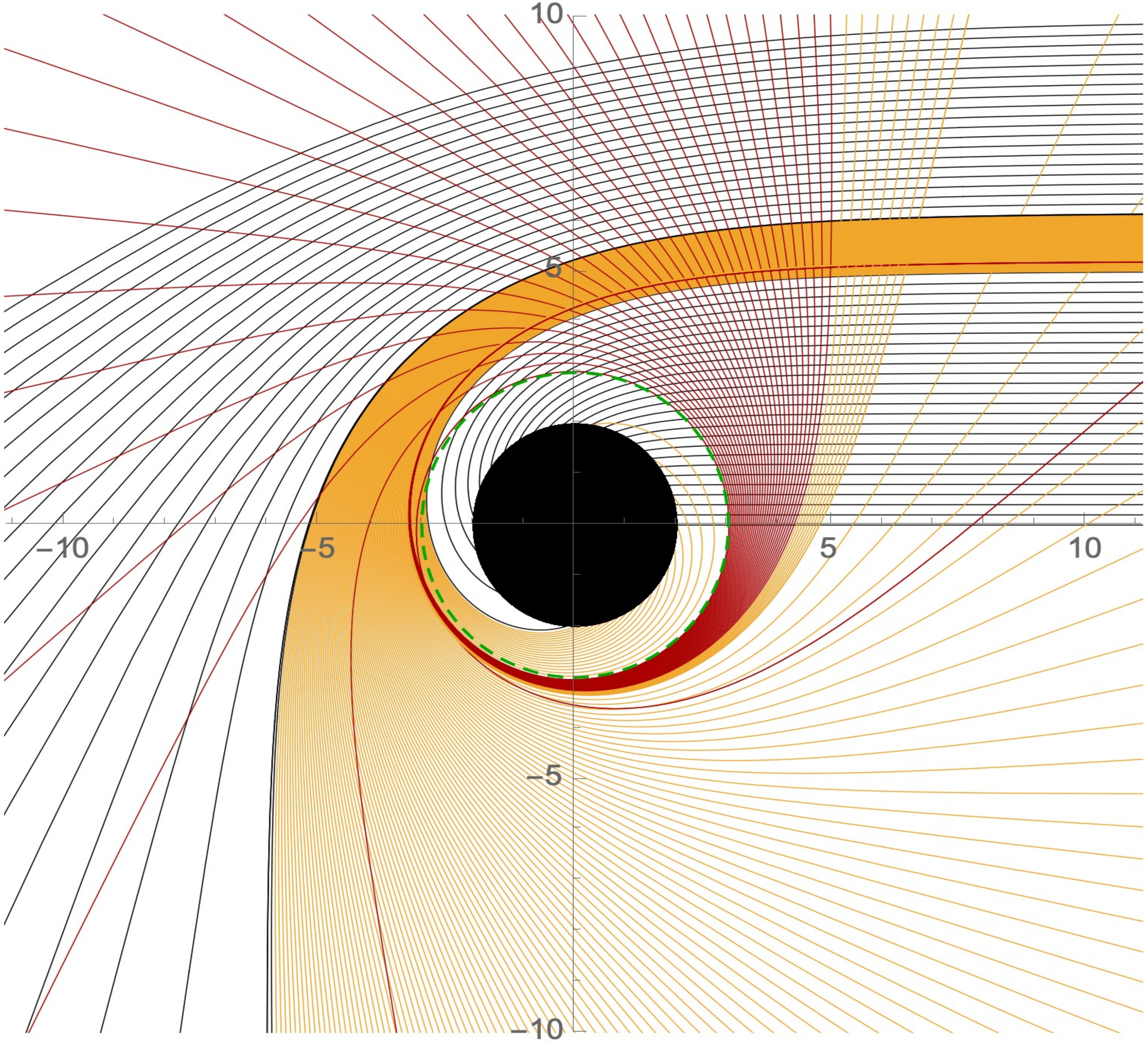
Parametrización de sombras en el espacio-tiempo de Kerr

