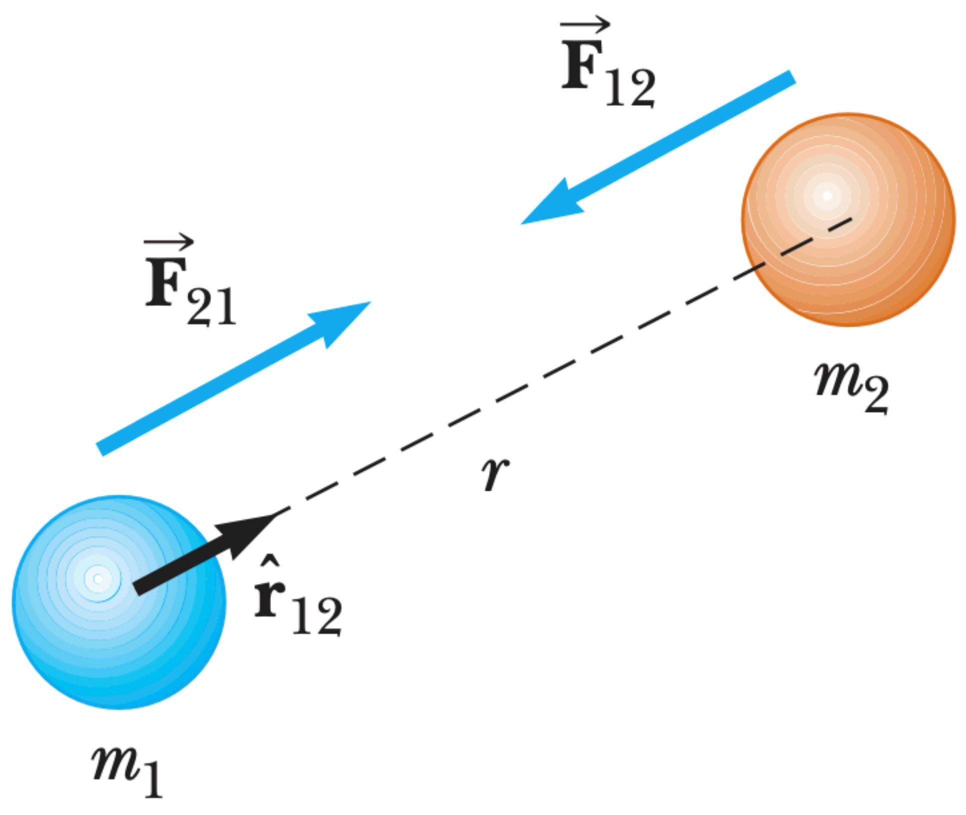
13 Gravitación universal

La Ley de Gravitación Universal

- En 1687, Newton publicó su obra acerca de la ley de gravedad en su tratado *Principios matemáticos de filosofía natural*.
- Matemáticamente, esta ley se expresa como:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



