



CURSO FI2002

APUNTE DE ELECTROMAGNETISMO

Luis Vargas D.

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Versión 2015 ©

☎: (56) (2) 2978 4203
✉: lvargasd@ing.uchile.cl
📍: Avda. Tupper #2007 - Santiago - Chile

Índice general

1. Introducción	9
2. Electrostática en el Vacío	11
2.1. Introducción	11
2.2. Ley de Coulomb	11
2.2.1. Descripción	11
2.2.2. Dimensiones	12
2.3. Campo Eléctrico	13
2.4. Principio de Superposición	15
2.5. Campo Eléctrico de Distribuciones Continuas	19
2.5.1. Distribución Lineal	20
2.5.2. Distribución Superficial	22
2.5.3. Distribución Volumétrica	24
2.6. Ley de Gauss	29
2.6.1. Conceptos Matemáticos Incluidos	29
2.6.2. Ley de Gauss	31
2.6.3. Primera Ecuación De Maxwell	36
2.7. Potencial Eléctrico	37
2.7.1. Trabajo de un Campo Eléctrico	37
2.7.2. Definición de Potencial Eléctrico	39
2.7.3. Relaciones entre Potencial y Campo Eléctrico	42
2.7.4. Ecuación de Laplace y Poisson	44
2.7.5. Campo Eléctrico Conservativo	46
2.8. Dipolo Eléctrico	46
2.8.1. Definición Dipolo	46
2.8.2. Potencial Eléctrico de un Dipolo	47
2.8.3. Dipolo de un Conjunto de Cargas y Distribuciones	49

2.8.4. Desarrollo en Serie del Potencial a Grandes Distancias	52
2.9. Problemas Resueltos	53
2.10. Problemas Propuestos	73
3. Propiedades Dieléctricas de la Materia	75
3.1. Introducción	75
3.2. Modelo de los Materiales Dieléctricos	75
3.2.1. Materiales no Polares	76
3.2.2. Materiales Polares	77
3.2.3. Vector Polarización	78
3.3. Potencial Eléctrico en la Materia	78
3.4. Distribuciones de Carga de Polarización	80
3.5. Generalización de la Primera Ecuación de Maxwell	82
3.6. Constante Dieléctrica	83
3.6.1. Polarización de Medios Materiales	83
3.6.2. Clasificación de Materiales Dieléctricos	84
3.6.3. Ecuación de Laplace en Medios Materiales	86
3.7. Ruptura Dieléctrica	87
3.8. Condiciones de Borde	88
3.9. Refracción del Campo Eléctrico	92
3.10. Consideraciones sobre Simetría	93
3.11. Problemas Resueltos	96
3.12. Problemas Propuestos	102
4. Conductores en Electrostática	104
4.1. Modelo Básico de Conductores	104
4.2. Propiedades	105
4.3. Caso Conductor con Oquedad	106
4.4. Condensadores	111
4.5. Cargas en Medios Materiales	114
4.6. Método de las Imágenes	115
4.7. Problemas Resueltos	117
4.8. Problemas Propuestos	125
5. Energía Electrostática	126
5.1. Definición	126

5.2. Energía de un Sistema de Conductores	127
5.3. Fuerza Eléctrica y Energía	128
5.4. Energía en Términos de Campos	131
5.5. Problemas Resueltos	133
5.6. Problemas Propuestos	136
6. Corriente Eléctrica	137
6.1. Modelo de Medios Materiales Conductores	137
6.2. Definición de Corriente	138
6.3. Densidad de Corriente	140
6.4. Ley de Ohm	144
6.5. Fuerza Electromotriz	148
6.6. Efecto Joule	150
6.7. Cargas en Medios Materiales	151
6.8. Corriente de Convección	153
6.9. Ecuación de Continuidad	154
6.10. Ecuación de Continuidad en Medios Materiales	155
6.11. Condiciones de Borde para \vec{J}	157
6.11.1. Caso en que uno de los Medios es un Conductor Perfecto:	158
6.12. Ley de Voltajes de Kirchoff	162
6.13. Ley de Corrientes de Kirchoff	164
6.14. Problemas Resueltos	166
6.15. Problemas Propuestos	172
7. Magnetostática en el Vacío	175
7.1. Introducción	175
7.2. Fuerza de una Corriente sobre una Carga Eléctrica	175
7.3. Definición de Campo Magnético	178
7.3.1. Campo Magnético Producido por una Carga Puntual	181
7.3.2. Campo Magnético Producido por Distribuciones de Corriente	181
7.4. Ley de Biot - Savart	182
7.5. Ley Circuital de Ampère	187
7.6. Generalización de la Tercera Ecuación de Maxwell	189
7.7. Generalización de la Cuarta Ecuación de Maxwell	190
7.8. Movimiento de una Carga Puntual en el Interior de un Campo Magnético	191

7.8.1. Selector de Velocidades	193
7.8.2. Espectrógrafo de Masas	193
7.9. Potencial Magnético Vectorial	194
8. Magnetostática en la Materia	198
8.1. Dipolo Magnético	198
8.2. Modelo Atómico de Materiales	201
8.3. Corrientes de Magnetización	202
8.4. Permeabilidad Magnética	203
8.5. Clasificación de los Materiales Magnéticos	204
8.6. Condiciones de Borde	206
8.7. Resumen de Electrostática y Magnetostática	208
8.8. Problemas Resueltos	209
8.9. Problemas Propuestos	222
9. Campos Variables en el Tiempo	224
9.1. Ley de Faraday - Lenz	224
9.1.1. Ley de Inducción	224
9.2. Modificación a la Tercera Ecuación de Maxwell	231
9.2.1. Inductancia Propia	233
9.2.2. Inductancia de Conjunto de Circuitos	235
9.2.3. Inductancia en Sistemas Distribuidos	236
9.3. Corriente de Desplazamiento	238
9.4. Energía Electromagnética	240
9.4.1. Energía del Campo Electromagnético	240
9.4.2. Fuerza sobre Materiales Magnéticos	242
9.5. Ondas Electromagnéticas	245
9.5.1. Ecuación de Onda en el Vacío	247
9.5.2. Solución de la Ecuación de Onda	249
9.5.3. Vector Poynting	250
9.6. Problemas Resueltos	250
9.7. Problemas Propuestos	256
A. Circuitos Electromagnéticos	257
A.1. Elementos en Circuitos R.L.C.	257
A.2. Circuitos R.L.C.	257

A.3. Corrientes Alternas	258
A.4. Transformada Fasorial	259
A.5. Concepto de Impedancia	260
A.6. Circuitos Magnéticos	261
B. Sitios Web de Interés	262
C. Fórmulas Usadas	264

Recomendación:

Antes de comenzar el estudio del *Electromagnetismo*, se recomienda al lector hacer un estudio previo del cálculo, en su forma vectorial. Esto debido a que en muchos capítulos, desarrollos y demostraciones, se hace uso de esta herramienta matemática. Por ello, somos enfáticos en destacar su conocimiento previo, para no interrumpir la continuidad de la lectura, a lo largo de este apunte.

En todo caso, a modo de guía, se hará una breve mención de los contenido necesarios, siendo deber del lector, profundizar más; para tener una mejor aplicación a lo largo del curso.

Puede serle de ayuda, el apunte asociado al curso de Cálculo Avanzado y Aplicaciones creado por el Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, en su versión 2009, presente en el siguiente link:

http://www.docencia.dim.uchile.cl/calcu.../material/apunte_ma2002_2009_2.pdf

Capítulo 1

Introducción

El fenómeno electromagnético rige un campo vastísimo de nuestra realidad, para dimensionar su alcance consideremos algunos ejemplos:

1. Parte de la actividad del sistema nervioso, la interacción neuronal y el mismo ojo con que se leen estas líneas es gobernado por leyes del electromagnetismo.
2. Fenómenos climáticos como la aurora boreal, el rayo y el relámpago se explican en base a esta teoría.
3. La luz se entiende como ondas electromagnéticas.
4. Las aplicaciones prácticas son muy variadas en el mundo moderno:
 - a) Toda la tecnología electrónica (TV, PC, celulares, video juegos, etc.) está basada fuertemente en estos principios.
 - b) Aplicaciones médicas: Rayos X, electrocardiogramas, electroencefalograma, resonancia magnética, etc.
 - c) Tarjetas de crédito, códigos de barra de supermercados, sistemas de posicionamiento geográfico, etc.

La comprensión acabada de estos temas se encuentra en las especialidades de ingeniería, sin embargo, en este curso aprenderemos los fundamentos que nos permitirán tener un entendimiento básico de los principios en que se basan las aplicaciones tecnológicas listadas anteriormente.

Desde el punto de vista de la descripción del fenómeno partiremos adoptando las siguientes propiedades básicas de la carga eléctrica:

1. La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia, como la masa, la vida media o la capacidad calórica.
2. En la naturaleza la carga eléctrica se da de dos formas en las siguientes partículas:
 - a) Electrón (e) con una masa de $9.1066E-31 [kg]$, la cual se define como carga negativa.
 - b) Protón (p) con una masa de $1.67248E-27 [kg]$, la cual se define como carga positiva.
3. Curiosamente aunque sus masas son diferentes, su carga eléctrica es idéntica pero de signo contrario.

Para entender mejor la interacción de las cargas conviene dividir el estudio en dos partes. La primera parte considera que no hay movimiento de cargas, es decir, las partículas se encuentran en estado de reposo, mientras que en la segunda se considera la interacción de cargas en movimiento. De esta forma, primero abordaremos situaciones estacionarias (electrostática y magnetostática) y luego incorporaremos las variaciones temporales (corrientes y campos variables en el tiempo).

La teoría que describe matemáticamente estos fenómenos fue formulada alrededor de 1865. Mediante el uso de campos escalares y vectoriales se puede resumir toda la teoría en cuatro ecuaciones, llamadas ecuaciones de Maxwell. Desde aquella fecha hasta nuestros días se ha producido un enorme desarrollo de aplicaciones tecnológicas en prácticamente todos los campos del quehacer humano, pero la teoría básica no ha experimentado mayores cambios.

Es interesante destacar que al contrario de lo que ocurre en el estudio de la Mecánica, donde la interacción entre las partículas; aisladas o como sistema, son el centro de atención, en Electromagnetismo el eje del estudio lo constituye el concepto de campos (eléctricos y magnéticos). Por ello, el conocimiento y dominio del cálculo vectorial es requisito ineludible para la cabal comprensión del Electromagnetismo.

Capítulo 2

Electrostática en el Vacío

2.1. Introducción

En esta primera parte revisaremos los principios que rigen a la carga eléctrica en estado de reposo, más conocida como Electrostática.

2.2. Ley de Coulomb

2.2.1. Descripción

Es una ley experimental, que fue descubierta en 1785 por el coronel francés Charles Augustin de Coulomb. El coronel encontró que la magnitud de la fuerza experimentada por una partícula con carga q_1 en presencia de otra partícula con carga q_2 tiene la forma:

$$|F_{q_1, q_2}| = k \frac{q_1 q_2}{R^2} [N] = |F_{q_2, q_1}|$$

Usando la nomenclatura de la Figura 2.1, se cumple:

1. Es directamente proporcional al producto $q_1 \cdot q_2$
2. La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia R

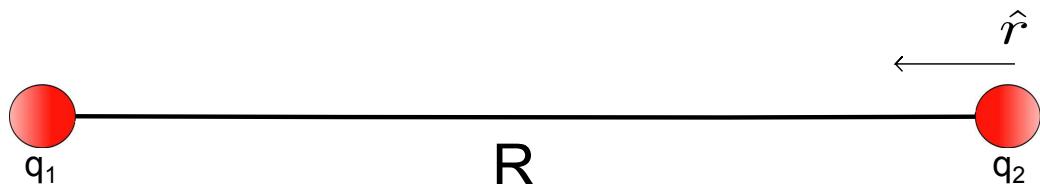


Figura 2.1: Fuerza de Coulomb

Adicionalmente, se encontró que:

1. La fuerza tiene la dirección de la línea que une q_1 y q_2
2. Si q_1 y q_2 son de igual signo se repelen, en caso contrario se atraen.

Así, la ecuación vectorial de fuerza es:

$$\vec{F}_{q_1, q_2} = k \frac{q_1 q_2}{R^2} \hat{r} [N]$$

2.2.2. Dimensiones

Existe libertad para escoger las unidades de la constante k o de la carga q (pero no ambas).

Recordemos que $1N = 1Kg \times \frac{m}{seg^2}$, entonces $[k \cdot q_1 \cdot q_2] = [F \cdot R^2] = Kg \times \frac{m^3}{seg^2} \Leftrightarrow \text{masa} \times \frac{\text{distancia}^3}{\text{tiempo}^2}$.

En el sistema M.K.S. se define la unidad 1 Coulomb $[C]^1$ para las cargas y corresponde a la carga de 6×10^{18} electrones. Así

$$6 \times 10^{18} [e_s] = 1 [C]$$

Luego, para un electrón la carga es

$$[q_e] = -1,6030 \times 10^{-19} [C] \approx -1,6 \times 10^{-19} [C]$$

Consecuentemente la carga del protón es la misma con signo positivo.

Experimentalmente se puede medir la fuerza entre cargas. Con ello se encuentra que:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 [Kg \times \frac{m^3}{C^2} \times seg^2]$$

Y definiendo la unidad Farad $[F] = \frac{seg^2}{m}$ la constante ϵ_0 , llamada *permitividad del espacio libre*, corresponde a

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8,8541 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right]$$

En donde "c" es la velocidad de la luz.

EJEMPLO 1:

Comparar la fuerza de repulsión eléctrica con la fuerza gravitacional entre 2 protones.



Figura 2.2: Módulo de Fuerzas entre Cargas

Solución:

Fuerza Gravitacional de Atracción:

$$F_g = \frac{G m_p^2}{D^2}$$

Fuerza Eléctrica de Repulsión:

$$F_e = \frac{k q_p^2}{D^2}$$

¹Más tarde veremos que esta unidad es útil en el caso de las corrientes donde se cumple 1 Ampère = 1 C/seg.

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{kq_p^2}{D^2}}{\frac{Gm_p^2}{D^2}} = \frac{kq_p^2}{Gm_p^2}$$

Sabemos que $G \sim 10^{-10}$ y que la masa del protón es $1.6E-27$ [kg], luego

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{10^{-10} \times (1.6 \times 10^{-27})^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-38}}{10^{-10} \times 10^{-54}} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{16}}{10^{-10}} \approx \frac{10^{26}}{10^{-10}} \approx 10^{36}$$

Así, la fuerza eléctrica es 10^{36} veces más intensa que la fuerza gravitacional por lo que las dos partículas debieran separarse. A partir de este simple ejercicio podemos extraer algunas conclusiones:

1. La mayoría de los objetos en nuestra vida diaria no están cargados (de otra forma se vería nítidamente su efecto)
2. A nivel molecular la gravedad es despreciable como fuerza
3. Entre planetas la fuerza eléctrica es despreciable frente a la gravitacional (¡probarlo!)
4. Toda carga eléctrica es un múltiplo entero de la carga de un protón (igual al electrón con signo opuesto).

2.3. Campo Eléctrico

Para expresar en forma más rigurosa el concepto de fuerza eléctrica se usa el concepto de campo eléctrico. Consideremos el arreglo de cargas de la Figura 2.3.

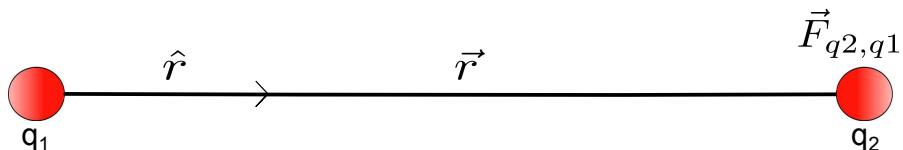


Figura 2.3: Fuerzas entre Cargas

Llamemos \vec{F}_{q_1, q_2} a la fuerza que siente q_2 debido a q_1 y escribámosla de la siguiente forma:

$$\vec{F}_{q_2, q_1} = q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2} \hat{r}$$

Como $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ se tiene:

$$\vec{F}_{q_2, q_1} = q_2 \cdot \left[\frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} \right]$$

A la expresión $\vec{E} \equiv \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ se le denomina campo eléctrico producido por la carga q_1 . Con esto, la fuerza que siente la carga q_2 en presencia de dicho campo es $\vec{F}_{q_2, q_1} = q_2 \vec{E}$

En términos matemáticos \vec{E} corresponde a un campo vectorial, es decir, una función que asocia un vector a cada punto del espacio. Físicamente corresponde a una perturbación eléctrica en todo el espacio producida por la carga q_1 .

Generalicemos el resultado anterior al de una carga q ubicada en la posición \vec{r}' en un sistema de coordenadas de origen \mathcal{O} como en la Figura 2.4

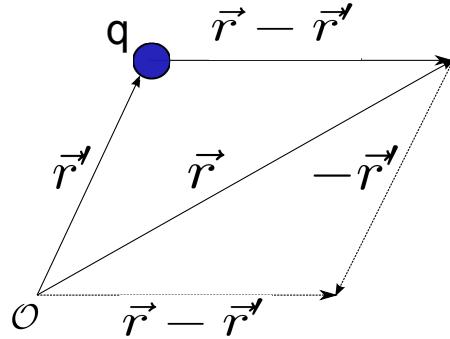


Figura 2.4: Campo Eléctrico de Carga Puntual

En la Figura 2.4 (y en todo el apunte) la variable \vec{r}' describe el lugar donde se encuentra la carga que produce el campo, mientras que \vec{r} indica el lugar donde se evalúa el campo eléctrico.

Así, la expresión del campo eléctrico en un punto \vec{r} de este sistema es

$$\vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} [N/C]$$

Las dimensiones son de fuerza sobre carga eléctrica.² ¡Notar que \vec{E} no está definido en el punto $\vec{r} = \vec{r}'$!

Es importante destacar que en el análisis seguido hasta aquí, q_1 y q_2 son cargas puntuales, es decir, no tienen dimensiones espaciales. Un modelo más preciso de las cargas requiere suponer que existen distribuciones en volumen en donde se reparte la carga. Por ejemplo, esferas de diámetro “ a ” y “ b ” respectivamente, según se muestra en la Figura 2.5.

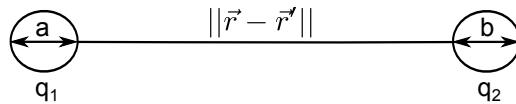


Figura 2.5: Modelo de Cargas Puntuales

El modelo de cargas puntuales implica que se cumple $a, b \ll \|\vec{r} - \vec{r}'\|$

Dado que numéricamente la carga de un electrón es muy pequeña ($1.6\text{E-19} [C]$), es posible definir matemáticamente el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q}{q} \quad (2.1)$$

Una manera directa de medir el campo eléctrico en un punto del espacio, consiste en medir la fuerza que experimenta una carga de prueba q , y luego obtener el cuociente entre esa fuerza en [N] y el valor de la carga en [C].

²Estas dimensiones son equivalentes a volt dividido por metro [V/m] en sistema M.K.S. como veremos más adelante.

2.4. Principio de Superposición

Consideremos n cargas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ localizadas en posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$ según se muestra en la Figura 2.6. Nos interesa calcular la fuerza que experimenta una carga q ubicada en la posición \vec{r} .

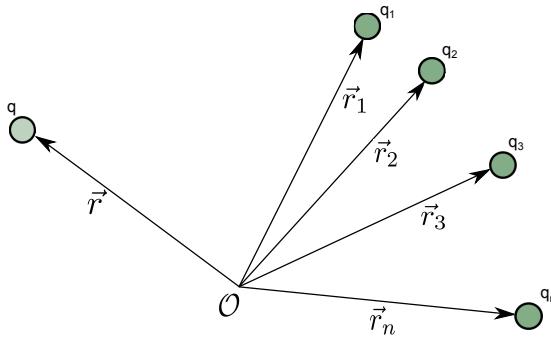


Figura 2.6: Sistema de Cargas Puntuales

Es evidente que la fuerza resultante que siente la carga q localizada en \vec{r} es la suma de las fuerzas que cada partícula ejerce sobre ella, es decir:

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E}_1 + q \cdot \vec{E}_2 + q \cdot \vec{E}_3 + \dots + q \cdot \vec{E}_n = q \sum_{k=1}^n \vec{E}_k$$

En donde

$$\vec{E}_k = \frac{q_k(\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|^3}$$

Así, la fuerza puede expresarse alternativamente como:

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E}$$

Donde

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k$$

Este campo \vec{E} es el campo eléctrico resultante de la interacción de todas las cargas en el punto \vec{r} . Así, el campo eléctrico de un conjunto de cargas puede obtenerse como la superposición de todos los campos individuales de cada una de las cargas. Este es el llamado *Principio de Superposición*.

Una manera complementaria de ver esto es considerar el campo eléctrico como una función lineal de la carga. Por lo tanto, satisface las condiciones de linealidad de una función cualquiera

$$\vec{E}(q_1 + \alpha q_2) = \vec{E}(q_1) + \alpha \vec{E}(q_2)$$

EJEMPLO 2:

Considere 2 cargas puntuales de $10 [mC]$ y $-20 [mC]$ ($m = \text{mili} = 10^{-3}$) localizados en $(3, 2, 0)$ y $(1, 0, 4)$ respectivamente. Se pide calcular la fuerza sobre una carga de $10 [nC]$ ($n = \text{nano} = 10^{-9}$) dispuesta en $(0, 3, 1)$. Calcule la intensidad de campo eléctrico en la posición de dicha carga.

Solución:

La expresión de la fuerza es:

$$\vec{F} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-3}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} - \frac{10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-3}(\vec{r} - \vec{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3}$$

Donde:

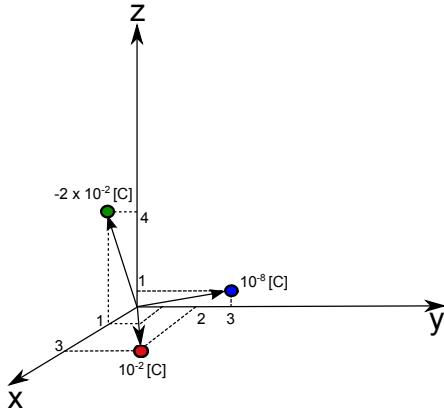


Figura 2.7: Fuerza entre Tres Cargas Puntuales

$$1. \vec{r} = (0, 3, 1)$$

$$2. \vec{r}_1 = (3, 2, 0)$$

$$3. \vec{r}_2 = (1, 0, 4)$$

$$4. \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$$

$$5. (\vec{r} - \vec{r}_1) = (-3, 1, 1) \rightarrow \|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3 = \left[\sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (1)^2} \right]^3 = [\sqrt{11}]^3 = \sqrt{11}^3 = 11\sqrt{11}$$

$$6. (\vec{r} - \vec{r}_2) = (-1, 3, -3) \rightarrow \|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3 = \left[\sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2} \right]^3 = [\sqrt{20}]^3 = \sqrt{20}^3 = 20\sqrt{20} = 40\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{10^{-10} \cdot 9 \cdot 10^9 (-3, 1, 1)}{11\sqrt{11}} - \frac{10^{-10} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 10^9 (-1, 3, -3)}{40\sqrt{5}} = (-5,3883; -3,5704; 8,5044)[cN]$$

Luego el campo eléctrico es: ... ,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = (-5,3883; -3,5704; 8,5044) \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-8}}$$

$$\vec{E} = (-5388,3; -3570,4; 8504,4) \cdot 10^3 [N/C] = [V/m]$$

EJEMPLO 3:

Dos cargas puntuales de masa m y carga q cada una están suspendidas desde un punto común mediante dos hilos de masa despreciable y longitud l . Muestre que en la situación de equilibrio el ángulo α que forma cada hilo con respecto a la vertical satisface la expresión:

$$q^2 = 16\pi\epsilon_0 m g l^2 \sin^2(\alpha) \tan(\alpha)$$

Sí α es muy pequeño, muestre que:

$$\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}}$$

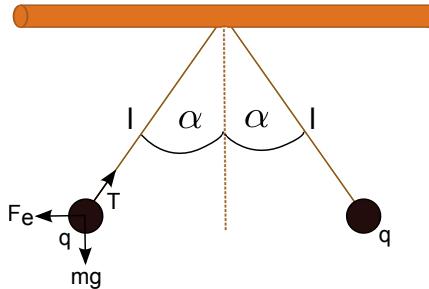


Figura 2.8: Equilibrio Electrostático

Solución:

Por la situación de equilibrio - estamos en electrostática - se cumple que:

$$\frac{F_e}{mg} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \begin{cases} F_e = T \sin(\alpha) \\ mg = T \cos(\alpha) \end{cases}$$

Sabemos que $F_e = \frac{q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 (2l \sin(\alpha))^2}$ luego $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4l^2 \sin^2(\alpha)} = mg \tan(\alpha)$

$$\therefore q^2 = 16\pi\varepsilon_0 mgl^2 \sin^2(\alpha) \tan(\alpha)$$

Sí $\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin(\alpha) \rightarrow \alpha, \cos(\alpha) \rightarrow 1 \Rightarrow \tan(\alpha) \rightarrow \alpha$ reemplazando obtenemos que $q^2 = 16\pi\varepsilon_0 mgl^2 \alpha^2 \cdot \alpha$

$$\therefore \alpha = \sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}}$$

EJEMPLO 4:

Se dispone de un material que cae por un tubo desde un proceso minero. Dicho material está compuesto de varias sustancias de donde interesa separar partículas de cuarzo cargadas positivamente de partículas de fosfato de roca cargadas en forma negativa. Para ello se idea el sistema de la Figura 2.9 en donde se aplica un campo eléctrico horizontal de $E = 500,000 [V/m]$.

Suponiendo velocidad y desplazamiento inicial nulo (boca del tubo) y una relación carga/masa de ambas partículas igual a $q/m = 9 [\mu C/Kg]$ ($\mu = micro = 10^{-6}$). Se pide determinar la separación horizontal de las partículas luego de caer 80 [cm].

Solución:

Suposición: A pesar de que las cargas se mueven, aquí sólo usamos la fuerza electrostática producida por el campo externo y despreciamos la interacción entre las cargas en movimiento.

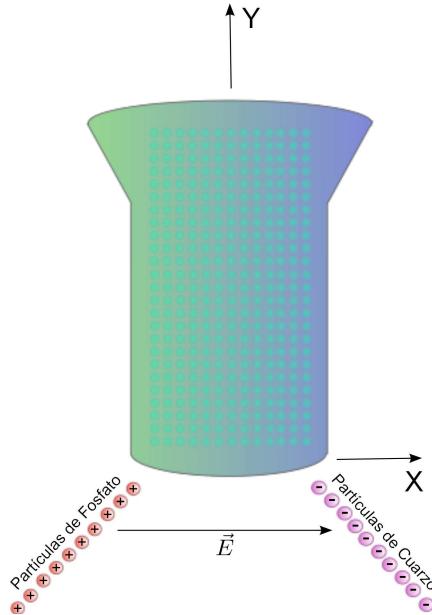


Figura 2.9: Movimiento de Cargas

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_e &= m \cdot \vec{a}_x \\
 q \cdot \vec{E} &= m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \vec{F} &= F_g \hat{y} \\
 q \cdot 500000 &= m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & -mg &= m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\
 9 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^5 &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad / \int & -g &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad / \int \\
 4,5 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &\Rightarrow 4,5t + c_1 = \frac{\partial x}{\partial t} \quad / \int & -gt + c_3 &= \frac{\partial y}{\partial t} \quad / \int \\
 x(t) &= \frac{4,5t^2}{2} + c_1t + c_2 & y(t) &= -\frac{gt^2}{2} + c_3t + c_4
 \end{aligned}$$

En consecuencia:

- (1) **C.I:** $x(t=0)=0 \Rightarrow \dot{x}(t=0)=0 \Rightarrow x(t)=\frac{4,5t^2}{2}$
(2) **C.I:** $y(t=0)=0 \Rightarrow \dot{y}(t=0)=0 \Rightarrow y(t)=-\frac{9,8t^2}{2}$

Se pide la distancia entre las cargas luego de desplazarse 80 cm en el sentido del eje Y, o sea:

$$y(t) = -0,8 = -\frac{9,8t^2}{2}$$

Resolviendo se encuentra que esa distancia se alcanza en un tiempo $t^2 = 0,1633$. Reemplazando este tiempo en la ecuación para $x(t)$ se tiene:

$$x(t) = \frac{4,5}{2} \cdot 0,1633 \Rightarrow x = 0,3678m$$

$$\therefore \text{distancia} = 2x = 73,47[\text{cm}]$$

PROUESTO:

Resuelva el mismo problema suponiendo que se tiene una estimación de la velocidad máxima de salida del material por el tubo $V_{max} = 10 \frac{m}{s}$ y se requiere calcular ahora el campo eléctrico, de modo que se separen 1 [m] todas las partículas de cuarzo y fosfato antes de que caigan 80 [cm].

2.5. Campo Eléctrico de Distribuciones Continuas

Habíamos dicho que cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales el campo tiene la expresión:

$$\vec{E}_k = \sum_{k=1}^n \frac{q_k(\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|^3}$$

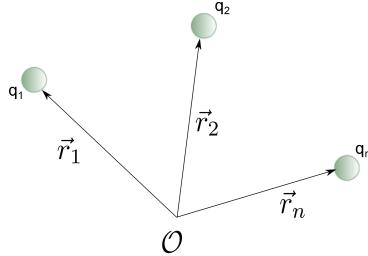


Figura 2.10: Campo de Sistema de Cargas

Por extensión, cuando se tiene una distribución continua de carga tenemos $\sum \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$ (con dq ubicado en \vec{r}'). Con ello la expresión para el campo queda:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq \quad (2.2)$$

Examinaremos 3 casos de distribución de carga: lineal, superficial y volumétrica.

2.5.1. Distribución Lineal

En este caso se tiene una densidad lineal $\lambda(\vec{r}')[C/m]$ de modo que el elemento diferencial de carga es $dq = \lambda(\vec{r}')dl'$ según se muestra en la Figura 2.11.

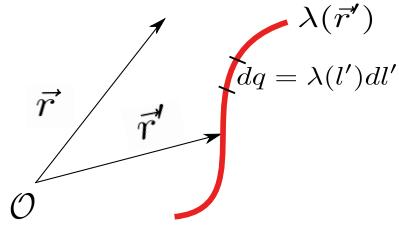


Figura 2.11: Distribución Lineal de Carga

Luego la expresión de carga es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \lambda(l) dl \quad (2.3)$$

EJEMPLO 5:

Considere una distribución lineal de carga λ que se extiende de A a B a lo largo del eje Z, como se muestra en la Figura 2.12. Se pide calcular el campo en todo el espacio.

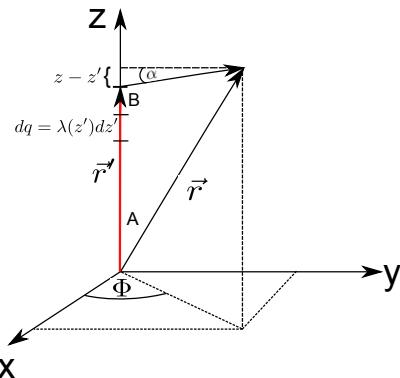


Figura 2.12: Campo de Distribución Rectilíneo

Solución:

Aquí $\vec{r}' = z'\hat{k}$ con $A < z' < B$. Además $\vec{r} = xi + yj + zk$ y $dq = \lambda(z')dz'$ para lo cual se debe resolver:

$$\vec{E} = \int_A^B \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}^3} \lambda(z') dz'$$

Además

$$1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

Entonces

$$\int_{z'_1}^{z'_2} \frac{x dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}^3} = -\frac{x}{a^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\alpha) d\alpha = -\frac{x}{a^2} \left[\sin(\alpha) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{x}{a^2} [\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2)]$$

Suponiendo que en el punto A $z' = z'_1$ y en B $z' = z'_2$ se tiene:

$$1. \sin(\alpha_1) = \frac{z - z'_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_1)^2}}$$

$$2. \sin(\alpha_2) = \frac{z - z'_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_2)^2}}$$

Luego las dos primeras integrales corresponden a lo siguiente:

$$\int_{z'_1}^{z'_2} \frac{x dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}^3} = \frac{x}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{z - z'_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_1)^2}} - \frac{z - z'_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_2)^2}} \right]$$

$$\int_{z'_1}^{z'_2} \frac{y dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}^3} = \frac{y}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{z - z'_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_1)^2}} - \frac{z - z'_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_2)^2}} \right]$$

Resolvemos ahora la tercera integral:

$$\int \frac{(z - z') dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}^3}$$

Usando el mismo cambio de variable: $(z - z') = \alpha \tan(\alpha)$, con $\alpha^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow dz' = -\alpha(1 + \tan^2(\alpha))d\alpha$ se tiene que:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\alpha \tan(\alpha) [-\alpha(1 + \tan^2(\alpha))] d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \tan^2(\alpha)}^3} = -\frac{\alpha^2}{\alpha^3} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tan(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} = -\frac{1}{\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} d\alpha$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha} (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_1)^2}}$$

Así, tenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - z'_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_1)^2}} - \frac{z - z'_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_2)^2}} \right] \cdot \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} \\ &\quad + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_1)^2}} \right] \hat{k} \end{aligned}$$

Casos particulares:

1. $z'_1 = 0, z'_2 \rightarrow \infty$, distribución lineal semi-infinita:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 1 \right] \cdot \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \right\}$$

2. $z'_1 \rightarrow -\infty, z'_2 \rightarrow \infty$, distribución lineal infinita:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \{1 + 1\} \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} \right]$$

Y en coordenadas cilíndricas:

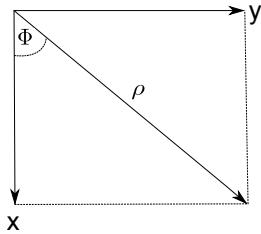


Figura 2.13: Cambio de Coordenadas

$$\begin{aligned} \cos(\phi)\hat{i} + \sin(\phi)\hat{j} &= \hat{\rho} \begin{cases} \frac{x\hat{i}}{x^2+y^2} = \frac{x}{\rho^2}\hat{i} = \frac{\cos(\phi)}{\rho}\hat{i} \\ \frac{y\hat{j}}{x^2+y^2} = \frac{y}{\rho^2}\hat{j} = \frac{\sin(\phi)}{\rho}\hat{j} \end{cases} \\ \therefore \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho} \end{aligned}$$

Notar que el campo no está definido para $\rho = 0$

2.5.2. Distribución Superficial

En este caso se tiene una densidad superficial $\sigma(\vec{r}') [C/m^2]$ de modo que el elemento diferencial de carga es $dq = \sigma(\vec{r}')ds$ según se muestra en la Figura 2.14.

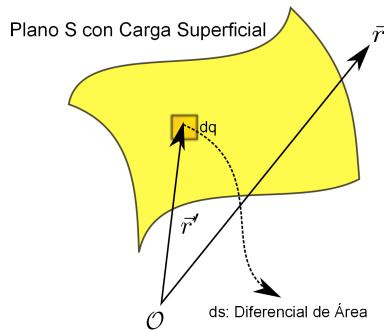


Figura 2.14: Distribución Superficial de Carga

Aquí $ds = ds(\vec{r}')$ y la ecuación del campo eléctrico queda entonces:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \sigma(\vec{r}') ds \quad (2.4)$$

EJEMPLO 6:

Considere un disco de radio R , el cual posee una distribución de carga superficial σ constante. Se pide determinar el campo en el eje Z, según se muestra en la Figura 2.15.

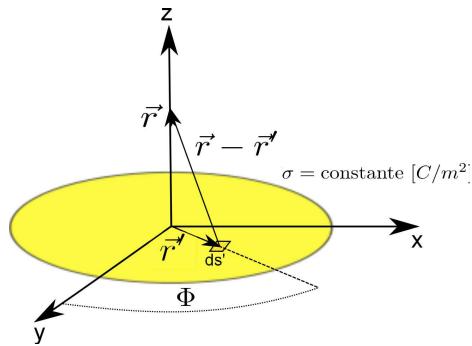


Figura 2.15: Disco Uniformemente Cargado

Solución:

Los vectores de posición son:

1. $\vec{r} = (0, 0, z)$
2. $\vec{r}' = (x', y', 0)$

Luego,

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-x', -y', z)$$

El campo eléctrico en el eje Z es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{(-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k})\sigma}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dS'$$

Usaremos coordenadas polares: $x'^2 + y'^2 = r'^2$ y $ds' = r'd\phi dr'$ entonces:

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} -\frac{r'\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \sigma r' d\phi dr'$$

Por simetría:

$$\vec{E}(z) = E\hat{k}$$

Es decir:

$$\int_{r=0}^{r=R} -\frac{r'^2 dr' \hat{r}}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = 0 \quad | \text{Probarlo!}$$

Entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{zr' dr' \hat{k}}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \right]_{r=0}^{r=R} \hat{k} \Rightarrow \therefore \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{k}$$

Caso particular: $R \rightarrow \infty$, plano infinito.

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 |z|} \hat{k}$$

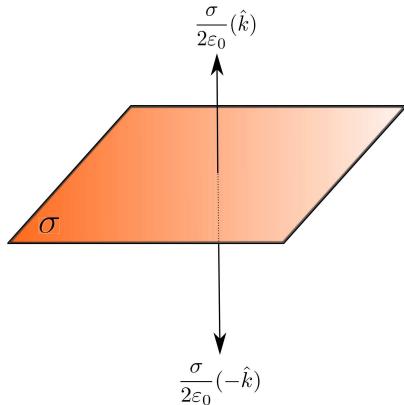


Figura 2.16: Plano Infinito Uniformemente Cargado

Notar que el campo es constante y sólo cambia de signo cuando el eje Z pasa por cero. Más tarde veremos que este resultado es importante para el estudio de conductores.

Observación: No está definido para $z = 0$.

2.5.3. Distribución Volumétrica

Consideremos una distribución de carga en volumen representada por el campo escalar $\rho(\vec{r}') [C/m^3]$ de modo que el elemento diferencial de carga es $dq = \rho(\vec{r}') dv'$ según se muestra en la Figura 2.17.

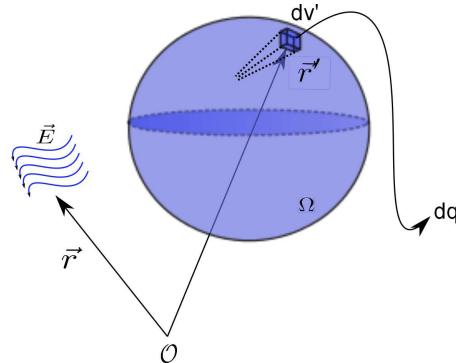


Figura 2.17: Distribución Volumétrica de Carga

La expresión del campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho dv' \quad (2.5)$$

Donde la integral se calcula en todo el espacio Ω donde hay carga.

EJEMPLO 7:

Se tiene una distribución esférica de carga total Q y radio R . Se pide determinar la densidad de carga ρ en toda la esfera suponiendo que ella se distribuye uniformemente.

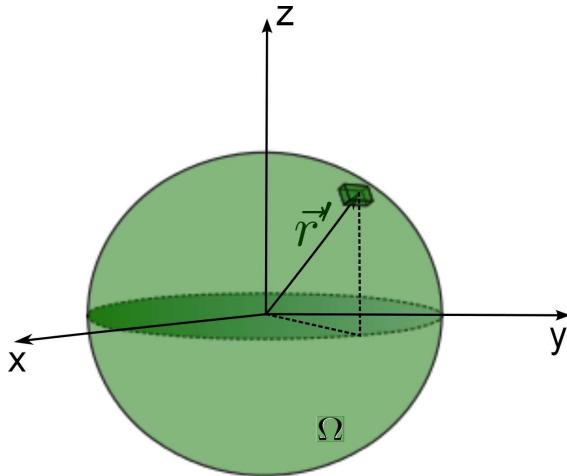


Figura 2.18: Esfera Cargada

Solución:

La distribución de carga ρ cumple con:

$$\int_{\Omega} \rho dv = Q$$

Donde el elemento de volumen dv es:

$$dv = rd\theta r \sin(\theta)d\phi dr$$

$$dv = r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi dr$$

Reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{(r)}^R \int_{(\phi)}^{2\pi} \int_{(\theta)}^{\pi} \rho r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi dr &= Q \Rightarrow \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r^2 \underbrace{[(-\cos(\theta))]_0^\pi}_{1-(-1)=2} d\phi dr = Q \\ \Rightarrow \int_0^R \rho r^2 2 \cdot 2\pi dr &= Q \Rightarrow \rho \frac{R^3}{3} 4\pi = Q \Rightarrow \therefore \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \end{aligned}$$

EJEMPLO 8:

Determine el campo eléctrico producido por la distribución de carga del EJEMPLO 7. Para $r > R$ en todo el espacio.

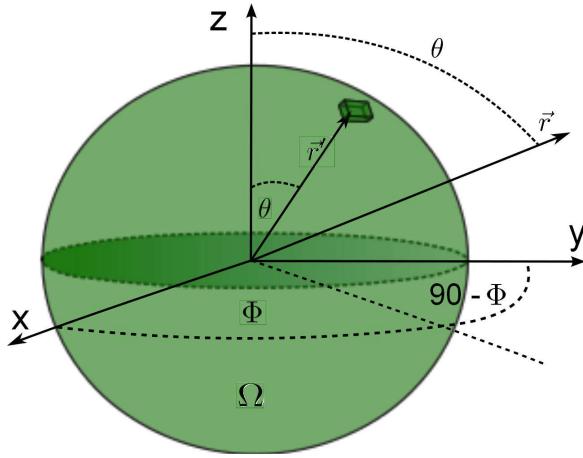


Figura 2.19: Campo Eléctrico de Esfera Cargada

Solución:

La expresión para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv$$

Usando coordenadas esféricas: $\vec{r}' = r' \sin(\theta') \cos(\phi') \hat{i} + r' \sin(\theta') \sin(\phi') \hat{j} + r' \cos(\theta') \hat{k}$
y $\vec{r} = r \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + r \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j} + r \cos(\theta) \hat{k}$

Con ello se obtiene la siguiente expresión para $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(r \sin \theta \cos \phi - r' \sin \theta' \cos \phi') \hat{i} + (r \sin \theta \sin \phi - r' \sin \theta' \sin \phi') \hat{j} + (r \cos \theta - r' \cos \theta') \hat{k}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'$$

El problema ahora es resolver esta integral. ¡Tarea Ardua!

Por ello en general se recurre a simplificaciones para resolver este tipo de problemas. Veremos aquí una variante. Dado que el problema presenta simetría esférica, basta con calcular el campo en el eje Z (además al integrar sobre ϕ' las otras integrales se anulan).

Así, calculamos la componente en Z del campo, es decir, basta con calcular

$$E_z = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{k} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv \cdot \hat{k}$$

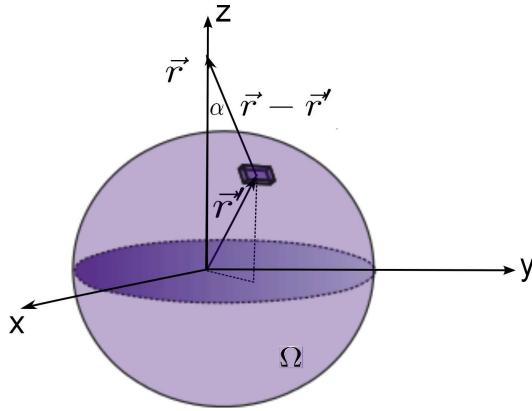


Figura 2.20: Coordenadas Esféricas

Desarrollando el producto punto:

$$(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{k} = \|\vec{r} - \vec{r}'\| \cos(\alpha)$$

Donde:

$$\cos(\alpha) = \frac{z - r' \cos(\theta')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{z - r' \cos(\theta')}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos(\theta')}}$$

Además:

$$dv = r'^2 \sin(\theta) d\theta' d\phi' dr'$$

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\cos(\alpha)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} dv \Rightarrow \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha) r'^2 \sin(\theta') d\theta' d\phi' dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos(\theta')}} \\ &\Rightarrow E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos(\theta')) r'^2 \sin(\theta')}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos(\theta')}} d\theta' dr' \end{aligned}$$

No depende de ϕ' . Realicemos ahora las integraciones en las otras variables.

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos(\theta')) r'^2 \sin(\theta')}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos(\theta')}} d\theta' dr' \\ &\Rightarrow \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\int_0^R \int_0^\pi \frac{zr'^2 \sin(\theta')}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos(\theta')}} d\theta' dr'}_A - \underbrace{\int_0^R \int_0^\pi \frac{r'^3 \cos(\theta') \sin(\theta')}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2r'z \cos(\theta')}} d\theta' dr'}_B \right\} \end{aligned}$$

En donde si desarrollamos A y B, se llega finalmente a:

$$\vec{E}_z = \frac{R^3 \rho}{3z^2 \epsilon_0} \hat{k}$$

Como existe simetría radial, el campo en todo el espacio tiene la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{R^3 \rho}{3 \|\vec{r}\|^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

Y si usamos el hecho de que $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$, también podemos expresar el campo eléctrico como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \|\vec{r}\|^2 \varepsilon_0} \hat{r} \quad (2.6)$$

Veamos un camino más corto (pero también más difícil de imaginar). Notemos que se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zr' \cos(\theta') + r'^2}} \right\} = -\frac{z - r' \cos(\theta)}{\sqrt{z^2 - 2zr' \cos(\theta') + r'^2}^3}$$

Luego, podemos escribir la integral como:

$$\vec{E}_z = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos(\theta')) r'^2 \sin(\theta')}{\sqrt{z^2 - 2zr' \cos(\theta') + r'^2}^3} d\theta' dr' = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zr' \cos(\theta') + r'^2}} \right\} r'^2 \sin(\theta') d\theta' dr'$$

Observemos ahora que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sqrt{z^2 - 2zr' \cos(\theta')} \right\} = \frac{zr' \sin(\theta')}{\sqrt{z^2 - 2zr' \cos(\theta') + r'^2}}$$

Luego podemos escribir la integral como:

$$\vec{E}_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \frac{r'}{z} \left[\sqrt{z^2 + 2zr' + r'^2} - \sqrt{z^2 - 2zr' + r'^2} \right] dr' = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \frac{r'}{z} [|z + r'| - |z - r'|] dr'$$

Sí suponemos que $z > R$ se tiene que $|z + r'| - |z - r'| \cong 2r'$, luego:

$$E_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \frac{r'}{z} 2r' dr' \Rightarrow E_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[2 \frac{R^3}{3z} \right] \Rightarrow E_z = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{R^3}{z^2} \right]$$

Por simetría radial, el campo tiene la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{R^3 \rho}{\|\vec{r}\|^2 \varepsilon_0} \hat{r}$$

Al introducir la carga en función de la densidad se obtiene el mismo campo calculado anteriormente en (2.6):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \|\vec{r}\|^2 \varepsilon_0} \hat{r}$$

Dado que el cálculo directo de los campos se dificulta con la evaluación de integrales, es de suma utilidad el uso de programas computacionales en aplicaciones prácticas. Además, en muchos casos facilita los cálculos la ley (o teorema) de Gauss que veremos a continuación.

2.6. Ley de Gauss

2.6.1. Conceptos Matemáticos Incluidos

Antes de ver la Ley de Gauss conviene repasar los siguientes conceptos de cálculo vectorial.

1. **Concepto de Flujo.** Consideremos un campo vectorial \vec{A} definido en todo el espacio y una superficie S cualquiera como se muestra en la Figura 2.21.

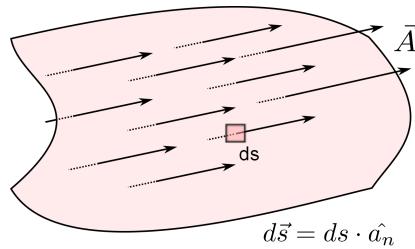


Figura 2.21: Concepto de Flujo

Se define el flujo ψ de \vec{A} a través de la superficie S como:

$$\psi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{A} \cdot ds \cdot \hat{a}_n \quad (2.7)$$

Así ψ es una integral de superficie del producto de dos vectores³. Notar que ψ es un campo escalar que depende del sentido en que se escoja el vector unitario \hat{a}_n .

Para superficies cerradas se designa:

$$\psi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

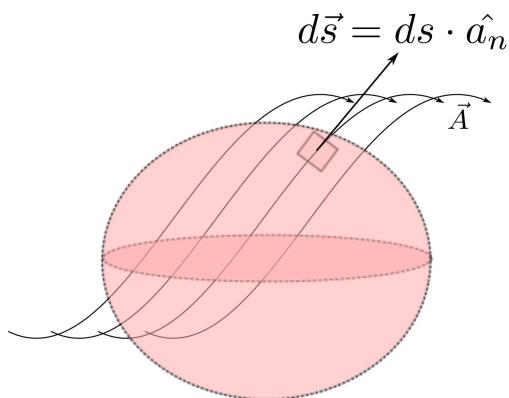


Figura 2.22: Flujo en Esfera Cerrada

³El símbolo “.” se usará para designar el producto punto entre dos vectores

2. Teorema de la Divergencia Se cumple:

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} dv$$

Donde Ω es el volumen contenido por la superficie cerrada S y “ $\nabla \cdot$ ” es el operador divergencia, que en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla \cdot \doteq \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right).$$

En el apéndice C de este apunte se puede observar la divergencia para las distintas coordenadas.

Si $\vec{A} = \vec{E}$ campo eléctrico, entonces ψ representa el flujo de campo eléctrico. En donde interesa el caso de superficies cerradas.

$$\psi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.8)$$

Para mayor información puede ver los capítulos 2 y 4 del apunte de Cálculo Avanzado y Aplicaciones del Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile (versión 2009) puesto en la recomendación inicial de este apunte.

3. Teorema de Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{A} ds$$

Donde Γ es la curva perimetral que define a la superficie cerrada S , y $\nabla \times$ es el operador rotor que en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla \times \vec{A} \doteq \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Lo anterior válido para coordenadas cartesianas.

Puede observar las distintas formas del rotor en otras coordenadas, en el apéndice C de este apunte.

Para mayor información puede ver los capítulos 3 y 5 del apunte de Cálculo Avanzado y Aplicaciones del Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile (versión 2009) puesto en la recomendación inicial de este apunte.

2.6.2. Ley de Gauss

La ley de Gauss establece que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada \mathcal{S} es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ε_0 . Así:

$$\psi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Demostración:

Comentario: Dado que cualquier campo electrostático es el resultado de la suma de muchas cargas (el n^0 puede ser muy grande pero finito), la expresión resultante del campo tendrá una forma similar en virtud del principio de superposición.

Primero que todo, debemos recordar que el campo producido por una carga puntual tiene la forma:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Consideremos ahora el ángulo sólido $\Delta\Omega$ que es subtendido por una superficie esférica $\Delta\mathcal{A}$, que está definido como:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\mathcal{A}}{r^2}$$

Tal y como se muestra en la siguiente figura:

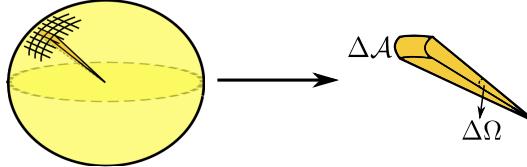


Figura 2.23: Muestra de Ángulo Sólido

En términos diferenciales, $d\Omega = \frac{d\mathcal{A}}{r^2}$, el ángulo sólido para “toda la esfera” es por lo tanto

$$\Omega = \iint_{\mathcal{S}} \frac{d\mathcal{A}}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi [sr]^4$$

En el caso en que el área $\Delta\mathcal{A}$ no es perpendicular a las líneas que salen del origen que subtienden a $\Delta\Omega$, el ángulo sólido corresponde a

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\mathcal{A}\hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{\Delta\mathcal{A} \cos(\theta)}{r^2}$$

Si se tiene una carga “ q ” rodeada por una superficie cualquiera, para calcular el flujo que atraviesa esta superficie, es necesario encontrar el factor $\vec{E} \cdot \hat{n}\Delta\mathcal{A}$ para cada elemento de área de la superficie de la esfera. Así:

$$\Delta\psi = \vec{E} \cdot \hat{n}\Delta\mathcal{A} = \frac{Kq}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n}\Delta\mathcal{A} = Kq \frac{\Delta\mathcal{A}\hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = Kq\Delta\Omega$$

⁴La unidad (sr) hace referencia a la unidad de todo ángulo sólido llamada *estereorradián*

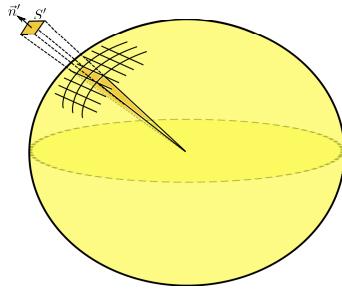


Figura 2.24: Visualización de Vector Normal

De esta forma, se obtiene una expresión para cada elemento de flujo $\Delta\psi$ de la esfera. Con ello el flujo total en toda la esfera es

$$\psi_{neto} = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 4\pi Kq = 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Notar que la superficie S es cualquiera, ya que sólo se introdujo la proyección ortogonal de ella en esta ecuación.

Ahora analicemos el caso en que la carga está afuera de s , o sea, la superficie s no contiene la carga. tal como se muestra en la figura

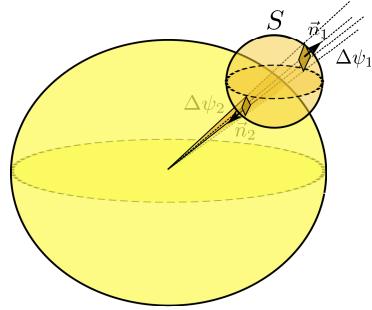


Figura 2.25: Muestra de Ángulo Sólido

Se observa que $\Delta\psi_1 = \vec{E} \cdot \Delta s_1 \hat{n}_1 = \vec{E} \cdot d\theta d\psi r^2$. Adicionalmente, $\Delta\psi_2 = \vec{E} \cdot \Delta s_1 \hat{n}_1 = -\vec{E} \cdot d\theta d\psi r^2$. En donde se concluye $\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 = 0$.

Luego $\forall s$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Notar que, si en lugar de una carga puntual, se consideran N cargas puntuales; rodeadas por una superficie S , se obtendrá un resultado análogo al anteriormente mostrado.

Y si recordamos que el campo en cualquier punto, puede expresarse como la suma de los campos de cada una de las cargas, el campo total tendrá un flujo asociado, dada la suma de estos. Es decir

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

Con lo cual, podemos intuir, que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es proporcional a la carga total del sistema Q_T dentro de un volumen Ω encerrado por S . Y como el borde del volumen Ω está dado por la superficie S , se tiene la ley de Gauss

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

EJEMPLO 9:

Calcule el campo eléctrico en todo el espacio producido por una distribución homogénea de carga ρ dispuesta en una esfera de radio R .

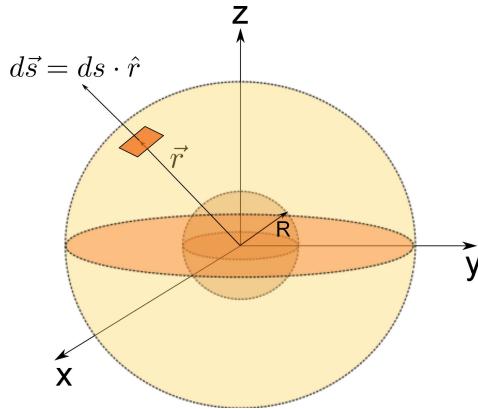


Figura 2.26: Distribución Esférica Homogénea de Carga

Solución:

Primero debemos convencernos que el campo tiene simetría esférica. Es decir, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\hat{r}$ ¡hacerlo!

Para $r > R$ (vea figura 2.23) :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}, \quad \text{con } Q_T = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$||\vec{E}(\vec{r})||$ es constante para r fijo y por simetría $\vec{E}(\vec{r})$ apunta en la dirección \hat{r} en coordenadas esféricas, es decir, $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\hat{r}$, luego:

$$d\vec{s} = rd\theta r \sin(\theta)d\phi \hat{r} = r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(\vec{r})\hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi \hat{r} \Rightarrow \int_0^\pi 2\pi E(\vec{r})r^2 \sin(\theta)d\theta = 2\pi E(\vec{r})r^2 \int_0^\pi \sin(\theta)d\theta \\ &= 2\pi E(\vec{r})r^2 [-\cos(\theta)]_0^\pi = 4\pi r^2 E(\vec{r}) \end{aligned}$$

Reemplazando se tiene:

$$4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(\vec{r}) = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \rho \hat{r} \quad \text{¡Constrastar con Ejemplo 8!}$$

Para $r < R$ (vea figura 2.34):

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(\vec{r})$$

Y la carga encerrada por \mathcal{S} es:

$$Q = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho dv$$

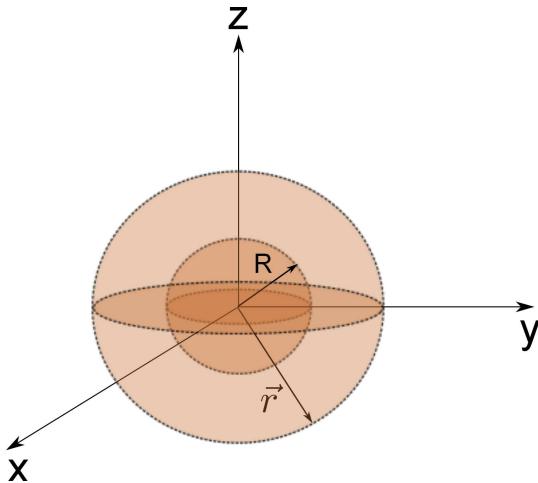


Figura 2.27: Flujo de Superficie Esférica

Con lo cual se obtiene:

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi dr = 2\pi\rho \int_0^r \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) d\theta dr \Rightarrow 2\pi\rho \int_0^r r^2 [-\cos(\theta)]_0^\pi dr = 4\pi\rho \int_0^r r^2 dr = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

Luego:

$$4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \rho \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{r}{3\varepsilon_0} \rho \hat{r}$$

Gráficamente:

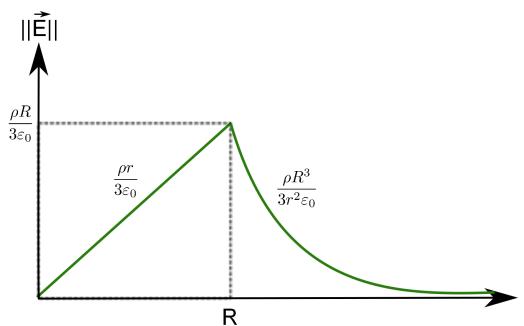


Figura 2.28: Campo de una Esfera

Así, de acuerdo a la Figura 2.25 el campo es máximo en la superficie de la esfera, desde donde decae en ambos sentidos.

Este ejemplo sirve para comprender mejor el modelo de cargas puntuales. En efecto, si deseamos calcular el campo en las cercanías de una carga puntual debe recurrirse a un modelo parecido al desarrollado en este ejemplo, en donde se ve que el campo justo en el centro de la partícula es cero.

Conviene puntuarizar algunos aspectos de la Ley de Gauss:

- La ley de Gauss es útil cuando hay simetría, o sea cuando se puede *sacar* la magnitud del campo eléctrico E de la integral de superficie, es decir, cuando se puede efectuar la manipulación:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \iint_S d\vec{s} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0 \iint_S d\vec{s}}$$

- La ley de Gauss es válida para todo el espacio.
- Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica). Por ejemplo consideremos que tenemos una carga puntual en presencia de una distribución en volumen como la mostrada en la Figura 2.26. Se desea calcular el campo en todo el espacio. Una solución simple consiste en aplicar superposición.

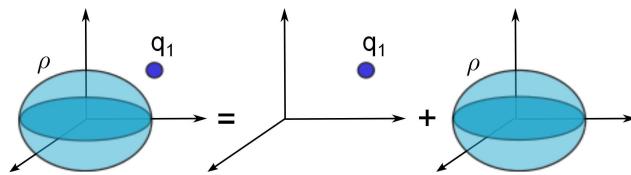


Figura 2.29: Superposición Aplicada

En este ejemplo no es posible usar directamente la ley de Gauss en la configuración inicial (lado izquierdo) y, por otro lado, la integración directa resulta de gran complejidad. Sin embargo, al aplicar la superposición se resuelven separadamente los campos para la situación de una carga puntual sola, y luego la de la esfera. El campo total será la suma directa de ambos campos.

Obs: ¡Se debe utilizar el mismo sistema de referencia!

2.6.3. Primera Ecuación De Maxwell

Dado que $Q_T = \iiint_{\Omega} \rho dv$ para una distribución volumétrica entonces:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho dv \quad (2.9)$$

Ahora si aplicamos el teorema de la divergencia:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho dv$$

Dado que esto es válido para \forall volumen V se tiene

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Es usual definir el vector $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ como *vector desplazamiento* (ya veremos que en medios materiales tiene un significado físico importante), de modo que la ecuación anterior se escribe como:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho}$$

Siendo esta la 1^a ecuación de Maxwell.

2.7. Potencial Eléctrico

Hemos visto que los campos eléctricos son originados por cargas eléctricas, ya sea puntuales o distribuidas espacialmente. Introduciremos ahora el concepto de potencial eléctrico el cual está asociado al trabajo o la energía de un determinado campo eléctrico. Adicionalmente, este concepto de potencial eléctrico entrega una manera alternativa, y en general más fácil, para obtener el campo eléctrico.

2.7.1. Trabajo de un Campo Eléctrico

Supongamos que deseamos mover una carga puntual q desde un punto A a otro B en presencia de un campo eléctrico \vec{E} como se muestra en la Figura 2.27.

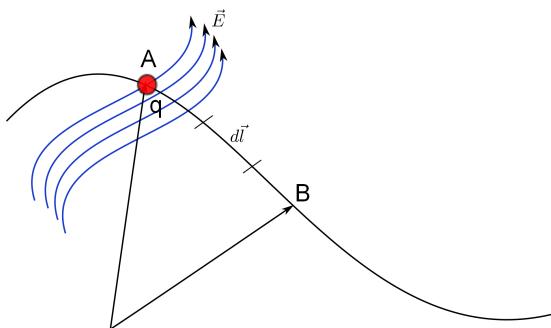


Figura 2.30: Trabajo de Campo Eléctrico

La fuerza que experimenta q debido al campo eléctrico es $\vec{F} = q\vec{E}$, de modo que el trabajo que debe realizar un agente externo para mover dicha carga (y “vencer” la fuerza eléctrica) una distancia infinitesimal $d\vec{l}$ es

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$

El signo negativo indica que el trabajo lo hace un agente externo (por ejemplo un dedo empujando la carga). Si dW es positivo significa que el trabajo lo realiza el agente externo (o sea el campo eléctrico se opone al desplazamiento de la carga en el sentido de $d\vec{l}$). Si dW es negativo significa que el trabajo lo ha realizado el campo eléctrico (no ha sido necesario empujar con el dedo).

