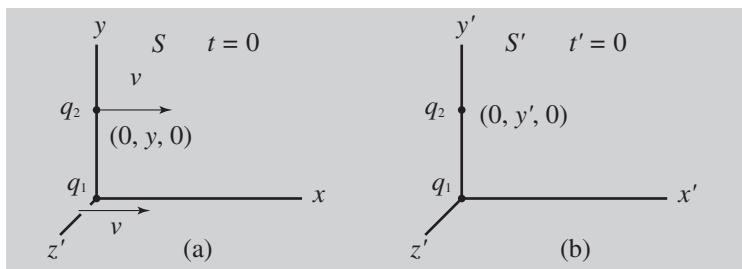


Fig. 8-6. (a) Dos cargas se mueven paralelamente la una con respecto a la otra a velocidad igual. (b) La situación es transformada al sistema en el cual ambas cargas se encuentran en reposo.

táneas de q_1 y q_2 coincide con el eje y . Esta situación se muestra en la figura 8-6(a). En S' la situación es extremadamente sencilla, puesto que ambas cargas se encuentran en reposo y su separación es $y' = y$ [fig. 8-6(b)]. En S' tenemos que

$$F_x' = 0 \quad F_y' = kq_1q_2/y'^2 \quad F_z' = 0$$

Puesto que, para q_2 , tenemos $\mathbf{u}' = 0$, las transformaciones de fuerza, ecuaciones (8-7), nos dan

$$F_x = 0 \quad F_y = F_y'/\gamma \quad F_z = 0$$

de donde obtenemos

$$F_y = \frac{1}{\gamma} \frac{kq_1q_2}{y^2}$$

Ahora bien, si q_2 se encuentra *en reposo*, tendremos

$$F_y = \gamma \frac{kq_1q_2}{y^2}$$

expresión obtenida en el caso 2 de la sección anterior [que también puede obtenerse por referencia a la ecuación (8-8) para el caso general de una carga de prueba en reposo]. La diferencia entre estos dos valores de F_y representa una *fuerza magnética* ejercida sobre la carga en movimiento por la carga-fuente en movimiento:

$$F_{\text{mag}} = \frac{kq_1q_2}{y^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) = - \frac{v^2}{c^2} \frac{\gamma kq_1q_2}{y^2}$$

El signo negativo indica que, si q_1 y q_2 poseen ambas el mismo signo, la fuerza magnética es de atracción entre cargas que marchan juntas y en la misma dirección. Aunque no conviene intentar sacar demasiadas conclusiones a partir de un caso tan especial como este que estamos considerando, es interesante observar que la expresión obtenida anteriormente puede escribirse de esta manera :

$$F_{\text{mag}} = - \frac{v^2}{c^2} F_{\text{elec}}$$

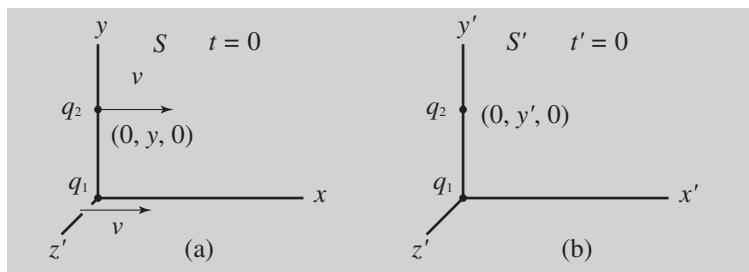


Fig. 8-7. (a) Dos cargas se mueven paralelamente con velocidades diferentes y en la misma dirección. (b) La situación es transformada a un sistema en el cual la carga-fuente permanece en reposo.

en donde $F_{\text{elec}} (\gamma k q_1 q_2 / y^2)$ es la fuerza que se ejerce sobre q_2 si permaneciese en reposo. ¿Es siempre proporcional el valor de la fuerza magnética al de la fuerza eléctrica? ¿Cuál es el origen del factor v^2/c^2 ? Las respuestas a estas dos preguntas irán surgiendo a medida que vayamos considerando otros casos.

Caso 2. Consideremos ahora un problema idéntico al del caso 1 exceptuando un aspecto —que la carga q_2 posee una velocidad de valor u_x , diferente de v , pero paralela a ella.¹ En la figura 8-7 se muestran las situaciones tal como se observan en S y S' . En S' tenemos de nuevo

$$F'_x = 0 \quad F'_y = kq_1q_2/y'^2 \quad F'_z = 0$$

pero al efectuar la transformación inversa a S utilizando las ecuaciones (8-7) debemos tener en cuenta el valor no nulo de u' :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \quad (u'_y = 0, u'_z = 0)$$

A partir de esto obtenemos

$$F_x = 0 \quad F_y = \frac{\gamma k q_1 q_2}{y^2} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \quad F_z = 0$$

¹ ¿Por qué no considerar el caso en que q_2 se encuentra en el eje de las x ? Analice el lector este caso por su cuenta y averiguará por qué no resulta muy instructivo.

Este resultado nos revela mucho más que en el caso 1. Nos muestra que la fuerza magnética ejercida sobre q_2 , si se encuentra en el eje y y marcha paralelamente a x , viene dada por

$$F_{\text{mag}} = -\frac{vu_x}{c^2} F_{\text{elec}}$$

La fuerza magnética es proporcional a la velocidad de la carga de prueba, como la ley de fuerzas, ecuación (8-3), requiere. Por otro lado, el factor vu_x/c^2 , que expresa la fuerza magnética en este caso en forma de fracción de la fuerza eléctrica, es proporcional a la velocidad de la carga-fuente.

Caso 3. Consideraremos ahora otro problema bastante semejante a los dos últimos considerados. Situaremos de nuevo q_2 en el punto $(0, y, 0)$ de S , pero en esta ocasión supondremos que su movimiento está dirigido según el eje y : $\mathbf{u} = (0, u_y, 0)$. Las situaciones observadas en S y S' son, por tanto, las que se muestran en la figura 8-8. Tenemos de nuevo que

$$F_x' = 0 \quad F_y' = kq_1q_2/y'^2 \quad F_z' = 0$$

pero en este caso existen *dos* componentes no nulas de la velocidad de q_2 medidas en S' :

$$u_x' = -v \quad u_y' = u_y/\gamma \quad u_z' = 0$$

Teniendo en cuenta estos valores resulta

$$F_x = \frac{vu_y}{c^2} \frac{\gamma k q_1 q_2}{y^2} \quad F_y = \frac{\gamma k q_1 q_2}{y^2} \quad F_z = 0$$

La situación empieza ahora a aclararse. Considerando los resultados de este problema y del anterior vemos que la fuerza total ejercida sobre q_2 puede suponerse constituida por dos componentes:

1. Una fuerza eléctrica dirigida según la recta que va desde q_1 a q_2 y de valor $\gamma k q_1 q_2 / r^2$.
2. Una fuerza magnética que forma un ángulo recto con la dirección de movimiento q_2 , proporcional a la fuerza eléctrica y proporcional también al valor de la velocidad de q_2 (así como a la velocidad v de q_1).

Por supuesto que estamos todavía bastante lejos de considerar un caso realmente general, con q_2 en un punto arbitrario y con una velocidad también

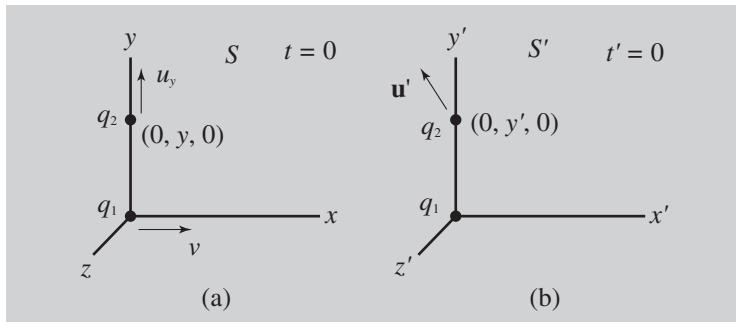


Fig. 8-8. (a) Una carga-fuente y una carga de prueba poseen ambas velocidades de valor diferente y perpendiculares entre sí. (b) La situación es transformada a un sistema en el cual la carga-fuente permanece en reposo.

arbitraria. Pero el caso siguiente nos reforzará las conclusiones a las que acabamos de llegar.

Caso 4. Supongamos que, como de costumbre, q_1 está situada en el origen de S en $t = 0$, con una velocidad v según x , es decir, $v = (v, 0, 0)$. Supongamos también que en este mismo instante q_2 se encuentra en el punto $(x, y, 0)$ y que se mueve paralelamente al eje de las y : $\mathbf{u} = (0, u_y, 0)$. En la figura 8-9 se muestran las situaciones pertinentes observadas en S y S' . A partir de la ley de fuerzas de Coulomb, aplicada en S' , tenemos que

$$F_x' = kq_1q_2x'/r'^3 \quad F_y' = kq_1q_2y'/r'^3 \quad F_z' = 0$$

La velocidad \mathbf{u}' es la misma que en el caso anterior:

$$u_x' = -v \quad u_y' = u_y/\gamma \quad u_z' = 0$$

Mediante el empleo de las transformaciones de fuerza, ecuaciones (8-7), obtenemos los resultados siguientes, como puede confirmarse sencillamente sin necesidad de emplear muchas operaciones algebraicas:

$$F_x = \frac{\gamma kq_1q_2}{r'^3} \left(x + \frac{vu_y}{c^2} y \right) \quad F_y = \frac{\gamma kq_1q_2}{r'^3} y \quad F_z = 0$$

en donde $r' = (\gamma^2x^2 + y^2)^{1/2}$.

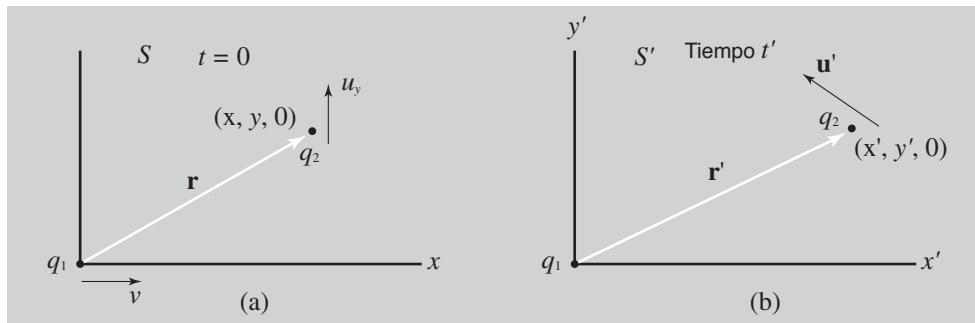


Fig. 8-9. Situación como la de la figura 8-8, con la diferencia de que las posiciones relativas de las cargas son arbitrarias en este caso.

Observemos detenidamente este resultado. Podemos reconocer en él, en primer lugar, la fuerza eléctrica \mathbf{F}_{elec} dada por

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = \frac{\gamma k q_1 q_2 \mathbf{r}}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}}$$

de acuerdo con la ecuación (8-8). La parte restante es una fuerza dirigida según la dirección de las x —formando de nuevo un ángulo recto con la velocidad de q_2 y siendo proporcional al valor de esta velocidad:

$$F_{\text{mag}} = \frac{\gamma k q_1 q_2}{r'^3} \frac{v u_y}{c^2} y$$

¿Es posible relacionarlo de una manera sencilla, al igual que antes, con la fuerza eléctrica? La respuesta es afirmativa. Y esta geometría más general revela bastante más sobre la relación esencialmente vectorial que interviene. Sigamos el hilo sugerido por lo que ya sabemos acerca de la fuerza magnética, expresado en la ecuación (8-3):

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q_2 \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

En el caso que estamos considerando, la velocidad \mathbf{u} es paralela a y , y la fuerza magnética (perpendicular a ella, como de costumbre) es paralela a x . Esto requiere que el vector \mathbf{B} sea paralelo a z . Más aún, su valor viene dado por

$$B = \frac{\gamma k q_1}{r'^3} \frac{v y}{c^2}$$

El producto $v\mathbf{y}$ posee exactamente el valor del producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$, en donde \mathbf{v} es la velocidad de q_1 . Además, el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ señala según la dirección de las z . Por tanto, podemos conseguir una descripción adecuada de \mathbf{B} , tanto en valor como en dirección a través de la ecuación

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \left(\frac{\gamma k q_1}{r'^3} \mathbf{r} \right)$$

Sin embargo, la cantidad entre paréntesis no es otra que el campo eléctrico debido a la carga en movimiento q_1 , dada por la ecuación (8-9). Podemos escribir, por consiguiente,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\epsilon}) \quad (8-10)$$

en donde

$$\boldsymbol{\epsilon} = \gamma k q_1 \mathbf{r} / r'^3 \quad (r'^2 = \gamma^2 x^2 + y^2)$$

y por tanto, la fuerza total ejercida sobre la carga de prueba en movimiento viene dada por

$$\mathbf{F} = q_2 \boldsymbol{\epsilon} + q_2 \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

expresión exactamente igual a la ecuación (8-4), con $\boldsymbol{\epsilon}$ y \mathbf{B} dadas por las ecuaciones (8-9) y (8-10).