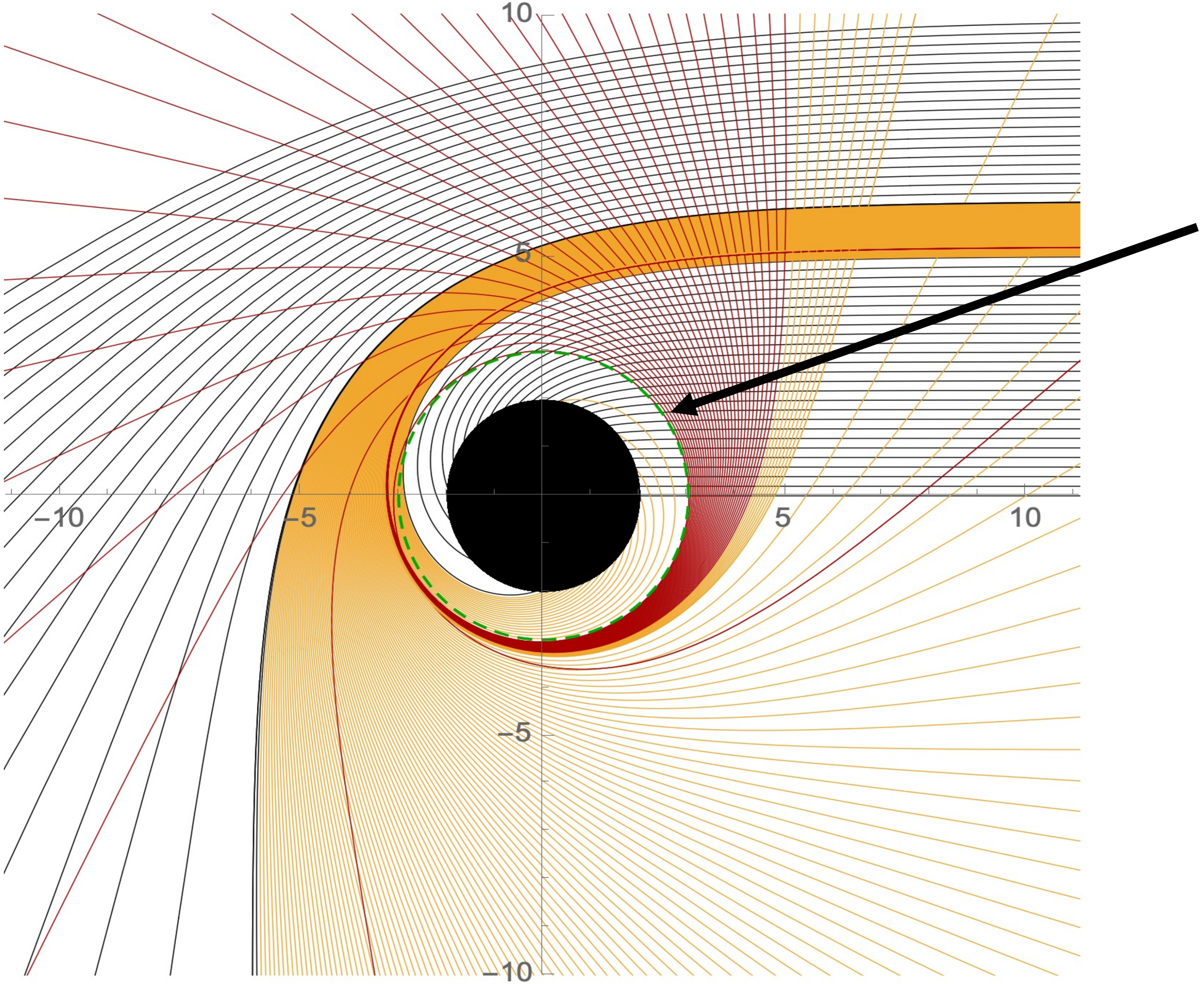
Mohsen Fathi

23 Nov. 2021

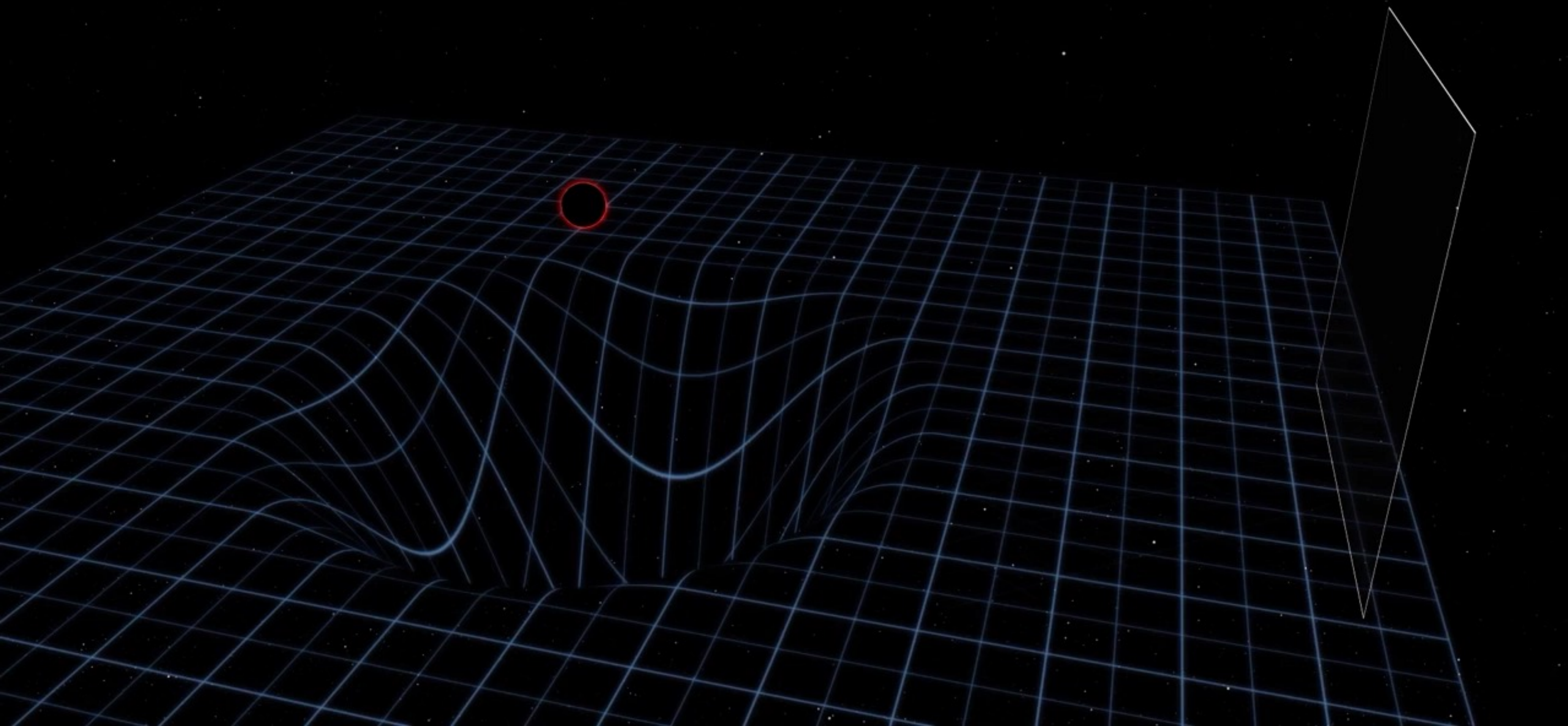
Universidad de Valparaíso
CHILE

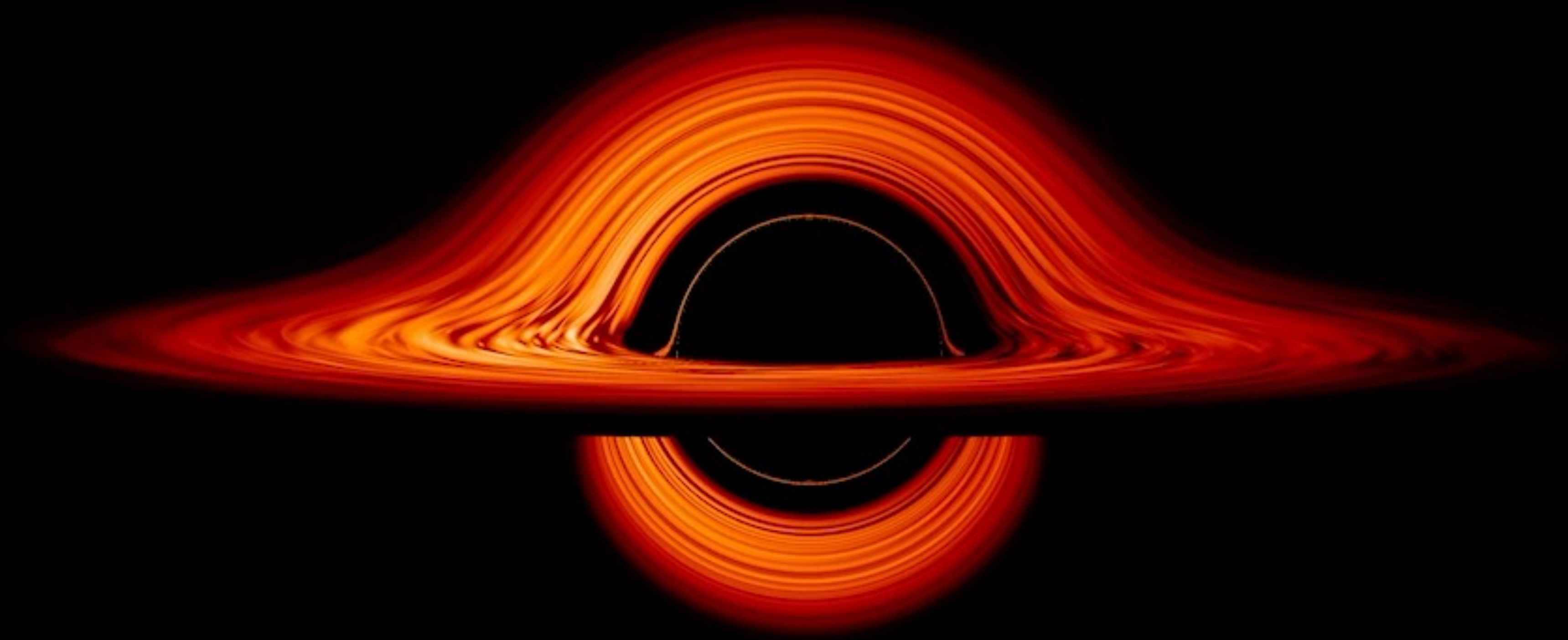
INSTITUTO
FISICA
y
Astronomía


10
5
−10
−5
5
10
−5
−10


10
5
−10
−5
5
10
−5
−10

n=0





Cálculos

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

1. Consideramos la métrica del espacio-tiempo que se da en las famosas coordenadas de Boyer-Lindquist:

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

1. Consideramos la métrica del espacio-tiempo que se da en las famosas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\phi^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi,$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

1. Consideramos la métrica del espacio-tiempo que se da en las famosas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\phi^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi,$$

término cruzado

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

1. Consideramos la métrica del espacio-tiempo que se da en las famosas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\phi^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi,$$

término cruzado

significado de un espacio-tiempo estacionario

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

1. Consideramos la métrica del espacio-tiempo que se da en las famosas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\phi^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi,$$

término cruzado

significado de un espacio-tiempo estacionario

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

1. Consideramos la métrica del espacio-tiempo que se da en las famosas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\phi^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi,$$

término cruzado

significado de un espacio-tiempo estacionario

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$a = 0$

$$\mathrm{d}s^2_{\mathrm{Sch}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

2. Hay dos hipersuperficies que definen los horizontes del agujero negro:

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

2. Hay dos hipersuperficies que definen los horizontes del agujero negro:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$
$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

2. Hay dos hipersuperficies que definen los horizontes del agujero negro:

horizonte de eventos

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

2. Hay dos hipersuperficies que definen los horizontes del agujero negro:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

horizonte de eventos

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$$

horizonte de Cauchy

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

2. Hay dos hipersuperficies que definen los horizontes del agujero negro:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \longrightarrow \text{horizonte de eventos}$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2} \longrightarrow \text{horizonte de Cauchy}$$

3. También hay una hipersuperficie dentro de la cual, no puede existir ninguna partícula estática y define un límite estático

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

2. Hay dos hipersuperficies que definen los horizontes del agujero negro:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

horizonte de eventos

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$$

horizonte de Cauchy

3. También hay una hipersuperficie dentro de la cual, no puede existir ninguna partícula estática y define un límite estático:

$$r_{\mathrm{SL}} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\omega_0 \Sigma^2 - 2MaLr}{\Delta}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\omega_0 \Sigma^2 - 2MaLr}{\Delta}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\omega_0 \Sigma^2 - 2MaLr}{\Delta}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\mathcal{R}(r) = \left[\omega_0(r^2 + a^2) - aL\right]^2 - \Delta\left[\mathcal{D} + (L - a\omega_0)^2\right]$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\omega_0 \Sigma^2 - 2MaLr}{\Delta}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\mathcal{R}(r) = \left[\omega_0(r^2 + a^2) - aL\right]^2 - \Delta\left[\underbrace{\mathcal{D}}_{\text{constante de Carter}} + (L - a\omega_0)^2\right]$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\omega_0 \Sigma^2 - 2MaLr}{\Delta}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\mathcal{R}(r) = \left[\omega_0(r^2 + a^2) - aL\right]^2 - \Delta\left[\mathcal{D} + (L - a\omega_0)^2\right]$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\Theta(\theta) = \mathcal{D} - \cos^2\theta\left(L^2 \csc^2\theta - a^2\omega_0^2\right)$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\omega_0\Sigma^2 - 2MaLr}{\Delta}$$

Cálculos

- **Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr**

4. Las ecuaciones de movimiento para los rayos de luz se obtienen mediante
 el método de Hamilton-Jacobi y conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\mathcal{R}(r) = \left[\omega_0(r^2 + a^2) - aL\right]^2 - \Delta\left[\mathcal{D} + (L - a\omega_0)^2\right]$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\Theta(\theta) = \mathcal{D} - \cos^2\theta\left(L^2 \csc^2\theta - a^2\omega_0^2\right)$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\omega_0 \Sigma^2 - 2MaLr}{\Delta}$$

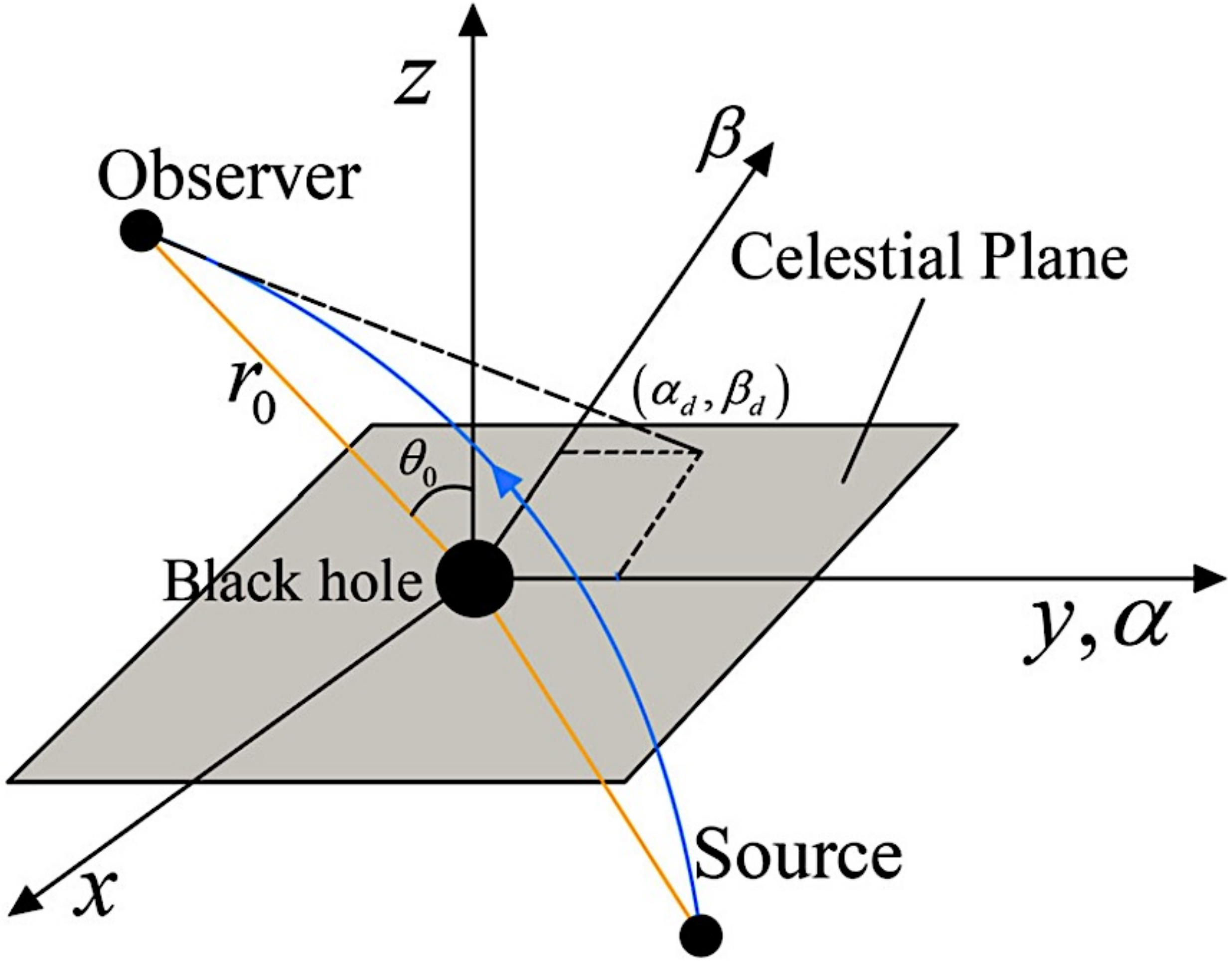
$$\Sigma^2 = \rho^2\left(r^2 + a^2\right) + 2Mra^2 \sin^2\theta$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