Luego el trabajo (externo) realizado para llevar carga desde el punto A a B es:

$$W = \int_A^B dW = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.10)$$

Dividiendo W por q se obtiene el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga. Esta cantidad, llamada V_{BA} , se conoce como la *diferencia de potencial* entre los puntos B y A . Así:

$$V_{BA} = V_B - V_A \equiv \frac{W}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.11)$$

Notar que:

1. A es el punto inicial y B el punto final del desplazamiento.
2. Si $V_{BA} < 0$ el campo eléctrico es quien hace el trabajo (hay una pérdida en la energía potencial eléctrica al mover la carga desde A a B). En caso contrario es un agente externo quien ha realizado el trabajo.
3. V_{BA} se mide en $[J/C]$, lo cual se denomina Volt $[V]$. Por ello es común expresar el campo eléctrico en $[V/m]$.

EJEMPLO 10:

Supongamos una carga Q fija en el origen y una segunda carga q ubicada a una distancia \vec{r}_A . Se desea calcular el trabajo necesario para llevar esta segunda carga a una distancia \vec{r}_B según se muestra en la Figura 2.28. Calcule además V_{AB} .

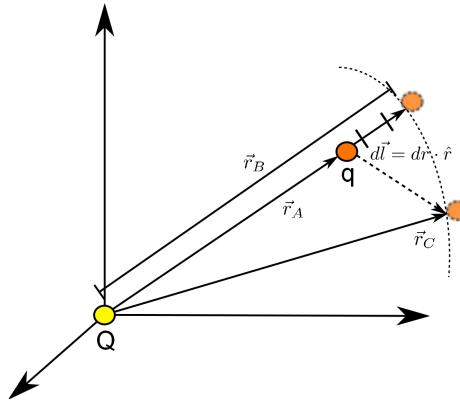


Figura 2.31: Trabajo de una Carga Puntual

Solución:

Campo:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Trabajo:

$$W = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad d\vec{l} = dr\hat{r}$$

$$W = -q \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \hat{r} \cdot \hat{r} = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Notar que si $r_A < r_B$ (como en la Figura 2.28) el valor de W resulta negativo si q y Q son del mismo signo. Sabemos que para este caso las cargas se repelen, por lo tanto el campo de Q es quien realiza el trabajo (y no un agente externo).

La expresión para la diferencia de potencial V_{BA} es:

$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Esta expresión no depende de q sino que de la carga que produce el campo \vec{E} , en este caso Q . Este resultado permite definir de manera más general el potencial eléctrico como veremos a continuación.

Notar además que el trabajo es el mismo si la carga q se mueve a \vec{r}_C , donde $||\vec{r}_B|| = ||\vec{r}_C||$, ya que en la integral $d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$, la componente en $\hat{\theta}$ no contribuye dado que es ortogonal al campo producido por Q .

2.7.2. Definición de Potencial Eléctrico

Para el ejemplo analizado anteriormente V_{BA} representa el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar para llevar una carga entre los puntos A y B . Si dejamos variable el punto B se genera la función:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A} \right] + V_A$$

Esta función permite evaluar el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar para llevar una carga desde la posición \vec{r}_A a cualquier lugar definido por el vector \vec{r} . Es una práctica usual definir la referencia de potencial en el infinito como un valor nulo, es decir, si hacemos tender $\vec{r}_A \rightarrow \infty$, $V_A \equiv 0$ con lo que obtenemos:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|}$$

Esta expresión representa el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar para traer desde el infinito una carga hasta la posición \vec{r} , cuando existe una carga Q en el origen (la carga que produce el campo eléctrico \vec{E}). Esta expresión se define como la función *potencial eléctrico* de la carga Q y corresponde a un campo escalar definido en todo el espacio. Para generalizar este resultado consideraremos la situación de la Figura 2.29.

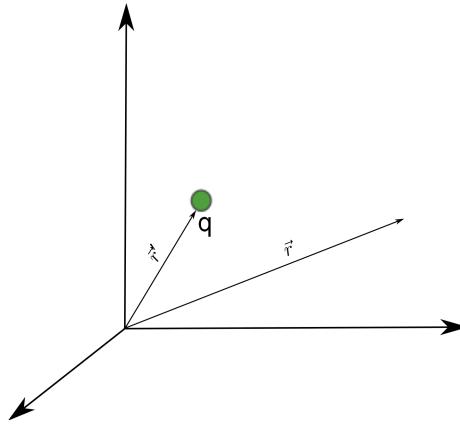


Figura 2.32: Potencial Eléctrico de Carga Puntual

Así, en un sistema de referencia cualquiera la expresión general para el potencial eléctrico asociado a una carga q en la posición \vec{r}' es

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} [V]$$

Dado que V es una función lineal con la carga, también aquí se cumple la propiedad de superposición, i.e., para n cargas q_1, q_2, \dots, q_n se cumple:

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_2\|} + \cdots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_n\|}$$

$$V(\vec{r}) = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|}$$

Análogamente al caso del campo eléctrico, para distribuciones continuas de carga se tiene:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (2.12)$$

Y dependiendo de la distribución de carga usamos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{r}'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} ds'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

Donde λ , σ , ρ corresponden a las densidades de carga lineal, superficial y de volumen, respectivamente (campos escalares en la variable \vec{r}').

EJEMPLO 11:

Se tiene una línea de largo l con distribución de carga λ constante en el eje Z. Se pide demostrar que el potencial producido por esta distribución lineal de carga en el plano medianero ($x, y, 0$) puede escribirse como:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \right) \quad \text{en donde} \quad \tan(\alpha) = \frac{1}{2\rho}$$

Consideremos la figura 2.30

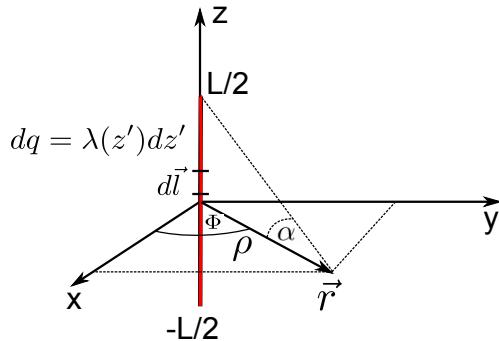


Figura 2.33: Potencial de Línea Cargada

Solución:

Los vectores son: $\vec{r} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} = \rho \cos(\phi)\hat{i} + \rho \sin(\phi)\hat{j}$, $\vec{r}' = z'\hat{k} \implies \|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}$
Luego,

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z'=-l/2}^{z'=l/2} \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} dz' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z'=-l/2}^{z'=l/2} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$z' = \rho \tan(\theta)$$

$$dz' = \rho \sec^2(\theta) d\theta$$

Se tiene:

$$V(x, y) = \frac{\rho\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2(\theta)}{\rho\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec(\theta) d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln [\sec(\theta) + \tan(\theta)]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Considerando:

$$\tan(\theta_1) = -\frac{l}{2\rho} \Rightarrow \theta_1 = -\alpha$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{l}{2\rho} \Rightarrow \theta_2 = \alpha$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x, y) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} [\ln(\sec(\alpha) + \tan(\alpha)) - \ln(\sec(-\alpha) + \tan(-\alpha))] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right) - \ln \left(\frac{1}{\cos(-\alpha)} + \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} \right) \right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} [\ln(1 + \sin(\alpha)) - \ln(1 - \sin(\alpha))] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln \left(\frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \right) \right] \end{aligned}$$

De la geometría de la Figura 2.30 se cumple que:

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \rho^2}}$$

Luego

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln \left(\frac{1 + \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + \rho^2}}}{1 - \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + \rho^2}}} \right) \right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{\rho^2 + l^2/4} + l/2}{\sqrt{\rho^2 + l^2/4} - l/2} \right] \\ \Rightarrow \therefore V(x, y) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + l^2/4} + l/2}{\sqrt{x^2 + y^2 + l^2/4} - l/2} \right] \end{aligned}$$

2.7.3. Relaciones entre Potencial y Campo Eléctrico

A partir de las relaciones de trabajo desarrolladas para cargas puntuales podemos plantear la función potencial entre dos puntos A y B en función del campo eléctrico como:

$$V_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Y haciendo $r_B = r$ y $A \rightarrow \infty$ obteníamos la función potencial como:

$$V(\vec{r}) = - \int_{+\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{en donde} \quad V(r = \infty) = 0$$

Recordemos que la definición obtenida a partir del trabajo nos conducía a la expresión:

$$V_{BA} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Que representa el trabajo por unidad de carga para trasladar una carga desde el punto A al B . Por lo tanto al dejar variable el punto $B = r_B$, la expresión del potencial queda:

$$V(\vec{r}) = - \int_A^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V(\vec{r} = \vec{r}_A)$$

El valor que adquiere $V(\vec{r} = \vec{r}_A)$ es llamado *referencia o potencial de referencia* (o voltaje de referencia V_{ref}). Por ello, la expresión más general del potencial eléctrico es:

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

Notar que dado que el potencial de referencia es un valor constante, al calcular el trabajo entre dos puntos cualquiera se cancela.

Como ya se dijo, existe libertad para escoger el valor del potencial en el punto de referencia, y generalmente se utiliza el infinito. En algunos casos especiales, por ejemplo cuando hay distribuciones de carga infinita, puede resultar más conveniente escoger una referencia distinta, y dejar que el potencial no sea nulo para $r \rightarrow \infty$ (Ver Ejemplo 12 más abajo).

Del desarrollo anterior se cumple la relación:

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente de la función potencial.

EJEMPLO 12:

Considere una distribución de carga lineal infinita según se muestra en la Figura 2.31. Calcule el potencial en todo el espacio.

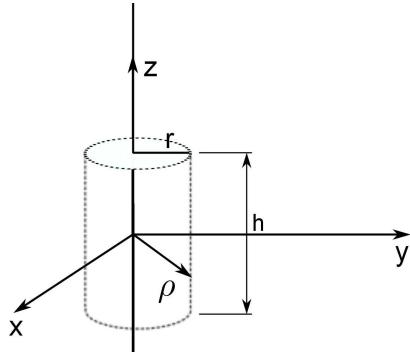


Figura 2.34: Campo y Potencia de Línea Cargada

Solución:

Aplicando Gauss a la superficie \mathcal{S} tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \frac{Q_T(\mathcal{S})}{\epsilon_0} \quad \text{en donde} \quad d\vec{s} = rd\theta dz \hat{r} \\ \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^h E(r) \hat{r} \cdot rd\theta dz \hat{r} \\ \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= 2\pi h E(r) \end{aligned}$$

Por otra parte, la carga total encerrada es $Q_T(S) = h\lambda_0$. Luego, en coordenadas cilíndricas el campo vale:

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

Apliquemos ahora la definición de potencial eléctrico.

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

Escogiendo un radio para realizar la integral de línea $d\vec{l} = dr \hat{r}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{ref}^r \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} dr + V_{ref} \\ V(\vec{r}) &= - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{ref}\right) + V_{ref} \end{aligned}$$

Analizando esta expresión vemos que el potencial en el infinito no puede ser nulo, ya que la función potencial diverge. Esto no ocurre en la realidad, ya que, no existen distribuciones infinitas de carga. Sin embargo, es útil trabajar en algunos casos con este tipo de aproximaciones. Como ejemplo, podemos plantear que, si deseamos calcular el campo eléctrico en el centro de una aguja cargada, podemos suponer una densidad lineal infinita. Por ello, en este caso es conveniente escoger la referencia para un valor arbitrario (pero finito) de r . Por ejemplo, para $r = r_{ref}$ (finito) hacemos $V_{ref} = 0$. Así, la expresión para la función potencial de esta distribución infinita de carga queda finalmente,

$$V(\vec{r}) = - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{ref}\right)$$

Notar que para cualquier referencia se sigue cumpliendo $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$

2.7.4. Ecuación de Laplace y Poisson

Habíamos visto que:

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Tomando la divergencia a ambos lados obtenemos:

$$\nabla \cdot (\nabla V(\vec{r})) = -\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Si usamos la 1^a ecuación de Maxwell, llegamos a:

$$\nabla \cdot (\nabla V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Y como $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$ se tiene:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Cuando no hay carga tenemos:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

El operador ∇^2 se conoce como *Laplaciano* (también conocido por Δ).

En coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial \hat{i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) \Rightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \hat{j} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \hat{k}$$

En coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla^2 V(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Y en esféricas su expresión es:

$$\nabla^2 V(r, \phi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Así, el Laplaciano de un campo escalar es también un campo escalar.

Hemos demostrado que el potencial eléctrico satisface la ecuación de Poisson en las regiones donde existen fuentes de carga y satisface la ecuación de Laplace en las regiones sin carga. Para resolver estas ecuaciones se requiere definir condiciones de borde para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales resultantes. Así, una manera alternativa de obtener el campo eléctrico es primero obtener la función potencial a partir de la resolución de la ecuación de Laplace (o Poisson) cuando se conocen (o se pueden inferir) las condiciones de borde. Una vez obtenida la función potencial el campo se calcula tomando el gradiente del potencial.

EJEMPLO 13:

Para la configuración de la Figura 2.32 se sabe que el potencial en los planos semi-infinitos definidos por $V(\phi = 0, \rho, z) = 0$ y $V(\phi = \pi/6, \rho, z) = 100V$. Se pide calcular el potencial y el campo para la región entre los semiplanos (no incluido el eje Z, o sea $\rho = 0$).

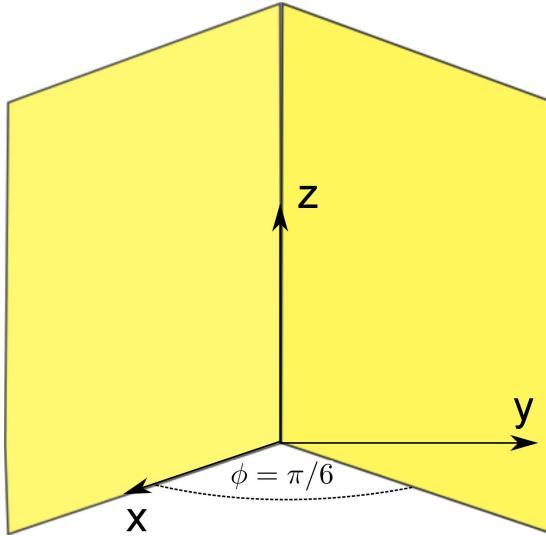
Solución:

Figura 2.35: Potencial entre Placas

Claramente V depende sólo de ϕ , por lo que la ecuación de Laplace en este caso es:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Dado que $\rho = 0$ esta excluido del cálculo esta ecuación se convierte en

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Cuya solución es de la forma: $V = A\phi + B$.

Aplicando las condiciones de borde obtenemos para $\phi = 0$ el potencial $V = 0$, es decir, $B = 0$. Usando la otra condición de borde para $\phi = \pi/6$ tenemos:

$$100 = A\pi/6 \Rightarrow A = \frac{600}{\pi}$$

Luego el potencial es:

$$V = \frac{600}{\pi} \phi$$

Y el campo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{600}{\pi \rho} \hat{\phi}$$

2.7.5. Campo Eléctrico Conservativo

Otra propiedad importante de los campos eléctricos se obtiene a partir de la propiedad matemática asociada a campos escalares $f(\vec{r})$, los cuales satisfacen la identidad:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

Así, dado que $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$ en electrostática.⁵

Luego, para una superficie S cualquiera del espacio se cumple:

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Y aplicando el teorema de Stokes:

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma_S} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Donde Γ_S es el contorno que limita a la superficie S . Podemos escribir entonces:

$$q \oint_{\Gamma_S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma_S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = W_{neto} = 0$$

Este resultado implica que el trabajo neto realizado por el campo eléctrico en una trayectoria cerrada es nulo. Es decir, la fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.

Ahora veremos los campos eléctricos en la materia. Pero antes debemos definir el concepto de dipolo, el cual es la base para esos estudios.

2.8. Dipolo Eléctrico

2.8.1. Definición Dipolo

Un dipolo eléctrico es un sistema que se compone de dos cargas idénticas pero de signo contrario, las cuales se encuentran forzadas (por algún medio) a mantener distancia d constante entre ellas, tal como se muestra en la Figura 2.33. Se define

$$\vec{p} = qd\hat{r}$$

Como *dipolo eléctrico o momento dipolar*. Notar que la suma neta de las cargas de un dipolo debe ser nula y que el vector apunta desde la carga negativa hacia la positiva. Las unidades del dipolo son [$C \cdot m$].

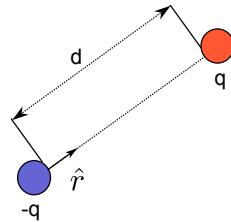


Figura 2.36: Dipolo Eléctrico

⁵Veremos luego que esto cambia cuando los campos son variables en el tiempo.

2.8.2. Potencial Eléctrico de un Dipolo

Consideremos la configuración de la Figura 2.34 donde r_1 es la distancia de Q a P y r_2 es la distancia de $-Q$ a P .

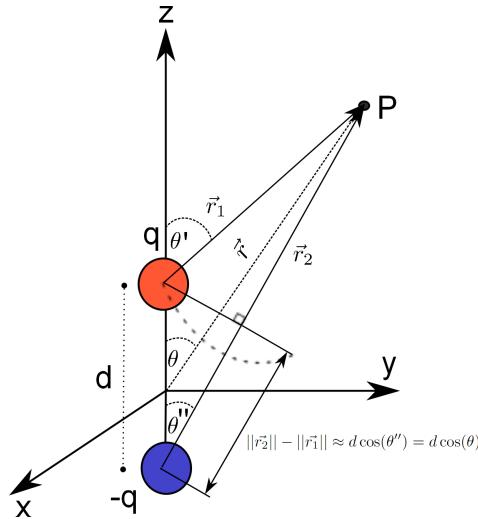


Figura 2.37: Potencial de un Dipolo

El potencial de esta configuración evaluado en el punto P es:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_1\|} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_2\|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_2\|} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{r}_2\| - \|\vec{r}_1\|}{\|\vec{r}_1\| \|\vec{r}_2\|}$$

Interesa el caso cuando $r_1, r_2 \gg d$, o sea, cuando podemos aproximar:

$$\|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\| \approx (r - \Delta)(r + \Delta) = r^2 - \Delta^2 \Rightarrow \|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\| \approx r^2$$

Además,

$$r_2 - r_1 = d \cos(\theta) \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d \cos(\theta)}{r^2} \right]$$

Dado que $d \cos(\theta) = d\hat{k} \cdot \hat{r}$ y si definimos $\vec{d} = d\hat{k}$ y $\vec{p} = Q\vec{d}$, la expresión del potencial eléctrico producida por el dipolo se puede escribir como:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2}$$

En el caso general, el dipolo esta ubicado en un punto cualquiera \vec{r}' (vector que define la posición del punto medio del dipolo) como en la Figura 2.35.

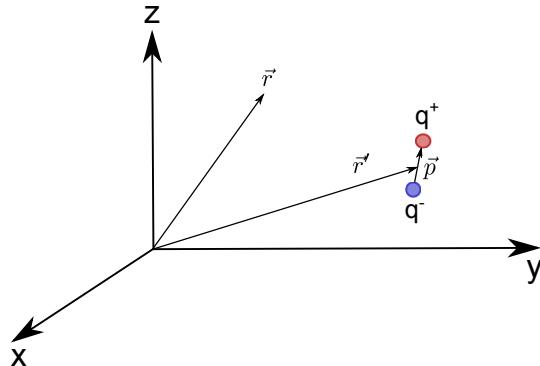


Figura 2.38: Potencial de un Dipolo en Sistema de Coordenadas Arbitrario

En este caso el potencial eléctrico tiene la forma:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (2.13)$$

El campo eléctrico de un dipolo se calcula a partir de $\vec{E} = -\nabla V$.

EJEMPLO 14:

Calcule el campo eléctrico de un dipolo $\vec{p} = p\hat{k}$ ubicado en el origen como se muestra en la Figura 2.36.

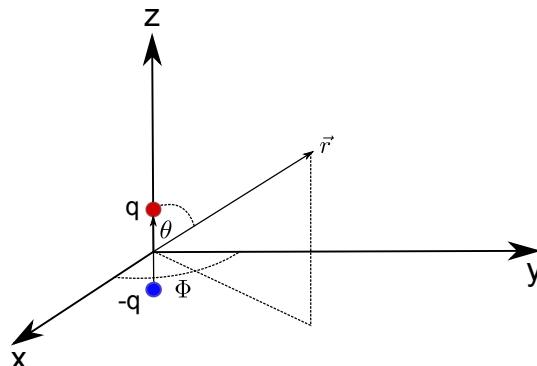


Figura 2.39: Campo Eléctrico de un Dipolo

Solución:

Considerando $\vec{r}' = 0$ y la ecuación (2.19) se tiene:

$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sabemos que $\vec{E} = -\nabla V$, y en coordenadas esféricas:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

V solo depende de r y θ , luego:

$$\nabla V = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2}{r^3} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} (-\sin(\theta)) \hat{\theta} \quad \therefore \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\theta) \hat{\theta})$$

El campo resultante no depende del ángulo azimutal, ya que la configuración presenta simetría según ϕ . Además, para el caso $\theta = \pi/2$ el campo sólo tiene componente según $\hat{\theta}$, es decir es perpendicular al plano XY.

Para puntos muy alejados del dipolo el campo eléctrico y el potencial disminuyen con la distancia según las expresiones:

$$\vec{E}(p) \propto \frac{1}{r^3} \quad V(p) \propto \frac{1}{r^2}$$

Así, su efecto decae rápidamente con la distancia (un exponente mayor que en el caso de cargas puntuales).

2.8.3. Dipolo de un Conjunto de Cargas y Distribuciones

Por extensión, también se define el momento dipolar para el caso en que se tiene un conjunto de cargas q_1, q_2, \dots, q_n tal que su suma neta es nula, i.e., $\sum_{k=1}^n q_k = 0$, como se muestra en la Figura 2.37.

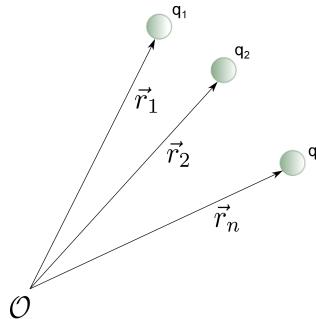


Figura 2.40: Dipolo de un Sistema de Cargas

Para este sistema se define el momento dipolar eléctrico como:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k$$

Claramente para $n = 2$ se tiene $\vec{p} = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2$, pero $q_1 = -q_2 = Q$, entonces $\vec{p} = Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = Q\vec{d}$ según habíamos visto. Notar que no depende del origen. Para el caso general de una distribución volumétrica de carga el momento dipolar asociado es:

$$\vec{p} = \iiint_{\Omega} \vec{r}' dq' = \iiint_{\Omega} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv$$

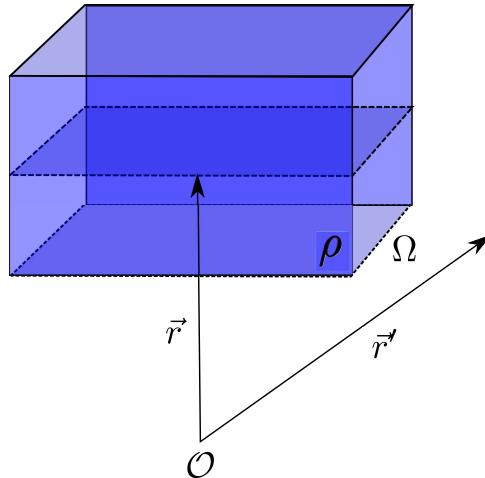


Figura 2.41: Dipolo de una Distribución de Carga

EJEMPLO 15:

Se tienen 8 cargas dispuestas como en la Figura 2.39. Se desea saber el efecto de agregar una novena carga Q al sistema.

Se sabe que las cargas satisfacen las relaciones $Q = -\sum_{k=1}^8 q_k$ y $q_k = -\frac{Q}{8}$

Se pide calcular el momento dipolar en los casos:

1. Carga Q se ubica en el centro del círculo.
2. Carga Q se ubica en la posición $x = -d/4$. Donde d es el diámetro del círculo.

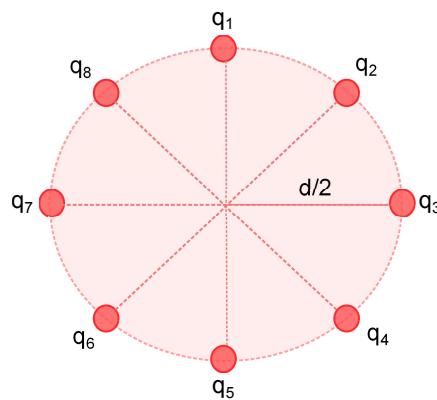


Figura 2.42: Dipolo de 8 Cargas

Solución:

- 1) Tomando el centro del círculo como origen del sistema de referencia se tiene: $\vec{p} = \sum_{k=1}^8 q_k \times \vec{r}_k + Q \times 0 = 0$
En este caso no existe momento dipolar.
- 2) En este caso:

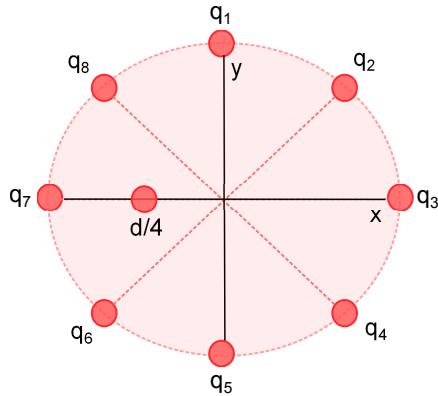


Figura 2.43: Dipolo de 9 Cargas

El momento dipolar es:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^8 q_k \times \vec{r}_k + -Q \left(\frac{d}{4} \right) \hat{i} = -Q \left(\frac{d}{4} \right) \hat{i}$$

Luego podemos representar el efecto eléctrico de esa distribución por el dipolo equivalente:

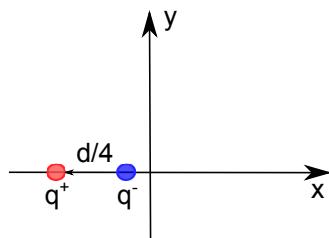


Figura 2.44: Dipolo Equivalente

Así, para una distancia $\|\vec{r}\| \gg \frac{d}{4}$

PROUESTO:

Calcular el torque sobre un dipolo en presencia de un campo eléctrico.

2.8.4. Desarrollo en Serie del Potencial a Grandes Distancias

Habíamos visto que para distribuciones en volumen el potencial eléctrico es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

Nos interesa evaluar la situación para el caso en que $\|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}'\|$, donde es posible desarrollar el término $\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$ en serie de la forma:

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + \dots + T.O.S.$$

Dentro de este apunte la abreviación T.O.S. estará referida a los **Términos de Orden Superior**

Reemplazando en la expresión del potencial:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}'\|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') dv' + T.O.S. \\ V(\vec{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r}\|} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \iiint_{\Omega} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' + T.O.S. \\ \therefore V(\vec{r}) &= \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} + T.O.S. \end{aligned}$$

Claramente el primer término corresponde al potencial de toda la carga concentrada en un solo punto, mientras que el segundo término corresponde al potencial de un dipolo. Así, en general, cuando se tiene una distribución de carga vemos:

1. Desde muy lejos, sólo la carga total.
2. Desde más cerca, pero lejos todavía, dos cargas, es decir, un dipolo.
3. Desde más cerca aún, cuatro cargas, cuadripolo.
4. Etc.

La relación con la distancia de los campos y potencial eléctrico de las distintas configuraciones se muestran en el siguiente Cuadro:

Cuadro 2.1: Campos en Configuraciones Multipolares

Configuración	Potencial Eléctrico	Campo Eléctrico
Una carga q	$\propto \frac{1}{r}$	$\propto \frac{1}{r^2}$
Dos cargas (dipolo) $q \cdot -q$	$\propto \frac{1}{r^2}$	$\propto \frac{1}{r^3}$
Cuatro cargas (2 dipolos) $q \cdot -q \cdot + - q \cdot q$	$\propto \frac{1}{r^3}$	$\propto \frac{1}{r^4}$

2.9. Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

Se tiene una esfera de radio 100 [cm] que tiene una distribución volumétrica de carga dada por $\rho(\vec{r}) = \frac{3r^3}{500}\varepsilon_0$ [C/m³]. Se desea anular el campo en el casquete ubicado a 90 [cm] del centro. Para ello se dispone de las siguientes alternativas:

1. Una carga que debiera ubicarse en el origen. Indique monto de la carga.
2. Un casquete esférico de radio 50 [cm] con densidad superficial de carga constante ρ . Indique el valor de ρ .
3. Un casquete esférico de radio 150 [cm] con densidad superficial de carga constante ρ . Indique el valor de ρ .

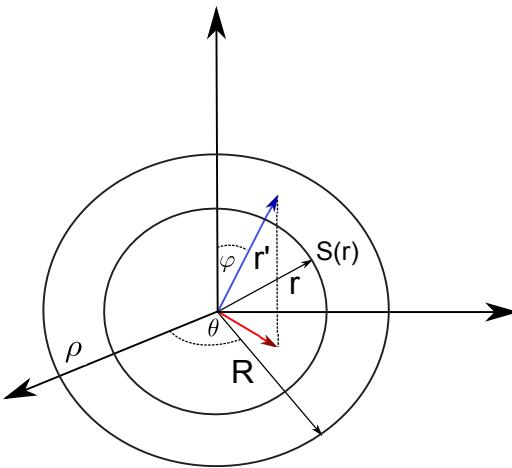


Figura 2.45: Problema 1

Solución:

La idea es que con las distintas alternativas se debe provocar un campo eléctrico que anule el de la esfera para $r = 90\text{cm}$, es decir que tenga el mismo valor absoluto pero distinto signo que el provocado por la esfera para ese mismo radio.

Primero calculamos el campo al interior de la esfera utilizando Ley de Gauss.

Consideremos que la esfera posee radio R , y que la densidad de carga de la esfera es $\rho(\vec{r}) = Kr^3$ donde $K = \frac{3}{500}\varepsilon_0$

Debido a la naturaleza del problema conviene trabajar en coordenadas esféricas (r', θ', φ') , donde:

1. r' es la distancia al origen.
2. θ' es el ángulo azimutal.
3. φ' es el ángulo superior.

Luego, $ds' = r'^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta$ y $dv' = r'^2 \sin(\varphi) dr' d\varphi d\theta$. Queremos calcular el campo eléctrico al interior de la esfera para cualquier radio, el que definirá una superficie S , por lo tanto calculamos para $r < R$

Tenemos que $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T(S)}{\varepsilon_0}$

La carga encerrada por la superficie S es $Q_T(S) = \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) dv'$

$$Q_T(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r K \cdot r'^3 \cdot r'^2 \cdot \sin(\varphi) dr' d\varphi d\theta$$

$$Q_T(S) = 2\pi [-\cos(\varphi)]_0^{\pi} \cdot \left[K \frac{r'^6}{6} \right]_0^r = 4\pi K \frac{r'^6}{6} \Rightarrow \therefore \iint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 4\pi K \frac{r'^6}{6\varepsilon_0}$$

Por simetría esférica, podemos suponer que el campo eléctrico es radial: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

Luego, el flujo eléctrico es:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S E(r)\hat{r} \cdot r'^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta \hat{r} = 4\pi E(r) r'^2$$

Entonces:

$$4\pi r'^2 E(r) = 4\pi K \frac{r'^6}{6\varepsilon_0} \Rightarrow \therefore \vec{E}(\vec{r}) = K \frac{r'^4}{6\varepsilon_0} \hat{r}$$

El cual debe anularse para una distancia de 0,9 [m]. Examinemos las alternativas:

1. Supongamos una carga Q en el centro de la esfera, con Q por determinar.

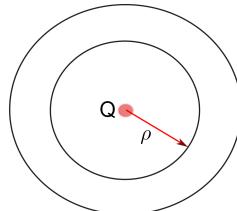


Figura 2.46: Problema 1 - Análisis 1

El campo eléctrico producido por una carga puntual, ubicada en una posición \vec{r}' , sobre \vec{r} es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Con $\vec{r}' = 0$ y $\vec{r} = r\hat{r}$ tenemos que:

$$\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Por el Principio de Superposición, tenemos que:

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{esfera}}(\vec{r}) + \vec{E}_Q(\vec{r}) \quad \forall r < 100\text{cm}$$

En particular, esto es válido para $r = 90 \text{ [cm]}$. Designaremos como r_1 a este radio particular. Determinaremos el valor de Q tal que, $\vec{E}_T(\vec{r}) = 0$, para $r = r_1$.

$$\vec{E}_T(\vec{r}_1) = K \frac{r_1^4}{6\epsilon_0} \hat{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{r} = 0$$

Entonces:

$$-K \frac{r_1^4}{6\epsilon_0} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{r} \Rightarrow \therefore Q = -\frac{4\pi K r_1^6}{6}$$

Reemplazando con los valores numéricos: $Q = -5,9 \cdot 10^{-14} [\text{C}]$

2. Consideremos un radio $r_2 = 50 \text{ [cm]}$. El campo eléctrico al exterior de un casquete uniformemente cargado con una densidad superficial de carga σ , lo calculamos por Gauss:

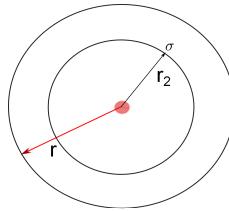


Figura 2.47: Problema 1 - Análisis 2

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T(S)}{\epsilon_0}$$

La carga total encerrada por la superficie S , de radio r_2 es:

$$Q_T(S) = \iint_S \sigma \cdot ds'$$

Como σ es constante, $\iint_S \sigma \cdot ds' = 4\pi\sigma r_2^2$

Por lo tanto, $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi\sigma r_2^2}{\epsilon_0}$ y por simetría esférica, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ entonces:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi E(r)r^2 \Rightarrow 4\pi E(r)r^2 = \frac{4\pi\sigma r_2^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \therefore \vec{E}_{\text{Casquete}}(r) = \left(\frac{\sigma r_2^2}{\epsilon_0 r^2} \right) \hat{r}$$

Por el Principio de Superposición, tenemos que:

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{Esfera}}(\vec{r}) + \vec{E}_{\text{Casquete}}(\vec{r}) \quad \forall r < 100 \text{ cm}$$

En particular, esto es válido para $r_1 = 90 \text{ [cm]}$. Determinaremos el valor de σ tal que, $\vec{E}_T(\vec{r}_1) = 0$.

$$\vec{E}_T(\vec{r}_1) = \vec{E}_{\text{Esfera}}(\vec{r}_1) + \vec{E}_{\text{Casquete}}(\vec{r}_1) \Rightarrow \left(K \frac{r_1^4}{6\epsilon_0} + \frac{\sigma r_2^2}{\epsilon_0 r_1^2} \right) \hat{r} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma r_2^2}{\epsilon_0 r_1^2} = -K \frac{r_1^4}{6\epsilon_0} \Rightarrow \therefore \sigma = -K \frac{r_1^6}{6r_2^2}$$

Reemplazando con los valores numéricos: $\sigma = -1,88 \cdot 10^{-14} [\text{C}/\text{m}^2]$

3. Consideremos un radio $r_3 = 150 [cm]$. El campo eléctrico provocado por un cascarón uniformemente cargado al interior de éste es nulo, pues la carga encerrada al aplicar la ley de Gauss será cero. Veámoslo matemáticamente:

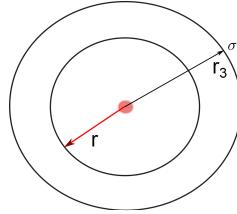


Figura 2.48: Problema 1 - Análisis 3

Para $r < r_3$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T(S)}{\epsilon_0} = 0$$

Entonces: $\vec{E}_{\text{Casquete}}(\vec{r}) = 0$ Con esto se observa que cualquier casquete con alguna densidad de carga, cualquiera que ésta sea, no provocará campo eléctrico al interior de él, por lo tanto no podremos anular el campo en algún r , en particular $r = 90 [cm]$ con esta alternativa.

$$\Rightarrow \therefore \not\exists \sigma \mid \vec{E}_{r=90} = 0$$

PROBLEMA 2:

Se tiene un disco circular de radio a cargado con una densidad superficial de carga σ_0 como se muestra en la Figura 2.46 Se pide:

1. Calcular el potencial en el eje Z.
2. Calcular el campo en el eje Z.

Solución:

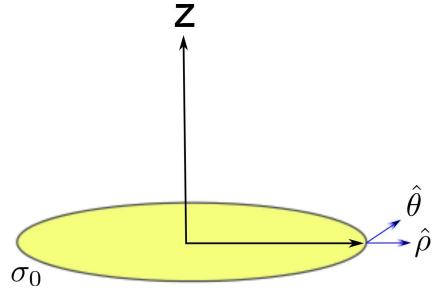


Figura 2.49: Problema 2

1) Recordando la fórmula para el potencial eléctrico de una distribución superficial de carga es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'$$

Para nuestro caso (trabajando en coordenadas cilíndricas): $\sigma(\vec{r}') = \sigma_0$, $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = \rho'\hat{\rho}$, $dS' = \rho'd\rho'd\theta'$.
En donde los límites de integración serán $\rho' \in (0, a)$ y $\theta' \in (0, 2\pi)$.
Entonces $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{\rho'^2 + z^2}$

Luego:

$$\begin{aligned} V(z\hat{z}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} d\rho' = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right) \\ &\Rightarrow \therefore V(z\hat{z}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(|z| - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$

2) Como ya se tiene el potencial, basta aplicar:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(|z| - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \right\} \hat{z} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{z}$$

PROBLEMA 3:

La Figura 2.47 muestra un tubo de rayos catódicos, como los usados en los televisores. El tubo produce un flujo de electrones que entran con una velocidad inicial de v_0 en la dirección horizontal, a un espacio limitado entre dos placas. Estas placas tienen densidades superficiales de carga dadas por $+\sigma$ y $-\sigma$, lo cual provoca un campo eléctrico perpendicular a ellas. A una distancia L de las placas se encuentra una pantalla de largo $2S$. Determine lo siguiente:

1. La velocidad con que los electrones salen de la región entre las placas (considere velocidad en las dos direcciones).
2. La condición sobre la distancia L para que ningún electrón salga de la pantalla (de largo $2S$).

Datos:

- | | |
|--|--|
| (1) $d = 20 \text{ E-}7 \text{ [m]}$ | (A) $M = 9,107 \text{ E-}31 \text{ [kg]}$ |
| (2) $W = 3 \text{ [m]}$ | (B) $q = 1,602 \text{ E-}19 \text{ [C]}$ |
| (3) $\sigma = 10 \text{ E-}21 \text{ [C/m}^2]$ | (C) $\varepsilon_0 = 8,854 \text{ E-}21 \text{ [F/m]}$ |
| (4) $S = 10 \text{ [cm]}$ | (D) $v_0 = 3 \text{ E+}4 \text{ [m/s]}$ |

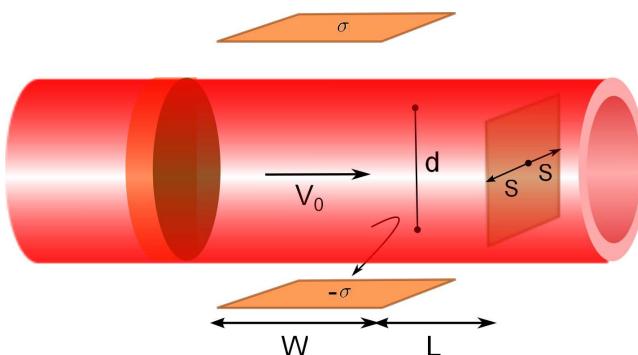


Figura 2.50: Problema 3

Indicación: Considere que el campo eléctrico es cero fuera de la región entre las placas. Considere asimismo, que existe gravedad.

Solución:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

1) Donde $\vec{F} = \vec{F}_{\text{eléctrica}} + \vec{F}_{\text{peso}}$ dentro de la zona de placas. Como $\vec{F}_{\text{eléctrica}} = q \cdot \vec{E}$, debemos calcular el campo eléctrico producido por las placas paralelas.

Debido a que el ancho w de cada una de las placas es mucho mayor, que la separación entre ellas, d , podemos considerar que el campo es el producido por la superposición de dos placas con densidad de carga de signo opuesto. Para determinar el campo eléctrico en esta zona, necesitamos saber el producido por una placa cargada con una densidad σ uniforme.

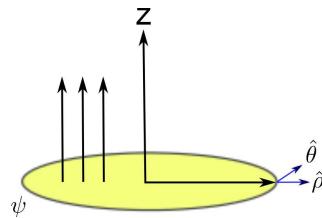


Figura 2.51: Problema 3 - Vista 1

Considerando un disco delgado de radio a con densidad de carga uniforme ψ , se sabe - por el problema anterior - que el campo eléctrico en el eje Z es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\psi}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{z}$$

Sí $a \rightarrow \infty$, entonces $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\psi}{2\epsilon_0 |z|} \hat{z}$, lo cual equivale a: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\psi}{2\epsilon_0} \hat{z}$, si estamos *sobre* el disco, y $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\psi}{2\epsilon_0} \hat{z}$, si estamos *bajo* el disco, suponiendo que ψ es estrictamente positivo.

En el problema utilizaremos los ejes X-Y con los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} , respectivamente.

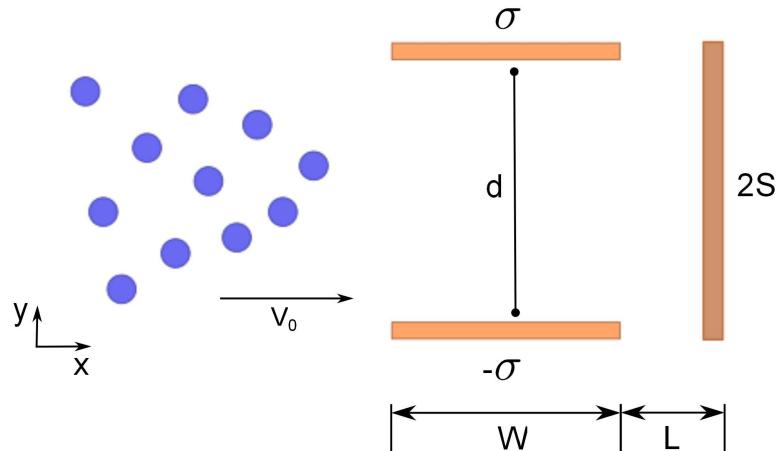


Figura 2.52: Problema 3 - Vista 2

Consideramos la Figura 2.50

Es posible observar que en las regiones I y en III los campos se anulan (por ley de Gauss con carga total encerrada nula). En II se refuerzan, es decir se suman los efectos de ambas placas, quedando un campo que va de la placa con carga positiva, a la placa con carga negativa.

Luego:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{j} \Rightarrow \vec{F}_{\text{eléctrica}} = q \cdot \vec{E} = -q \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{j} \quad \forall y \in \left(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

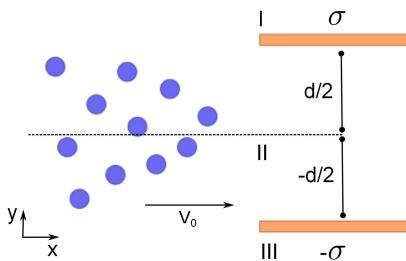


Figura 2.53: Problema 3 - Vista 3

Sea $Q = -q$, tal que $-Q = 1,602 \cdot 10^{-19} [C]$

Como condición inicial, podemos suponer que los electrones salen por el medio de la zona de placas, con velocidad solo en la horizontal. Con esto:

$$\vec{F}_{\text{eléctrica}} + \vec{F}_{\text{peso}} = m\vec{a} \Rightarrow -mg\hat{j} + \frac{Q\sigma}{\varepsilon_0} \hat{j} = m\ddot{x}\hat{i} + m\ddot{y}\hat{j}$$

Ecuaciones de Movimiento:

Según i: De la ecuación anterior, vemos que no hay fuerzas que actúen sobre el eje X.

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{constante} = v_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + c_1 \rightarrow \text{como } x(t=0) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow x(t) = v_0 t$$

Existe un tiempo t_1 tal que $x(t_1) = w$. Entonces $v_0 t_1 = w \Rightarrow t_1 = \frac{w}{v_0}$

Según j: Ambas fuerzas (eléctrica y de gravedad) actúan sobre el eje Y.

$$m\ddot{y} = -mg + \frac{Q\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \ddot{y}(t) = \frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \Rightarrow \dot{y}(t) = \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) t + c_2 \rightarrow \text{como } \dot{y}(t=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) t \Rightarrow y(t) = \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{t^2}{2} + c_3 \rightarrow \text{como } y(t=0) = 0 \rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow y(t) = \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w}{v_0}$$

Evaluando en $t_1 = \frac{w}{v_0}$ (tiempo que demora un electrón en salir de las placas).

$$\dot{y}(t_1) = \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w}{v_0}$$

De esta manera, hemos encontrado tanto la posición de salida, como la velocidad de salida del sector de las placas bajo los campos eléctrico y gravitatorio. Luego:

$$\vec{v}_{\text{salida}} = v_0 \hat{i} + \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w}{v_0} \hat{j}$$

2) Necesitamos ahora las ecuaciones de las partículas a partir del instante en que dejan las placas hasta que llegan a la pantalla de largo $2S$. Para estas nuevas ecuaciones ya tenemos las condiciones iniciales, las que vienen dadas por continuidad, por las ecuaciones anteriores encontradas.

$$\begin{aligned}\vec{v}(t=0) &= v_0 \hat{i} + \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w}{v_0} \hat{j} \\ \vec{r}(t=0) &= w \hat{i} + \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w^2}{2v_0^2} \hat{j}\end{aligned}$$

El electrón se ve afectado por una única fuerza, la que corresponde a la fuerza de gravedad.

De esta forma planteamos las ecuaciones de la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x}\hat{i} + m\ddot{y}\hat{j} = -mg\hat{j}$$

Según \hat{i} : No hay fuerzas según X.

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{constante} = v_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + c_1 \rightarrow \text{como } x(t=0) = w \rightarrow c_1 = w \Rightarrow x(t) = v_0 t + w$$

Existe un tiempo t_2 tal que $x(t_2) = L$. Luego: $t_2 = \frac{L}{v_0}$

Según \hat{j} : Tenemos sólo la fuerza de gravedad.

$$\begin{aligned}m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y}(t) = -g \Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + c_2 \rightarrow \text{como } \dot{y}(t=0) = \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w}{v_0} = c_2 \\ \Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w}{v_0}\end{aligned}$$

Ahora determinamos la posición:

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{wt}{v_0} + c_3 \Rightarrow y(t=0) = c_3 = \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w^2}{2v_0^2}$$

Con el tiempo t_2 tenemos que la partícula impacta en la pantalla. Existen dos casos: $y(t_2) = -S$ e $y(t_2) = S$.

Para los valores dados, el caso $y(t_2) = S$ no tiene solución. Por lo tanto, se debe analizar el caso $y(t_2) = -S$ con $t_2 = \frac{L}{v_0}$

$$y\left(t = \frac{L}{v_0}\right) = -g \frac{L^2}{2v_0^2} + \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{w^2}{2v_0^2} + \left(\frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \frac{wL}{v_0^2} = -S$$

Después de poco de trabajo algebráico, se llega a una ecuación de segundo grado para L :

$$L^2 - 2Lw \left(g - \frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - 1 \right) + w^2 \left(1 + \frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) - 2 \frac{Sv_0^2}{g} = 0$$

Para discernir datos sobre esta ecuación, sustituimos los valores entregados, en el discriminante - resultando este ser positivo. Por ello, esta ecuación posee *raíces reales y distintas*. Tomaremos la que sea positiva, o en el caso de que ambas sean positivas, la de menor módulo.

$$L_{1,2} = w \left(1 + \frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} - g \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8Sv_0^2}{g} + 4w^2 \left(g - \frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} \right) \left(g - 1 - \frac{Q\sigma}{m\varepsilon_0} \right)}$$

Para los valores del problema, la solución que nos sirve, es:

$$L = 4343,94[m]$$

Comentario: A pesar de que sea un valor muy alto, es razonable, debido a la casi nula masa del electrón y su velocidad muy alta.

PROBLEMA 4:

Considere el sistema de la Figura 2.51, el cual se compone de dos planos infinitos, separados a una distancia d , conteniendo densidades de carga σ_0 y $-\sigma_0$, respectivamente. Entre los planos se ubica una esfera sólida que contiene un material cargado el cual puede superponerse con una distribución volumétrica constante ρ_0 . Determine lo siguiente:

1. Calcular el campo eléctrico en el centro de la esfera.
2. Calcular el campo eléctrico en un punto A situado en el plano meridiano a una distancia L del plano derecho.
3. Si una partícula de carga $-q$ y masa m se ubica a una distancia δ del centro de la esfera en el eje Z, (no importa la dirección). Calcule la ecuación de movimiento de la partícula y obtenga la posición en el eje Z en función del tiempo.

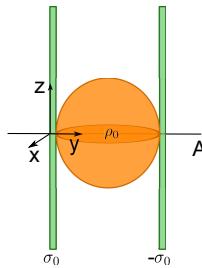


Figura 2.54: Problema 4

Solución:

1. Lo primero será encontrar los campos provocados por las placas y la esfera por separado para así - por superposición - encontrar el campo total.

En este caso buscamos el campo entre las placas dentro de la esfera.

Utilizando uno de los resultados del problema tres, tenemos que para una placa el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{y}{|y|} \hat{j}$$

Para este caso:

Placa 1: Consideramos la placa con carga positiva ≥ 0

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

Placa 2: Consideramos la placa con carga negativa ≤ 0

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (-\hat{j}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

Esfera: La esfera genera un campo con dependencia radial (\hat{r}). Utilizando la ley de Gauss (para $r < d/2$) obtenemos que:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \cdot \hat{r}$$

Evaluando esta expresión en el origen obtenemos que $\vec{E}_{\text{esfera}} = 0$

Finalmente tenemos el campo total dado por:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{\text{plano 1}} + \vec{E}_{\text{plano 2}} + \vec{E}_{\text{esfera}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{j}$$

2. Debemos calcular el campo para un punto A como se muestra en la Figura 2.51

Placas: Ambas placas producen campos en sentidos opuestos, por lo que se anularán en cualquier punto que no esté entre las placas, esto se aprecia en la Figura 2.52 para un punto a la derecha de ambas placas.

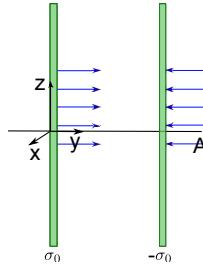


Figura 2.55: Problema 4 - Análisis 2

Luego el único campo que aporta es el producido por la esfera.

Esfera: Utilizaremos la ley de Gauss para calcular el campo.

Ocupando $\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$, calculamos el campo producido por ella:

$$Q_{\text{enc}} = \iiint_{\text{Esfera}} \rho_0 \cdot dv = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho_0 = \frac{\pi d^3}{6} \rho_0 \Rightarrow \iint_{\text{Casquete}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(r)$$

Con ello concluimos que el campo fuera de la esfera es $\vec{E} = \frac{d^3 \rho_0}{24r^2 \epsilon_0} \hat{r}$

El punto A se encuentra a una distancia $r = \frac{d}{2} + L$ del centro de la esfera. Luego reemplazando este valor en la expresión del campo se obtiene que:

$$\vec{E} = \left\{ \frac{d^3 \rho_0}{24 \left(\frac{d}{2} + L\right)^2 \epsilon_0} \right\} \hat{r}$$

3. Tenemos que: $\vec{F} = m\vec{a}$, donde:

$$\vec{F} = -q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(r = z) + \vec{E}_{\text{placa } \sigma_0}(x = d/2) + \vec{E}_{\text{placa } -\sigma_0}(x = d/2) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 z}{3\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{j}$$

Notar que en $r = z \rightarrow \hat{r} = \hat{k}$. Luego:

$$\vec{F} = -q \left(\frac{\rho_0 z}{3\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{i} \right) = m\vec{a}$$

Separando por componentes, se obtiene:

Eje Z:

$$-\frac{q\rho_0 z}{3\epsilon_0} = m\ddot{z}$$

Se propone la solución de la forma:

$$z(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Considerando: $\omega^2 = \frac{q\rho_0}{3\epsilon_0}$, $z(0) = \delta$, $\dot{z}(0) = 0$ se obtiene:

$$z(t) = \delta \cos(\omega t)$$

PROBLEMA 5:

En la Figura 2.53 se muestra una distribución lineal de carga λ_0 , infinita, la cual es rodeada por la distribución volumétrica de carga, que en coordenadas cilíndricas tiene la forma $\rho(r, \theta, z) = \frac{\rho_0}{r}$, la cual se extiende hasta un radio $r = a$. Entre ambas densidades existe la relación $\lambda_0 = -2\pi a \rho_0$

Determine lo siguiente:

1. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.
2. Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio.

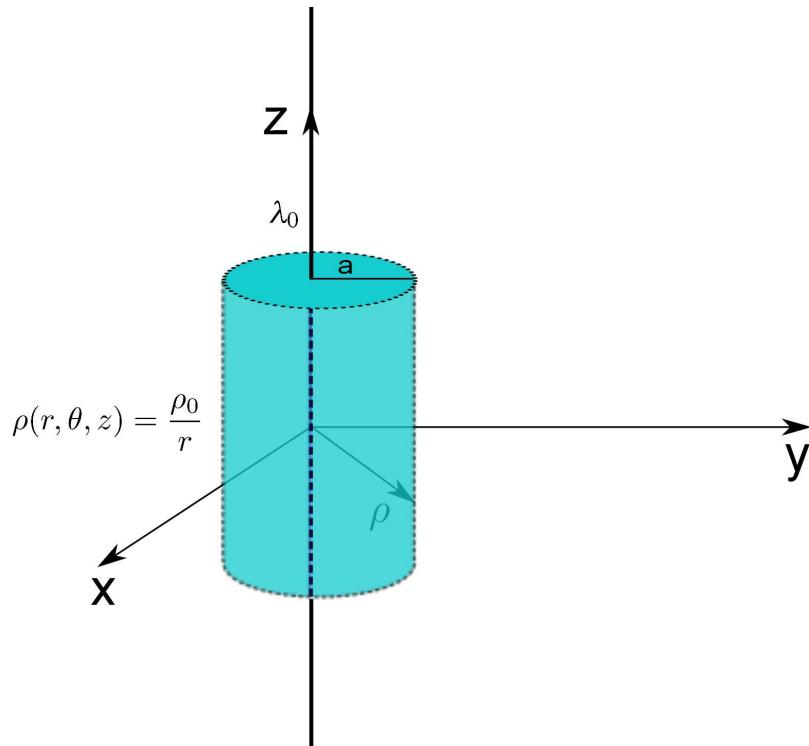


Figura 2.56: Problema 5

Solución:

1. Calcularemos los campos eléctricos producidos por ambas distribuciones de carga para luego encontrar el campo total por el principio de superposición, es decir el campo total será la suma de ambos. Basta notar que \vec{E} posee dependencia radial, en consecuencia, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Entonces:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Manto}} E(r) \cdot dS = E(r) \iint_{\text{Manto}} dS = 2\pi r L E(r)$$

Pero $Q_{\text{enc}} = \lambda_0 L$. Entonces podemos decir que:

$$2\pi r L E(r) = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Entonces el campo eléctrico producido por la distribución lineal:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{r}$$

Ahora, para la distribución volumétrica:

Tenemos 2 casos:

a) Para $r < a$:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho_0}{r} r dr d\theta dz = \vec{E} \iint_S d\vec{s} \Rightarrow \frac{2\pi\rho_0 r L}{\varepsilon_0} = 2\pi r L E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \hat{r}$$

Pero:

$$\lambda_0 = -2\pi a \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = -\frac{\lambda_0}{2\pi a} \Rightarrow \therefore \vec{E}(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi a \varepsilon_0} \hat{r}$$

b) Para $r > a$:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_0}{r} r dr d\theta dz = \vec{E} \iint_S d\vec{s} \Rightarrow \frac{2\pi\rho_0 a L}{\varepsilon_0} = 2\pi r L E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0 r} \hat{r}$$

Aplicando la relación anterior, se obtiene:

$$\therefore \vec{E}(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi r \varepsilon_0} \hat{r}$$

Finalmente el campo en todo el espacio está dado por:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\lambda_0}{2\pi r \varepsilon_0} - \frac{\lambda_0}{2\pi a \varepsilon_0} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

2. Para calcular el potencial se sabe que:

$$-\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \Delta V \quad \text{con} \quad d\vec{r} = r \hat{r}^6$$

a) Para $r < a$:

$$\begin{aligned} V_1(r) &= - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(a) \Rightarrow - \int_a^r \left(\frac{\lambda_0}{2\pi r \varepsilon_0} - \frac{\lambda_0}{2\pi a \varepsilon_0} \right) \hat{r} \cdot dr \hat{r} + V(a) \\ &\Rightarrow \frac{\lambda_0}{2\pi \varepsilon_0} \int_a^r \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) dr + V(a) \Rightarrow \frac{\lambda_0}{2\pi a \varepsilon_0} \left[\ln(r) - \ln(a) - \frac{r}{a} + 1 \right] + V(a) \end{aligned}$$

b) Para $r > a$:

$$V_2(r) = - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(a) = - \int_a^r 0 \cdot dr \hat{r} + V(a) \Rightarrow \therefore V_2(r) = \text{constante} = V(a)$$

Donde el voltaje $V(a)$ es el voltaje de referencia que debiera ser un dato.

Finalmente el potencial en todo el espacio es:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\lambda_0}{2\pi r \varepsilon_0} \left[\ln(r) - \ln(a) - \frac{1}{a} + 1 \right] + V(a) & r < a \\ V(a) & r > a \end{cases}$$

⁶El símbolo Δ se considera como diferencia

PROBLEMA 6:

Dos cilindros concéntricos de radios a y b respectivamente y largo L se encuentran ubicados tal como lo indica la Figura 2.54. El espacio entre ambos se encuentra lleno de un material con un vector polarización dado por $\vec{P} = r^2 \hat{r} + \sin(\theta) \hat{\theta}$

Dado lo anterior se pide:

1. Calcular las densidades superficiales de carga de polarización.
2. Calcular la densidad volumétrica de carga de polarización.

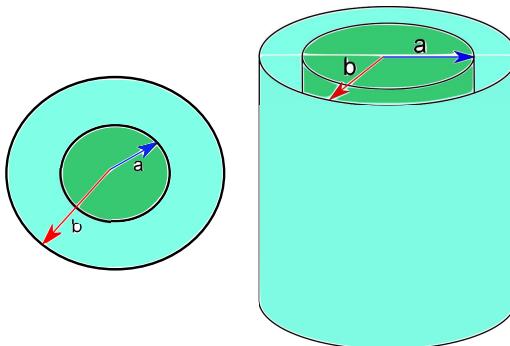


Figura 2.57: Problema 6

Solución:

1. Densidades superficiales de carga de polarización:

Para $\hat{n}_{S_1} = -\hat{r}$ y $\vec{P} = r^2 \hat{r} + \sin(\theta) \hat{\theta}$
 $\sigma_{\vec{P}_{S_1}} = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\vec{P} \cdot \hat{r} = -r^2$, pero $r = a \Rightarrow \sigma_{\vec{P}_{S_1}} = -a^2$ [C/m²]

Para $\hat{n}_{S_2} = \hat{r}$ y $\vec{P} = r^2 \hat{r} + \sin(\theta) \hat{\theta}$
 $\sigma_{\vec{P}_{S_2}} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{r} = r^2$, pero $r = b \Rightarrow \sigma_{\vec{P}_{S_2}} = b^2$ [C/m²]

2. Densidades volumétricas de carga de polarización:

$$\begin{aligned} \rho_P(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rP_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r^3}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \theta} + 0\right) \\ &\Rightarrow \rho_P(\vec{r}) = -\left(3r + \frac{\cos(\theta)}{r}\right) [C/m^3] \end{aligned}$$

PROBLEMA 7:

Se tiene una esfera de radio R cargada con densidad volumétrica variable $\rho(r) = \frac{\rho_0 r^3}{R^3}$. La esfera además contiene en el origen una carga puntual Q_0 .

Dado lo anterior se pide:

1. Determinar el campo eléctrico para cualquier punto del espacio.
2. Determinar el potencial eléctrico para cualquier punto del espacio.