Puede objetarse, por supuesto, que en realidad no hemos *demonstrado* los resultados obtenidos. Pero un análisis efectuado para el caso en que q_2 tiene una posición arbitraria y una velocidad cualquiera concuerda de nuevo con nuestras ecuaciones. La combinación de las fuerzas eléctricas y magnéticas que actúan sobre una carga en movimiento, creadas ellas mismas por otra carga en movimiento, pueden ser calculadas de manera exacta, una vez conocida la fuerza de Coulomb en un sistema en el que esta carga fuente se encuentre en reposo.

En el resto del capítulo presente aplicaremos estas conclusiones fundamentales al problema de las corrientes infinitas —es decir, al caso de líneas prolongadas de cargas en movimiento— para ver la forma en que empleando la relatividad se puede obtener una imagen muy clara del mecanismo mediante el cual un alambre por el cual circula una corriente ejerce una fuerza sobre otro alambre. Realizaremos nuestro estudio considerando, en primer lugar, las propiedades de una sucesión de cargas de igual signo.

CAMPO DE UNA DISTRIBUCIÓN LINEAL DE CARGA

Consideremos el campo debido a una distribución uniforme de carga a lo largo del eje x . En realidad, es imposible tener exactamente este tipo de distribución, ya que la carga eléctrica se encuentra cuantizada según múltiplos de e . Sin embargo, como e es muy pequeña desde el punto de vista macroscópico, este tratamiento estará justificado para múltiples propósitos. Consideraremos en primer lugar un conjunto de cargas en reposo y veremos a continuación las modificaciones que deben efectuarse si todas las cargas se mueven linealmente a una cierta velocidad constante.

Líneas de cargas en reposo

Consideraremos el caso de una línea cargada con una densidad de carga constante, λ (medida, por ejemplo, en coulombs por metro de distancia) que se extiende a lo largo del eje x desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (fig. 8-10). Nos interesa conocer el valor del campo eléctrico en un punto P situado a una distancia b del eje de las x .

Por el principio de superposición, el campo en el punto P es la suma vectorial de los campos producidos por cada elemento de carga a lo largo de la línea. Está claro que la componente resultante según x del campo P es nula, considerando la simetría del problema. Pero cada elemento de carga aporta una componente positiva de campo según y en P .

La cantidad de carga en el elemento de línea dx es λdx . El campo que produce en P es

$$d\mathbf{E} = k \frac{\lambda dx}{r^2} \mathbf{e}_r$$

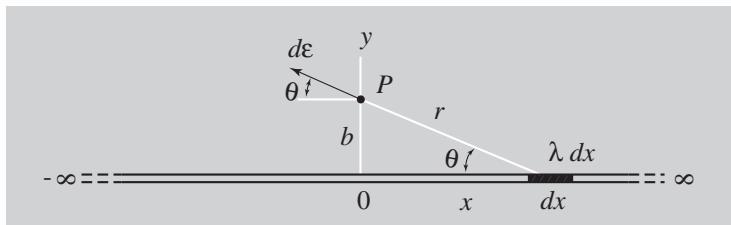


Fig. 8-10. Cálculo del campo eléctrico debido a una línea recta infinita con una carga en reposo.

y la componente según y es

$$d\mathbf{E}_y = k \frac{\lambda \sin \theta dx}{r^2}$$

Expresemos esto en función de la variable θ :

$$r = b/\sin \theta$$

$$x = b \cot \theta$$

$$dx = -b \csc^2 \theta d\theta$$

por lo que

$$d\mathbf{E}_y = -\frac{k\lambda}{b} \sin \theta d\theta$$

La componente y resultante del campo es entonces

$$\mathbf{E}_y = -\frac{k\lambda}{b} \int_{\pi}^{0} \sin \theta d\theta = \frac{2k\lambda}{b}$$

Como ésta es la única componente del campo que no se anula, resulta, para la línea de carga completa,

$$\mathbf{E} = 2k \frac{\lambda}{b} \mathbf{e}_y \quad (8-11)$$

Línea de carga en movimiento

El único campo que necesitamos considerar anteriormente era el campo eléctrico. No existe campo magnético alguno, ya que todas las cargas se encuentran en reposo. Pero, ¿qué sucede al campo eléctrico y cuál es el campo magnético si las cargas se encuentran en movimiento?

Consideremos de nuevo una densidad lineal de carga λ que se extiende a lo largo del eje x desde $-\infty$ hasta $+\infty$, pero en este caso la distribución en su totalidad se mueve según el eje de las x a una velocidad v [fig. 8-11(a)].

Como hemos visto, las cargas en movimiento dan lugar a campos eléctricos que difieren de los campos normales de Coulomb y, además, dan lugar a campos magnéticos. La densidad de carga en movimiento en la vecindad del punto 1 da origen a un campo eléctrico $d\mathbf{E}_1$ en P que es superior al campo normal de Coulomb según un factor γ . La densidad de carga en movimiento en

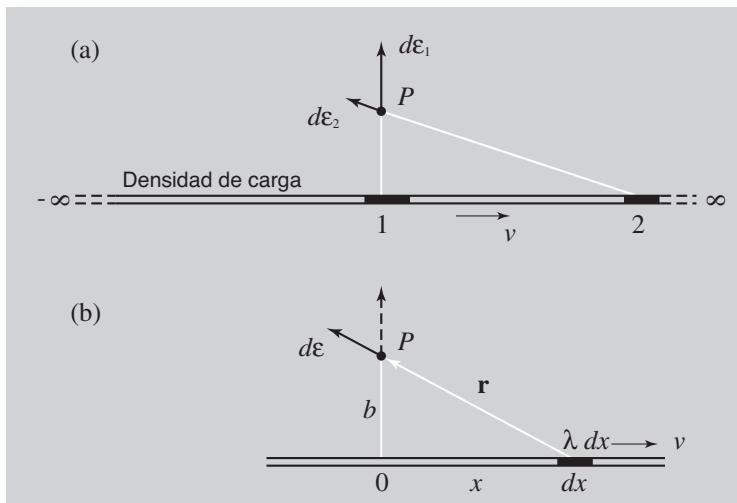


Fig. 8-11. (a) Campos eléctricos debidos a las partes próximas y lejanas de una línea infinita de carga en movimiento. (b) Campo eléctrico de un elemento de línea para un valor arbitrario de x .

un punto alejado del eje de las x (como puede serlo el punto 2), da lugar a un campo eléctrico $d\epsilon_2$ en P , que es menor que el campo normal de Coulomb según un factor que tiende a $1/\gamma^2$. [Referirse a la ecuación (8-9).] No es evidente cuál de estos dos efectos opuestos será el que predomine. Integremos de nuevo las contribuciones diferenciales para obtener el campo resultante.

La contribución al campo eléctrico en P debido a la cantidad de carga λdx que se mueve a una velocidad v en un punto arbitrario de la línea [fig. 8-11(b)] viene dada por la ecuación (8-9) y se obtiene de la manera siguiente:

$$d\epsilon = k(\lambda dx) \frac{\gamma r}{(\gamma^2 x^2 + b^2)^{3/2}}$$

Al igual que en el caso de las líneas de cargas en reposo, cuando sumamos todas las contribuciones debidas a la componente x del campo desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$, ϵ_x desaparecerá. Es interesante observar el que esto sucede así, a pesar de que la velocidad está dirigida según una dirección particular de x . Ésta es la expresión de la simetría hacia adelante y hacia atrás del campo eléctrico de una carga en movimiento. Para ϵ_y tenemos

$$\epsilon_y = \int d\epsilon_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\gamma\lambda b dx}{(\gamma^2 x^2 + b^2)^{3/2}}$$

lo cual nos da

$$\mathbf{E}_v = 2k \frac{\lambda}{b} \quad (8-12)$$

El campo eléctrico de esta distribución de carga resulta ser, por tanto, exactamente igual al campo para la distribución de cargas en reposo. Los dos efectos antagónicos —el factor γ debido a las cargas cercanas y el factor $1/\gamma^2$ debido a las cargas lejanas— se compensan exactamente entre sí.

¿Qué podemos decir ahora acerca del campo magnético? La distribución en reposo no produce campo magnético alguno, por supuesto. Recordemos lo que esto significa: sencillamente que las cargas en reposo ejercen exactamente la misma fuerza sobre las cargas en movimiento que las cargas en reposo. Sin embargo, la distribución lineal en movimiento da lugar a un campo magnético. Hemos visto (ecuación 8-10) que el campo magnético de una carga que se mueve uniformemente viene dado por

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

en donde \mathbf{E} es el campo eléctrico producido por la carga y \mathbf{v} es la velocidad constante de la carga. Por tanto, si el elemento de carga λdx da lugar al pequeño campo eléctrico $d\mathbf{E}$, su contribución al campo magnético es entonces

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times d\mathbf{E}$$

El campo magnético de la distribución, en su totalidad, viene dado entonces por

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times d\mathbf{E}$$

Pero \mathbf{v} es una velocidad constante dirigida según el eje de las x y vale lo mismo para todos los elementos de carga de la línea. Podemos poner entonces,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \int d\mathbf{E}$$

y por consiguiente,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})$$

en donde \mathbf{E} es el campo producido por la distribución de carga en su totalidad, cuya expresión viene dada en la ecuación (8-12). Como \mathbf{E} está dirigido en todo momento en sentido vertical y alejándose del eje x y \mathbf{B} es perpendicular, tanto a \mathbf{E} como a \mathbf{v} , las líneas de campo magnético están formadas por círculos concéntricos que rodean al eje de las x —de acuerdo con uno de los hechos más conocidos del electromagnetismo experimental.

En la próxima sección consideraremos la *fuerza* magnética ejercida por esta distribución de cargas sobre una carga aislada en movimiento que marcha paralelamente a la línea de carga a una velocidad \mathbf{u} . Podemos anticipar el resultado que obtendremos considerando la ecuación obtenida anteriormente para \mathbf{B} junto con la ley de fuerzas magnéticas expresada mediante la ecuación (8-3). Esto nos permite obtener

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = -q_2 \frac{uv}{c^2} \mathbf{E} = -q_2 \frac{uv}{c^2} \left(2k \frac{\lambda}{b} \right) \mathbf{e}_y \quad (8-13)$$

para el caso en que tanto \mathbf{u} como \mathbf{v} posean la misma dirección. Por tanto, si q_2 posee el mismo signo que la línea de carga, la fuerza magnética resulta ser atractiva en este caso.

EL CAMPO MAGNÉTICO Y LA RELATIVIDAD

El cálculo efectuado anteriormente encaminado a la obtención de \mathbf{B} y de la fuerza magnética asociada era realmente muy sencillo. Sin embargo, consideraremos el problema desde un punto de vista diferente para resaltar la naturaleza relativista del campo magnético.

Para investigar el campo magnético en P debido a la distribución lineal de carga en movimiento debemos colocar una carga de prueba *en movimiento* en P . Para hacer el análisis más sencillo supondremos que la carga de prueba q_2 se mueve *paralelamente al eje x* con la velocidad \mathbf{u} [fig. 8-12(a)].

En este sistema de referencia S , la fuerza ejercida sobre q_2 contiene tanto una parte magnética como una parte eléctrica:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B \quad (8-14)$$

La fuerza eléctrica viene dada, según la ecuación (8-11), por

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{E}q_2 = 2k \frac{\lambda}{b} q_2 \mathbf{e}_y \quad (8-15)$$

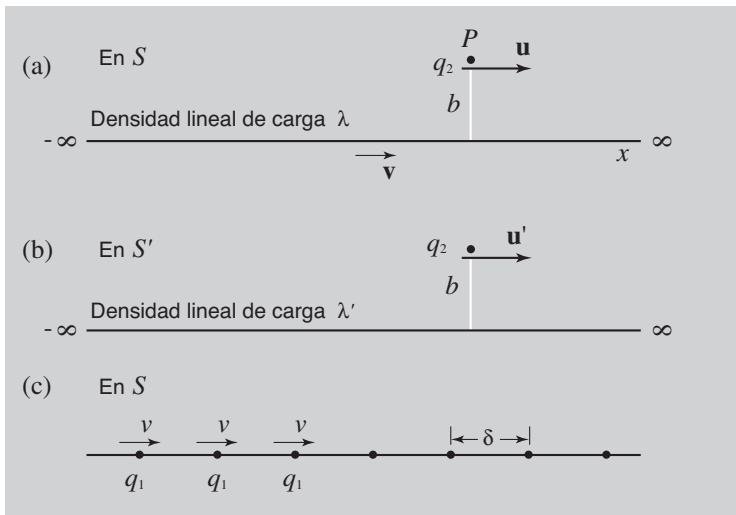


Fig. 8-12. (a) Una carga de prueba se mueve paralelamente a una línea de carga en movimiento. (b) La situación se transforma a un sistema en el cual la línea de carga permanece en reposo. (c) La densidad lineal de carga q_1/δ no es un invariante.

La fuerza magnética viene dada por

$$\mathbf{F}_B = q_2 \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (8-16)$$

y por tanto, si podemos obtener \mathbf{F}_B , conoceremos entonces algo acerca de \mathbf{B} .

