Universidad de Valparaíso
Instituto de Física y Astronomía
Prueba 2
Mecánica (LFIS121)
Fecha: 25 de octubre de 2023

Tiempo: 1hr 30min — Profesor: Cristian Barrera Hinojosa

Responda cada pregunta propuesta utilizando su respectiva hoja.
Puede hacer uso exclusivo del formulario incluido a continuación.

Formulario

$$\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{\mathrm{r}}_i m_i$$

$$\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathrm{r}}\, dm$$

$$I_{\mathrm{O}} = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I_{\mathrm{O}} = \int r^2 \rho\, dV$$

$$I_{\mathrm{O}} = I_{\mathrm{CM}} + MD^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\tau = rF\sin\phi = Fd$$

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2$$

$$v_{\mathrm{CM}} = R\omega \qquad \text{(rodar sin resbalar)}$$

$$W = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$L = I\omega$$

$$\sum \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \dot{L}$$

$$\sum \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = I\vec{\alpha}$$

$$a_t = R\alpha$$

$$v_t = R\omega$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

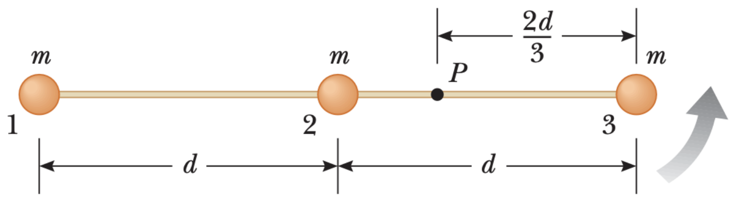
Nombre: ________________________ Fecha: 25 de octubre de 2023

1. Considere un sistema —bajo la influencia de la gravedad— que consiste en una barra rígida sin masa unida a tres partículas con masas iguales, como se muestra en la figura. La barra es libre de dar vuelta en un plano vertical en torno a un eje sin fricción perpendicular a la barra a través del punto P, y se libera del reposo en la posición horizontal en $t = 0$. Si supone que se conocen m y d, encuentre:

   (a) El momento de inercia del sistema (barra más partículas) en torno al eje. **(1)**

   (b) El torque que actúa sobre el sistema en $t = 0$. (½)

   (c) La aceleración angular del sistema en $t = 0$. (½)



Solución:

a) Dado que la barra no tiene masa, esta no tiene momento de inercia, por lo que el momento de inercia del sistema en torno al eje P está dado por las contribuciones de las masas puntuales. Siendo r_i la distancia desde P a cada masa, tenemos

$$I_p = \sum_i m_i r_i^2 = m \sum_i r_i^2 = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^3)$$
$$= m\left[\left(\frac{4d}{3}\right)^2 + \left(\frac{d}{3}\right)^2 + \left(\frac{2d}{3}\right)^2\right] = \frac{7}{3}md^2.$$

b) La fuerza externa actuando sobre el sistema es la gravedad. Luego, dado que la barra no tiene masa, la magnitud del torque neto sobre el sistema es

$$\sum \tau_p = (mgr_1 + mgr_2 - mgr_3) = mgd$$

donde consideramos el sentido positivo de torque como el anti-horario. Luego, concluimos que el torque neto $\vec{\tau}_p$ tiene sentido horario.

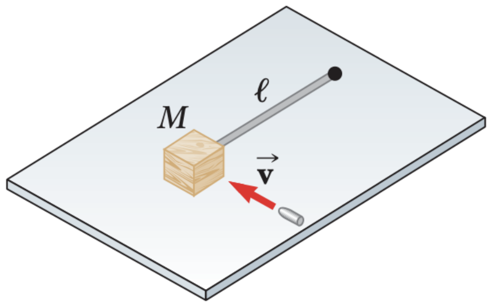
c) Para encontrar la aceleración angular del sistema, combinamos los resultados anteriores:

$$\sum \tau_p = I_p \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{3g}{7d}.$$

Pregunta 1: 2 puntos

Nombre: ____________________ Fecha: 25 de octubre de 2023

2. Un bloque de madera de masa M, que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, está unido a una barra rígida de longitud d y masa despreciable. La barra se articula en el otro extremo (ver figura). Una bala de masa m, que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la barra con rapidez v, golpea al bloque y queda incrustada en él.
   (a) ¿Cuál es la cantidad de momento angular del sistema bala–bloque? **(1)**
   (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se convierte en energía interna en la colisión? **(1)**