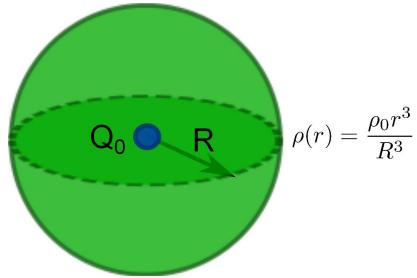


Figura 2.58: Problema 7

Solución:

1. Usando ley de Gauss, se obtiene el siguiente análisis:

a) Para $r < R$:

$$Q_{\text{encerrada}} = \iiint_{\Omega} \rho(r) dv + Q_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \frac{\rho_0 r^3}{R^3} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta \Rightarrow Q_{\text{encerrada}} = \frac{2\pi}{3} \frac{\rho_0 r^6}{R^3} + Q_0$$

Además se tiene que: $\vec{E} = E(r)\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \hat{n}$ entonces:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Er^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta = 4\pi r^2 E$$

Entonces:

$$E = \frac{r^4 \rho_0}{6R^3 \epsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} \Rightarrow \therefore \vec{E} = \left(\frac{r^4 \rho_0}{6R^3 \epsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} \right) \hat{r}$$

b) Para $r > R$:

$$Q_{\text{encerrada}} = \iiint_{\Omega} \rho(r) dv + Q_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \frac{\rho_0 r^3}{R^3} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta \Rightarrow Q_{\text{encerrada}} = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 + Q_0$$

Y \vec{E} es radial también: $\vec{E} = E(r)\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \hat{n}$ entonces:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Er^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta = 4\pi r^2 E$$

Entonces:

$$E = \frac{R^3 \rho_0}{6r^2 \epsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} \Rightarrow \therefore \vec{E} = \left(\frac{R^3 \rho_0}{6r^2 \epsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} \right) \hat{r}$$

$$2. \quad V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

a) Para $r > R$:

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r \left(\frac{\rho_0 R^3}{6\varepsilon_0 r^2} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right) \hat{r} \cdot \hat{r} dr = - \left[\frac{\rho_0 R^3}{6\varepsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr \right] \\ &\Rightarrow V(r) = \frac{\rho_0 R^3}{6\varepsilon_0 r} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

b) Para $r < R$:

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_R^r \left(\frac{\rho_0 r^4}{6R^3\varepsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right) \hat{r} \cdot \hat{r} dr + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ &= - \left[\frac{\rho_0}{6R^3\varepsilon_0} \int_R^r r^4 dr + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r^2} dr \right] + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ &\Rightarrow V(r) = \frac{\rho_0}{6R^3\varepsilon_0} \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

PROBLEMA 8:

Un alambre de largo R y densidad de carga λ_0 uniforme se encuentra incrustado radialmente en una esfera de radio R , de modo que su extremo más profundo se encuentra a una distancia X del centro de la esfera, tal como se indica en la Figura 2.56. La esfera está cargada de modo tal que el campo eléctrico producido por ella en cualquier punto del espacio es: $\vec{E} = \frac{rE_0}{r}\hat{r}$ si $r \leq R$; $\vec{E} = \frac{R^2E_0}{r^2}\hat{r}$ si $r \geq R$

Dado lo anterior se pide:

1. Determinar el vector fuerza \vec{F} que la esfera ejerce sobre el alambre $\vec{F} = \int \vec{E} dq$
2. Determinar el potencial electrostático $V(\vec{r})$ de la esfera en cualquier punto del espacio.

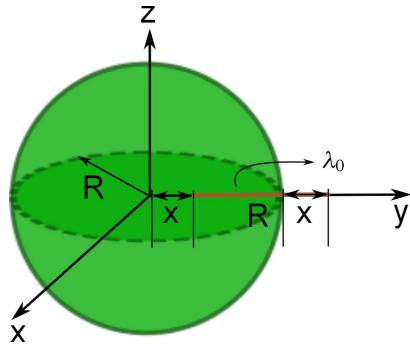


Figura 2.59: Problema 8

Solución:

1. La fuerza que la esfera ejerce sobre el alambre está dada por: $\vec{F} = \int_x^{R+x} \vec{E} dq \Rightarrow \int_x^R \vec{E}_1 dq + \int_R^{R+x} \vec{E}_2 dq$ en donde el elemento diferencial está dado por: $dq = \lambda_0 dr$
Así:

$$\vec{F} = \left(\frac{E_0 \lambda_0}{R} \int_x^R r dr + R^2 E_0 \lambda_0 \int_R^{R+x} \frac{1}{r^2} dr \right) \hat{r} \Rightarrow \vec{F} = \left(\frac{3}{2} E_0 \lambda_0 R - \frac{1}{2R} E_0 \lambda_0 X^2 - \frac{E_0 \lambda_0 R^2}{R+X} \right) \hat{r}$$

2. Calculemos el potencial electroestático para todo el espacio.

a) Para $r \geq R$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} dl = -R^2 E_0 \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow V(r) = \frac{R^2 E_0}{r}$$

b) Para $r \leq R$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} dl = R^2 E_0 \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr + \frac{E_0}{R} \int_r^R r dr \Rightarrow V(r) = \frac{3}{2} E_0 R - \frac{E_0 r^2}{2R}$$

PROBLEMA 9:

Considere una esfera maciza de radio $2a$ y con densidad de carga en volumen ρ_0 , a la cual se le ha practicado una perforación - también esférica - de radio a , según se muestra en la Figura 2.57

Dado lo anterior se pide:

1. Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.
2. Determinar una expresión que permita estimar el trabajo necesario para traer una carga q desde una distancia muy grande al centro de la esfera.
3. ¿Cuánto vale el flujo del campo eléctrico a través de una superficie compuesta de un casquete esférico de radio $4a$ centrado en el origen?

Solución:

1. Como en la distribución original de la esfera (esfera 1) no hay simetría esférica (Figura 2.57a), se separa la esfera 1 perforada en dos esferas, una con densidad ρ_0 (Figura 2.57b) llamada esfera 2 y otra con densidad de carga $-\rho_0$ (Figura 2.57c) llamada esfera 3, respectivamente.

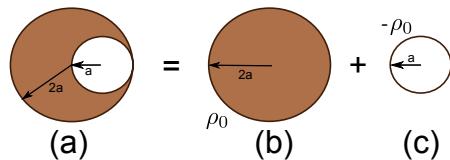


Figura 2.60: Problema 9

Campo Eléctrico para Esfera 1:

Fuera de la Esfera 1:

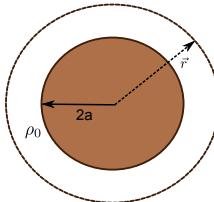


Figura 2.61: Problema 8.1- Afuera

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_{1f} \hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{r} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2a} \rho_0 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ E_{1f} r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta d\varphi &= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2a} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \Rightarrow 4\pi E_{1f} r^2 = \frac{4\rho_0}{3\varepsilon_0} 8a^3 \pi \\ \vec{E}_{1f}(\vec{r}) &= \frac{8\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

Dentro de la Esfera 1:

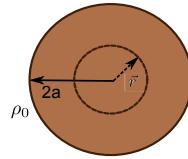


Figura 2.62: Problema 8.1 - Adentro

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_{1d} \hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho_0 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

$$4\pi E_{1d} r^2 = \frac{4\rho_0}{3\epsilon_0} r^3 \pi \Rightarrow \vec{E}_{1d}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

Campo Eléctrico para Esfera 2:

Fuera de la Esfera 2:

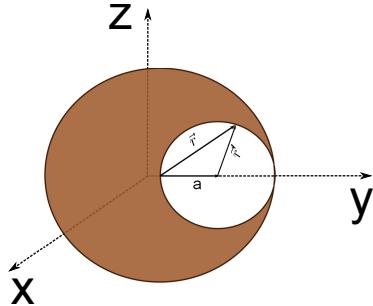


Figura 2.63: Problema 8.2 - Afuera

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E_{2f} \hat{r}' \cdot r'^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{r}' = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho_0 r'^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\varphi$$

$$4\pi E_{2d} r'^2 = -\frac{4\rho_0}{3\epsilon_0} r'^3 \pi \Rightarrow \vec{E}_{2d}(\vec{r}') = -\frac{\rho_0 r'}{3\epsilon_0} \hat{r}'$$

Basta expresar todo en un sistema de referencia. Notando que:

$$\vec{r} = \vec{r}' + a\hat{j} \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - a\hat{j} = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \hat{i} + (r \sin(\varphi) \sin(\theta) - a) \hat{j} + r \cos(\theta) \hat{k}$$

De esto se calcula:

$$r' = \|\vec{r}'\| \Rightarrow \therefore r' = \sqrt{r^2 - 2ar \sin(\varphi) \sin(\theta) + a^2}$$

Luego el campo eléctrico será:

Fuera de la Esfera Original:

$$\vec{E}_{ff}(\vec{r}) = \vec{E}_{1f} + \vec{E}_{2f} = \frac{8\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} - \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r'^3} \hat{r}' = \frac{8\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} - \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\rho_0 a^3}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin(\varphi) \sin(\theta) + a^2}^3} (r\hat{r} - a\hat{j})$$

$$\vec{E}_{ff}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{8}{r^2} \hat{r} + \frac{a\hat{j} - r\hat{r}}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin(\varphi) \sin(\theta) + a^2}^3} \right]$$

Dentro de la Esfera 1 y Fuera de la Esfera 2:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{df}(\vec{r}) &= \vec{E}_{1d} + \vec{E}_{2f} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} - \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r'^2} \hat{r}' \\ \vec{E}_{df}(\vec{r}) &= \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_0 a^3}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin(\varphi) \sin(\theta) + a^2}}^3 (r\hat{r} - a\hat{j}) \\ \Rightarrow \therefore \vec{E}_{df}(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[r\hat{r} + \frac{a^3(a\hat{j} - r\hat{r})}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin(\varphi) \sin(\theta) + a^2}}^3 \right]\end{aligned}$$

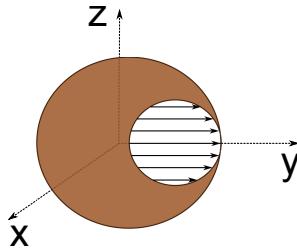
Dentro de la Esfera 1 y Dentro de la Esfera 2:

Figura 2.64: Problema 8.3

$$\vec{E}_{dd}(\vec{r}) = \vec{E}_{1d} + \vec{E}_{2d} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} - \frac{\rho_0 r'}{3\epsilon_0} \hat{r}' = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r}' = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\vec{r} - a\hat{j}) \Rightarrow \therefore \vec{E}_{dd}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} \hat{j}$$

Se puede ver que el campo eléctrico dentro de la perforación es constante según \hat{j} .

Obs: Para los campos eléctricos calculados se puede escribir \hat{j} en coordenadas esféricas para una expresión más formal.

$$\hat{i} = \cos(\varphi)\hat{\varphi} + \sin(\varphi)(\sin(\theta)\hat{\rho} + \cos(\theta)\hat{\theta})$$

$$\hat{j} = \sin(\varphi)\sin(\theta)\hat{\rho} + \cos(\varphi)\hat{\varphi} + \sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{\theta}$$

2. El trabajo desde un punto A hasta uno B es:

$$W = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tomando $B = 0$ (centro de la esfera) $A = \infty$ (punto demasiado lejano) y un camino radial.

$$W = -q \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \left[\int_{\infty}^{2a} E_f dr + \int_{2a}^0 E_i dr \right]$$

Donde E_i puede ser E_{df} o E_{dd} dependiendo del camino que se tome.

3. Para el flujo se usará el teorema de Gauss directamente:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2a} \rho_0 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho_0 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \right]$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 \right] \Rightarrow \therefore \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{28\rho_0\pi a^3}{3\epsilon_0}$$

2.10. Problemas Propuestos

PROBLEMA 1:

Considere el sistema de la Figura 2.63, en el cual se conocen los valores para el potencial eléctrico en los planos cilíndricos definidos por los radios $r = a$, donde el potencial es nulo, y $r = b$ donde vale V_0

Suponiendo que los campos sólo dependen de r , se pide:

1. Calcule el campo eléctrico para $a < r < b$ y ángulos menores a α (región I).
2. Si ahora este espacio (región I) se rellena con una densidad de carga en volumen $\rho(\vec{r}) = kr^2$, calcule el nuevo campo eléctrico en esa región.

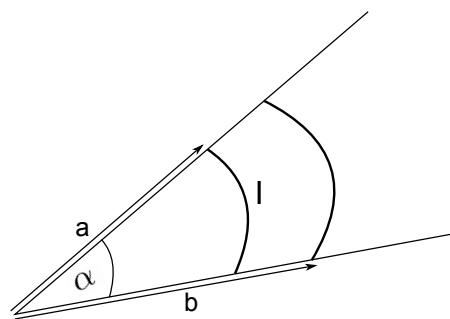


Figura 2.65: Problema 1 - Propuesto

PROBLEMA 2:

Se tiene una cinta de ancho $4a$ cargada con una densidad superficial de carga σ . A la cinta le falta un pedazo en forma de circunferencia de radio a , tal como se ilustra en la Figura 2.64. Para esta configuración determine el vector campo eléctrico y el potencial en el eje Z.

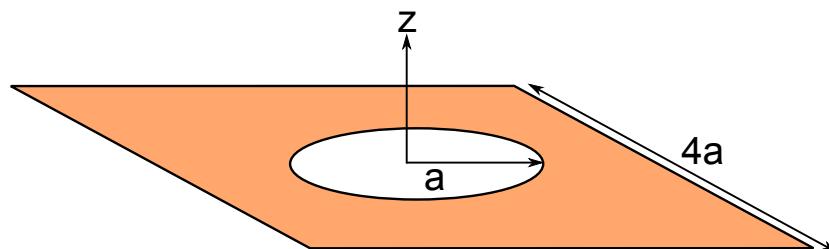


Figura 2.66: Problema 2 - Propuesto

PROBLEMA 3:

Se observa la siguiente distribución de carga:

1. El tubo macizo interior posee radio a y una densidad homogénea ρ_1 .
2. El cilindro intermedio posee un radio interior b y un radio exterior c . Además de una densidad homogénea.
3. El manto exterior posee una densidad homogénea superficial σ y radio d .
4. Todos los elementos son infinitamente largos.

Calcule \vec{E} en todo el espacio.

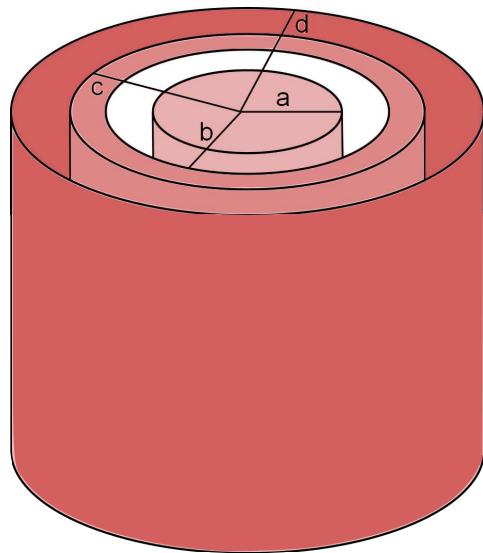


Figura 2.67: Problema 3 - Propuesto

Capítulo 3

Propiedades Dieléctricas de la Materia

3.1. Introducción

Hasta aquí hemos visto las propiedades de la carga eléctrica en el vacío. En este capítulo veremos la forma que adoptan los campos eléctricos en la materia. Por materia entenderemos una distribución de carga que se mantiene restringida a un espacio definido. En términos generales hay tres clases de materiales:

1. **Dieléctricos o aislantes:** donde las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio.
2. **Conductores:** donde las cargas pueden moverse libremente en la superficie o al interior del material.
3. **Semiconductores:** un material que presenta en distinto grado (generalmente con un comportamiento muy no lineal) las propiedades tanto de dieléctricos como de conductores.

Conductores son típicamente los metales como el cobre y el aluminio. Aislantes son materiales como el vidrio y las cerámicas, o líquidos como el aceite. Semiconductores son aleaciones especiales compuestas de silicio o germanio. Estos últimos se usan en la fabricación de chips para computadoras. En este curso sólo estudiaremos los dieléctricos y los conductores, ya que la gran mayoría de los materiales corresponde a una combinación directa de estas dos clasificaciones.

3.2. Modelo de los Materiales Dieléctricos

En los dieléctricos las cargas no pueden desplazarse libremente y sólo pueden experimentar pequeñas desviaciones en torno a un punto de equilibrio fijo según veremos a continuación.

3.2.1. Materiales no Polares

Para entender el efecto macroscópico de un campo eléctrico sobre un material aislante consideremos un átomo de un dieléctrico formado por una nube de electrones cuya carga negativa neta es $-Q$ y un núcleo fijo consistente de cargas positivas con carga total Q , según se muestra en la Figura 3.1.

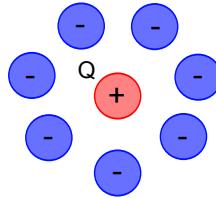


Figura 3.1: Modelo de Átomo de un Dieléctrico

Al aplicar un campo eléctrico externo la configuración de cargas experimenta una leve deformación según se muestra en la Figura 3.2 (se desprecian los efectos de los propios campos de las cargas entre sí):

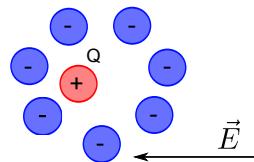


Figura 3.2: Átomo en Presencia de Campo Eléctrico

Desde una cierta distancia (mucho mayor que las distancias atómicas) esta deformación puede representarse mediante un dipolo de la forma (véase EJEMPLO 13.):

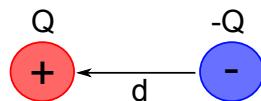


Figura 3.3: Representación mediante Dipolo

Así entonces, al aplicar un campo externo, el material presentará pequeños desplazamientos de sus electrones en torno a una posición de equilibrio, los cuales pueden representarse a través de dipolos.

Notar que en este modelo, el material no posee dipolos con antelación a la aplicación del campo externo \vec{E} . Por ello estos materiales se llaman no polares.

3.2.2. Materiales Polares

Existen otros materiales, que por su estructura molecular poseen dipolos en forma natural, los cuales se encuentran generalmente orientados en forma aleatoria⁷, tal como se muestra en la Figura 3.4. Estos materiales se llaman polares (constituidos de moléculas polares).

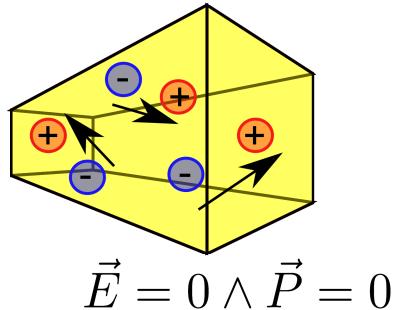


Figura 3.4: Elemento de Volumen en un Medio Material Polar

En estos materiales, al aplicar un campo eléctrico externo se produce una alineación de los dipolos:

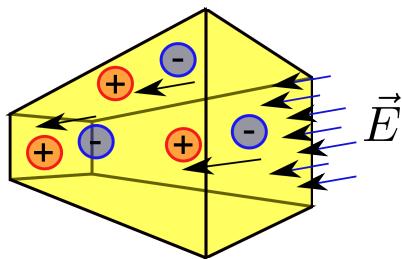


Figura 3.5: Medio Material Polar Frente a un Campo

En estos materiales tampoco se produce una traslación significativa de cargas ya que su estructura atómica impide el movimiento (fuerzas inter-nucleares).

⁷Existen unos materiales llamados ferroeléctricos en los cuales existe una polarización permanente en ausencia de campo eléctrico externo, aunque su número es muy reducido en la naturaleza.

3.2.3. Vector Polarización

Según vimos, en los dieléctricos sólo se produce desplazamiento de cargas en torno al punto de equilibrio. Así, para un elemento de volumen del material dieléctrico (polar o no polar) tendremos una nube de dipolos como se muestra en la Figura 3.6.

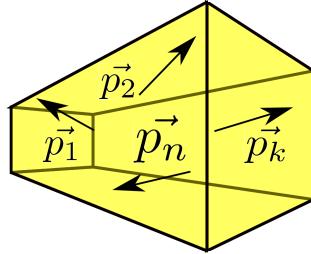


Figura 3.6: Elemento de Volumen en un Medio Material

Definimos el vector polarización \vec{P} (mayúscula) como el momento dipolar por unidad de volumen de un dieléctrico, es decir:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^n \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

Donde los n dipolos \vec{p}_k se encuentran en el volumen $\Delta v'$.

3.3. Potencial Eléctrico en la Materia

Consideremos ahora la expresión del potencial eléctrico producido por un elemento de volumen de material dieléctrico, según se muestra en la Figura 3.7.

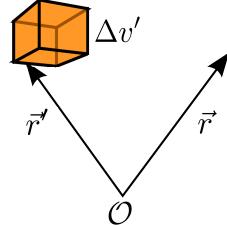


Figura 3.7: Potencial Eléctrico de Elemento de Volumen

Si el elemento de volumen $\Delta v'$ puede representarse por un dipolo equivalente $d\vec{p} = \vec{P} \cdot \Delta v'$, entonces el potencial producido por este dipolo en una posición \vec{r} será:

$$dv = \underbrace{\frac{\vec{P} \Delta v'}{4\pi\epsilon_0} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}_{d\vec{p}} \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \vec{P} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

Donde Ω es el espacio del medio material en donde están los dipolos.

Sabemos por otro lado que:

$$\nabla' \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad \text{¡Probarlo!}$$

Entonces:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \vec{P} \cdot \nabla' \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'^8$$

Utilizando la identidad: $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] &= \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \nabla' \cdot \left[\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] \\ \Rightarrow V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \left\{ \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \cdot \vec{P} \right\} dv' \end{aligned}$$

El teorema de la divergencia establece que:

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{A}) dv = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Y aplicándolo a nuestro desarrollo:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{s} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

Si escribimos el elemento diferencial $\vec{P} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot \hat{n} dS$ podemos escribir el potencial como:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} ds - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' \quad (3.1)$$

Así entonces, un medio material con polarización \vec{P} produce un potencial eléctrico que puede expresarse mediante dos componentes. A continuación veremos una interpretación física de estos términos.

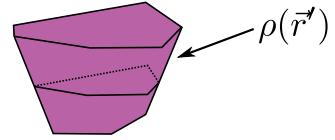
⁸Nótese las diferencias entre el operador divergencia y el operador producto punto

3.4. Distribuciones de Carga de Polarización

Ahora recordemos que para distribuciones de carga en el vacío teníamos las siguientes expresiones para el potencial:

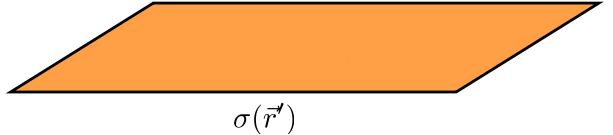
En volumen:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$



En superficie:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} ds'$$



Por lo tanto, al comparar estas expresiones puede concluirse que el potencial de los medios materiales (ver ecuación 3.1) corresponde al potencial producido por una distribución volumétrica de carga igual a $\rho_P(\vec{r}') = -\nabla \cdot \vec{P}$ y otra de superficie igual a $\sigma_P(\vec{r}') = \vec{P} \cdot \hat{n}$. En otras palabras, al aplicar un campo eléctrico a un material dieléctrico, este se reconfigura formando una distribución de carga en volumen ρ_P y otra en su superficie σ_P , tal como se muestra en la Figura 3.9.

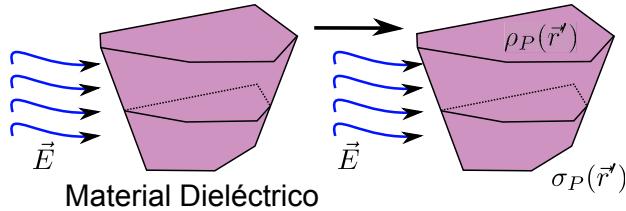


Figura 3.9: Modelo de Medios Materiales

Es importante destacar lo siguientes aspectos:

1. Las cargas de ρ_P y σ_P no se mueven (se obtienen de la rotación de los dipolos).
2. Las cargas de polarización producen campo eléctrico, pero la carga neta del material sigue siendo nula. En efecto:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \rho_P dv + \iint_S \sigma_P dS &= \iiint_{\Omega} -\nabla \cdot \vec{P} dv + \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} \\ &= -\iint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} + \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = 0 \end{aligned}$$

3. ρ_P y σ_P aparecen producto de la alineación que experimentan los dipolos del material dieléctrico y no corresponden a cargas libres al interior de él.
4. Dado que estamos interesados en representar en forma macroscópica a los dieléctricos, podemos despreciar el efecto local que producen los dipolos entorno a una vecindad, ya que el efecto del resto de los dipolos será mucho mayor. Es decir, este modelo también se puede aplicar al interior de los dieléctricos.

EJEMPLO 16:

Un cubo dieléctrico de lado l y centrado en el origen tiene una polarización radial $\vec{P} = a\vec{r}$, donde a es una constante y $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Se pide encontrar las densidades de carga de polarización y la carga total al interior del cubo y en su superficie.

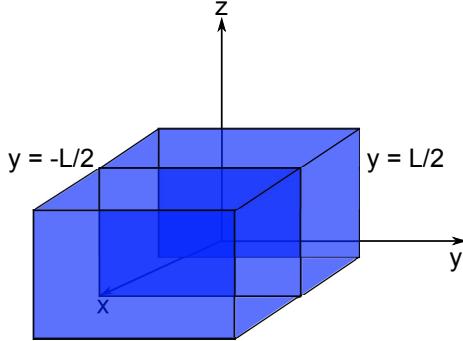


Figura 3.10: Dieléctrico Cúbico

Solución:

En volumen:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \left(a x\hat{i} + a y\hat{j} + a z\hat{k}\right) \Rightarrow -(a + a + a) = -3a \quad [c/m^3]$$

O sea, se tiene una distribución en volumen de carga constante al interior del cubo.

En superficie: $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$, por lo tanto tendremos una distribución por cada cara del cubo:

Plano XZ:

$$\text{Para } y = l/2, \hat{n} = \hat{j} \Rightarrow \vec{P} \cdot \hat{n} = \left(ax\hat{i} + a\frac{l}{2}\hat{j} + az\hat{k}\right) \cdot \hat{j} = \frac{al}{2}$$

$$\text{Para } y = -l/2, \hat{n} = -\hat{j} \Rightarrow \vec{P} \cdot \hat{n} = \left(ax\hat{i} - a\frac{l}{2}\hat{j} + az\hat{k}\right) \cdot (-\hat{j}) = \frac{-al}{2}$$

Similarmente para las otras caras se tiene que $\sigma = \frac{al}{2}$

Carga total al interior del cubo:

$$\iiint_{\Omega} \rho_P dv = -3al^3 \Rightarrow Q_T = -3al^3$$

Carga en las caras: Por cada cara: $\sigma l^2 \Rightarrow Q_{\text{cara}} = \frac{al^3}{2}$, luego para 6 caras: $\Rightarrow Q_{\text{caras}} = 3al^3$

Notar que la carga total es: $Q = Q_T + Q_{\text{caras}} = -3al^3 + 3al^3 = 0$

Se obtiene que el material dieléctrico tiene carga neta nula, lo que está de acuerdo a la intuición, ya que el material dieléctrico no tiene cargas libres.

3.5. Generalización de la Primera Ecuación de Maxwell

Consideremos ahora el caso general en que tenemos una distribución de *carga libre* ρ al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito). La 1^a ecuación de Maxwell indica:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{total}}}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

Aquí ρ_{total} corresponde a la carga total que es fuente de campo eléctrico. Por ello, en este caso corresponde a la *carga libre* al interior del dieléctrico más las distribuciones de *carga de polarización*.

Así: $\rho_{\text{total}} = \rho_\ell + \rho_P$ donde ρ_ℓ es densidad de carga libre, y ρ_P es la densidad de polarización.

Luego, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \rho_\ell + \rho_P &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) \\ \rho_\ell &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) - \rho_P \end{aligned}$$

Pero $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$

$$\begin{aligned} \rho_\ell &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) + \nabla \cdot \vec{P} \\ \rho_\ell &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \end{aligned}$$

Se define $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ como el vector desplazamiento eléctrico en medios materiales. Con ello:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell \quad 1^{\text{a}} \text{ Ecuación de Maxwell}$$

Notar que el vector \vec{D} está “desplazado” en relación al campo eléctrico (\vec{E}) por el vector polarización \vec{P} , de allí su nombre.

Integrando en volumen la primera ecuación de Maxwell

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv &= \overbrace{\iiint_{\Omega} \rho_\ell dv}^{Q_{\text{libre total}}} \\ \iint \vec{D} \cdot d\vec{s} &= Q_{\text{libre total}} \quad \text{Ley de Gauss en Medios Materiales} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Notar que en estas expresiones \vec{E} es el campo eléctrico total, el cual es resultante tanto de fuentes externas como de las cargas libres ρ_ℓ y las de polarización ρ_P . A su vez, en el espacio vacío $\vec{P} = 0$ y se cumple $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ según habíamos visto anteriormente.

3.6. Constante Dieléctrica

3.6.1. Polarización de Medios Materiales

En la mayoría de los materiales dieléctricos en general la polarización \vec{P} varía con la intensidad del campo eléctrico aplicado. La atmósfera es un típico ejemplo de un medio sometido a un campo eléctrico, ya que varía con la altura, por ello su polarización varía con la altitud. Dependiendo de la forma en que se efectúa esa variación los materiales se clasifican de la siguiente forma:

1. $||\vec{P}|| = \alpha ||\vec{E}|| \Rightarrow$ Materiales Lineales
2. $\vec{P} = \alpha(\vec{r})\vec{E} \Rightarrow$ Materiales Isótropos \Rightarrow Aquí $\vec{P} \parallel \vec{E}$
3. α constante \Rightarrow Material Homogéneo

Se acostumbra a escribir: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material y corresponde a una medida de cuan susceptible o sensible es un material al campo eléctrico aplicado.

Así, podemos escribir

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

De acuerdo a lo anterior, el parámetro χ tiene varias posibilidades dependiendo de las características del medio. Para el caso de un medio lineal (relación entre \vec{P} y \vec{E} es una función lineal) se tienen las siguientes posibilidades:

1. **Medio Lineal, Isótropo y Homogéneo:** Es un material cuyas propiedades dieléctricas son las mismas en todo punto del material. La constante χ es la misma e independiente de la posición en el material, esto significa que la relación entre \vec{P} y \vec{E} se expresa como:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi E_i \quad \text{Para: } i = 1, 2, 3$$

2. **Medio Lineal, Anisótropo (no isótropo) y Homogéneo:** Es un material en que la relación entre \vec{P} y \vec{E} no depende de la posición, pero no es igual en todas las direcciones. Esto quiere decir que la relación entre \vec{P} y \vec{E} se puede expresar en la forma:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{i1} E_1 + \varepsilon_0 \chi_{i2} E_2 + \varepsilon_0 \chi_{i3} E_3$$

Y los elementos χ_{ij} son constantes y forman una matriz simétrica.

3. **Medio Lineal, Anisótropo (no isótropo) y No Homogéneo:** Es un material en que la relación entre \vec{P} y \vec{E} es una función dependiente de la posición y no es igual en todas las direcciones. Esto quiere decir que dicha relación se puede expresar en la forma:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{i1}(\vec{r}) E_1 + \varepsilon_0 \chi_{i2}(\vec{r}) E_2 + \varepsilon_0 \chi_{i3}(\vec{r}) E_3 \quad \text{Para: } i = 1, 2, 3 \text{ (3 direcciones espaciales)}$$

Para el caso de un medio no lineal la relación entre \vec{P} y \vec{E} es una función no lineal, por ejemplo: $\vec{P} = \alpha \vec{E} + \beta ||\vec{E}||^2 \vec{E}$ (α y β constantes).

Sustituyendo la expresión de \vec{P} en la definición del vector desplazamiento, queda:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \equiv \epsilon_0 (I + \chi_e) \vec{E} \quad (3.4)$$

Se define $\epsilon_r = I + \chi_e$ como la permitividad dieléctrica relativa del material dieléctrico y $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ como la constante dieléctrica del material, también llamada *permitividad dieléctrica* (recordemos que ϵ_0 es la permitividad del espacio vacío definida anteriormente). Con ello:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

En el caso general χ_e es una matriz que considera todas las posibles variaciones de la polarización con el campo aplicado. Así, la constante dieléctrica será variable al interior del material, siendo la expresión más general de estos cambios :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

En donde $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$

3.6.2. Clasificación de Materiales Dieléctricos

En base a la constante dieléctrica los materiales se clasifican en:

1. Material Lineal si: $||\vec{D}|| = \epsilon ||\vec{E}||$
2. Material Isótropo si: $\vec{D} = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}$
3. Material Homogéneo si: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ con ϵ constante.

A continuación se ilustran las distintas posibilidades para un material específico:

(A) Material lineal - isótropo - homogéneo:

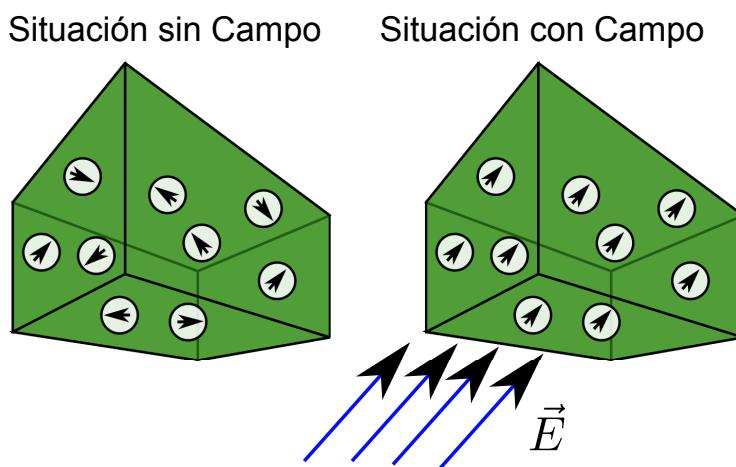


Figura 3.11: Material lineal - Isótropo - Homogéneo

Aquí se cumple que $||\vec{P}|| = \alpha ||\vec{E}||$. Además \vec{D} , \vec{P} y \vec{E} son paralelos y $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ con ϵ constante dieléctrica.

(B) Material lineal - isotropo y no homogéneo:

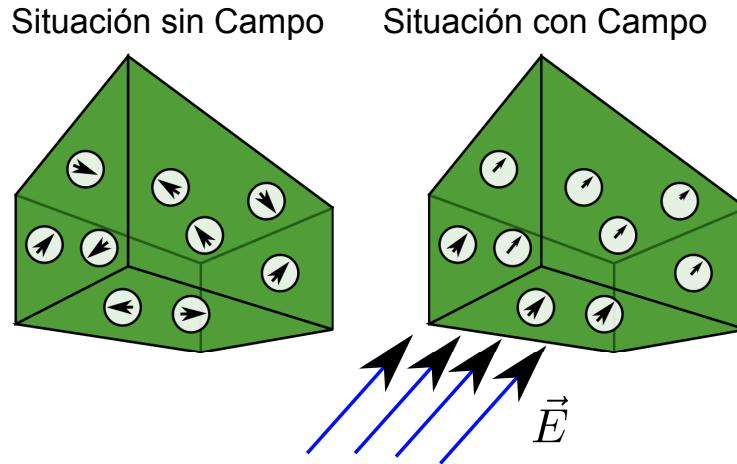


Figura 3.12: Material lineal - Isótropo - No Homogéneo

Aquí se cumple que $||\vec{P}|| = \alpha ||\vec{E}||$. Además \vec{D} , \vec{P} y \vec{E} son paralelos y $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ con $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$. Pero \vec{P} no es homogéneo y varía con la posición.

Por ejemplo, en la Figura 3.12 las flechas que representan el vector polarización son más cortas arriba que abajo (situación con campo aplicado).

(C) Material lineal, anisótropo (no isotropo) y no homogéneo:

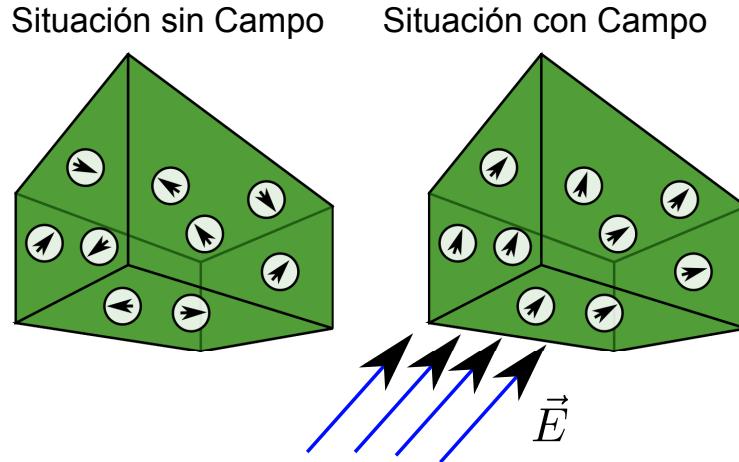


Figura 3.13: Material Lineal - Anisótropo - No Homogéneo

Aquí se cumple que $||\vec{P}|| = \alpha ||\vec{E}||$. Además \vec{D} , \vec{P} , \vec{E} no son paralelos y $\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}$ con $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$

(D) Material no lineal, anisótropo (no isotrópico) y no homogéneo:

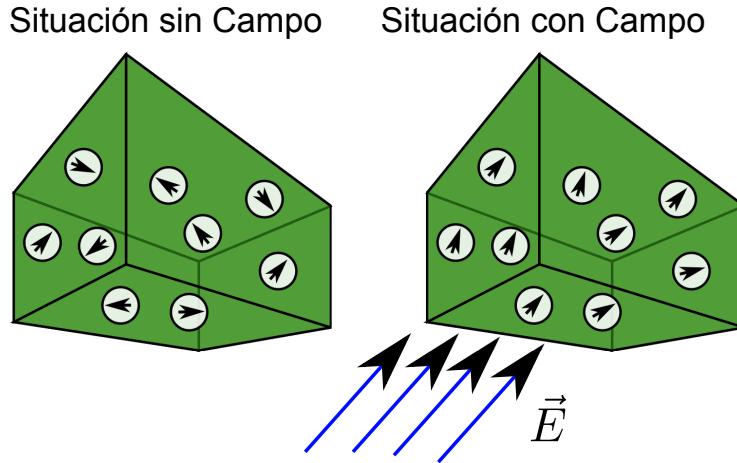


Figura 3.14: Material No Lineal - Anisótropo - No Homogéneo

Aquí $\|\vec{P}\| = f(\|\vec{E}\|)$, donde f es una función no lineal ($\|\vec{P}\| \neq \alpha\|\vec{E}\|$). Además \vec{D} , \vec{P} , \vec{E} no son paralelos y $\vec{D} = [\varepsilon_{ij}] \vec{E}$ con $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\vec{r})$.

3.6.3. Ecuación de Laplace en Medios Materiales

Si tenemos un medio dieléctrico cualquiera en el que no hay densidad de carga libre, se cumple:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

En el caso general de un medio material cualquiera se cumple:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 I \vec{E} + \varepsilon_0 [\chi] \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 (I + [\chi]) \vec{E}$$

Donde I es la matriz identidad de 3×3 . Esto último relaciona \vec{D} y \vec{E} en general a través de una matriz:

$$\vec{D} = [\varepsilon(\vec{r})] \vec{E}$$

Donde $[\varepsilon(\vec{r})] = I + [\chi]$. Esta ecuación cumple con la primera ecuación de Maxwell: $\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot ([\varepsilon(\vec{r})] \vec{E}) = 0$

Por otra parte, sabemos que el campo electrostático es conservativo, es decir, se cumple:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Por lo que el campo eléctrico se deriva de una función potencial de la forma:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Reemplazando en la expresión de la divergencia del vector desplazamiento tenemos:

$$\nabla \cdot ([\varepsilon(\vec{r})] \nabla V(\vec{r})) = 0$$

Si el material es *no homogéneo*, es decir $[\varepsilon(\vec{r})] = \varepsilon(\vec{r})$ depende de la posición, la divergencia se debe aplicar sobre un producto de funciones. Por ello, en este caso, a pesar de que no hay densidad de carga libre, no se cumple la ecuación de Laplace. Es decir, en presencia de medios materiales no homogéneos (diferentes constantes dieléctricas), no se cumple la ecuación de Laplace.

Cuando el material es homogéneo ε es constante respecto de la posición y puede salir fuera de la divergencia. Con ello se obtiene:

$$\varepsilon \nabla \cdot (\nabla V(\vec{r})) = 0$$

Por ello en los medios dielectricos homogéneos se cumple la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

3.7. Ruptura Dieléctrica

Cuando el campo eléctrico es lo suficientemente fuerte, es posible arrancar los electrones de las moléculas y el material deja de comportarse como aislante, esto se conoce como *ruptura dieléctrica*. Experimentalmente se puede encontrar la ruptura dieléctrica de cualquier material o incluso de gases como el aire. El mínimo valor del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura se denomina “fuerza dieléctrica” y es un parámetro de gran importancia en ingeniería.

Cuadro 3.1: Valores de Permitividad Dieléctrica y Fuerza Dieléctrica de Materiales

Material	Constante Dieléctrica ε_r	Fuerza Dieléctrica E
Titanato de Bario	1200	7.5×10^6
Agua (mar)	80	
Agua Destilada	81	
Nylon	8	
Papel	7	12×10^6
Vidrio	5 - 10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelana	6	
Bakelita	5	20×10^6
Cuarzo (fusionado)	5	30×10^6
Goma (dura)	3.1	25×10^6
Madera	2.5 - 8	
Polyestyreno	2.55	
Polypropyleneo	2.25	
Parafina	2.2	30×10^6
Petróleo	2.1	12×10^6
Aire (a 1 [atm])	1	3×10^6

Estos valores pueden variar en otras tablas, ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la permitividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.

Un bello ejemplo de ruptura dieléctrica se encuentra en los rayos, los cuales se producen por la aparición de campos eléctricos de gran intensidad capaces de sobrepasar la fuerza dieléctrica del aire.

3.8. Condiciones de Borde

Hasta el momento hemos considerado el fenómeno electrostático en el vacío y en medios materiales en forma aislada. En la práctica existirán campos en dos o más medios materiales en contacto entre sí. Llamaremos condiciones de borde a las condiciones que deben satisfacer los campos en las superficies de separación de los medios.

Consideremos dos medios dieléctricos tal como se muestra en la Figura 3.15, en los cuales se tiene campos eléctricos \vec{E}_1 y \vec{E}_2 en la interfaz de cada uno de los medios. Supongamos que descomponemos cada uno de los campos en sus componentes tangencial y normal a la superficie de interfaz según se muestra en la Figura 3.15.

Las componentes de cada vector son:

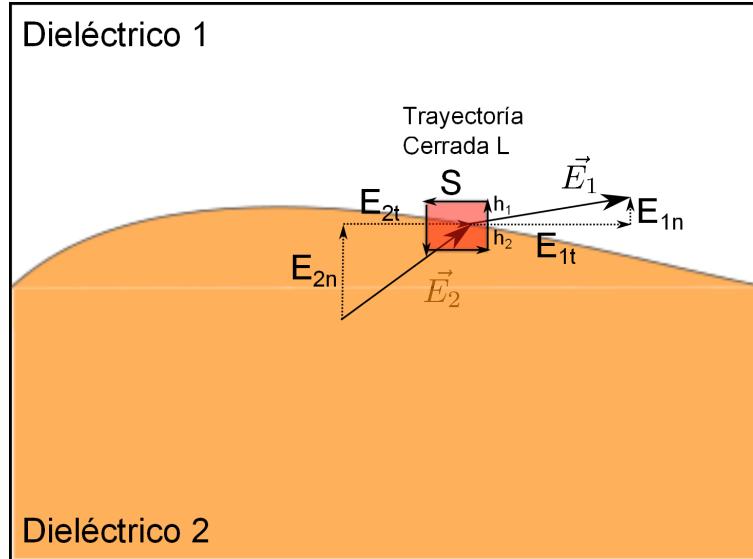


Figura 3.15: Condiciones de Borde \vec{E}

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{1n}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n}$$

Usaremos las ecuaciones: $\nabla \times \vec{E} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell$ para deducir las condiciones de borde.

I. Condiciones sobre el Campo Eléctrico: Para la trayectoria infinitesimal l (que rodea la superficie S) se cumple que:

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$-E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

Nos interesa lo que ocurre en la interfaz, por ello $h_1 \rightarrow 0$ y $h_2 \rightarrow 0$. Con ello

$$-E_{1t}d + E_{2t}d = 0 \Rightarrow \therefore E_{1t} = E_{2t}$$

Las componentes tangenciales del campo a ambos lados son idénticas. En términos del vector desplazamiento

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

La componente tangencial del vector D es discontinua.

II. Condiciones sobre el Vector Desplazamiento: Consideremos la interfaz de dos medios como en la Figura 3.16, en la cual existe una densidad de carga σ_ℓ en la interfaz.

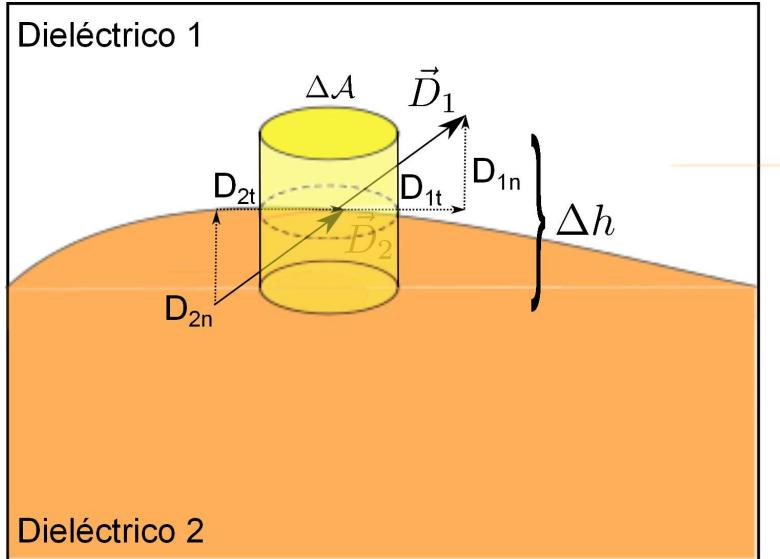


Figura 3.16: Condiciones de Borde \vec{D}

Aplicando ley de Gauss en la superficie cilíndrica:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} \quad \text{con } Q_{\text{libre}} = \sigma_\ell \Delta A$$

En donde σ_ℓ es la carga libre existente (puesta deliberadamente) en la interfaz (no es de polarización).

Luego:

$$D_{1n}\Delta A - D_{2n}\Delta A + \iint_{\text{Manto}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sigma_\ell \Delta A$$

Si $\Delta h \rightarrow 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Manto}} \vec{D} \cdot d\vec{s} &= 0 \\ D_{1n} - D_{2n} &= \sigma_\ell \end{aligned} \tag{3.5}$$

Es decir, el vector \vec{D} sufre la discontinuidad de la carga superficial para su componente normal. Si no hay carga libre $\sigma_\ell = 0$ y:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

Para el campo eléctrico se tiene:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Las ecuaciones de esta sección son las condiciones de borde que deben cumplir \vec{E} y \vec{D} cuando se pasa de un medio material a otro distinto. Generalmente estas condiciones se aplican cuando conocemos los campos en un medio y deseamos saber qué ocurre con ellos al otro lado de la superficie de contacto con otro medio.

Es importante seguir la convención de la dirección de los campos, que en esta deducción, se supone en el mismo sentido.

EJEMPLO 17:

Se tiene una densidad de carga superficial σ entre dos medios dieléctricos según se muestra en la Figura 3.17. Se pide calcular el campo eléctrico y el vector desplazamiento en todo el espacio.

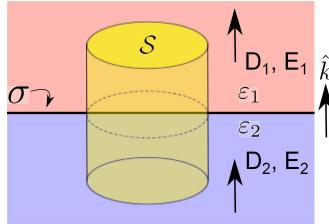


Figura 3.17: Carga Superficial entre Dieléctricos

Solución:

Las cargas libres están en el plano. Para las cargas de polarización, dado que los medios son homogéneos, no hay densidad de carga en volumen y sólo habrá densidad de carga superficial de polarización, la que también se distribuirá en planos paralelos al de la carga libre (caras de ambos dieléctricos en contacto con σ). Por lo tanto, por simetría, todos los campos tienen la dirección \hat{k} y $-\hat{k}$ (sólo intervienen planos de carga).

Las cargas superficiales de polarización en ambos dieléctricos estarán dadas por $\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot (-\hat{k})$ y $\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{k}$ donde se cumple

$$\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2$$

Además $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$ y $\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$

$$\epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1 \quad \epsilon_2 \vec{E}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2$$

$$\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 \quad \vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2$$

Así el problema se puede representar por 3 densidades de carga superficial, según se muestra en la siguiente figura:

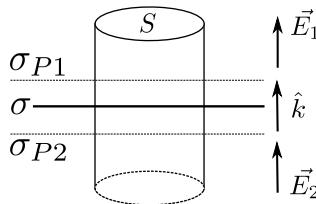


Figura 3.18: Carga Libre y de Polarización

Claramente, por superposición (o aplicando la Ley de Gauss en S):

$$\vec{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) \hat{k} \quad y \quad \vec{E}_2 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) (-\hat{k})$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) \hat{k} \quad y \quad \vec{D}_2 = \epsilon_2 \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) (-\hat{k})$$

Por las condiciones de borde - si consideramos que los campos tienen sentidos contrarios - se tiene que:

$$D_{1n} + D_{2n} = \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_0}(\sigma + \sigma_{P1} + \sigma_{P2}) \Rightarrow 2\varepsilon_0\sigma = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\sigma + \sigma_{P1} + \sigma_{P2})$$

De las fórmulas de densidad de carga de polarización tenemos: $\sigma_{P1} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E}_1 \cdot (-\hat{k}) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)E_1$
Y reemplazando la expresión del campo:

$$\Rightarrow \sigma_{P1} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_0}(\sigma + \sigma_{P1} + \sigma_{P2})$$

Dividiendo $2\varepsilon_0\sigma/\sigma_{P1}$ tenemos:

$$\frac{2\varepsilon_0\sigma}{\sigma_{P1}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_0}} \Rightarrow \sigma_{P1} = \sigma \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Notar que $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, luego σ_{P1} es negativo.

Análogamente para $2\varepsilon_0\sigma/\sigma_{P2}$ se obtiene:

$$\sigma_{P2} = \sigma \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Y dado que $\varepsilon_2 \geq 0$, σ_{P2} también será negativo, luego:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] \hat{k}$$

Se concluye que:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k} \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k} \quad y \quad \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k} \Rightarrow \vec{D}_2 = -\frac{\varepsilon_2 \sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k}$$

Notar que la componente normal del vector desplazamiento debe cumplir

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{k} = \sigma$$

Habíamos dicho que la carga neta al interior de un dieléctrico es nula. ¿Qué ocurre en este caso?

Hint: Como es cero la carga neta, lo interesante es darse cuenta dónde entran las otras densidades que anulan a σ_{P1} y σ_{P2} respectivamente.

Caso particular sin medios:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \Rightarrow \sigma_{P1} = \sigma_{P2} = 0$$

Y:

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k}$$

Que es la expresión del campo de un plano infinito de carga.

3.9. Refracción del Campo Eléctrico

Consideremos dos medios distintos en los cuales se tienen campos eléctricos y de desplazamiento en ausencia de cargas libres en la interfaz. Sean \vec{E}_1 , \vec{D}_1 y \vec{E}_2 , \vec{D}_2 los vectores de campo eléctrico y de desplazamiento en estos dos medios contiguos tal como se muestra en la Figura 3.19.

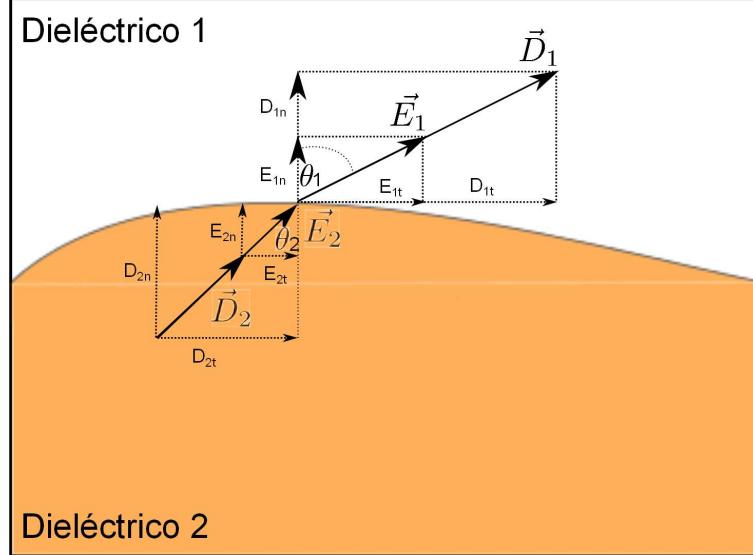


Figura 3.19: Refracción Campo Eléctrico

Aplicando las condiciones de borde para el campo eléctrico se tiene:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin(\theta_1) = E_2 \sin(\theta_2) \quad (3.6)$$

Las del vector desplazamiento (sin carga superficial entre los medios) son:

$$\begin{aligned} \sigma_\ell = 0 &\Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \\ \varepsilon_1 E_1 \cos(\theta_1) &= \varepsilon_2 E_2 \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dividiendo (3.5)/(3.6):

$$\frac{\tan(\theta_1)}{\varepsilon_1} = \frac{\tan(\theta_2)}{\varepsilon_2}$$

Esta es la ley de refracción del campo eléctrico en ausencia de carga libre, la que también se puede escribir como:

$$\frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

3.10. Consideraciones sobre Simetría

Hasta aquí hemos usado extensivamente la noción de simetría para calcular campos. Esta noción esta basada fuertemente en despreciar efectos de borde de las configuraciones, esto es, suponer planos infinitos, cilindros infinitos, etc. Esta aproximación permite tener una primera visión de los fenómenos pero en la práctica, es necesario considerarlos y por ello es frecuente utilizar programas computacionales para resolver la ecuación de Laplace y la de Poisson.

Para ilustrar las limitaciones de efectuar simplificaciones en los cálculos consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO INTRIGANTE:

Considere tres materiales dieléctricos homogéneos formando la configuración de la Figura 3.20. Hay dos dieléctricos de constantes ϵ_1 y ϵ_2 , cada uno de los cuales corresponde a semiesferas de radio a . En el centro de la esfera se ubica una bola cargada con densidad de carga ρ_0 y radio δ . A partir de $r > a$ todo el espacio se llena con un tercer dieléctrico de constante ϵ_3 . Se piden los campos en todo el espacio.

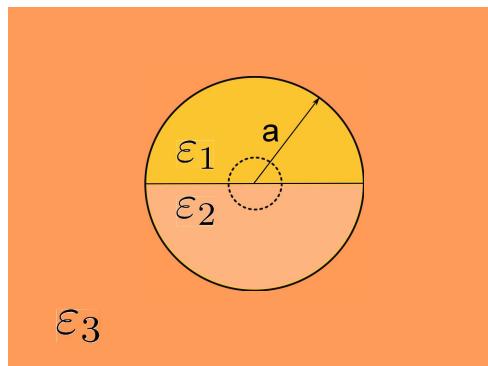


Figura 3.20: Simetría y Condiciones de Borde

Solución:

Si comenzamos a resolver desde el tercer dieléctrico tendremos el siguiente desarrollo:

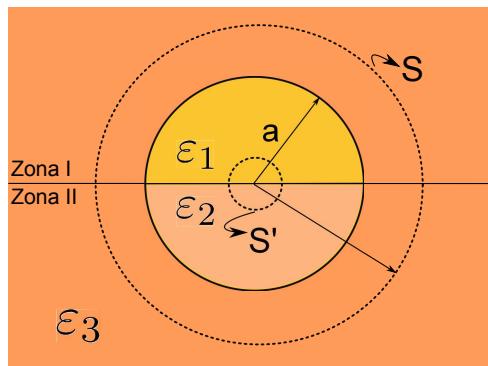


Figura 3.21: Simetría Esférica

Aplicando la ley de Gauss a \mathcal{S} :

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$$

$Q_{\text{libre}} = 4\pi\rho_0\delta^3/3$. Además D sólo depende de r , luego:

$$4\pi r^2 D(\vec{r}) = \frac{4}{3}\pi\rho_0\delta^3 \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{\rho_0\delta^3}{3r^2}\hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0\delta^3}{3\varepsilon_3 r^2}\hat{r}$$

Si ahora aplicamos condiciones de borde para D en $r = a$ se obtienen los vectores desplazamiento en los medios 1 y 2. Así:

$$\sigma_\ell = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_n \quad \text{y} \quad D_{2n} = D_n$$

Es decir, el vector desplazamiento tiene la misma expresión en los 3 medios.

Se obtiene entonces:

$$\vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{\rho_0\delta^3}{3r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{\rho_0\delta^3}{3\varepsilon_1 r^2}\hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{\rho_0\delta^3}{3r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{\rho_0\delta^3}{3\varepsilon_2 r^2}\hat{r}$$

Pero al aplicar la condición de continuidad para la componente tangencial del campo en la interfaz de ambos medios se debe cumplir $E_1 = E_2$ en $\delta < r < a$. Cuestión que claramente es contradictoria con las expresiones anteriores.

Si ahora partimos aplicando la ley de Gauss en S' (ubicada en r , tal que $\delta < r < a$) se tiene:

$$\iint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$$

Y suponiendo que los vectores desplazamiento son diferentes en cada medio se obtiene:

$$2\pi r^2 (\vec{D}_1(\vec{r}) + D_2(\vec{r})) = \frac{4}{3}\pi\rho_0\delta^3 \Rightarrow D_1(\vec{r}) + D_2(\vec{r}) = \frac{2}{3r^2}\rho_0\delta^3$$

La ecuación para los campos queda:

$$\varepsilon_1 E_1(\vec{r}) + \varepsilon_2 E_2(\vec{r}) = \frac{2}{3r^2}\rho_0\delta^3$$

Si aplicamos ahora continuidad de la componente tangencial del campo obtenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

Luego los vectores desplazamiento son:

$$\vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{2\varepsilon_1\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{2\varepsilon_2\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

Para obtener los campos en el medio 3 aplicamos continuidad del vector desplazamiento. Con ello obtenemos los siguientes dos valores diferentes para las zonas: I y II de la Figura 3.21.

Para la parte superior:

$$\vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{2\epsilon_1\rho_0\delta^3}{3(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}\hat{r}$$

Para la parte inferior:

$$\vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{2\epsilon_2\rho_0\delta^3}{3(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}\hat{r}$$

Lo que no hace sentido.

¿Cuál es el camino correcto?

La respuesta se encuentra en la validez de las suposiciones sobre la simetría del problema. En primer lugar observamos que las cargas de polarización se distribuyen según se muestra en la siguiente figura.

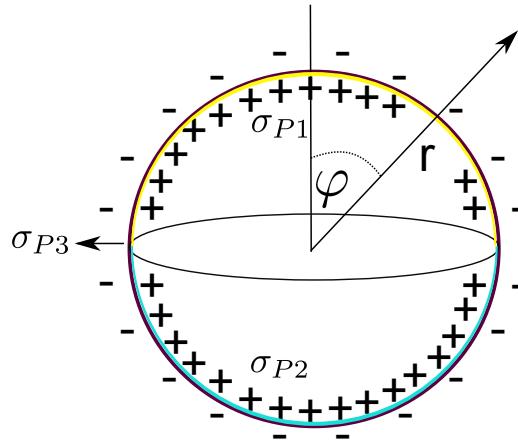


Figura 3.22: Densidades Superficiales de Carga de Polarización

Dado que los medios son diferentes, las densidades de carga también serán diferentes. Así $\sigma_{P1} \neq \sigma_{P2} \neq \sigma_{P3}$, y en consecuencia, el problema no tiene simetría esférica. Con ello $\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi)$ y no es posible usar la ley de Gauss tal como se mostró.

En el primer caso, al suponer simetría radial en el medio 3 suponemos despreciable el efecto deformador de los medios 1 y 2. Es decir, nos interesa obtener los campos para $r \gg a$ y despreciamos lo que ocurre para $r < a$. En el segundo caso, suponemos que los medios 1 y 2 son lo suficientemente grandes de modo que $\delta \ll a$. Con ello los campos tendrán simetría radial (sólo dependen de r) al interior de los medios, y no interesa mucho lo que ocurre para $r > a$.

3.11. Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

Considere un cilindro conductor infinito de radio a inmerso en cuatro medios diferentes según se muestra en la Figura 3.23. Si se carga el conductor con una densidad superficial de carga σ , se pide calcular:

1. El campo eléctrico en todo el espacio.
2. Las densidades de carga de polarización.
3. El vector desplazamiento \vec{D} en todo el espacio.

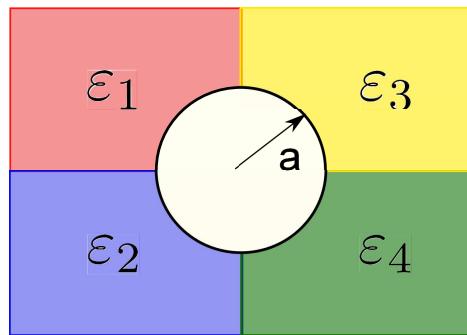


Figura 3.23: Problema 1

Solución:

Para realizar este ejercicio ocuparemos la ley de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico $\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre-encerrada}}$, además de la condición de borde $E_{1t} = E_{2t}$ y de la relación para medios isótropos.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

1. Suponemos que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

El campo en las intersecciones de los dieléctricos es tangencial para $r > a$

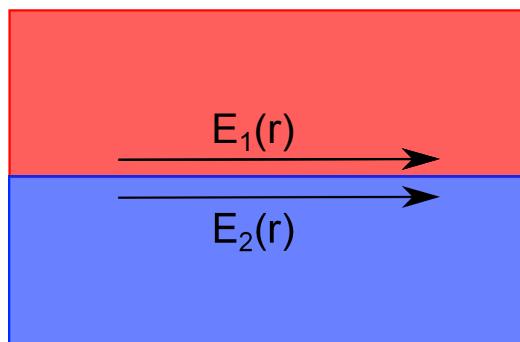


Figura 3.24: Problema 1 - Parte 1

Aplicando la condición de borde $E_{1t} = E_{2t}$ tenemos que $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \vec{E}_4 \equiv \vec{E}$ ya que la única componente del campo es la tangencial. Por lo tanto el campo eléctrico no depende del dieléctrico. Luego aplicamos la ley de Gauss. Para ello, ocupamos un cilindro Gaussiano concéntrico al cilindro conductor de largo unitario, pudiendo distinguir dos casos:

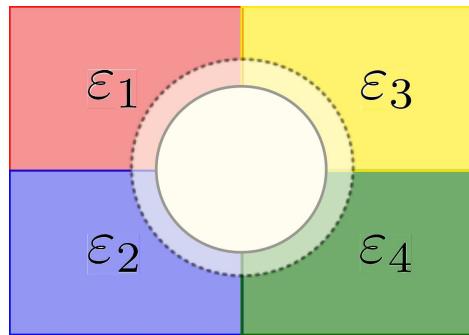


Figura 3.25: Problema 1 - Parte 1 (Análisis)

a) **Para $r < a$:**

En este caso, no hay carga libre encerrada, con ello tenemos que $\vec{E}(r < a) = 0$.

b) **Para $r > a$:**

Podemos ver que la ley de Gauss nos da:

$$D_1 \frac{\pi r}{2} + D_2 \frac{\pi r}{2} + D_3 \frac{\pi r}{2} + D_4 \frac{\pi r}{2} = 2\pi\sigma a$$

En esta ecuación ya está hecha la simplificación del largo del cilindro que correspondería en ambos lados de ésta.

