El campo gravitacional y energía potencial

- La gravedad tiene una propiedad muy peculiar: es una fuerza que **no necesita que dos cuerpos se encuentran en contacto para poder actuar**.
- Newton estuvo consciente de esto, pero no pudo explicarlo.
- La explicación apareció siglos más tarde bajo el concepto de **campo**.
- Un campo es una función que toma un valor en cada punto del espacio.
- La concepción moderna de la gravedad dice que cada masa genera un **campo gravitacional**, el cual ejerce una aceleración de gravedad sobre cualquier otra masa que puede estar presente (llamada partícula de prueba) dada por:

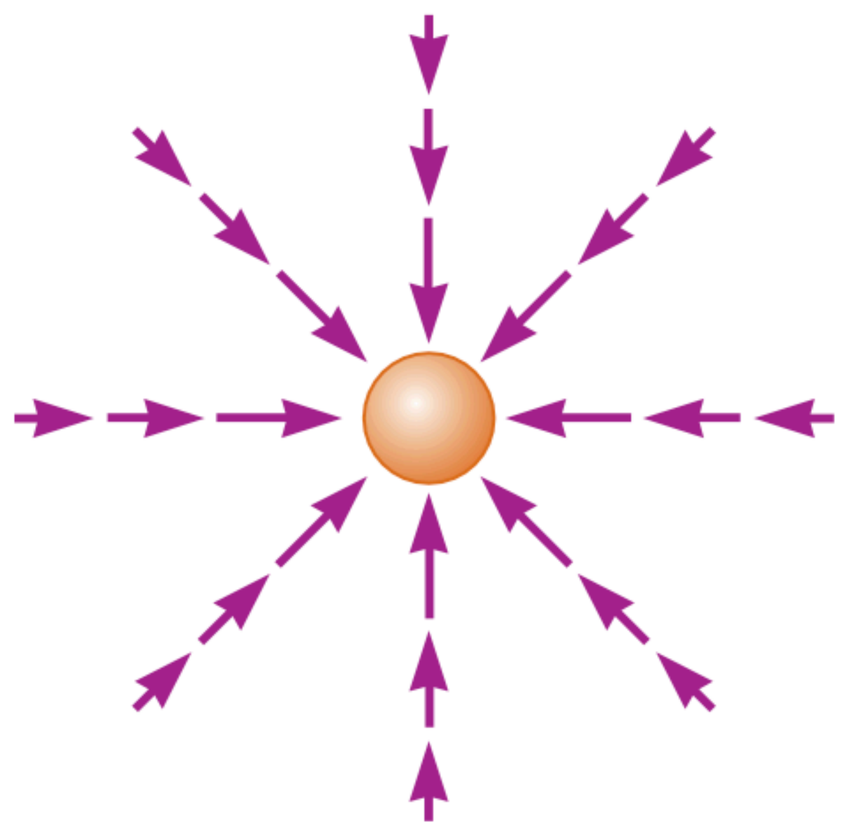
$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

El campo gravitacional y energía potencial

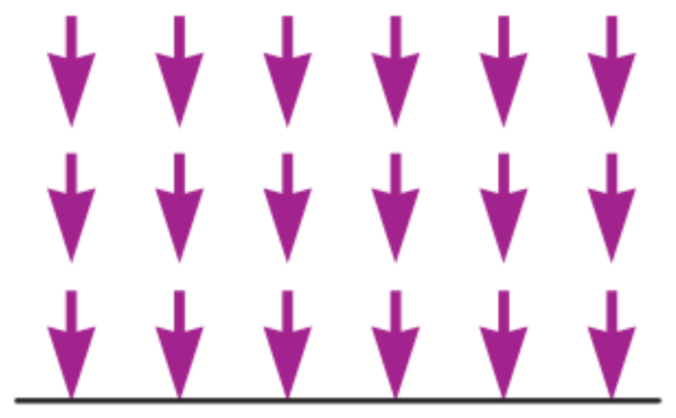
- Por ejemplo, el campo gravitacional de la tierra está dado por:

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

- El campo gravitacional es un ejemplo de campo vectorial: *en cada punto del espacio, se asocia un vector*, por lo cual al visualizarlo se utiliza tanto su magnitud como dirección:



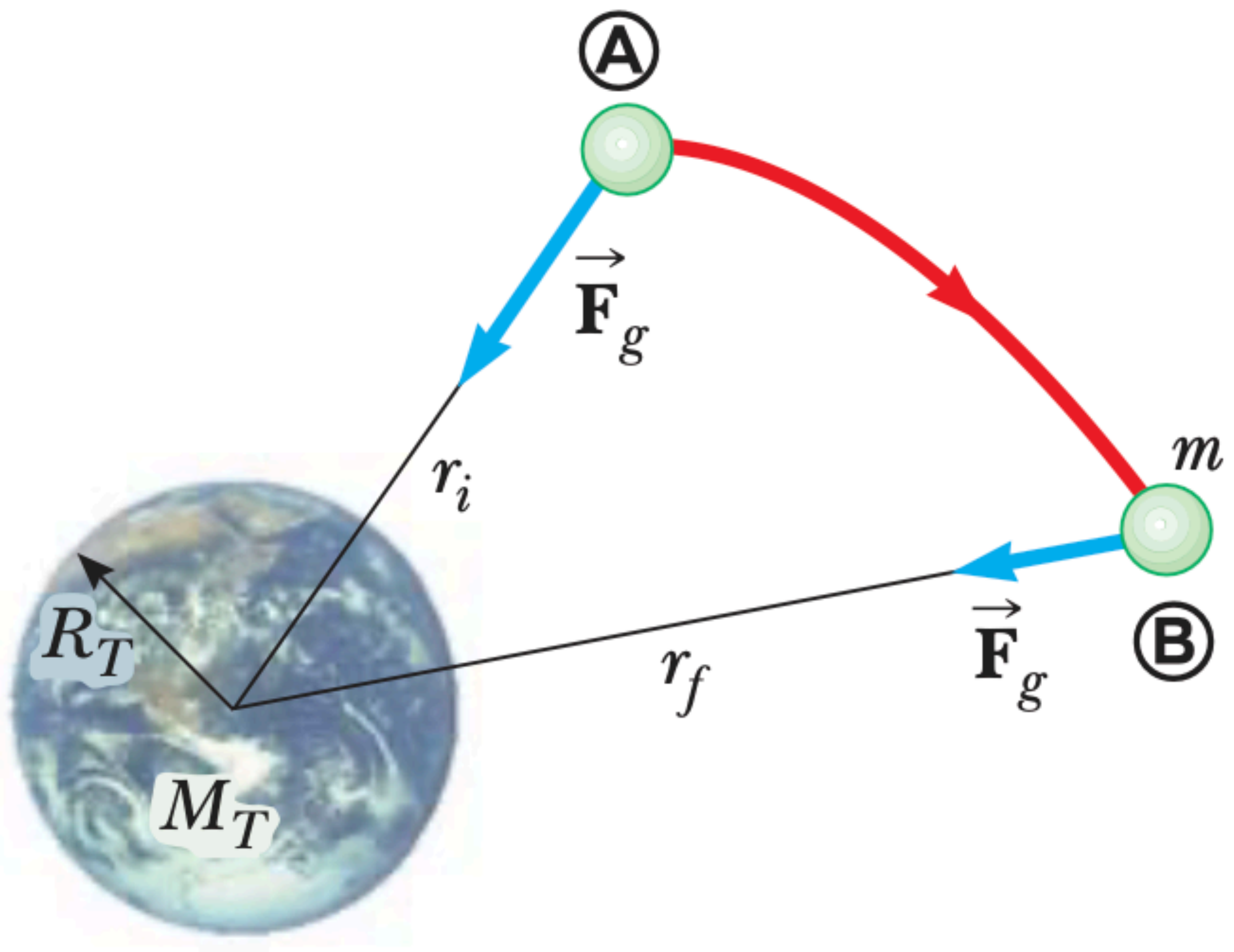
Campo gravitacional de la Tierra.
El largo de cada vector representa la magnitud de $\vec{g}$, la que decrece.



Campo gravitacional sobre superficie Terreste.
El largo no varía dado que g≈9.8 m/s/s.