Solución:

a) Dado que el momento angular del sistema se conserva, $L_i = L_f = L$. Para el instante final e inicial, el momento de inercia está dado respectivamente por

$$L_i = mdv$$
$$L_f = (m+M)dv_f$$

donde v_f es la velocidad final del sistema, es decir, posterior al impacto. Aplicando la conservación de L, dicha velocidad está dada por

$$v_f = \frac{m}{m+M}v$$

b) Como ambos objetos permanecen unidos posterior al impacto, este se trata de un choque perfectamente inelástico, por lo cual esperamos que se convierta energía cinética en energía interna. Antes del impacto, la energía cinética del sistema es

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Por otra parte, la energía cinética final está dada por

$$K_f = \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2.$$

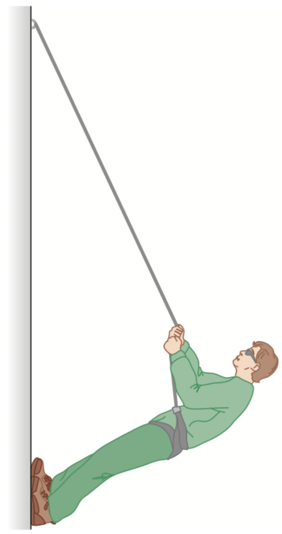
Luego, la fracción de energía cinética original perdida está dada por

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 1 - \frac{m}{m+M} = \frac{M}{m+M}.$$

Pregunta 2: 2 puntos

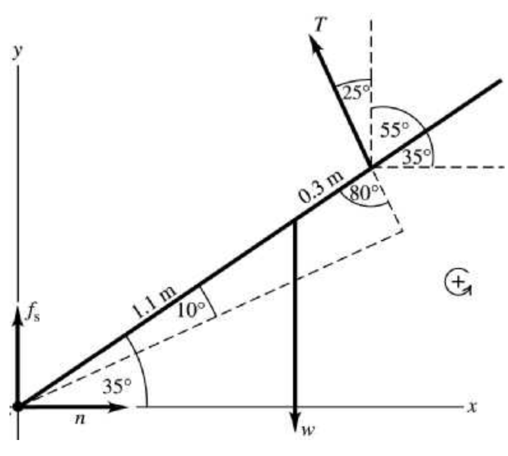
Nombre: ____________________ Fecha: 25 de octubre de 2023

3. Los alpinistas suelen utilizar una cuerda para descender por la pared de un acantilado, colocando su cuerpo casi horizontal y sus pies empujando contra el risco (lo cual se conoce como *rapel*). Suponga que un alpinista, de 82 kg y estatura de 1,90 m con centro de gravedad a 1,1 m de sus pies, desciende a rapel por un risco vertical manteniendo su cuerpo levantado a 35,0° sobre la horizontal. El alpinista sostiene la cuerda a 1,40 m de sus pies y forma un ángulo de 25,0° con la pared del risco. Determine:
   (a) La tensión que requiere soportar esta cuerda. **(1)**
   (b) Las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la pared del risco ejerce sobre los pies del alpinista. **(1)**



Solución:

Diagrama de fuerzas sobre el alpinista:



a) Consideramos a la persona en equilibrio, en la posición que muestra la figura. La tensión de la cuerda puede determinarse a partir de la condición de equilibrio de torques, $\sum \tau_O = 0$. Tomando como eje O el punto de contacto de los pies del alpinista con la pared del risco, entonces solo existen dos contribuciones al torque neto, provenientes de la tensión T y el peso W. Por lo tanto,

$$\sum \tau_O = \tau_T - \tau_W = T(1{,}4)\sin 80^\circ - mg(1{,}1)\cos 35^\circ = 0$$

$$\implies T = \frac{1{,}1}{1{,}4}\frac{\cos 35^\circ}{\cos 80^\circ} = 525 \text{ [N]}.$$

b) La fuerza que ejerce la pared del risco sobre los pies del alpinista tiene dos componentes: la fuerza normal N, la cual es perpendicular (normal) a la pared, es decir apunta horizontal hacia la derecha, y la fuerza de fricción f_s, la cual apunta verticalmente hacia arriba (ver diagrama). Dado que ya conocemos la tensión, se pueden calcular ambas a partir de la condición de equilibrio de fuerzas actuando sobre el alpinista:

$$\sum F_x = N - T\sin 25^\circ = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad N = 222 \text{ [N]}.$$
$$\sum F_y = T\cos 25^\circ + f_s - mg = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_s = 328 \text{ [N]}.$$

Pregunta 3: 2 puntos