Si $\vec{D}_i = \epsilon_i \vec{E}$, obtenemos que el campo fuera de la esfera es:

$$\vec{E} = \frac{4\sigma a}{r(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)} \hat{r}$$

2. De las dos relaciones dadas al comienzo, tenemos que el vector polarización:

$$\vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{4\sigma a(\epsilon_i - \epsilon_0)}{r(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)} \hat{r}$$

Sabemos que la densidad volumétrica de polarización es: $\rho_i = -\nabla \cdot \vec{P}$. Luego concluimos que para todo medio i , la densidad ρ_i es:

$$\rho_i = -\nabla \cdot \vec{P}_i = \frac{1}{r} \frac{\partial(rP)}{\partial r} = 0$$

Calculemos la densidad de carga superficial debido a la polarización en cada una de las zonas de borde. En la Figura 3.26, podemos ver las normales asociadas a cada superficie.

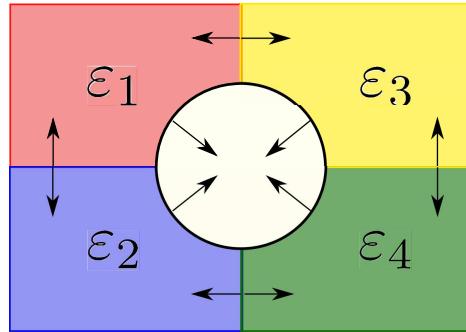


Figura 3.26: Problema 1 - Parte 2 (Análisis)

Luego, sólo existe carga de polarización $\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$ en la cara interior del círculo formado por los medios. En esta zona, tal como lo muestra el dibujo, el vector normal es $-\hat{r}$.

Entonces la carga de polarización de la superficie del cilindro depende de la zona de contacto. Para cada zona, su valor es:

$$\sigma_{Pi} = \vec{P}_i \cdot \hat{n} = -\vec{P}_1 \cdot \hat{r} = -\frac{4\sigma a(\varepsilon_i - \varepsilon_0)}{r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}$$

Notar que σ_{Pi} es de signo opuesto a σ . Además, sabemos que la carga neta de polarización es nula. Luego: ¿Dónde está la otra carga de polarización que logra esto? Evaluando en $r = a$:

$$\sigma_{Pi} = -\frac{4\sigma a(\varepsilon_i - \varepsilon_0)}{a(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} \Rightarrow \therefore \sigma_{Pi} = -\frac{4\sigma(\varepsilon_i - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}$$

3. Como ya usamos en la parte a, para un material isótropo se tiene que el desplazamiento se relaciona con el campo de forma que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. Luego, el vector desplazamiento para cada zona es:

a) **Para $r < a$:**

$$\vec{D}(r) = 0$$

b) **Para $r > a$:**

$$\vec{D}_i = \frac{4\sigma a \varepsilon_i}{r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} \hat{r}$$

PROBLEMA 2:

Un conductor longitudinal de largo L tiene una densidad de carga λ por unidad de longitud. Se sumerge en un medio dieléctrico de constante dieléctrica ε . Se pide encontrar el campo eléctrico a una distancia r del eje del cilíndro, con $r \ll L$.

Solución:

Para $r > a$:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}} = \lambda L$$

$$2\pi r L \vec{D} = \lambda L \Rightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r} \Rightarrow \therefore \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r} \hat{r}$$

¿Cómo cambia el resultado para los casos en que $r \approx L$ y $r \gg L$?

PROBLEMA 3:

Considere dos placas planas de vidrio ($\epsilon_r = 8,5$) puestas verticalmente, las cuales se encuentran separadas por un hueco de aire y rodeadas de aceite ($\epsilon_r = 3,0$), tal como lo ilustra la Figura 3.27. Un campo eléctrico uniforme de $2000[V/m]$ existe en el aceite. Se pide calcular el campo eléctrico en el vidrio y en el hueco de aire cuando el campo en el aceite:

1. Es normal a la lámina de vidrio.
2. Forma un ángulo de 75^0 con ésta.



Figura 3.27: Problema 3

Indicación: Considere que los campos sólo tienen componentes en el plano de esta página (no tres dimensiones).

Para todos los problemas haga todo supuesto que usted considere justificadamente necesarios para resolverlos (incluida la posible necesidad de datos adicionales).

Solución:

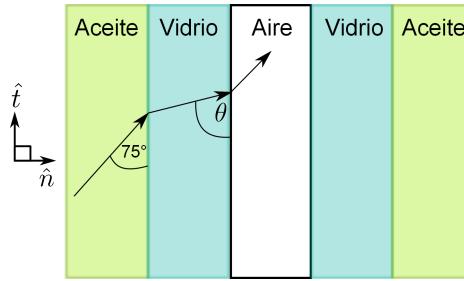


Figura 3.28: Problema 3 - Análisis

1. Se tienen las siguientes condiciones de borde:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Donde σ es la carga libre en la interfaz, supondremos que no hay carga libre en ninguna interfaz, es decir, suponemos $\sigma = 0$.

Como el campo en el aceite es normal a la superficie:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0$$

Dado que el campo en el aceite es normal a la superficie, se tiene que:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2 = \sigma \hat{n}$$

Donde los subíndices son 1 para aceite y 2 para vidrio.

$$\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\epsilon_1 \vec{E}_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 \vec{E}_1}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} = \frac{\epsilon_{r1} \vec{E}_1}{\epsilon_{r2}} = \frac{3 \cdot 2000}{8,5} = 705,882 \left[\frac{V}{m} \right]$$

Luego el campo para el primer vidrio es:

$$\vec{E}_{2n} = \vec{E}_2 = 705,882 \left[\frac{V}{m} \right] \hat{n}$$

Entre vidrio (subíndice 2) y el aire, que le asignaremos como referencia el 0, aplicamos condiciones de borde de forma análoga a la anterior.

$$\epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_2 \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{\epsilon_2 \vec{E}_2}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_0 \vec{E}_2}{\epsilon_0} = \epsilon_{r2} \vec{E}_2 = 6000 \left[\frac{V}{m} \right] \hat{n}$$

Luego el campo en el aire será:

$$\vec{E}_{0n} = \vec{E}_0 = 6000 \left[\frac{V}{m} \right] \hat{n}$$

Para la próxima placa de vidrio el campo valdrá lo mismo que en la primera, etc.

2. El campo eléctrico del aceite forma un ángulo de 75^0 con la lámina de vidrio.

Aplicando condiciones de borde:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \cos(75^0) = E_2 \cos(\theta) \quad (3.8)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \sin(75^0) = \varepsilon_2 E_2 \sin(\theta) \quad (3.9)$$

Multiplicando (3.7) por ε_2 y sumando el cuadrado de ambas condiciones para eliminar el ángulo θ tenemos:

$$\begin{aligned} E_1^2 (\varepsilon_2^2 \cos^2(75^0) + \varepsilon_1^2 \sin^2(75^0)) &= \varepsilon_2^2 E_2^2 \\ E_1^2 (\varepsilon_{r2}^2 \varepsilon_0^2 \cos^2(75^0) + \varepsilon_{r1}^2 \varepsilon_0^2 \sin^2(75^0)) &= \varepsilon_{r2}^2 \varepsilon_0^2 E_2^2 \\ E_1^2 (\varepsilon_{r2}^2 \cos^2(75^0) + \varepsilon_{r1}^2 \sin^2(75^0)) &= \varepsilon_{r2}^2 E_2^2 \\ \therefore E_2^2 &= \frac{E_1^2 (\varepsilon_{r2}^2 \cos^2(75^0) + \varepsilon_{r1}^2 \sin^2(75^0))}{\varepsilon_{r2}^2} \end{aligned}$$

Considerando $E_1 = 2000 \left[\frac{V}{m} \right]$

$$\Rightarrow E_2^2 = 732838,7236 \Rightarrow E_2 = 856,96 \left[\frac{V}{m} \right]$$

E_2 en (3.7):

$$\cos(\theta) = \frac{E_1 \cos(75^0)}{E_2} = \frac{2000 \cdot 0,258}{856,06} = 0,605 \Rightarrow \theta = 32,79^0$$

En consecuencia:

$$\vec{E}_2 = E_2 \cos(\theta) \hat{t} + E_2 \sin(\theta) \hat{n} \Rightarrow \therefore \vec{E}_2 \approx 517,92 \hat{t} + 681,83 \hat{n} \left[\frac{V}{m} \right]$$

Para encontrar el campo en el aire, debemos nuevamente aplicar condiciones de borde:

$$\begin{aligned} E_{2t} = E_{0t} &\Rightarrow E_{0t} = 517,92 \left[\frac{V}{m} \right] \\ D_{2n} - D_{0n} = 0 &\Rightarrow \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_0 E_{0n} \Rightarrow E_{0n} = \frac{\varepsilon_{2r} \varepsilon_0 E_{2n}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{0n} = 5795,56 \left[\frac{V}{m} \right] \\ \Rightarrow \therefore \vec{E}_0 &= 517,92 \hat{t} + 5795,56 \hat{n} \left[\frac{V}{m} \right] \end{aligned}$$

3.12. Problemas Propuestos

PROBLEMA 1:

Dos cilindros concéntricos de radios a y b respectivamente y largo L se encuentran ubicados tal como lo indica la Figura 3.29. El espacio entre ambos se encuentra lleno de un material con permitividad ϵ . El vector polarización entre ambos medios está dado por: $\vec{P} = r^2\hat{r} + \sin(\theta)\hat{\theta}$

Dado lo anterior:

1. Calcular las densidades superficiales de carga de polarización
2. Calcular la densidad volumétrica de carga de polarización
3. Plantear una expresión para el vector campo eléctrico en todo el espacio.

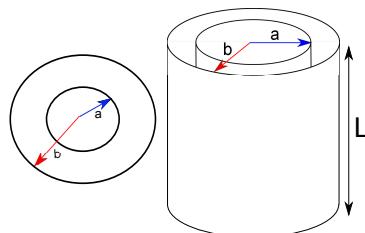


Figura 3.29: Problema 1 - Propuesto

PROBLEMA 2:

Una densidad de carga esférica ($0 < r < a$) se encuentra rodeada de un material dieléctrico con geometría esférica hasta una distancia radial b , según se muestra en la Figura 3.30

El medio material se compone de moléculas, cada una de las cuales posee un momento dipolar eléctrico de $5 \times 10^{-20} [cm]$ orientado radialmente (según \hat{r}). La densidad de carga produce una modificación en las moléculas, las cuales presentan la siguiente densidad volumétrica $m(\vec{r}) = kr^2 [moléculas/m^3]$. Se pide:

1. Determinar el vector polarización del medio material.
2. Calcular los campos \vec{D} y \vec{E} en todo el espacio.
3. Determinar la diferencia de potencial entre los casquitos definidos por radios a y b .

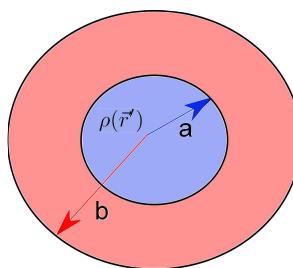


Figura 3.30: Problema 2 - Propuesto

PROBLEMA 3:

Considere tres materiales dieléctricos homogéneos formando la configuración esférica de la Figura 3.31

En el centro de la esfera de radio a se ubica una carga q . Suponiendo simetría radial se pide calcular \vec{D} y \vec{E} para:

1. El caso $r \gg a$.

2. El caso $r \ll a$.

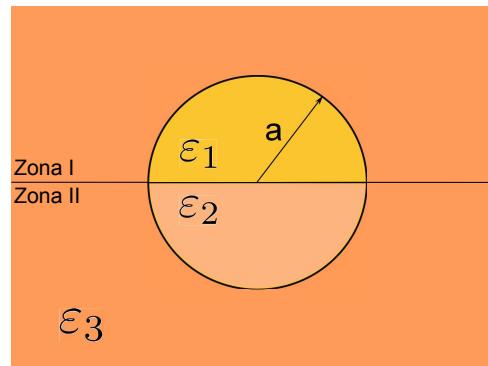


Figura 3.31: Problema 3 - Propuesto

Capítulo 4

Conductores en Electrostática

4.1. Modelo Básico de Conductores

Modelaremos un conductor ideal como un medio material en el cual existen abundantes cargas positivas y negativas, las cuales pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico y que la carga neta es nula. Así, al aplicar un campo eléctrico se genera una fuerza sobre las cargas, las que se moverán hasta alcanzar el estado de equilibrio. Este equilibrio implica que el campo eléctrico al interior del conductor debe ser nulo (de otro modo las cargas continuarían su movimiento) según se ilustra en la Figura 4.1.

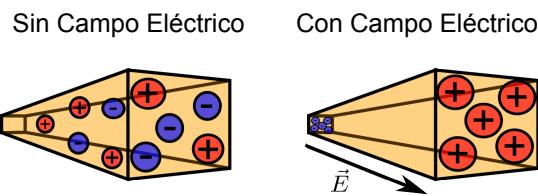


Figura 4.1: Conductor en Presencia de un Campo Eléctrico

Supondremos en principio que la cantidad de carga libre al interior del conductor es muy elevada (infinita). Por lo tanto siempre el conductor puede disponer de carga negativa y positiva para localizarla, de modo que se alcance el estado en que el campo interior sea nulo en la condición estacionaria. En este capítulo solo estudiaremos la condición de equilibrio y dejaremos el fenómeno de la conducción para más adelante.

4.2. Propiedades

De la definición anterior se sigue que un conductor cumple con las siguientes propiedades:

1. La carga sólo se redistribuye en la superficie, ya que si \vec{E} es nulo en el interior $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_\ell = 0$, o sea, no existe densidad volumétrica de carga.
2. Toda la superficie del conductor es una superficie equipotencial. En efecto, dado que $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ y dado que \vec{E} es nulo al interior del material conductor, entonces $\Delta V = 0$ entre cualquier par de puntos del conductor, es decir, todo el conductor está a un mismo potencial.
3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor y vale $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$, donde σ es la densidad superficial de carga del conductor.

En efecto, consideremos el conductor de la Figura 4.2.

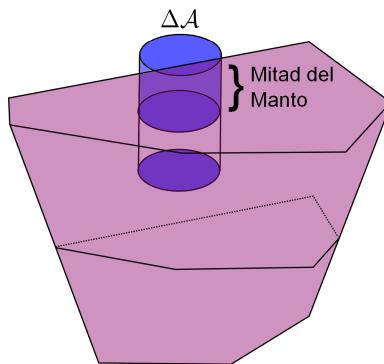


Figura 4.2: Densidad de Carga en Conductores

Aplicando la ley de Gauss al cilindro infinitesimal de la Figura 4.2 se tiene:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

Dado que sólo hay campo afuera $\Rightarrow D_{\text{interior}} = 0$

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Mitad Manto}} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Tapa Exterior}} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Haciendo tender $h \rightarrow 0$ la contribución de la mitad del manto se hace despreciable, con ello:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_n \Delta s \Rightarrow D_n \Delta s = \sigma \Delta s$$

Pero:

$$D_n = \epsilon E_n \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{n}$$

Para el aire $\epsilon = \epsilon_0$, luego:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Lo que concuerda con la intuición física, ya que si hubiera campo en el sentido tangencial en la superficie del conductor habría movimiento de cargas, el que se mantendría hasta alcanzar un nuevo punto de equilibrio con campo tangencial nulo.

4.3. Caso Conductor con Oquedad

En esta sección probaremos que toda carga libre sólo existe en la superficie exterior de un conductor. Consideremos el caso en que se tiene un conductor con una oquedad y se le inyecta una carga libre Q , la cual puede desplazarse libremente en el conductor, tal como se muestra en la Figura 4.3.

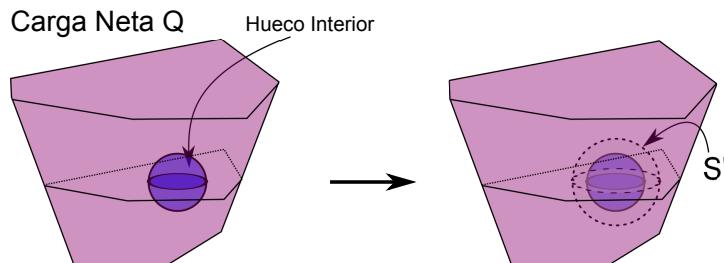


Figura 4.3: Densidad de Carga en Conductor Hueco

Si tomamos una superficie S' que contenga al hueco, por la ley de Gauss se debe cumplir:

$$\iint_{S'} \vec{D}_{\text{int}} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

Pero por el equilibrio electrostático $\vec{D}_{\text{int}} = 0$

$\Rightarrow Q_{\text{total}}$ la carga total encerrada por la superficie S' es nula. Ahora bien, la carga encerrada por la superficie S' puede deberse a una carga superficial en la superficie interior del hueco, o bien a una carga en volumen. Pero ya hemos visto por la propiedad 1 que un conductor no puede tener densidad de carga en volumen. Luego, la carga en la superficie interior del conductor es nula, de modo que se cumple $Q_{\text{total}} = 0$.

En consecuencia, solo podrá distribuirse la carga libre Q en la superficie exterior, lo que hará de forma que se produzca un campo nulo al interior.

Un caso interesante se produce cuando se introduce una carga puntual Q en el hueco interior de un conductor sin carga, según se muestra en la Figura 4.4.

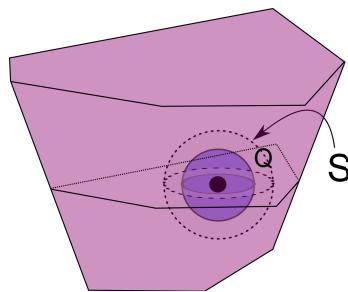


Figura 4.4: Carga en Oquedad

En este caso, al aplicar la ley de Gauss a \mathcal{S} sigue cumpliéndose que la carga encerrada por la superficie \mathcal{S} es nula. Por lo tanto, concluimos que debe aparecer una densidad de carga σ' en la superficie interior de la oquedad de modo de lograr que la carga neta sea nula, es decir:

$$\iint_{\mathcal{S}'} \sigma' dS + Q = 0$$

Ahora bien, como la carga neta de todo el conductor debe seguir siendo nula (estaba descargado originalmente), aparecerá también una densidad de carga σ en la superficie exterior del conductor de modo que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \sigma dS = Q$$

La situación de equilibrio se muestra en la Figura 4.5.

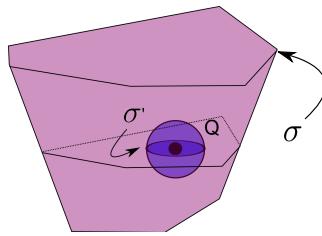


Figura 4.5: Situación de Equilibrio

Aquí σ y σ' se distribuyen de forma que el campo al interior del conductor es cero.

EJEMPLO 18:

Consideremos dos placas conductoras cargadas con cargas Q y $-Q$ respectivamente. Entre las placas existe un material dieléctrico de constante dieléctrica ε . Suponiendo que desprecian los efectos de los extremos de las placas (o sea placas ∞) se pide:

1. Distribución de las cargas en las placas.
2. Campos en todo el espacio.
3. Diferencia de potencial entre las placas.

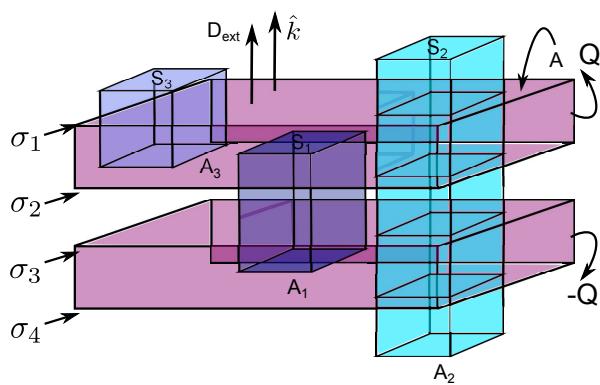


Figura 4.6: Condensador de Placas Planas

Solución:

1. Llamemos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4 a las densidades de carga superficial en cada una de las caras de las placas. Se cumple:

$$Q = \sigma_1 A + \sigma_2 A \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \quad (4.1)$$

Donde $\sigma = Q/A$

Análogamente se obtiene:

$$\sigma_3 + \sigma_4 = -\sigma \quad (4.2)$$

Por simetría los campos sólo tienen componente según \hat{k} (sólo habrá cargas en planos).

Consideremos el volumen contenido por la superficie S_1 , el cual es un paralelepípedo cuyas caras horizontales están contenidas en ambos conductores. Allí se cumple:

$$\iint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Tapa Abajo}} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Manto}} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Tapa Arriba}} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Pero en la tapa de abajo y en la de arriba \vec{D} es nulo, y en el manto \vec{D} es ortogonal a $d\vec{s}$, luego:

$$\iint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Por otra parte: $Q_{\text{total}} = \Delta A \sigma_2 + \Delta A \sigma_3$

Luego por la ley de Gauss $\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$, es decir, se cumple:

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (4.3)$$

En el espacio exterior a las placas el campo es constante (se debe sólo a distribuciones de carga superficial constante) y tiene la dirección del vector \hat{k} unitario. Llámémoslo D_{ext} .

Consideremos ahora el volumen limitado por la superficie S_2 , la cual define un paralelepípedo que traspasa ambas placas. Se cumple:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2D_{ext} \Delta A_2 \Rightarrow Q_{\text{total}} = \sigma_1 \Delta A_2 + \sigma_2 \Delta A_2 + \sigma_3 \Delta A_2 + \sigma_4 \Delta A_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \Delta A_2 = 0$$

$$\Rightarrow \therefore D_{ext} = 0$$

Es decir, no hay campo exterior a las placas.

Para la superficie S_3 , la cual define un cubo cuya cara inferior está contenida en el conductor, y la superior fuera de él, se cumple:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_{\text{int}} \Delta A_3 + D_{\text{ext}} \Delta A_3 = 0$$

Y

$$Q_{\text{total}} = \sigma_1 \Delta A_3 \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

Así, de (4.1) $\sigma_2 = \sigma$, de (4.2) $\sigma_4 = 0$ y de (4.3) $\sigma_3 = -\sigma$. La distribución de carga se muestra en la Figura 4.7.

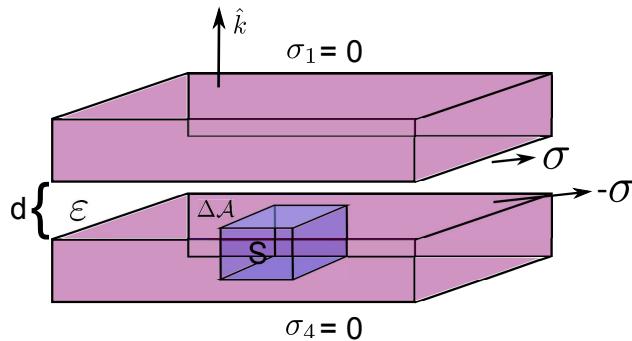


Figura 4.7: Distribución de cargas en conductores de placas planas

2. Nos falta calcular el campo entre las placas. Tomando la superficie Gaussiana S , cuya cara inferior esta contenida en el conductor y la superior en el dieléctrico, se tiene:

Suponiendo $\vec{D}_{\text{int}} = -D\hat{k}$:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = -D \Delta A$$

$$Q_{\text{total}} = -\sigma \Delta A$$

$$-D = -\sigma \Rightarrow \vec{D}_{\text{int}} = -\sigma \hat{k}$$

El campo eléctrico al interior del dieléctrico es $\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \hat{k}$

3. Diferencia de potencial

$$\Delta V = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_\sigma - V_{-\sigma} = - \int_0^d \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l} = - \int_0^d \left(-\frac{\sigma}{\epsilon} \right) \hat{k} \cdot dz \hat{k} = \frac{\sigma}{\epsilon} z|_0^d \Rightarrow \therefore \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon} d$$

Así, si $\sigma, \epsilon, d > 0 \Rightarrow V_\sigma - V_{-\sigma} > 0$

Es importante notar que si el dato hubiera sido la diferencia de potencial $\Delta V = -\frac{\sigma}{\epsilon} d$, los resultados serian idénticos (¡Probarlo!).

Nota: Para fijar conceptos acerca de la dirección del campo eléctrico en presencia de diferencias de potencial, consideremos el siguiente ejemplo de la Figura 4.8.

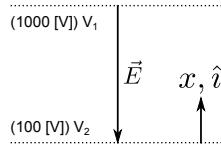


Figura 4.8: Dirección Campo Eléctrico

Dado $\vec{E} = -\nabla V$, para una variable tenemos $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}$. Luego si sabemos el voltaje entre dos puntos, para pequeños incrementos podemos aproximar:

$$\vec{E} = -\frac{\Delta V}{\Delta x}\hat{i} \Rightarrow \Delta x \vec{E} = -\Delta V \hat{i} \Rightarrow (x_2 - x_1)\vec{E} = -(V_2 - V_1)\hat{i}$$

Si $V_2 > V_1 \Rightarrow \vec{E} = E\hat{i}$, y si $V_2 < V_1 \Rightarrow \vec{E} = E(-\hat{i})$ o sea el campo tiene la dirección desde el potencial mayor al menor.

En general, cuando calculamos el potencial entre dos puntos cualquiera tenemos:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 \nabla V \cdot d\vec{l}$$

Considerando coordenadas cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Y

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Se tiene:

$$\nabla V \cdot d\vec{l} = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \triangleq dV$$

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 dV \Rightarrow V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

4.4. Condensadores

Un condensador es un sistema de dos conductores en donde la carga de uno de ellos es de igual magnitud pero de signo contrario al otro. Generalmente se dispone de un dieléctrico entre ambos conductores. Se define el parámetro capacidad de un condensador como:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

Donde Q es la carga positiva de uno de los conductores y ΔV la diferencia de potencial entre ellos ($V_Q - V_{-Q}$). Se cumple la propiedad de que la capacidad C es independiente de Q y ΔV y sólo depende de la geometría y las características dieléctricas de los materiales.

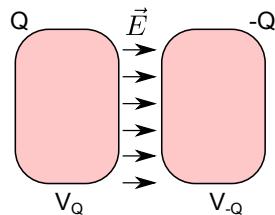


Figura 4.9: Condensador

$$\text{Si } V_Q > V_{-Q} \implies C = \frac{Q}{V_Q - V_{-Q}} > 0$$

En el sistema MKS, la unidad que mide la capacidad de un condensador es el Farad:

$$1[F] = 1 \text{ Farad} = 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}$$

EJEMPLO 19:

Calcule la capacidad del EJEMPLO 18

Solución:

Teníamos la configuración

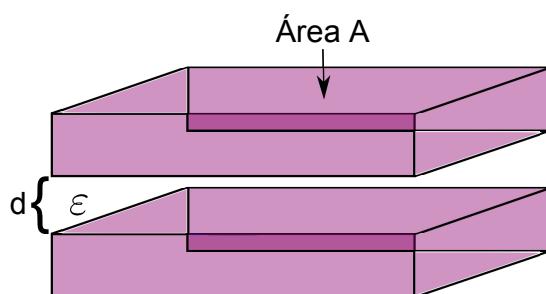


Figura 4.10: Condensador de Placas Planas

Se cumple:

$$Q = \sigma A \quad \text{y} \quad \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon} d$$

Luego:

$$C = \frac{\sigma A}{\sigma \frac{d}{\epsilon}} \Rightarrow C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Luego para este ejemplo la capacidad tiene las siguientes propiedades:

- Menos $d \Rightarrow$ mayor C
- Mayor $A \Rightarrow$ mayor C
- Mayor $\epsilon \Rightarrow$ mayor C
- Para un mismo ΔV , la carga acumulada es mayor mientras mayor es su capacidad.

EJEMPLO 20:

Calcule la capacidad del condensador de la Figura 4.11. Desprecie los efectos de borde, i.e., calcule campos considerando $a, b \ll L$.

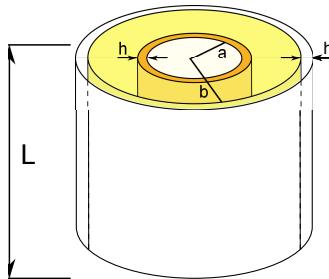


Figura 4.11: Condensador Cilíndrico

Solución:

Llamemos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4 a las densidades de carga superficial de cada cara, según se muestra en un corte transversal en la Figura 4.12.

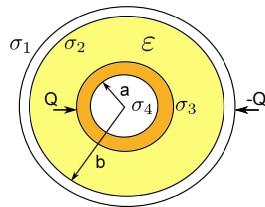


Figura 4.12: Distribución de Cargas de un Condensador Cilíndrico

Si distribuimos la carga de modo que $\sigma_3 + \sigma_4 = \sigma_a$ y $\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma_b$.

De acuerdo a las propiedades vistas en los conductores la carga se almacena en la superficie externa para el cilindro interior y en la superficie interna para la superficie exterior, es decir, $\sigma_4 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \sigma_a$ y $\sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_b$. Para que el condensador cumpla con la definición se debe tener:

$$Q = 2\pi a L \sigma_a = 2\pi b L \sigma_b \Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{b}{a}$$

Tomemos una superficie Gaussiana \mathcal{S} según se muestra en la Figura 4.13.

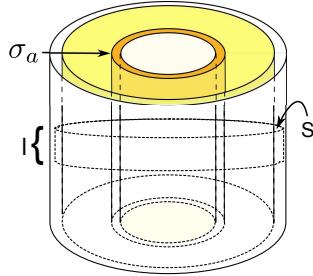


Figura 4.13: Simetría Axial Exterior

Aplicando la ley de Gauss a \mathcal{S} :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

El sistema está en equilibrio electrostático y posee simetría axial. Luego el campo D es nulo para $r > b$ (al interior del cilindro conductor externo) y al interior de los conductores. Por ello:

$$Q_{\text{total}} = \sigma_a \underbrace{\Delta S_a}_{2\pi a L} + \sigma_2 \underbrace{\Delta S_2}_{2\pi b L} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}} 0 \cdot d\vec{s}$$

$$Q_{\text{total}} = 0 \Rightarrow -2\pi\sigma_a aL = 2\pi\sigma_2 bL \Rightarrow \therefore \sigma_2 = -\sigma_a \frac{a}{b}$$

Consideremos ahora una superficie Gaussiana en $a < r < b$ como la mostrada en la Figura 4.14.

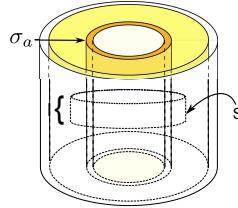


Figura 4.14: Simetría Axial Interior

Se cumple:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

$$Q_{\text{total}} = 2\pi a L \sigma_a$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\pi D r L$$

$$2\pi D r L = 2\pi a L \sigma_a \Rightarrow \vec{D} = \sigma_a \frac{a}{r} \hat{\rho} \Rightarrow \therefore \vec{E} = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon r} \hat{\rho}$$

La diferencia de potencial entre placas es:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Escogiendo $d\vec{l} = dr\hat{r}$:

$$\Delta V_{ba} = - \int_a^b \frac{\sigma_a a}{\varepsilon r} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = - \frac{\sigma_a a}{\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = - \frac{\sigma_a a}{\varepsilon} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (4.4)$$

Por definición $C = \frac{Q}{\Delta V}$, y en este caso:

$$\Delta V = V_{Q+} - V_{Q-} = V_a - V_b = -\Delta V_{ba} \quad (4.5)$$

$$\text{Y } Q = 2\pi\sigma_a a L \Rightarrow \sigma_a a = \frac{Q}{2\pi L}.$$

Ocupando (4.5) y reemplazando todo lo anterior en (4.4):

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \Rightarrow \therefore C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi L \varepsilon}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

Notar que nuevamente la capacidad C es proporcional a ε y el área, e inversamente proporcional a la separación entre las placas.

Se acostumbra a designar los condensadores por el símbolo

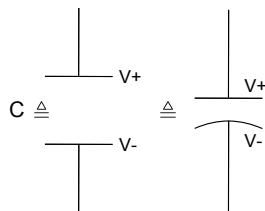


Figura 4.15: Símbolo de Condensador

4.5. Cargas en Medios Materiales

Resumiendo lo que hemos visto hasta aquí es lo siguiente:

- Dieléctricos:** Los medios se componen de dipolos que pueden girar en torno a su posición de equilibrio, pero no se desplazan.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \equiv \epsilon \vec{E}$$

- Conductores:**

Equilibrio electrostático. Al interior:

$$\vec{E} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla V = \text{constante}$$

Sólo tiene distribución superficial. La carga al interior es nula $\rho = 0$ y no hay polarización $\vec{P} = 0$.

En la práctica, los medios materiales podrán exhibir características tanto de dieléctricos como de conductores.

4.6. Método de las Imágenes

Se tiene la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

En el vacío no existen cargas, con lo cual se tiene la ecuación de Laplace: $\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$.

Como ya se ha visto, resulta de gran utilidad esta ecuación para determinar el campo eléctrico en una región. Para resolverla, sin embargo; y como en cualquier ecuación diferencial, se requieren condiciones de borde.

Considérese el siguiente sistema de conductores en equilibrio electrostático, en que sendas fuentes de voltaje fijan el potencial de cada uno a un valor establecido.

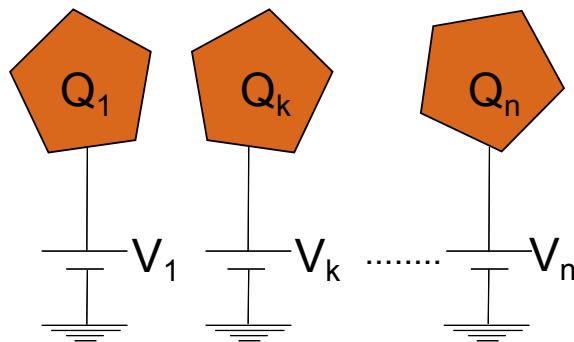


Figura 4.16: Sistema de Conductores en Equilibrio Electrostático

El método de imágenes resulta útil para resolver la ecuación de Laplace para encontrar el campo eléctrico entre estos conductores utilizando como condiciones de borde los potenciales de cada uno de éstos (V_k) y la relación $\lim_{\|\vec{r}\| \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = 0$. Se puede demostrar que la solución a este problema es única.

EJEMPLO 21:

Consideremos un plano infinito conectado a tierra y una carga puntual a una distancia d , como indica la Figura 4.17. Se pide calcular el potencial en el lado de la carga.

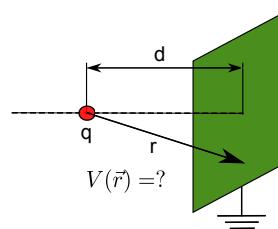


Figura 4.17: Ejemplo de Uso de Métodos de Imágenes

Solución:

Se quiere encontrar una función $\psi(\vec{r})$ que satisfaga $\nabla^2\psi(\vec{r}) = 0$ y la condición de borde $\psi(\vec{r}) = 0$ en el plano. Sabemos que el potencial que produce la carga en el plano es $\psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Luego, para satisfacer la condición de borde $\psi(\vec{r}) = 0$ en ese plano, podemos ubicar una carga de signo contrario a igual distancia del plano. En estas condiciones y tomando como referencia de coordenadas la proyección ortogonal de la carga en el plano, según la Figura 4.18, se tiene que el potencial es $\psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}$. Como las cargas, de signo opuesto, se ubican a igual distancia del plano, siempre se tendrá un triángulo isósceles en cada posición de éste, es decir, $r = r'$, con lo cual se cumple la condición de potencial nulo en el plano (condición de borde del problema).

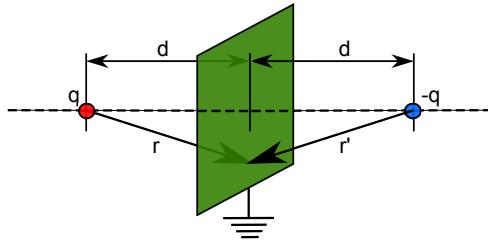


Figura 4.18: Carga Imagen frente a Plano

Con esto, puede ya tenerse una expresión para el potencial al lado izquierdo del plano. Notar que el lado derecho está intervenido por la carga $-q$, mientras que el lado izquierdo no ha sufrido alteración alguna con respecto a la situación original.

Tomemos ahora como referencia la posición de la carga q , según se muestra en la Figura 4.19. La expresión del potencial es:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

Con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $r' = \sqrt{x^2 + (y - 2d)^2 + z^2}$.

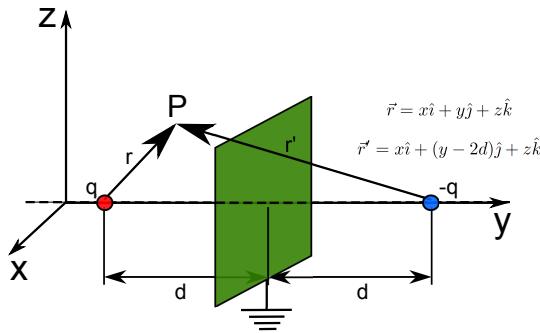


Figura 4.19: Descripción Espacial del EJEMPLO 21

A partir del potencial eléctrico obtenido, puede determinarse el campo eléctrico. Con éste procedimiento, pueden realizarse también otras deducciones, como la densidad superficial de carga en el plano, ejercicios ques se dejan propuestos al diligente lector.

4.7. Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

En la Figura 4.21 se muestra una distribución cilíndrica, la cual está formada por dos medios que poseen características dieléctricas y ohmicas. Se pide:

1. Suponiendo que los conductores están a una diferencia de potencial V_0 , calcular el vector densidad de corriente.
2. Calcule la capacidad C del sistema.
3. Calcule la resistencia R del sistema.

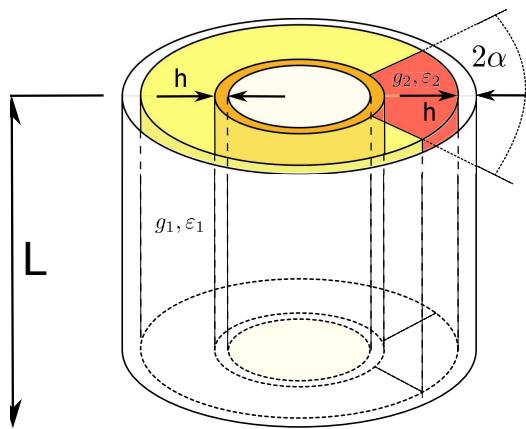


Figura 4.20: Problema 1

Solución:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_1 + Q_2$$

$$D_1(2\pi - 2\alpha)rL + 2D_2\alpha rL = Q_1 + Q_2$$

Donde Q_1 y Q_2 es la carga sobre el manto del cilindro con ángulo de $(2\pi - 2\alpha)$ y 2α respectivamente. El largo del cilindro es L .

Por condición de borde de la componente tangencial del campo:

$$E_1 = E_{1t} = E_{2t} = E_2 \Rightarrow \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2} \Rightarrow D_2 = \frac{D_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$D_1(2\pi - 2\alpha)rL + 2\frac{D_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \alpha rL = Q_1 + Q_2$$

$$D_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{r \left[(2\pi - 2\alpha)L + 2\alpha L \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right]} \quad \text{y} \quad D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{Q_1 + Q_2}{r \left[(2\pi - 2\alpha)L + 2\alpha L \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right]}$$

Aplicando la definición de diferencia de potencial:

$$V(r) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(ref) \Rightarrow V(r) - V(ref) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V_0 = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$E = E_1 = E_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2} \Rightarrow E = \frac{Q_1 + Q_2}{r[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]}$$

$$V_0 = \int_a^b \frac{Q_1 + Q_2}{r[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow Q_1 + Q_2 = V_0 \frac{[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Las densidades de corriente se calculan como:

$$J_1 = g_1 E_1 = g_1 E = g_1 \frac{Q_1 + Q_2}{r[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]}$$

$$J_2 = g_2 E_2 = g_2 E = g_2 \frac{Q_1 + Q_2}{r[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]}$$

Con $Q_1 + Q_2$ ya calculados.

$$V_0 = \frac{Q_1 + Q_2}{r[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_0} \Rightarrow C = \frac{[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Para calcular la resistencia se debe calcular la corriente I .

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_S \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}_2 \\ I &= \iint_S g_1 \frac{Q_1 + Q_2}{r[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]} r d\theta dz + \iint_S g_2 \frac{Q_1 + Q_2}{r[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]} r d\theta dz \\ I &= g_1 \frac{Q_1 + Q_2}{[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]} (2\pi - 2\alpha)L + g_2 \frac{Q_1 + Q_2}{[(2\pi - 2\alpha)L\varepsilon_1 + 2\alpha L\varepsilon_2]} 2\alpha L \end{aligned}$$

Finalmente, por ley de Ohm:

$$V_0 = RI \Rightarrow R = \frac{V_0}{I}$$

Con I ya calculado.

PROBLEMA 2:

Un cable coaxial de sección circular $c + h$ tiene un dieléctrico compuesto entre sus dos conductores. El conductor interior tiene un radio exterior a y esta rodeado por una cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica ϵ_1 y de radio exterior b . A continuación hay otra cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica ϵ_2 y de radio exterior c . Si se establece una diferencia de potencial V_0 entre los conductores, calcule el vector de polarización y las densidades de carga inducidas en los dos medios dieléctricos.

Solución:

Llameemos σ_1 a la densidad de carga superficial del cilindro de radio exterior a y σ_2 a la del conductor de radio interior c .

Primero calculamos el campo eléctrico en función de la densidad de carga σ_1 debiendo separar el cálculo para los diferentes dieléctricos.

1. **Para** $a < r < b$:

$$\iint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_2 = Q$$

$$2\pi r L D_1 = 2\pi a L \sigma_1 \Rightarrow D_1 = \frac{a\sigma_1}{r} \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{a\sigma_1}{r} \hat{r} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{a\sigma_1}{\epsilon_1 r} \hat{r}$$

2. **Para** $b < r < c$:

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 &= \vec{D}_2 \\ \Rightarrow \vec{E}_2 &= \frac{a\sigma_1}{\epsilon_1 r} \hat{r} \end{aligned}$$

Ahora busquemos el valor de σ_1

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(a) - V(c) = - \int_b^a E_1 dr - \int_c^b E_2 dr$$

$$V_0 = - \left[\int_b^a \frac{a\sigma_1}{\epsilon_1 r} dr + \int_c^b \frac{a\sigma_1}{\epsilon_2 r} dr \right] = -a\sigma_1 \left[\frac{1}{\epsilon_1} \int_b^a \frac{1}{r} dr + \frac{1}{\epsilon_2} \int_c^b \frac{1}{r} dr \right] = -a\sigma_1 \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \left(\frac{b}{c} \right) \right]$$

$$V_0 = a\sigma_1 \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \left(\frac{c}{b} \right) \right] \Rightarrow \therefore \sigma_1 = \frac{V_0}{a\sigma_1 \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \left(\frac{c}{b} \right) \right]}$$

Ya que conocemos el valor de σ_1 , calculemos el vector de polarización y densidades de carga inducidas.

$$\vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\rho_i = -\nabla \cdot P_i = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rP_i)}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{Para: } i = 1, 2$$

$$\sigma_{P_i} = P_i(R) \hat{n}$$

Para **radio exterior**:

$$\sigma_{P_i} = P_i(R) = (\epsilon_i - \epsilon_0) \frac{a\sigma_1}{R\epsilon_i}$$

Para **radio interior**:

$$\sigma_{P_i} = P_i(R) = (\epsilon_0 - \epsilon_i) \frac{a\sigma_1}{R\epsilon_i}$$

1. **Para** $a < r < b$:

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_1 \\ \vec{P}_1 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{a\sigma_1}{r\varepsilon_1} \hat{r} \\ \rho_1 &= 0 \\ \sigma_{P_1} &= P_1(b) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{a\sigma_1}{b\varepsilon_1} \\ \sigma_{P_1} &= P_1(a) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\end{aligned}$$

2. **Para** $b < r < c$:

$$\begin{aligned}\vec{P}_2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \vec{E}_2 \\ \vec{P}_2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{a\sigma_1}{r\varepsilon_2} \hat{r} \\ \rho_1 &= 0 \\ \sigma_{P_2} &= P_2(c) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{a\sigma_1}{c\varepsilon_2} \\ \sigma_{P_2} &= P_2(b) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) \frac{a\sigma_1}{b\varepsilon_2}\end{aligned}$$

PROBLEMA 3:

Se tiene un cilindro muy largo de radio b , el que es relleno con tres materiales dieléctricos como se indica en la figura. Sobre la superficie del cilindro interior se distribuye una densidad de carga σ . Calcule la relación entre ε_1 y ε_2 de manera que la carga neta en la frontera entre el dieléctrico 1 y 3 sea nula.

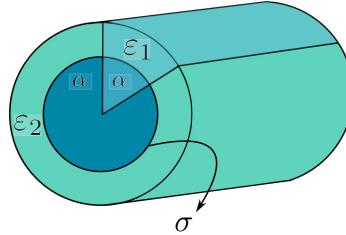


Figura 4.21: Problema 3

Solución:

1. **Para** $r < a$:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{encerrada}} = 0 \Rightarrow (\vec{D}, \vec{E}) = (0, 0) \Rightarrow \vec{P} = 0$$

2. **Para** $a < r < b$:

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} &= Q_{\text{encerrada}} \\ \alpha D_1 rh + (2\pi - \alpha) D_2 rh &= 2\pi\sigma ah \Rightarrow \alpha\varepsilon_1 E_1 r + (2\pi - \alpha)\varepsilon_2 E_2 r = 2\pi\sigma a\end{aligned}$$

Condiciones de Borde:

El campo eléctrico apunta en la dirección radial en ambos dieléctricos, por lo tanto en la interfaz se cumple que:

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{t} = \vec{E}_2 \cdot \hat{t} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E} \Rightarrow \alpha\varepsilon_1 Er + (2\pi - \alpha)\varepsilon_2 Er = 2\pi\sigma a \Rightarrow \vec{E} = \frac{2\pi a\sigma}{(\varepsilon_2(2\pi - \alpha) + \varepsilon_1\alpha)r} \hat{r}$$

En consecuencia:

$$\vec{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)2\pi a\sigma}{(\varepsilon_2(2\pi - \alpha) + \varepsilon_1\alpha)r} \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{P}_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)2\pi a\sigma}{(\varepsilon_2(2\pi - \alpha) + \varepsilon_1\alpha)r} \hat{r}$$

Queremos que:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{total}} = \vec{P}_1 \hat{n}_{(r=a)} + \sigma = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 \hat{n}_{(r=a)} = -\sigma \Rightarrow \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) 2\pi a \sigma}{(\varepsilon_2 (2\pi - \alpha) + \varepsilon_1 \alpha) a} = -\sigma \Rightarrow 2\pi \varepsilon_1 - 2\pi \varepsilon_0 = (2\pi - \alpha) \varepsilon_2 + \alpha \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \frac{2\pi}{2\pi - \alpha} \varepsilon_0\end{aligned}$$

PROBLEMA 4:

Considere un grupo hueco de material plástico (aislante) de lado a , el cual tiene dos orificios A y B por los cuales puede entrar y salir líquido dieléctrico, respectivamente. Las características del material dieléctrico son permitividad ε y densidad de masa ρ_m . Las caras superior e inferior se forran con material conductor, como se indica en la figura (los orificios se mantienen).

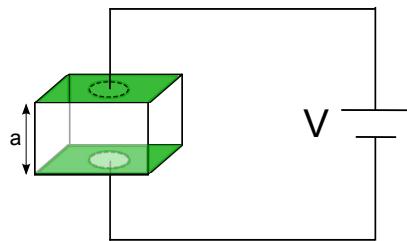


Figura 4.22: Problema 4

Se pide:

1. Determinar la diferencia de potencial mínima que se debe aplicar entre los conductores para mantener el cubo lleno con líquido dieléctrico.
2. Determinar para dicho potencial la densidad de carga de polarización.

Sugerencia: Considere primero el cubo parcialmente lleno de líquido hasta una altura X (medida desde el fondo) y calcule la diferencia de potencial mínima necesaria para evitar que el líquido se escurra por el orificio inferior.

Solución:

1. Al tener el cubo parcialmente lleno podemos considerar el sistema de dos condensadores en serie equivalente:

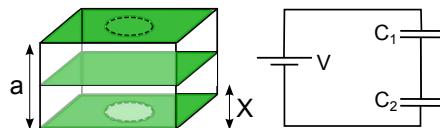


Figura 4.23: Problema 4 - Análisis 1

En el cual calculamos la capacidad equivalente:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{\varepsilon a^2}{X} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{a - X} \\ C_{eq} &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 a^2}{\varepsilon(a - X) + \varepsilon_0 X}\end{aligned}$$

Si consideramos la constante dieléctrica κ :

$$\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 \kappa a^2}{\kappa a - (\kappa - 1)X}$$

Se calcula la energía del sistema:

$$W = \frac{1}{2}C_{eq}V^2 = \frac{V^2 \varepsilon_0 \kappa a^2}{2(\kappa a - (\kappa - 1)X)}$$

La fuerza que actúa en la cara inferior del cubo:

$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial x} \hat{i} \Rightarrow F = \frac{V^2 \varepsilon_0 a^2 \kappa (\kappa - 1)}{2(\kappa a - (\kappa - 1)X)^2}$$

Condición del problema (g : aceleración de gravedad):

$$F \geq a^2 X \rho_m g$$

Reemplazando y considerando $X = a$ (cubo lleno):

$$\frac{V^2}{2} \varepsilon_0 \kappa (\kappa - 1) \geq a^3 \rho_m g \Rightarrow V \geq \sqrt{\frac{2a^3 \rho_m g}{\varepsilon_0 \kappa (\kappa - 1)}}$$

2. $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, $\chi = \kappa - 1$, $\vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P$:

$$\sigma_P = P = \frac{\varepsilon_0 (\kappa - 1)}{a} \sqrt{\frac{2a^3 \rho_m g}{\varepsilon_0 \kappa (\kappa - 1)}} \Rightarrow \sigma_P = \sqrt{\frac{2a \rho_m g \varepsilon_0 (\kappa - 1)}{\kappa}}$$

PROBLEMA 5:

Se tiene una esfera conductora maciza de radio a , la cual posee una carga libre Q_a , uniformemente distribuida. Concéntrica a esta esfera se encuentra un casquete esférico de radio interno c y espesor t , el cual posee carga Q_c también uniformemente distribuida.

El espacio entre ambos conductores se llena con dos dieléctricos esféricos cuya interfaz se encuentra en radio b ($a < b < c$), según se muestra en la Figura 4.25.

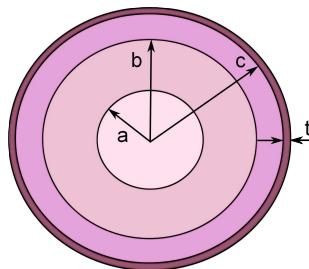


Figura 4.24: Problema 5

Si las permitividades dieléctricas están dadas por las expresiones $\varepsilon_1(r) = \varepsilon r/a$ para $a < r < b$ y $\varepsilon_2(r) = \varepsilon_0 c/r$ para $b < r < c$, se pide determinar:

1. Vectores desplazamiento eléctrico \vec{D} , campo eléctrico \vec{E} y vector polarización \vec{P} en cada uno de los medios dieléctricos.
2. Densidades de carga de polarización volumétricas (ρ_P) y superficiales (σ_P) donde existan.
3. Energía potencial U almacenada y capacidad C del condensador si $Q_c = -Q_a$

Solución:

1. Antes de comenzar los cálculos, hay que considerar que $\vec{E} = 0$ dentro de un conductor. Así que, calculamos el campo eléctrico en las demás regiones, usando la ley de Gauss:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{libre}}$$

Tomando en cuenta que \vec{D} apunta en la dirección \hat{r} se tiene:

a) **Para** $a < r < c$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} D\hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{r} &= Q_a \\ 4\pi r^2 D &= Q_a \end{aligned}$$

Entonces, el vector desplazamiento es igual a:

$$\vec{D} = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \hat{r}$$

b) **Para** $c + t < r$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} D\hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{r} &= Q_a + Q_c \\ 4\pi r^2 D &= Q_a + Q_c \end{aligned}$$

Entonces, el vector desplazamiento es igual a:

$$\vec{D} = \frac{Q_a + Q_c}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Para calcular el campo eléctrico, usamos la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

a) **Para** $a < r < b$:

$$\vec{E} = \frac{Q_a}{4\pi \epsilon_1 r^2} \hat{r} = \frac{Q_a a}{4\pi \epsilon_0 r^3} \hat{r}$$

b) **Para** $b < r < c$:

$$\vec{E} = \frac{Q_a}{4\pi \epsilon_2 r^2} \hat{r} = \frac{Q_a a}{4\pi \epsilon_0 c r} \hat{r}$$

c) **Para** $c + t < r$:

$$\vec{E} = \frac{Q_a + Q_c}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Luego, para calcular el vector polarización, usamos la relación: $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$

$$\vec{P} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \hat{r} & a < r < b \\ \frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{c}{r}\right) \hat{r} & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$$

Y en resumen, para \vec{D} y \vec{E} se tiene que:

$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q_a}{4\pi r^2} \hat{r} & a < r < c \\ 0 & c < r < c+t \\ \frac{Q_a+Q_c}{4\pi r^2} \hat{r} & r > c+t \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q_a a}{4\pi \epsilon_0 r^3} \hat{r} & a < r < b \\ \frac{Q_a}{4\pi \epsilon_0 c r} \hat{r} & b < r < c \\ \frac{Q_a+Q_c}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > c+t \end{cases}$$

2. Existen dos regiones en las que encontramos densidades de polarización, ($a < r < b$) y ($b < r < c$)
Para calcular las densidades superficiales y volumétricas usaremos las relaciones:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

a) **Para $a < r < b$:**

En esta región encontramos cargas superficiales en $r = a$ ($\hat{n} = -\hat{r}$) y en $r = b$ ($\hat{n} = \hat{r}$)

$$\sigma_P(a) = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{a}{a}\right) \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = 0$$

$$\sigma_P(b) = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{a}{b}\right) \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

$$\rho_P(r) = -\nabla \cdot \left(\frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \hat{r} \right) = -\frac{Q_a a}{4\pi r^4}$$

b) **Para $b < r < c$:**

En esta región encontramos cargas superficiales en $r = b$ ($\hat{n} = -\hat{r}$) y en $r = c$ ($\hat{n} = \hat{r}$)

$$\sigma_P(b) = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{b}{c}\right) \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{b}{c}\right)$$

$$\sigma_P(c) = 0$$

$$\rho_P(r) = -\nabla \cdot \left(\frac{Q_a}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{r}{c}\right) \hat{r} \right) = \frac{Q_a}{4\pi c r^2}$$

3. Calculamos la energía almacenada usando la expresión:

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dv$$

Calculamos esta energía en la región $a < r < c$, lo cual nos queda:

$$U = \frac{4\pi}{2} \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{D} r^2 dr + \int_b^c \vec{E} \cdot \vec{D} r^2 dr$$

Haciendo el cálculo de los productos internos, obtenemos:

$$U = \frac{Q_a^2}{8\pi \epsilon_0} \int_a^b \frac{a}{r^3} dr + \int_b^c \frac{1}{cr} dr \Rightarrow U = \frac{Q_a^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{2a} - \frac{a}{2b^2} + \frac{\ln(\frac{c}{b})}{c} \right)$$

Luego para calcular la capacidad del condensador, usamos la relación $C = \frac{Q^2}{2U}$. Entonces la capacidad es igual a

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{2a} - \frac{a}{2b^2} + \frac{\ln(c/b)}{c}\right)}$$

4.8. Problemas Propuestos

PROBLEMA 1:

Se coloca un dieléctrico en el volumen comprendido entre dos esferas de radios a y b . La esfera interior posee densidad de carga libre superficial ρ_ℓ . Calcular en todo el espacio \vec{E} , \vec{D} , \vec{P} , σ_P , ρ_P en todo el espacio.

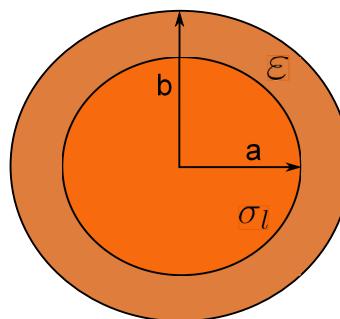


Figura 4.25: Problema 1 - Propuesto

PROBLEMA 2:

Considere un condensador conformado por dos dieléctricos con pérdidas entre dos placas paralelas circulares a las cuales se le aplica una diferencia de potencial V_0 . Para este sistema se pide determinar:

1. La densidad de carga libre en la interfaz dieléctrica.
2. Las densidades de carga de polarización superficial y volumétrica.
3. La carga total inducida en los electrodos.

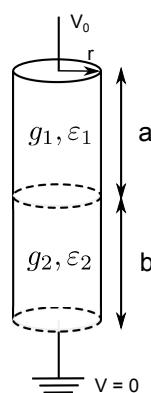


Figura 4.26: Problema 2 - Propuesto

Capítulo 5

Energía Electrostática

5.1. Definición

La energía electrostática de un sistema de partículas es igual al trabajo necesario para formar dicho sistema: $W = U$.

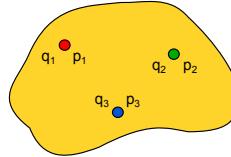


Figura 5.1: Energía en Sistema de Partículas

Comencemos estudiando el trabajo necesario para un sistema de 3 partículas mostrado en la Figura 5.1 en donde para formar dicho sistema supondremos que traemos una por una, las cargas desde el infinito. Para traer la primera carga no es necesario efectuar trabajo ya que no existe una fuerza que se oponga al movimiento. Para traer la segunda carga se debe hacer el trabajo $W_2 = q_2 V_{21}$ donde V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_2 .

Para traer la tercera carga se debe hacer el trabajo $W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$ aquí V_{32} es el potencial producido por la carga 2 en la posición P_3 .

El trabajo total para formar este sistema es:

$$W = 0 + W_2 + W_3 = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} \quad (5.1)$$

Si ahora cambiamos el orden en el cual formamos este sistema (el trabajo debe ser el mismo), digamos que primero traemos la carga q_3 , luego la q_2 y finalmente la q_1 se tiene:

$$W = 0 + q_2 V_{23} + q_1 V_{13} + q_1 V_{12} \quad (5.2)$$

Sumando (5.1) y (5.2):

$$2W = q_1 \underbrace{(V_{13} + V_{12})}_{\text{Potencial en 1}} + q_2 \underbrace{(V_{21} + V_{23})}_{\text{Potencial en 2}} + q_3 \underbrace{(V_{31} + V_{32})}_{\text{Potencial en 3}} \Rightarrow W = \frac{1}{2}q_1 V(P_1) + \frac{1}{2}q_2 V(P_2) + \frac{1}{2}q_3 V(P_3)$$

Así, la energía total de este sistema es la mitad de la suma del producto de cada carga por el potencial producido por el resto de las cargas en ese punto.

Procediendo en forma análoga, para un sistema de n cargas se tiene:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k$$

Por extensión, para distribuciones continuas de carga se tiene $\sum \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$, con ello:

$$W = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}) dq$$

Y para una distribución específica de carga tendremos:

Distribución Lineal:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} V(\vec{r}) \lambda(\vec{r}) dr$$

Distribución Superficial:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S V(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) dS$$

Distribución Volumétrica:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dv$$

5.2. Energía de un Sistema de Conductores

Consideremos un sistema de conductores con cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_n según se muestra en la Figura 5.2. En este



Figura 5.2: Energía en Sistema de Conductores

caso toda la carga se distribuye en la superficie de los conductores, por lo que solo habrá σ . Así la expresión de la energía electrostática será:

$$W = \frac{1}{2} \iint_{S_1} V(\vec{r}) \sigma_1(\vec{r}) dS + \frac{1}{2} \iint_{S_2} V(\vec{r}) \sigma_2(\vec{r}) dS + \dots + \frac{1}{2} \iint_{S_n} V(\vec{r}) \sigma_n(\vec{r}) dS$$

Pero el voltaje en la superficie de los conductores es constante, luego:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} V_1 \underbrace{\iint_{S_1} \sigma_1(\vec{r}) dS}_{Q_1} + \frac{1}{2} V_2 \underbrace{\iint_{S_2} \sigma_2(\vec{r}) dS}_{Q_2} + \dots + \frac{1}{2} V_n \underbrace{\iint_{S_n} \sigma_n(\vec{r}) dS}_{Q_n} \\ &\therefore W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i Q_i \end{aligned}$$

Donde V_i es el potencial del conductor i -ésimo y Q_i su carga total. Tal como se puede apreciar en la siguiente figura. Aquí solo intervienen dos conductores. Por lo tanto:



Figura 5.3: Energía de Condensadores

$$W = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 + V_2 Q_2)$$

Pero $Q_2 = -Q_1 \Rightarrow W = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)Q_1$ y como $Q = C\Delta V$, las expresiones quedan finalmente:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{ó} \quad W = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

5.3. Fuerza Eléctrica y Energía

Una aplicación importante de la energía es el cálculo de fuerzas. En efecto, teníamos que la expresión del trabajo entre dos puntos a y b es:

$$W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

De esta expresión fluye que:

$$\vec{F} = -\nabla W$$

La fuerza es el gradiente del trabajo. En términos de la energía, decimos que la fuerza es producida por una variación de la energía almacenada en el sistema.

Para el caso en que la configuración tiene un grado de libertad, por ejemplo según la variable x , la expresión de la fuerza puede obtenerse de:

$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x} \hat{i}$$

En muchas aplicaciones esta forma de calcular la fuerza puede ser más fácil de obtener que mediante el cálculo directo con campos.

EJEMPLO 22:

Consideremos un condensador de placas planas de área A , en el cual una de las placas puede moverse libremente en el sentido horizontal, tal como se muestra en la Figura 5.4.

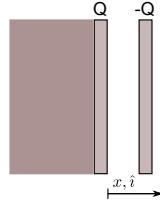


Figura 5.4: Energía y Fuerza Eléctrica

Si inicialmente se cargan las placas con Q y $-Q$ respectivamente, se pide calcular la fuerza entre las placas.

Solución:

La expresión para calcular la energía es $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, ya que el movimiento se realiza con carga constante (carga neta no se modifica en el movimiento). La capacidad, según habíamos calculado anteriormente, es $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, pero ahora la distancia entre las placas es variable, por ello:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{x}$$

Luego la expresión de la energía queda:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} x$$

Con ello la fuerza que experimenta la placa móvil es:

$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x} \hat{i} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \hat{i}$$

Resultado que es congruente con el campo constante entre las placas. Esta relación es ampliamente usada en transductores de presión, voltímetros, micrófonos, etc.