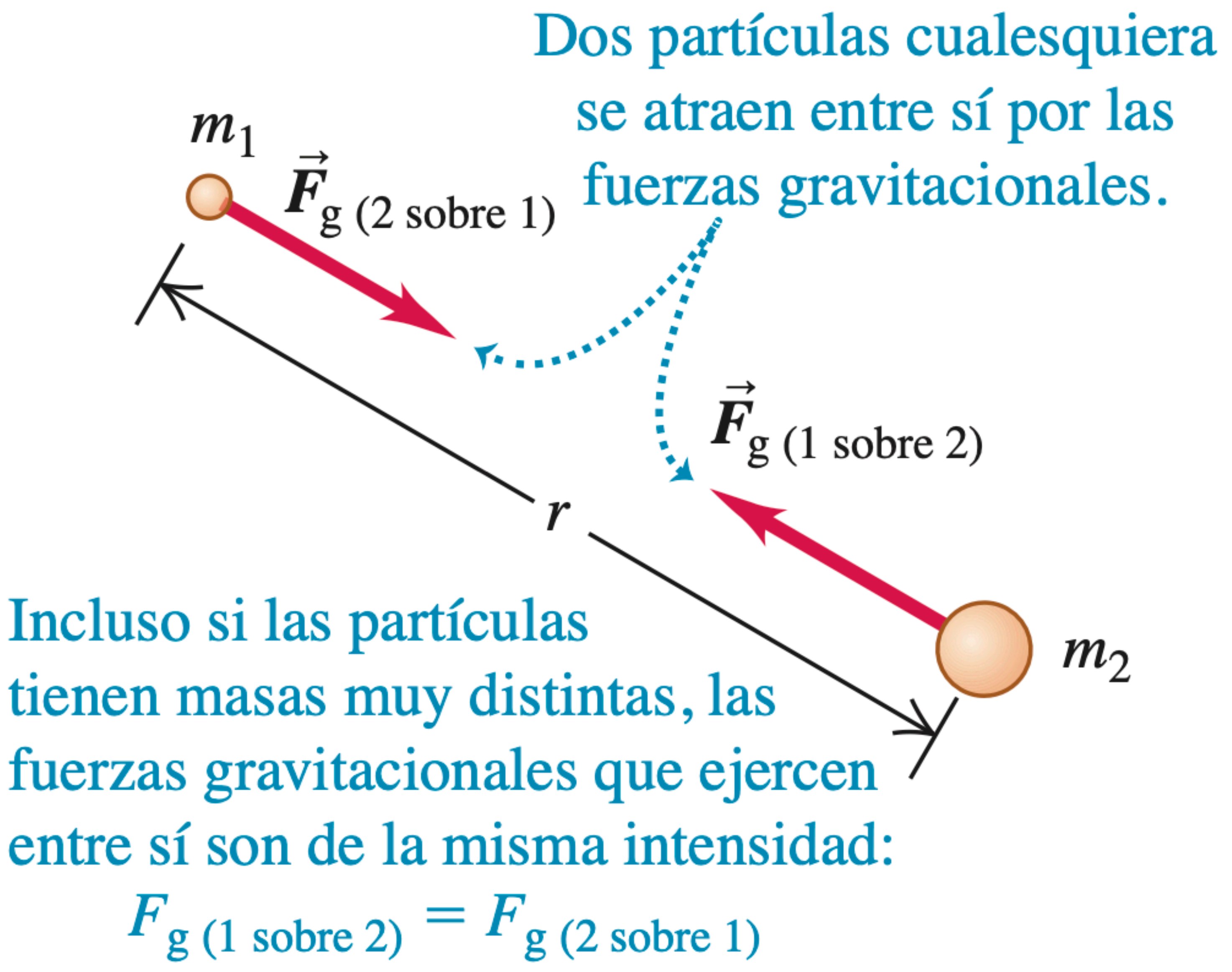
Donde:

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

Es la Constante de Gravitación Universal, y es una **constante fundamental de la naturaleza.**

La Ley de Gravitación Universal

"Toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas."