El campo gravitacional y energía potencial

- Sabemos que el campo gravitacional tiene asociada energía potencial.
- El cambio en dicha energía corresponde al trabajo realizado por la fuerza.
- Consideremos el sistema conformado por la Tierra y algún satélite o cuerpo espacial. En términos del campo, el cambio de energía potencial gravitacional del sistema está dada por:



$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)\, dr$$

$$F(r) = -\frac{GM_T m}{r^2}$$

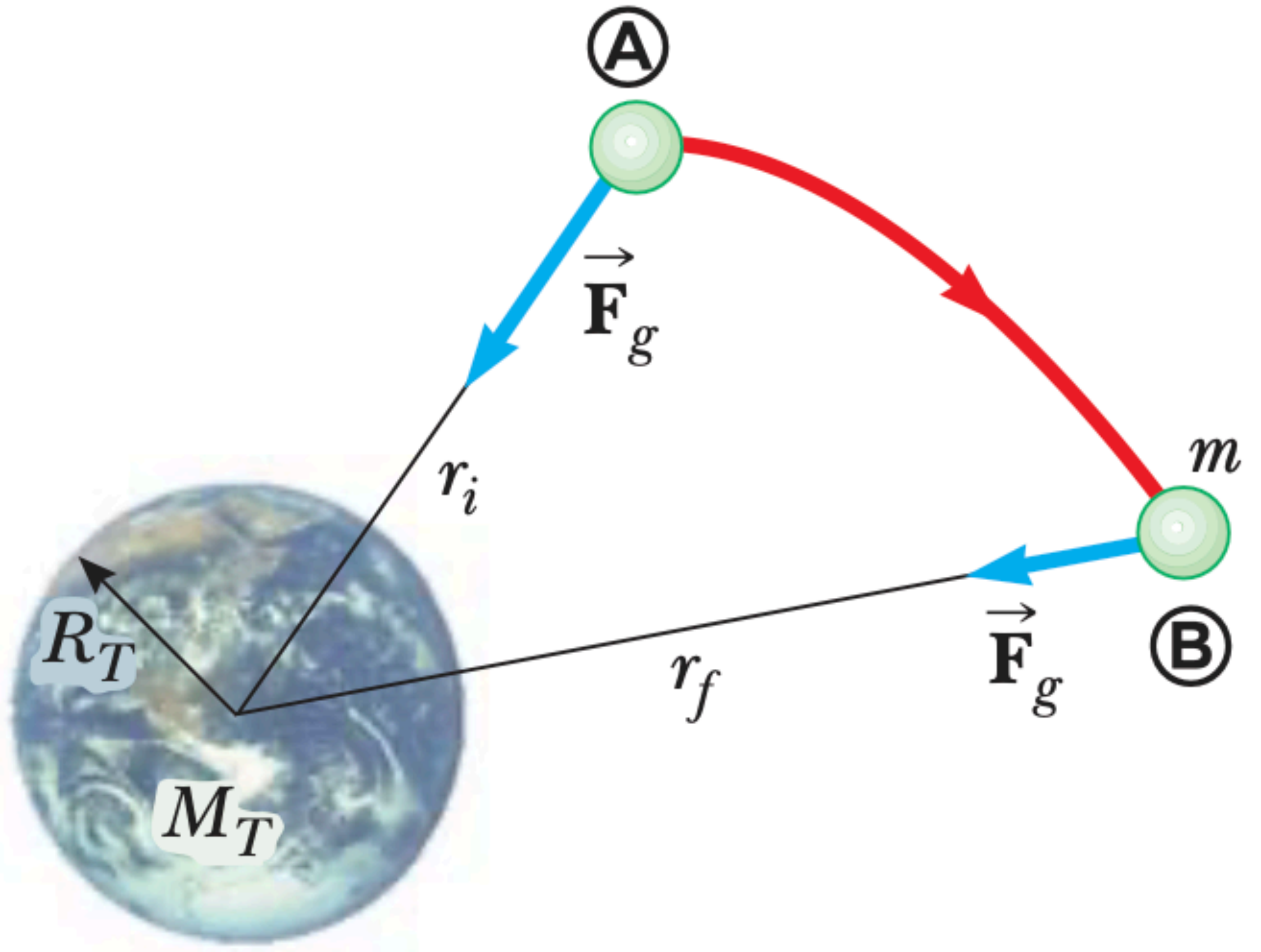
$$U_f - U_i = GM_T m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GM_T m \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f}$$

El campo gravitacional y energía potencial

- Dado que el campo gravitacional tiende a cero para $r \to \infty$, es una convención medir "*la*" energía potencial respecto a dicho punto, $U_i = U(r_i \to \infty) = \to 0$.