Comentario: Si ahora en vez de imponer que la carga se mantenga constante, imponemos que la tensión entre las placas se mantenga constante, por ejemplo mediante una batería, se tendría la situación de la Figura 5.5.

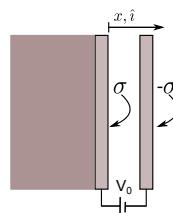


Figura 5.5: Energía con Baterías

Aquí se cumple:

$$V_1 - V_2 = - \int_0^x \vec{E}_{int} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = - \int_0^x \left(-\frac{\sigma}{\epsilon} \right) \hat{i} \cdot dx \hat{i} = \frac{\sigma}{\epsilon} x|_0^x \Rightarrow \therefore \Delta V = V_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} x$$

Y dado que V_0 se mantiene constante, a medida que se desplaza la placa (x varía) la densidad de carga σ debe modificarse. Este cambio lo realiza la batería que mantiene constante la diferencia de potencial entre las placas. Posteriormente abordaremos el trabajo que realiza este tipo de fuentes de voltaje, pero por ahora conviene puntualizar que este efecto no está incorporado en las ecuaciones de energía deducidas anteriormente.

5.4. Energía en Términos de Campos

Consideremos el caso de una distribución volumétrica de carga ρ en un volumen Ω , cuya energía es:

$$W = U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

Pero $\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$, luego podemos escribir:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{D}) V(\vec{r}) dv$$

Dado que $\rho(\vec{r})$ será nulo en todo punto fuera del volumen Ω , el espacio de integración puede ampliarse a un espacio mucho mayor, por ejemplo una esfera Φ de radio R que contenga al volumen Ω , según se muestra en la Figura 5.6.

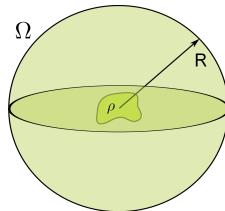


Figura 5.6: Energía en Función de Campos

Podemos escribir entonces:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Phi} (\nabla \cdot \vec{D}) V(\vec{r}) dv$$

Usemos ahora la propiedad: $\nabla \cdot f \vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \vec{A})$, con ello:

$$\nabla \cdot (V \vec{D}) = \vec{D} \cdot \nabla V + V (\nabla \cdot \vec{D}) \Rightarrow (\nabla \cdot \vec{D}) V = \nabla \cdot (V \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla V$$

De esta forma, al aplicarlo dentro de la integral se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Phi} \nabla \cdot (V \vec{D}) dv - \frac{1}{2} \iiint_{\Phi} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{S(\Phi)} V \vec{D} \cdot d\vec{s} - \frac{1}{2} \iiint_{\Phi} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Sabemos que $V \propto \frac{1}{r}$ y $\vec{D} \propto \frac{1}{r^2}$ $\Rightarrow V \vec{D} \propto \frac{1}{r^3}$. Por otro lado $d\vec{s} \propto r^2$ $\Rightarrow V \vec{D} \cdot d\vec{s} \propto \frac{1}{r}$, por lo tanto si $R \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$\iint_{S(\Phi)} V \vec{D} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0 \Rightarrow U = -\frac{1}{2} \iiint_{\Phi} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Y aplicando $\nabla V = -\vec{E}$ obtenemos finalmente la expresión para la energía en función de los campos como:

$$\therefore U = \frac{1}{2} \iiint_{\Phi} \vec{D} \cdot \vec{D} \cdot \vec{E} dv \quad (5.3)$$

Al término $W_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ se le conoce como *densidad de energía electrostática* [J/m^3]

EJEMPLO 23:

Para la configuración esférica de la Figura 5.6 (con $R = a$) se pide calcular la energía electrostática. Suponga $\rho = \rho_0$ constante.

Solución:**1. Para $0 < r < a$:**

Aplicando la ley de Gauss:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

$$4\pi Dr^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 \Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3}r\hat{r} \quad y \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r\hat{r}$$

2. Para $a < r$:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{total}}$$

$$4\pi Dr^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3 \Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0 a^3}{3r^2}\hat{r} \quad y \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Luego la energía electrostática del sistema es:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Phi} \vec{D} \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Esfera}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv + \frac{1}{2} \iiint_{\text{Resto}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

1. Dentro de la Esfera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{\text{Esfera}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv &= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\rho_0}{3}r\hat{r} \right) \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r\hat{r} \right) r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{9\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi 2\pi r^4 \sin(\theta) d\theta dr = 4\pi \frac{\rho_0^2}{18\epsilon_0} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} \end{aligned}$$

2. Fuera de la Esfera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{\text{Fuera}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{Fuera}} \frac{\rho_0 a^3}{3r^2} \cdot \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\ 4\pi \frac{\rho_0^2 a^6}{18\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} &= 4\pi \frac{\rho_0^2 a^6}{18\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^\infty = \frac{2\rho_0^2 a^6 \pi}{9\epsilon_0 a} = \frac{2\rho_0^2 a^5 \pi}{9\epsilon_0} \end{aligned}$$

Luego la energía es:

$$U_{\text{total}} = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} + \frac{10\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

Otro camino:

Se calcula el potencial:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & r \leq a \end{cases}$$

Pero

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Phi} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

Y como el espacio donde hay densidad de carga es sólo la esfera de radio a , tenemos:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho_0^2}{12\epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3a^2 - r^2) r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\ U &= 4\pi \frac{\rho_0^2}{12\epsilon_0} \left[a^2 r^3 - \frac{r^5}{5} \right]_0^a \Rightarrow U = \frac{4\rho_0^2 \pi a^5}{15\epsilon_0} \end{aligned}$$

Resultado idéntico al anterior.

5.5. Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

La molécula de agua tiene un momento dipolar de $6,3 \times 10^{-30}$ [cm]. Una muestra contiene 10^{21} moléculas, cuyos momentos dipolares están todos orientados en la dirección del campo eléctrico de $2,5 \times 10^5$ [N/C]. ¿Cuánto trabajo se requiere para rotar los dipolos desde esta orientación (0°) a una en la cual todos los momentos sean perpendiculares al campo (90°)?

Solución:

1. $\vec{P} = 6,3 \times 10^{-30} \hat{r}$ [cm]
2. $\vec{F} = q\vec{E}$
3. $\tau = p \cdot q ||\vec{E}|| \sin(\theta)$

Trabajo para una molécula:

$$\begin{aligned} dW_i &= \tau d\theta \\ W_i &= U_\theta - U_{\theta_0} = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} pqE \sin(\theta) d\theta = pqE (\cos(\theta_0) - \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Los que buscamos en una rotación de 90° , por lo que nos fijamos: $\theta_0 = 90^\circ$ y $\theta = 0$. Entonces:

$$W_i = pqE (\cos(0^\circ) - \cos(90^\circ)) = pqE(1 - 0) \Rightarrow W_i = pqE$$

Como la muestra contiene 10^{21} moléculas, el trabajo total será la suma de todos los trabajos $\Rightarrow W = 10^{21} pqE$. Solo nos queda reemplazar los valores de q , p y E , en que q corresponde a la carga del electrón ($1,6 \times 10^{-19}$ [C]), p la magnitud del momento dipolar ($6,3 \times 10^{-30} \hat{r}$ [Cm] según el enunciado) y E es el módulo del campo eléctrico cuyo valor nos entrega el enunciado que corresponde a $2,5 \times 10^5$ [N/C].

Por lo tanto:

$$W = 2,52 \times 10^{25} [J]$$

PROBLEMA 2:

Una esfera de radio R y de material no polarizable ($\epsilon_r = 1$) está cargada con una densidad de carga uniforme, de tal modo que su carga total es q . Calcule la energía del sistema.

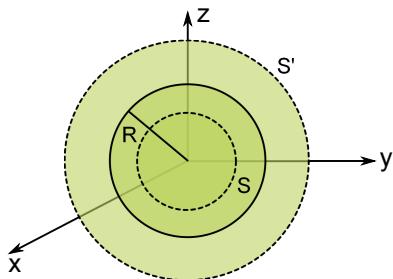


Figura 5.7: Problema 2

Solución:

Sea la esfera de centro 0 y radio R ; aplicando el teorema de Gauss a una esfera concéntrica de radio r , se obtiene:

1. **Para $r \geq R$:**

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Como E es sólo función de r :

$$4\pi E r^2 = \frac{4}{3} \rho \pi r^3$$

Pero ρ se calcula como:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

Entonces:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{3qr}{4\pi R^3} \hat{r} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r}$$

2. **Para $r \leq R$:**

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ 4\pi r^2 E &= \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

La energía del sistema será:

$$W = \iiint_{\tau} \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} d\tau$$

En que τ es toda la región en que existe campo eléctrico, (todo el espacio). Sea W_1 la energía de la región $r \geq R$, y W_2 la de la región $r \leq R$, se cumple que:

$$W = W_1 + W_2$$

Calculamos W_1 y W_2

1. **Para** $r \leq R$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_{r \leq R} E^2 \cdot d\tau \\ W_1 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r \right)^2 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ W_1 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)^2 4\pi \frac{R^5}{5} \Rightarrow \therefore W_1 = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

2. **Para** $r \geq R$:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_{r \geq R} E^2 \cdot d\tau \\ W_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\ W_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 4\pi \frac{1}{R} \Rightarrow \therefore W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$W = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

5.6. Problemas Propuestos

PROBLEMA 1:

Se tiene un cable coaxial formado por 2 cilindros metálicos concéntricos, de longitud $(d_1 + d_2)$ y radios a y b . El espacio entre ambos conductores se llena con dos medios dieléctricos no ideales, caracterizados por constantes dieléctricas y conductividades (ϵ_1, g_1) en una zona de largo d_1 y (ϵ_2, g_2) en una zona de largo d_2 respectivamente. Si se mantiene una diferencia de potencial V constante entre los cilindros conductores, calcular:

1. La densidad de corriente $\rho(\vec{r})$ en el espacio entre los conductores ($a < r < b$).
2. La resistencia R y la capacidad C del cable coaxial.
3. La energía almacenada y la potencia disipada en el cable.

Indicación: Considere que $(d_1 + d_2) \gg a, b$ lo que permite suponer simetría radial. Desprecie las corrientes que circulan por los conductores.

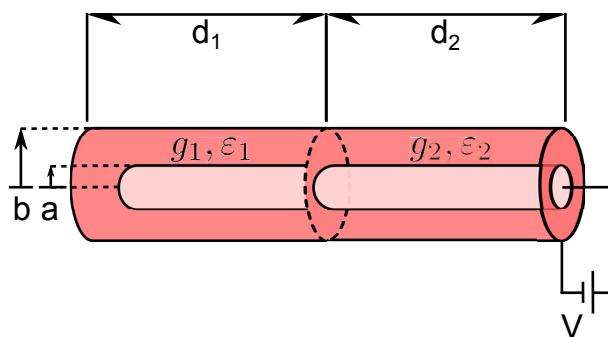


Figura 5.8: Problema 1 - Propuesto

PROBLEMA 2:

Encuentre la cantidad de energía almacenada en el campo eléctrico producido por una esfera que mide 3 [m] de radio y que tiene una densidad uniforme de carga $\rho_S = 2 \times 10^{-8} [C/m^2]$ si se supone que la esfera está en el vacío ($\epsilon = \epsilon_0$).

Capítulo 6

Corriente Eléctrica

6.1. Modelo de Medios Materiales Conductores

En electrostática modelamos un conductor como un medio material que dispone de abundante carga libre, la cual puede desplazarse sin obstáculos hasta alcanzar el estado de equilibrio cuando se le ha aplicado un campo eléctrico externo. En el estado de equilibrio vimos que el campo eléctrico al interior del conductor era nulo.

Ahora veremos el fenómeno de la conducción eléctrica y utilizaremos un modelo más elaborado de la materia, pero que incluye al visto anteriormente en electrostática. La principal diferencia con el caso anterior radica en el hecho de que ahora los conductores no terminan en una pared definida, sino que se extienden en circuitos cerrados, tal como se muestra en la Figura 6.1.



Figura 6.1: Corriente en Circuitos

Supongamos que en la Figura 6.1 se aplica un campo eléctrico circular de magnitud constante en todo el medio conductor. Si usamos el modelo de conductor visto hasta aquí, las cargas al interior se moverán debido a la fuerza ejercida por dicho campo, pero no se alcanzaría la situación de equilibrio ya que el conductor no termina en ninguna parte. Como la fuerza sobre cada carga es constante $\vec{F} = q\vec{E}$, las cargas se acelerarían indefinidamente, cosa que no ocurre en la realidad.

Por ello es necesario ampliar este modelo incorporando las colisiones que experimentan las cargas cuando se desplazan en el medio material. En efecto, al avanzar las cargas bajo la influencia de la fuerza eléctrica colisionan con la estructura de la red atómica hasta alcanzar una velocidad de desplazamiento estacionaria en promedio (v_a). Esta es la nueva situación de equilibrio dinámico del fenómeno de la conducción eléctrica, es decir, al aplicar un campo eléctrico constante a un conductor como en la Figura 6.1, los electrones (y cargas de desplazamiento en general) alcanzan una velocidad de desplazamiento constante en régimen permanente (para un tiempo suficientemente largo). Dicha velocidad dependerá desde luego del campo eléctrico y de la estructura del medio material. Los electrones con capacidad de movimiento en el medio forman un tipo especial denominado electrones de conducción o electrones libres.

6.2. Definición de Corriente

La corriente eléctrica es el fenómeno de desplazamiento de cargas en un medio material. Como vimos anteriormente, dicho desplazamiento incluye mayoritariamente a los electrones, ya que éstos disponen de mayor movilidad al interior de los medios.

Consideremos un trozo de material al cual se le aplica un campo eléctrico externo como en la Figura 6.2.

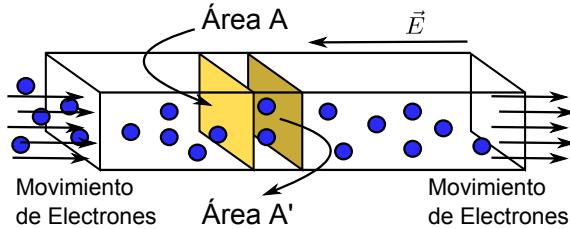


Figura 6.2: Corriente Eléctrica

Si tomamos el plano \mathcal{A} que corta transversalmente el medio material de la figura, se define la corriente I como:

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad [C/s] = [A]$$

Donde Q es la carga total que atraviesa el plano \mathcal{A} en el sentido de \vec{E} y $[A]$ es la unidad llamada Ampère.

Sin entrar en mayores detalles, físicamente lo que ocurre es que en el estado estacionario los electrones se desplazan con velocidad promedio constante y sin acumularse en ningún punto. Así, para una misma área desplazada una pequeña distancia de A , tal como A' en la Figura 6.2, la corriente será la misma.

De esta forma, para cualquier volumen Ω de un conductor, tal como el ilustrado en la Figura 6.3, en estado estacionario los electrones se desplazan manteniendo la carga neta nula.

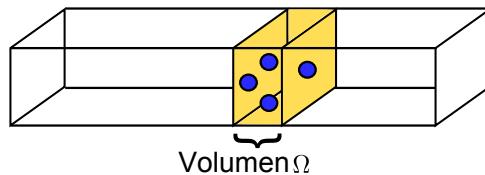


Figura 6.3: Carga Neta Nula

Si designamos por ρ_e la densidad volumétrica de electrones de conducción y ρ_R a la del resto de las cargas en el volumen Ω , entonces:

Para todo tiempo t en estado estacionario:

$$\iiint_{\Omega} \rho_e dv + \iiint_{\Omega} \rho_R dv = 0$$

Así, al aplicar un campo externo se moverán los electrones, pero el número total de electrones por unidad de volumen sigue constante. Consideremos que en este material existe n electrones libres por unidad de volumen que pueden desplazarse en presencia de un campo externo. Supongamos que v_d es la velocidad de desplazamiento promedio de esos electrones.

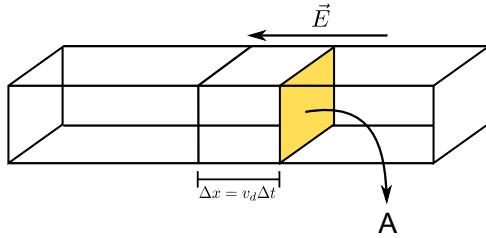


Figura 6.4: Electrones de Combinación

Entonces, en un tiempo Δt las partículas avanzarán una distancia Δx y atravesarán el área \mathcal{A} . En otras palabras, todas las partículas contenidas en el volumen $\mathcal{A}v_d\Delta t$ pasan a través del área \mathcal{A} en un tiempo Δt . La carga total que atraviesa el área \mathcal{A} es por lo tanto:

$$\Delta Q = qn\mathcal{A}v_d\Delta t$$

Donde q es la carga de una partícula. Luego la corriente que atraviesa la superficie es:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qn\mathcal{A}v_d\Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \therefore I = qn\mathcal{A}v_d$$

Así, la corriente es positiva en el sentido contrario al movimiento de los electrones.

$$I = -en\mathcal{A}v_d$$

EJEMPLO 24:

Determine la velocidad promedio de desplazamiento de los electrones en un alambre de cobre típico de radio $0,0814 [cm]$ que transporta una corriente de $1 [A]$. Suponga que existen $8,46 \times 10^{22}$ electrones libres de moverse por cada cm^3 de cobre.

Solución:

$$I = n \cdot q \cdot v_d \cdot \mathcal{A} \Rightarrow v_d = \frac{I}{nq\mathcal{A}}$$

1. $\mathcal{A} = \pi \times (0,0814)^2 [cm^2]$
2. $n = 8,46 \times 10^{22} [e_s/cm^3]$
3. $q = 1,6 \times 10^{-19} [C]$
4. $I = 1 [C/s]$

$$v_d = \frac{1}{\pi \times (0,0814)^2 \times 8,46 \times 10^{22} \times 1,6 \times 10^{-19}} \Rightarrow \therefore v_d = 3,55 \times 10^{-3} [cm/s]$$

6.3. Densidad de Corriente

Consideremos un conductor muy delgado por donde transita una corriente I , según se ilustra en la Figura 6.5.

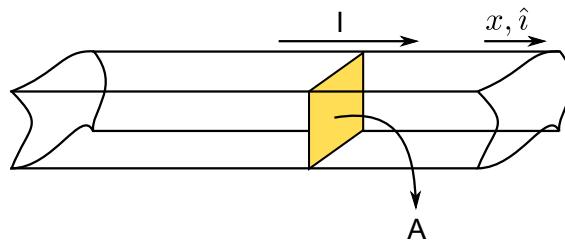


Figura 6.5: Corriente por Unidad de Superficie

Se define la densidad de corriente como un vector que indica la corriente por unidad de superficie. Para el caso de la Figura 6.5.

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{i} \quad [A/m^2]$$

Así, \vec{J} tiene la dirección de la corriente. Para el caso de las partículas visto en el ejemplo anterior se tiene $\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{i} = qn v_d \hat{i}$ (vector en sentido contrario al movimiento de electrones).

Por extensión, cuando se tienen superficies mayores como en la Figura 6.6 se define como:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{i} = \vec{J}(\vec{r})$$

Donde ΔI es la cantidad de corriente que atraviesa en forma ortogonal al elemento de área ΔS e \hat{i} es la dirección de la corriente (y normal al elemento de área).

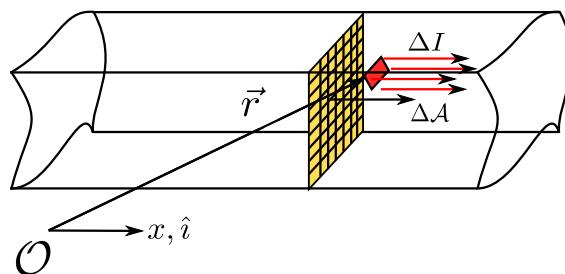


Figura 6.6: Vector Densidad de Corriente

Así, la corriente que atraviesa el área A (en el sentido de $d\vec{s} = dS \hat{x}$) es;

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

En general el vector densidad de corriente variará con la posición.

EJEMPLO 25:

Un conductor ideal tiene la forma irregular de la Figura 6.7

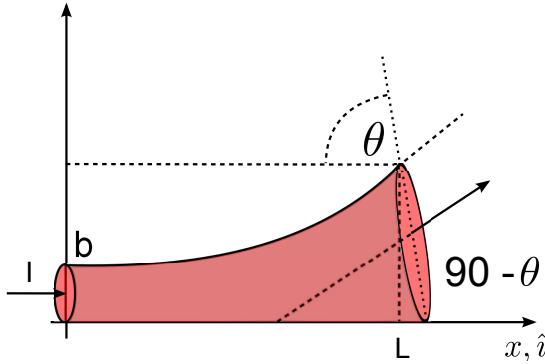


Figura 6.7: Densidad de Corriente de un Cuerpo Irregular

La curva del límite superior del conductor es $y = ax^2 + 2b$, la cual es válida en todo el largo l del conductor. Por el conductor circula una corriente I , la cual ingresa y sale del conductor perpendicular a los planos que lo limitan. Se pide calcular el vector densidad de corriente en los planos extremos del conductor.

Solución:

Supondremos que la corriente se distribuye en forma homogénea al interior del conductor. Por ello, en el extremo $x = 0$, el vector densidad de corriente se distribuye homogéneamente en el disco de radio b y apunta en dirección \hat{i} . Así:

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2} \hat{i}$$

En el otro extremo, el plano de salida del conductor forma un ángulo θ con el eje X. Dicho ángulo se forma entre la ortogonal a la tangente de la curva $y = ax^2 + 2b$, evaluada en $x = l$, y el eje X. La tangente está definida por la curva $y' = 2ax$, que por definición corresponde a $\tan(90 - \theta)$ en $x = l$, es decir:

$$\tan(90 - \theta) = 2al$$

Aplicando identidades trigonométricas $\cos(90 - \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(90-\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2l^2}}$ y $\sin(90 - \theta) = \frac{2al}{\sqrt{1+4a^2l^2}}$.

De las leyes de semejanza de triángulos obtenemos el radio del disco en el extremo de salida del conductor:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(al^2 + 2b)^2 + (al^2 + 2b)^2 \tan^2(90 - \theta)} = \frac{1}{2} (al^2 + 2b) \sqrt{1 + \tan^2(90 - \theta)} = \frac{1}{2} (al^2 + 2b) \sqrt{1 + 4a^2l^2}$$

Con ello finalmente el vector densidad de corriente en el plano de salida es:

$$\vec{J} = \frac{1}{\pi r^2} (\cos(90 - \theta) \hat{i} + \sin(90 - \theta) \hat{j})$$

En forma análoga podemos definir un vector densidad de corriente superficial cuando se estudian distribuciones de corriente en superficie. Supongamos que tenemos una corriente fluyendo en el plano YZ, según se muestra en la Figura 6.8.

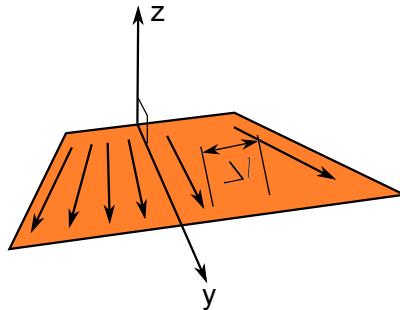


Figura 6.8: Densidad Superficial de Corriente

Se define el vector densidad de corriente superficial \vec{K} [A/m] como:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \hat{j} = \vec{K}(\vec{r})$$

Inversamente, cuando disponemos de este vector podemos calcular la corriente atravesando un tramo de ancho L como:

$$I = \int_0^L \vec{K} \cdot d\vec{l} \quad \text{Para este caso: } d\vec{l} = dl \hat{j}$$

EJEMPLO 26:

Considere un conductor toroidal que transporta una corriente I según se muestra en la Figura 6.9. Suponga que se desea tener una representación equivalente en dos dimensiones de este conductor a través de una cinta (imagine que resulta de aplastar al toroide hasta dejarlo plano). Se pide determinar la corriente superficial por esta cinta resultante.

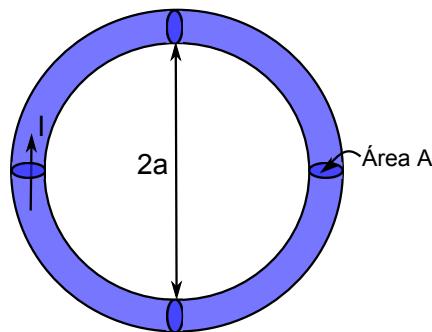


Figura 6.9: Conductor Toroidal

Solución:

En la Figura 6.9, en el lado izquierdo esta representado el toroide (de tres dimensiones) de sección transversal \mathcal{A} . En el lado derecho se presenta la cinta (dos dimensiones) de ancho $2a$. Ambos elementos conducen la misma corriente total I , es decir la sección transversal del toroide es atravesada por la misma corriente que atraviesa por un corte transversal de la cinta. Esta situación se ilustra en la Figura 6.7. La figura del lado derecho es una amplificación de la sección del toroide. La proyección bajo esa sección es un trozo transversal de la cinta.

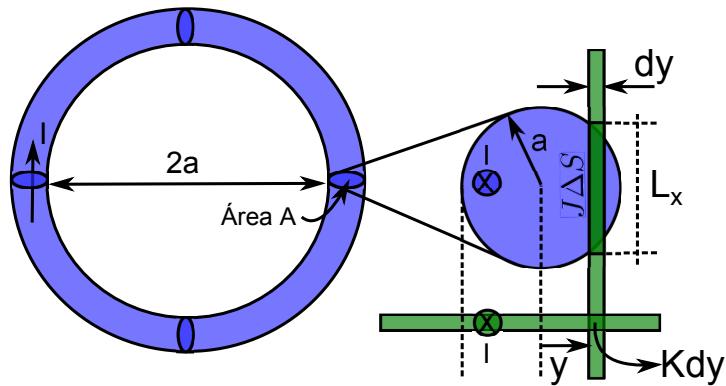


Figura 6.10: Proyección de Sección del Toroide

Si J es la densidad de corriente homogénea del toroide ($J = \frac{I}{\pi a^2} [A/m^2]$) y K la densidad superficial de corriente de la cinta [A/m], entonces la condición de equivalencia impone: $Kdy = J\Delta S$. Desarrollando se obtiene:

$$l_x = 2\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$Kdy = \frac{I}{\pi a^2} 2\sqrt{a^2 - y^2} dy \Rightarrow \therefore K = \frac{2I\sqrt{a^2 - y^2}}{\pi a^2}$$

Luego el vector densidad de corriente superficial es $\vec{K} = \frac{2I\sqrt{a^2 - y^2}}{\pi a^2} \hat{j}$. Este resultado indica que la corriente no se distribuye en forma homogénea en la cinta, ya que es mayor en el centro ($y = 0$) y decrece hacia los bordes, llegando a ser nula para ($y = a$). Este resultado es coherente con la intuición, ya que si miramos el toroide desde arriba (un punto perpendicular al plano de la hoja de papel), efectivamente veremos pasar más corriente en el centro y menos hacia la orilla (¡convénzase de este resultado!).

PROBLEMA PROPUESTO:

Determinar K si imponemos que la corriente se distribuya en forma homogénea en la cinta.

6.4. Ley de Ohm

En la mayoría de los materiales conductores se tiene - que al aplicar un campo eléctrico - la siguiente relación:

$$\vec{J} = g \vec{E} \quad (6.1)$$

Donde g es en general constante y se denomina conductividad. Las unidades de g son $[A/Vm]$. Es común llamar Mho (o MHO) a la unidad $[A/V]$, con ello también se usa $[MHO/m]$ como la unidad de g .

Todos los materiales que satisfacen la relación anterior se denominan óhmicos y g puede depender de otras variables como la temperatura o la presión, pero no del campo eléctrico. Existen también materiales no óhmicos en donde g depende del campo eléctrico aplicado, pero en este curso no los estudiaremos.

Consideremos un conductor alargado de sección uniforme \mathcal{A} por donde circula una corriente I debido a la presencia de un campo según se muestra en la Figura 6.11.

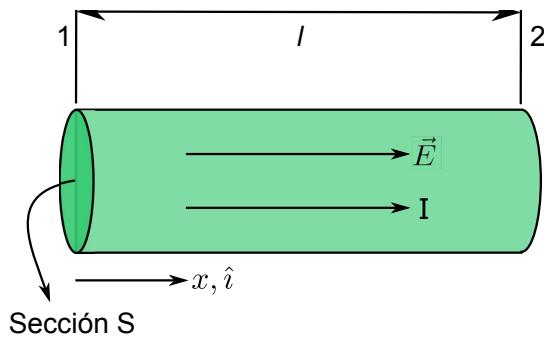


Figura 6.11: Ley de Ohm

Por la ley de Ohm $\vec{J} = g \vec{E}$, pero suponiendo distribución homogénea de corriente $\vec{J} = \frac{I}{\mathcal{A}} \hat{i}$ y de la definición de campo:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$-\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{x} \hat{i} = V_2 - V_1 \Rightarrow V_2 - V_1 = -El \Rightarrow \therefore \vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{l} \hat{i}$$

Reemplazando valores en la ley de Ohm se tiene:

$$\frac{I}{A} \hat{i} = g \frac{V_1 - V_2}{l} \hat{i} \Rightarrow V_1 - V_2 = \left(\frac{l}{Ag} \right) I$$

Se define $\rho = \frac{1}{g}$ como la resistividad del material y $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ como la resistencia. Las dimensiones de la resistencia son [Volt/Ampère] y se llama Ohm. Con esto podemos escribir:

$$\Delta V = RI$$

Esta es la ley de Ohm en conductores. También es usual definir $G = 1/R$ como la conductancia del material. En general, mientras menor sea la resistencia de un material, será un conductor más eficiente, y en el límite - si la resistencia se hace nula - hablamos de un conductor perfecto donde $\Delta V = 0$. Este último caso ocurre en algunos materiales pero en condiciones de muy baja temperatura, son los llamados *superconductores*. Para un material es posible medir su voltaje y corriente, y determinar así, la característica VI; y con ello la conductividad, según se muestra en la Figura 6.12.

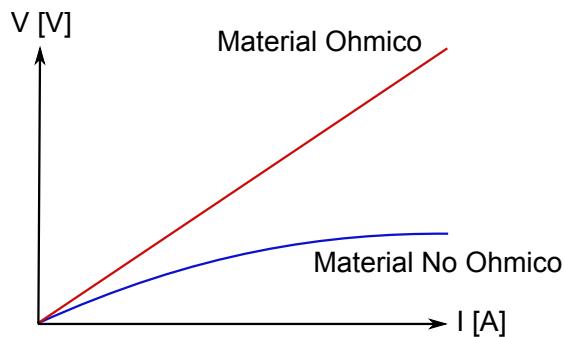


Figura 6.12: Característica VI

En el siguiente Cuadro se presentan valores de conductividad para diferentes materiales.

Cuadro 6.1: Conductividad (aproximada) de Algunos Materiales a 20°C

Material	Conductividad g
Conductores	Valores de Conductores
Plata	6.1×10^7
Cobre (standard)	5.8×10^7
Oro	4.1×10^7
Aluminio	3.5×10^7
Tungsteno	1.8×10^7
Zinc	1.7×10^7
Bronce	1.1×10^7
Hierro (puro)	10^7
Plomo	5×10^6
Mercurio	10^6
Carbón	5×10^4
Aqua (mar)	4
Semiconductores	Valores de Semiconductores
Germanium (puro)	2.2
Silicona (puro)	4.4×10^{-4}
Aislantes	Valores de Aislantes
Agua Destilada	10^{-4}
Tierra	10^{-5}
Bakelita	10^{-10}
Papel	10^{-11}
Vidrio	10^{-12}
Porcelana	10^{-12}
Mica	10^{-15}
Parafina	10^{-15}
Goma (dura)	10^{-15}
Cuarzo (fusionado)	10^{-17}
Cera	10^{-17}

Estos valores pueden variar en otras tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la conductividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.

En el caso general se tienen conductores irregulares como en la Figura 6.13.

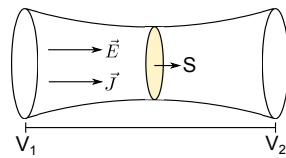


Figura 6.13: Corriente en Conductor Irregular

Aquí la diferencia de potencial entre los extremos es: $\Delta V = V_1 - V_2 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ y dado que la corriente en las caras extremas es la misma (no hay corriente que se acumule o salga por otra superficie del conductor) se puede definir la resistencia como:

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{g \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Donde el recorrido de la integral de línea es cualquiera y el área es cualquier sección transversal del conductor.

EJEMPLO 27:

Un alambre de diámetro 1 [mm]. y de conductividad $g = 5 \times 10^7$ [mho/m] tiene 10^{29} electrones libres por m^3 . Si se aplica un campo eléctrico de en la dirección axial se pide:

1. Densidad de Carga de Electrones Libres
2. Densidad de Corriente
3. Corriente
4. Velocidad Media de Electrones

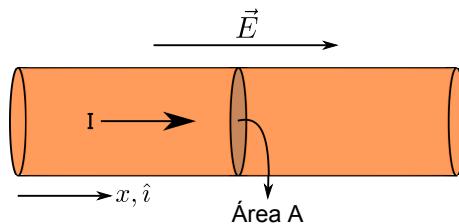


Figura 6.14: Conductor Unifilar

Solución:

1. $\rho_e = n \times e = 10^{29} \times (-1,6 \times 10^{-19}) = -1,6 \times 10^{10} [C/m^3]$
2. $\vec{J} = g\vec{E} = (5 \times 10^7) \times 10^{-2}\hat{i} = 500000\hat{i} [A/m^2]$
3. $I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot A = (5 \times 10^5) \times \left[\pi \left(\frac{10^{-3}}{2} \right)^2 \right] = 0,393 [A]$
4. $J = q \cdot n \cdot v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{q \cdot n} = \frac{500000}{1,6 \times 10^{10}} \Rightarrow v_d = 3,125 \times 10^{-5} [m/s]$

6.5. Fuerza Electromotriz

Llamaremos fuerza electromotriz (F.E.M.) a un dispositivo con la propiedad de mantener una diferencia de potencial definida entre sus terminales. Esquemáticamente se muestra en la Figura 6.15.

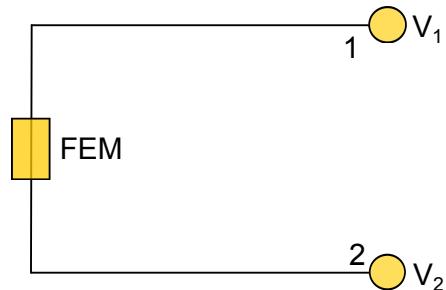


Figura 6.15: Fuerza Electromotriz

Una pila común, una batería de auto, un generador son ejemplos de fuerza electromotriz. Si $\Delta V > 0$ se acostumbra a anotar como:

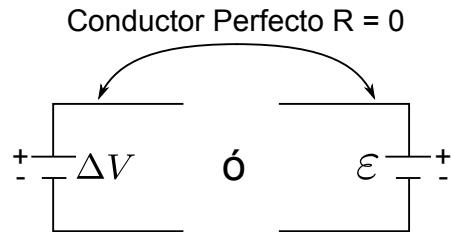


Figura 6.16: Notación F.E.M.

Recordemos que por “conductor perfecto” se entenderá como un conductor con una conductividad muy grande y que por lo tanto presenta una resistencia (R) despreciable y no registra diferencia de potencial alguna. Sin embargo, en la práctica las F.E.M. poseen una resistencia interna R_{in} , por lo que la representación más usada es la siguiente:

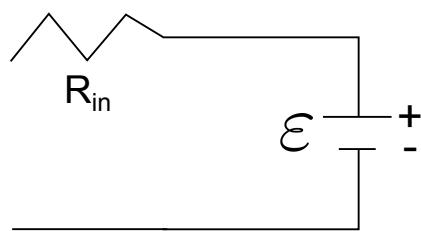


Figura 6.17: F.E.M. en Circuitos

Examinemos la configuración de la Figura 6.18.

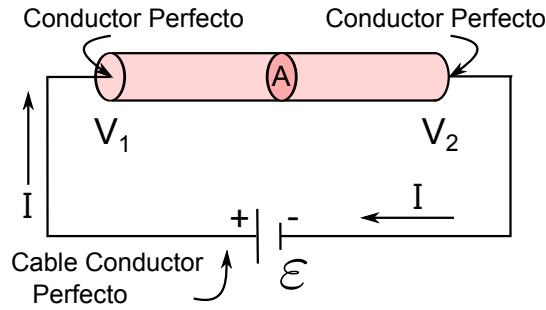


Figura 6.18: Conducto Real

Habíamos probado que la diferencia de potencial entre los “conductores perfecto” es:

$$-\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 \Rightarrow El = V_1 - V_2$$

Donde l es la distancia entre los conductores. Esta diferencia de potencial es exactamente el valor de la fuerza electromotriz. Luego:

$$\mathcal{E} = V_1 - V_2 \Rightarrow \mathcal{E} = El$$

Por otra parte, la corriente que atraviesa el área \mathcal{A} es $I = J\mathcal{A}$. Además la densidad de corriente cumple con $J = gE$. Luego, si l es el largo del conductor de sección \mathcal{A} , tenemos:

$$I = \frac{g\mathcal{E}}{l} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{E} = \underbrace{\frac{l}{g\mathcal{A}}}_R I \Rightarrow \mathcal{E} = RI$$

Esta expresión corresponde a la ley de Ohm vista anteriormente. La fuerza electromotriz \mathcal{E} realiza el trabajo de tomar cargas a un potencial y entregarlas a uno de mayor magnitud. Al circuito analizado se le representa como:

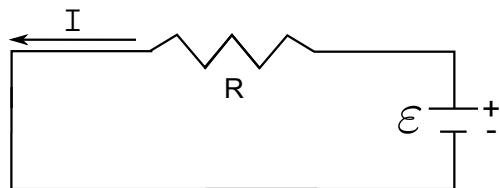


Figura 6.19: Convención de Signos

6.6. Efecto Joule

Consideremos la configuración de la figura:

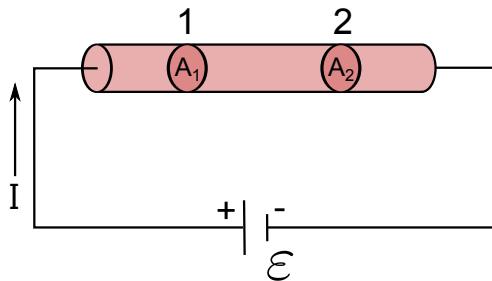


Figura 6.20: Efecto Joule

La energía de la carga en el disco 1 es:

$$U_1 = \Delta Q_1 V_1$$

Donde ΔQ_1 es la carga que atraviesa el plano A_1 y V_1 es el potencial en 1.

Similarmente la energía en el disco 2 es:

$$U_2 = \Delta Q_2 V_2$$

Por lo tanto la diferencia de energía es:

$$\Delta U = \Delta Q_1 V_1 - \Delta Q_2 V_2$$

Pero ΔQ_1 y ΔQ_2 son iguales (no hay acumulación de carga).

$$\Delta U = \Delta Q(V_1 - V_2)$$

Por otra parte la potencia es el cambio de la energía en el tiempo, o sea :

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}(V_1 - V_2) \Rightarrow P = I(V_1 - V_2)$$

Y haciendo coincidir 1 con el comienzo del conductor, y 2 con el fin tenemos que:

$$P = I \Delta V$$

Que es la potencia disipada en el material.

Dicha potencia se expresa en un calentamiento del material producto de las colisiones entre las partículas. Esta potencia es suministrada por la F.E.M.

Como $\Delta V = RI$, la expresión usual de esta potencia es:

$$P = RI^2 \quad \text{ó} \quad P = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

En general, para un material cualquiera tendremos:

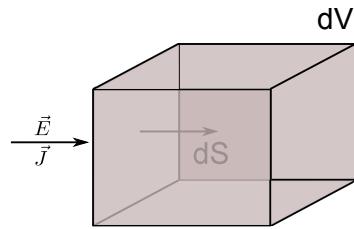


Figura 6.21: Energía en Elemento Diferencial

La potencia disipada en el elemento de volumen es: $dP = \underbrace{(\vec{J} \cdot d\vec{s})}_{I} \cdot \underbrace{(\vec{E} \cdot d\vec{r})}_{dv}$ ó $dP = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{r}$.

Como todos los vectores son paralelos $d\vec{s} \cdot d\vec{r} = dv$ y podemos escribir finalmente la expresión:

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{E} dv \quad (6.2)$$

La cual representa la potencia disipada en un material de volumen Ω .

6.7. Cargas en Medios Materiales

Resumiendo lo que hemos visto hasta aquí es lo siguiente:

1. Dieléctricos:

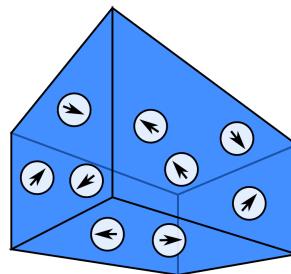


Figura 6.22: Cargas en Dieléctricos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \equiv \epsilon \vec{E}$$

Los medios se componen de dipolos que pueden girar en torno a su posición de equilibrio, pero no se desplazan.

2. Conductores:

Equilibrio electrostático:

$$\vec{E} = 0 \quad \text{y} \quad V = \text{constante}$$

Sólo tiene distribución superficial. La carga al interior es nula $\rho = 0$ y no hay polarización $\vec{P} = 0$.

Equilibrio dinámico: Corrientes

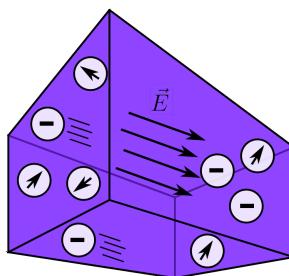


Figura 6.23: Conductores en Equilibrio Dinámico

Electrones se desplazan con velocidad constante. Carga total por unidad de volumen es nula. También puede existir una polarización del material $\vec{P} \neq 0$ (órbitas de electrones se desplazarán de su centro).

Si llamamos ρ_e a la densidad de carga de electrones por unidad de volumen y ρ_R a la densidad del resto de las cargas, se cumple:

$$\iiint_{\Omega} \rho_e dv + \iiint_{\Omega} \rho_R dv = 0$$

Además los materiales óhmicos cumplen con $\vec{J} = g\vec{E}$.

Así, en general un medio material puede presentar características de dieléctricos (ϵ), o sea aisladores, o conductores (g) como se muestra en la Figura 6.24.

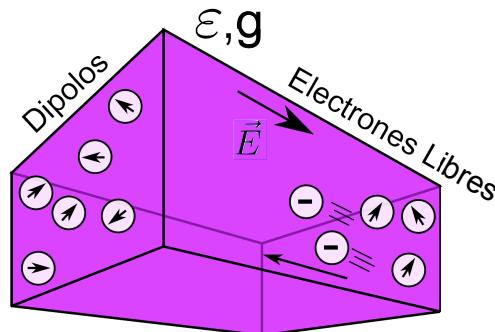


Figura 6.24: Cargas en Materiales Reales

Si $g \rightarrow \infty \Rightarrow$ Conductor Perfecto.

Si $\epsilon \rightarrow \infty \Rightarrow$ Aislante Perfecto.

Ambas características son contrarias, es decir, si es un buen aislante tendrá pocas cargas libres y será por lo tanto un conductor pobre, y viceversa.

6.8. Corriente de Convección

La corriente de convección se produce cuando se tiene una masa con carga en desplazamiento, por ejemplo un líquido con carga fluyendo por una cañería. Consideremos que esto ocurre en la Figura 6.25, con una masa eléctricamente cargada que se desplaza con velocidad v_c .

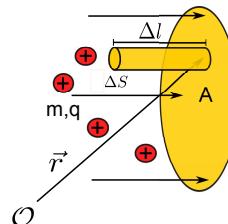


Figura 6.25: Corriente de Convección

Si la masa contenida en el cilindro elemental tiene velocidad v_c , y si designamos por ρ_c la densidad de carga en dicho volumen, entonces la cantidad de carga contenida en el volumen $\Delta S \cdot \Delta l$ es $\rho_c \cdot (\Delta S \cdot \Delta l)$. Por lo tanto, la corriente atravesando al área ΔS en un intervalo Δt es:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_c \Delta S \cdot \Delta l}{\Delta t} = \rho_c \Delta S \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Pero $v_c = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ entonces:

$$\Delta I = \rho_c \Delta S v_c \Rightarrow \therefore \vec{J}(\vec{r}) = \rho_c v_c \hat{u}$$

Donde \hat{u} es el vector unitario en la dirección de desplazamiento de la masa cargada.

Se cumple:

$$I = \iint_{\mathcal{A}} \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Donde I es la corriente total que atraviesa el área \mathcal{A} (la cual desde luego no se mueve).

Conviene precisar que en las corrientes de convección *NO* tiene sentido la ley de Ohm, es decir, no se cumple la relación: $\vec{J} = g\vec{E}$.

EJEMPLO 28:

El sistema de la Figura 6.26 representa una cinta transportadora de un polvo cargado que puede modelarse como una densidad superficial de carga $\sigma = 10^{-2} [C/m^2]$. La cinta tiene un ancho de 1 [m] se mueve a una velocidad de 2 [m/s]. Se pide:

1. Calcular la corriente que atraviesa el área \mathcal{A} .
2. ¿Cuánta carga ha pasado en 5 segundos?

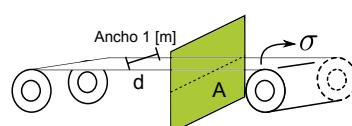


Figura 6.26: Cinta Transportadora de Carga

Solución:

1. $I = \frac{\sigma \cdot d \cdot \Delta l}{\Delta t} = \sigma d v_c = 10^{-2} \times 1 \times 2 = 2 \times 10^{-2} [C/s] = 20 [mA]$
2. $\Delta Q = I \times \Delta t = 2 \times 10^{-2} \times 5 = 10^{-1} [C]$

La corriente de convección tiene gran importancia en el entendimiento de los seres vivos. Por ejemplo el intercambio de sustancias entre células se puede explicar mediante un modelo eléctrico en base a corriente de convección de proteínas.

6.9. Ecuación de Continuidad

Consideremos un volumen Ω del espacio en el cual se tiene un flujo neto de corriente saliendo del volumen.

$$I_{\text{salida}} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Aquí $d\vec{s} = dS \hat{n}$ apunta hacia *afuera* del volumen Ω .

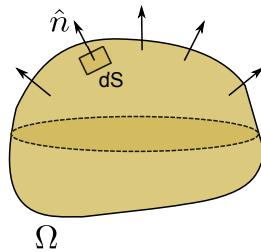


Figura 6.27: Continuidad de Carga Eléctrica

Si llamamos Q_{in} a la carga contenida en el volumen Ω , entonces se debe cumplir:

$$I_{\text{salida}} = - \frac{\partial Q_{in}}{\partial t}$$

o sea, la corriente que sale corresponde a la variación de carga encerrada en el volumen. Supongamos que Q_{in} se describe a través de una densidad de carga libre ρ_Ω .

Luego:

$$Q_{in} = \iiint_{\Omega} \rho_\Omega(\vec{r}) dv$$

$$I_{\text{salida}} = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho_\Omega(\vec{r}) dv$$

Dado que el volumen Ω es fijo (no depende de t) podemos escribir:

$$I_{\text{salida}} = - \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_\Omega(\vec{r}) \right] dv$$

Y reemplazando en la expresión original tenemos:

$$- \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_\Omega(\vec{r}) \right] dv = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al lado derecho:

$$-\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\Omega}(\vec{r}) \right] dv = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J} dv$$

Como se cumple \forall espacio Ω (contenga este un medio material o no)

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\Omega}(\vec{r}) = 0 \quad (6.3)$$

Lo anterior es la *ecuación de continuidad* que da muestras que *la carga no aparece ni desaparece espontáneamente, sino que se conserva.*

6.10. Ecuación de Continuidad en Medios Materiales

Consideremos un medio material que posee tanto características dieléctricas (ϵ) como conductoras (g). Supongamos que en $t = 0$ se inyecta instantáneamente una densidad de carga $\rho_0(\vec{r})$ en el material. Determinaremos la variación que experimenta la carga para $t > 0$.

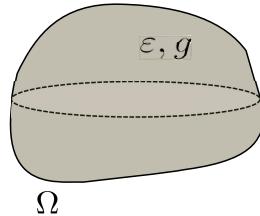


Figura 6.28: Ecuación de Continuidad en Medios Materiales

Tenemos:

$$\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = g\nabla \cdot \vec{E}$$

En donde hemos supuesto que g es constante.

Pero:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{g}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{g}{\epsilon} \rho(t)$$

Y reemplazando en la ecuación de continuidad obtenemos:

$$\frac{g}{\epsilon} \rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

En donde $\tau = \frac{\epsilon}{g}$ es la constante de relajación y mide la rapidez con que la carga en volumen emigra hacia la superficie. Así, en régimen estacionario no hay carga en volumen y sólo hay carga superficial.

EJEMPLO 29:

Considere un medio material que forma una esfera de radio R , el cual tiene características dieléctricas ϵ y conductividad g , según se muestra en la Figura 6.29. En $t = 0$ se carga dicha esfera con una carga Q_0 uniformemente distribuida.

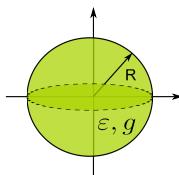


Figura 6.29: Carga en Función del Tiempo

Se pide:

1. Determinar la ecuación que rige la carga en la esfera para $t \leq 0$
2. Evaluar el tiempo que toma la carga en volumen en disminuir 36.8 % de su valor inicial
3. Calcular cuánto vale el tiempo resuelto en (1) para los siguientes materiales:

Cuadro 6.2: Tabla de Ejemplo 29

Material	Conductividad g	Permeabilidad ϵ_R
Cobre	$5,8 \times 10^7$	1
Cuarzo Fusionado	10^{-17}	5

Solución:

1. La ecuación que rige la carga es:

$$\frac{g}{\epsilon} \rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0$$

Integrando en el volumen

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{g}{\epsilon} \rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \right) dv = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{g}{\epsilon} \iiint_{\Omega} \rho(t) dv}_{Q(t)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho(t) dv}_{Q(t)} = 0 \Rightarrow \frac{g}{\epsilon} Q(t) + \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

Para $t = 0$ $Q_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ y $\tau = \frac{\epsilon}{g}$

$$2. 0,368Q_0 = Q_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow t = -\tau \ln(0,368) \approx \tau$$

3.

Parámetro	Cobre	Cuarzo Fusionado
τ	$1,53 \times 10^{-19} [s]$	51,2 días

6.11. Condiciones de Borde para \vec{J}

Consideremos la interfaz de dos medios materiales como en la Figura 6.30. A ambos lados hay campos y densidades de corriente.

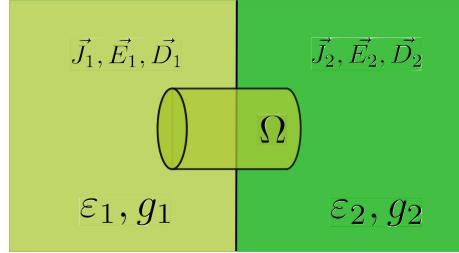


Figura 6.30: Condiciones de Borde

De las condiciones de borde para dieléctricos teníamos que la componente tangencial del campo eléctrico se mantiene (aquí sigue cumpliéndose $\nabla \times \vec{E} = 0$) y que la diferencia de la componente normal del vector desplazamiento es igual a la densidad de carga superficial (sigue cumpliéndose la primera ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell$). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1t} - \vec{E}_{2t} &\Rightarrow \frac{\vec{J}_{1t}}{g_1} = \frac{\vec{J}_{2t}}{g_2} \\ \vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} &= \sigma_\ell \\ \varepsilon_1 \vec{E}_{1n} - \varepsilon_2 \vec{E}_{2n} &= \sigma_\ell \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{\vec{J}_{1n}}{g_1} - \varepsilon_2 \frac{\vec{J}_{2n}}{g_2} = \sigma_\ell\end{aligned}\quad (6.4)$$

Por otra parte, también usaremos la ecuación de continuidad: $\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ para obtener condiciones sobre \vec{J} . Tendremos dos casos interesantes:

- Situación Estacionaria** ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$): Cuando no existe variación de carga en la interfaz se cumple $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Si tomamos un volumen como el del cilindro de la Figura 6.30 obtenemos (se procede en forma similar a la usada para derivar la continuidad de la componente normal del vector \vec{D})

$$J_{1n} = J_{2n}$$

Aquí claramente habrá una carga acumulada en la interfaz ya que las condiciones (6.4) deben cumplirse. Así, al reemplazar la componente normal de \vec{J} en (6.4) se tiene:

$$J_{1n} = \sigma_\ell \left(\frac{\varepsilon_1}{g_1} - \frac{\varepsilon_2}{g_2} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad J_{2n} = \sigma_\ell \left(\frac{\varepsilon_1}{g_1} - \frac{\varepsilon_2}{g_2} \right)^{-1}$$

Cuando se cumple esta condición de borde diremos que el sistema está en estado estacionario o en régimen permanente, la cual es equivalente a suponer: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

- Situación Transitoria:** Cuando hay variación de carga tenemos que $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. Haremos uso ahora de la ecuación de continuidad en el volumen Ω indicado en la Figura 6.30.

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{o en su versión integral} \quad \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Aquí Q es la carga en Ω y haciendo tender el largo del cilindro a cero:

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = J_{2n} \Delta S - J_{1n} \Delta S$$

Y $\frac{\partial Q}{\partial t}$ solo se concentra en la interfaz, luego:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \cdot \Delta S) \Rightarrow J_{2n}\Delta S - J_{1n}\Delta S + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Delta S = 0$$

$$J_{2n} - J_{1n} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Esta es la condición que deben satisfacer las componentes normales del vector densidad de corriente de ambos medios. Esta situación se llama transitoria o transiente.

6.11.1. Caso en que uno de los Medios es un Conductor Perfecto:

Consideremos la interfaz entre un medio material y un conductor puro tal como se muestra en la Figura 6.31.

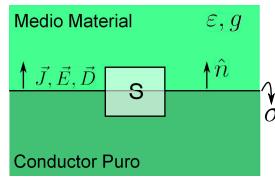


Figura 6.31: Dieléctrico y Conductor Perfecto

Al tomar la superficie Gaussiana S , se tiene:

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \sigma\Delta S$$

Al interior del conductor perfecto el vector polarización es nulo. Luego, los campos cumplen:

$$\varepsilon_0 E_2 - \varepsilon E_1 = \sigma$$

Las condiciones de borde para \vec{J} en este caso son las mismas que desarrollamos anteriormente.

EJEMPLO 30:

Considere el sistema de la Figura 6.32. Se pide:

1. Calcular \vec{J} , \vec{E} y \vec{D} entre las placas conductoras en la condición de equilibrio.
2. Lo mismo, pero en situación transitoria.

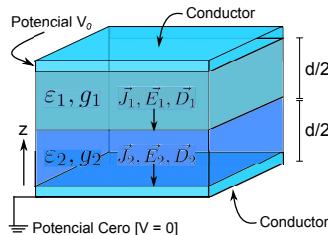


Figura 6.32: Condensador Compuesto sin Acumulación de Carga

Solución:

1. Supondremos que campos y densidades de corrientes tienen dirección según Z. Dado que estamos en la condición de equilibrio, no hay variación en la carga superficial σ entre los dos medios, es decir, se cumple: $\frac{\partial \sigma \Delta S}{\partial t} = 0$ en la interfaz y por lo tanto de la ecuación de continuidad: $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ en régimen permanente. Según vimos esto conduce a la condición:

$$J_{2n} = J_{1n}$$

Para los campos eléctricos supondremos $\vec{E}_i = E_i(-\hat{k})$, con E_i constante para ambos medios. De la ley de Ohm se tiene:

$$\vec{J}_1 = g_1 \vec{E}_1 \quad \text{y} \quad \vec{J}_2 = g_2 \vec{E}_2$$

Por lo tanto:

$$g_1 \vec{E}_1 = g_2 \vec{E}_2 \quad (6.5)$$

Por otro lado, sabemos que la relación entre el voltaje y el campo eléctrico entre dos puntos (1,2) cualquiera es:

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Y haciendo coincidir 1 con el potencial cero y 2 con el potencial V_0 tenemos:

$$V_0 = \left\{ \int_0^{d/2} E_2(-\hat{k}) \cdot dz \hat{k} + \int_{d/2}^d E_1(-\hat{k}) \cdot dz \hat{k} \right\}$$

$$V_0 = E_2 \frac{d}{2} + E_1 \frac{d}{2} \Rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{2V_0}{d} \hat{k}$$

Usando la condición (6.5) obtenemos:

$$\frac{g_2}{g_1} \vec{E}_2 + \vec{E}_2 = -\frac{2V_0}{d} \hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{2g_1 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{E}_1 = -\frac{2g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k}$$

Luego las densidades de corriente son:

$$\vec{J}_2 = -\frac{2g_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{J}_1 = -\frac{2g_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k}$$

Claramente se cumple la continuidad de la componente normal del vector densidad de corriente en la interfaz. Para los vectores desplazamiento tenemos:

$$\vec{D}_2 = -\frac{2\varepsilon_2 g_1 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{D}_1 = -\frac{2\varepsilon_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)} \hat{k}$$

Por lo tanto existirá una distribución de carga σ entre los dos medios materiales dada por la condición:

$$D_2 - D_1 = \sigma$$

Donde se usó la notación $\vec{D}_i = D_i(-\hat{k})$.

Luego:

$$\sigma = \frac{2V_0(\varepsilon_2 g_1 - \varepsilon_1 g_2)}{d(g_1 + g_2)}$$

Es importante notar además que habrá una densidad de carga en la cara interior de los conductores (interfaz entre conductor puro y medio material). Si llamamos σ_1 y σ_2 a las densidades en la placa superior e inferior, sus expresiones son:

$$\vec{D}_1 \cdot (\hat{k}) = \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{2\epsilon_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)}$$

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{k} = \sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = -\frac{2\epsilon_1 g_2 V_0}{d(g_1 + g_2)}$$

2. Consideramos ahora el período transiente para la distribución de carga σ en la interfaz. Usamos la misma notación anterior $\vec{D}_i = -D_i \cdot \hat{k}$, $\vec{E}_i = -E_i \cdot \hat{k}$.

Donde los campos tienen la dirección de la Figura 6.33.

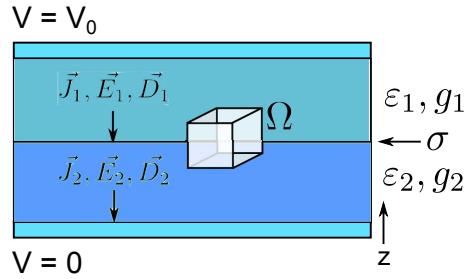


Figura 6.33: Condensador Compuesto con Acumulación de Carga

Según vimos la ecuación de continuidad en el régimen transitorio conduce a la condición de borde:

$$J_2 - J_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Por otra parte, de las condiciones de borde para el vector desplazamiento:

$$D_2 - D_1 = \sigma \Rightarrow \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \sigma \quad (6.6)$$

Además sabemos que:

$$V_0 - 0 = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{d/2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{d/2}^d \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$V_0 = - \int_0^{d/2} (-E_1 \hat{k}) \cdot dz \hat{k} - \int_{d/2}^d (-E_2 \hat{k}) \cdot dz \hat{k}$$

$$V_0 = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} \Rightarrow E_1 + E_2 = \frac{2V_0}{d} \quad (6.7)$$

De (6.6) y (6.7) tenemos el sistema:

$$E_1 + E_2 = \frac{2V_0}{d}$$

$$-\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2 = \sigma$$

$$\epsilon_1 \times (6.6) + (6.7) \Rightarrow \epsilon_1 E_2 + \epsilon_2 E_2 = \frac{2V_0}{d} \epsilon_1 + \sigma \Rightarrow E_2 = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{2V_0}{d} \epsilon_1 + \sigma \right)$$

$$\epsilon_2 \times (6.6) - (6.7) \Rightarrow \epsilon_2 E_1 + \epsilon_1 E_1 = \frac{2V_0}{d} \epsilon_2 - \sigma \Rightarrow E_1 = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{2V_0}{d} \epsilon_2 - \sigma \right)$$

$$\therefore \vec{E}_1 = -\frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{2V_0 \epsilon_2}{d} - \sigma \right) \hat{k} \quad y \quad \vec{E}_2 = -\frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{2V_0 \epsilon_1}{d} + \sigma \right) \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0\varepsilon_2}{d} - \sigma \right) \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{D}_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0\varepsilon_1}{d} + \sigma \right) \hat{k}$$

Luego las densidades de corriente son:

$$\vec{J}_1 = -\frac{g_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0\varepsilon_2}{d} - \sigma \right) \hat{k} = -J_1 \hat{k}$$

$$\vec{J}_2 = -\frac{g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0\varepsilon_1}{d} + \sigma \right) \hat{k} = -J_2 \hat{k}$$

Tomando la diferencia:

$$J_2 - J_1 = \frac{g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0\varepsilon_1}{d} + \sigma \right) - \frac{g_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{2V_0\varepsilon_2}{d} - \sigma \right)$$

$$J_2 - J_1 = \frac{g_2 2V_0 \varepsilon_1}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} - \frac{g_1 2V_0 \varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \sigma \frac{(g_1 + g_2)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \Rightarrow \therefore J_2 - J_1 = \alpha + \beta \sigma$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad:

$$\alpha + \beta \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Solución Homogénea:

$$\sigma(t) = ke^{-\beta t}$$

Solución Particular:

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Basta imponer la condición inicial: $\sigma(t=0) = 0 \Rightarrow k = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\therefore \sigma(t) = \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t} - 1)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{2V_0(g_2\varepsilon_1 - g_1\varepsilon_2)}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}{\frac{g_1 + g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \frac{2V_0(g_2\varepsilon_1 - g_1\varepsilon_2)}{d(g_1 + g_2)}$$

$$\sigma(t) = \frac{2V_0(g_2\varepsilon_1 - g_1\varepsilon_2)}{d(g_1 + g_2)} \left[e^{-\frac{g_1 + g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}t} - 1 \right]$$

Notar que para $t \rightarrow \infty$:

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \sigma_\infty = \frac{2V_0(g_2\varepsilon_1 - g_1\varepsilon_2)}{d(g_1 + g_2)}$$

Que es el resultado obtenido en (1)

6.12. Ley de Voltajes de Kirchoff

Consideremos un sistema de conductores como el de la Figura 6.33

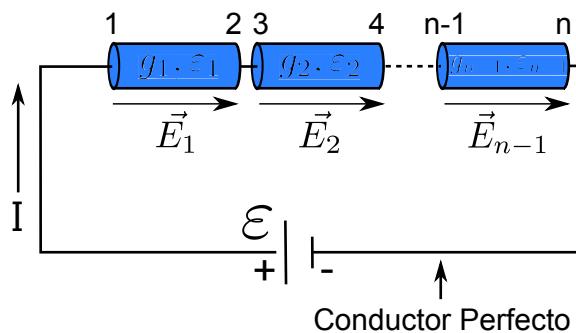


Figura 6.34: Ley de Voltajes de Kirchoff

La diferencia de potencial entre 1 y n es:

$$\Delta V = \int_1^2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{n-1}^n \vec{E}_{n-1} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^n E_i l_i = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + \dots + (V_{n-1} - V_n)$$

Pero $\Delta V = \mathcal{E}$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \Delta V_i - \mathcal{E} = 0$$

\therefore La suma neta de las diferencias de potencial en un loop cerrado es nula. Esto se conoce como "ley de voltajes de Kirchoff"

EJEMPLO 31:

Encontrar el voltaje en el condensador de la Figura 6.35 si este se encuentra inicialmente descargado

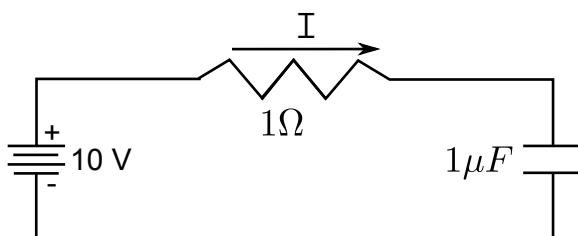


Figura 6.35: Circuito RC en Serie

Solución:

Aplicando ley de voltajes de Kirchoff:

$$10V = V_R + V_C$$

$$10 = iR + V_C$$

Pero $i = i_C = C \frac{\partial V_C}{\partial t}$:

$$10 = C \frac{\partial V_C}{\partial t} + V_C$$

$$10 = 10^{-6} \frac{\partial V_C}{\partial t} + V_C$$

Resolviendo se obtiene:

Solución Homogénea:

$$10^{-6} \frac{\partial V_{Ch}}{\partial t} + V_{Ch} = 0$$

$$V_{Ch} = ke^{-\frac{t}{\tau}} \tau = 10^{-6}$$

Solución Particular:

$$\frac{\partial V_{Cp}}{\partial t} = 0$$

$$V_{Cp} = 10$$

Basta imponer la condición de borde: $V_C(t=0) = 0 \Rightarrow k = -10$

$$\therefore V_C(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})V$$

Notar que para $t \rightarrow \infty$ $V(t) = 10V$. En consecuencia, no hay corriente en el circuito.