Consideraremos ahora el sistema desde un sistema de referencia S' que se mueve con una velocidad \mathbf{v} relativa a S . En S' , la distribución lineal de cargas permanece en reposo y q_2 se mueve con una velocidad \mathbf{u}' [fig. 8-12(b)]. La distancia de q_2 a la línea es transversal a la dirección del movimiento relativo entre S' y S y no varía en consecuencia. Pero, ¿qué le ocurre a la densidad de carga a lo largo de la línea? Podemos aproximar la distribución lineal considerando una colección infinita de cargas discretas q_1 en movimiento espaciadas entre sí una distancia δ en el sistema S y eligiendo q_1 y δ de forma que $q_1/\delta = \lambda$ [fig. 8-12(c)].

Si hacemos ahora que q_1 y δ tiendan a cero de tal manera que el cociente q_1/δ permanezca siempre constante e igual a λ , habremos conseguido un modelo análogo a nuestra distribución ideal —una distribución de carga con una densidad lineal de carga λ constante, que se mueve a una velocidad \mathbf{v} .

En S' las cargas q_1 están en reposo. Las distancias entre ellas son, por tanto, mayores que en S , según el factor γ . Por consiguiente, la densidad de carga en S' es $\lambda' = q_1/\gamma\delta = \lambda/\gamma$ y es inferior a la de S .

Ahora bien, en S' las cargas-fuente se encuentran en reposo. Por consiguiente, la fuerza ejercida sobre q_2 es de origen puramente eléctrico y está dada [referirse a la ecuación (8-11)] por

$$F' = 2k \frac{\lambda'}{b} q_2 = \frac{1}{\gamma} \left(2k \frac{\lambda}{b} \right) q_2$$

La fuerza F' es ejercida según la dirección de las y . Las ecuaciones (8-7) nos dicen la manera de transformar F' para obtener la fuerza total F ejercida sobre q_2 observada en S :

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

En nuestro caso, esto nos da

$$F_y = \gamma \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) F_y'$$

Es decir,

$$\mathbf{F} = 2k \frac{\lambda}{b} q_2 \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \mathbf{e}_y \quad (8-17)$$

Por tanto, de las ecuaciones (8-14), (8-15) y (8-17) se desprende que la fuerza magnética observada en S es

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F} - \mathbf{F}_\delta$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{F}_B = - \frac{uv}{c^2} \left(2k \frac{\lambda}{b} \right) q_2 \mathbf{e}_y = -q_2 \frac{uv}{c^2} \mathbf{\epsilon}$$

lo cual está totalmente de acuerdo con la ecuación (8-13). A partir de la ecuación (8-16) podemos deducir entonces que la componente según y de \mathbf{B} es cero y que su componente según z viene dada por

$$B_z = \frac{v}{c^2} \left(2k \frac{\lambda}{b} \right) = \frac{1}{c^2} v \mathcal{E} \quad (8-18)$$

lo cual está de acuerdo con la ecuación (8-10). Para verificar que, efectivamente, éste es el valor real de \mathbf{B} , es decir, que la componente de \mathbf{B} según x es nula, deberíamos conseguir que nuestra carga de prueba q_2 se moviese según alguna otra dirección, como por ejemplo la dirección de las y . Sin embargo, dejaremos esto como ejercicio para el lector. Vemos de nuevo que una fuerza de origen puramente eléctrico en un sistema (S') posee constituyentes eléctricos y magnéticos desde el punto de vista de otro sistema (S).

FUERZA MAGNÉTICA EJERCIDA SOBRE UNA CARGA EN MOVIMIENTO POR UN ALAMBRE PORTADOR DE CORRIENTE

Para las velocidades ordinarias, la fuerza magnética que se ejerce entre dos cargas eléctricas es muy pequeña frente a la fuerza eléctrica. Por ejemplo, en el caso de cargas que se muevan una al lado de la otra a velocidades u y v , la fuerza magnética es menor según el factor uv/c^2 . Sólo se podrá observar si podemos desprendernos de la fuerza eléctrica. Afortunadamente, resulta esto posible, ya que en la Naturaleza existen tanto cargas positivas como cargas negativas.

Consideremos, por ejemplo, un hilo largo de cobre eléctricamente neutro por el cual circula una corriente. Los iones positivos de cobre permanecen en reposo y los iones libres negativos se mueven a una velocidad \mathbf{v} .¹ ¿Cuál será la fuerza ejercida sobre una carga de prueba en movimiento situada en el exterior del hilo? Para mayor sencillez consideraremos en primer lugar una carga de prueba q_2 (por ejemplo, un electrón) que se mueva a la misma velocidad \mathbf{v} que hemos considerado para los electrones del hilo [fig. 8-13(a)]. Las densidades de carga positiva y negativa en el hilo son iguales y opuestas; designémoslas por $\pm \lambda_0$. Dan lugar a campos eléctricos en q_2 de igual valor ($E = 2k\lambda_0/b$) pero sentido opuesto. Por consiguiente, la fuerza eléctrica ejercida sobre q_2 es nula. Si q_2 permaneciese en reposo no habría más que decir. Sin embargo, q_2 se está moviendo y, por tanto, “siente” el campo magnético.

Para poder conocer algo acerca de las fuerzas magnéticas ejercidas sobre q_2 que se observan en S , pasemos a un sistema diferente, S' , que se mueve a una velocidad \mathbf{v} con respecto a S . En S' , q_2 permanece en reposo, los electrones en el alambre permanecen en reposo y los iones positivos se mueven con una velocidad $-\mathbf{v}$ [fig. 8-13(b)].

¹ Evidentemente, se trata de una gran simplificación. Los electrones de conducción en un hilo poseen todo tipo de velocidades y direcciones, pero \mathbf{v} representa, sin embargo, una velocidad media de arrastre, constante, asociada al flujo de corriente.

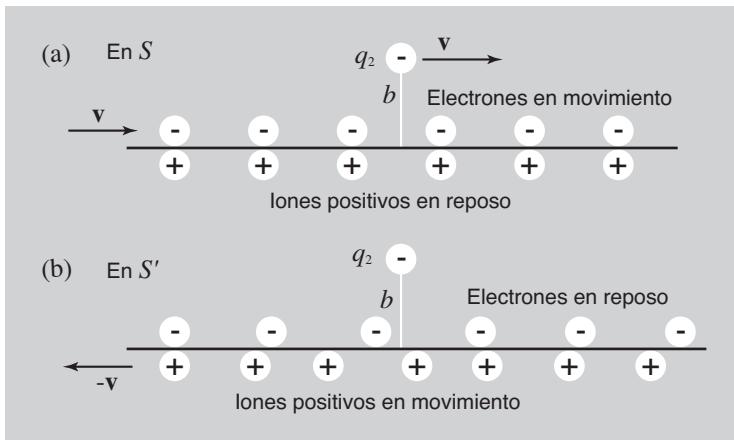


Fig. 8-13. (a) Una carga de prueba se mueve paralelamente a un alambre portador de corriente. (b) La situación es transformada a un sistema en el cual la carga de prueba permanece en reposo.

Al igual que antes, la distancia entre los electrones que permanecen en reposo en el alambre aumenta (desde el punto de vista de S') y la densidad lineal λ_- disminuye según el factor $1/\gamma$: $\lambda_- = -\lambda_0/\gamma$. Por otra parte, la contracción relativista de la distancia entre los iones positivos en movimiento da lugar a un *aumento* de su densidad lineal λ_+ según el factor γ : $\lambda_+ = \gamma\lambda_0$. Las densidades de carga positivas y negativas observadas en este sistema ya no son iguales y opuestas. La diferencia radica en la dirección que da origen a una fuerza neta ejercida sobre q_2 que resulta ser una fuerza atractiva en el caso de un electrón que marche en el mismo sentido que los electrones en el alambre.

Examinemos esto con más detalle. En S' la carga de prueba q_2 permanece en reposo y la fuerza ejercida sobre ella, F' , depende sólo del campo eléctrico de las distribuciones de carga positiva y negativa. La densidad de carga neta λ' medida en S' viene dada por

$$\lambda' = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0 \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right)$$

Por consiguiente, la expresión de la fuerza total F' es:

$$F'_v = 2k \frac{\lambda'}{b} q_2 = \frac{2k\lambda_0}{b} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) q_2$$

Efectuando la transformación inversa a S encontramos que la fuerza ejercida sobre q_2 , observada en S , viene dada por

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma} = \frac{2k\lambda_0}{b} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) q_2$$

Pero

$$1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2}$$

Por lo que

$$F_y = \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{2k\lambda_0}{b}\right) q_2 = \beta^2 \mathcal{E} q_2,$$

en donde conviene recordar que \mathcal{E} es el campo, en S , de las cargas positivas o de las cargas negativas en el alambre. Puesto que no se ejerce fuerza neta sobre q_2 en S , la fuerza $F (= \beta^2 \mathcal{E} q_2)$ es enteramente de origen magnético. Es inferior según el factor β^2 a la fuerza eléctrica que los iones positivos (o los electrones) hubiesen ejercido por separado, pero puede observarse aun en el caso de que β adopte valores pequeños, puesto que la fuerza eléctrica ha sido cancelada debido a la presencia de cargas negativas y positivas.

Vemos en este ejemplo que el campo magnético observado en S está relacionado con el campo eléctrico observado en S' . Y el campo eléctrico en S' surge de las variaciones relativistas en las distancias entre las cargas en movimiento —es decir, debido al efecto de contracción de Lorentz.

Este resultado adquiere un interés extraordinario cuando lo examinamos cuantitativamente. ¿A qué velocidad se mueven los electrones en el interior de un alambre conductor? Consideraremos un hilo de cobre con una sección transversal de $1 \text{ mm}^2 (= 10^{-2} \text{ cm}^2)$, por el cual circula una corriente de 10 A . Una corriente de 10 A significa que a través de cualquier sección transversal del hilo pasan 10 coulombs cada segundo, es decir,

$$\frac{10 \text{ coulomb/s}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ coulomb/electrón}} \approx 6 \times 10^{19} \text{ electrones/s}$$

En el cobre sólido existe aproximadamente un electrón libre por cada átomo de Cu, es decir, alrededor de 10^{23} electrones libres/cm³. (Compruébese esto.) Si los electrones se mueven a lo largo del alambre con una velocidad v , en un intervalo de tiempo Δt , todos los electrones libres en el cilindro cuya base tiene

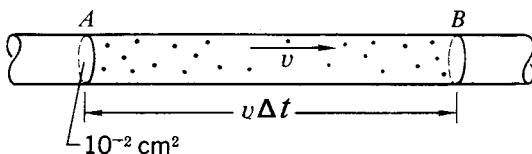


Fig. 8-14. Esquema de la sección de un alambre portador de corriente.

un área de 10^{-2} cm^2 y cuya longitud es $v \Delta t$ (fig. 8-14) pasarán por B . El número de estos electrones es $10^{23} \times 10^{-2} v \Delta t$. Pero el número de electrones que debe pasar por B cuando circula una corriente de 10 A durante un tiempo Δt viene dado por

$$6 \times 10^{19} \frac{\text{electrones}}{\text{s}} \times \Delta t$$

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$v = 6 \times 10^{-2} \text{ cm/s} = 0,6 \text{ mm/s}$$

Es decir, los electrones apenas si se mueven. En términos de la teoría precedente esto significa que hemos relacionado la fuerza magnética ejercida por la corriente de electrones con la contracción de Lorentz (para la distancia entre cargas que se mueven con velocidad uniforme) bajo condiciones tales que el cociente v/c es sólo de 2×10^{-12} y por tanto la contracción de Lorentz es casi increíblemente pequeña —del orden de 1 parte en 10^{23} . Estamos acostumbrados a pensar que las fuerzas magnéticas son muy grandes y muy importantes y, sin embargo, podemos considerarlas como una consecuencia de estos efectos de contracción relativista aparentemente despreciables que tienen lugar a velocidades pequeñas.¹ ¿Quién dijo que la relatividad era importante sólo para velocidades comparables a la de la luz?

Otra implicación del análisis precedente consiste en que cualquier desviación con respecto a la neutralidad eléctrica de un alambre por el que circula una corriente, observado en su propio sistema en reposo, debe ser muy pequeña,

¹ Es importante observar que, desde el punto de vista del sistema del laboratorio, no interviene contracción alguna, sino tan sólo desde el punto de vista de un sistema que se mueve relativamente al laboratorio. La única diferencia entre un hilo por el cual circula una corriente y otro hilo por el cual no circula una corriente radica en la existencia de una velocidad de arrastre para los electrones. La distancia media entre los electrones permanece inalterada al medirla en el sistema de referencia del laboratorio.

ya que en caso contrario la fuerza eléctrica actuante sobre una carga en movimiento en el exterior del alambre barrería por completo la fuerza magnética.