- En este caso, "*la*" energía potencial del sistema está dada por:

$$\boxed{U(r) = -\frac{GM_T m}{r}}$$

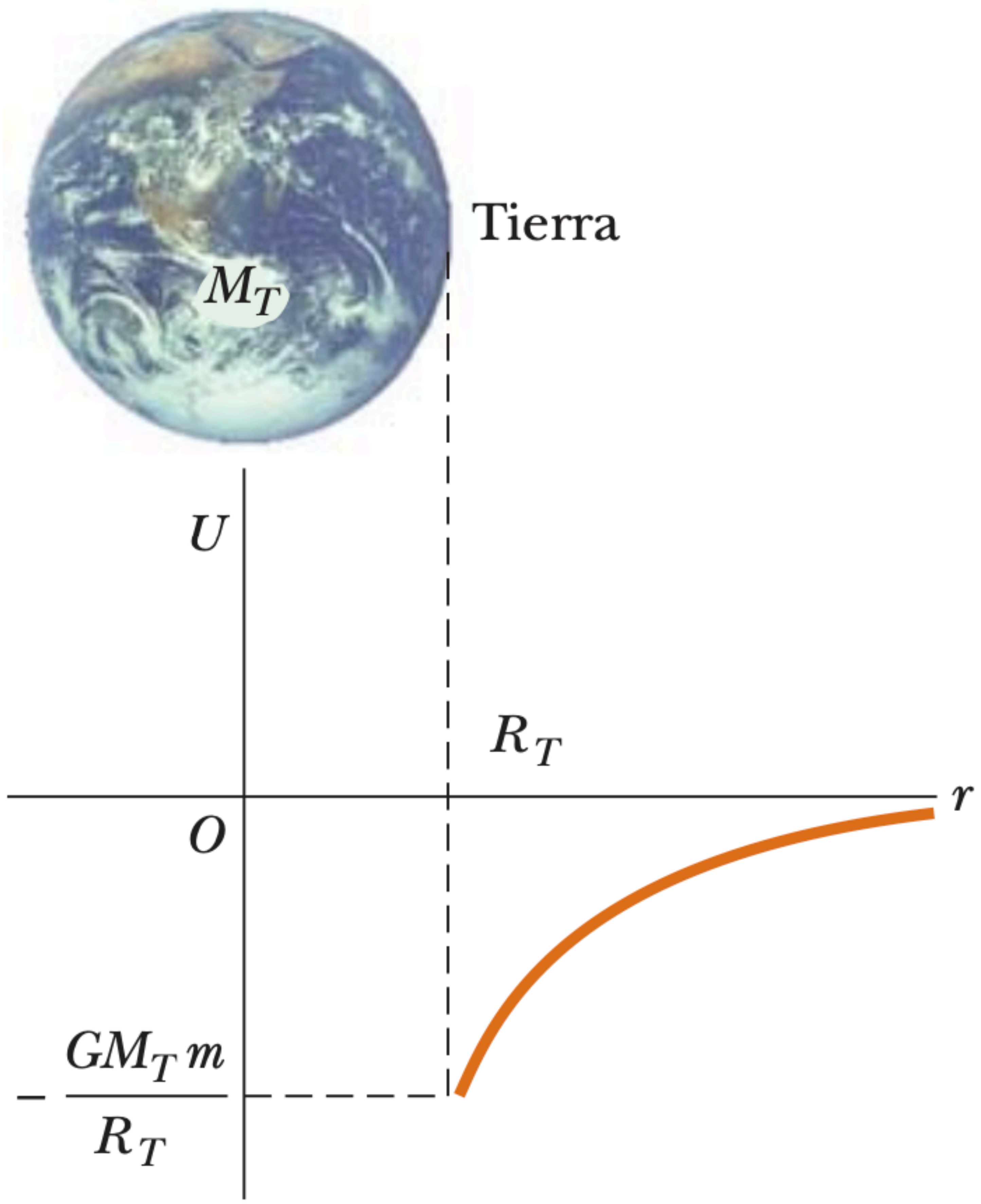


$$F(r) = -\frac{GM_T m}{r^2}$$

- Esto corresponde al trabajo que se necesita para acercar un partícula desde el infinito hasta una distancia r de la Tierra.