6.13. Ley de Corrientes de Kirchoff

Consideremos ahora un sistema de conductores que convergen a un mismo espacio Ω según se muestra en la Figura 6.36.

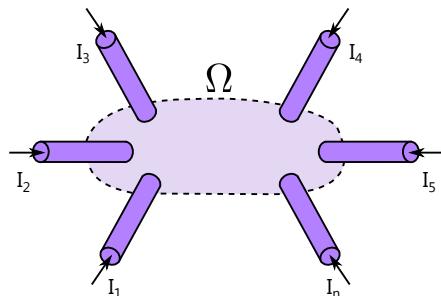


Figura 6.36: Ley de Corrientes de Kirchoff

Si no existe acumulación de carga:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Tomando el volumen Ω que contiene a todos los conductores convergentes:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J} dv = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \dots + \iint_{S_n} \vec{J}_n \cdot d\vec{s}_n = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Si no hay acumulación de carga, la suma neta de corrientes que convergen a un espacio cerrado es nula. Esta es la "ley de corrientes de Kirchoff".

EJEMPLO 32:

Calcular la corriente I de la Figura 6.37 si el condensador se encuentra inicialmente descargado.

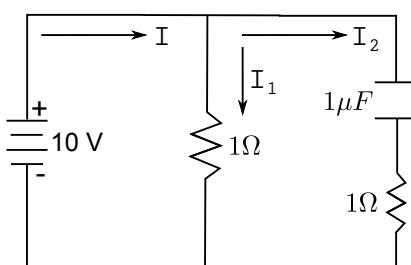


Figura 6.37: Circuito RC en Paralelo

Solución:

1. De la ley de corrientes de Kirchoff obtenemos: $I = I_1 + I_2$
2. De las ecuaciones del condensador sabemos que $I_2 = C \frac{\partial V_C}{\partial t}$
3. De aplicar ley de voltajes de Kirchoff y ley de Ohm se obtiene:

$$I_1 = \frac{V_{R1}}{R} = \frac{10V}{1\Omega} = 10[A]$$

$$I_1 = \frac{V_{R2}}{R} = \frac{10V - V_C}{1\Omega}$$

Igualando las dos expresiones encontradas para la corriente llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$10^{-6} \frac{\partial V_C}{\partial t} = 10 - V_C$$

En el EJEMPLO 31 resolvimos la misma ecuación diferencial con la misma condición inicial, llegando al resultado que se muestra a continuación:

$$V_C(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})V$$

Considerando $\tau = 10^{-6}$:

$$I_2 = 10^{-6} \left(\frac{\partial 10(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{\partial t} \right)$$

$$I_2 = 10^{-6} \left(\frac{10}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$I_2 = 10e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Finalmente:

$$I(t) = 10 \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) [A]$$

Notar que para $t \rightarrow \infty$ $I(t) = 10A$, lo que implica que solo habrá corriente en la resistencia R_1 , es decir, no hay corriente en el condensador.

6.14. Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

Considere el circuito de la Figura 6.38:

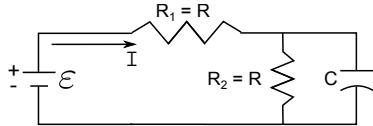


Figura 6.38: Problema 1

Se pide:

1. Determinar la corriente I en función del tiempo si en $t = 0$ la carga del condensador es nula (voltaje nulo).
2. Calcular la corriente para la condición estacionaria ($t \rightarrow \infty$).

Solución:

1. Por la ley de corrientes de Kirchoff:

$$\begin{aligned} I &= I_{R_1} + I_{R_2} + I_C \\ I_{R_2} &= \frac{V_{R_2}}{R} \\ I_C &= C \frac{\partial V_C}{\partial t} \end{aligned}$$

Pero por ley de voltajes de Kirchoff: $V_{R_2} = V_C$

$$I = \frac{\partial V_C}{R} + C \frac{\partial V_C}{\partial t}$$

Utilizando nuevamente la ley de voltajes de Kirchoff y la ley de Ohm:

$$V_{R_1} = \mathcal{E} - V_C$$

$$I = I_{R_1} = \frac{\mathcal{E} - V_C}{R}$$

Entonces formamos la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E} - V_C}{R} &= \frac{V_C}{R} + C \frac{\partial V_C}{\partial t} \\ RC \frac{\partial V_C}{\partial t} + 2V_C &= \mathcal{E} \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación debemos encontrar la solución particular y la homogénea.

Solución Homogénea:

$$V_{Ch}(t) = ke^{-\frac{2}{RC}t}$$

Solución Particular:

$$V_{Cp} = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

Basta aplicar condición inicial: $V_C(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\mathcal{E}}{2} + k \Rightarrow k = -\frac{\mathcal{E}}{2}$

En conclusión:

$$V_C(t) = \frac{\mathcal{E}}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}}{2R} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{\mathcal{E}}{2R}$$

Resulta intuitivo este resultado, pues el condensador durante el régimen transitorio sólo se carga, lo que implica que no conduce una vez cargado. Correspondiendo entonces la corriente I en régimen permanente a la corriente del circuito sin el condensador.

PROBLEMA 2:

Se tiene un par de electrodos de placas planas paralelas entre las cuales se aplica una diferencia de potencia V_0 . En el interior se coloca un dieléctrico perfecto junto con dos secciones de dieléctrico con pérdidas. Para este problema se pide determinar:

1. La distribución de campo eléctrico en todo el sistema (desprecie efectos de borde).
2. La capacidad equivalente C del sistema de electrodos.
3. La conductancia equivalente G del sistema de electrodos.
4. La densidades de cargas en las interfaces del sistema.

Hint: La energía eléctrica:

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int \frac{V_0^2}{d^2} dv \quad \text{y} \quad W_{\text{Condensador}} = \frac{1}{2} CV_0^2$$

Considere profundidad unitaria.

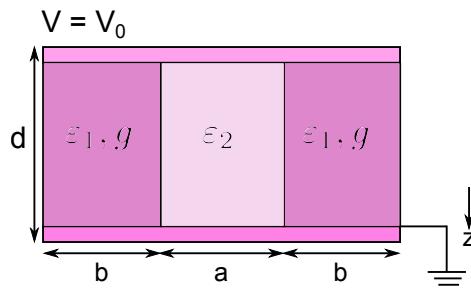


Figura 6.39: Problema 2

Solución:

1. Los campos \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 están los tres en la dirección Z y con el sentido de este mismo vector (van de mayor a menor voltaje). Como estos tres campos son tangenciales a las interfaces del medio, se tienen que $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{3t}$ (condiciones de borde).

Lo que implica que:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \vec{E}$$

Habíamos visto que:

$$\Delta V = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E = \frac{V_0}{d}$$

Luego

$$\vec{E} = \frac{V_0}{z} \hat{z}$$

Fuera de las placas el campo es nulo, pues la carga encerrada será cero.

2. $W_e = W_1 + W_2 + W_3$ como $W_1 = W_3 \Rightarrow W_e = 2W_1 + W_2$

$$W_1 = \frac{\varepsilon_1}{2} \int E^2 dv = \frac{\varepsilon_1}{2} \int \frac{V_0^2}{d^2} dv = \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{V_0^2}{d^2} b \cdot d \cdot 1$$

$$W_2 = \frac{\varepsilon_2}{2} \int \frac{V_0^2}{d^2} dv = \frac{\varepsilon_2}{2} \frac{V_0^2}{d^2} 2a \cdot d \cdot 1$$

Luego:

$$W_e = \frac{V_0^2}{d} (a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1)$$

Sólo nos queda igual a la energía eléctrica del condensador

$$\frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{V_0^2}{d} (a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1) \Rightarrow \therefore C = \frac{2}{d} (a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1)$$

3.

$$\vec{J}_1 = g\vec{E}_1 = \frac{gV_0}{d} \hat{z}$$

$$I = \iint_{\mathcal{A}} \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow I = 2 \iint_{\mathcal{A}} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s}$$

Entonces:

$$I = \frac{2gbV_0}{d}$$

Pero $I = \mathcal{G}V$ entonces:

$$\mathcal{G} = \frac{2gb}{d}$$

4. Se sabe que $\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \rho_S$ pero el campo solo tiene componente tangencial por lo tanto no hay densidad de carga en las interfaces.

PROBLEMA 3:

Un conjunto de n placas conductoras de áreas , están ordenadas formando una pila vertical. La distancia entre las placas sucesivas es d y entre ellas hay un material de conductividad $\mathcal{G} = \text{constante}$. Experimentalmente se encuentra que la resistencia eléctrica entre la primera y segunda placa es 1Ω . Se pide:

1. Calcular la resistencia total cuando $n \rightarrow \infty$.
2. Considere la situación de la Figura 6.40 en el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y calcule la intensidad de corriente que circula por la resistencia de 1Ω conectada entre la cuarta placa y la tierra.

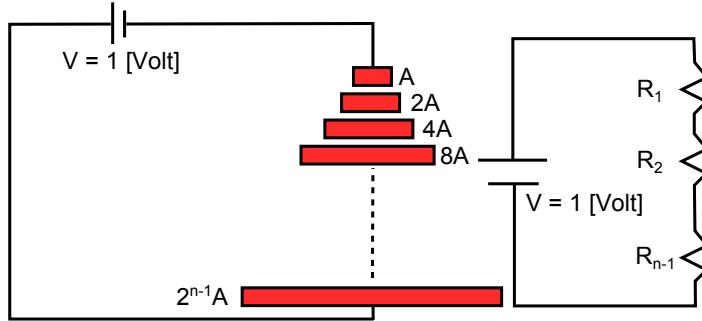


Figura 6.40: Problema 3

Indicación:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Solución:

$$I = \iint_{\mathcal{A}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{A}} g\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$I = \iint_{\mathcal{A}} J\hat{k} \cdot dx dy \hat{k} = J \cdot \mathcal{A} \Rightarrow I = gE\mathcal{A}$$

$$R = \frac{V}{gE\mathcal{A}}$$

$$\nabla V = -\vec{E}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E \Rightarrow dv = -Edz \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dv = - \int_0^d Edz \Rightarrow \underbrace{V_2 - V_1}_{-V} = -Ed \Rightarrow V = Ed$$

$$R = \frac{d}{g\mathcal{A}}$$

$$R_T = \frac{d}{g\mathcal{A}} + \frac{d}{2g\mathcal{A}} + \dots + \frac{d}{2^{n-1}g\mathcal{A}}$$

$$R_{n \rightarrow \infty} = \frac{d}{g\mathcal{A}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{2d}{g\mathcal{A}}$$

Pero $\frac{d}{gA} = R_1 = 1\Omega$ entonces:

$$R_T = 2 \cdot \left(\frac{d}{gA} \right) = 2\Omega$$

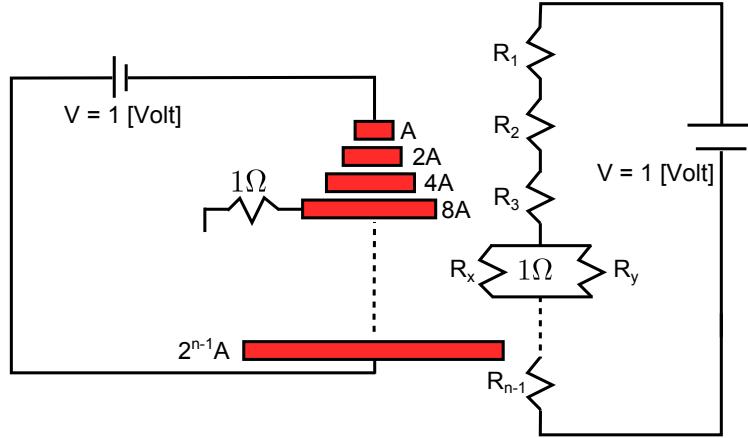


Figura 6.41: Problema 3 - Análisis 2

Calculando:

$$R_{\text{Serie}} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{d}{gA} + \frac{d}{2gA} + \frac{d}{4gA} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} [\Omega]$$

Por lo tanto:

$$R_x = R_T - R_{\text{Serie}} = \frac{1}{4} [\Omega]$$

$$R_{\text{Paralelo: Rx//Ry}} = \frac{R_x \cdot R_y}{R_x + R_y} = \frac{1/4 \cdot 1}{1/4 + 1} = \frac{1}{5} [\Omega]$$

$$R_{T2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{5} = \frac{39}{20} [\Omega]$$

$$I_{T2} = \frac{V_T}{R_{T2}} = \frac{1}{\frac{39}{20}} = \frac{20}{39} [A]$$

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} + V_{R_y} = 1[V]$$

$$I_T \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + V_{R_y} = 1[V]$$

Así:

$$\frac{20}{39} \cdot \frac{7}{4} + V_{R_y} = 1 \Rightarrow V_{R_y} = \frac{4}{39} [V]$$

$$I_{1\Omega} = \frac{V_{1\Omega}}{1\Omega} = \frac{\frac{4}{39} [V]}{1\Omega} = \frac{4}{39} [A]$$

PROBLEMA 4:

Se está produciendo un derrame de una sustancia química cargada eléctricamente en una calle de ancho D . Suponga que la sustancia es líquida y se reparte de forma uniforme sobre la calle, de modo que se deposita una película muy delgada de densidad de carga superficial σ [C/m^2] sobre la carpeta de la vía, la cual alcanza una velocidad constante v_0 , según se muestra en la Figura 6.42.

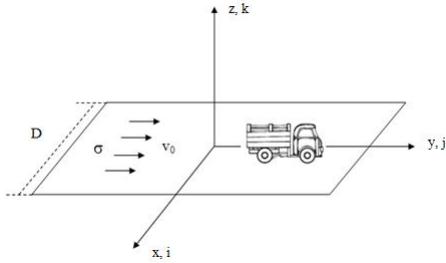


Figura 6.42: Problema 4

Se pide determinar:

1. Densidad de corriente superficial \vec{K} [A/m] sobre la calle.
2. Estimar el campo magnético \vec{B} producido en la zona central de la calle, cerca del piso (eje Z cerca del origen).
3. Si por la vía circula un camión en sentido \hat{j} llevando un mineral que posee una carga eléctrica total Q , ¿experimenta alguna fuerza el camión? Justifique su respuesta.

Solución:

1. Para calcular la densidad de corriente superficial, comenzamos calculando ΔI , que por definición es igual a

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Y sabemos, que $\Delta Q = \sigma \Delta S = \sigma D \Delta x$, entonces:

$$\Delta I = \frac{\sigma D \Delta x}{\Delta t} = \sigma D \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sigma D v_0$$

Además, por definición, tenemos que:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \hat{j}$$

Entonces, por lo anterior, tenemos que:

$$\vec{K} = \sigma v_0 \hat{j}$$

2. Para calcular el campo magnético, usaremos la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sigma v_0 D \Rightarrow 2BD = \mu_0 \sigma v_0 D \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \sigma v_0}{2}$$

Para encontrar la dirección de B , tenemos que usar la regla de la mano derecha, de ella concluimos que:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} \hat{i} & z > 0 \\ -\frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} \hat{i} & z < 0 \end{cases}$$

3. Para calcular la fuerza, usamos la expresión:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Suponemos que la velocidad del camión es $\vec{v} = v_0\hat{j}$ entonces la fuerza es:

$$\vec{F} = Qv_0\hat{j} \times \frac{\mu_0\sigma v_0}{2}\hat{i} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{Qv_0^2\mu_0\sigma}{2}\hat{k}$$

6.15. Problemas Propuestos

PROBLEMA 1:

En el circuito de la siguiente figura, el interruptor K_1 permanece cerrado y el interruptor K_2 abierto hasta que el condensador C se carga a un potencial V_0 . En $t = 0$ se abre K_1 y se cierra K_2 . Para $t \geq 0$ determinar:

1. El voltaje en el condensador.
2. El tiempo que demora el condensador en descargarse.
3. La potencia en la resistencia en función del tiempo.

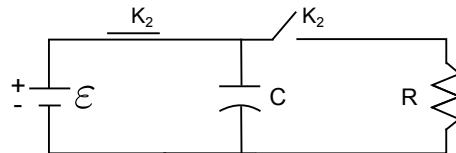


Figura 6.43: Problema 1 - Propuesto

PROBLEMA 2:

Se tiene un tren de juguete que se mueve sobre rieles colocados en forma de circunferencia. Los rieles tienen una resistencia r por unidad de longitud y el tren tiene una resistencia R . Se aplica una diferencia de potencial V_0 entre los rieles.

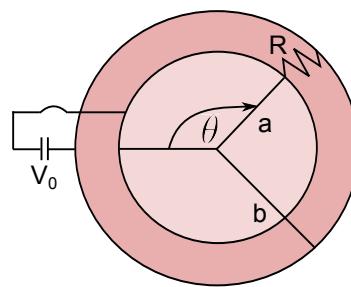


Figura 6.44: Problema 2 - Propuesto

1. Encuentre y dibuje el circuito equivalente.
2. Encuentre la corriente que pasa por el tren cuando este se encuentra formando un ángulo θ con la dirección de referencia.

PROBLEMA 3:

Se quiere energizar un circuito electrónico por el que circulan 20 [mA] a 2400 [V]. Para esto se dispone de una fuente de tensión de corriente continua de 3000 [V] que tiene una resistencia interna de 10 [$k\Omega$]; y de un divisor de tensión formado por dos resistencias; como se indica en la siguiente figura.

Se pide:

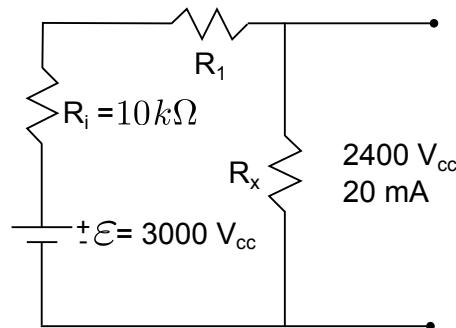


Figura 6.45: Problema 3 - Propuesto

1. Calcular las resistencias R_1 y R_2 para alimentar el circuito de modo que la potencia entregada por la fuente de tensión sea mínima. Además calcule esta potencia.
2. En el mismo circuito se quiere además hacer funcionar un galvanómetro ideal (sin resistencia interna), que funciona solamente si la corriente es igual o mayor que 20 [mA]. El circuito a emplear en esta parte es el que se muestra a continuación:

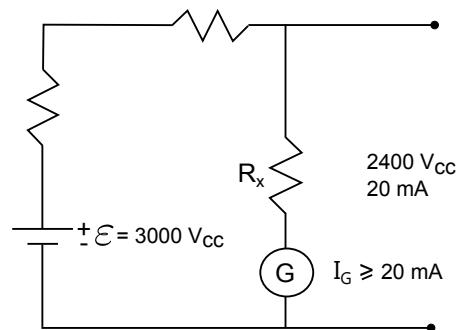


Figura 6.46: Problema 3 - Propuesto - Análisis 2

Repita lo pedido en (1)

PROBLEMA 4:

Una barra de cobre de conductividad g y sección rectangular ha sido deformada como se indica en la Figura 6.47. Los parámetros del sistema son:

1. $g = 5,8 \times 10^7$
2. $h_1 = 1 \text{ [m]}$
3. $h_2 = 0,2 \text{ [m]}$
4. $b = 0,3 \text{ [m]}$

(A) Suponiendo que una corriente I constante fluye atravesando el conductor en el sentido radial ($\hat{\rho}$) se pide:

- a) Calcular la densidad de corriente (\vec{J}).
- b) La resistencia entre las caras definidas por $\rho = h_1$ y $\rho = h_2$
- c) Calcular las pérdidas de energía en el conductor.

(B) Suponiendo que una corriente I constante fluye atravesando el conductor en el sentido tangencial ($\hat{\theta}$) se pide:

- a) Calcular la densidad de corriente (\vec{J}).
- b) La resistencia entre las caras definidas por $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$
- c) Calcular las pérdidas de energía en el conductor.

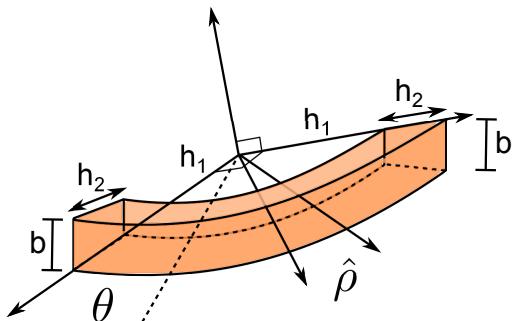


Figura 6.47: Problema 4 - Propuesto

Capítulo 7

Magnetostática en el Vacío

7.1. Introducción

El estudio de la magnetostática comprende el fenómeno del campo magnético producido por corrientes estacionarias. o sea , se cumple $\vec{J} = \text{constante}$ para lo cual, los campos no dependen del tiempo.

A pesar de que los efectos magnéticos de los imanes se conocían ya en la antigua Grecia, fue Oersted quien en 1819 propuso un primer modelo para explicar la desviación que sufre la aguja de una brújula por la acción de una corriente eléctrica. Sus resultados condujeron a la determinación de la fuerza que experimenta una carga en presencia de una corriente eléctrica, y posteriormente a la de las fuerzas entre circuitos eléctricos.

Para presentar estos conceptos, seguiremos un tratamiento análogo al de electrostática - esto es - primero veremos la fuerza sobre una carga y luego definiremos el concepto de campo magnético a partir de esa fuerza. Posteriormente extenderemos el concepto a circuitos eléctricos en general.

7.2. Fuerza de una Corriente sobre una Carga Eléctrica

Consideremos una carga eléctrica q con velocidad \vec{u} y una corriente I que circula a través de un circuito eléctrico (que llamaremos Γ') según se muestra en la Figura 7.1.

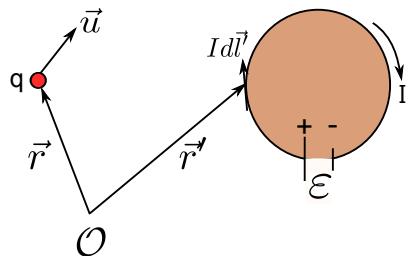


Figura 7.1: Carga Móvil frente a un Circuito

Se encuentra experimentalmente que la fuerza que experimenta la carga está definida por la expresión:

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Donde:

\vec{u} : Es la velocidad de carga q

$Id\vec{l}$: Es el elemento diferencial de corriente por el circuito Γ'

\vec{r} : Es la posición de q

\vec{r}' : Es el recorrido del circuito Γ' indicando la posición del elemento $Id\vec{l}$

EJEMPLO 33:

Calcule la fuerza que ejerce un circuito circular de radio R y corriente I sobre una carga q ubicada en la posición $z = z_0$, para los siguientes casos:

1. La carga está inmóvil.
2. Carga se mueve con velocidad inicial $\vec{u} = v_0\hat{k}$
3. Carga se mueve con velocidad inicial $\vec{u} = v_0\hat{j}$
4. Carga se mueve con velocidad inicial $\vec{u} = v_0\hat{i}$

Solución:

Consideremos la configuración de la Figura 7.2.

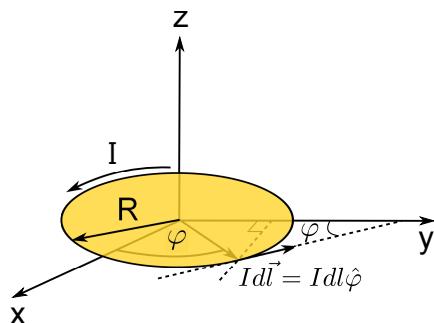


Figura 7.2: Circuito Circular

Primero calculamos la integral de línea \oint sobre el circuito circular, de radio R y corriente I , sobre el eje Z. Aquí Γ' es el círculo de radio R del circuito. Tenemos:

1. $Id\vec{l} = Idl\hat{\phi} = Idl(-\sin(\varphi)\hat{i} + \cos(\varphi)\hat{j})$, con $dl = Rd\varphi$
2. $\vec{r}' = R\hat{\rho} = R(\cos(\varphi)\hat{i} + \sin(\varphi)\hat{j})$
3. $\vec{r} = z\hat{k}$
4. $\vec{r} - \vec{r}' = -R\cos(\varphi)\hat{i} - R\sin(\varphi)\hat{j} + z\hat{k}$
5. $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{R^2 + z^2}$

Luego:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{\sqrt{R^2 + z^2}} (-\sin(\varphi)\hat{i} + \cos(\varphi)\hat{j}) \times (-R\cos(\varphi)\hat{i} - R\sin(\varphi)\hat{j} + z\hat{k}) \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{\sqrt{R^2 + z^2}} [R\sin^2(\varphi)\hat{k} + z\sin(\varphi)\hat{j} + R\cos^2(\varphi)\hat{k} + z\cos(\varphi)\hat{i}] \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{\sqrt{R^2 + z^2}} [z\cos(\varphi)\hat{i} + z\sin(\varphi)\hat{j} + R\hat{k}] \Leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2IR^2\pi}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{k}\end{aligned}$$

Luego la expresión para la fuerza sobre una carga q en la posición Z es:

$$\vec{F} = q \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \vec{u} \times \hat{k}$$

Entonces:

1. Si la carga está estática ($\vec{u} = 0$) permanece estática $\vec{F} = 0$.
2. Si tiene una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{k}$ se tiene $\vec{F} = 0$, es decir, la carga sigue moviéndose con la misma velocidad.
3. Si se le da una velocidad inicial en el sentido \hat{j} , i.e. $\vec{v}_0 = v_0\hat{j}$ experimenta una fuerza dada por la expresión:

$$\vec{F}_q = qv_0 \cdot \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{\sqrt{R^2 + z_o^2}} \hat{i}$$

4. Si se le da una velocidad inicial en el sentido \hat{i} , i.e. $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$ experimenta una fuerza dada por la expresión:

$$\vec{F}_q = qv_0 \cdot \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{\sqrt{R^2 + z_o^2}} (-\hat{j})$$

7.3. Definición de Campo Magnético

Habíamos dicho que la expresión de la fuerza que produce un circuito sobre una carga tiene la forma:

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Es importante notar que las variables que definen a la carga se encuentran fuera de la integral. Por otra parte, al interior de la integral sólo se encuentran los parámetros del circuito Γ' y la corriente que circula a través de él. Así, el efecto que produce la circulación de la corriente está contenido completamente en la integral.

Se define el campo magnético que produce el circuito como:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Este campo magnético corresponde a un campo vectorial que representa la perturbación en todo el espacio que aparece como resultado de la circulación de la corriente I .

Con ello, la fuerza que sufre una carga en presencia de \vec{B} es:

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B} \quad \text{Fuerza de Lorentz}$$

Las unidades del campo magnético se obtienen de:

$$[F] = [q][V][B] \Rightarrow [B] = \frac{[F]}{[q][V]} = \frac{[N]}{[C][m/s]} = [T] = 1 \text{ Tesla}$$

o sea, una carga de 1 [C] que se mueve con velocidad de 1 [m/s] en presencia de un campo magnético de 1 [T] experimenta la fuerza de 1 [N]. En la práctica el Tesla resulta ser una unidad muy grande, por ello se acostumbra usar el Gauss [G], con la equivalencia:

$$1[T] = 10^4[G]$$

EJEMPLO 34:

Determine el campo magnético del circuito circular del ejemplo anterior en los siguientes puntos:

1. Cualquier punto del eje Z.
2. Obtenga una expresión para el campo en cualquier punto del plano XY, con $x^2 + y^2 > R^2$

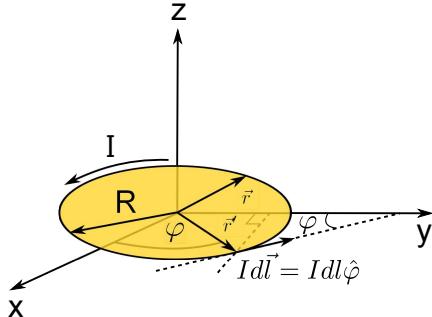


Figura 7.3: Campo Magnético de Circuito Circular

1. Para el ejemplo anterior tenemos que el campo magnético producido por el circuito circular en el punto z_0 del eje Z es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \hat{k}$$

Por lo tanto, dejando variable z_0 , el campo en cualquier punto z será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{k}$$

2. Tenemos:

a) $I\vec{dl} = Idl\hat{\varphi} = Idl(-\sin(\varphi)\hat{i} + \cos(\varphi)\hat{j})$ con $dl = Rd\varphi$

b) $\vec{r}' = R\hat{\varphi} = R(\cos(\varphi)\hat{i} + \sin(\varphi)\hat{j})$

c) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

d) $\vec{r} - \vec{r}' = (x - R\cos(\varphi))\hat{i} + (y - R\sin(\varphi))\hat{j}$

e) $\|\vec{r} - \vec{r}'\|:$

$$\begin{aligned} &\sqrt{R^2 \cos^2(\varphi) + R^2 \sin^2(\varphi) - 2R_x \cos(\varphi) - 2R_y \sin(\varphi) + x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{R^2 - 2R_x \cos(\varphi) - 2R_y \sin(\varphi) + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R_x \cos(\varphi) - 2R_y \sin(\varphi) + x^2 + y^2}} (-\sin(\varphi)\hat{i} + \cos(\varphi)\hat{j}) \times ((x - R\cos(\varphi))\hat{i} + (y - R\sin(\varphi))\hat{j}) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R_x \cos(\varphi) - 2R_y \sin(\varphi) + x^2 + y^2}} [(R\sin^2(\varphi) - y\sin(\varphi))\hat{k} + (R\cos^2(\varphi) - x\cos(\varphi))\hat{k}] \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R_x \cos(\varphi) - 2R_y \sin(\varphi) + x^2 + y^2}}^3 [(R - y \sin(\varphi) - x \cos(\varphi))\hat{k}]$$

El problema es ahora resolver esta integral, ¡cosa nada fácil! (tratar de hacerlo). De cualquier forma, el campo en el plano XY sólo tiene componente según \hat{k} y será positivo si está dentro del círculo y negativo fuera de él (conviene hacer el esfuerzo de esta visualización).

7.3.1. Campo Magnético Producido por una Carga Puntual

Consideremos una carga puntual q moviéndose con velocidad \vec{u} , según se muestran en la Figura 7.4.

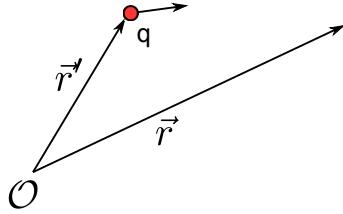


Figura 7.4: Campo Magnético de una Carga Puntual

Usando la expresión que habíamos definido para el campo magnético del circuito - en este caso el campo magnético que produce la carga es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Pero aquí: $Id\vec{l} = \frac{dq}{dt}dl\hat{u} = dq\frac{dl}{dt}\hat{u}$, pero $dq \rightarrow q$, $\frac{dl}{dt} = \|\vec{u}\|$ y $d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$ en consecuencia, el campo producido por una carga en movimiento es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{u} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

7.3.2. Campo Magnético Producido por Distribuciones de Corriente

Para el caso de distribuciones de corriente en volumen como las de la Figura 7.5 se usa el vector densidad de corriente.

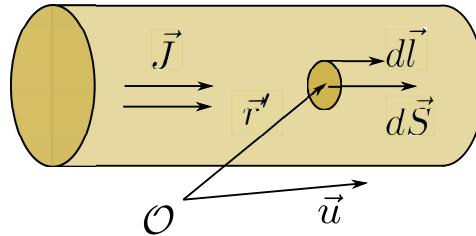


Figura 7.5: Campo Magnético de Distribuciones de Corriente

Aquí: $Id\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{J}dv'$, por lo tanto el campo magnético es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

En donde V' es todo el volumen en donde hay \vec{J} .

Así entonces, el efecto que produce una corriente puede representarse a través de su campo magnético, el cual provoca una perturbación en todo el espacio y puede medirse ya sea poniendo una carga en movimiento o con un circuito adicional. En ambos casos se observarán fuerzas que actuarán sobre estos últimos elementos (carga y/o circuito se moverán).

7.4. Ley de Biot - Savart

En 1820 Jean Baptiste Biot y Felix Savart generalizaron los resultados obtenidos por Oersted. Estos resultados fueron presentados 1 mes después por Ampère. Consideremos dos circuitos que llevan corrientes I e I' según se muestra en la siguiente figura:

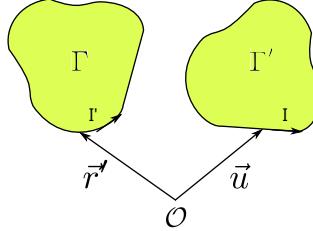


Figura 7.6: Interacción de Dos Circuitos

Biot y Savart demostraron que la fuerza neta que ejerce el circuito Γ' sobre Γ está dada por la expresión:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} I' I d\vec{l} \times \frac{(d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

La expresión diferencial de esta ecuación, que indica la fuerza que ejerce el circuito Γ' sobre el elemento del circuito Γ es:

$$d\vec{F} = \frac{I d\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma'} I' d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad \text{o} \quad d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Donde $\vec{B}(\vec{r})$ es el campo magnético producido por el circuito Γ' en \vec{r} .

Notar que una vez determinado el campo magnético del circuito Γ' , podemos calcular la fuerza sobre el otro circuito ocupando la fórmula:

$$\vec{F} = \int_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

EJEMPLO 35:

Considere un circuito constituido por un conductor muy delgado que va de $-\infty$ a $+\infty$ en el eje Y. Este conductor lleva una corriente I_0 . Se pide calcular la fuerza sobre una espira cuadrada de lado $2a$ con corriente I_1 según se muestra en la Figura 7.7.

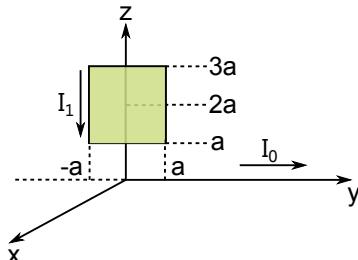


Figura 7.7: Circuito frente a Corriente Lineal

Solución:

Primero calculamos el campo magnético producido por el conductor infinito en el plano YZ. Consideremos un punto P localizado en el eje Z.

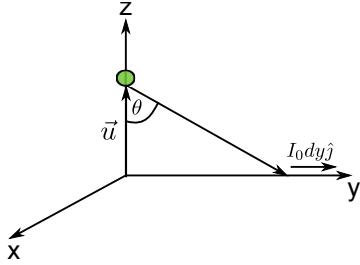


Figura 7.8: Campo de Conductor Infinito

$$1. \vec{r} = z\hat{k}$$

$$2. \vec{r}' = y\hat{j}$$

$$3. I'dl = I_0 dy \hat{j}$$

$$4. \vec{B}(\vec{r}):$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_0 \frac{dy}{\sqrt{y^2 + z^2}} \hat{j} \times (-y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zdy}{\sqrt{y^2 + z^2}} \hat{i}$$

Haciendo el cambio de variable: $y = z\tan(\theta) \Rightarrow dy = z(1 + \tan^2(\theta))d\theta$ se tiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{z^2(1 + \tan^2(\theta))d\theta}{\sqrt{z^2\tan^2(\theta) + z^2}} \hat{i} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi z} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi z} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}}$$

$$1 + \tan^2(\theta) = 1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi z} \hat{i} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)d\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi z} \cdot \sin(\theta)|_0^{\pi/2} \hat{i} \Rightarrow \therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi z} \hat{i}$$

Ahora calculemos la fuerza:

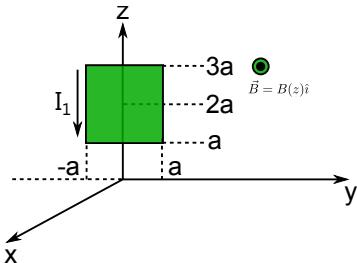


Figura 7.9: Fuerza sobre Conductor Rectangular

Para las corrientes en el sentido \hat{k} se tiene:

$$d\vec{F}_1 = I_1 dz \hat{k} \times B(z) \hat{i} = I_1 dz B(z) \hat{j}$$

Para las de sentido $-\hat{k}$ se tiene:

$$d\vec{F}_2 = I_1 dz (-\hat{k}) \times B(z) \hat{i} = -I_1 dz B(z) \hat{j}$$

Entonces: $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = 0$, por lo que bastaría analizar:

Para el segmento en $z = a$ se tiene:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_3 &= I_1 dy \hat{j} \times B(a) \hat{i} = -I_1 B(a) dy \hat{k} \\ \Rightarrow \vec{F}_3 &= -I_1 B(a) 2a \hat{k} = -I_1 \cdot \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} 2a \hat{k} = -\frac{I_1 I_0 \mu_0}{\pi} \hat{k} \end{aligned}$$

Para el segmento en $z = 3a$ se tiene:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_4 &= I_1 dy (-\hat{j}) \times B(3a) \hat{i} = I_1 B(3a) dy \hat{k} \\ \Rightarrow \vec{F}_4 &= I_1 \cdot \frac{\mu_0 I_0}{2\pi 3a} 2a \hat{k} = \frac{I_1 I_0 \mu_0}{3\pi} \hat{k} \\ \therefore \vec{F}_{\text{neta}} &= \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \frac{I_1 I_0 \mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \hat{k} = -\frac{2I_1 I_0 \mu_0}{3\pi} \hat{k} \end{aligned}$$

EJEMPLO 36:

En este ejemplo calcularemos la fuerza neta que experimenta un loop de corriente (o espira) en presencia de un campo magnético, y a partir de esto determinaremos el torque. El concepto del torque producido por un campo magnético es muy importante en la comprensión del comportamiento de las partículas cargadas orbitando (el modelo de la materia que veremos más adelante), motores y generadores eléctricos.

Consideremos un loop de corriente rectangular de largo l y ancho w , el cual está expuesto a un campo magnético uniforme de módulo B tal como se ve en la Figura 7.10.

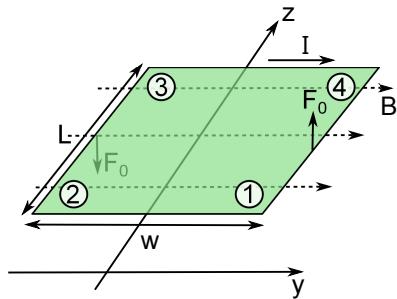


Figura 7.10: Torque Magnético

En esta figura se puede ver que $d\vec{l}$ es paralelo a \vec{B} en los lados 1-2 y 3-4 del loop y ninguna fuerza es ejercida en esos lados. Sólo hay fuerza en los otros dos lados, entonces la fuerza neta sobre el circuito es:

$$\vec{F} = I \int_2^3 d\vec{l} \times \vec{B} + I \int_4^1 d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I \int_2^3 dz \hat{k} \times \vec{B} + I \int_1^4 dz (-\hat{k}) \times \vec{B}$$

Es decir, la fuerza neta es cero, por lo tanto el circuito no experimenta movimiento de traslación neto (no se desplaza).

Sin embargo, las fuerzas de cada lado están aplicadas en lugares diferentes y ; en consecuencia, producirán un torque neto sobre el circuito. Para examinar esta situación, consideremos el caso en que el plano del circuito forma un ángulo α con el campo magnético según se ilustra en la Figura 7.11.

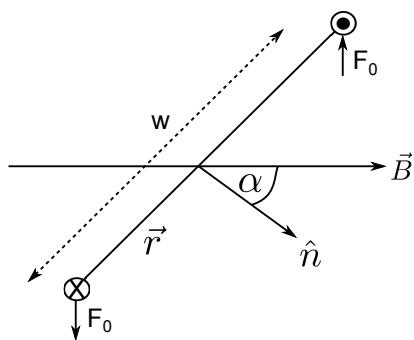


Figura 7.11: Fuerza y Torque

El elemento diferencial del *torque* (o el momento mecánico de fuerza) sobre un elemento de corriente del circuito es:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

Y sus unidades son Newton-metros ($N \cdot m$). Por lo tanto, el torque neto es:

$$\oint_{\Gamma} d\vec{\tau} = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times d\vec{F} = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Donde Γ es la trayectoria del circuito. Es decir:

$$\vec{\tau} = I \int_2^3 \vec{r} \times dz \hat{k} \times \vec{B} + I \int_4^1 \vec{r} \times dz \hat{k} \times \vec{B}$$

Y dado que el campo es constante:

$$\vec{\tau} = \frac{IBwl}{2} \sin(\alpha)(-\hat{k}) + \frac{IBwl}{2} \sin(\alpha)(-\hat{k}) = -IBwl \sin(\alpha) \hat{k}$$

Así, cuando el plano del circuito es paralelo al campo magnético, éste experimenta el torque máximo. En la posición de equilibrio el vector normal a la superficie del circuito \hat{n} es paralelo al campo magnético y no hay torque.

7.5. Ley Circuital de Ampère

Consideremos una región Ω del espacio en donde existe corriente fluyendo según se muestra en la Figura 7.12.

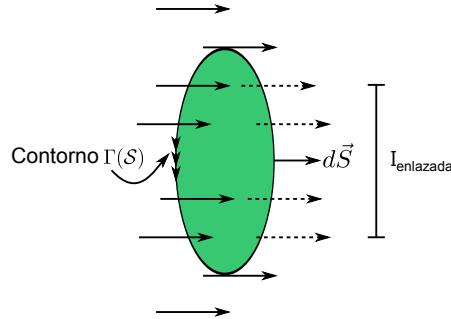


Figura 7.12: Ley Circuital de Ampère

Si tomamos una superficie S cualquiera por la cual atraviesa una corriente total enlazada, en un camino Γ , entonces la Ley Circuital de Ampère establece lo siguiente:

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlazada}}$$

En donde Γ es el contorno de la superficie S recorrido en el sentido de la mano de derecha en torno del vector del elemento de superficie Φ , según se muestra en la Figura 7.12.

Notar que cuando se conoce el vector densidad de corriente \vec{J} como en la Figura 7.13, la corriente enlazada es:

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

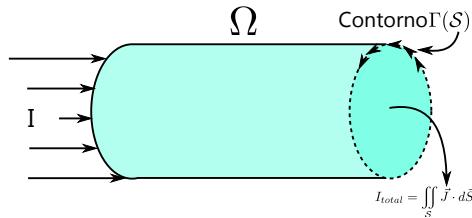


Figura 7.13: Corriente Enlazada

Es muy importante respetar el sentido del contorno de la superficie, esto es, mantener la regla de la mano derecha, cuando se aplica esta ley.

Es usual definir la ley de Ampère en términos del vector intensidad de campo magnético \vec{H} el cual se define de la expresión:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Donde μ_0 es la permeabilidad del espacio vacío igual a $4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] según vimos anteriormente. Con esta definición la ley circuital de Ampère se puede escribir como:

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

EJEMPLO 37:

Calcule el campo producido por una bobina infinita de N espiras (vueltas) por unidad de largo y que lleva una corriente I .

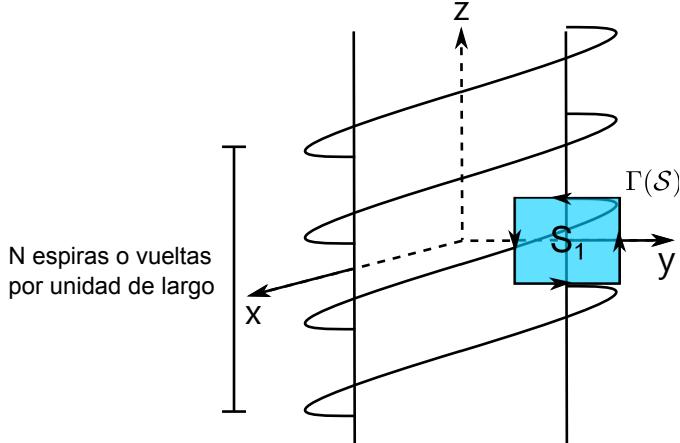


Figura 7.14: Campo Bobina

Solución:

Por simetría los campos tendrán dirección según Z . Llamemos a los campos en el interior: $\vec{B}_i = B_i \hat{k}$ y en el exterior $\vec{B}_e = B_e \hat{k}$.

Por la geometría del problema, el campo afuera puede suponerse despreciable, ya que el campo de espiras continuas se cancela.

Para la interior tomamos el contorno $Id\vec{l}$ de la superficie S cuya mitad esta dentro de la bobina y la otra esta afuera. Se cumple:

$$\oint_{\Gamma_i(S)} \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{total}}$$

Pero tomando una trayectoria de largo l en el eje Z se tiene $I_{\text{total}} = NIl$, ya que no hay corriente enlazada afuera de la bobina. Luego:

$$-B_il = -\mu_0 NIl \Rightarrow \therefore \vec{B}_i = \mu_0 NI \hat{k}$$

La corriente enlazada es negativa dado el sentido de la trayectoria utilizada en la Figura 7.14. Así, en un solenoide (o bobina) ideal el campo al interior es constante y nulo en el exterior.

7.6. Generalización de la Tercera Ecuación de Maxwell

Aplicando el teorema de Stokes a la integral de línea de la ley circuital de Ampère se tiene:

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$$

Además, en términos del vector densidad de corriente la corriente total enlazada por el contorno $I d\vec{l}$ es:

$$I_{\text{enlazada}} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Esquemáticamente esto se muestra en la Figura 7.15. Reemplazando valores obtenemos:

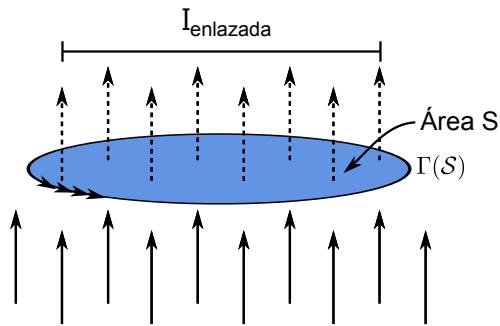


Figura 7.15: Tercera Ecuación de Maxwell

$$\iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Y esta ecuación se cumple para cualquier superficie S , luego:

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

 3^{a} ecuación de Maxwell

Dado que $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ esta ecuación también se puede escribir como:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

En termino físicos decimos que las líneas de campo magnético rotan alrededor de \vec{J} . O que las líneas de campo magnético \vec{B} “aparecen” alrededor de una corriente dada.

7.7. Generalización de la Cuarta Ecuación de Maxwell

Otro resultado experimental es que a diferencia del caso de los campos eléctricos que nacen y terminan en cargas eléctricas, en el caso del campo magnético no existen fuentes de donde nazcan líneas de campo, es decir, no existen cargas magnéticas. Esto se traduce en que toda línea de campo magnético es cerrada. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad 4^a \text{ ecuación de Maxwell}$$

Si integramos esta ecuación en un volumen cualquiera tenemos:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{B} dv = 0 \Rightarrow \iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

En otras palabras, el flujo neto del campo magnético en cualquier superficie cerrada es nulo. Esto se muestra en la Figura 7.16.

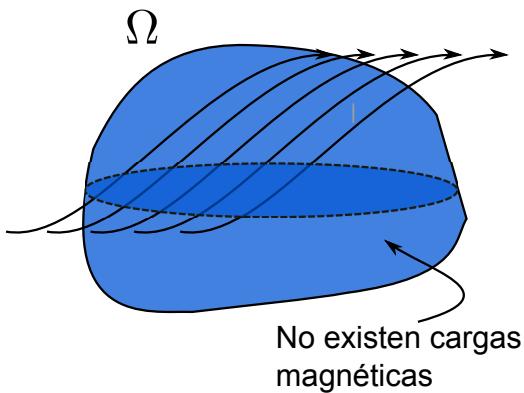


Figura 7.16: Inexistencia de Cargas Magnéticas

En la Figura 7.16 entran a la superficie un número igual de líneas de campo que salen de dicha superficie.

7.8. Movimiento de una Carga Puntual en el Interior de un Campo Magnético

Una característica importante de la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada móvil es que la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. En efecto, la expresión de la Fuerza de Lorentz es:

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

La fuerza magnética por consiguiente no realiza trabajo sobre la partícula y la energía cinética no se ve afectada por esta fuerza. Así, la fuerza magnética solo modifica la dirección de la velocidad pero no su módulo. En el caso especial en que la velocidad de una partícula sea perpendicular a un campo magnético uniforme, como se ve en la Figura 7.17, la partícula se mueve describiendo una órbita circular.

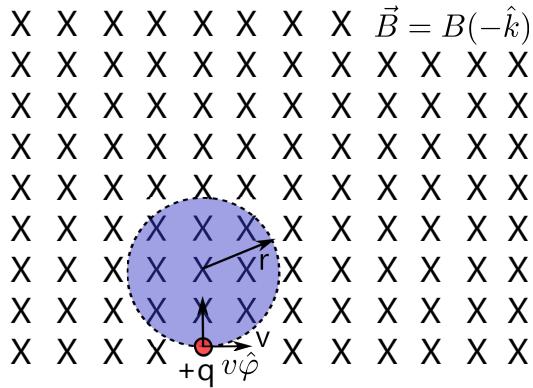


Figura 7.17: Movimiento de Cargas en un Campo Magnético

La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular. Podemos relacionar el radio de la circunferencia con el campo magnético y la velocidad de la partícula haciendo que la fuerza resultante sea igual a la masa m multiplicada por la aceleración centrípeta $v^2/r\hat{\rho}$. La fuerza resultante en este caso es $qvB\hat{\rho}$ puesto que v y B son perpendiculares. Así pues la segunda ley de Newton nos da:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Por lo tanto, la partícula cargada se mueve en un plano perpendicular al campo magnético uniforme que está dirigido hacia el plano de papel (indicado por las cruces). La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de la partícula haciendo que se mueva en una circunferencia de radio r que satisface la ecuación anterior.

La frecuencia angular del movimiento circular es:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

Y su período vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Es importante notar que la frecuencia no depende del radio de la órbita ni de la velocidad de la partícula. Esta frecuencia se denomina *frecuencia ciclotrón*.

La componente de la velocidad paralela a B no se ve influida por el campo magnético. Consideremos por ejemplo un campo magnético uniforme en la dirección Z y sea v_z la componente de la velocidad de la partícula paralela al campo. En un sistema de referencia que se mueve en la dirección Z con velocidad v_z , la partícula tiene su velocidad perpendicular al campo y se mueve en una circunferencia contenida en el plano XY. En el sistema de referencia original la trayectoria de la partícula es una hélice que se enrolla alrededor de las líneas de B , como se muestra en la Figura 7.18.

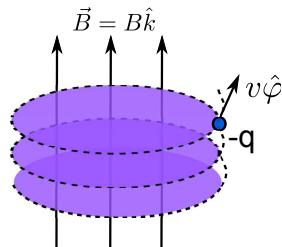


Figura 7.18: Trayectoria Helicoidal

Cuando una partícula cargada tiene una pequeña componente de velocidad paralela al campo magnético B , se mueve con una trayectoria helicoidal.

7.8.1. Selector de Velocidades

La fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve en el interior de un campo magnético uniforme puede equilibrarse por una fuerza electrostática. Dado que la fuerza eléctrica tiene la dirección del campo eléctrico (en el caso de partículas positivas) y la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético, los campos eléctrico y magnético deben ser perpendiculares entre sí, según se muestra en el arreglo de la Figura 7.19. En esa configuración se tiene una región del espacio entre las placas de un condensador, en el cual existe un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre si.

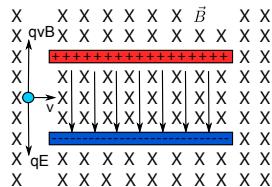


Figura 7.19: Selector de Velocidades

Cuando una partícula positiva se mueve hacia la derecha experimenta una fuerza eléctrica dirigida hacia abajo qE y otra fuerza magnética dirigida hacia arriba $qv \cdot B$, que se equilibran si $vB = E$. Si la carga es negativa, estarán invertidas ambas fuerzas. Luego, para que las cargas pasen, sin ser interceptadas, la velocidad cumple con la condición $v = E/B$, independiente de la masa y la carga de la partícula. Es decir, las cargas que pasan se seleccionan en base a su velocidad exclusivamente.

7.8.2. Espectrógrafo de Masas

El espectrógrafo de masas, fabricado en primer lugar por Aston en 1919, fue diseñado para medir las masas de los isótopos. Mide la razón masa - carga de los iones (cargas positivas), determinando la velocidad de éstos; para después medir el radio de su órbita circular en el interior de un campo magnético uniforme. El cuociente masa a carga viene dado por:

$$\frac{m}{q} = \frac{Br}{v}$$

En donde B es campo magnético, r el radio de la órbita circular y v la velocidad de la partícula.

Un dibujo esquemático de un espectrógrafo de masas se muestra en la Figura 7.20.

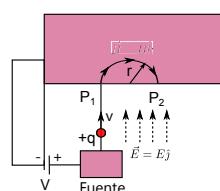


Figura 7.20: Espectrógrafo de Masas

En la Figura 7.20, se ven iones procedentes de la fuente, que son acelerados por un campo eléctrico y entran en un espacio que contiene un campo magnético uniforme (aquí el campo eléctrico es nulo). Si los iones parten del reposo y se mueven a través de una diferencia de potencial V , su energía cinética - cuando entren en P_1 - es igual a la pérdida de energía potencial qV .

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Los iones se mueven en una circunferencia de radio r e inciden sobre una película fotográfica en el punto $P2$, a una distancia $2r$ del punto en el que entraron en el electroimán. La velocidad v puede eliminarse de las ecuaciones para hallar q/m en función de las magnitudes conocidas V , B y r . El resultado es:

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}$$

7.9. Potencial Magnético Vectorial

Similarmente a lo ocurrido en electrostática - cuando definímos un potencial desde el cual se obtenía el campo, para simplificar los cálculos de campos magnéticos - se recurre al concepto de potencial magnético vectorial.

Dado que sabemos que la divergencia de \vec{B} es nula (cuarta ecuación de Maxwell) aprovecharemos la identidad matemática:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Para asumir que el campo magnético \vec{B} puede expresarse como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Donde \vec{A} se denomina potencial magnético vectorial, y es en general más fácil de calcular que el campo magnético directamente.

Teníamos que por definición \vec{B} se representa por:

Para densidades lineales (circuitos):

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Para densidades superficiales:

$$\vec{B} = \iint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{K}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dS'$$

Para densidades volumétricas:

$$\vec{B} = \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

Se puede demostrar que:

$$\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad ^9$$

Con ello, si tomamos por ejemplo; la expresión del campo magnético para circuitos lineales, se tiene:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma'} I d\vec{l}' \times \left(\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \right)$$

Aplicando la identidad:

$$\nabla \times (f \vec{F}) = f \nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$$

Donde f es un campo escalar y \vec{F} un campo vectorial:

$$\nabla \times \left(\frac{I}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l}' \right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla \times I d\vec{l}' + \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times I d\vec{l}'$$

⁹ $\nabla_{\vec{r}}$ opera sobre \vec{r}

Como ∇ opera sobre \vec{r} , se tiene: $\nabla \times I d\vec{l}' = 0$:

Y como:

$$I d\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times I d\vec{l}'$$

En consecuencia:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \nabla \times \left(\frac{I}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l}' \right)$$

Dado que ∇ opera sobre \vec{r} y \int sobre \vec{r}' podemos escribir finalmente:

$$\vec{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{I}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l}' \right]$$

En donde se deduce

Para densidades lineales:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{I}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l}'$$

Similarmente se tiene:

Para densidades superficiales:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'$$

Para densidades volumétricas:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

Notar que una vez que se dispone del vector \vec{A} , el campo magnético se obtiene fácilmente derivando (en realidad se debe calcular el rotor como se definió originalmente), cuestión que en general es más fácil de realizar que el cálculo directo.

Usando la identidad:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ para campos magnéticos que no varían en el tiempo, se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A}$$

Pero habíamos demostrado que por la 3^a ecuación de Maxwell se cumple:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Por lo tanto, el potencial magnético vectorial cumple con:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Que es la ecuación de Poisson vectorial.

En coordenadas cartesianas $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, la ecuación de Poisson corresponde a:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

Con:

$$\nabla^2 A_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}$$

Se requieren condiciones de borde para resolver esta ecuación, en conjunto con metodologías numéricas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

EJEMPLO 38:

Si por el plano XY circula una densidad superficial de corriente $\vec{K} = k\hat{j}$, se pide obtener el campo magnético en todo el espacio.

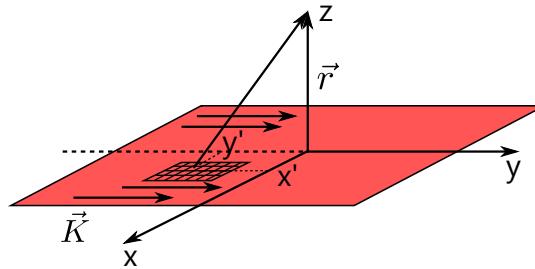


Figura 7.21: Potencial Magnético Vectorial

Solución:

De la definición \vec{A} tenemos: $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'$ donde $dS' = dx'dy'$.

Por simplicidad calcularemos \vec{A} en un punto del eje Z, según se muestra en la Figura 7.21.

Tenemos:

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2} \Leftarrow -x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k} = \vec{r} - \vec{r}' \Leftarrow \begin{cases} \vec{r} = z\hat{k} \\ \vec{r}' = x'\hat{i} + y\hat{j} \end{cases}$$

Luego:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K}\hat{j}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dx'dy' \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \hat{j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}}$$

Usando el C.V:

$$y' = \sqrt{x'^2 + z^2} \tan(\theta) \Rightarrow dy' = \sqrt{x'^2 + z^2}(1 + \tan^2(\theta))d\theta$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \hat{j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{x'^2 + z^2}}{\sqrt{x'^2 + z^2}} dx' \frac{1 + \tan^2(\theta)}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} d\theta = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \hat{j} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \hat{j} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos(\theta)} \end{aligned}$$

Pero $\sin(\theta) = \frac{y'}{\sqrt{y'^2+z^2+x'^2}}$, y de la figura:

$$\vec{A} = \frac{2\mu_0 K}{4\pi} \hat{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + z^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Queda propuesto para el lector hallar la expresión final del campo magnético.

Capítulo 8

Magnetostática en la Materia

8.1. Dipolo Magnético

Para abordar el tema de los campos magnéticos en la materia, se hace necesario - al igual que vimos anteriormente para dieléctricos - un modelo elemental para aplicarlo a un medio material. Este concepto para el caso de campos magnéticos es el dipolo magnético.

Consideremos un circuito circular de corriente como en la Figura 8.1

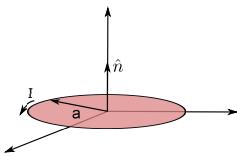


Figura 8.1: Dipolo Magnético

El área del circuito es $A = \pi a^2$ y conduce una corriente I . Si llamamos \hat{n} al vector normal a la superficie, definimos el dipolo magnético \vec{m} como el vector:

$$\vec{m} = AI\hat{n}$$

Así, el dipolo magnético (también llamado momento dipolar magnético) es proporcional al área definida por el circuito y proporcional también a la corriente que circula por él.

Determinemos ahora el campo magnético \vec{B} en un punto de observación $P(r, \theta, \phi)$ producido por el circuito circular (o loop) de la Figura 8.2. Para ello primero obtendremos el vector potencial magnético, y consideraremos el sistema de coordenadas de la Figura 8.2.