ALGO MÁS ACERCA DE LAS FUERZAS MAGNÉTICAS Y LAS CONTRACCIONES DE LORENTZ

Para el caso considerado en la sección última, en el cual la carga de prueba poseía la misma velocidad que los electrones en el alambre, puede aplicarse un diagrama espacio-tiempo para obtener una imagen muy adecuada de la forma en que esta carga de prueba "ve" el alambre como portador de una carga neta positiva. La figura 8-15 muestra las líneas del universo de los iones positivos y de los electrones. Los iones positivos se encuentran en reposo en S y los electrones en movimiento. Sus densidades son las mismas y las distancias entre los iones y entre los electrones, medidas en cualquier instante t , son iguales.

El sistema S' se mueve relativamente al S con la misma velocidad que los electrones. En nuestro diagrama espacio-tiempo el eje ct' es, por consiguiente, paralelo a las líneas del universo de los electrones y el ángulo entre los ejes x' y x es entonces el mismo que el que forman los ejes ct' y ct . En S' , la situa-

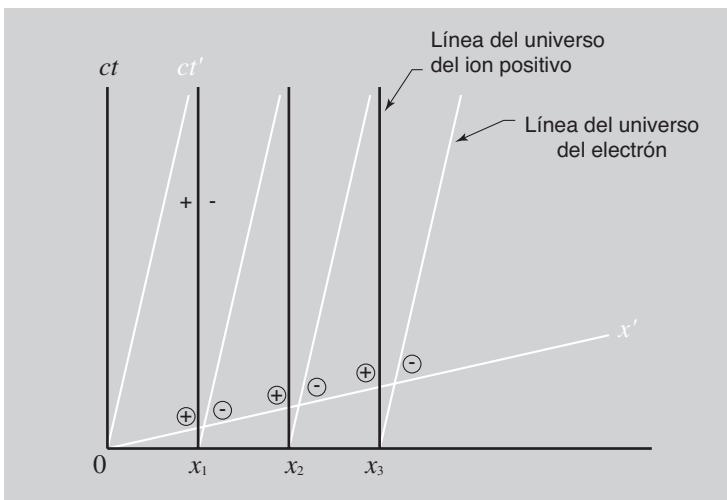


Fig. 8-15. Diagrama de Minkowski para ilustrar la manera en que un hilo neutro portador de corriente aparece llevar una densidad de carga neta, observado en un sistema de referencia en movimiento.

ción de los iones positivos y los electrones en $t' = 0$ viene dada por la intersección de sus líneas del universo con el eje x' . Está claro que en S' las distancias entre los iones positivos son menores que las distancias entre los electrones, y estas distancias respectivas permanecen iguales en cualquier instante t' . Vemos, por tanto, de nuevo que en S' la densidad de los iones positivos en el hilo es mayor que la densidad de electrones, y un electrón en reposo situado fuera del hilo experimentará una fuerza eléctrica. Al igual que antes, es esta fuerza la que se percibe en S como una fuerza magnética. Mediante el empleo de la escala adecuada para las distancias medidas a lo largo del eje x' (consultar la descripción de los diagramas de Minkowski efectuada en el capítulo 3), el diagrama espacio-tiempo nos dará, por supuesto, los valores cuantitativos adecuados para λ_+ y λ_- .

La situación que hemos considerado anteriormente es bastante especial, ya que hemos supuesto que tanto la carga en reposo como la línea de electrones poseen ambas la misma velocidad v . Consideremos ahora el caso de una carga de prueba que se mueve paralelamente al alambre neutro portador de corriente a una velocidad u que es diferente de la velocidad de arrastre de los electrones v [fig. 8-16(a)]. ¿Qué fuerza actúa sobre ella? Como el alambre es neutro y los iones positivos, por permanecer inmóviles, no producen campo magnético alguno, la respuesta es inmediata: esta fuerza es igual a la fuerza puramente magnética debida a la línea de electrones en movimiento, de acuerdo con la ecuación (8-13):

$$F_{\text{mag}} = -q_2 \frac{uv}{c^2} \left(2k \frac{\lambda}{b} \right)$$

Procederemos, sin embargo, a mostrar de una manera breve la forma en que puede comprenderse este resultado en función de la modificación relativista de las densidades de carga positivas y negativas.

Como antes, pasaremos al sistema S' , en el cual la carga de prueba del electrón se encuentra en reposo y es, por tanto, sensible sólo a la fuerza eléctrica [fig. 8-16(b)]. En este sistema los iones positivos del hilo poseen la velocidad $-u$ y los electrones poseen una velocidad v' que viene dada por la ley de adición de velocidades:

$$v' = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}$$

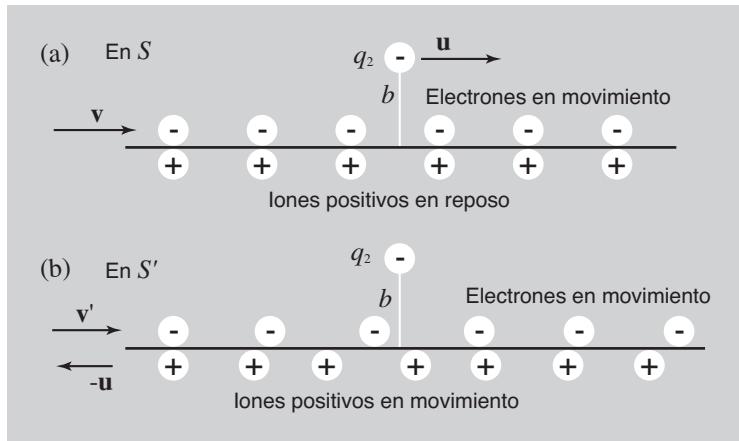


Fig. 8-16. (a) Una carga de prueba se mueve paralelamente a un hilo portador de corriente. (b) La situación es transformada a un sistema en el cual la carga de prueba permanece en reposo y, en consecuencia, no es afectada por los campos magnéticos.

En S , el valor de la densidad de carga positiva y negativa es el mismo, λ_0 . Pero en S' tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= \gamma(u)\lambda_0 \\ \lambda_- &= -\frac{\gamma(v')}{\gamma(v)}\lambda_0\end{aligned}$$

(El propio lector debería comprobar, en particular, que la expresión de λ_- es válida. Supóngase que entra en el sistema en reposo de los electrones y sale a continuación.) No obstante, tenemos la relación siguiente:

$$\gamma(v') = \gamma(u)\gamma(v)(1 - uv/c^2)$$

[referirse a la ecuación (7-7)]. Por tanto, tenemos que

$$\lambda_- = -\gamma(u)(1 - uv/c^2)\lambda_0$$

La densidad de carga neta a lo largo del alambre, medida en S' , viene dada entonces por

$$\lambda' = \lambda_+ + \lambda_- = \gamma(u)\frac{uv}{c^2}\lambda_0$$

Procediendo de una manera exactamente igual al caso anterior más especial, encontramos que la fuerza que actúa sobre q_2 , medida en el sistema del laboratorio S , viene dada por

$$F_y = \frac{uv}{c^2} \left(\frac{2k\lambda_0}{b} \right) q_2$$

En caso de que cause extrañeza la ausencia del signo negativo en esta expresión, al compararla con la ecuación (8-13), recuérdese que la densidad de carga de las partículas *en movimiento* en el alambre, es decir, los electrones, vale $-\lambda_0$, y que haciendo $\lambda = -\lambda_0$ en la ecuación (8-13) se llega al mismo resultado anterior.

FUERZA EXISTENTE ENTRE ALAMBRES PORTADORES DE CORRIENTE

Estamos ya preparados para culminar nuestro análisis relativista de las fuerzas entre las cargas en diversos estados de movimiento. Consideraremos en primer lugar la fuerza entre dos alambres metálicos largos situados a una distancia b entre sí, por los cuales circulan unas corrientes I_1 e I_2 (fig. 8-17). Las densidades de carga positiva y negativa son iguales para cada uno de los alambres, y por tanto, cada alambre no produce campo eléctrico por separado. Sin embargo, cada alambre da lugar a un campo magnético, ya que existe una corriente de electrones y este campo magnético ejerce una fuerza sobre los electrones en movimiento en el otro alambre.

Nos basaremos para nuestros cálculos en la expresión de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba q_2 que marcha a una velocidad u paralelamente a una línea de carga infinitamente larga que se mueve a una velocidad v :

$$F_y = - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{2k\lambda}{b} \right) q_2$$

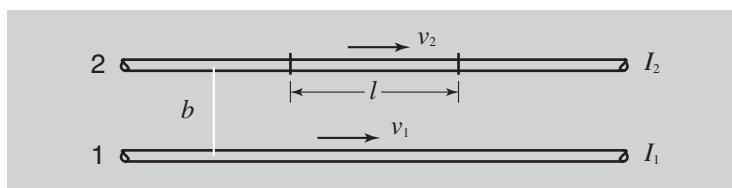


Fig. 8-17. Dos alambres paralelos portadores de corriente.

Podemos describir esta fuerza, si así lo deseamos, en función del campo magnético en el lugar ocupado por q_2 , el cual viene dado por la ecuación (8-18):

$$B_z = \frac{v}{c^2} \left(\frac{2k\lambda}{b} \right)$$

lo cual nos da

$$F_y = -q_2 u B_z$$

Para aplicar estos resultados al problema presente deberemos introducir la relación entre la corriente, la densidad lineal de carga y la velocidad de las cargas en movimiento:

$$I = \lambda v$$

(Demuéstrese esto.) Supongamos que el valor de la densidad lineal de carga y la velocidad de arrastre de los electrones en los dos alambres posee los valores λ_1 , v_1 y λ_2 , v_2 , respectivamente. En tal caso el campo magnético debido al alambre 1 en la posición del alambre 2 viene dado por

$$B_z = \frac{v_1}{c^2} \left(\frac{2k\lambda_1}{b} \right) = \frac{2kI_1}{c^2 b} \quad (8-19)$$

siendo su dirección perpendicular al plano que contiene ambos alambres. Calculemos la fuerza que este campo ejerce sobre todos los electrones en una longitud l del alambre 2. La cantidad de carga en movimiento (q_2) es numéricamente igual a $\lambda_2 l$, y su velocidad (u) vale en este caso v_2 . Por tanto, el valor de la fuerza ejercida sobre esta longitud de alambre viene dado entonces por

$$F = \lambda_2 l v_2 \left(\frac{2kI_1}{c^2 b} \right)$$

es decir,

$$F = \frac{2k}{c^2} \frac{I_1 I_2}{b} l = B_z I_2 l \quad (8-20)$$

Esta fuerza, tal como hemos visto, se encuentra comprendida en el plano de los alambres. Si las corrientes poseen ambas el mismo sentido, la fuerza es atractiva. Si las corrientes poseen sentidos opuestos, la fuerza es repulsiva.

La constante k , recuérdese, es la constante de proporcionalidad de la ley de Coulomb. Aparece ahora en la expresión de la fuerza entre dos alambres conductores de corriente y, por tanto, puede emplearse para el cálculo de esa fuerza cuando circulan corrientes conocidas. En el sistema MKS, tal como mencionamos al comienzo del capítulo, su valor es próximo a $9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{coulomb}^2$. Utilizando la ecuación (8-20) puede calcularse que la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos paralelos separados entre sí 1 cm, por cada uno de los cuales circula una corriente de 10 A, es de 0,002 N/m. Si no existiesen iones positivos para neutralizar el campo eléctrico de los electrones, la fuerza eléctrica entre los alambres sería superior en un factor c^2/v^2 , es decir, su valor sería de alrededor de $5 \times 10^{20} \text{ N/m}$.

UNIDADES Y SISTEMAS DE MEDIDA ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

Para finalizar esta discusión volvamos de nuevo a las expresiones cuantitativas de las leyes de fuerza eléctricas y magnéticas con las que comenzamos el capítulo. El tema de las unidades fundamentales, etc., puede parecer a menudo algo aburrido, pero la unificación de la electricidad y el magnetismo a través de la relatividad posee en este caso un interés especial.

La ecuación (8-1) expresa la ley de fuerzas básicas entre las cargas eléctricas (ley de Coulomb). La última ecuación [la (8-20)] expresa una ley de fuerza entre corrientes paralelas. La unidad de carga en el sistema CGS se definió haciendo la constante k igual a la unidad en la ley de Coulomb. Pero, ¿qué ocurriría si definimos nuestra unidad de carga a partir de la ecuación (8-20)? Podemos hacer esto estableciendo que dos hilos paralelos separados entre sí una distancia unidad y por cada uno de los cuales circula una corriente de valor unidad se repelen o atraen mutuamente exactamente con dos unidades de fuerza por unidad de longitud. ¿Por qué dos unidades de fuerza y no una unidad sólo? Para corresponder con el factor 2 en el segundo miembro de la ecuación (8-20). Desde el punto de vista histórico fue así cómo se definió la unidad absoluta de corriente, y las unidades de medida mecánica eran unidades CGS.¹ Por consiguiente, la definición es la siguiente:

¹ Quizá convenga señalar que, debido a razones de tipo técnico fáciles de comprender, la medida era imposible de efectuar en la práctica mediante hilos rectos infinitos, y por ello se recurrió a efectuar la medida de la fuerza entre dos arrollamientos recorridos por corrientes, utilizándose entonces una fórmula adecuada a esta configuración geométrica diferente.