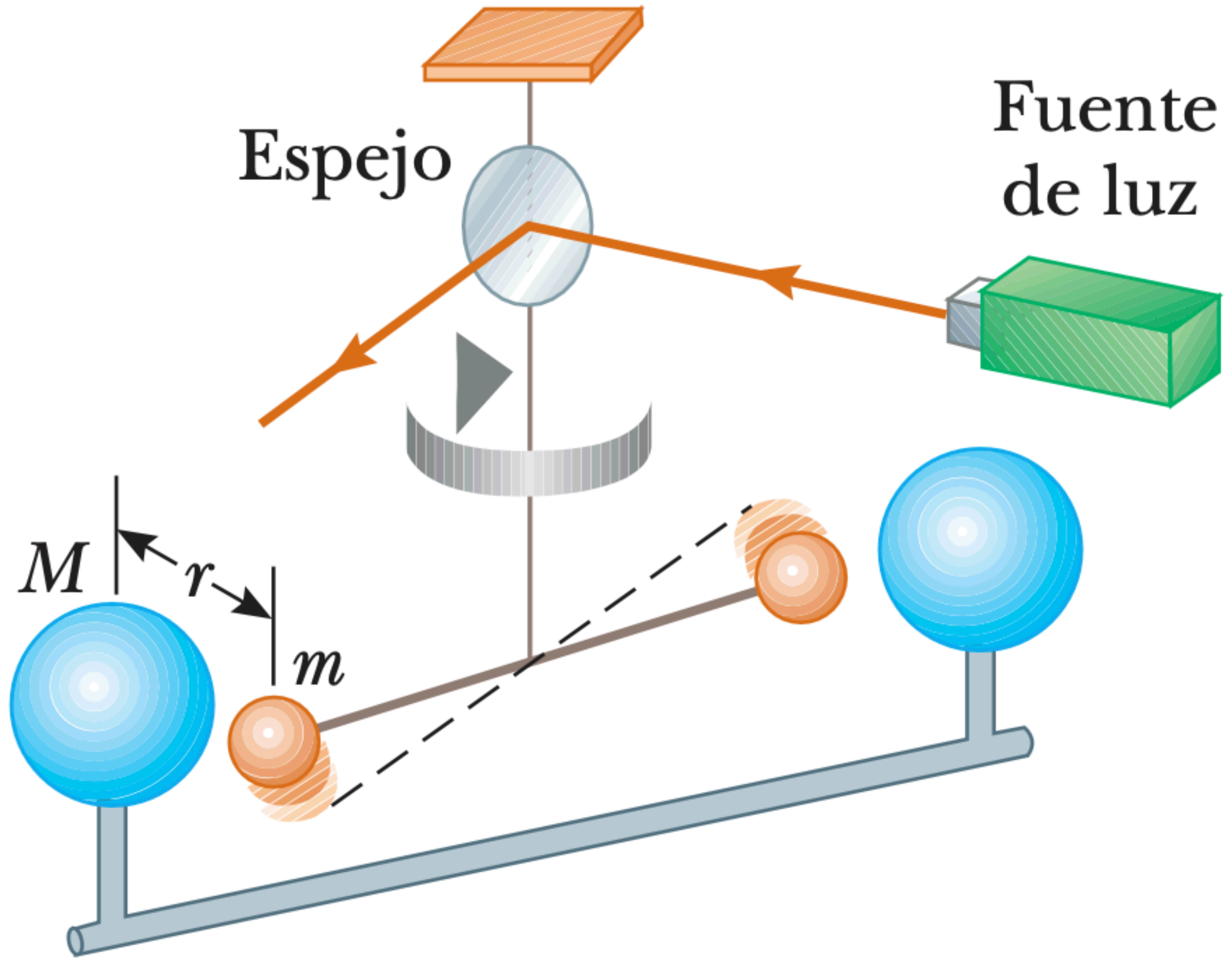
La Ley de Gravitación Universal

- La dependencia con la distancia de esta ley:

$$F_g \propto \frac{1}{r^2}$$

Dada su forma matemática, este tipo de ley se denomina "ley de cuadrado inverso".

- El valor de G pudo determinarse originalmente mediante el llamado *Experimento de Cavendish:*