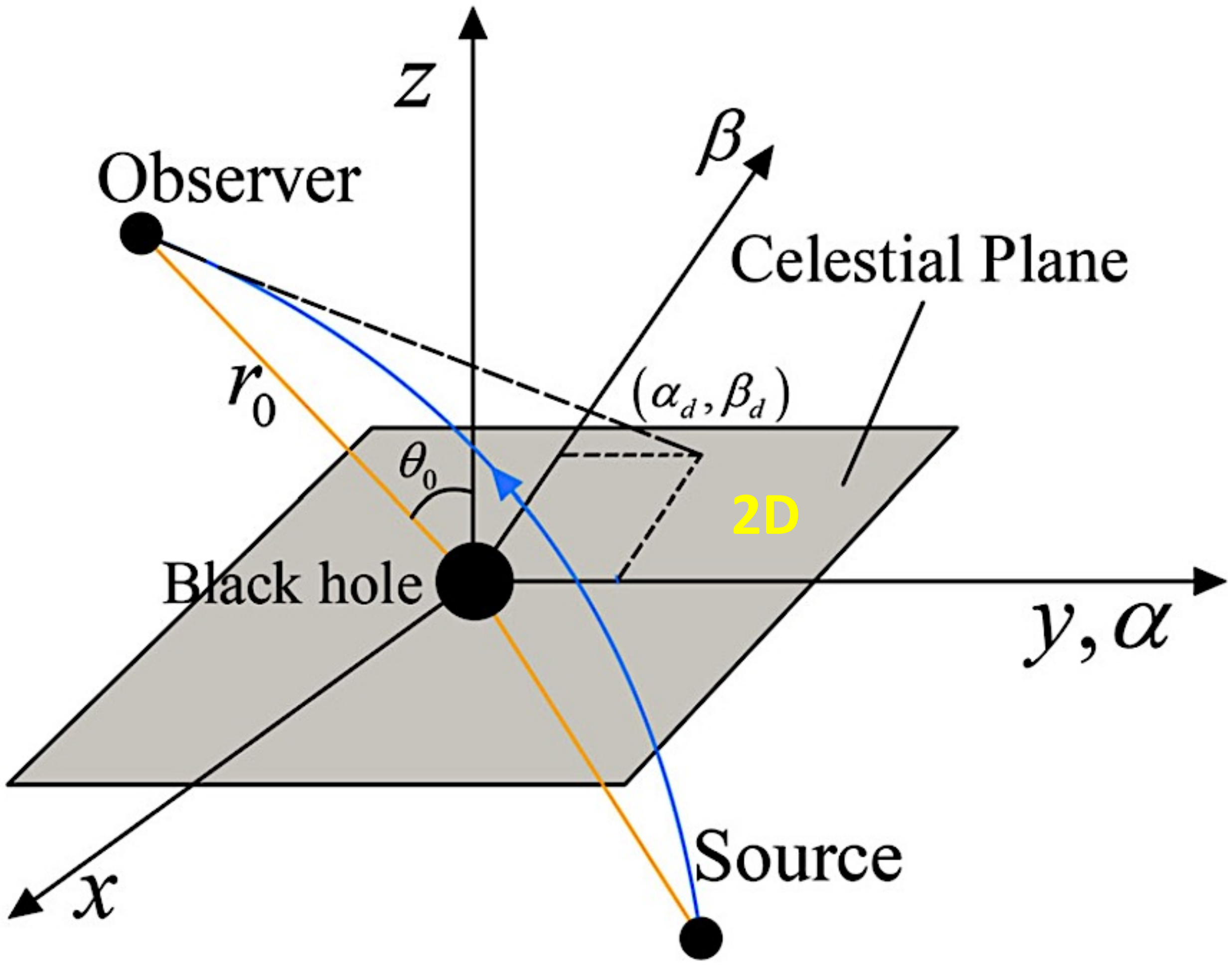
Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



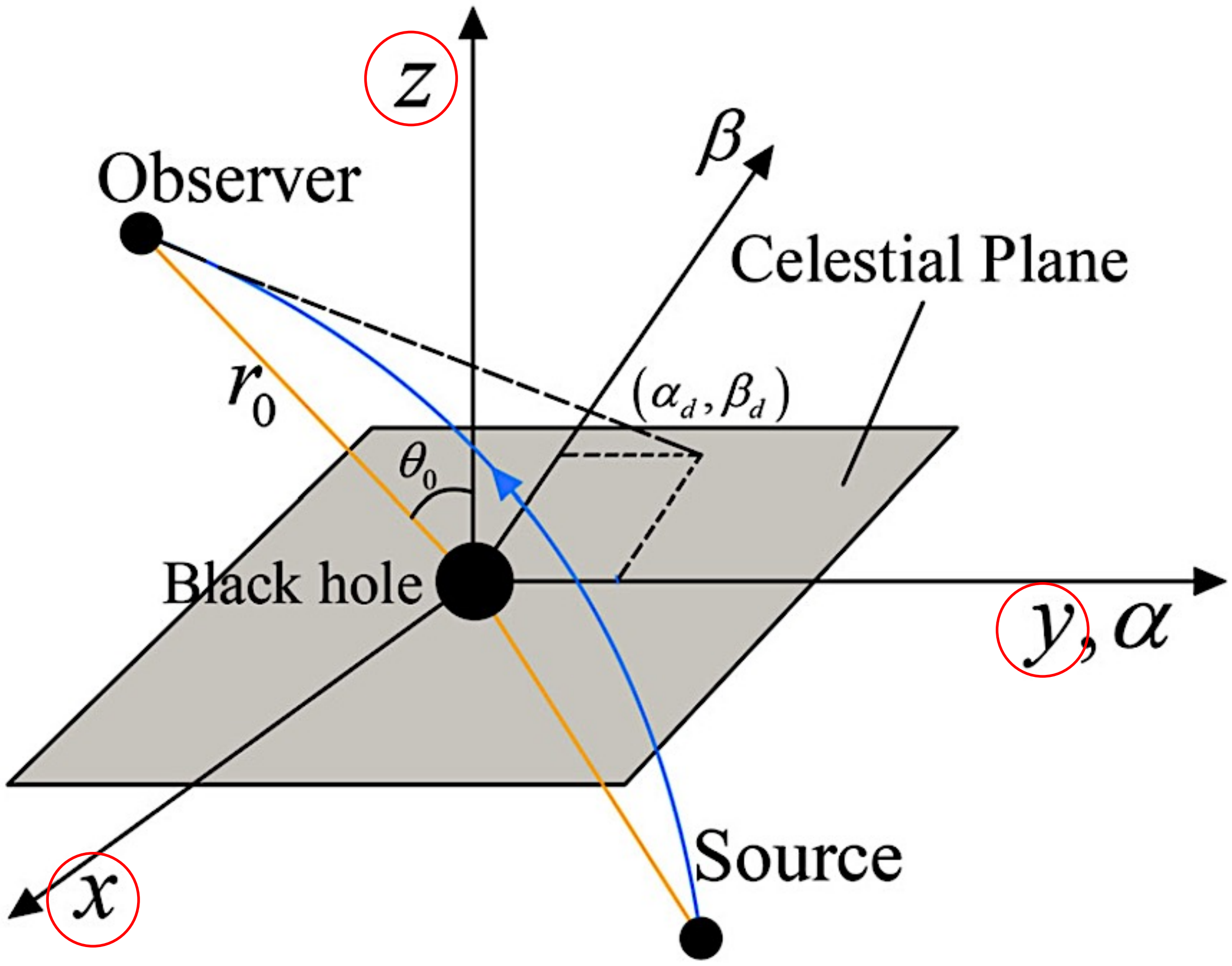
Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



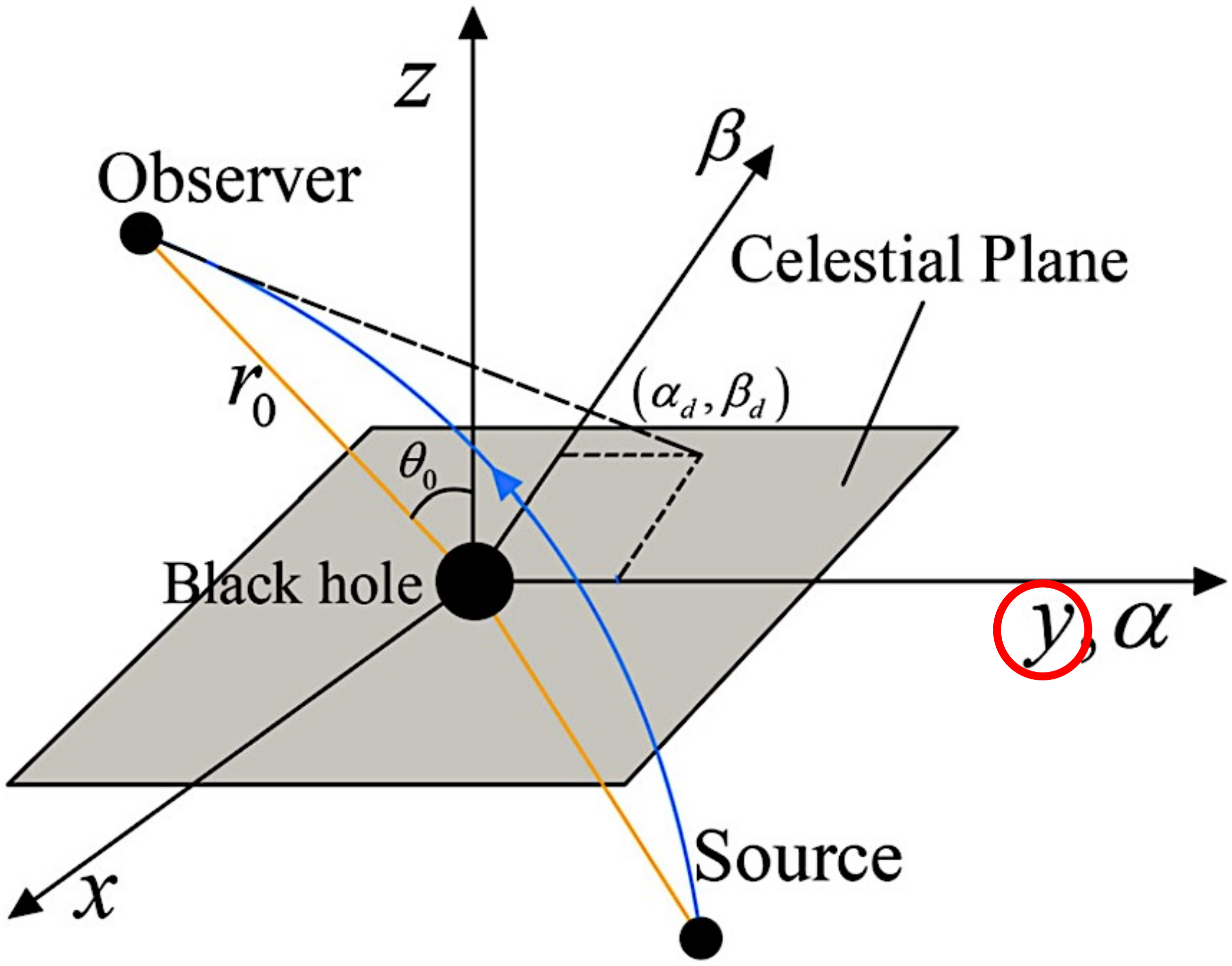
Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