Si dos alambres paralelos largos, situados a una distancia de 1 cm entre sí, transportan cada uno una corriente unidad, la fuerza ejercida sobre cada uno de estos alambres por el otro es de 2 dinas por cm de longitud.

La unidad de corriente definida de esta manera corresponde realmente a 10 A en nuestro sistema de unidades de medida prácticas —es decir, a un flujo de carga de exactamente 10 coulomb/s. Modifiquemos, pues, la definición anterior para el caso de las unidades del sistema MKS:

Si dos alambres largos paralelos situados a una distancia de 10^{-2} m entre sí, transportan cada uno una corriente de 10 coulomb/s, la fuerza ejercida sobre cada alambre por el otro es de 2×10^{-5} N/ 10^{-2} m de su longitud.

Una vez hecho esto queda determinado por completo el valor de la constante k en el sistema de medidas MKS. En efecto, al sustituir en la ecuación (8-20) tenemos

$$2 \times 10^{-5} = \frac{2k}{c^2} \frac{10 \times 10}{10^{-2}} \times 10^{-2}$$

Por tanto,

$$k = 10^{-7} c^2 \text{ newton} \cdot \text{m}^2/\text{coulomb}^2$$

Pero

$$c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{véase la tabla 1-2})$$

Por tanto,

$$k \text{ (MKS)} \approx 8,987 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{coulomb}^2 \quad (\text{es decir, } \approx 9 \times 10^9)$$

Expresando este resultado de otra forma podemos ver cómo, una vez conocida la expresión de la fuerza eléctrica entre cargas en reposo y la fuerza magnética entre corrientes, estamos preparados para obtener el propio valor c . Esto es lo que hizo Clerk Maxwell en el siglo XIX, cuando llegó a la conclusión de que las leyes de la electricidad y el magnetismo, establecidas en el laboratorio, llevaban implícitas en ellas la posibilidad de que las ondas electromagnéticas pudiesen propagarse a la velocidad c a través del espacio.

Por último, procedamos a efectuar algunas observaciones acerca de los campos eléctricos y magnéticos propiamente dichos. Hemos visto con bastante

detalle la confirmación de la hipótesis de Einstein de que una fuerza magnética no es más que una fuerza eléctrica desde un punto de vista diferente. ¿Por qué no aplicar entonces esta misma lógica a los campos? Es decir, definamos un campo magnético dimensionalmente igual a un campo eléctrico. No es difícil conseguir esto. Veamos la manera como puede hacerse.

Volveremos al cálculo básico de la fuerza ejercida por una carga en movimiento sobre otra. Si la carga q_1 se mueve a una velocidad v , la fuerza neta que ejerce sobre una carga q_2 que se mueve a una velocidad u viene dada, de acuerdo con la ley de fuerzas general [ecuación (8-4)], por

$$\mathbf{F}_{12} = q_2(\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (\text{Sistema MKS})$$

en donde, de acuerdo con la ecuación (8-10), tenemos

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\epsilon}) \quad (\text{Sistema MKS})$$

Ahora bien, los campos $\boldsymbol{\epsilon}$ y \mathbf{B} fueron introducidos para poder describir de una manera cómoda la fuerza ejercida sobre una carga de prueba que se moviese arbitrariamente. Si preferimos afirmar que los campos eléctricos y magnéticos no son en realidad más que magnitudes del mismo tipo, podemos llegar al mismo valor de la cantidad físicamente observable —la fuerza \mathbf{F} — transfiriendo sencillamente el factor $1/c$ de la definición de \mathbf{B} a la expresión de la ley de fuerzas. Y así es precisamente como se escriben las ecuaciones en lo que se viene denominando tradicionalmente sistema CGS —aunque, como ya se ha mencionado al comienzo del capítulo, lo esencial no es la elección de las unidades, sino el uso de la ley de Coulomb en sustitución de la fuerza entre corrientes para definir la unidad de carga. Por consiguiente, en el sistema CGS las dos ecuaciones anteriores son sustituidas por las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= q_2 \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{v}}{c} \times \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \right\} (\text{Sistema CGS})$$

en donde

El campo magnético viene, por tanto, definido como una cierta fracción ($\approx v/c$) del campo eléctrico. Veamos, por tanto, la forma con que aparece en la ley de fuerzas magnéticas,

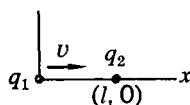
$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \text{const.} (q_2 \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

El valor de la constante debe valer la unidad en un sistema (MKS) en el cual la carga unidad viene definida en función de la fuerza entre las corrientes, pero vale $1/c$ en un sistema (CGS), en el cual la carga unidad viene definida en función de la ley de Coulomb.

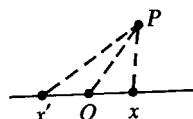
Es evidente que el sistema CGS es ventajoso desde el punto de vista de la no existencia de diferencias fundamentales entre las fuerzas eléctricas y magnéticas; sin embargo, cualquiera que sea el sistema que se emplee, los resultados que hemos obtenido nos hacen posible el formular un sistema de ecuaciones de transformación entre las componentes de \mathbf{E} o \mathbf{B} en un sistema y las componentes correspondientes de tanto \mathbf{E} como \mathbf{B} en otro sistema. Se trata de un sistema de ecuaciones lineales semejante, en esencia, a las transformaciones de Lorentz que reúnen la distancia y el tiempo o las transformaciones dinámicas que reúnen la energía y la cantidad de movimiento. El lector puede obtenerlas si así lo desea. Sin embargo, su utilización general es algo que cae fuera del ámbito de este libro.

PROBLEMAS

8-1. Considérese la situación descrita en la figura. Demostrar, mediante una transformación al sistema en reposo de q_1 y otra transformación inversa al sistema de referencia del laboratorio, que la fuerza ejercida sobre la carga de prueba q_2 es la misma, con independencia de que la carga-fuente q_1 se mueva hacia q_2 o retroceda de ella.

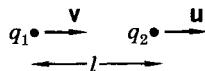


8-2. (a) Una carga q se mueve a velocidad constante v , y en el instante t se encuentra en el punto x (véase la figura). El punto x' es la posición de q en un instante anterior t' , tal que un pulso luminoso emitido desde x' en el instante t' llega a P en el instante t (es decir, x' es la posición retardada de q con respecto a una observación efectuada en P en el instante t). Demostrar que una señal emitida desde q cuando pasa por el punto 0 llega a P al cabo de un tiempo t .

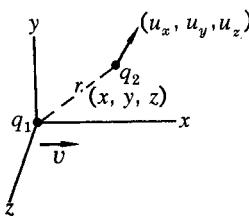


(b) Supongamos que q se mueve a una velocidad arbitraria (y a lo largo de un recorrido también arbitrario), pero con $v < c$. Demostrar que existe una sola posición retardada con respecto a una observación en el punto P en un instante t .

8-3. Si una carga se encuentra en el origen de coordenadas en un instante determinado y se mueve con velocidad v a lo largo del eje de las x , los campos eléctricos en $\pm x$ en ese instante son iguales. En el texto (página 279) se hace alusión a la notable propiedad que representa esta simetría hacia adelante y hacia atrás. Intuitivamente cabría esperar que el campo se debilitase en los puntos donde se alejase la carga y aumentase en los puntos a los cuales se acercase. La validez de esta hipótesis intuitiva puede establecerse teniendo en cuenta el tiempo que tarda el campo en propagarse. En el caso concreto de este problema supongamos que una carga que se mueve con una velocidad $v (= \beta c)$ pasa por el origen en el instante $t = 0$. El campo en $x = a$ para $t = 0$ está asociado con una posición anterior (retardada) de la carga, $x = -b$, tal que $b/v = (a + b)/c$. De manera análoga al campo en $x = -a$ está asociado a una posición retardada diferente, $x = -d$. Expresar el campo eléctrico en función de la distancia entre el punto del campo y la posición *retardada* de la carga en cada caso. Deducir que, si hubiésemos considerado un caso en el cual las separaciones retardadas fuesen *iguales*, el campo en el punto por delante de la carga sería mayor que el campo en el punto detrás de la carga, según un factor de valor $(1 + \beta)^2/(1 - \beta)^2$.



8-4. Considerar la situación descrita en la figura, en la cual una carga-fuente que se mueve con velocidad v actúa sobre una carga de prueba que se mueve en igual dirección y según la línea recta que las une, y con una velocidad u (véase la figura). ¿Cuál es la fuerza que se ejerce sobre la carga de prueba q_2 debida a la carga de la fuente q_1 ? ¿Por qué este caso no resulta muy instructivo para el análisis de las fuerzas magnéticas?



8-5. Una carga-fuente q_1 situada en el origen de coordenadas se mueve según la dirección de las x a una velocidad v (véase la figura). ¿Cuál es la fuerza que

se ejerce sobre una partícula de prueba q_2 situada en un punto arbitrario \mathbf{r} y que se mueve a una velocidad arbitraria \mathbf{u} ? Demostrar que en este caso $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2$.¹

8-6. Dos sistemas de referencia inerciales S y S' se mueven el uno respecto al otro con una velocidad w . Obtener las ecuaciones de la transformación que relaciona los campos eléctricos y magnéticos en los dos sistemas de una carga puntual q que se mueve a velocidad constante según la dirección de las x .

8-7. Una línea recta infinitamente larga con una densidad de carga uniforme λ está dirigida según el eje de las x de cierto sistema de coordenadas. Esta línea cargada se mueve según la dirección de las x a una velocidad constante v . Una carga de prueba q que se mueve a una velocidad arbitraria está situada en el punto $(x = 0, y = b, z = 0)$. Obtener la expresión de la fuerza ejercida sobre la carga de prueba y emplearla para mostrar que los campos eléctricos y magnéticos en $(0, b, 0)$ están relacionados entre sí por la ecuación $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2$.

8-8. Dos hilos de cobre paralelos llevan, cada uno, una corriente de 1 A.

(a) Suponiendo que por cada átomo de Cu hay un electrón libre, ¿cuál es la velocidad de arrastre de estos electrones si el área de la sección transversal es de $0,01 \text{ mm}^2$? ¿Y si es 1 mm^2 ? ¿Y para 1 cm^2 ?

(b) ¿Cuál es la fuerza que experimenta cada hilo por unidad de longitud si ambos hilos están separados una distancia de 1 m? ¿Y para 1 cm?

8-9. Se ha señalado en el texto que cuando a los electrones libres de un alambre neutro se les comunica una velocidad de arrastre de manera que circule una corriente, la distancia media entre los electrones, observada en el laboratorio, permanece inalterada. ¿Cómo reconciliar esto con el hecho de que todos los objetos están sometidos a una contracción de Lorentz cuando pasan de un estado de reposo a un estado de movimiento en un sistema dado?

8-10. De la geometría del diagrama de Minkowski para un hilo portador de corriente (fig. 8-15), calcular la razón de las densidades de carga positiva y negativa observadas en el sistema en reposo de los electrones. (Lo único que en realidad se necesita saber es que el ángulo que forman los ejes x y x' es $\arctan(v/c)$).

8-11. Dos sistemas inerciales, S y S' se mueven a una velocidad v el uno con respecto al otro. A lo largo del eje de las x de S existe un hilo infinitamente largo que está compuesto por cargas positivas en reposo, existiendo también cargas negativas que se mueven en la dirección de las x a una velocidad v . Por consiguiente, existe una corriente que atraviesa el hilo, a pesar de que la densidad de carga neta en S es nula en todo punto. ¿Cuál es la densidad de carga neta en S' ? ¿Im-

¹ Tanto en éste como en todos los demás problemas en los que aparezca el campo magnético \mathbf{B} de manera explícita, se empleará el sistema MKS.

plica este resultado que la carga total no se conserva en una transformación de Lorentz? Explicarlo. [Consultar D. L. Webster, *Am. J. Phys.*, **29**, 841 (1961), si se está interesado en una discusión y explicación adecuada de este fenómeno.]

Epílogo

FINALIZAREMOS el presente estudio sobre la relatividad especial —sus fundamentos teóricos, así como alguna de sus aplicaciones— echando un breve vistazo a los orígenes históricos de la teoría. Constituye en realidad una interesante historia, muchos aspectos de la cual han sido recogidos por Holton.¹

Aunque, como ya hemos señalado, Einstein merece realmente llamarse padre de la relatividad especial, ha habido otros a los que también cabe reconocer cierta participación en su creación. El hombre que probablemente se acercó más a anticiparse a Einstein fue el gran teórico francés H. Poincaré. Aunque no se resolvió a abandonar la hipótesis del éter luminoso creía firmemente en el principio de la relatividad, así como en la imposibilidad fundamental de poder detectar el movimiento absoluto a partir de observaciones ópticas. Afirmó esto en 1899 y desarrolló sus ideas en un impresionante trabajo publicado en 1904 y titulado “El estado presente y futuro de la física matemática”.² Aproximadamente la mitad de este trabajo está consagrado a temas relativistas en esencia —la contracción de Lorentz, el aumento de la masa con la velocidad, el papel de c como velocidad límite de la dinámica. Llega incluso a considerar el problema de la comparación de relojes mediante intercambio de señales luminosas. Sin embargo, sigue siendo cierto que esta discusión posee sus raíces en el análisis de Lorentz de los fenómenos electromagnéticos, haciendo uso de las nociones de contracción real de longitudes y del llamado “tiempo local” [definido de manera formal mediante las ecuaciones (3-14)]. Poincaré manifestó su creencia de que la teoría de Lorentz¹ no era la última palabra, pero sus observaciones revelan que él mismo no poseía ninguna teoría superior.