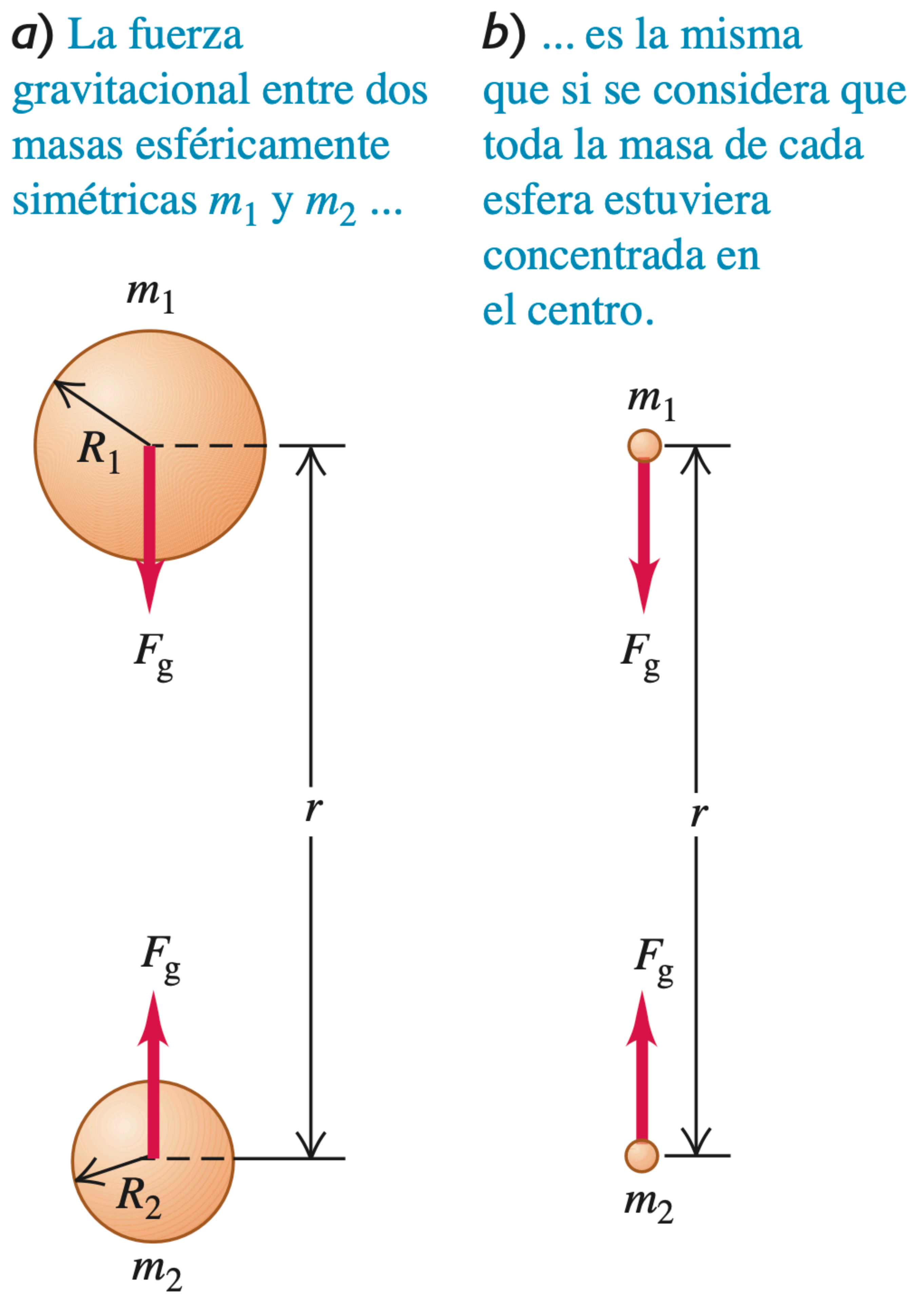


- Se cuelga una barra con dos esferas en sus extremos, desde una cuerda.
- Al acercar dos esferas masivas desde cada extremo de la barra, su atracción, genera un torque que tuerce el hilo e inclina un espejo.

La Ley de Gravitación Universal

- Se puede demostrar que esta ecuación también aplica para calcular la fuerza ejercida sobre una partícula debido a una *distribución de masa esféricamente simétrica*.
- Para esto, se considera que toda la masa de dicha distribución estuviera concentrada en su centro.
- Por ejemplo, la fuerza de atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre una partícula de masa m ubicada sobre su superficie es:

$$F_g = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$



Ley de Gravitación y la fuerza peso

- Sabemos que la fuerza peso de un objeto sobre la superficie terrestre es $F = mg$.
- Por otra parte, según la Ley de Gravitación Universal, esto debe corresponder a F_g.
- Luego:

$$mg = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

- Repitamos lo mismo considerando ahora un objeto que está a una altura h por sobre la superficie de la Tierra:

$$F_g = G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \rightarrow \boxed{g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}}$$

Aceleración de gravedad en la Tierra

- Este resultado nos muestra que, en estricto rigor, la aceleración de gravedad g **sí** depende de la altura (disminuye).
- Sin embargo, la variación es apreciable en escalas de centenas o miles de kilómetros, por lo cual asumirla constante en muchos casos es una excelente aproximación (como se ha hecho en este y cursos anteriores)