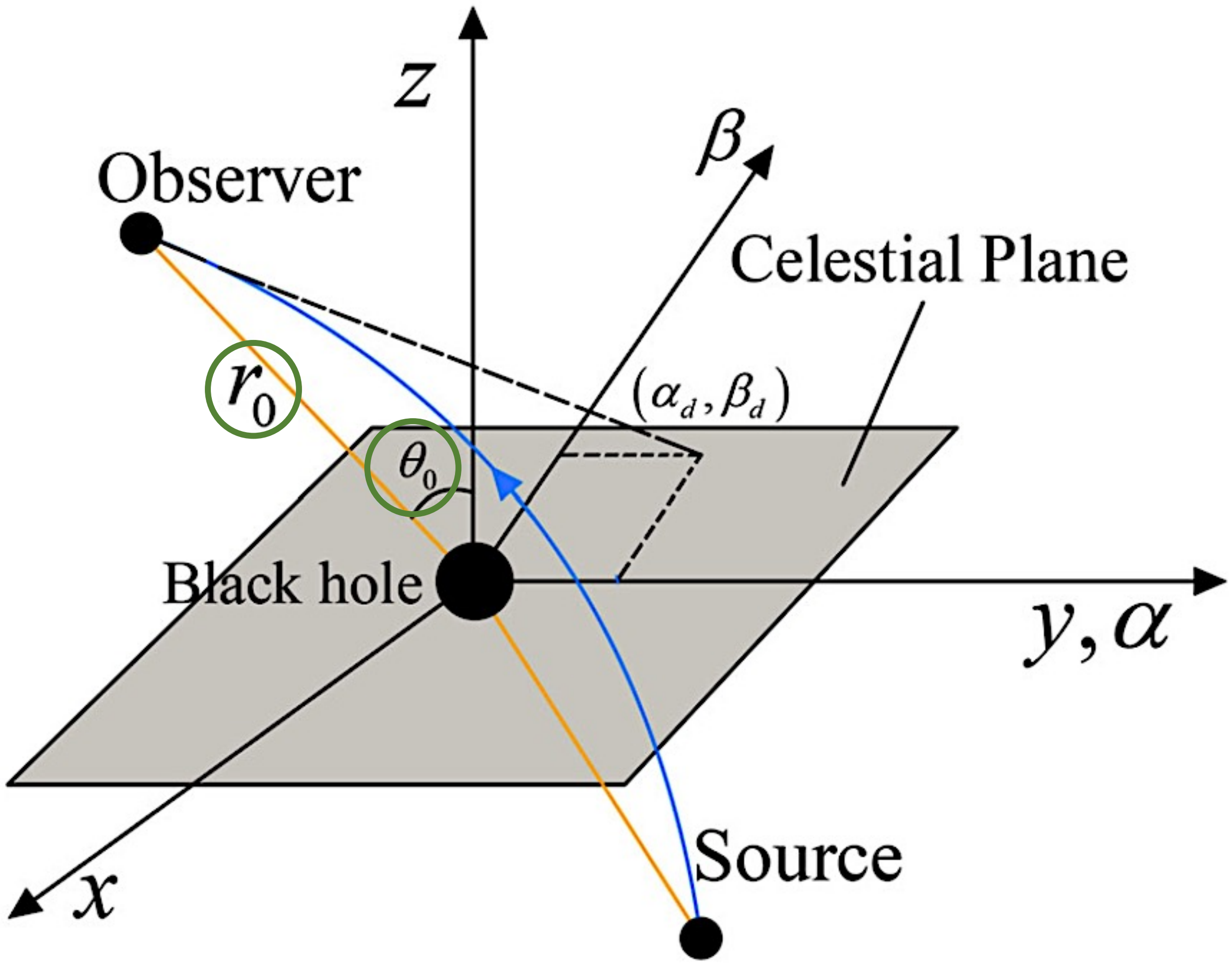
Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



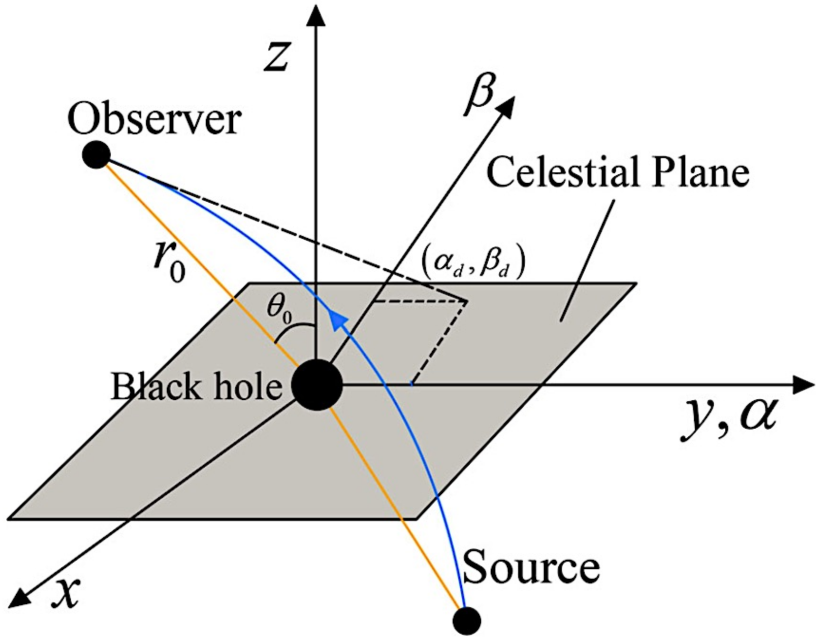
Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