En el caso de Lorentz —otro de los auténticamente grandes físicos teóricos (ganador del premio Nobel en 1902)— el desarrollo de sus transformacio-

¹ G. Holton, *Am. J. Phys.*, **28**, 627-636 (1960).

² H. Poincaré, *Bull. Sci. Math.*, **28**, 302-323 (1904).

nes en 1904 era independiente de la existencia del sistema de referencia especial del éter, y 15 años después aún siguió atribuyendo algún valor a la idea del espacio absoluto. Mencionemos de paso que las transformaciones de Lorentz habían sido descubiertas, en esencia, por W. Voigt, en 1887, año en el cual publicó un trabajo teórico sobre el efecto Doppler (que puede considerarse como el problema de observar un movimiento ondulatorio desde diferentes sistemas inerciales).

El último suceso destacado anterior a Einstein tiene lugar en 1900, cuando sir Joseph Larmor hizo notar la necesidad de algún tipo de factor de corrección para el tiempo medido en un sistema en movimiento, como consecuencia de la contracción de Fitzgerald-Lorentz, en caso de que se impusiese la condición de invariancia a las ecuaciones que describen las propiedades del éter.

¿Cuál fue, pues, la contribución importante que aportó Einstein? Consistió en realidad, como él mismo señaló,¹ en su aportación al problema de la medida del tiempo, resultado de cerca de 10 años de pensamientos y especulaciones que tuvieron su origen cuando sólo tenía 16 años. De aquí surgió todo lo demás, incluyendo las transformaciones de Lorentz y una nueva dinámica en la cual la masa variaba con la velocidad. Todo ello está claramente expuesto en su trabajo de 1905, el cual, casi por acuerdo universal, le hace acreedor del honor de auténtico creador de la teoría de la relatividad.² Su trabajo es un estudio en sí mismo, no sólo por la riqueza de su contenido, sino también por sus silencios. No existe referencia alguna a la literatura científica de investigación. Parece quedar bastante claro que Einstein desconocía el trabajo de Lorentz del año anterior. Volvió a obtener las ecuaciones de Lorentz partiendo de cero. Pero en realidad hay algo aun más sorprendente: ¿Sobre qué base asentó Einstein realmente su teoría? Cuando se le preguntó esto muchos años después respondió que había sido influido por ciertas observaciones ópticas bien conocidas (la aberración de la luz estelar y la propagación de la luz en agua que corriese con rapidez), pero no recordó, sin embargo, haber tenido conocimiento alguno del experimento de Michelson-

¹ Véase su memoria autobiográfica en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (P. A. Schilpp, ed.), Harper Torchbooks, Nueva York, 1959.

² Constituye uno de los pequeños misterios de la historia de la ciencia el que sir Edmund Whittaker, en la cita al comienzo del capítulo 3, se haya mostrado tan reacio a otorgarle a Einstein el reconocimiento que en verdad merece. (No muestra tales reservas cuando llegó en su obra a la teoría general de la relatividad.) Whittaker fue un erudito notorio por su impecabilidad y escrupulosidad; su *History of the Theories of Aether and Electricity* ("Historia de las teorías del éter y de la electricidad") es un relato fascinante y ricamente documentado sobre el desarrollo del pensamiento en el terreno de la física, muy recomendable como lectura complementaria.

Morley con anterioridad a 1905.¹ Sin embargo, este experimento se había convertido ya en clásico; había sido llevado a cabo 18 años antes y había sido efectuado teniendo en cuenta principalmente las especulaciones de Maxwell acerca de la posibilidad de poder detectar el movimiento de la Tierra a través del espacio. Cabría pensar que ya en 1905 los resultados del experimento de Michelson-Morley debían ser conocidos por todos los físicos interesados en tales cuestiones. Aun en el caso de que Einstein no recordase el experimento de manera consciente es difícil creer que su pensamiento no fue influido por él de alguna manera. Sin embargo, una vez dicho todo esto, debe admitirse que Einstein poseía una extraordinaria perspicacia. Parecía conocer las respuestas de problemas sobre los que la naturaleza proporcionaba, a lo sumo, una o dos sugerencias; el resto se trataba de pura confirmación. Ésta era en realidad la característica más notable de su genio. Actuó de una manera casi idéntica (también en 1905) al proponer la hipótesis de los fotones y la ecuación fotoeléctrica partiendo de unos datos escasos y en modo alguno convincentes. Señalemos de pasada que fue por este último trabajo y no (al menos nominalmente) por ser el creador de la relatividad por lo que se le concedió el premio Nobel de Física en 1921.² Sin embargo, la relatividad, tomando las teorías especial y general conjuntamente, continuará siendo considerada, sin lugar a dudas, como el monumento principal a la vida de Einstein como físico. (Publicó la teoría general en 1916.) Se trata, en palabras de C. Möller,³ de "uno de los más bellos capítulos en la historia de la ciencia, el cual, en su mayor parte, ha sido escrito por un solo hombre...".

¹ Véase R. S. Shankland, *Am. J. Phys.*, 31, 47 (1963). Véase también el último artículo de Shankland acerca del experimento de Michelson-Morley en *Am. J. Phys.*, 32, 16 (1964). Allí se cita una carta escrita por Einstein en 1952, en la cual admite haber conocido los pormenores del experimento Michelson-Morley con anterioridad a 1905, como consecuencia de haber leído los trabajos de Lorentz. Parece ser que sus recuerdos, una vez transcurridas más de cinco décadas, no son muy consistentes. Sin embargo, hizo notar en ambas ocasiones que fueron otras consideraciones las que desempeñaron un papel decisivo en la configuración de su pensamiento.

² El testamento de Alfredo Nobel estipulaba que los premios debían ser concedidos a aquellos descubrimientos que reportasen beneficios a la Humanidad. Surgieron dudas acerca de si una teoría pura cumplía este requisito, y en la citación para el premio se acordó escribir, en definitiva, "En reconocimiento a sus contribuciones a la física matemática y en especial a su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico".

³ C. Möller, en el prefacio a su libro *The Theory of Relativity*, Oxford Univ. Press, Nueva York, 1952.

Breve reseña bibliográfica

La literatura sobre relatividad es enorme —probablemente mayor, en relación con su contenido básico, que para cualquier otra rama de la Física. Ofrecemos a continuación una breve e inevitablemente arbitraria lista de libros que pueden ofrecer interés como referencia o como ampliación de los diversos temas que han sido discutidos a lo largo de este libro.

Bergmann, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1942.

Un libro de texto clásico, dedicado aproximadamente por igual a las teorías especial y general, que hace un énfasis especial en el cálculo tensorial.

Bohm, D., *The Special Theory of Relativity*, Benjamin, Nueva York, 1965.

Una discusión general a un nivel parecido al del presente libro, enriquecido por la preocupación característica de Bohm acerca de lo fundamental.

Born, M., *Einstein's Theory of Relativity*, Dover, Nueva York, 1962.

Una presentación lúcida y profunda a un nivel bastante elemental aunque lejos de ser trivial, por uno de los más grandes difusores de la Física en el siglo XX y premio Nobel por sus aportaciones decisivas a la teoría cuántica.

Eddington, Sir A. S., *Space, Time and Gravitation*, Harper Torchbook, Harper & Row, Nueva York, 1959.

La mayor parte está dedicada a la teoría general.

Einstein, A. (traducido por R. W. Lawson), *Relativity, the Special and the General Theory*, Crown, Nueva York, 1961.

Presentación clara y sencilla de las ideas básicas, por su creador original.

Einstein, A., e Infeld, L., *The Evolution of Physics*, Simon and Schuster, Nueva York, 1961.

Una exposición no matemática acerca del desarrollo de los conceptos básicos y los resultados fundamentales de la Física, que hace un énfasis especial en la relatividad.

Einstein, A. y otros (traducidos por W. Perrett y G. B. Jeffery), *The Principle of Relativity*, Dover, Nueva York, 1958.

Una recopilación de los trabajos históricos, debidos principalmente a Einstein, Lorentz y Minkowski, a través de los cuales la teoría cobró existencia.

Ford, K. W., *The World of Elementary Particles*, Ginn, Boston, 1963.

Presentación ágil e imaginativa de los principios y de los fenómenos de la Física de alta-energía.

Frisch, D. H. y Thorndike, A. M., *Elementary Particles*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964.

Muy parecido al libro de Ford en su contenido general y su agilidad, aunque escrito más bien desde el punto de vista del físico experimental.

Jaffé, B., *Michelson and the Speed of Light*, Anchor Books, Doubleday, Nueva York, 1960.

Principalmente de carácter biográfico, con descripciones interesantes sobre algunos de los principales experimentos llevados a cabo por Michelson.

Kacser, C., *Introduction to the Special Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.

Un estudio al mismo nivel que el presente libro.

Katz, R., *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964.

Un buen vistazo breve.

Michelson, A. A., *Studies in Optics*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1927.

Contiene las descripciones originales de Michelson acerca de sus más célebres investigaciones.

Ney, E. P., *Electromagnetism and Relativity*, Harper & Row, Nueva York, 1962.

Breve reseña de los fundamentos básicos incluyendo algo sobre relatividad general.

Reichenbach, H., *The Philosophy of Space and Time*, Dover, Nueva York, 1957.

Extensa discusión sobre la descripción de la naturaleza a través de la geometría del espacio-tiempo.

Rindler, W., *Special Relativity*, Wiley (Interscience), Nueva York, 2.^a ed., 1966.

Presentación muy compacta y orientada desde el punto de vista matemático.

Rosser, W. G. V., *An Introduction to the Theory of Relativity*, Butterworth, Londres, 1964.

Discusión muy completa, a un nivel mucho mayor que el de cualquier otro de los libros señalados aquí; se hace especial hincapié en la conexión existente entre relatividad y electromagnetismo.

—, *Introductory Relativity*, Butterworth, Londres, 1967.

Versión resumida y algo más simplificada del libro precedente, quizá todavía algo por encima del nivel de este libro.

Schilpp, P. A. (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (2 vols.), Harper & Row, Nueva York, 1959.

Interesante colección de artículos no matemáticos debidos principalmente a físicos de relieve como Niels Bohr, Max Born y Louis de Broglie, en los que se refieren las contribuciones de Einstein a la Física; el prólogo consiste en una larga memoria autobiográfica de Einstein.

Sherwin, C. W., *Basic Concepts of Physics*, Holt, Nueva York, 1961.

Los capítulos 4 y 5 de este libro constituyen una presentación básica y original sobre las ideas de la relatividad y el electromagnetismo.

Smith, J. H., *Introducción a la relatividad especial*, EDITORIAL REVERTÉ, S. A. Discusión muy clara de los principios y de los fenómenos.

Taylor, E. F. y Wheeler, J. A., *Spacetime Physics*, Freeman, San Francisco, 1966.

Presentación estimulante y de fácil lectura de las ideas relativistas, yuxtaponiéndose la formalidad y la informalidad de una manera intrigante.

Whittaker, Sir E. T., *History of the Theories of Aether and Electricity* (2 volúmenes), Harper Torchbook, Harper & Row, Nueva York, 1960.

Sigue con todo detalle el desarrollo histórico de la óptica y del electromagnetismo; en sus citas sobre la teoría matemática adquiere un carácter bastante técnico, pero se hace abundante referencia a lo experimental. Como ya se ha mencionado en el epílogo de este libro, es notable la reticencia del autor en otorgar a Einstein el crédito que se merece en lo relativo a la relatividad especial.

—, *From Euclid to Eddington*, Dover, Nueva York, 1958.

Se trata de una especie de esquema de la evolución del pensamiento físico, haciendo fuerte hincapié en los conceptos de espacio y tiempo.

El *American Journal of Physics*, publicación de la American Association of Physics Teachers (AAPT), es una fuente constante de trabajos y cartas en los que se discuten aspectos especiales, paradojas, etc., sobre relatividad especial. La AAPT ha lanzado también un libro titulado *Selected Reprints in Special Relativity Theory* (publicado por el American Institute of Physics, Nueva York, 1963), el cual contiene, además, una bibliografía comentada por G. Holton. (El lector interesado en un estudio más avanzado o en aspectos más especiales hallará numerosas sugerencias en la lista de Holton.)