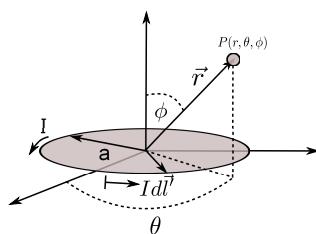


Figura 8.2: Campo Magnético de un Dipolo Magnético

En estas condiciones, el potencial en el punto P tiene la forma

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l}$$

Para $r \gg a$, es decir, para lugares lejanos del punto de observación, se cumple:

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + T.O.S.$$

En donde:

$$Id\vec{l}' = Iad\theta' \hat{\theta} = Iad\theta' (-\sin(\theta')\hat{i} + \cos(\theta')\hat{j})$$

Luego, despreciando los términos de orden superior (T.O.S.), la expresión del vector potencial magnético es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} \right) Iad\theta' (-\sin(\theta')\hat{i} + \cos(\theta')\hat{j})$$

Considerando que $\vec{r} \cdot \vec{r}' = ra \sin(\varphi) \cos(\theta) \cos(\theta') + ra \sin(\varphi) \sin(\theta) \sin(\theta')$ y desarrollando la integral se llega a que el vector potencial magnético \vec{A} sólo tiene la componente $\hat{\theta}$ y está dada por:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin(\phi)}{4\pi r^2} \hat{\theta}$$

Lo que también puede escribirse como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

Donde $\vec{m} = I\pi a^2 \hat{k}$ es el dipolo magnético del loop (notar que $\hat{k} \times \hat{r} = \sin(\phi)\hat{\theta}$)

Finalmente el campo magnético se obtiene a partir de $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos(\varphi)\hat{r} + \sin(\varphi)\hat{\varphi})$$

Es interesante comparar esta ecuación con expresiones similares de electrostática para el potencial eléctrico V y la intensidad de campo eléctrico producidas por el dipolo eléctrico. Esta comparación está hecha en la siguiente tabla, en la que notamos las similitudes entre el campo \vec{B} lejano producido por un pequeño loop de corriente y lejano producido por un dipolo eléctrico. Es entonces razonable interpretar un pequeño loop de corriente como un dipolo magnético.

Se puede demostrar que el torque sobre un dipolo magnético está dado por la expresión:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Esta expresión es generalmente aplicable en la determinación del torque sobre un dipolo y su única limitación es que el campo magnético debe ser uniforme. Cabe hacer notar que el torque está en la dirección del eje de rotación y en la posición de equilibrio \vec{m} y \vec{B} son paralelos.

Las líneas de B sobre el dipolo magnético son similares a las líneas de E sobre un dipolo eléctrico. La Figura 8.3 (d) ilustra las líneas de B alrededor del dipolo magnético $m = IS$.

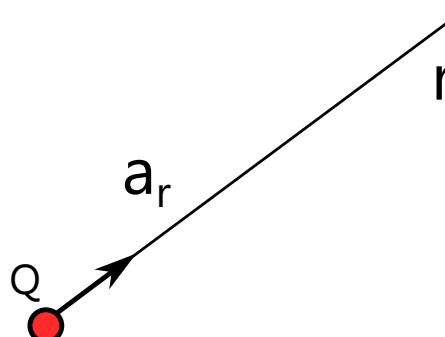
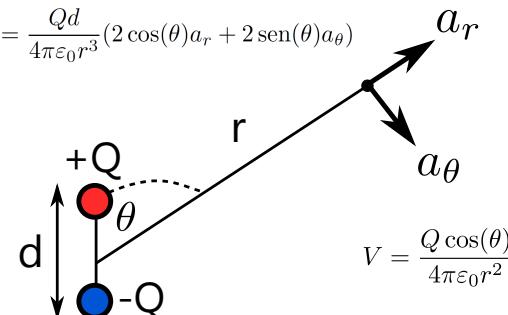
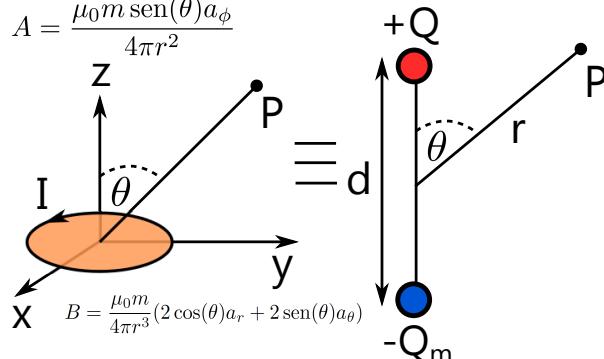
Eléctrico	Magnético
 <p>Monopolio (carga puntual)</p>	<p>No existe</p>  <p>Monopolio (carga puntual)</p>
 $E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos(\theta)a_r + 2\sin(\theta)a_\theta)$ $V = \frac{Q \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ <p>Dipolo (dos puntos con carga)</p>	 $A = \frac{\mu_0 m \sin(\theta) a_\phi}{4\pi r^2}$ $B = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos(\theta)a_r + 2\sin(\theta)a_\theta)$ <p>Dipolo (dos puntos con carga)</p>

Figura 8.3: Comparación Electroestática VS Magnetostática

8.2. Modelo Atómico de Materiales

Similarmente al análisis de dieléctricos supondremos aquí un modelo microscópico de la materia. En este caso supondremos que cada átomo se compone de un núcleo con carga positiva en reposo y un conjunto de electrones rotando en torno de ese núcleo con velocidad \vec{v} , según se muestra en la Figura 8.4. Así, los electrones de este átomo pueden modelarse como un circuito con corriente: $I = \frac{dq}{dt} = \frac{qu}{2\pi R}$.

Donde q es la carga total de los electrones [C] y R el radio promedio de las trayectorias circulares. Esquemáticamente:

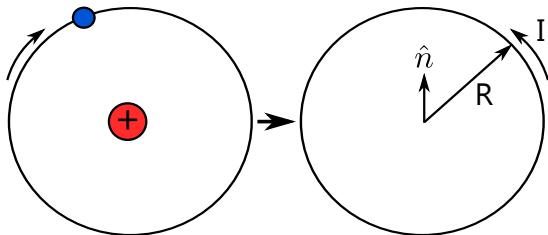


Figura 8.4: Modelo Atómico de Corrientes

Así, es posible representar el átomo mediante el dipolo magnético.

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$

Para describir el fenómeno a escala macroscópica se define el vector magnetización \vec{M} como el momento dipolar magnético por unidad de volumen:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \vec{m}_k}{\Delta V}$$

Un medio en el cual $\vec{M} \neq 0$ se dice que es un medio magnetizado. Notar que en presencia de un campo magnético externo, los dipolos magnéticos tenderán a alinearse con él debido al torque $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$, según vimos en la sección anterior.

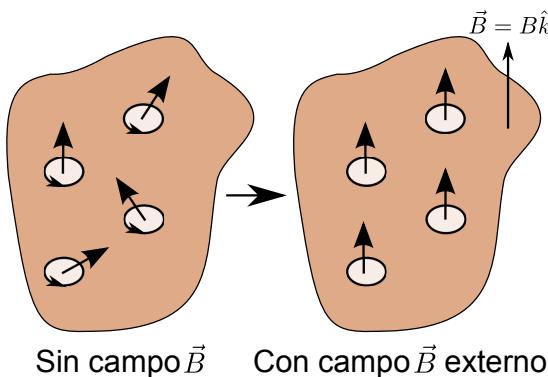


Figura 8.5: Modelo Atómico de Corrientes

Notar que debido a lo pequeña de las corrientes se desprecia el efecto entre ellas y solo se asume que los dipolos responden al campo externo.

8.3. Corrientes de Magnetización

Consideremos un elemento diferencial de volumen de un medio material con magnetización, como en la Figura 8.5. Luego el momento dipolar asociado al volumen dV' es $d\vec{m}$, donde:

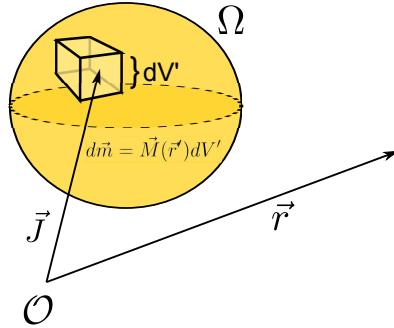


Figura 8.6: Modelo de la Materia

El potencial magnético $d\vec{A}$ asociado al dipolo magnético en la posición \vec{r} es:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

Pero $\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$ entonces:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

Recordando la identidad: $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) &= \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') + \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}') \\ \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) &= -\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) + \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \end{aligned}$$

Luego:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

Aplicando el siguiente teorema, a la segunda integral:

$$\iiint_{\Omega} \nabla' \times \vec{F} dv' = - \iint_{S} \vec{F} \times d\vec{s}$$

Resulta:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \times d\vec{s}'$$

En consecuencia, esta expresión posee la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S} \frac{\vec{K}_M}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} ds'$$

Con $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}')$ como densidad de corriente de magnetización en volumen, y $\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}$ como densidad superficial de magnetización (que rodea a todo el material).

Así, el efecto de la magnetización puede reemplazarse por las dos densidades de corriente: \vec{J}_M y \vec{K}_M que aparecen en el material.

8.4. Permeabilidad Magnética

Recordemos que:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En el espacio vacío, donde \vec{J} es la densidad de corriente volumétrica.

Ahora en general, al interior de un medio material habrá tanto corrientes libres como de magnetización. Así:

$$\vec{J} = \vec{J}_M + \vec{J}_\ell$$

Entonces:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_M + \vec{J}_\ell$$

Designaremos: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_\ell$ y $\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Si anotamos $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$:

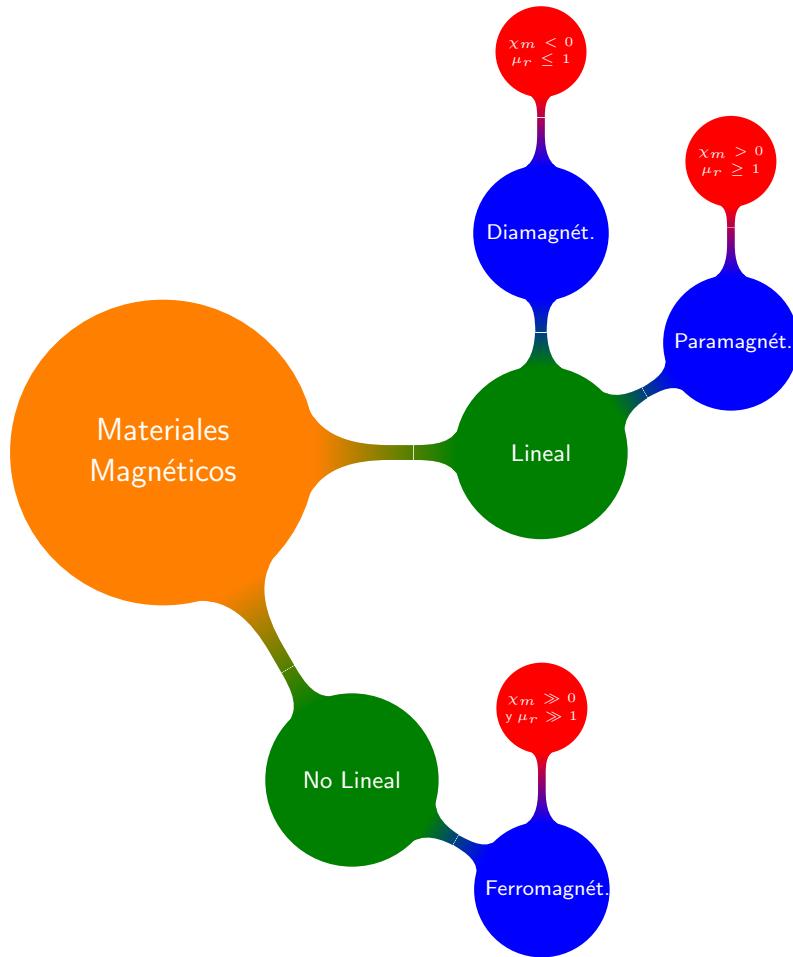
$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad \text{o} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Con $\mu = \mu_R \mu_0$ es la permeabilidad del material y $\mu_R = (1 + \chi_m)$ es la permeabilidad relativa. Análogamente al caso de los dieléctricos, en los medios magnetizados se tiene:

- $\vec{B} = [\mu] \vec{H}$ y \vec{B} no es paralelo a $\vec{H} \Rightarrow \text{No Lineal - Anisótropo.}$
- $\vec{B} = [\mu(\vec{r})] \vec{H}$, pero $\vec{B} \parallel \vec{H} \Rightarrow \text{No Lineal - Isótropo.}$
- $||\vec{B}|| = \mu(\vec{r}) ||\vec{H}|| \Rightarrow \text{Lineal - Isótropo.}$
- $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\mu = \text{constante} \Rightarrow \text{Homogéneo}$

8.5. Clasificación de los Materiales Magnéticos

Es común realizar la siguiente clasificación de los materiales magnéticos dependiendo del valor μ_R .



Los más importantes son los ferromagnéticos y en general, χ_m es altamente dependiente de la temperatura (alta $T^0 \Rightarrow \chi_m$ disminuye).

La relación específica entre \vec{B} y \vec{H} depende de la T^0 y de la historia, por ello bajo diferentes condiciones μ_r puede variar de 50 a 600. Más adelante veremos aplicaciones específicas de estos materiales.

De la ley de Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

Luego se puede montar un experimento en que variemos \vec{H} y medimos \vec{B} (más adelante veremos relaciones entre el campo magnético y el voltaje, que se usan para medir B). La curva resultante es la curva de histéresis¹⁰ de la Figura 8.7.

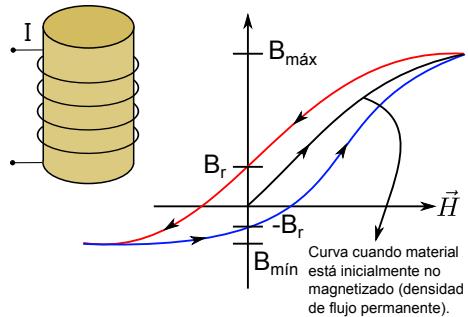


Figura 8.7: Ciclo de Histéresis

En la Figura 8.7 B_r es el valor residual del campo aunque no haya corriente y B_{max} que es el valor de saturación del campo.

Valores típicos de la permeabilidad para diferentes materiales se muestra en la siguiente tabla:

Cuadro 8.1: Permeabilidad Relativa de Algunos Materiales

Material	μ_r
Diamagnéticas	Valores de Diamagnéticos
Bismuto	0.999833
Mercurio	0.999968
Plata	0.9999736
Plomo	0.9999831
Cobre	0.9999906
Agura	0.9999912
Hidrógeno (s.t.p.)	≈ 1.0
Paramagnéticas	Valores de Paramagnéticos
Oxígeno	0.999998
Aire	1.00000037
Aluminio	1.000021
Tungsteno	1.00008
Platino	1.0003
Manganoso	1.001
Ferromagnéticas	Valores de Ferromagnéticos
Cobalto	250
Níquel	600
Hierro Suave	5000
Hierro - Silicio	7000

Estos valores son típicos y pueden variar con respecto a otras publicaciones debido a que existen muchas variedades de los distintos materiales.

¹⁰Significa retraso en griego

PROBLEMA PROPUESTO:

Considere un material ferromagnético de 2 [cm] de ancho con permeabilidad relativa de $\mu_r = 2,5$.

Se ha medido el campo al interior del medio material igual a $\vec{B} = y\hat{i} - x\hat{j}$. Se pide determinar: \vec{J} , \vec{J}_M , \vec{M} , \vec{K}_M

8.6. Condiciones de Borde

Consideremos dos medios magnéticos de permeabilidades μ_1 y μ_2 según se muestra en la Figura 8.8. Para considerar la situación más general, consideraremos que en el plano de interfaz entre los medios existe una corriente superficial (que se interna en la hoja).

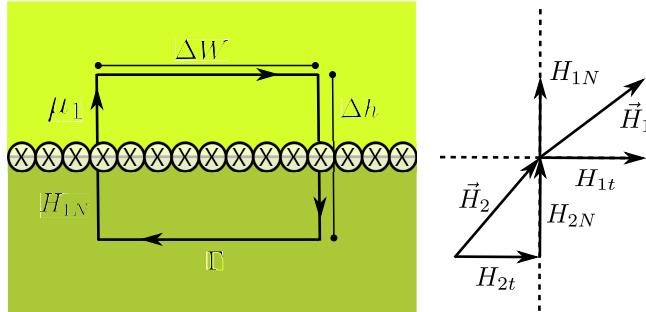


Figura 8.8: Condiciones de Borde

De las ecuaciones de Maxwell sabemos que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0:$$

$$B_{1n} = B_{2n} \iff \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_E:$$

$$I_E = H_{1t}\Delta w - H_{1n}\frac{\Delta h}{2} - H_{2n}\frac{\Delta h}{2} - H_{2t}\Delta w + H_{2n}\frac{\Delta h}{2} + H_{1n}\frac{\Delta h}{2}$$

Para $\Delta h \rightarrow 0$:

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

Y recordando la definición de K, $K \equiv \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{I_E}{\Delta w}$ se obtiene:

$$H_{1t} - H_{2t} = K \implies \frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = K$$

Usando estas condiciones de borde se puede demostrar que:

$$\frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

EJEMPLO 39:

El plano XY sirve de interfaz entre 2 medios. El medio 1 ($z < 0$) se llena con un material de permitividad $\mu_r = 6$, y el medio 2 ($z > 0$) se llena con un material con $\mu_r = 4$. Si en la interfaz hay una corriente superficial de $\frac{0,001}{\mu_0} \hat{j}$ y $\vec{B}_2 = 5\hat{i} + 8\hat{k}$. Encuentre \vec{H}_1 y \vec{B}_1

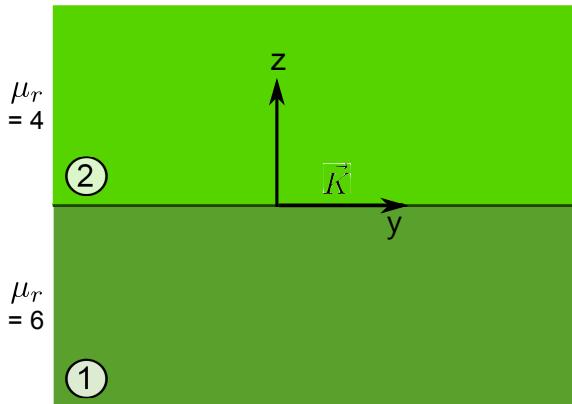


Figura 8.9: Aplicación de Condiciones de Borde

Solución:

Imponiendo condiciones de borde para la componente normal del campo magnético tenemos:

$$B_{1n} = B_{2n} \implies B_{1n} = 8\hat{k} \implies B_{1Z} = 8$$

Y:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} \implies \vec{H}_2 = \frac{1}{4\mu_0} (5\hat{i} + 8\hat{k})$$

Aplicando ahora la condición para H tenemos:

$$H_{2t} = \frac{5\hat{i}}{4\mu_0} \times 10^{-3} \implies H_{1t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{4\mu_0} + \frac{10^{-3}}{\mu_0} = \frac{9}{4\mu_0} \times 10^{-3}$$

Como $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H} \Rightarrow \vec{B}_1 = 6\mu_0 \vec{H}_1$ entonces igualando componentes se tiene:

$$\vec{B}_1 = \frac{9 \times 6}{4} \hat{i} + 8\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{H}_1 = \frac{9}{4\mu_0} \hat{i} + \frac{8}{6\mu_0} \hat{k}$$

8.7. Resumen de Electrostática y Magnetostática

En resumen, para campos que no dependen del tiempo, se cumplen las siguientes ecuaciones de Maxwell:

1. $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \rightarrow$ Cargas estacionarias producen campo eléctrico.
2. $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow$ No existen cargas magnéticas.
3. $\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow$ Trabajo desarrollado por campo eléctrico es conservativo.
4. $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \rightarrow$ Campo magnético “rota” entorno a corrientes.

Los campos en la materia cumplen además con:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

La fuerza neta sobre una carga es:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{\mu} \times \vec{B})$$

Las ecuaciones anteriores se han deducido para campos estacionarios que sólo dependen de la posición:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$$

En lo que resta del curso veremos que ocurre cuando los campos son dependientes del tiempo, es decir, cuando:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$$

8.8. Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

Se tienen dos cables paralelos que llevan cada uno una corriente estable I_1 e I_2 . Encuentre la fuerza, por unidad de largo, entre los cables si la distancia que los separa es d . ¿La fuerza atractiva o repulsiva?

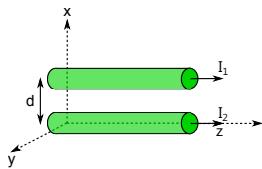


Figura 8.10: Problema 1

Solución:

Debemos calcular la fuerza que ejerce cada una de las corrientes sobre la otra por separado para después sumarlas. Sabemos que la fuerza de un circuito sobre otro está dado por:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} I' I d\vec{l}' \times \frac{(d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Escrito de otra forma:

$$\vec{F} = \int_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B}'(\vec{r}')$$

Pero nos interesa la fuerza por unidad de largo, por lo que al resolver la integral anterior nos queda:

$$\vec{F} = \int_0^L I d\vec{l} \times \vec{B}'(\vec{r}') = L \cdot I \times \vec{B}'(\vec{r}')$$

Lo que buscamos es la fuerza por unidad de longitud, por lo tanto, al dividir por L se obtiene la fórmula que utilizaremos en el problema para la fuerza por unidad de largo.

$$\vec{F}_{12} = I_2 \times \vec{B}_1(\vec{r})$$

Donde \vec{F}_{12} es la fuerza que ejerce - por unidad de largo - el circuito uno sobre el circuito dos.

Calculemos $\vec{B}_1(\vec{r})$ utilizando la ley de Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada}}$$

Para $r > a$:

$$2\pi B_1 r = \mu_0 I_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

El campo sobre I_2 resulta de evaluar en $r = d$, entonces:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\hat{j})$$

Ahora, veamos la fuerza por unidad de largo que ejerce la corriente uno sobre la corriente dos.

$$\vec{F}_{12} = I_2 \hat{k} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\hat{j}) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d} \hat{i}$$

De forma análoga calculamos \vec{F}_{21} que corresponde a la fuerza por unidad de longitud que ejerce la corriente dos sobre la corriente uno.

Para $r > a$:

$$2\pi B_2 r = \mu_0 I_2 \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

El campo sobre I_1 resulta de evaluar en $r = d$, entonces:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{j}$$

Con esto la fuerza \vec{F}_{21} queda dada por:

$$\vec{F}_{21} = I_1 \hat{k} \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{j} = -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d} \hat{i}$$

La fuerza que se origina es atractiva.

Lo que era de esperarse, ya que como se están evaluando en cuerpos distintos, similar a la ley de acción y reacción, estas fuerzas se oponen.

PROBLEMA 2:

Dado el vector potencial magnético $\vec{A} = -\frac{r^2}{4} \hat{k} [\frac{Wb}{m}]$, calcular el flujo total para cruzar la superficie.

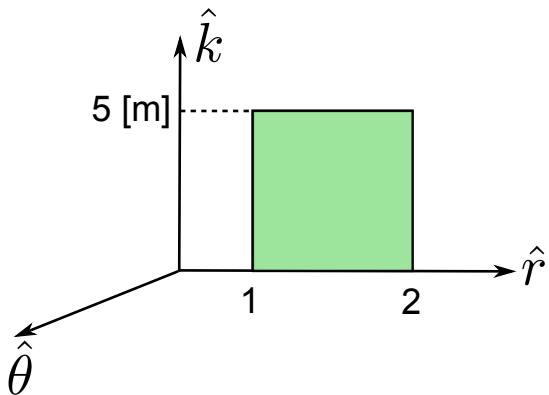


Figura 8.11: Problema 2

$$0 \geq Z \geq 5 [m]$$

$$1 \geq \rho \geq 2 [m]$$

$$\theta = \pi/2$$

Solución:

Para encontrar el flujo primero encontraremos \vec{B} para luego hacer $\psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_Z}{\partial r} \hat{\theta} = \frac{r}{2} \hat{\theta}$$

Considerando: $d\vec{s} = dr dz \hat{\theta}$

$$\psi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{r}{2} \hat{\theta} dr dz \hat{\theta} = \frac{1}{2} \int_{z=0}^5 \int_{r=1}^2 r dr dz = \frac{5}{2} \frac{r^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{15}{4} [Wb] \Rightarrow \therefore \psi = \frac{15}{4} [Wb]$$

Otro método de resolución:

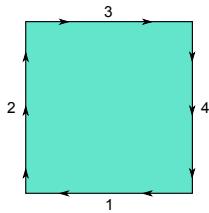


Figura 8.12: Problema 2 - Análisis 2

$$\psi = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

Pero $\vec{A} = A \hat{k} \Rightarrow A \hat{k} \cdot d\vec{l}_{1,3} = 0$

$$\psi = \psi_2 + \psi_4 = -\frac{1}{4} \left[\int_0^5 (1)^2 dz + \int_5^0 (2)^2 dz \right] = -\frac{1}{4} [5 - 20] = \frac{15}{4} \Rightarrow \therefore \psi = \frac{15}{4} [Wb]$$

PROBLEMA 3:

Si por el plano XY circula una densidad superficial de corriente $\vec{K} = K_0 \hat{j}$ se pide obtener \vec{H} en todo el espacio.

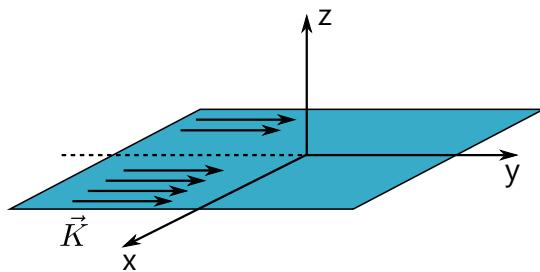


Figura 8.13: Problema 3

Solución:

Utilizaremos la ley de Ampère, para ello nos damos una superficie de largo b y altura a que se atraviesada por la densidad de corriente tal como se muestra en la figura.

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{encerrada}} = K_0 \cdot b$$

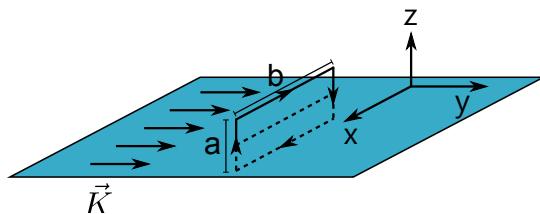


Figura 8.14: Problema 3 - Análisis

Pero:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2Hb \Rightarrow \therefore H = \frac{K_0}{2}$$

Para encontrar la dirección, ocupamos la regla de la mano derecha, llegando a la siguiente forma de \vec{H} :

$$\vec{H} = \begin{cases} H\hat{i} & z > 0 \\ -H\hat{i} & z < 0 \end{cases}$$

Lo que se traduce en:

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{K_0}{2}\hat{i} & z > 0 \\ -\frac{K_0}{2}\hat{i} & z < 0 \end{cases}$$

También se puede escribir como $\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{K} \cdot \hat{n}$ donde \hat{n} es el vector normal al plano.

PROBLEMA 4:

Se tiene una franja delgada de metal de ancho a y muy larga. La corriente total es I . Calcular, por definición, el campo magnético en el plano de la franja a una distancia b del borde más cercano.

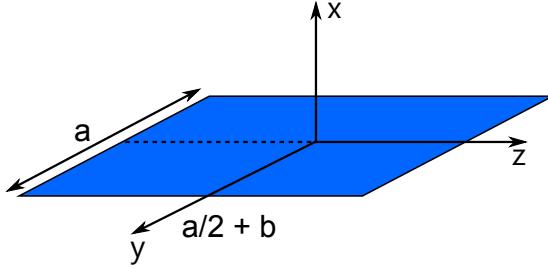


Figura 8.15: Problema 4

Solución:

Calculando el campo magnético por definición:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \vec{K}(\vec{r}) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dS$$

En donde:

1. $\vec{r} = (\frac{a}{2} + b) \hat{j} + z \hat{k}$
2. $\vec{r}' = y' \hat{j} + z' \hat{k}$
3. $\vec{J} = J \hat{k}$
4. $dS = dz dy$

Como la franja es delgada - es decir, despreciamos su espesor - podemos aproximar la densidad de corriente por $\vec{J} = \frac{I}{a} \hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} J \hat{k} \times \frac{(a/2 + b - y') \hat{j} + (z - z') \hat{k}}{\sqrt{(a/2 + b - y')^2 + (z - z')^2}^3} dz' dy' \\ \vec{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} J \frac{(a/2 + b - y')}{\sqrt{(a/2 + b - y')^2 + (z - z')^2}^3} dz' dy' (\hat{i}) \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable: $z - z' = (a/2 + b - y') \tan(\theta) \Rightarrow -dz' = (a/2 + b - y') \sec^2(\theta)$

Con esto:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{J\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(a/2 + b - y')^2 \sec^2(\theta)}{\sqrt{(a/2 + b - y')^2 + (a/2 + b - y')^2 \tan^2(\theta)}} d\theta dy' (\hat{i}) \\ &= \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{a/2}^{a/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2(\theta)}{(a/2 + b - y') \underbrace{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}}_{\sec^2(\theta)}} d\theta dy' (\hat{i}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{a/2}^{a/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{(a/2 + b - y')} d\theta dy' (\hat{i}) \\ &= \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{a/2}^{a/2} \frac{dy'}{(a/2 + b - y')} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta}_{2} (\hat{i}) = \frac{\mu_0 J}{2\pi} (-\ln(a/2 + b - y'))_{-a/2}^{a/2} (\hat{i}) = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln(1 + a/b) (\hat{i}) \end{aligned}$$

PROBLEMA 5:

Calcular el campo magnético producido por un cascarón cilíndrico infinito de radio R por el que circula una corriente uniforme J en la dirección del eje del cilindro. Se pide el campo en todos los puntos, es decir, tanto dentro como fuera del cilindro.

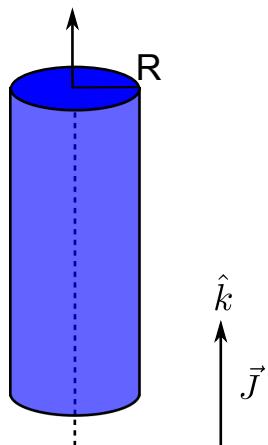


Figura 8.16: Problema 5

Solución:**1. Para $r < R$:**

Aplicando ley de Ampère a esta zona, notamos que al tener una corriente enlazada nula, el campo también lo será. Debido a que la carga se encuentra en el cascarón.

2. Para $r > R$:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi JR \Rightarrow 2\pi Hr = 2\pi JR$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{JR}{r} \hat{\theta} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 JR}{r} \hat{\theta}$$

PROBLEMA 6:

Se tiene una partícula de masa m y carga q que se mueve en un campo magnético uniforme \vec{B} . Demostrar que el movimiento más general de la partícula describe una hélice, cuya sección transversal es una circunferencia de radio $R = \frac{mv}{qB}$, donde v es la componente de la velocidad de la partícula que es perpendicular a \vec{B} .

Solución:

$$\vec{B} = B\hat{k}$$

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = q\vec{v} \times \vec{B}\hat{k}$$

Entonces:

$$m\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\hat{k}\right) = q(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \times B\hat{k}$$

Entonces se obtienen las ecuaciones:

$$(1): m\frac{\partial v_x}{\partial t} = qBv_y$$

$$(2): m\frac{\partial v_y}{\partial t} = -qBv_x$$

$$(3): m\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow v_z = \text{constante}$$

Derivando (1) con respecto al tiempo, y reemplazando en (2):

$$m\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = qB\frac{\partial v_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + k^2 v_x = 0 \quad \text{en donde: } k^2 = \left(\frac{qB}{m}\right)^2$$

La forma general de solución para esta ecuación es:

$$v_x = A \cos(kt) + B \sin(kt) \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = -Ak \sin(kt) + Bk \cos(kt)$$

Pero de (1) se ve que: $\frac{\partial v_x}{\partial t} = kv_y$, luego:

$$v_y = -A \sin(kt) + B \cos(kt)$$

Por otra parte, se tenía que $v_z = \text{constante}$, luego el movimiento de la partícula según el plano XY es descrito por comportamientos sinusoidales, mientras que según el plano Z el movimiento es constante. Entonces es posible concluir que el movimiento descrito por la partícula es una hélice, donde el plano XY puede tener en general, una inclinación α con respecto a la horizontal. De esta manera es posible ver que la velocidad de la partícula se puede expresar como: $\vec{v}_p = \vec{v}_h + \vec{v}_z$.

Luego, sea:

$$V_0 = \|\vec{v}_p\| = \underbrace{v_0 \sin(\alpha)}_{\|\vec{v}_h\|} + \underbrace{v_0 \cos(\alpha)}_{\|\vec{v}_z\|}$$

$$\|\vec{v}_h\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Como es sabido, la posición de la partícula se obtiene trivialmente por medio de la integración de la velocidad:

$$x = \int v_x dt = \int (A \cos(kt) + B \sin(kt)) dt = \frac{A}{k} \sin(kt) - \frac{B}{k} \cos(kt) + c_1$$

$$y = \int v_y dt = \frac{A}{k} \cos(kt) - \frac{B}{k} \sin(kt) + c_2$$

Sin pérdida de generalidad: $c_1 = c_2 = 0$

Además, la posición de la partícula está dada por: $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{v_h}{k}$

De donde se obtiene lo que se quiere demostrar:

$$R = \frac{mv_h}{qB}$$

PROBLEMA 7:

Demostrar que la fuerza entre alambres paralelos que conducen corrientes de intensidad I_1 e I_2 , ambas en la misma dirección según \hat{i} , es atractiva. Si los dos alambres paralelos son muy largos y están separados por una distancia a , hallar la fuerza magnética sobre el segmento dI_2 del alambre 2.

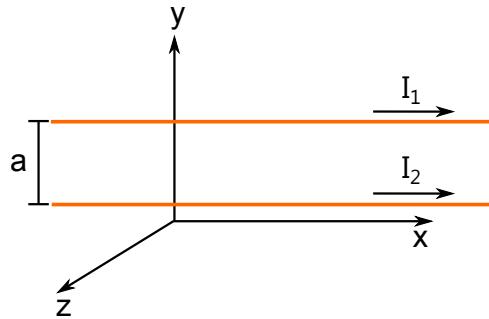


Figura 8.17: Problema 7

Solución:

El campo magnético producido por un alambre infinito es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

La fuerza de (1) sobre (2) está dada por:

$$d\vec{F}_{21} = I_2 dx \hat{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (-\hat{k}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dx \hat{j}$$

El sentido de la fuerza va según \hat{j} , es decir, hay atracción siempre y cuando:

$$d\vec{F}_{21} > 0 \iff I_1 I_2 > 0$$

Entonces, existe atracción en la medida que las corrientes por los alambre paralelos sean en el mismo sentido, o habrá repulsión cuando las corrientes circulantes sean de direcciones opuestas.

PROBLEMA 8:

Considere una espira rectangular en presencia de un alambre infinito por el cual circula una corriente

$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ (Considere que el alambre coincide con el eje Z) según se muestra en la Figura 8.18.

A una distancia $X(t)$ se ubica un circuito rectangular de lados a y b , el cual se encuentra detenido y estático.

Entonces:

1. Si la espira tiene una resistencia total R diga si hay corriente al interior de ella y en caso afirmativo, calcule su sentido y valor.
2. Determine el torque $\vec{\tau}$ sobre el circuito rectangular.
3. Suponga ahora que la corriente en el alambre infinito es I_0 , se pide determinar la velocidad del circuito rectangular ($\frac{\partial X}{\partial t}$) para generar la misma corriente calculada en (1).

Hint: Suponga que el campo generado por la corriente del circuito cuadrado es despreciable frente al campo del alambre infinito.

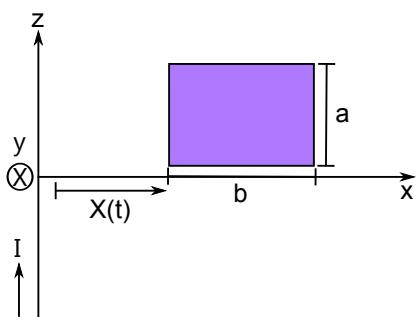


Figura 8.18: Problema 8

Solución:

1.

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$2\pi H r = I(t) \implies H = \frac{I(t)}{2\pi r} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^a \int_x^{x+b} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} dx dz = \frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \int_x^{x+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} [\ln(x+b) - \ln(x)] = \frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \ln\left(\frac{x+b}{x}\right)$$

Con ϕ como flujo externo

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [\phi_{\text{externo}} + \phi_{\text{interno}}] = -\left[\underbrace{\frac{\partial \phi_{\text{externo}}}{\partial t}}_{\text{Producto de la corriente inducida}} + \underbrace{\frac{\partial \phi_{\text{interno}}}{\partial t}}_{\text{Despreciable por enunciado}} \right]$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \ln\left(\frac{x+b}{x}\right) \right]$$

$$\mathcal{E} = -\left[\frac{\mu_0 \dot{I}(t)a}{2\pi} \ln\left(\frac{x+b}{x}\right) + \frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \frac{x}{x+b} \left(\frac{\dot{x}x - (x+b)\dot{x}}{x^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[-\frac{\mu_0 aw I_0 \operatorname{sen}(wt)}{2\pi} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right) + \frac{\mu_0 I_0 \cos(wt) ax}{2\pi(x+b)} \left(-\frac{b\dot{x}}{x^2} \right) \right] \\
&= \frac{\mu_0 aw I_0 \operatorname{sen}(wt)}{2\pi} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right) + \frac{\mu_0 I_0 \cos(wt) ab\dot{x}}{2\pi x(x+b)}
\end{aligned}$$

Y como $\mathcal{E} = RI$ se tiene que:

$$I(t) = \frac{\mu_0 aw I_0 \operatorname{sen}(wt)}{2\pi R} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right) + \frac{\mu_0 I_0 \cos(wt) ab\dot{x}}{2\pi Rx(x+b)}$$

Si $\dot{x} = 0$:

$$I(t) = \frac{\mu_0 aw I_0 \operatorname{sen}(wt)}{2\pi R} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right)$$

2.

$$\vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \vec{r} \parallel \vec{F} \implies \vec{r} = 0$$

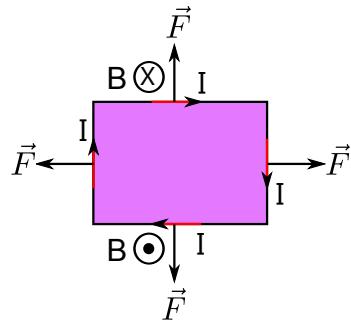


Figura 8.19: Problema 8 - Análisis 2

3. Si:

$$I(t) = I_0$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left[\frac{\mu_0 I_0 a x}{2\pi(x+b)} \left(\frac{\dot{x}x - (x+b)\dot{x}}{x^2} \right) \right] = \frac{I_0 \mu_0 a b \dot{x}}{2\pi x(x+b)}$$

$$I = \frac{I_0 \mu_0 a b \dot{x}}{2\pi R x(x+b)}$$

Igualando esta corriente con la obtenida en (1):

$$\frac{I_0 \mu_0 a b \dot{x}}{2\pi R x(x+b)} = \frac{\mu_0 a w I_0 \operatorname{sen}(wt)}{2\pi R} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right)$$

$$\dot{x} = \frac{x(x+b)}{b} w \operatorname{sen}(wt) \ln \left(\frac{x+b}{x} \right)$$

Nótese que esta velocidad depende de x .

PROBLEMA 9:

Se dispone de un emisor radioactivo que emite partículas cargadas de diferente velocidad en dirección horizontal, tal como se muestra en la Figura 8.20.

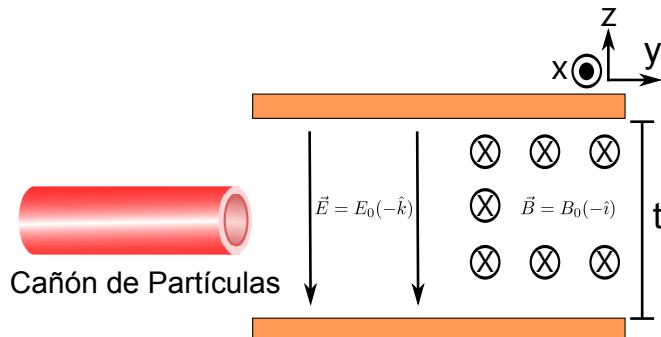


Figura 8.20: Problema 9

Para seleccionar las partículas en función de su velocidad, se construye un sistema compuesto por dos placas conductoras, las cuales generan un campo eléctrico $\vec{E} = -E_0\hat{k}$. Además, en el mismo espacio se genera un campo magnético constante $\vec{B} = -B_0\hat{i}$. Ambos campos se suponen conocidos.

Suponiendo que la salida del cañón de partículas sólo tienen velocidades según \hat{j} , y despreciando el efecto de gravedad, se pide:

1. Determinar la velocidad para la cual las partículas pasan inalteradas por el sistema, independiente de su masa y carga (su velocidad se mantiene constante)
2. Para velocidades menores a las calculadas en (1) determine la razón entre masa y carga de las partículas que logran pasar por el sistema de placas (no quedan atrapadas en la placa inferior).

Solución:

1.

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

$$\vec{F} = q(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) \times (-B_0\hat{i}) - qE_0\hat{k} = qB_0\dot{y}\hat{k} - qB_0\dot{z}\hat{j} - qE_0\hat{k} = (qB_0\dot{y} - qE_0)\hat{k} - qB_0\dot{z}\hat{j}$$

Y como:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k})$$

Tenemos:

$$(1): m\ddot{x} = 0$$

$$(2): m\ddot{y} = -qB_0\dot{z}$$

$$(3): m\ddot{z} = qB_0\dot{y} - qE_0$$

Si:

$$\vec{v} = \text{constante} \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow 0 = qB_0\dot{y} - qE_0 \Rightarrow \therefore \dot{y} = \frac{E_0}{B_0}$$

2. Caso General:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -qB_0\dot{z} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{z} \Rightarrow \ddot{z} &= -\frac{m}{qB_0}\ddot{y} \Rightarrow -\frac{m^2}{qB_0}\ddot{y} = qB_0\dot{y} - qE_0 \end{aligned}$$

De esta manera, si consideramos $\dot{y} = v_y$ se tiene:

$$\ddot{v}_y + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 v_y = \frac{q^2 B_0 E_0}{m^2}$$

Solución Homogénea:

$$\ddot{v}_y + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 v_y = 0 \Rightarrow v_y = A \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + B \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)$$

Solución Particular:

$$v_y = \text{constante} \Rightarrow v_y = \frac{E_0}{B_0}$$

Solución General:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= A \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + B \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{E_0}{B_0} \\ y(t) &= A \frac{m}{qB_0} \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - B \frac{m}{qB_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{E_0}{B_0}t \\ v_y(t=0) = v_0 &= A + \frac{E_0}{B_0} \Rightarrow A = v_0 - \frac{E_0}{B_0} \end{aligned}$$

Condiciones Iniciales:

$$\begin{aligned} y(t=0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ \therefore v_y(t) &= \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{E_0}{B_0}t \end{aligned}$$

Para v_z :

$$\begin{aligned} m\ddot{y} = -qB_0\dot{z} \Rightarrow v_z &= -\frac{m}{qB_0}\ddot{y} = -\frac{m}{qB_0} \left[-\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \frac{qB_0}{m} \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \right] = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \\ z(t) &= -\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \frac{m}{qB_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \underbrace{\text{constante}}_{=0} \end{aligned}$$

Sea $t = t\star$ el tiempo cuando las cargas llegan a la posición $z = -h/2$:

$$\begin{aligned} z(t\star) = -\frac{h}{2} &= -\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \frac{m}{qB_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\star\right) \Rightarrow \frac{hqB_0}{2m\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)} = \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\star\right) \\ \Rightarrow \therefore t\star &= \frac{m}{qB_0} \arccos\left(\frac{hqB_0}{2m\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)}\right) \end{aligned}$$

Reemplazo $t\star$ se tiene:

$$l = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \frac{m}{qB_0} \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\star\right) + \frac{E_0}{B_0}t\star$$

Ecuación no lineal para m/q .

PROBLEMA 10:

Una línea de transmisión coaxial llena de un material con permitividad no lineal tiene un conductor interno sólido de radio a y un conductor externo muy delgado de radio interior b , tal como se ilustra en la Figura 8.21.

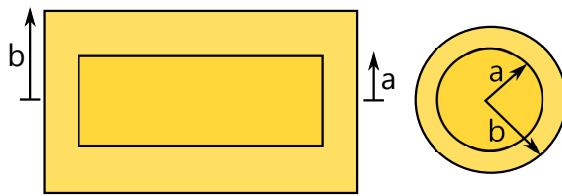


Figura 8.21: Problema 10

Si la curva de magnetización del material se puede aproximar por $B = \frac{1,6H}{1000+H}$. Suponiendo que en el conductor interno circula una corriente I_0 hacia la derecha y vuelve en la dirección opuesta por el conductor externo, calcule el campo magnético en todo el espacio.

Hint: Suponga que en el conductor interno la corriente se distribuye en forma homogénea. Por su parte, suponga que el conductor externo no tiene grosor.

1. **Para $r < a$:**

$$\begin{aligned} J &= \frac{I}{\pi a^2} \Rightarrow I_{\text{encerrada}} = J\pi r^2 = \frac{Ir^2}{a^2} \\ \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_{\text{encerrada}} \\ 2\pi Hr &= \frac{Ir^2}{a^2} \\ \vec{H}(r) &= \frac{Ir}{2\pi a^2} \hat{\theta} \quad \text{y} \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \hat{\theta} \end{aligned}$$

2. **Para $a < r < b$:**

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_{\text{encerrada}} \\ 2\pi Hr &= I \implies \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1,6H}{1000 + H} = \frac{1,6 \left(\frac{I}{2\pi r} \right)}{1000 + \left(\frac{I}{2\pi r} \right)} = \frac{1,6I}{1000 \cdot 2\pi r + I} \\ \vec{B}(r) &= \frac{1,6I}{1000 \cdot 2\pi r + I} \hat{\theta} \end{aligned}$$

3. **Para $b < r$:**

$$\begin{aligned} I_{\text{encerrada}} &= 0 \\ \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_{\text{encerrada}} \\ \vec{B} &= 0 \quad \text{y} \quad \vec{H} = 0 \end{aligned}$$

8.9. Problemas Propuestos

PROBLEMA 1:

Se tiene un disco de radio R y densidad de carga σ que gira con velocidad angular ω . Determinar el campo magnético en el eje de simetría.

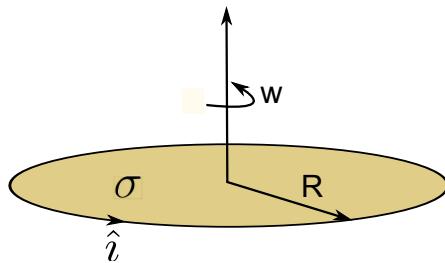


Figura 8.22: Problema 1 - Propuesto

PROBLEMA 2:

Considere dos discos coaxiales de radios a y b respectivamente ($b > a$) separados por una distancia h tal como lo ilustra la Figura 8.23. Suponga que $h \gg a, b$. Se pide calcular el vector campo magnético en el eje Z.

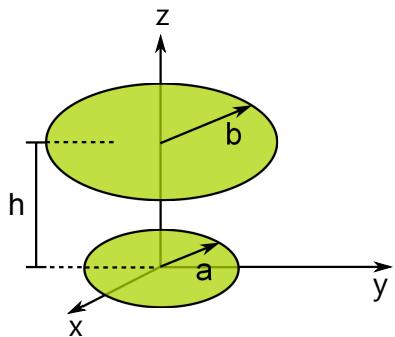


Figura 8.23: Problema 2 - Propuesto

PROBLEMA 3:

Un motor de plasma es ideado para naves espaciales, el cual se construye con dos rieles conductores entre los cuales se produce un campo magnético B , según se muestra en la Figura 8.24

Una corriente de $1000 [A]$ fluye a través de dos rieles conductores, los cuales están comunicados mediante un pulso de plasma de masa $m = 10 [kg]$, el cual puede moverse sin perder su forma (conexión a ambos rieles) una distancia $L = 1 [m]$. Suponga que la distancia entre los rieles es de $d = 30 [cm]$ y que el plasma tiene forma cilíndrica.

Se pide:

1. Estimar la fuerza sobre la columna de plasma.
2. Si una nave se equipa con este motor, calcular la velocidad de expulsión del plasma (extremo derecho en el dibujo).
3. Suponiendo que la nave está en el espacio y que pesa $5 [ton]$, estimar el aumento de la velocidad que produce un disparo (una columna) del pulso de plasma.

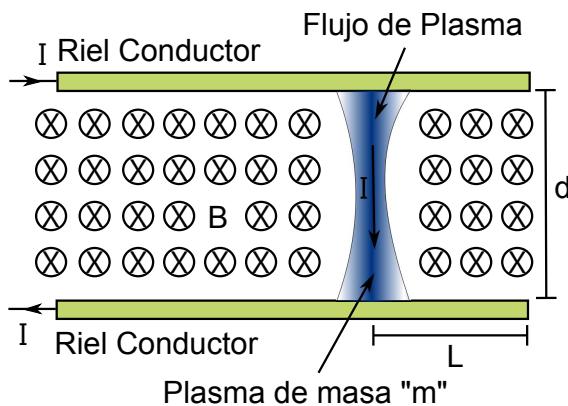


Figura 8.24: Problema 3 - Propuesto

PROBLEMA 4:

Se dispone de un circuito de forma rectangular por el cual circula una corriente $I = 2 [A]$, según se muestra en la Figura 8.25.

Se pide:

1. Calcular el campo magnético en el centro del circuito si $a = 2 [m]$ y $b = 1 [m]$.
2. Si el conductor posee una conductividad $g = 6 \times 10^7 [mho/m]$ y una sección de $1 [mm^2]$, se pide calcular la potencia disipada en el conductor.

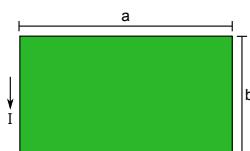


Figura 8.25: Problema 4 - Propuesto

Capítulo 9

Campos Variables en el Tiempo

9.1. Ley de Faraday - Lenz

Luego que Oersted descubriera que las corrientes estacionarias producen campos magnéticos capaces de inducir fuerzas, en 1831 (11 años después) Michael Faraday en Londres y Joseph Henry en New York descubrieron que un campo variable en el tiempo también producía corriente. En este capítulo estudiaremos este fenómeno.

9.1.1. Ley de Inducción

Consideremos una región del espacio Ω en donde se tiene un campo magnético variable $\vec{B}(t)$. Supongamos que en esta región se dispone una espira cerrada de resistencia R (loop) según se muestra en la Figura 9.1.

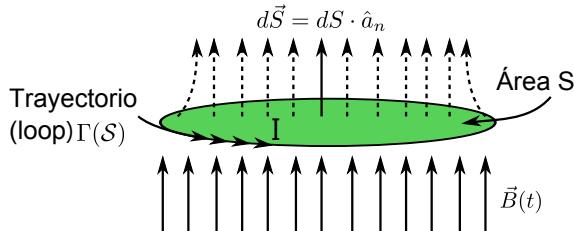


Figura 9.1: Inducción Magnética

El flujo ϕ enlazado por este circuito es:

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Donde \vec{B} es el campo en el plano de la espira. El flujo se mide en Weber $[W] = [T][m^2]$
Notar que como $\vec{B} = \vec{B}(t)$, entonces $\phi = \phi(t)$.

Se encuentra experimentalmente que aparece una corriente I dada por la expresión:

$$I = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{1}{R}$$

En donde R es la resistencia del conductor de la espira.

Por lo tanto, la expresión experimental de la Ley de Faraday-Lenz se puede escribir como:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = RI$$

Recordemos que para una espira de resistencia R y corriente I , como la mostrada en la Figura 9.2, se cumple $\mathcal{E} = RI$, donde \mathcal{E} es una F.E.M. o fuente que mantiene la diferencia de potencial entre los puntos A y B .

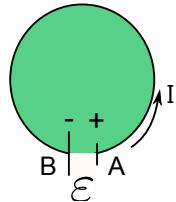


Figura 9.2: Inducción Magnética

De las expresiones anteriores podemos concluir entonces que un campo magnético variable genera o induce un F.E.M. dada por la expresión:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Esta es la *ley de inducción de Faraday - Lenz*

Así, para $\frac{\partial \phi}{\partial t} > 0$ la corriente girara en sentido contrario a la trayectoria $\Gamma(\mathcal{S})$. Es decir, si $\vec{B}(t)$ es creciente en el tiempo, entonces la corriente inducida en la espira genera un campo de sentido opuesto a $\vec{B}(t)$. Llamando \vec{B}_I al campo generado por esta corriente tenemos la situación de la Figura 9.3.

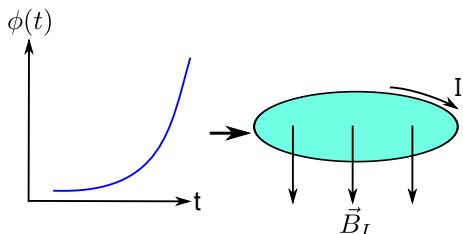


Figura 9.3: Sentido de la Inducción Magnética para Flujo Creciente

Inversamente, para $\frac{\partial \phi}{\partial t} < 0$ la corriente seguirá el sentido de $\Gamma(\mathcal{S})$. Esquemáticamente:

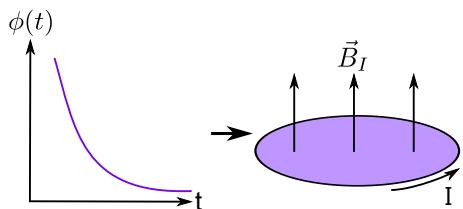


Figura 9.4: Sentido de la Inducción Magnética para Flujo Decreciente

Notar que el campo magnético total en el plano de la espira $\vec{B}(t)$ es el resultante del producido por la corriente en la espira \vec{B}_I más el externo B_e , es decir, $\vec{B}(t) = \vec{B}_I(t) + \vec{B}_e$. Este es el campo resultante usado en la ecuación de la Ley de Inducción.

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{donde } \phi = \iint_S [\vec{B}_e(t) + \vec{B}_I(t)] \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$

En estricto rigor la ley de Faraday - Lenz relaciona la F.E.M. inducida con la variación temporal del flujo $\phi(t)$. En la práctica se encuentra que $\phi(t)$ puede tener dos causas:

1. Originado por un Campo Variable:

$$\phi(t) = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$

2. Originado por Superficie Variable (t):

$$\phi(t) = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Veremos a continuación un par de ejemplo de estos 2 casos.

EJEMPLO 40:

Considere el circuito de la Figura 9.5, el cual ilustra un toroide con dos bobinas. El Toroide se compone de un material ferromagnético de permeabilidad $\mu = 500\mu_0$ y sección uniforme $\mathcal{A} = 10^{-3} [m^2]$. Las dimensiones del toroide son $a = 8 [cm]$, $b = 12 [cm]$.

Suponiendo que las líneas de campo magnético al interior del Toroide son círculos concéntricos y que su valor puede suponerse constante en toda la sección. Se pide:

1. Determinar el valor de \vec{H} en el punto medio del toroide.
2. Determinar el flujo enlazado por una espira del circuito 2.
3. Determinar la F.E.M. inducida entre los puntos A y B.
4. Evaluar el valor de la F.E.M. si $I_1(t) = 3 \operatorname{sen}(100\pi t)$, $N_1 = 200$ vueltas, $N_2 = 100$ vueltas.

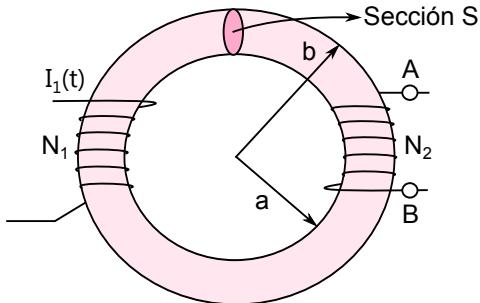


Figura 9.5: Inducción en Toroide

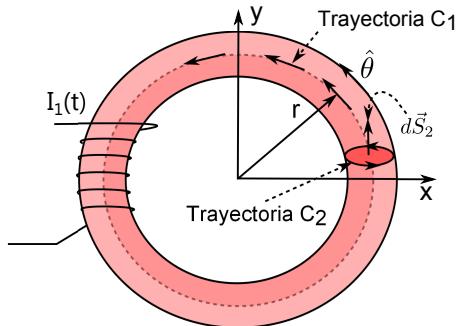
Solución:

Figura 9.6: Ley de Ampère en Toroide

1. Por la ley circuital de Ampère tenemos (la bobina del lado derecho no tiene corriente).

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

Nos dicen que el campo es concéntrico, luego de $\vec{B} = \mu \vec{H}$ podemos suponer que: $\vec{H} = H \hat{\phi}$

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} \cdot r d\varphi \hat{\phi} = 2\pi H(r)r$$

Por su parte, la corriente entra en el plano del papel, es decir: $I_{\text{enlazada}} = -N_1 I_1$
Reemplazando en la ley circuital de Ampère, se tiene:

$$2\pi H(r)r = -N_1 I_1$$

$$\vec{H}(r) = -\frac{N_1 I_1}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

Y en el punto medio:

$$\vec{H}(r) = -\frac{N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\varphi}$$

2. El flujo a través de \mathcal{S}_2 es:

$$\phi = \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Y como:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\varphi}$$

El elemento de superficie perpendicular al campo es $d\vec{s} = dS \hat{\varphi}$

$$\phi = -\frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)} \hat{\varphi}$$

3. La F.E.M. total inducida es $\mathcal{E}_{AB} = N_2 \mathcal{E}_2$ donde \mathcal{E}_2 es la F.E.M. inducida en una espira.

El sentido de la F.E.M. se muestra en la Figura 9.7.

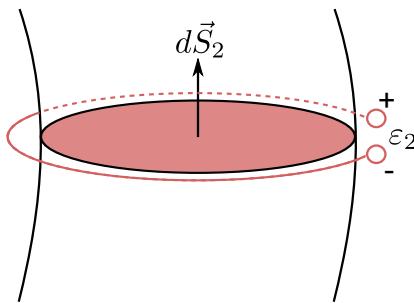


Figura 9.7: Sentido de la F.E.M.

La F.E.M. inducida en cada espira es $\mathcal{E}_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mu N_1 A}{\pi(a+b)} \frac{\partial I_1}{\partial t} \implies \mathcal{E}_{AB} = \frac{\mu N_1 N_2 A}{\pi(a+b)} \frac{\partial I_1}{\partial t}$$

4. La corriente es variable en el tiempo, luego:

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = 3 \times 100\pi \cos(100\pi t) = 300\pi \cos(00\pi t)$$

$$\mathcal{E}_{AB} = \frac{500 \times (4\pi \times 10^{-7}) \times 200 \times 100 \times 10^{-3} \times 300\pi \cos(00\pi t)}{\pi \times (8+12) \times 10^{-2}} \Rightarrow \therefore \mathcal{E}_{AB} = 6\pi \cos(100\pi t) [V]$$

EJEMPLO 41:

Consideremos una región del espacio con un campo magnético constante: $\vec{B} = 0,05\hat{i}$ [Wb/m²]. Se tiene una espira cuadrada girando en torno al eje Z a 50 vueltas por segundo, según se muestra en la Figura 9.8. Se pide:

1. Calcular la F.E.M. inducida en la espira.
2. Calcular la corriente por la espira si se sabe que la resistencia total del conductor es $R = 0,1$ [Ω].

Suponga que en $t = 0$ la espira está en el plano YZ.

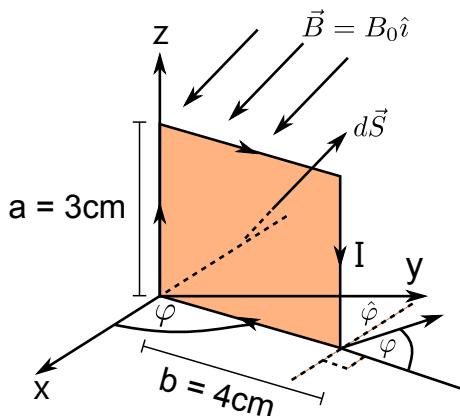


Figura 9.8: F.E.M. en Circuito Móvil

Solución:

1. Calculemos el flujo enlazado por la espira:

$$d\vec{s} = dS\hat{\varphi} = dS(-\sin(\varphi)\hat{i} + \cos(\varphi)\hat{j}) \quad dS = dzdr.$$

$$\phi = \iint_S B_0 \hat{i} \cdot dS (-\sin(\varphi)\hat{i} + \cos(\varphi)\hat{j}) = \int_0^a \int_0^b (-B_0 \sin(\varphi)) dz dr = -B_0 ab \sin(\varphi)$$

Pero:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 = 2\pi ft + \varphi_0$$

$$\therefore \phi(t) = -abB_0 \sin(2\pi ft + \varphi_0)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = 2\pi fabB_0 \cos(2\pi ft + \varphi_0)$$

Lo que indica que va en el sentido de la trayectoria.

En $t = 0$, $\varphi = \pi/2$ luego reemplazando valores, se tiene:

$$\mathcal{E} = 2\pi \times 50 \times 0,03 \times 0,04 \times 0,005 \cos(100 + \pi/2) = 6\pi \times 10^{-3} \cos(100\pi t + \pi/2) [V]$$

2.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{6\pi \times 10^{-3}}{0,1} \cos(100\pi t + \pi/2) = 6\pi \times 10^{-2} \cos(100\pi t + \pi/2) [A] \Rightarrow I = 0,006\pi \cos(100\pi t + \pi/2) [A]$$

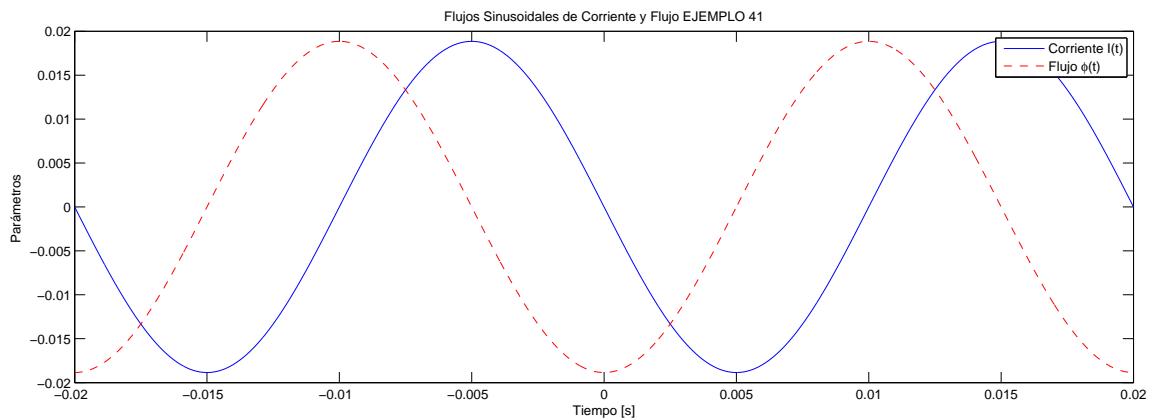


Figura 9.9: Flujo Sinusoidal

Este es el principio de funcionamiento de un generador eléctrico de corriente alterna.