Cálculos

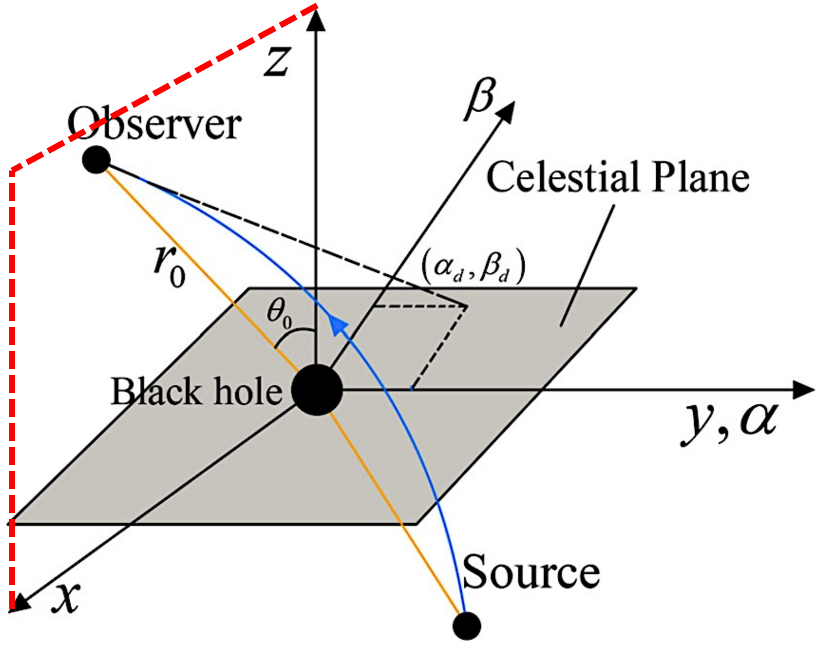
- **Parametrización de la sombra**



➢ **Supuestos**

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

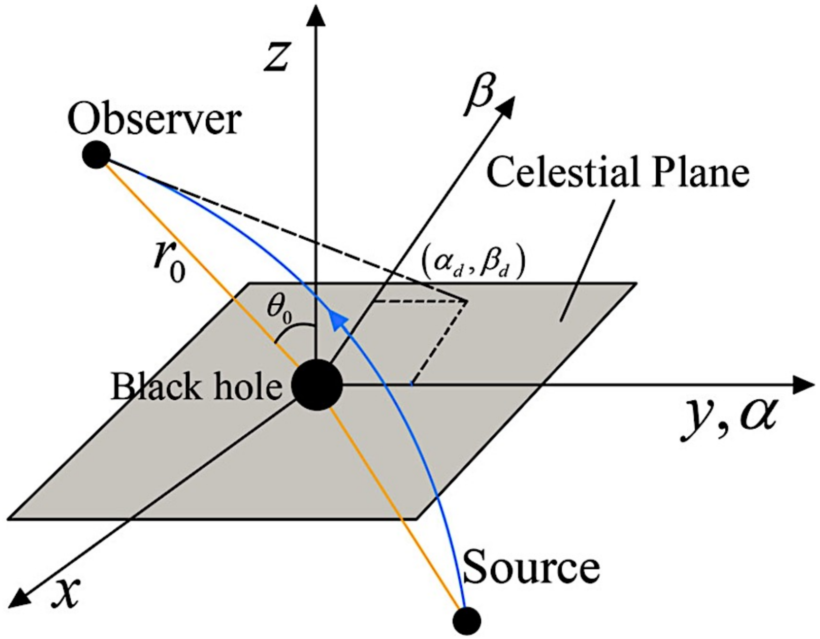


➢ **Supuestos**

- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



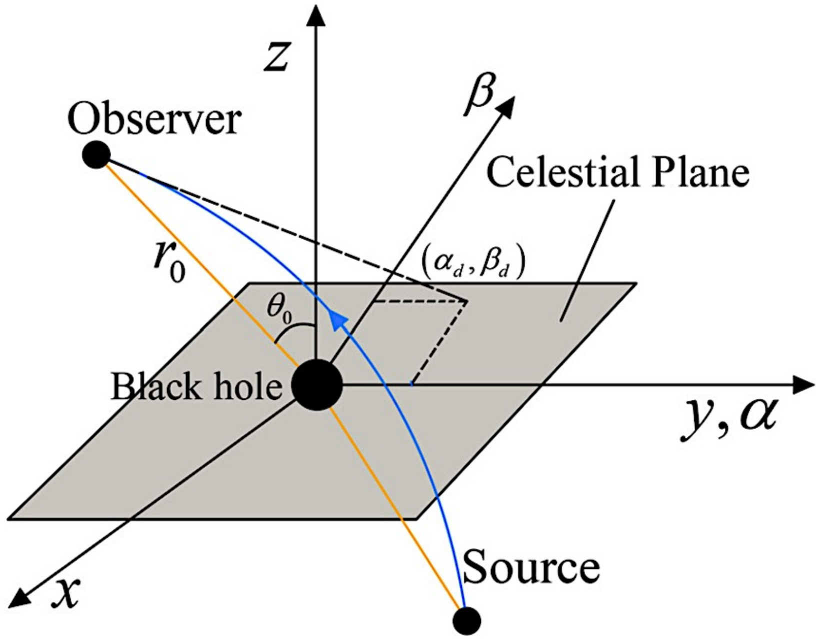
Supuestos

- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



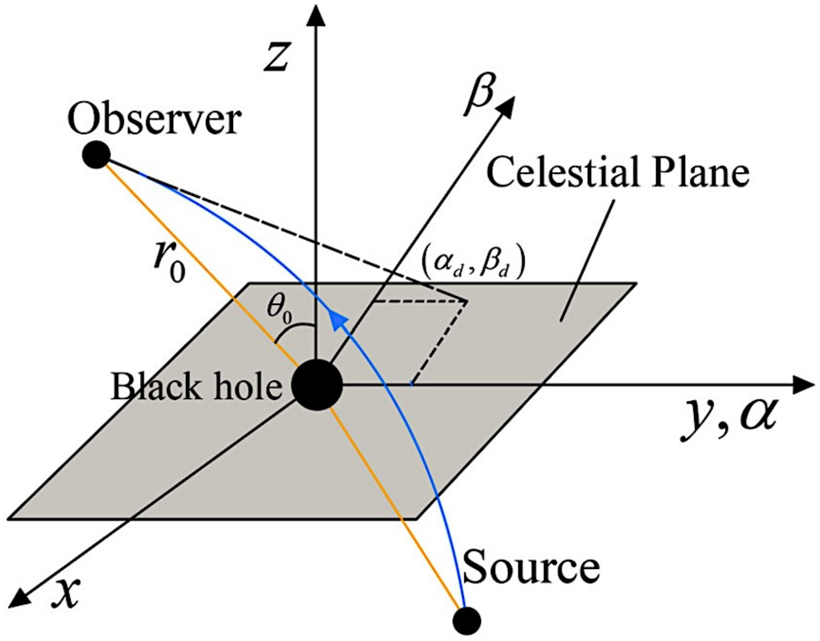
➢ **Supuestos**

- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



➢ **Supupuestos**

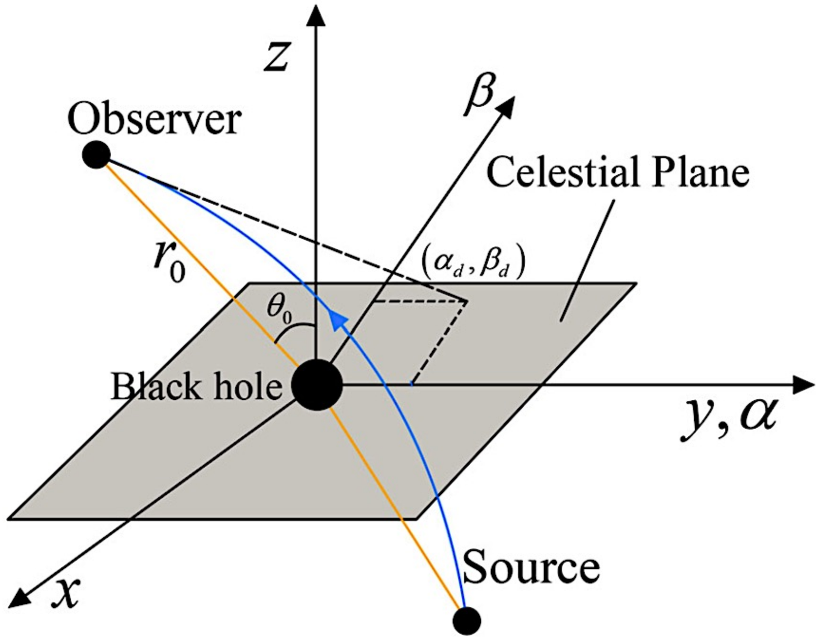
- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



➢ Supuestos

- El observador está en el plano *x-z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

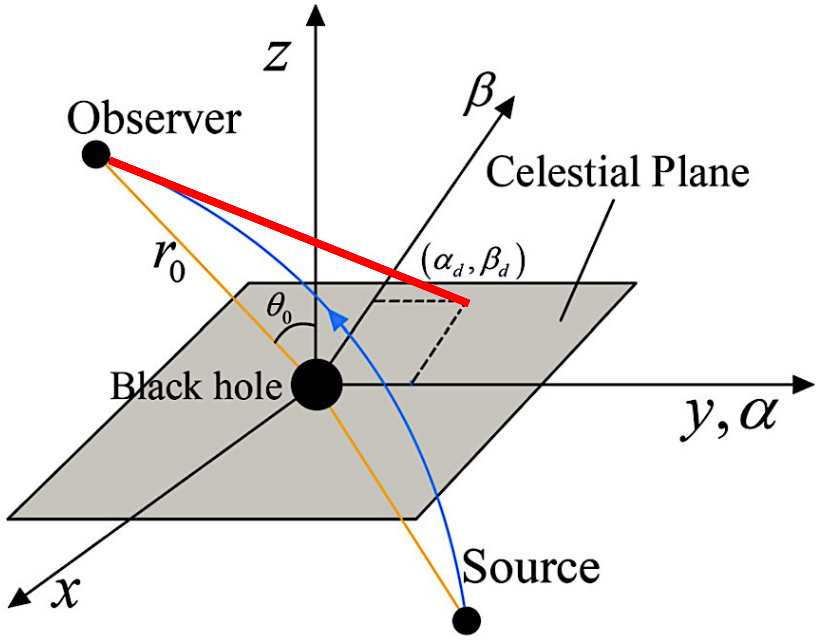
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- La tangente a esta curva en la posición de observador:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{z}}$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



➢ Supuestos

- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

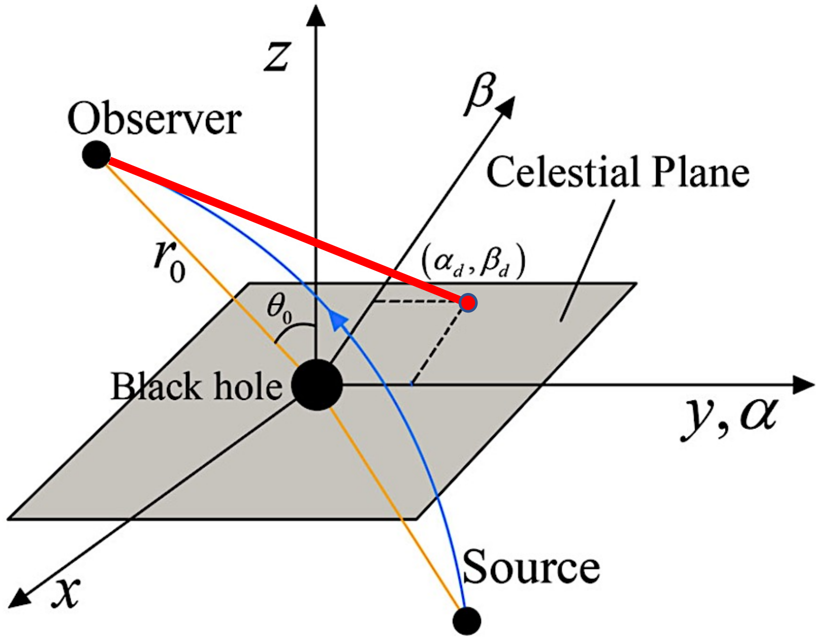
- La tangente a esta curva en la posición de observador:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{z}}$$

una linea recta

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- El punto (α_d, β_d) es sobre esta linea.

➢ Supuestos

- El observador está en el plano *x-z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

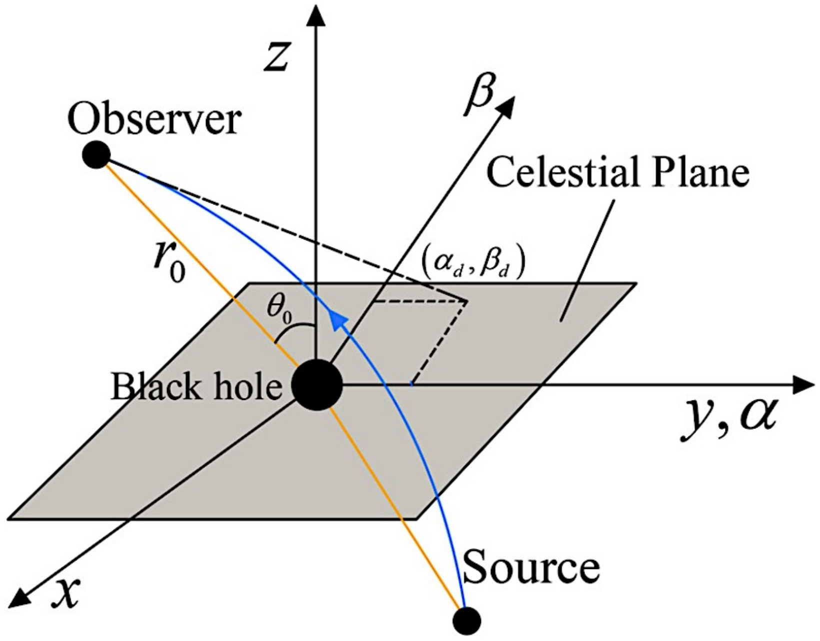
- La tangente a esta curva en la posición de observador:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{z}}$$

una linea recta

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- El punto (α_d, β_d) es sobre esta linea.