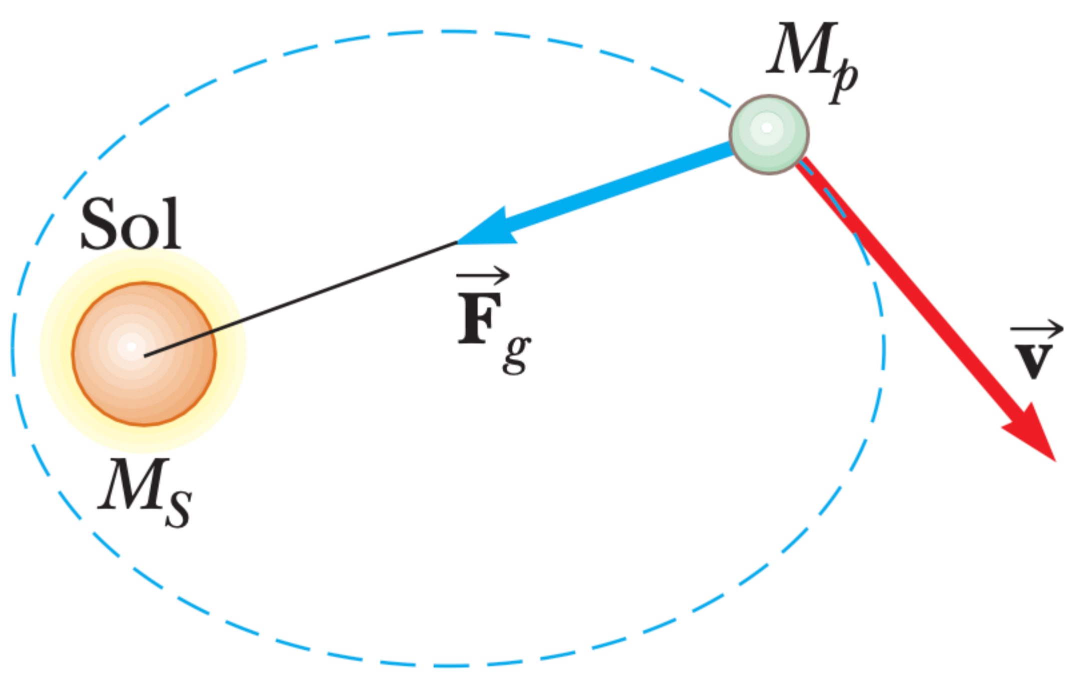
Aceleración en caída libre g a diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra

Altura h (km)	g (m/s^2)
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

Las leyes de Kepler

- Uno de los mayores éxitos de la teoría de gravitación universal de Newton fue que esta daba soporte teórico a las leyes de Kepler, las cuales fueron en un comienzo deducidas de forma empírica en base a datos astronómicos de la época.
- Las leyes de Kepler afirman que:

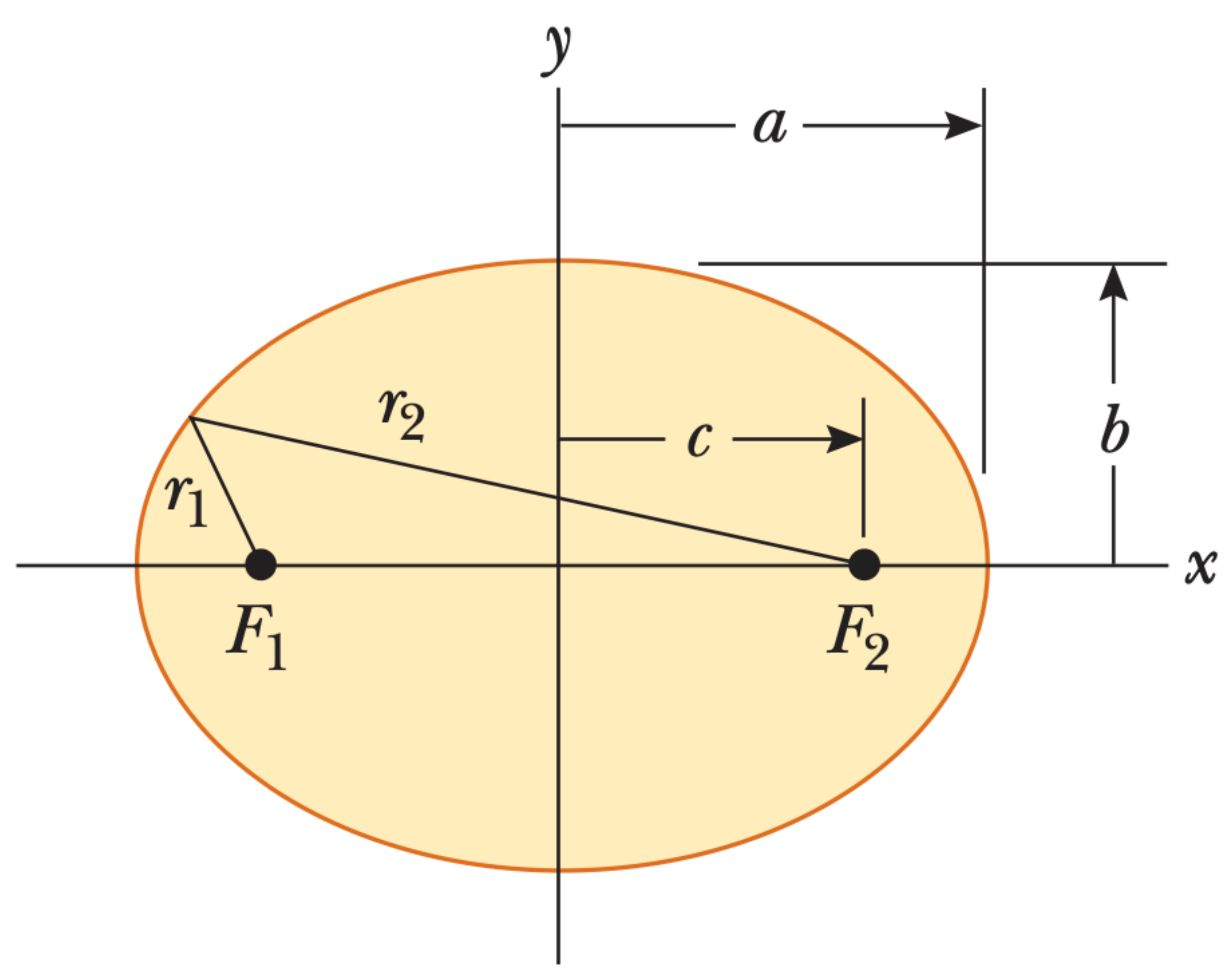
1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector dibujado desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