Solución a los problemas

CAPÍTULO 1

- I-1.* $6,3^{\circ}\text{K}$.
- I-2.* (a) $5,76 \times 10^{-3} \text{ N}$; (b) alrededor de 1 N .
- I-3.* (a) $6 \times 10^8 \text{ N}$ (fuerza gravitatoria = $3,6 \times 10^{22} \text{ N}$); (b) alrededor de $2 \times 10^{-7} \text{ m}$.
- I-4.* Alrededor de $0,5 \text{ cm}$.
- I-5.* Razonamientos lógicos sobre la fuerza necesaria para poner en marcha una máquina lavadora conducen al resultado de que la pérdida de masa solar ocurre a la velocidad de unos pocos millones de toneladas por segundo, lo cual es aproximadamente cierto.
- I-6.* Del orden de un gramo, quizá.
- I-7.* 10^{-14} (orden de magnitud).
- I-9.* Alrededor de $\$50\,000$.
- I-10.* $4,7 \times 10^{13} \text{ m}$.
- I-11.* (a) $3,3 \times 10^{-11}$; (b) $6,4 \times 10^{-4}$; (c) alrededor de 10^{11}°K .
- I-14.* $0,88''$ de arco.
- I-15.* (a) $c[n(n+2)]^{1/2}/(n+1)$; (b) $m_0c[n(n+2)]^{1/2}$.
- I-16.* (a) 2000 V ; (b) $0,09c$.
- I-17.* (a) Alrededor de $1,5$; (b) alrededor de $0,75$.
- I-18.* $c(1 + m_0c^2/h\nu)^{-1}$.
- I-20.* (a) $21,3 \text{ MeV}$; (b) $1,2 \times 10^{-3} \text{ N}$.
- I-21.* (a) $10^{-16}, 10^{-12}, 10^{-9}, 10^{-2}, 0,65$; (b) alrededor de $0,1c$.
- I-23.* Obtener las ecuaciones para v_x y v_y , teniendo en cuenta la variación de la masa con la energía, y resolver para x y para y separadamente como funciones de t .
- I-24.* $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{9}{20}$.
- I-25.* $1,82 \times 10^{25} \text{ s}^{-1}$. No, la velocidad en el ecuador es mayor que en c .
- I-26.* (a) $0,0025\%$; (b) 35% .

CAPÍTULO 2

- 2-1. (a) 24° ; (b) 61° ; (c) 0,1 años-luz (como comparación a 4 años-luz para la estrella más cercana, α Centauro).
- 2-3. (b) 2800 rpm.
- 2-4. $3,3 \times 10^{-3}$ Å.
- 2-5. (b) Alrededor de 30 s; alrededor de 16 min.
- 2-6. Alrededor de 200 franjas.
- 2-7. 3,5 km/s.
- 2-9. (a) En la mayoría de las orientaciones $\cos 2\theta \neq 0$; (b) 4; 0° , 90° , 180° , 270° ; (c) 9,5 m/s.

CAPÍTULO 3

- 3-2. (a) 2×10^{-4} franjas; (b) 0,08 franjas.
- 3-3. (b) Sí.
- 3-5. $x = 93$ m, $t = 2,5 \times 10^{-7}$ s.
- 3-6. (a) $-c/2$; (b) $\sqrt{3} x_0/c$.
- 3-7. (a) $1,25 \times 10^{-7}$ s; (b) $2,25 \times 10^{-7}$ s.
- 3-8. (c) (1) $x' = 0,58$, $ct' = 0,58$; (2) $x = 1,73$, $ct = 1,73$; (3) $x = 2,31$, $ct = 1,15$; (4) $x' = -1,15$, $ct' = 2,31$.

CAPÍTULO 4

- 4-1. $1,34 \times 10^9$ m.
- 4-2. $5,77 \times 10^{-6}$ s.
- 4-3. (a) $\pm 0,3$ m; (b) $0,33 \times 10^{-8}$ s; (c) 0,27 m, $-0,34$ m.
- 4-4. (a) 10^5 años; (b) 5 min.
- 4-5. (a) I_0/c ; (b) $[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{1/2} I_0/c$; $I_0/\gamma v$.
- 4-6. (a) 200 m; (b) $6,67 \times 10^{-7}$ s; (c) $3,33 \times 10^{-7}$ s.
- 4-7. (a) $4,67 \times 10^{-8}$ s; (b) 6,7 m.
- 4-8. $I[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{1/2}$; $(1 - \beta)\gamma l/c$.
- 4-9. (a) 2×10^7 m/s; (b) 1 en punto más $4,99 \times 10^{-6}$ s.
- 4-10. $8,63E_0$.
- 4-11. Alrededor de $0,9 \times 10^{-8}$ s.
- 4-12. (a) 12:50 P.M.; (b) $7,2 \times 10^{11}$ m; (c) 1:30 P.M.; (d) 4:30 P.M.
- 4-13. (a) $0,9950c$ a $0,9954c$;
(b) $R(\theta) \approx R_0 \{1 + [(1 - \cos \theta)/\gamma_0] \ln R_0\}$, donde $R(\theta)$ es el cociente de recuentos para un ángulo θ y R_0 es el cociente para la incidencia vertical (para mesones, siendo $\gamma = \gamma_0$). Este resultado se obtiene de la relación $\gamma(\theta) = 1 + (\gamma_0 - 1) \sec \theta$.
- 4-14. La aceleración de los dos proyectiles cesa en tiempos distintos en el sistema final en reposo.
- 4-15. (a) $(1 - \beta \cos \theta)\gamma l/c$; (b) $(1 - \beta \cos \theta)\gamma l$.

- 4-16. (a) $c\sqrt{7}/4$; (b) $3\sqrt{2}l_0/5$.
- 4-17. La atravesía.
- 4-18. Para el suceso 1: (a) sí, (b) no. Para el suceso 2: (a) no, (b) sí; $v = 2,85 \times 10^8$ m/s, a lo largo de la dirección de desplazamiento entre 2 sucesos en S .
- 4-19. Causalidad no violada.

CAPÍTULO 5

- 5-1. $0,7c$; $0,94c$.
- 5-2. $0,991c$; $0,213c$.
- 5-5. $1 - \exp[-n\pi(R_1 + R_2)^2 vt]$;
 $1 - \exp[-n\pi(R_1 + R_2)^2(u + v)(1 + uv/c^2)^{-1}(1 - v^2/c^2)^{1/2}t]$.
- 5-6. (a) $c/3$; (b) 20 m.
- 5-8. (a) $\tan^{-1}[(1 - v^2/c^2)^{1/2}/(1 - \sqrt{2}v/c)]$;
(b) $\tan^{-1}[(1 - v^2/c^2)^{1/2}/(1 - \sqrt{2}v/u)]$;
(c) $\tan^{-1}[(1 - v^2/c^2)^{-1/2}]$.
- 5-9 (a) $v_0[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{1/2}$; (b) $v_0(1 - \beta)/(1 + \beta)$.
- 5-10. (b) $t_0(1 - \beta)/(1 + \beta)$; (c) $t_0[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{1/2}$.
- 5-11. Alrededor de 50 días.
- 5-12. (a) $\frac{1}{11}$; (b) $11c/61$.
- 5-13. (a) $1,6 \times 10^{10}$ años-luz; no. (b) $1,7 \times 10^{10}$ años-luz; no.
- 5-14. Alrededor de $1,5 \times 10^{10}$ años.
- 5-15. (a) 3600 Å; (b) 3×10^6 años.
- 5-16. (a) 22 km/s, aproximadamente; (b) alrededor de $0,01^\circ$;
(c) 3600 km/s; sí.
- 5-17 (a) $v_0[(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{1/2}$; (b) $v_0(1 - \beta)$; (d) 2×10^{-15} .
- 5-18. $x = [(1 + g^2 t^2/c^2)^{1/2} - 1]c^2/g$ ($g = 9,8$ m/s²); $t = \frac{20}{3}$ meses, aproximadamente.
- 5-20. (a) 533; (b) 267; (c) A recibe 1333, B recibe 1067; (d) A es 2 años, 8 meses más joven.
- 5-21. 2×10^{-4} s, aproximadamente.
- 5-22. (a) $\beta = 0,99975$ a $0,99997$; (b) $(0,9$ a $2,7) \times 10^{-14}$ s;
(c) $(2,7$ a $8,1) \times 10^{-6}$ m; (d) $0,2$ μs, $0,1$ μs.

CAPÍTULO 6

- 6-1. 300 MeV; 224 MeV; masa = 200 MeV; $\arctan 0,5$; $v = 0,745c$.
- 6-2. (a) 5,66 GeV; (b) 4,3 uma; (c) $0,187c$.
- 6-3. $\sqrt{17} m_0$.
- 6-4. (a) $c/(1 + m_0 c^2/E)$; (b) $4m_0/\sqrt{3}$; $c/2$.

- 6-5. (a) $\arctan\left(\frac{9}{16}\right)$; 0,836c; (b) 4,75.
- 6-6. (a) $\beta = 10^{-5}$; el *azul* se desplaza una magnitud $\beta^2/2$ a causa de la aberración; (b) el *rojo* se desplaza una magnitud $\beta^2/2$; (c) no cambia de frecuencia.
- 6-8. $M_0[\gamma - 1 + (\gamma^2 - 1)^{1/2}]/2$.
- 6-9. (a) 33 W; (b) 3,3 m/s; (c) 66β W, $0,7\mu$ W;
 (d) (i) Un volumen siempre creciente de espacio está siendo llenado con radiación; (ii) la energía cinética es absorbida continuamente por el laser en su retroceso.
- 6-11. (a) 1,131 GeV, 4 MeV; (b) 14° , aproximadamente.
- 6-12. (a) 2 GeV, $\frac{2}{3}$ GeV; (b) 2 GeV hacia adelante, $\frac{2}{3}$ GeV hacia atrás;
 (c) $\frac{2}{3}$ GeV, 2 GeV, intercambiado con respecto a (a).
- 6-13. (a) $c/\sqrt{3}$; (b) 1,2 MeV.
- 6-15. (a) $84,0^\circ$; (b) $26,1^\circ$.
- 6-16. $c/[1 + (m_0c^2/Q)]^{1/2}$.
- 6-17. 0,25 MeV (ignorando el retroceso Compton del núcleo).
- 6-18. (a) $2,5 \times 10^{20}$ s⁻¹; la energía es típica de la radiación nuclear gamma;
 (b) $m_0c^2 \{[1 + (2h\nu/m_0c^2)^2]^{1/2} - 1\}$.
- 6-19. (a) 328 MeV; (b) $\theta = 104,5^\circ$; $Q = 228$ MeV.
- 6-20. 850 MeV.

CAPÍTULO 7

- 7-1. K tiene una energía cinética de 396 MeV; π tiene una energía cinética de 616 MeV.
- 7-2. 2,04 MeV (= $4m_0c^2$).
- 7-3. 17,6 GeV.
- 7-6. $K = [(K^* + M_0c^2)/(1 - V^2/c^2)^{1/2}] - M_0c^2$, donde M_0 = total de masas en reposo.
- 7-7. (a) $E' = E \cos \alpha$; (b) $E_{\text{absorbida}} = E_{\text{emitida}} \cos \alpha = \gamma E_{\text{emitida}}$.
- 7-8. $x = [(1 + g^2t^2/c^2)^{1/2} - 1]c^2/g$ ($g = 9,8$ m/s²); $t = \frac{20}{3}$ meses aproximadamente.
- 7-9. (a) 23 mc/s; (b) 9,7 MeV, $4,3 \times 10^7$ m/s; (c) 49 rev, 0,34 μ s; (d) la frecuencia del orbital de los iones disminuye a causa del aumento de masa a altas energías, y la condición de resonancia desaparece.
- 7-10. (a) La cantidad de movimiento (inicial) en la dirección del mesón K^- incidente es 0; (b) Sigma menos.

CAPÍTULO 8

8-4. $F_x = kq_1q_2/\gamma^2x^2$; $F_y = 0$; $\mathbf{F}_{\text{magnético}} = 0$.

8-5. $F_x = \gamma k q_1 q_2 (x + vu_y y/c^2 + vu_z z/c^2)/(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$
 $F_y = \gamma k q_1 q_2 y (1 - vu_x/c^2)/(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$
 $F_z = \gamma k q_1 q_2 z (1 - vu_x/c^2)/(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

8-6. Usando el sistema MKS:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x' &= \mathcal{E}_x & B_x' &= B_x \\ \mathcal{E}_y' &= \gamma(\mathcal{E}_y - wB_z) & B_y' &= \gamma(B_y + w\mathcal{E}_z/c^2) \\ \mathcal{E}_z' &= \gamma(\mathcal{E}_z + wB_y) & B_z' &= \gamma(B_z - w\mathcal{E}_y/c^2)\end{aligned}$$

8-7. $F_x = 2k(q_2\lambda/b)(vu_y/c^2); F_y = 2k(q_2\lambda/b)(1 - vu_x/c^2); F_z = 0.$

8-8. (a) 7.4×10^{-3} m/s, 7.4×10^{-5} m/s, 7.4×10^{-7} m/s;

(b) 2×10^{-7} newton/m, 2×10^{-5} newton/m.

8-9. La distancia propia entre los electrones debe crecer.

8-10. $1 - \beta^2$.

8-11. $I\beta(1 - \beta^2)^{-1/2}/c$. La carga total se conserva, pero se debe considerar el circuito completo y no la variación de densidad a lo largo de una sección limitada.