- En el Sistema (*x*,*y*,*z*):

➢ **Supuestos**

- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

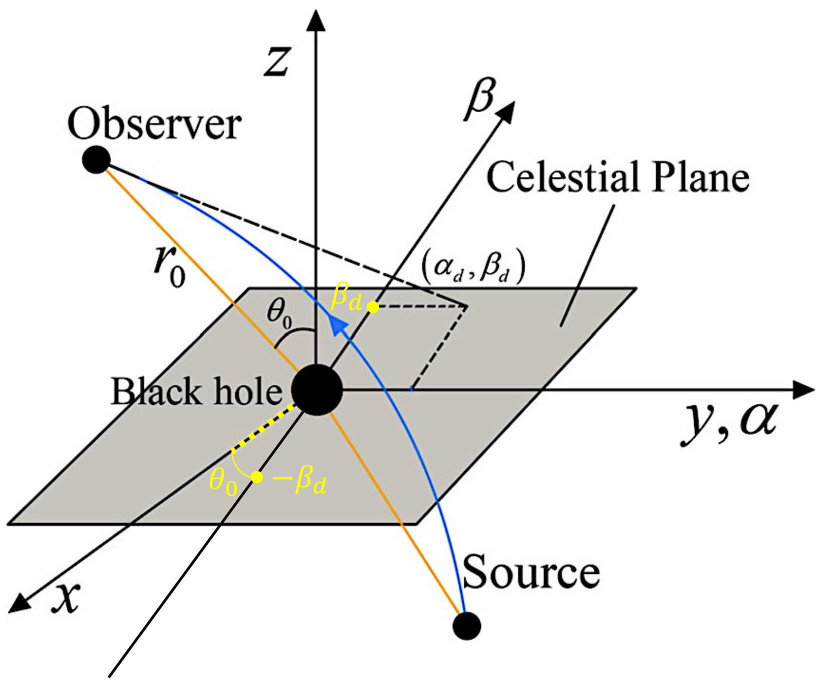
- La tangente a esta curva en la posición de observador:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{z}}$$

una linea recta

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- El punto (α_d, β_d) es sobre esta linea.

$$x_d = -\beta_d \cos\theta_0$$

- En el Sistema (*x*,*y*,*z*):

Supuestos

- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

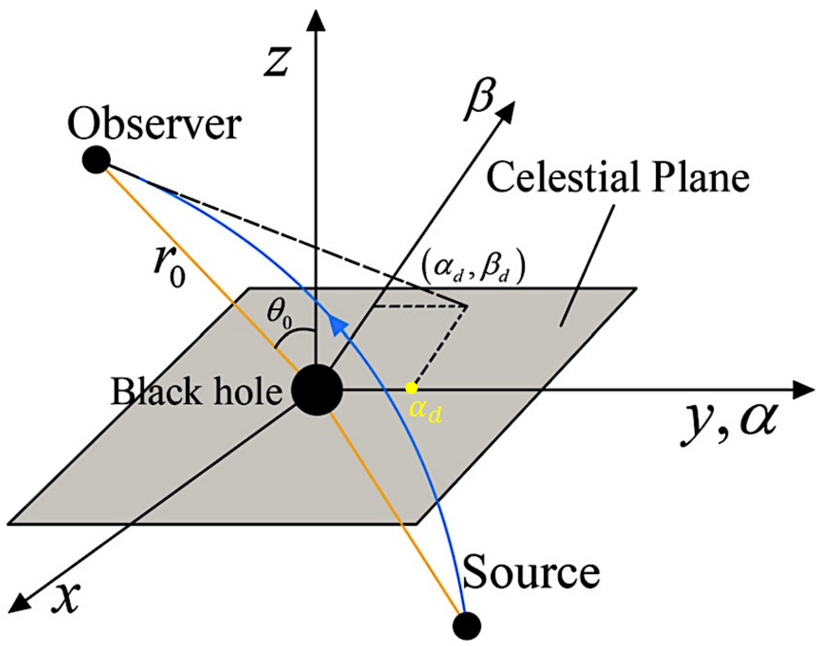
- La tangente a esta curva en la posición de observador:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{z}}$$

una linea recta

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- El punto (α_d, β_d) es sobre esta linea.
- En el Sistema (*x*,*y*,*z*): $$x_d = -\beta_d \cos\theta_0$$ $$y_d = \alpha_d$$

➢ **Supuestos**

- El observador está en el plano *x*-*z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

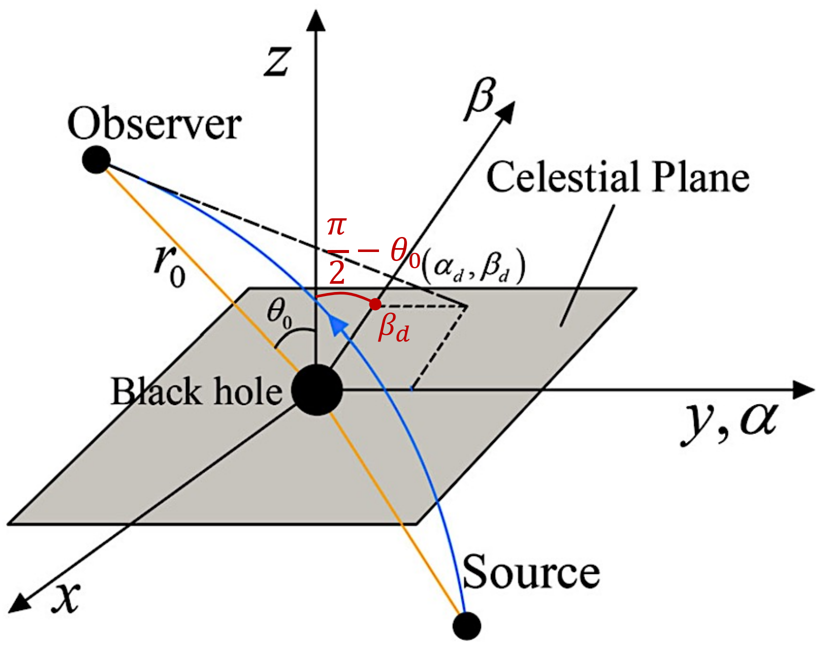
- La tangente a esta curva en la posición de observador:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0}\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0}\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0}\hat{\mathbf{z}}$$

una linea recta

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- El punto (α_d, β_d) es sobre esta linea.
- En el Sistema (*x,y,z*):

$$x_d = -\beta_d \cos\theta_0$$

$$y_d = \alpha_d$$

$$z_d = \beta_d \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_0) = \beta_d \sin\theta_0$$

➢ Supuestos

- El observador está en el plano *x-z* de modo que $\phi_0 = 0$.
- Los rayos de luz viajan en la curva paramétrica:

$$\gamma(r) = (x(r), y(r), z(r))$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

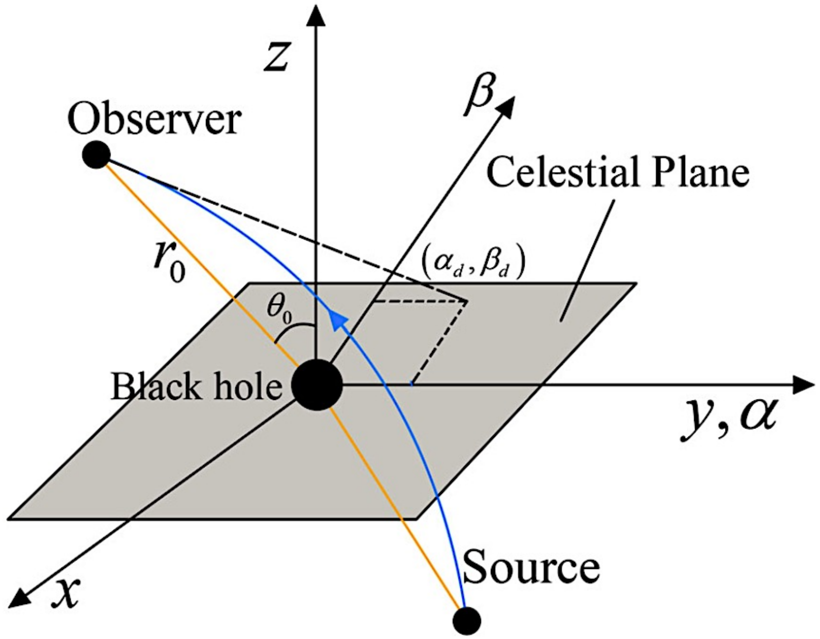
- La tangente a esta curva en la posición de observador:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} \hat{\mathbf{z}}$$

una linea recta

Cálculos

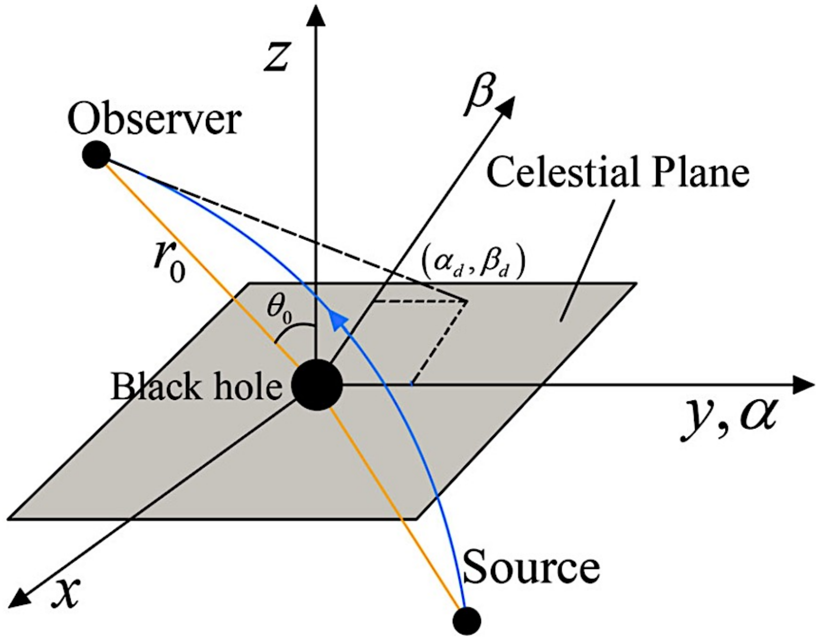
- **Parametrización de la sombra**



➢ **Resumen de las condiciones iniciales**

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



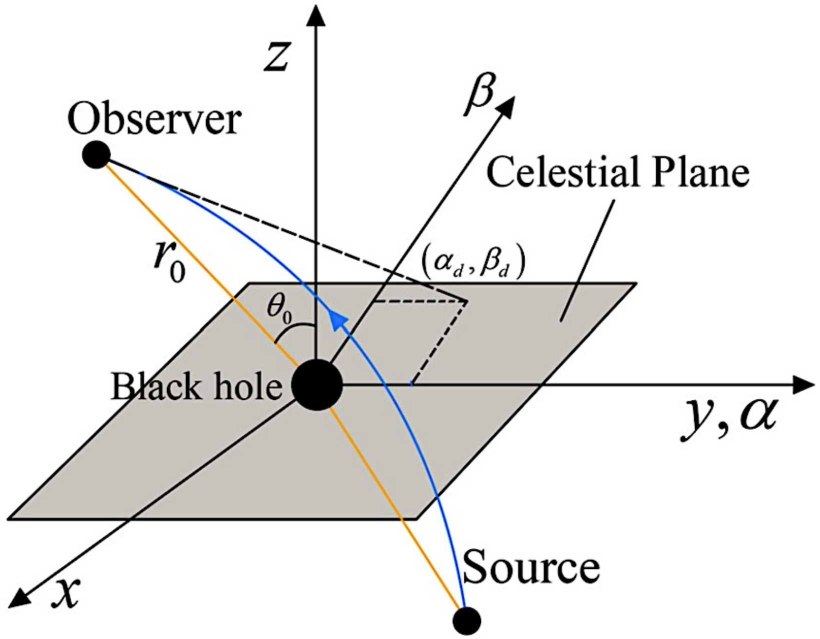
➢ **Resumen de las condiciones iniciales**