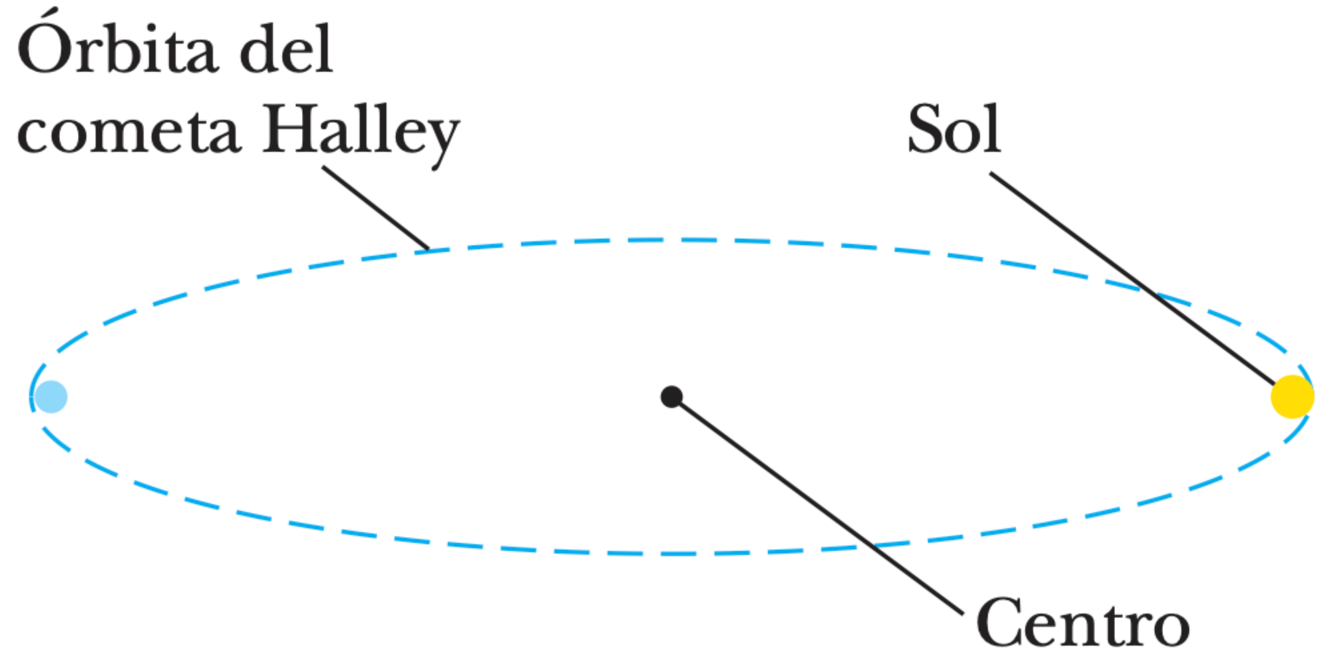


La primera ley de Kepler

- En general, las órbitas de los planetas describen una familia de elipses, siendo la órbita más sencilla la de tipo circular.
- La elipse se genera a partir de dos focos, F_1 y F_2, ubicados a una distancia c de su centro.
- La excentricidad, $0 < e < 1$, cuantifica que tan lejana es la forma de la elipse respecto a un círculo ($c = 0$).

$$e = \frac{c}{a}$$

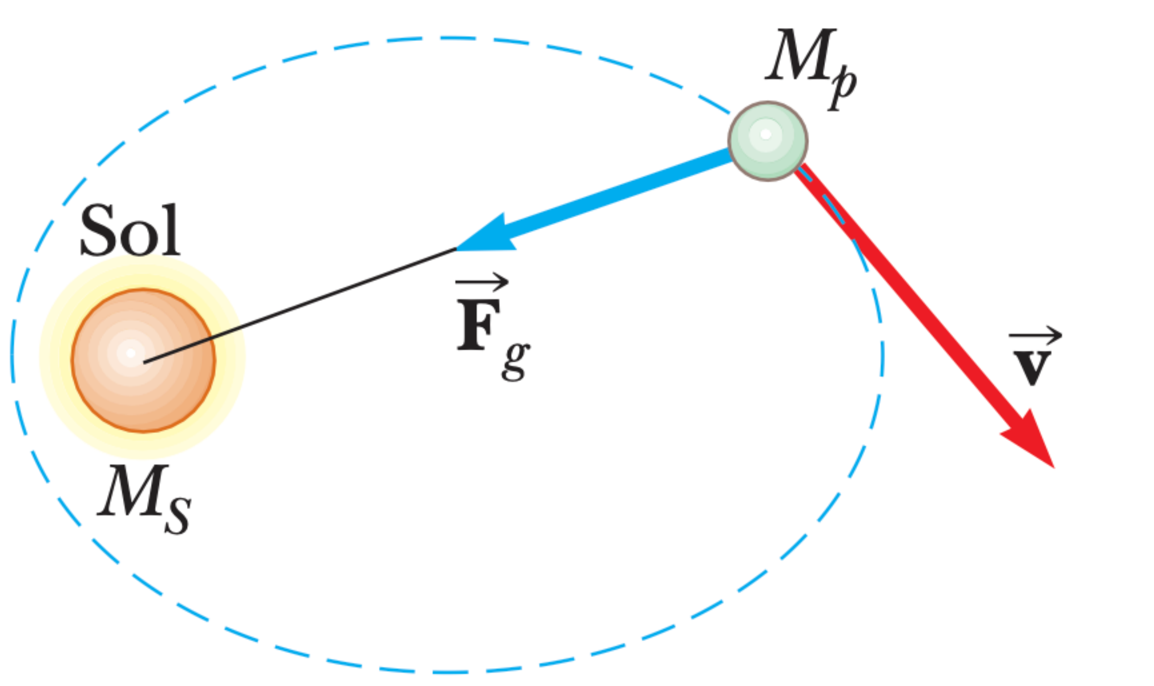




La segunda ley de Kepler

- Es posible mostrar que la segunda ley (ley de áreas) es una consecuencia de la conservación del momento angular.
- Considerando al Sol en reposo en uno de los focos, el momento angular total del sistema es:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = M_p \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \text{constante}$$