Indice alfabético

- Aberración, experimento modificado sobre la, 49.
— estelar, 46, 151, 152.
- Absorción y emisión de fotones, 202.
- Airy, George, 50.
- Alväger, T., 149.
—, experimento de, 149.
- Alvarez, L. W., 254.
- Análisis magnético de las partículas relativistas, 253.
- Anderson, C. D., 211.
- Antiprotones, creación de, 214.
- Aparato de «arrastre del éter» de Fizeau, 52.
— — Michelson-Morley, 63.
- Arago, F., 50.
- Austern, N., 5.
- Babcock, G. C., 53, 147.
- Bailey, J. M., 148.
- Bay, Z., 224.
- Beran, M., 140.
- Bergman, T. G., 146.
- Bergmann, P. G., 317.
- Berkeley, obispo, 102.
- Bertozzi, W., 8.
- Bohm, D., 317.
- Bondi, Hermann, 74, 75, 179, 182.
- Born, M., 317.
- Bradley, James, 45, 47.
- Broglie, L. de, 190.
- Brown, R. R., 163.
- Bucherer, A. H., 25.
- Burnstein, R. A., 262.
- Caja de Einstein, 18.
— — — desquiciada, 29, 31.
- Cajori, F., 5.
- Camino óptico, 52.
- Campo de una distribución lineal de carga, 289.
— eléctrico, 268.
— magnético, 269.
— — y la relatividad, 293.
- Cavidad resonante, 169.
- Cedarholm, J. P., 168.
- Cinemática relativista, 143.
- Coeficiente de arrastre, 150.
— — — de Fresnel, 51.
- Cohete de fotones, 209.
- Compton, A. H., 224, 225.
- Compton, efecto, 222, 224.
- Cono de luz, 136.
- Contracción de Lorentz, 108, 300.
de Fitzgerald-Lorentz, 109.
- Copérnico, N., 75.
- Corrimiento al rojo, 158.
- Coulomb, C. A., 267, 272.
- Coulomb, ley de, 267.
- Creación de antiprotones, 214.
— — partículas, 211.
— — — piones, 212.
- Cross, W. G., 224, 225.
- Cuadrivectores, 246.
- Cunningham, E., 258.
- Champion, F. C., 222.
- Choque elástico, dos aspectos de un, 193.
— inelástico, dos aspectos de un, 196.
- Darwin, sir C. G., 187.
- Davey, W. G., 205.

- Desintegración de los muones en reposo, 117.
 Dewan, E., 140.
 Diagramas de Minkowski, 128, 300.
 — — —; espacio-tiempo, 92.
 Dilatación del tiempo, 110.
 — — —: otra interpretación de la, 118.
 — — — mediante mesones de rayos cósmicos; observación de la, 111.
 Dinámica relativista, 237.
 — — —; choques y leyes de conservación, 191.
 — newtoniana; desviaciones de la, 3.
 Dispersión, 219.
 — elástica, 219.
 — — de partículas idénticas, 219.
 Doppler, Christian, 154.
 Doppler, efecto, 153, 159, 226.
 —, fórmula de, 165.
 Doyle, sir A. C., 41.
 Drake, Stillman, 75.
- Eddington, sir A. S., 34, 317.
 Efecto Compton, 222, 224.
 — Doppler, 153, 159, 226.
 — — de segundo orden, 165.
 — — y la dilatación del tiempo, 165.
 — Mössbauer, 206.
 — radiométrico, 15.
 Einstein, Albert, 1, 3, 5, 17, 21, 65, 70, 90, 100, 142, 151, 265, 313, 317, 318.
 Einstein y la universalidad de c , 79.
 Energía, cantidad de movimiento y masa, 22.
 —, inercia de la, 17.
 — en reposo, 24.
 — umbral, 214.
 Éter, de nuevo en busca del, 168.
 — luminífero, 43.
 Experimento de Airy, 50.
 — de Alväger, 149.
 — de Ives-Stilwell, 167.
 — de Kennedy-Thorndike, 82.
 — de la dilatación del tiempo, 112, 118.
 — de la presión de radiación, 16.
 — de Michelson-Morley, 41, 54, 57, 81.
 — — — con lasers, 125.
 — modificado sobre la aberración, 49.
 Extinción, fenómeno de, 146.
- Factor Doppler de primer orden, 165.
 Farley, F. J. M., 83.
 Fenómeno de extinción, 146.
 Feynman, R. P., 236.
- Fitzgerald, G. F., 71.
 Fitzgerald-Lorentz, contracción de, 109.
 Fizeau, H. L., 51, 53, 64, 150.
 Ford, K. W., 318.
 Fórmula de Doppler, 165.
 Fotones, 12.
 —, absorción y emisión de, 202.
 —, cohete de, 209.
 —, producción de pares por, 217.
 —, relación energía - cantidad de movimiento para los, 13.
 —, velocidad de los, 13.
 Foucault, L., 64.
 Fowler, W. A., 20.
 Fox, J. G., 83, 146.
 Fresnel, J. A., 43, 50, 51.
 Frisch, D. H., 113, 116, 318.
 Fuerza ejercida sobre una carga de prueba en movimiento, 281.
 — en la mecánica relativista, la, 247.
 — existente entre alambres portadores de corriente, 303.
 — magnética ejercida sobre una carga en movimiento por un alambre portador de corriente, 296.
 — — sobre una carga en movimiento, 269.
 — sobre una carga de prueba en reposo, 274.
- Fuerzas magnéticas, 300.
- Galilei, Galileo, 63, 75, 258.
 Ganley, W. P. 251.
 Gerlach, W., 15.
 Glaser, D. A., 254.
 Goldstein, H., 38.
 Golsen, A., 15.
 Guye, 25.
- Hall, D. B., 116.
 Henri, V. P., 224.
 Hill, A. G., 28.
 Hipótesis de contracción, 71.
 — de un universo en expansión, 160.
 Holmes, Sherlock, 40, 41.
 Hooke, Robert, 42.
 Hoyle, F., 159.
 Hubble, E., 159, 160.
 Hubble, ley de, 159, 161.
 Hull, G. F., 15.
 Humason, M. L., 160.
 Huygens, C., 42, 43, 258.

- Illingworth, K. K., 59.
 Inducción electromagnética, 265.
 Inercia de la energía, 17.
 Infeld, L., 1, 100, 142, 318.
 Interferómetro de Michelson, 57.
 Intervalo temporal, 135.
 Intervalos de espacio-tiempo y causalidad, 133.
 Invariante energía-cantidad de movimiento y su empleo, 237.
 — espacio-tiempo, 93.
 Ives, H. E., 166.
 Ives-Stilwell, experimento de, 167.
- Jaffé, B., 318.
 Jammer, Max, 247, 259.
 Jaseja, T. S., 125.
 Javan, A., 125.
 Jay, A. H., 96.
 Jeffery, G. B., 73, 318.
 Joos, G., 58.
- Kacser, C., 318.
 Katz, R., 318.
 Kaufmann, W., 25.
 Kennedy, R. J., 82.
 Kennedy-Thornidike, experimento de, 82.
 King, J. G., 16.
 Kjellman, J., 83.
- Larmor, Joseph, 314.
 Laue, M. von, 19.
 Lauritsen, C. C., 20.
 Lavanchy, C., 25.
 Lewis, G. N., 195.
 Linac, 7.
 Línea del universo de una partícula, 83.
 Líneas de carga en movimiento, 290.
 — — — en reposo, 289.
 Lebedef, P., 15.
 Ley de composición de velocidades de Galileo, 60.
 — de Coulomb, 267.
 — — —, transformación de la, 272.
 — de fuerzas de Lorentz, 270.
 — de Hubble, 159, 161.
 Leyes de conservación, algunas otras consideraciones, 201.
 Longitud no propia, 120.
 — propia, 120.
 Lorentz, H. A., 63, 71, 90, 270, 300.
 Lorentz, contracciones de, 108, 300.
- , ley de fuerzas de, 270.
 Lovell, sir B., 13.
 Luz, naturaleza de la, 42.
 — en un medio móvil: coeficiente de arrastre, 150.
 — procedente de una fuente en movimiento, 82.
- Masa de un pion cargado, 213.
 — — — — neutro, 213.
 — del neutrón, 213.
 — del protón, 213.
 — en reposo, 24.
 Materia y radiación, 17.
 Maxwell, James Clerk, 44, 54, 56, 265, 306.
 Mc Donald, D. F., 12.
 Mc Lernon, F., 224.
 Mecánica de Newton, 5.
 Medición de longitudes y de tiempos, 120.
 — de tiempos, 106.
 Medida de Fizeau del coeficiente de arrastre, 51.
 Medidas propias, 120.
 Michelson, A. A., 40, 54, 56, 58, 62, 63.
 Michelson-Morley, experimento de, 81.
 Milburn, R., 233.
 Miller, D. C., 59.
 Minkowski, H., 92.
 Minkowski, diagramas de, 128, 300.
 Moller, C., 315.
 Moon, P. B., 205.
 Morley, E. W., 54, 63.
 Mössbauer, R., 206, 207.
 Mössbauer, efecto, 206.
 Motte, A., 5.
 Movimiento bajo una fuerza constante, 28.
 Movimientos acelerados, 175.
 — transversales: aberración estelar, 151.
 Mulligan, J. F., 12..
 Muones en reposo, desintegración de los, 117.
 Murray, J., 125.
- Naturaleza de la luz, 42, 64.
 Neutrón, masa del, 213.
 Newton, Isaac, 1, 3, 5, 17, 76.
 Ney, E. P., 318.
 Nichols, E., 15.
 Nobel, A., 315.
- Observadores, 102.
 Occhialini, G. P. S., 219.

- Palmieri, J. N., 262.
 Paradoja de los gemelos, 177.
 — del reloj, 177.
 Partículas, creación de, 211.
 — relativistas, análisis magnético, 253.
 Pauli, W., 201.
 Perrett, W., 73, 318.
 Piccard, A., 59.
 Pierce, J. R., 209.
 Piones, creación de, 212.
 Pitágoras, 42.
 Pless, Irwin, A., 217.
 Poincaré, H., 313.
 Ponderadores, 28.
 Postulado segundo de Einstein, 81.
 Powell, C. F., 219.
 Presión de radiación, 14, 16.
 Producción de pares por fotones, 217.
 Propagación de la luz, 41.
 Protón, masa del, 213.
 Ptolomeo, C., 75.
 Pound, R. V., 186.
 Purcell, E. M., 38.
- Radiación, presión de, 14.
 — de una fuente que se mueve rápidamente, 145.
 Ramsey, N. F., 224, 225.
 Rayleigh (J. W. Strutt), lord, 63.
 Rebka, G. A., 186.
 Reichenbach, H., 318.
 Reines, F., 201.
 Relación energía-cantidad de movimiento para los fotones, 13.
 — espacial, 135.
 Relatividad. Einstein reafirma la, 73.
 — de la simultaneidad, 83.
 — es auténticamente relativa, la, 126.
 — según Galileo y Newton, 74.
 — y electricidad, 265.
 — y la medición de longitudes e intervalos de tiempo, la, 101.
 Reloj de pulsos luminosos, 122, 123.
 Relojes en movimiento, 171.
 Rindler, W., 133.
 Robertson, H. P., 81.
 Roemer, O., 43, 55.
 Rosenfeld, Jon, 60.
 Rosser, W. G. V., 319.
 Rossi, B., 116.
- Sanders, J. H., 12.
 Sanford, R. F., 96.
 Scott, G. D., 137.
 Schilpp, P. A., 19, 314, 319.
 Shahkland, R. S., 25, 59.
 Sherwin, C. W., 319.
 Sistema en reposo, 120.
 Sistemas de medida, eléctricos y magnéticos, 305.
 Slipher, V. M., 160.
 Smith, J. H., 96, 113, 139.
 Soldner, J., 36.
 Solomon, L. H., 13.
 Stahel, E., 59.
 Stewart, A. B., 47.
 Stilwell, G. R., 166.
 Strutt, J. W. (lord Rayleigh), 63.
 Sucésos puntuales y sus transformaciones, 104.
 Sutton, R. B., 232.
- Taylor, E. F., 319.
 Teoría especial de la relatividad, 4.
 Thompson, S. P., 42.
 Thorndike, A. M., 82.
 Todd, D. P., 54.
 Tollestrup, A. V., 20.
 Tolman, R. C., 195.
 Tomaschek, R., 59.
 Townes, C. H., 125, 168, 171.
 Transformación de Galileo, 76.
 — de la ley de Coulomb, 272.
 — de las leyes de Newton, 77.
 — de velocidades, 143.
 Transformaciones de Lorentz, 90.
 — — — para la energía y la cantidad de movimiento, 240, 243.
 — de Lorentz-Einstein, 71, 85.
 — generales de fuerzas: acción y reacción, 256.
- Unidades de medida eléctricas y magnéticas, 305.
- Velocidad de las partículas en función de su energía cinética, 27.
 — de los fotones, 13.
 — límite, 6.
 Velocidades, transformación de, 143.
 «Viento de éter», 60.

Viner, M. R., 137.
Voigt, W., 314.

Wallin, I., 83.
Webster, D. L., 311.
Wheeler, J. A., 319.
Whipple, F. L., 13.

Whiteside, H., 262.
Whittaker, sir E. T., 314.

Young, Thomas, 43.
Zeeman, P., 54.