- Tenemos un punto:

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



➢ **Resumen de las condiciones iniciales**

- Tenemos un punto:

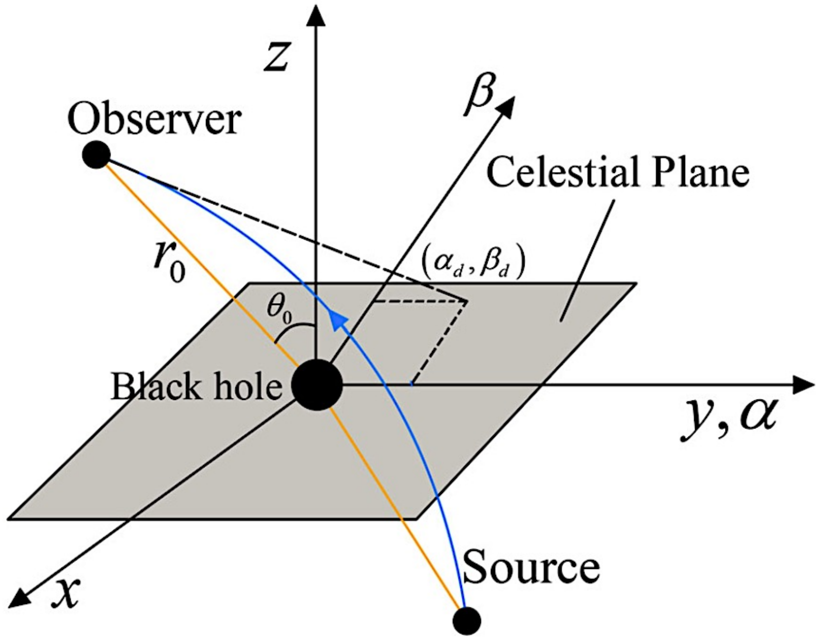
$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{V} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



➢ **Resumen de las condiciones iniciales**

- Tenemos un punto:

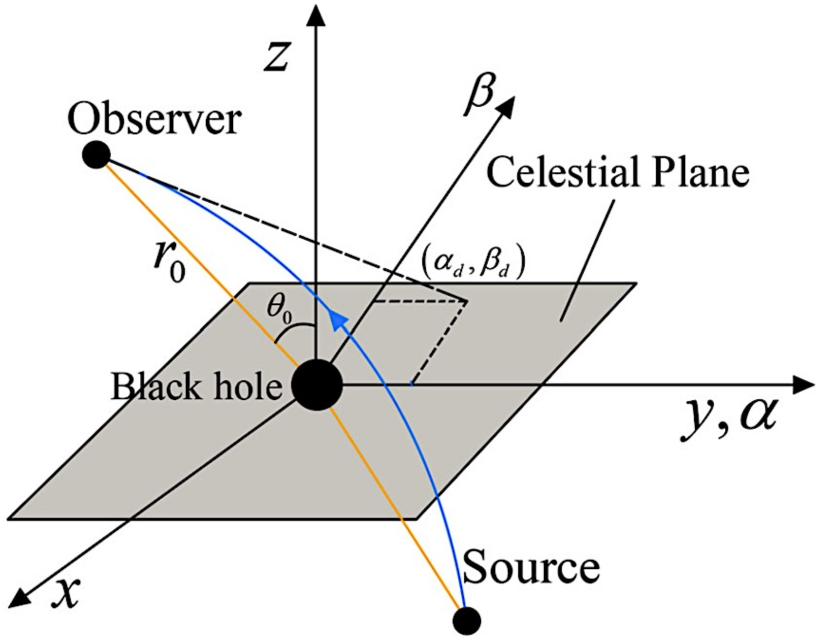
$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

➢ **Resumen de las condiciones iniciales**

- Tenemos un punto:

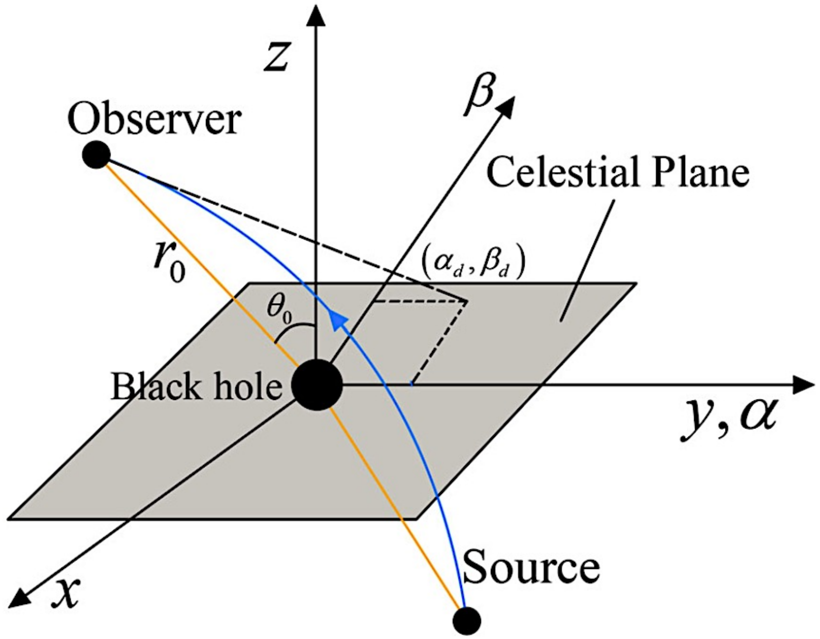
$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

- En coordenadas esféricas:

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

Resumen de las condiciones iniciales

- Tenemos un punto:

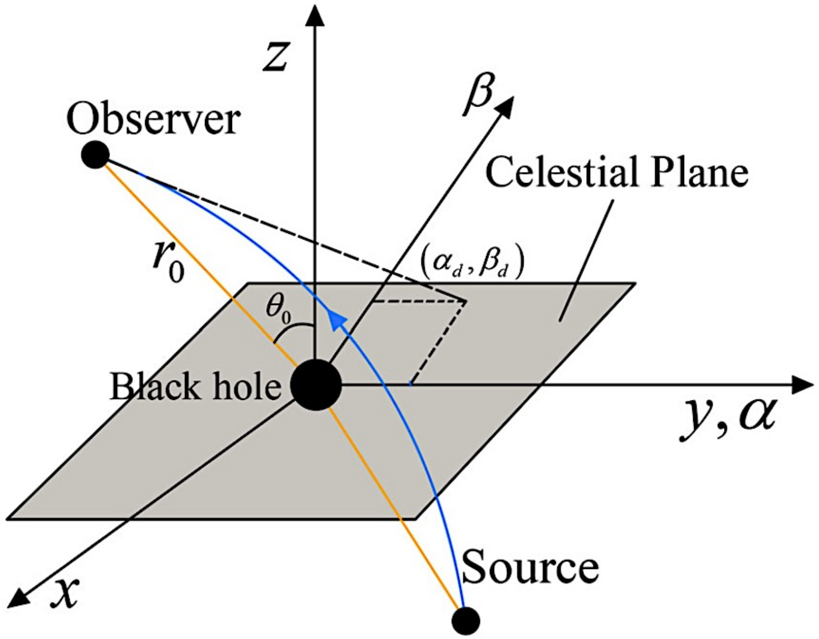
$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c} \right)$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**



- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

- En coordenadas esféricas:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

Resumen de las condiciones iniciales

- Tenemos un punto:

$$(-\beta_d\cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d\sin\theta_0)$$

- Tenemos un vector tangente:

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}y &= \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}z &= \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$r_0\cos\theta_0 - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$\underbrace{r_0\cos\theta_0}_{\equiv z_0 = \beta_d \sin\theta_0} - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$\underbrace{r_0\cos\theta_0}_{\equiv z_0 = \beta_d \sin\theta_0} - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$$\boxed{\beta_d = r_0^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}}$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$\underbrace{r_0\cos\theta_0}_{\equiv z_0 = \beta_d \sin\theta_0} - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$$\boxed{\beta_d = r_0^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}}$$

- En el punto del observador: $y_0 = y_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}|_{(r_0,\theta_0,\phi_0)}$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$\underbrace{r_0\cos\theta_0}_{\equiv z_0 = \beta_d \sin\theta_0} - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$$\boxed{\beta_d = r_0^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}}$$

- En el punto del observador: $y_0 = y_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}|_{(r_0,\theta_0,\phi_0)}$

$$r_0\sin\theta_0\sin\phi_0 + r_0^2\sin\phi_0\cos\theta_0\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$$
$$+ r_0^2\sin\theta_0\cos\phi_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$\underbrace{r_0\cos\theta_0}_{\equiv z_0 = \beta_d \sin\theta_0} - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$$\boxed{\beta_d = r_0^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}}$$

- En el punto del observador: $y_0 = y_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}|_{(r_0,\theta_0,\phi_0)}$

$$\underbrace{r_0\sin\theta_0\sin\phi_0}_{\equiv y_0 = \alpha_d} + r_0^2 \sin\phi_0\cos\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$$

$$+r_0^2 \sin\theta_0\cos\phi_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$\underbrace{r_0\cos\theta_0}_{\equiv z_0 = \beta_d \sin\theta_0} - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$$\boxed{\beta_d = r_0^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}}$$

- En el punto del observador: $y_0 = y_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}|_{(r_0,\theta_0,\phi_0)}$

$$\underbrace{r_0\sin\theta_0\sin\phi_0}_{\equiv y_0 = \alpha_d} + r_0^2 \sin\phi_0 \cos\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$$
$$+ r_0^2 \sin\theta_0 \cos\phi_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$= 0$