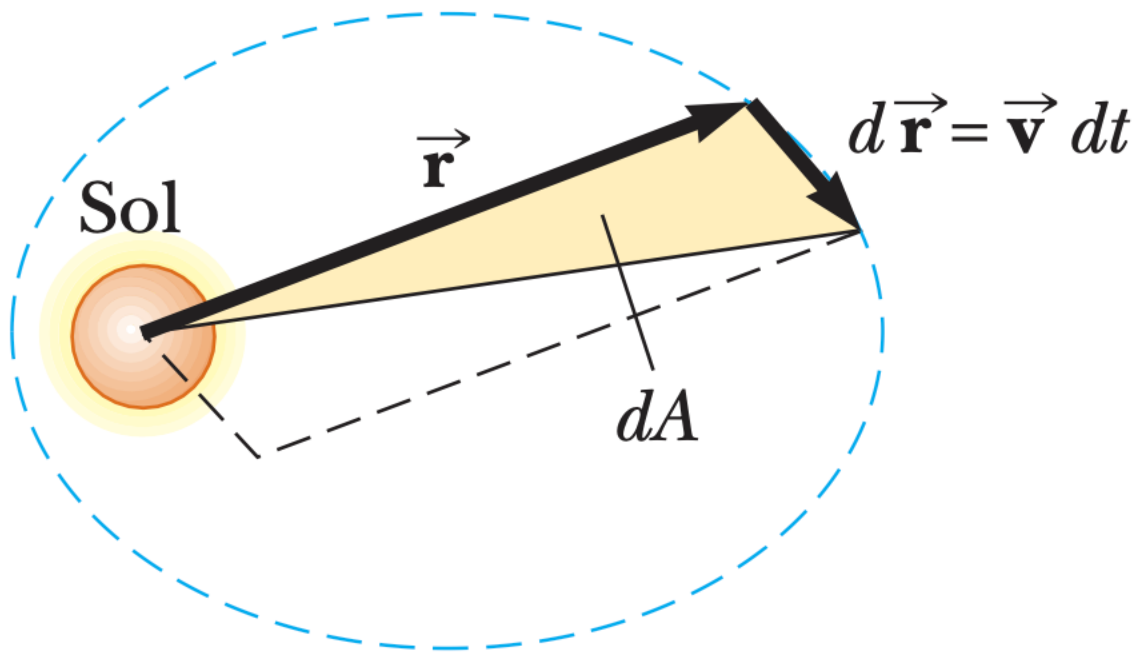


a)

- Cuando el planeta se mueve durante un intervalo de tiempo dt, el área del triangulo rectángulo formato por sus vectores posición (área amarilla en la figura) está dado por:

$$dA = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{r}}| = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\, dt| = \frac{L}{2M_p}\, dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p}$$



b)

La tercera ley de Kepler

- La 3ra ley de Kepler se sigue de la 2da ley de Newton aplicada a un planeta orbitando en MCU:

$$F_g = \frac{GM_S M_p}{r^2} = M_p a = \frac{M_p v^2}{r}$$

- Como en MCU la velocidad y el período se relacionan como $v = 2\pi r/T$, tenemos que:

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3 = K_S r^3$$

donde

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \mathrm{s^2/m^3}$$

- El resultado para el caso de órbitas elípticas difiere solo en el reemplazo $r \rightarrow a$ (semi-eje mayor):

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) a^3 = K_S a^3$$

La tercera ley de Kepler aplicada al Sistema Solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo de revolución (s)	Distancia media desde el Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Plutón[a]	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—	—