9.2. Modificación a la Tercera Ecuación de Maxwell

Dado que un campo magnético variable es capaz de generar una fuerza eletromotriz, entonces produce también un campo eléctrico. En efecto, de la Ley de Faraday-Lenz tenemos que:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{en donde} \quad \phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Pero la F.E.M. es:

$$\mathcal{E} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Si consideramos superficies estacionarias:

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \Rightarrow \therefore \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Es decir el campo *rota* entorno a las variaciones del campo magnético.

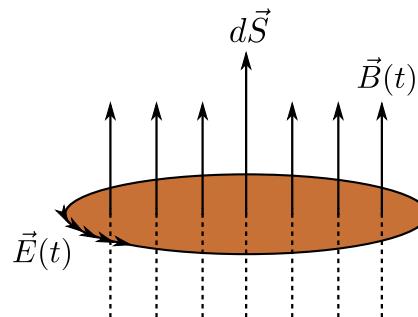


Figura 9.10: Modificación Tercera Ley de Maxwell

Notar que ahora $\nabla \times \vec{E} \neq 0$, es decir, cuando se tienen campos que varían en el tiempo el campo eléctrico, y en consecuencia la fuerza eléctrica, no es conservativo.

Recordando que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, a partir de la tercera ecuación de Maxwell tenemos:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Aprovechando la identidad $\nabla \times (\nabla V) = 0$ definimos:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Con $V(\vec{r}, t)$ potencial eléctrico. Luego podemos expresar el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = - \left(\underbrace{\nabla V}_{\text{Origen Electrostático}} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Debido a campo magnético variable en el tiempo}} \right)$$

Así, el campo eléctrico tiene dos fuentes, una electrostática a través del potencial eléctrico y otra de inducción, debida a la variación temporal del campo magnético. Notar que si no hay variaciones en el tiempo se recobra el campo conservativo visto en electrostática.

PROBLEMA PROPUESTO:

Una barra conductora se desplaza con velocidad sobre dos rieles conductores según se muestra en la Figura 9.11.

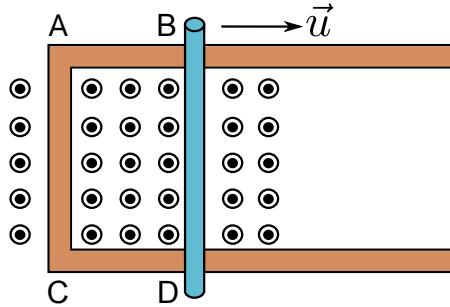


Figura 9.11: F.E.M. por Flujo y Circuito Variable

Entre las barras existe un campo magnético $\vec{B} = 0,004 \cos(10^6 t) [Wb/m^2]$. Se pide calcular la F.E.M. en el circuito ABCD.

9.2.1. Inductancia Propia

Para un circuito eléctrico cualquiera es posible encontrar una relación entre la corriente que circula por él y el flujo enlazado, la cual es independiente del valor de ambas variables. Este parámetro es de gran importancia práctica en el estudio de circuitos eléctricos. Consideremos el circuito de la Figura 9.12.

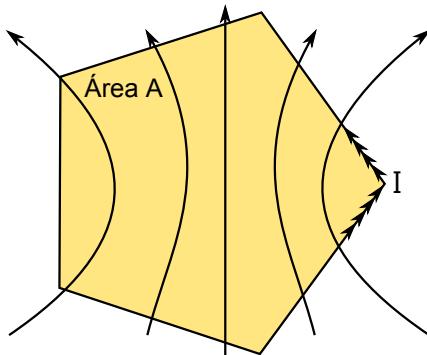


Figura 9.12: Inductancia Propia

Supongamos que el campo magnético se debe sólo a la corriente I que circula por el circuito. Entonces, por definición, el campo magnético tiene la forma:

$$\vec{B} = \int_{\Gamma'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Por lo tanto el flujo enlazado es:

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left[\int_{\Gamma'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] \cdot d\vec{s}$$

Y si se toma la razón entre ϕ e I se tiene:

$$\frac{\phi}{I} = \frac{\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}}{I} = \iint_S \left[\int_{\Gamma'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] \cdot d\vec{s}$$

Notemos que esta expresión **no** depende de la corriente ni del flujo, sino que sólo depende de la geometría del sistema. Se define este cuociente como *inductancia propia* (designada por la letra L) y es un parámetro muy usado para describir los circuitos eléctricos.

$$L = \frac{\phi}{I}$$

Su unidad es $[Wb/A]$, la cual tiene el nombre de Henry $[H]$.

EJEMPLO 42:

Considere el circuito de la Figura 9.13. Se pide determinar la inductancia propia del circuito del lado izquierdo. Tenga en cuenta que el toroide se compone de un material ferromagnético de permeabilidad $\mu = 500\mu_0$ y sección uniforme $\mathcal{A} = 10^{-3} [m^2]$. Las dimensiones del toroide son $a = 8 [cm]$, $b = 12 [cm]$.

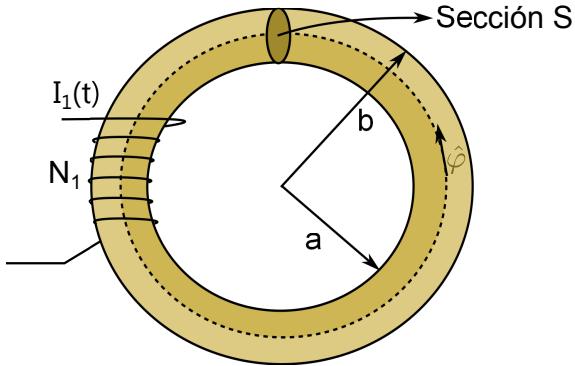


Figura 9.13: Inductancia Propia de Toroide

Solución:

En el EJEMPLO 40 habíamos determinado el campo magnético en el punto medio del toroide, el cual supusimos constante en toda la sección transversal (\mathcal{A}). La expresión de campo magnético es:

$$\vec{B} = -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\phi}$$

El flujo es $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$. Para el circuito de la corriente I_1 , el elemento de área perpendicular al campo es $d\vec{s} = -dS \hat{\phi}$. Por ello el flujo enlazado por este circuito es:

$$\phi = \frac{\mu N_1^2 I_1 \mathcal{A}}{\pi(a+b)}$$

De esta expresión resulta en forma directa la expresión de L :

$$L = \frac{\phi}{I_1} = \frac{\mu N_1^2 \mathcal{A}}{\pi(a+b)}$$

9.2.2. Inductancia de Conjunto de Circuitos

Por extensión, para un sistema de n circuitos, se definen inductancias mutuas. Consideremos n circuitos como en la Figura 9.14.

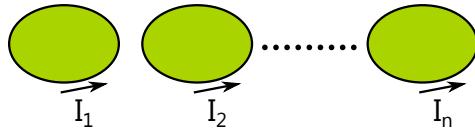


Figura 9.14: Inductancia Mutua

Sea ϕ_{jk} el flujo magnético que atraviesa el circuito j debido a la corriente que circula por el circuito k . Se define la *inductancia mutua* entre el circuito j y el k como:

$$L_{jk} = \frac{\phi_{jk}}{I_k}$$

Donde I_k es la corriente en el circuito k (que produce el flujo ϕ_{jk}).

EJEMPLO 43:

Considere el circuito del EJEMPLO 42. Se pide determinar la inductancia mutua entre el circuito 1 y el circuito 2 (del lado derecho).

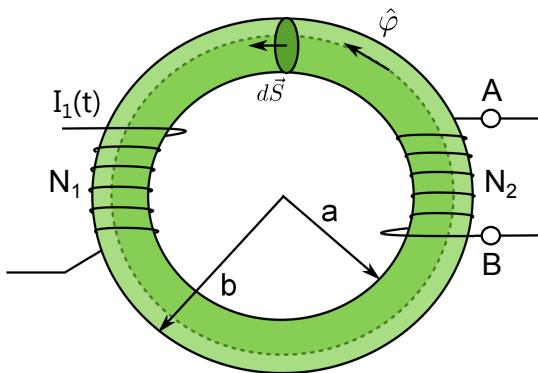


Figura 9.15: Inductancia Propia del Toroide

Solución:

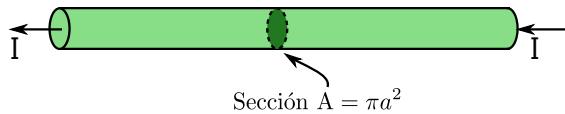
En este caso calculamos el flujo enlazado por el circuito de la derecha, cuando el elemento que produce el campo es la corriente que circula por el circuito 1 ($I_1(t)$).

En el ejemplo anterior vimos que el campo producido por I_1 es: $\vec{B}_1 = -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\varphi}$. El flujo enlazado por el circuito del lado derecho es $\phi_{21} = \iint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}$, en este caso es: $\phi_{21} = -\frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$. Luego la inductancia mutua es:

$$L_{21} = \frac{\phi_{21\text{total}}}{I_1} = \frac{N_2 \phi_{21}}{I_1} = -\frac{\mu N_2 N_1 A}{\pi(a+b)}$$

9.2.3. Inductancia en Sistemas Distribuidos

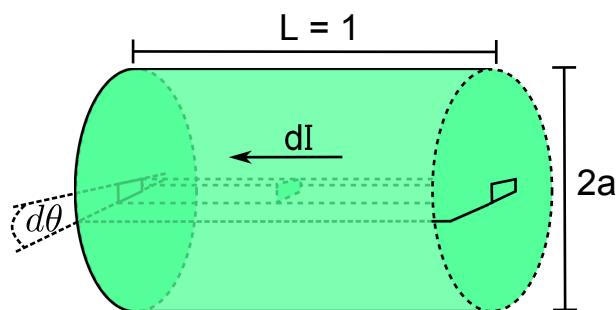
La inductancia es un parámetro usado para caracterizar el comportamiento eléctrico de las líneas de transmisión usadas ya sea para transportar energía o información. En esta sección calcularemos la inductancia propia por unidad de largo de una línea de alta tensión típica. Para ello consideraremos que la línea puede modelarse como un conductor de radio a y de largo infinito, según se muestra en la Figura 9.16.



Para resolver este problema debemos hacer algunos supuestos básicos:

1. Supondremos que la corriente se devuelve a una distancia infinita del conductor.
2. Para calcular la inductancia separaremos el flujo enlazado en dos componentes, una externa al conductor y otra interna a él. Dicho de otro modo separaremos el espacio en dos zonas definidas por $r < a$ y $r > a$.
3. La corriente se distribuye en forma uniforme al interior del conductor, por ello la densidad de corriente es $J = I/A$ [A/m^2]

Comenzaremos calculando la inductancia para $r < a$. En esta zona interna al conductor tenemos una distribución continua de corriente, por lo que debemos definir apropiadamente el concepto de flujo enlazado. Para ello consideraremos el elemento de largo unitario de la Figura 9.17.



Dado que tenemos corriente distribuida comenzaremos definiendo el flujo enlazado por un elemento de corriente dI según se muestra en la Figura 9.18. Para tener una mejor visualización del fenómeno, en la Figura 9.18 se muestra el detalle de la sección transversal del conductor.

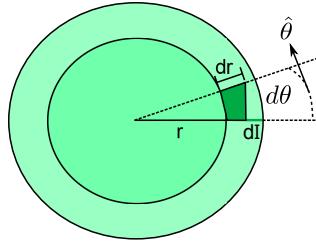


Figura 9.18: Corte Transversal de Elemento Unitario

El flujo enlazado por el elemento de corriente dI se destaca por la superficie sombreada de la Figura 9.18. Aplicando la ley circuital de Ampère para la trayectoria circular de radio r de la Figura 9.18 se obtiene:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_r$$

$$2\pi Hr = \pi J r^2 \implies \vec{H} = \frac{I}{2\pi a^2} \hat{\theta}$$

Luego el campo magnético es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \hat{\theta}$$

Y el flujo enlazado en la superficie de largo unitario definida por el plano que va desde el radio r al radio a es:

$$\phi_r = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \int_r^a \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r dr dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a^2 - r^2)$$

Este flujo corresponde al flujo interior al conductor que es enlazado por el elemento dI . Como interesa caracterizar a todo el conductor, debemos obtener el valor medio de las contribuciones de todos los elementos de corriente, el cual está dado por:

$$\phi_M = \frac{1}{S} \iint_S \phi_r dS$$

$$\frac{1}{\pi a^2} \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a^2 - r^2) r d\theta dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} \int_{r=0}^{r=a} (a^2 - r^2) r dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} \left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} \frac{a^4}{4}$$

Finalmente:

$$\phi_M = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \implies L_M = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

9.3. Corriente de Desplazamiento

La tercera ecuación de Maxwell nos dice que:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Y tomando la divergencia a ambos lados tenemos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}$$

Pero el lado izquierdo es una identidad matemática $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \forall \vec{A}$. Luego esto fuerza a que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, sin embargo, la ecuación de continuidad vista anteriormente nos dice que:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Tenemos por lo tanto una contradicción que debemos resolver.

Se encuentra experimentalmente que en una región del espacio Ω en donde no hay corrientes pero se tiene un campo eléctrico variable en el tiempo se cumple:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Así, el término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ debe sumarse a la cuarta ecuación, lo que conduce finalmente a:

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Esta es la *cuarta ecuación de Maxwell*.

El término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ se conoce como corriente de desplazamiento.

Notar que al tomar la divergencia de esta ecuación reproducimos la ecuación de continuidad:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \underbrace{\frac{\partial \nabla \cdot \vec{D}}{\partial t}}_{\rho} \implies \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

EJEMPLO 44:

Se tiene un condensador de placas planas de área $5 [cm^2]$ y separación entre placas de $3 [mm]$. Si se le aplica una diferencia de potencial de $V = 50 \operatorname{sen}(1000t) [V]$ a las placas se pide:

1. Calcular los campos \vec{E} y \vec{D} .
2. Calcular la corriente de desplazamiento.
3. Calcular la corriente que sale de la fuente.

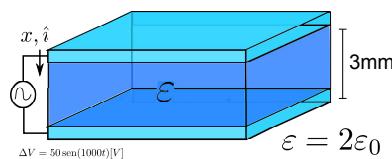


Figura 9.19: Corriente de Desplazamiento

Solución:

1.

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0$$

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$El = \Delta V \implies \vec{E} = \frac{50}{0,003} \operatorname{sen}(1000t)\hat{i} = \frac{5}{3} \times 10^4 \operatorname{sen}(1000t)\hat{i} [V/m]$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$2\varepsilon_0 \times \frac{5}{3} \times 10^4 \operatorname{sen}(1000t)\hat{i} = \varepsilon_0 \times \frac{10^5}{3} \operatorname{sen}(1000t)\hat{i}$$

2. Luego la corriente de desplazamiento es $J_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0 \times \frac{10^8}{3} \cos(1000t)\hat{i} = \frac{10^8}{3} \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \cos(1000t)\hat{i} = \frac{10^{-1}}{108\pi} \cos(1000t)\hat{i} \approx \frac{10^{-3}}{\pi} \cos(1000t)\hat{i}$$

3.

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = C \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$C = \frac{\mathcal{A}}{d} \varepsilon$$

$$I = \frac{\mathcal{A}}{d} \varepsilon \times 50 \times 1000 \cos(1000t) = \frac{5 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}} \times 2 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 50 \times 1000 \cos(1000t) = 5 \times 10^{-4} \times \frac{10^{-1}}{108\pi} \cos(1000t)$$

$$I \approx (5 \times 10^{-4}) \times \frac{10^{-3}}{\pi} \cos(1000t)$$

Notar que $I = J_D \mathcal{A}$

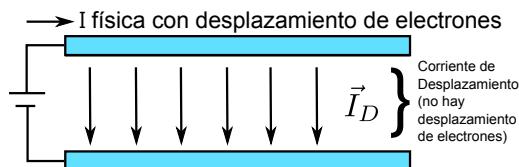


Figura 9.20: Corriente de Desplazamiento en Condensador

9.4. Energía Electromagnética

9.4.1. Energía del Campo Electromagnético

Tomando el producto de las ecuaciones de Maxwell y campos tenemos:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && / \vec{E}. \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && / \vec{H}. \\ \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) &= \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) &= -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

De las propiedades algebraicas, sabemos que:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$$

Luego:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Además, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$, y suponiendo medios homogéneos podemos escribir las derivadas como:

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{H})}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E})}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{H} \cdot \mu \vec{H})}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{B})}{\partial t}\end{aligned}$$

Reemplazando y ordenando:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Tomemos la integral sobre un volumen Ω muy grande:

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv = -\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv - \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

Sabemos que $||\vec{E}|| \propto \frac{1}{r^2}$, $||\vec{H}|| \propto \frac{1}{r^2}$, $dS \propto r^2$, luego si $\Omega \rightarrow \infty$ se tiene:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv = \iint_{S} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \rightarrow 0$$

Y si se supone que el espacio no varia en el tiempo:

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv + \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = 0$$

Esta expresión tiene la siguiente interpretación:

1. $\iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv$ es la potencia consumida por el efecto Joule.
2. $u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$ es la densidad de energía del sistema electromagnético (energía por unidad de volumen).

En ausencia de pérdidas de Joule, se cumple:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv = \text{constante}$$

En este caso $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, es decir la energía total del campo electromagnético (eléctrico y magnético) se conserva. Notar que si hay pérdidas: $\frac{\partial U}{\partial t} < 0$, es decir, la energía disminuye debido a la potencia disipada por efecto Joule.

Notar que para el caso en que sólo hay campos magnéticos $\vec{E} = \vec{D} = 0$, por lo tanto la energía queda:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\vec{H} \cdot \vec{B}) dv$$

Para el caso en que tenemos sólo circuitos magnéticos, es común considerar la siguiente expresión de la energía en términos de la potencia:

$$U = \int_{t_0}^t P(t) dt = \int_{t_0}^t V(t) I(t) dt$$

Por otra parte, de la ley de Faraday-Lenz sabemos que el voltaje $V(t)$ es igual al voltaje inducido, luego: $V(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \implies d\Phi = V(t) dt$. Así:

$$U = \int_{\Phi_0}^{\Phi} I(t) d\Phi$$

Pero si sólo hay circuitos magnéticos, los podemos representar por inductancias. En este caso, $\Phi = LI$ y podemos representar la energía como:

$$U = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{\Phi}{L} d\Phi = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad \text{o} \quad U = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2} L I^2$$

9.4.2. Fuerza sobre Materiales Magnéticos

Una aplicación muy importante de la energía es la determinación de la fuerza en circuitos magnéticos.

La fuerza que realiza un dispositivo magnético es igual a la diferencia de energía que produce el movimiento. Si llamamos \vec{F} a la fuerza ejercida para provocar un desplazamiento $d\vec{l}$, entonces la variación de energía es:

$$-\vec{F} \cdot d\vec{l} = dU$$

Así, una manera muy usada para determinar la fuerza es mediante la expresión:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial l}\hat{l}$$

Donde \hat{l} es el vector unitario que indica la dirección de la fuerza (sentido del desplazamiento).

EJEMPLO 45:

Consideremos la configuración de la Figura 9.21. Calcular la fuerza sobre la barra magnética.

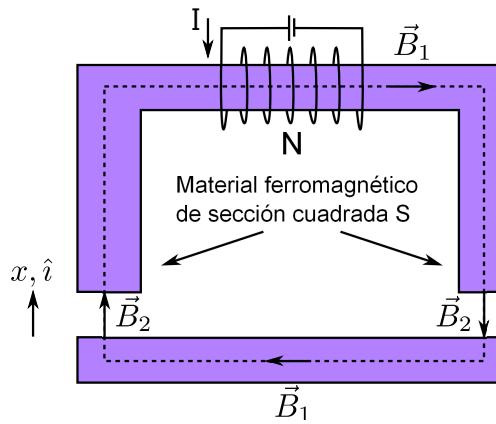


Figura 9.21: Fuerza sobre Barra Magnética

Solución:

Supondremos que el campo magnético al interior del material ferromagnético es constante (la misma suposición realizada en el caso del toroide), y que en la trayectoria c sólo tendremos campos constantes al interior del material (\vec{B}_1) y en el entrehierro (\vec{B}_2).

Empleando la ley circuital de Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{encerrada}}$$

$$\frac{B_1}{\mu_1}l_1 + \frac{B_2}{\mu_0}2x = I_{\text{encerrada}}$$

Donde l_1 es el largo medio del material ferromagnético. Si suponemos que $\mu_1 \gg \mu_0$ (en la práctica la diferencia es del orden de 1000 en materiales ferromagnéticos), podemos aproximar:

$$B_2 \approx \frac{\mu_0 N I}{2x}$$

Si la estructura que contiene el conductor se mantiene fija y solo permitimos que se mueva la estructura horizontal una cantidad dx , la expresión de la fuerza es:

$$dU = -\vec{F} \cdot dx\hat{i}$$

Pero la variación de energía sólo ocurre en el entrehierro, es decir, si llamamos:

$$u = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

A la densidad de energía electromagnética en cada entrehierro (energía por unidad de volumen) entonces:

$$-\vec{F} \cdot d\vec{l} = 2[u dv]$$

$$-\vec{F} \cdot d\vec{l} = dU = 2 \left[\frac{1}{2} B \cdot H \cdot S \cdot dx \right]$$

Usando la expresión $H = \frac{B}{\mu_0}$ y $d\vec{l} = dx\hat{i}$ reemplazando se tiene:

$$F = -2 \left(\frac{B^2 S}{2\mu_0} \right) \Rightarrow \vec{F} = -2 \left(\frac{B^2 S}{2\mu_0} \right) \hat{i}$$

En términos de la variable de desplazamiento la fuerza es:

$$\vec{F} = -2 \frac{(\mu_0 N I)^2 S}{(2x)^2 2\mu_0} \hat{i} \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{\mu_0 (N I)^2 S}{4x^2} \hat{i}$$

Así, el sistema tiende a levantar la parte inferior del circuito magnético. Esta fuerza se igualará a la fuerza de gravedad o al peso adicional que se desea levantar. Este es el principio de funcionamiento de un electroimán.

EJEMPLO 46:

Un voltaje sinusoidal de $100 [V]$ (R.M.S.) y frecuencia $60 [Hz]$ es entregado al loop mostrado en la Figura 9.22. El área A de cada polo es $6,5 \times 10^{-4} [m^2]$. La resistencia del cable y la reluctancia del acero serán ignoradas. ¿Cuál es el número de vueltas requeridas por el contacto para crear una fuerza promedio de $4,5 [N]$?

Solución:

Usaremos la expresión $U = \frac{1}{2}LI^2$ para representar la energía del sistema. Luego la expresión de la fuerza es:

$$F_e = \frac{\partial U(I, x)}{\partial x} = \frac{1}{2}I^2 \frac{\partial L}{\partial x}$$

Inductancia:

$$L = N^2 \mu_0 \frac{A}{2x}$$

Voltaje aplicado:

$$V = \hat{V} \cos(\omega t)$$

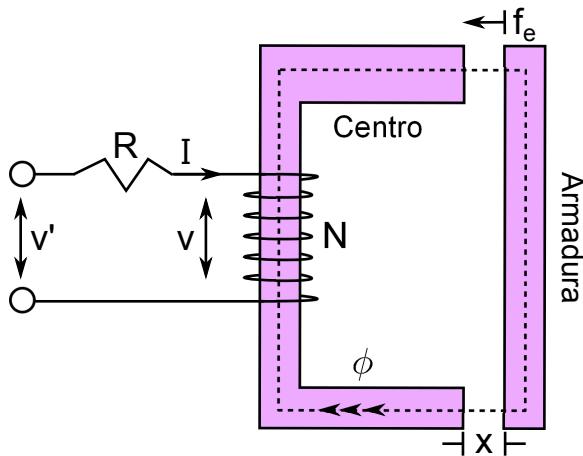


Figura 9.22: Electroimán Excitado

Si x es pequeño (i.e. $\dot{x} = 0$ entonces ahí no hay fuerza electromagnética causada por el movimiento) $V = L \frac{\partial I}{\partial t}$ y corriente $I = \frac{\hat{V}}{\omega L} \sin(\omega t)$. De aquí en adelante el valor instantáneo de la fuerza electromagnética será:

$$F_e(t) = -\frac{\hat{V}^2}{\omega^2 N^2 \mu_0 A} \sin^2(\omega t)$$

La única variable es t y el valor promedio de $\sin^2(\omega t)$ es 0.5. Por lo tanto el valor promedio de la fuerza desarrollada es:

$$F_{eav} = \frac{V^2}{2\omega^2 N^2 \mu_0 A}$$

La substitución de los datos dados en esta ecuación entregará el número de vueltas N requeridas, el cual es aproximadamente 4376. Notar que la fuerza es independiente de la posición. Esto es porque el flujo en las posiciones aéreas está determinado por el voltaje AC.

9.5. Ondas Electromagnéticas

Recordemos la ley de conservación de la carga eléctrica:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

De esta forma nos preguntamos sí existe una ley equivalente para la *conservación de la energía eléctrica*.

Es así entonces que supondremos dos elementos para su inspección. El primero $\epsilon(\vec{r}, t)$ que denotará a la *energía electromagnética*, y en segundo lugar, al vector $\vec{S}(\vec{r}, t)$ que mostrará la dirección que sigue la propagación de la corriente de energía respectiva al primer elemento. A este último elemento, se le conoce como *vector de Poynting*.

Entonces, al despejar la ecuación anterior nos queda:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Que al aplicarle el teorema de la divergencia, quedaría:

$$\iint_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) dv$$

Es aquí donde uno podría hacer la relación con los elementos anteriormente nombrados, de la forma:

$$\iint_S \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \epsilon(\vec{r}, t) dv$$

Pero esto es incorrecto, debido a que debemos notar que estos dos últimos factores poseen dependencia temporal. En consecuencia, debemos incluir dicha dependencia, a través de un término que incluya al trabajo W realizado por los campos sobre las cargas presentes en la región Ω (por unidad de tiempo).

Recordando la fuerza de Lorentz, notamos que la fuerza neta que actúa sobre un elemento de carga dq es:

$$\vec{F} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \rho (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Por lo tanto, podemos decir que el trabajo realizado sobre las cargas por unidad de tiempo es:

$$W = \iiint_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} dv = \iiint_{\Omega} \rho (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dv = \iiint_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{E} dv$$

Nótese el término anulado por el producto punto, y la generalización de \vec{J} gracias a su definición: $\vec{J} = \rho \vec{v}$.

De esta forma, la ley de conservación de la energía debe ser de la forma:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \epsilon(\vec{r}, t) dv = \iint_S \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} + \iiint_{\Omega} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dv$$

Para lo cual podemos darle la siguiente interpretación: “la disminución de energía por unidad de tiempo en un volumen Ω es igual al flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo a través del contorno de Ω (S) más el trabajo realizado sobre las cargas pertenecientes a Ω , por unidad de tiempo”.

En donde su forma diferencial está dada por:

$$\frac{\partial \epsilon(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) = -\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Concluido lo anterior, podemos realizar la similitud con lo anteriormente resuelto. De la siguiente forma:
Recordemos que, a partir de las ecuaciones de Maxwell, se tiene:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Entonces:

$$-\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)) + \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Pero además:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Y:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)) - \nabla \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\vec{r}, t) \cdot (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)) - \nabla \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t))] + \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ -\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{B}(\vec{r}, t)}{\mu_0} \right) \\ -\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right\} + \nabla \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{B}(\vec{r}, t)}{\mu_0} \right) \end{aligned}$$

Comparando con lo obtenido anteriormente, podemos concluir que:

$$\epsilon(\vec{r}, t) \doteq \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \quad \text{y} \quad \vec{S}(\vec{r}, t) \doteq \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

9.5.1. Ecuación de Onda en el Vacío

Consideremos las *ecuaciones de Maxwell*:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (9.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.4)$$

Si suponemos que estamos en el espacio vacío se tiene:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \vec{J} = 0 \quad \rho = 0$$

Por lo que el sistema queda:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (9.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (9.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (9.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.8)$$

Tomando el rotor de (9.7) se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

Y usando la identidad: $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

Pero por (9.5):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

Por otro lado:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

Nótese que las ecuaciones (9.1), (9.2), (9.3) y (9.4) son propias de la suposición dentro de un medio lineal, homogéneo e isotrópico.

Y por (9.8):

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Luego:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Lo que se puede escribir como:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad (9.9)$$

Donde $\gamma^2 = \mu_0 \varepsilon_0$.

Notar que (9.9) es una ecuación de ondas con velocidad de propagación $u = \frac{1}{\gamma} = c$ donde c es la velocidad de la luz.

Estos campos corresponden entonces a una onda que se propaga con velocidad γ^{-1} .

En forma análoga se encuentra que:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0} \quad (9.10)$$

Por lo tanto, \vec{E} y \vec{H} son campos que se propagan como ondas viajeras a la velocidad: $u = \frac{1}{\gamma} = c$. La cual corresponde a la velocidad de la luz.

Estas ecuaciones son propias de una suposición dentro de un medio no conductor y libre de fuente.

Para lo cual bastaría encontrar las soluciones de dichas ecuaciones, que son de la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0$$

En donde se propondrá la solución: $\phi(x \pm ct)$, para este sistema uni-dimensional; a través del siguiente desarrollo:

Sea $w = x \pm ct$, se tiene $\frac{\partial w}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial w}{\partial t} = \pm c$. Entonces, usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(w)}{\partial x} &= \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi(w)}{\partial w} \right) = \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} \end{aligned}$$

De forma análoga, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(w)}{\partial t} &= \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} = \pm c \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm c \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} \right) = \pm c \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} \frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi(w)}{\partial t^2}$$

A lo cual concluimos que $\phi(x \pm ct)$ es solución de la ecuación de onda en una dimensión.

9.5.2. Solución de la Ecuación de Onda

Para resolver nuestro sistema de ondas, y así poder satisfacerlo para los campos electromagnéticos, se supondrá que la variación temporal de estos factores, es de la forma e^{iwt} (lo cual es producto de la intuición del movimiento que poseen las ondas a lo largo - y dependencia - del tiempo, bajo una frecuencia determinada w). Esta clase de ondas, se denomina *ondas monocromáticas*.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{iwt}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})e^{iwt}$$

En consecuencia, dada la ecuación (9.9) propondremos las soluciones de la forma: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, en donde $\vec{k} = |\vec{k}| \hat{k}$ y \vec{E}_0 es un vector constante.

Entonces tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = \nabla^2 \vec{E}_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = -k^2 \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = -w^2 \vec{E}(\vec{r})$$

Para lo cual - si aplicamos sobre (9.9) - podemos concluir que:

$$-k^2 \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{w^2}{c^2} \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0$$

Lo cual se cumple sí sólo sí:

$$k = \sqrt{\frac{w^2}{c^2}}$$

A lo cual entonces podemos concluir que una solución de onda en medios no conductores y libres de cargas, son campos de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(wt - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(wt - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Con $|\vec{k}| = \frac{w}{c}$. Pero debemos tener en cuenta una última suposición, y es - dada las ecuaciones anteriores - los campos deben tener divergencia nula, de forma que:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \rightarrow \vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \rightarrow \vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

En conclusión, ambos campos deben ser perpendiculares a la dirección de propagación. Así como también, uno de otro.

9.5.3. Vector Poynting

Recordemos que el flujo de energía por unidad de área, a lo largo del tiempo, está descrito por el vector Poynting, que está definido a través de:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

En el caso de las ondas planas monocromáticas, observado anteriormente, se cumple que:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \frac{E_0 B_0}{c} \cos^2(wt - \beta x) \hat{s}$$

En donde \hat{s} es la coordenada perpendicular, propia del vector, en donde se esté analizando la situación de la onda. Perpendicular a las coordenadas de \vec{B} y \vec{E} .

A lo cual podemos concluir que los tres vectores nombrados (\vec{B} , \vec{E} , \vec{S}) forman un tiedro en la propagación de la onda.

9.6. Problemas Resueltos

PROBLEMA 1:

En la figura se muestra un toroide delgado de sección circular, el cual posee un enrollado de N vueltas con una corriente I_0 . El alambre tiene una conductividad σ y diámetro D . Para este problema se pide determinar:

1. La intensidad magnética \vec{H} al interior del toroide.
2. La inductancia equivalente L del enrollado.
3. La resistencia equivalente R del enrollado.

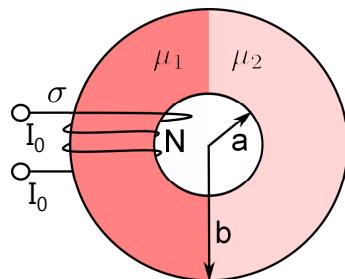


Figura 9.23: Problema 1

Solución:

- Como es un toroide delgado, lo podemos “estirar”.

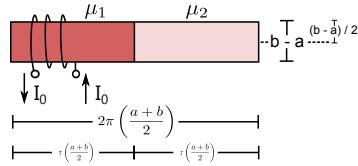


Figura 9.24: Problema 1 - Análisis 1

Ley Circuital de Ampère:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_{\Gamma} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = \pi H_1 \left(\frac{a+b}{2} \right) + \pi H_2 \left(\frac{a+b}{2} \right) = NI_0$$

$$\pi(H_1 + H_2) \left(\frac{a+b}{2} \right) = NI_0$$

Condiciones de Borde:

$$B_1 = B_2$$

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$$

Así:

$$H_1 = \frac{2NI_0\mu_2}{\pi(a+b)(\mu_1+\mu_2)} \quad \text{y} \quad H_2 = \frac{2NI_0\mu_1}{\pi(a+b)(\mu_1+\mu_2)}$$

- Necesitamos la energía magnética total almacenada.

$$W_m = W_1 + W_2$$

$$W_1 = \frac{\mu_1}{2} \iiint_{\Omega_1} H_1^2 dv = \frac{\mu_1}{2} \frac{4N^2 I_0^2}{\pi^2(a+b)^2} \frac{\mu_2^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} \pi \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \pi \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

$$W_2 = \frac{\mu_2}{2} \iiint_{\Omega_2} H_2^2 dv = \frac{\mu_2}{2} \frac{4N^2 I_0^2}{\pi^2(a+b)^2} \frac{\mu_1^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} \pi \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \pi \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

$$W_m = \frac{\mu_1 \mu_2^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} \frac{N^2 I_0^2 (b-a)^2}{4(a+b)} + \frac{\mu_2 \mu_1^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} \frac{N^2 I_0^2 (b-a)^2}{4(a+b)} = \frac{N^2 I_0^2 (b-a)^2}{4(a+b)} \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1+\mu_2)} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$L = \frac{N^2 (b-a)^2 \mu_1 \mu_2}{2(a+b)(\mu_1+\mu_2)}$$

3.

$$R = \frac{\ell}{\sigma \mathcal{A}}$$

Largo unitario:

$$\ell = 2\pi \frac{(b-a)}{2} = \pi(b-a)$$

Entonces:

$$R = \frac{N\pi(b-a)}{\sigma \frac{\pi(b-a)^2}{4}} = \frac{4N}{\sigma(b-a)}$$

PROBLEMA 2:

El electroimán mostrado en la figura 9.25 es excitado por 2 fuentes de corrientes idénticas.

Encuentre la fuerza de atracción entre los polos en términos de la corriente I y la geometría. Si la corriente fuera invertida en uno de los lados, ¿cuál será la fuerza entre los polos?

Solución:

Considere que el sistema será lineal suponiendo que la reluctancia del acero es despreciable.

Fuerza electromagnética:

$$F_e = -\frac{\partial W_s}{\partial x} = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{\mu_0 wd} \right)$$

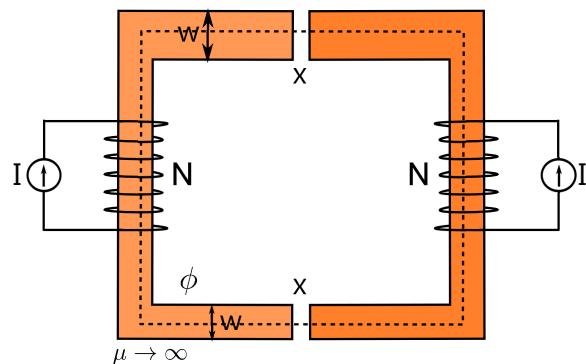


Figura 9.25: Problema 2

Entonces:

$$F_e = -\frac{\phi^2}{\mu wd}$$

De la ley circuital de Ampère y las direcciones observadas: $2Hx = 2NI$.

Entonces:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\phi}{\mu_0 wd}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 wd NI}{x}$$

$$F_e = -\frac{\mu_0 wd N^2 I^2}{x^2}$$

En donde el signo negativo indica que es una fuerza de atracción.

PROBLEMA 3:

Un cable coaxial tiene un dieléctrico con $\varepsilon_r = 14$ el conductor interno tiene un radio de 1 [mm] y el radio interno del conductor externo es de 5 [mm]. Determine la corriente de desplazamiento entre los dos conductores por metros de longitud de cable para un voltaje aplicado $V = 100\cos(12\pi \times 10^6 t)$ [V]

Hint: Considera $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(r_b/r_a)}$

Solución:

Ocupando la indicación, se tiene:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln(5)} \Rightarrow \frac{C}{l} = \frac{2\pi \times 4 \times 8,854 \times 10^{-12}}{\ln(5)} = 1,3826 \times 10^{-10} \left[\frac{F}{m} \right]$$

Ahora, ya con la expresión para la capacidad, ocupamos la siguiente expresión para la corriente.

$$\begin{aligned} \frac{I_d}{l} &= \frac{C}{l} \frac{\partial V(t)}{\partial t} = -(1,3826 \times 10^{-10}) \times (12\pi \times 10^6) \times 100 \sin(12\pi \times 10^6 t) \\ \frac{I_d}{l} &= -0,520 \sin(12\pi \times 10^6 t) \left[\frac{A}{m} \right] \end{aligned}$$

PROBLEMA 4:

Se tiene un electroimán formado por dos piezas de fierro, ambas de permeabilidad μ ($\mu \gg \mu_0$). En la pieza (1) se enrolla una bobina de N_1 vueltas por donde circula una corriente I_1 en la pieza (2) se enrolla una bobina de N_2 vueltas por donde circula una corriente I_2 . Ambos enrollados son tales que tienden a producir flujo ascendente en sus respectivas piernas, de modo que tienden también a contrarrestarse.

También se sabe que la sección de las dos piernas es \mathcal{A} .

Determine:

1. Reluctancia \mathcal{R} y circuito magnético equivalente.
2. Flujo magnético ϕ por el circuito.
3. Inductancias propias y mutuas.
4. Energía del sistema.
5. Fuerza sobre la pieza móvil.

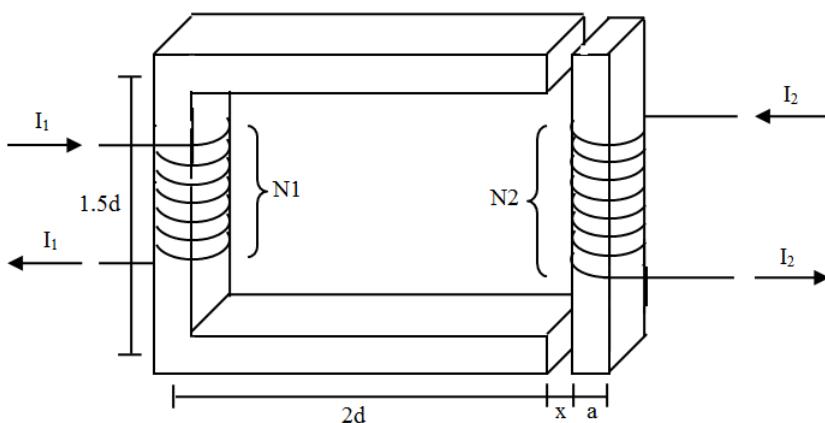


Figura 9.26: Problema 4

Solución:

1.

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = H_1 \frac{3d}{2} + 2H_1 d + H_0 x + H_2 \frac{a}{2} + H_2 \frac{3d}{2} + H_2 \frac{a}{2} + H_0 x + 2H_1 d$$

Por condiciones de borde: $B_0 = B_1 = B_2 = B$. Y como las componentes normales se conservan, se tiene:

$$\mu H_1 = \mu_0 H_0 = \mu H_2$$

Así, la expresión de la corriente enlazada queda:

$$\begin{aligned} N_1 I_1 - N_2 I_2 &= 2H_0 x + H_1 \left(\frac{3d}{2} + \frac{4d}{2} + \frac{4d}{2} \right) + H_2 \left(\frac{2a + 3d}{2} \right) \\ N_1 I_1 - N_2 I_2 &= 2H_0 x + H_1 \frac{14d + 2a}{2} \\ N_1 I_1 - N_2 I_2 &= 2 \frac{Bx}{\mu_0} + \frac{B}{2\mu} (14d + 2a) \end{aligned}$$

Ahora, se calcula el flujo enlazado en el circuito. Esto se hace con la expresión:

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Se sabe el campo es constante aproximadamente constante al interior del material, entonces puede salir de la integral, luego:

$$B = \frac{\phi}{A}$$

Se reemplaza en la ecuación que se tenía anteriormente, para poder calcular las reluctancias y así poder ver el circuito magnético:

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \phi \left(\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d + a}{A\mu} \right)$$

El valor de las 2 reluctancias es: $\mathcal{R}_1 = \frac{2x}{A\mu_0}$ y $\mathcal{R}_2 = \frac{7d + a}{A\mu}$, y como están conectadas en serie se tiene:

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{2x\mu + 7d\mu_0 + a\mu_0}{A\mu\mu_0}$$

Por lo que el circuito equivalente nos queda:

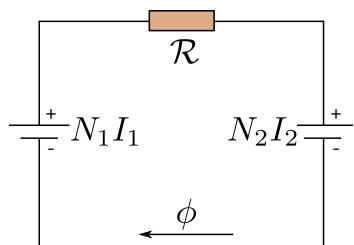


Figura 9.27: Circuito Equivalente

2. Lo único que falta por saber en ese circuito, es el valor del flujo - el cual se puede despejar - obteniendo:

$$\phi = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}}$$

3. Las inductancias se pueden calcular a partir de la siguiente expresión:

$$L_{ij} = \frac{N_i \phi_{ij}}{I_j}$$

La expresión anterior entrega la inductancia que produce I_j enlazado por la bobina i .

Para calcular la inductancia se tiene que activar solo una corriente. Entonces, para calcular la inductancia que produce I_1 enlazado por la bobina 1:

$$L_{11} = \frac{N_1 \phi_{11}}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \frac{N_1 I_1}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}} = \frac{N_1^2}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}}$$

Para L_{22} se tiene que considerar que la corriente en la bobina de la pieza móvil del transformador va en sentido contrario a I_1 , entonces para obtener las inductancias hay que considerar el signo positivo, o nos saldrían negativas y L_{21} saldría distinto a L_{12} .

Ahora, para L_{22} se hace lo mismo, pero se activa I_2 y desactiva I_1 lo cual hace el procedimiento completamente análogo, entonces:

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}}$$

Lo cual entonces:

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}} = L_{21}$$

En donde se observa que las inductancias mutuas dieron iguales.

4. Ahora se quiere conocer la energía magnetostática almacenada del sistema. Para esto, se utiliza la siguiente expresión:

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Reemplazando queda:

$$E = \frac{1}{2} \frac{N_1^2 I_1^2}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}} + \frac{N_1 N_2 I_1 I_2}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}} + \frac{1}{2} \frac{N_2^2 I_2^2}{\frac{2x}{A\mu_0} + \frac{7d+a}{A\mu}}$$

Se ordena un poco la expresión, para después poder derivarla y encontrar la fuerza que actúa sobre la pieza móvil. Para esto, se utiliza que $\mu \gg \mu_0$, así las fracciones que tengan μ como denominador tienden a 0. Así la energía queda de la forma:

$$E = \frac{N_1^2 I_1^2 A\mu_0}{4x} + \frac{N_1 N_2 I_1 I_2 A\mu_0}{2x} + \frac{N_2^2 I_2^2 A\mu_0}{4x}$$

5. Ahora, para saber la fuerza que se ejerce sobre la pieza móvil, se deriva la expresión de la energía respecto a x :

$$F = \frac{\partial U}{\partial x}$$

En donde si se reemplaza queda:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N_1^2 I_1^2 \mathcal{A} \mu_0}{4x} + \frac{N_1 N_2 I_1 I_2 \mathcal{A} \mu_0}{2x} + \frac{N_2^2 I_2^2 \mathcal{A} \mu_0}{4x} \right) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{N_1^2 I_1^2 \mathcal{A} \mu_0}{4} + \frac{N_1 N_2 I_1 I_2 \mathcal{A} \mu_0}{2} + \frac{N_2^2 I_2^2 \mathcal{A} \mu_0}{4} \right) \\ &= -\frac{\mathcal{A} \mu_0}{2x^2} \left(\frac{(N_1 I_1 + N_2 I_2)^2}{2} \right) \Rightarrow \therefore \vec{F} = -\frac{\mathcal{A} \mu_0 (N_1 I_1 + N_2 I_2)^2}{4x^2} \hat{i} \end{aligned}$$

Para más información respecto al punto (1), se sugiere al lector, leer el apéndice sección A.6.

9.7. Problemas Propuestos

PROBLEMA 1:

Por la bobina infinitamente larga de la siguiente figura circula una corriente $I(t) = \alpha t$. En el exterior de la bobina a una distancia $r(t)$ del eje hay un electrón con velocidad $\vec{v}(t)$. Se pide encontrar la fuerza que actúa sobre el electrón en un instante arbitrario.

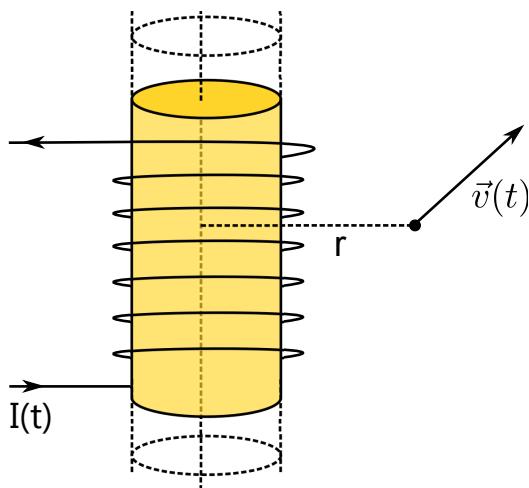


Figura 9.28: Problema 1 - Propuesto

PROBLEMA 2:

Un capacitor con aire como dieléctrico tiene placas que miden cada una de ellas $1 [cm^2]$ de área y están separadas a $0,1 [mm]$ de distancia. Encuentre la corriente de desplazamiento para un voltaje aplicado de $V(t) = 100 \operatorname{sen}(\pi \times 10^6 t)$

Apéndice A

Circuitos Electromagnéticos

A.1. Elementos en Circuitos R.L.C.

Hasta el momento hemos visto tres elementos básicos de circuitos, resistencia, condensadores e inductancias. Para lo cual, tenemos el siguiente recuento:

- La resistencia es $R = \frac{l}{gA}$, y se cumple $V = RI$, donde $V = V_A - V_B$.
- La capacidad es $C = \frac{\epsilon A}{d}$, y se cumple $Q = CV$, por ello la corriente es:

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = C \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Análogamente, para la inductancia $L = \frac{\mu NS}{2\pi R}$, y se cumple: $\phi = LI$. Con ello la F.E.M. inducida es $\frac{\partial \phi}{\partial t} = V_A - V_B \Rightarrow V = L \frac{\partial I}{\partial t}$

A.2. Circuitos R.L.C.

Los elementos R.L.C. pueden unirse y combinarse de muchas formas para formar circuitos. Tomemos por ejemplo el caso de la Figura A.1.

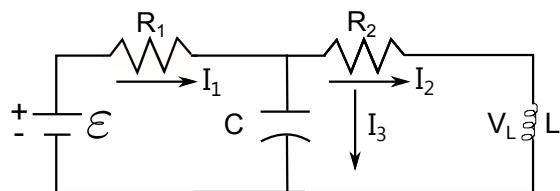


Figura A.1: Circuito R.L.C.

Las ecuaciones que describen las corrientes y voltajes son:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= V_{R1} + V_C = R_1 I_1 + V_C \\
 V_C &= V_{R2} + V_L = R_2 I_2 + L \frac{dI_2}{dt} \\
 V_C &= R_2 I_2 + L \frac{\partial I_2}{\partial t} \quad / \frac{\partial}{\partial t} \\
 \frac{\partial V_C}{\partial t} &= R_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + L \frac{\partial^2 I_2}{\partial t^2} \\
 \frac{I_1 - I_2}{C} &= R_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + L \frac{\partial^2 I_2}{\partial t^2} \\
 V_0 &= R_1 I_1 + R_2 I_2 + L \frac{\partial^2 I_2}{\partial t^2} \\
 V_0 &= R_1 \left[I_2 + R_2 C \frac{\partial I_2}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 I_2}{\partial t^2} \right] + R_2 I_2 + L \frac{\partial I_2}{\partial t} \\
 V_0 &= (R_1 + R_2) I_2 + (R_1 R_2 C + L) \frac{\partial I_2}{\partial t} + R_1 L C \frac{\partial^2 I_2}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación de segundo orden, por lo tanto se requieren 2 condiciones iniciales para resolverla. Estas condiciones vienen dadas por el voltaje inicial en el condensador y por la corriente inicial en la inductancia.

A.3. Corrientes Alternas

Consideremos el siguiente circuito:

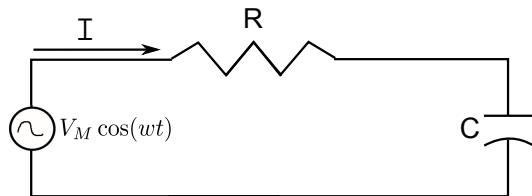


Figura A.2: Circuito R.C. con Fuente Alterna

En este circuito la F.E.M. o fuente de voltaje es sinusoidal. Las corrientes que se generarán en estado estacionario también tendrán forma sinusoidal (según veremos), por ello a estos circuitos se les denomina Circuitos de Corriente Alterna o C.A. Para el circuito de la Figura A.2 las ecuaciones que lo describen son:

$$V_M \cos(wt) = RI_C + V_C = RC \frac{\partial V_C}{\partial t} + V_C$$

Solución Homogénea:

$$RC + D = 0D = -RC$$

$$V_{Ch}(t) = Ke^{-Rt}$$

Solución Particular:

$$V_{Cp}(t) = V_{Ch} \cos(wt + \varphi)$$

$$V_C(t) = Ke^{-Rt} + V_{Ch} \cos(wt + \varphi)$$

Evaluando para despejar constantes, se obtiene:

$$V_C(t=0) = 0 \implies K + V_{Ch} \cos(\varphi) = 0$$

A lo cual concluimos que - en el régimen permanente - cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene:

$$V_C(t) = V_{Ch} \cos(wt + \varphi)$$

Así, es necesario resolver en general una ecuación diferencial, cuyo orden depende del número de condensadores e inductancias que tenga el circuito. Sin embargo, debido a que las soluciones de régimen permanente son sinusoidales se recurre a una transformada para simplificar los cálculos según veremos a continuación.

A.4. Transformada Fasorial

Se acostumbra usar una transformada fasorial sobre este tipo de funciones:

$$F\{V_C(t)\} = V_{CM}e^{j\varphi} \triangleq V_C$$

$$F^{-1}\{V_{Ch}e^{j\varphi}\} = V_{Ch} \cos(wt + \varphi)$$

Luego si aplicamos F a ambos lados de la ecuación diferencial del circuito de la Figura 10.5

$$F\{V_M \cos(wt)\} = F\left\{RC \frac{\partial V_C}{\partial t} + V_C\right\}$$

Como F es *lineal* y *biyectiva* se tiene:

$$F\left\{RC \frac{\partial V_C}{\partial t} + V_C\right\} = RCF\left\{\frac{\partial V_C}{\partial t}\right\} + F\{V_C(t)\}$$

Pero:

$$F\left\{\frac{\partial V_C}{\partial t}\right\} = F\{V_{Ch}(-w) \sin(wt + \varphi)\} = F\left\{V_{Ch}(-w) \cos(wt + -\frac{\pi}{2})\right\} = -wV_{Ch}e^{j(\varphi-\pi/2)} = -we^{\frac{j\pi}{2}}V_{Ch}e^{j\varphi}$$

$$\therefore F\left\{\frac{\partial V_C}{\partial t}\right\} = -jwV_{Ch}e^{j\varphi}$$

Luego:

$$V_{Ch}e^{j0} = RCjw\hat{V}_{Ch} + \hat{V}_{Ch} \Rightarrow \therefore \hat{V}_{Ch} = \frac{V_{Ch}}{1 + jwRC}$$

A.5. Concepto de Impedancia

Para resistencias:

$$V = RI$$

$$F(V) = RF(I) \iff \hat{V} = R\hat{i}$$

$$Z \triangleq \frac{\hat{V}}{\hat{i}} = R$$

Para condensadores:

$$I_C = C \frac{\partial V_C}{\partial t}$$

$$F(I_C) = CF \left\{ \frac{\partial V_C}{\partial t} \right\} \iff \hat{I}_C = C j w \hat{V}_C$$

$$Z \triangleq \frac{\hat{V}}{\hat{i} j w C} = \frac{1}{j w C}$$

Para inductancias:

$$V_L = L \frac{\partial I_L}{\partial t}$$

$$F(V_L) = LF \left\{ \frac{\partial I_L}{\partial t} \right\} \iff \hat{V}_L = L i w \hat{I}_L$$

$$Z \triangleq j w L$$

Así, para el ejemplo visto anteriormente

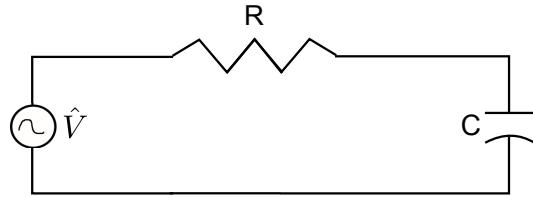


Figura A.3: Representación Fasorial

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \hat{V}_R + \hat{V}_C & \| & \quad \hat{V}_R = R\hat{i} \quad y \quad \hat{V}_C = \frac{I}{j w C} \\ \hat{V} &= \left(R + \frac{1}{j w C} \right) \hat{i} \\ \hat{i} &= \frac{\hat{V}}{R + \frac{1}{j w C}} = \hat{V} \frac{w C}{1 + j w R C} = w C \frac{|V|}{\sqrt{1 + (w R C)^2}} \end{aligned}$$

Si consideramos $\varphi = 90^\circ - \arctan(wRC)$ se tiene:

$$I(t) = I \cos(wt + \varphi)$$

A.6. Circuitos Magnéticos

Resulta interesante analizar el caso de una bobina; pues, como es sabido, estas poseen un campo magnético constante en su interior (sí y sólo sí se considera un largo infinito, o bien, si esta es cerrada). Por ello, si consideramos las distintas permeabilidades de los materiales, se puede llegar a una analogía con los circuitos eléctricos explicados anteriormente.

Primero debemos recordar las relaciones que poseen estos circuitos, como lo son por ejemplo, las leyes de Kirchhoff que dicen:

1. $\nabla \cdot \vec{J} = 0$: Al aplicarle el teorema de la divergencia, nos arroja que la integral $\int \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_i I_i = 0$. Lo que nos demuestra que *toda la corriente que entra a un nodo del circuito, debe salir*.
2. $\nabla \times \vec{E} = 0$: Suponiendo que estamos en un circuito electrostático, al aplicarle el teorema de Stokes, nos arroja que la integral $\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \sum_k V_k = 0$ Lo que nos demuestra que *toda caída de tensión es igual a la tensión total suministrada*. Nótese que esto también es válido para circuitos con corriente alterna, aplicando los conceptos de flujo, a través de la integral del campo magnético.

Dicho esto, podemos destacar las siguientes leyes del magnetismo para establecer una similitud con lo anteriormente mencionado.

Esto es:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= NI\end{aligned}$$

Recordando que estamos en una bobina, notamos que la primera relación se cumple para el flujo magnético (ϕ), mientras que la relación de voltaje se cumple para el factor NI .

Así, hemos concluido la relación de Kirchhoff para el magnetismo.

Tan sólo falta encajar un término, que resulta de la relación que existe con la permeabilidad propia de cada material. Esto - porque si recordamos - la definición de resistencia (en circuitos eléctricos), esta está dada por:

$$R = \frac{l}{A_g}$$

Destacando que el único factor que la diferencia de los otros materiales, es su propio factor g . Por ello es que, podemos plantear nuestra relación con la resistencia, a través del factor llamado *reluctancia* que está definido por:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{A\mu}$$

Cabe señalar que para la reluctancia, se cumplen de forma análoga a las resistencias, las leyes de circuitos. Siendo estas:

1. Disposición Paralela:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathcal{R}_i}$$

2. Disposición en Serie:

$$\mathcal{R}_{eq} = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i$$

Apéndice B

Sitios Web de Interés

1. <http://www.acienasgalilei.com/videos/3electricidad-mag.htm>
El sitio es de la “Academia de Ciencias Galilei” y en la sección de vídeos de electromagnetismo contiene alrededor de 74 vídeos, que fueron elaborados por el California Institute of Technology y están doblados al español.
Los videos son muy explicativos e interesantes.
2. <http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/index.html>
Excelentes y explicativas imágenes, animaciones; además de aplicaciones y simulaciones en java applets y shockwave. Ordenados en Campos Vectoriales, Electrostática, Magnetostática, Ley de Faraday y Luz. Además de extensas guías (en inglés) sobre los temas del curso (Course Notes) y un Tour Guiado (Guided Tour), ambas secciones con links a algunos de estos complementos. Desarrollada por el MIT, la página es parte del proyecto TEAL (Technology Enabled Active Learning) utilizado en el curso de Electricidad y Magnetismo de los mechones del MIT. La distribución y aplicación del material es libre con propósitos de educación sin fines de lucro y poniéndolo en el conocimiento del MIT TEAL/Studio Physics Project. Project Manager: Andrew McKinney.
Material recomendable para exposición en clase, aunque las aplicaciones requieren de buenos recursos de sistema.
3. <http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/>
Hay sólo 8 Flash de electricidad y magnetismo de un total de 91. El resto de los Flash tratan de Caos, Mecánica Clásica, Micrómetro, Misceláneos, Mecánica Cuántica, Relatividad, etc. Los Flash fueron desarrollados por Davis M. Harrison del Departamento de Física de la Universidad de Toronto; tienen copyright y están bajo licencia Creative Commons.
4. http://dfists.ua.es/experiencias_de_fisica/index1.html
Se encuentran en esta página 5 videos de electricidad y magnetismo, de 18 en total. Éstos tratan de interacción entre imanes, el experimento de Oersted, acciones entre corrientes (Ampère), campo magnético de un solenoide y de la ley de Faraday. El resto trata de cómo efectuar medidas con instrumentos y otros experimentos de física. Son buenos videos. Fueron desarrollados por el Departamento de Física de la Universidad de Alicante.
5. <http://www.unizar.es/lfnae/luzon/CDR3/electromagnetismo.htm>
Applets sobre electromagnetismo, recopilados de Internet, con breves explicaciones acerca del fenómeno en cuestión. Parte de la página personal de Gloria Luzón, profesora de la Universidad de Zaragoza.

6. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/elecmagnet.htm>
Extensos textos y desarrollos matemáticos acerca del electromagnetismo con dibujos y algunos applets como apoyo. Parte de la página "Física con Ordenador. Curso Interactivo de Física en Internet", del profesor Ángel Franco García, de la Universidad del País Vasco.
7. <http://personales.upv.es/jquiles/prffi/indice.htm>
Problemas resueltos de Campos, Electrostática, Conductores y Dieléctricos, Electrocinética, Análisis de Redes, Semiconductores, Campo Magnético, y Corriente Alterna. Página de Isidro José Quiles Hoyo, de la Universidad Politécnica de Valencia.
8. <http://www.licimep.org/Curso2007/Electromagnetismo/ProblemasResueltos.htm>
Problemas resueltos del libro de Resnick y del libro de Murphy en formato pdf. Página dentro de la página de la "Liga de Ciclismo de Montaña del Estado de Puebla" (...¿ Ciclistas muy bien formados?...).
9. <http://www.portalplanetasedna.com.ar/magnetismo.htm>
Artículo sobre el magnetismo terrestre, teorías sobre su origen, características y variación, apoyado con 1 dibujo.
Fuente del artículo: Gran Enciclopedia Universal (Cap. 23). Parte del sitio argentino Planeta Sedna.
10. <http://www.walter-fendt.de/ph14s/>
Página del profesor alemán Walter Fendt. Sólo hay 9 applets de electrodinámica en la versión española, de un total de 13 en la versión alemana.
11. http://phet.colorado.edu/new/simulations/sims.php?sim=Charges_and_Fields
Página con animaciones muy buenas de campos eléctricos y magnéticos, etc.

Apéndice C

Fórmulas Usadas

Constantes en Sistema MKS:

$$\varepsilon_0 = 8,8541 \times 10^{-12} [F/m]$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$$

Fórmulas:

Fórmulas para campos vectoriales \vec{A} y campos escalares V :

1. **Coordenadas Cartesianas:** $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ y $V(x, y, z)$ se tiene:

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla^2 V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

2. **Coordenadas Cilíndricas:** $\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{k}$ y $V(\rho, \phi, z)$ se tiene:

$$\nabla V(\rho, \phi, z) = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla^2 V(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{k}$$

3. **Coordenadas Esféricas:** $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$ y $V(r, \theta, \phi)$ se tiene:

$$\nabla V(\rho, \theta, \phi) = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 V(\rho, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \operatorname{sen}(\theta)) + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \left(\frac{\partial (A_\phi \operatorname{sen}(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$