$= 1$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$(-\beta_d \cos\theta_0, \alpha_d, \beta_d \sin\theta_0)$$

$$\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}}_{a}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}}_{b}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}}_{c}\right)$$

$$\vec{R} = (x, y, z) = (x_0 + ar, y_0 + br, z_0 + cr)$$

$$\mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

- En el punto del observador: $z_0 = z_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$

$$\underbrace{r_0\cos\theta_0}_{\equiv z_0 = \beta_d \sin\theta_0} - r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$$\boxed{\beta_d = r_0^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}}$$

- En el punto del observador: $y_0 = y_0 + r_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}|_{(r_0,\theta_0,\phi_0)}$

$$\underbrace{r_0 \sin\theta_0 \sin\phi_0}_{\equiv y_0 = \alpha_d} + r_0^2 \underbrace{\sin\phi_0}_{=0} \cos\theta_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0}$$

$$+ r_0^2 \sin\theta_0 \underbrace{\cos\phi_0}_{=1} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}|_{r_0} = 0$$

$$\boxed{\alpha_d = -r_0^2 \sin\theta_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}|_{r_0}}$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$$\mathcal{R}(r) = \omega_0^2\left[(r^2 + a^2) - a\xi\right]^2 - \Delta\omega_0^2\left[\eta + (\xi - a)^2\right]$$

$$\Theta(\theta) = \omega_0^2\left[\eta - \cos^2\theta\left(\xi^2\csc^2\theta - a^2\right)\right]$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$\xi = L/\omega_0$

$$\mathcal{R}(r) = \omega_0^2\left[(r^2+a^2) - a\xi\right]^2 - \Delta\omega_0^2\left[\eta + (\xi - a)^2\right]$$

$$\Theta(\theta) = \omega_0^2\left[\eta - \cos^2\theta\left(\xi^2\csc^2\theta - a^2\right)\right]$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$\xi = L/\omega_0$

$$\mathcal{R}(r) = \omega_0^2\left[(r^2+a^2) - a\xi\right]^2 - \Delta\omega_0^2\left[\eta + (\xi - a)^2\right]$$

$$\Theta(\theta) = \omega_0^2\left[\eta - \cos^2\theta\left(\xi^2\csc^2\theta - a^2\right)\right]$$

$\xi = D/\omega_0^2$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$\xi = L/\omega_0$

$$\mathcal{R}(r) = \omega_0^2\left[(r^2+a^2) - a\xi\right]^2 - \Delta\omega_0^2\left[\eta + (\xi - a)^2\right]$$

$$\Theta(\theta) = \omega_0^2\left[\eta - \cos^2\theta\left(\xi^2\csc^2\theta - a^2\right)\right]$$

$\xi = D/\omega_0^2$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$\xi = L/\omega_0$

$$\mathcal{R}(r) = \omega_0^2\left[(r^2+a^2) - a\xi\right]^2 - \Delta\omega_0^2\left[\eta + (\xi - a)^2\right]$$

$$\Theta(\theta) = \omega_0^2\left[\eta - \cos^2\theta\left(\xi^2\csc^2\theta - a^2\right)\right]$$

$\xi = D/\omega_0^2$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

**** consideramos un observador en el infinito de modo que el espacio-tiempo es plano****

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\mathcal{R}(r)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\Theta(\theta)}$$

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{L(\rho^2 - 2Mr)\csc^2\theta + 2Ma\omega_0 r}{\Delta}$$

$\xi = L/\omega_0$

$$\mathcal{R}(r) = \omega_0^2 \left[(r^2 + a^2) - a\xi\right]^2 - \Delta\omega_0^2 \left[\eta + (\xi - a)^2\right]$$

$$\Theta(\theta) = \omega_0^2 \left[\eta - \cos^2\theta \left(\xi^2 \csc^2\theta - a^2\right)\right]$$

$\xi = D/\omega_0^2$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

**** consideramos un observador en el infinito de modo que el espacio-tiempo es plano****

$r_0 \to \infty$

Cálculos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

Cálculos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\alpha = \lim_{r_0\to\infty}\left[\frac{-\left(\frac{L_p}{\sin^2\theta_0}(r_0^2 + a\cos^2\theta_0 - 2Mr_0) - 2Ma\omega_0 r_0\right) r_0^2\sin\theta_0}{(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)\sqrt{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2[\eta_p + (\xi_p - a)^2]}}\right]$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\frac{\sim -\left(\frac{L_p}{\sin\theta_0} r_0^4\right)}{\sim \omega_0 r_0^4} = -\frac{\xi_p}{\sin\theta_0}$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\alpha = \lim_{r_0\to\infty}\left[\frac{-\left(\frac{L_p}{\sin^2\theta_0}(r_0^2 + a\cos^2\theta_0 - 2Mr_0) - 2Ma\omega_0 r_0\right) r_0^2 \sin\theta_0}{(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)\sqrt{\omega_0^2\left[(r_0^2 + a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2[\eta_p + (\xi_p - a)^2]}}\right]$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\frac{\sim -\left(\frac{L_p}{\sin\theta_0} r_0^4\right)}{\sim \omega_0 r_0^4} = \boxed{-\frac{\xi_p}{\sin\theta_0}}$$

α

Cálculos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\alpha = \lim_{r_0\to\infty}\left[\frac{-\left(\frac{L_p}{\sin^2\theta_0}(r_0^2 + a\cos^2\theta_0 - 2Mr_0) - 2Ma\omega_0 r_0\right) r_0^2 \sin\theta_0}{(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)\sqrt{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2[\eta_p + (\xi_p - a)^2]}}\right]$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\frac{\sim -\left(\frac{L_p}{\sin\theta_0} r_0^4\right)}{\sim \omega_0 r_0^4} = \boxed{-\frac{\xi_p}{\sin\theta_0}}\ \alpha$$

el caso de $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ es preferible

Cálculos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\alpha = \lim_{r_0\to\infty}\left[\frac{-\left(\frac{L_p}{\sin^2\theta_0}(r_0^2 + a\cos^2\theta_0 - 2Mr_0) - 2Ma\omega_0 r_0\right) r_0^2\sin\theta_0}{(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)\sqrt{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2[\eta_p + (\xi_p - a)^2]}}\right]$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\frac{\sim -\left(\frac{L_p}{\sin\theta_0}r_0^4\right)}{\sim \omega_0 r_0^4} = \boxed{-\frac{\xi_p}{\sin\theta_0}}\ \alpha$$

$$\beta = \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2\left[\eta_p + (\xi_p - a)^2\right]}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\sim\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\sim \omega_0^2 r_0^4}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\eta_p - \cos^2\theta_0(\xi_p\csc^2\theta_0 - a^2)}$$

$$= \sqrt{\eta_p - \xi_p^2\cot^2\theta_0 + a^2\cos^2\theta_0}$$

Cálculos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\alpha = \lim_{r_0\to\infty}\left[\frac{-\left(\frac{L_p}{\sin^2\theta_0}(r_0^2 + a\cos^2\theta_0 - 2Mr_0) - 2Ma\omega_0 r_0\right) r_0^2\sin\theta_0}{(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)\sqrt{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2[\eta_p + (\xi_p - a)^2]}}\right]$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\frac{\sim -\left(\frac{L_p}{\sin\theta_0}r_0^4\right)}{\sim \omega_0 r_0^4} = \boxed{-\frac{\xi_p}{\sin\theta_0}}\ \alpha$$

$$\beta = \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2\left[\eta_p + (\xi_p - a)^2\right]}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\sim\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\sim \omega_0^2 r_0^4}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\eta_p - \cos^2\theta_0(\xi_p\csc^2\theta_0 - a^2)}$$

$$= \boxed{\sqrt{\eta_p - \xi_p^2\cot^2\theta_0 + a^2\cos^2\theta_0}}\ \beta$$

Cálculos

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{d\theta}{dr}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\frac{d\phi}{dr}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\alpha = \lim_{r_0\to\infty}\left[\frac{-\left(\frac{L_p}{\sin^2\theta_0}(r_0^2 + a\cos^2\theta_0 - 2Mr_0) - 2Ma\omega_0 r_0\right) r_0^2\sin\theta_0}{(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)\sqrt{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2[\eta_p + (\xi_p - a)^2]}}\right]$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\frac{\sim -\left(\frac{L_p}{\sin\theta_0}r_0^4\right)}{\sim \omega_0 r_0^4} = \boxed{-\frac{\xi_p}{\sin\theta_0}} \; \alpha$$

$$\beta = \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2\left[\eta_p + (\xi_p - a)^2\right]}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\sim\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\sim \omega_0^2 r_0^4}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\eta_p - \cos^2\theta_0(\xi_p\csc^2\theta_0 - a^2)}$$

$$= \boxed{\sqrt{\eta_p - \xi_p^2\cot^2\theta_0 + a^2\cos^2\theta_0}} \; \beta$$

- ξ_p y η_p son parámetros de impacto en la esfere de fotones donde:

$$\mathcal{R}(r_p) = 0,$$
$$\mathcal{R}'(r_p) = 0$$

Cálculos

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \sqrt{\frac{\Theta(\theta_0)}{\mathcal{R}(r_0)}}$$

- **Parametrización de la sombra**

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r_0,\theta_0} = \frac{L(\rho_0^2 - 2Mr_0)\csc^2\theta_0 - 2Ma\omega_0 r_0}{\Delta(r_0)\sqrt{\mathcal{R}(r_0)}}$$

$$\alpha = \lim_{r_0\to\infty}\left[\frac{-\left(\frac{L_p}{\sin^2\theta_0}(r_0^2 + a\cos^2\theta_0 - 2Mr_0) - 2Ma\omega_0 r_0\right) r_0^2\sin\theta_0}{(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)\sqrt{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2[\eta_p + (\xi_p - a)^2]}}\right]$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\frac{\sim -\left(\frac{L_p}{\sin\theta_0} r_0^4\right)}{\sim \omega_0 r_0^4} = \boxed{-\frac{\xi_p}{\sin\theta_0}}\ \alpha$$

$$\beta = \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\omega_0^2\left[(r_0^2+a^2) - a\xi_p\right]^2 - \Delta(r_0)\omega_0^2\left[\eta_p + (\xi_p - a)^2\right]}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\frac{\sim\left[\mathcal{D}_p - \cos^2\theta_0(L_p^2\csc^2\theta_0 - a^2\omega_0^2)\right] r_0^4}{\sim \omega_0^2 r_0^4}}$$

$$= \lim_{r_0\to\infty}\sqrt{\eta_p - \cos^2\theta_0(\xi_p\csc^2\theta_0 - a^2)}$$

$$= \boxed{\sqrt{\eta_p - \xi_p^2\cot^2\theta_0 + a^2\cos^2\theta_0}}\ \beta$$

- ξ_p y η_p son parámetros de impacto en la esfere de fotones donde:

$$\mathcal{R}(r_p) = 0,$$
$$\mathcal{R}'(r_p) = 0$$

- Ilustración de sombras en *Mathematica*