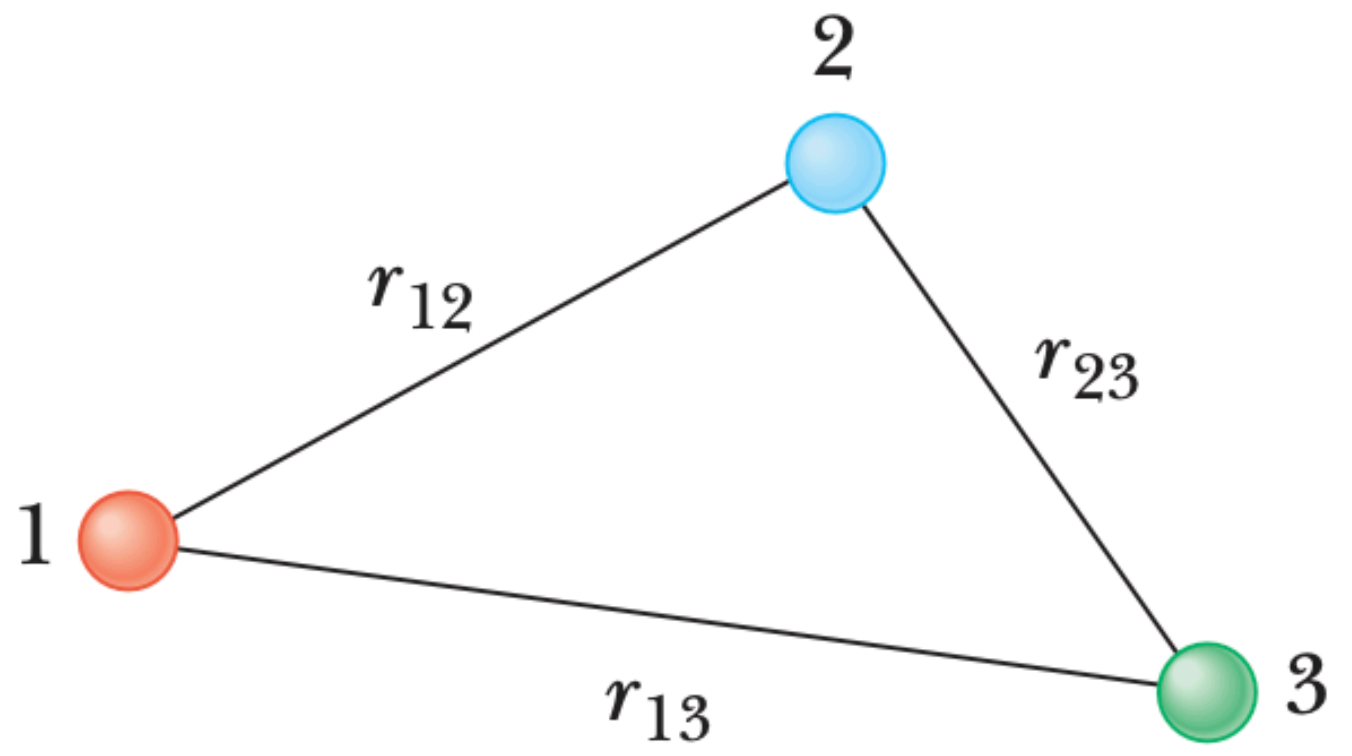
Gráfico de la función de energía potencial

$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$



Energía potencial de un sistema de partículas

- El análisis anterior se realizó para el caso de un sistema compuesto por dos partículas.
- Sin embargo, la definición obtenida de energía potencial $U(r)$ se aplica de forma aditiva si hubiesen más partículas, es decir, teniendo en cuenta el aporte proveniente del campo gravitacional generado por cada una de ellas.
- Por ejemplo, para un sistema conformado por tres partículas, la energía potencial total del sistema está dada por:



$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right)$$

Ejercicio

Mostrar que la energía potencial de una partícula de masa m a una altura h del piso (en la cercanía de la superficie terrestre) está dada por $U = mgh$.

Solución:

La energía potencial del sistema Tierra-partícula puede escribirse como:

$$\boxed{U = -\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{r}} \qquad W_{\mathrm{grav}} = -Gm_{\mathrm{E}}m\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{r_2} - \frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{r_1} = Gm_{\mathrm{E}}m\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

Como la partícula está cerca de la Tierra, $r_1 = R_E$ y $r_2 = R_E + h \approx R_E$, por lo que, en el denominador:

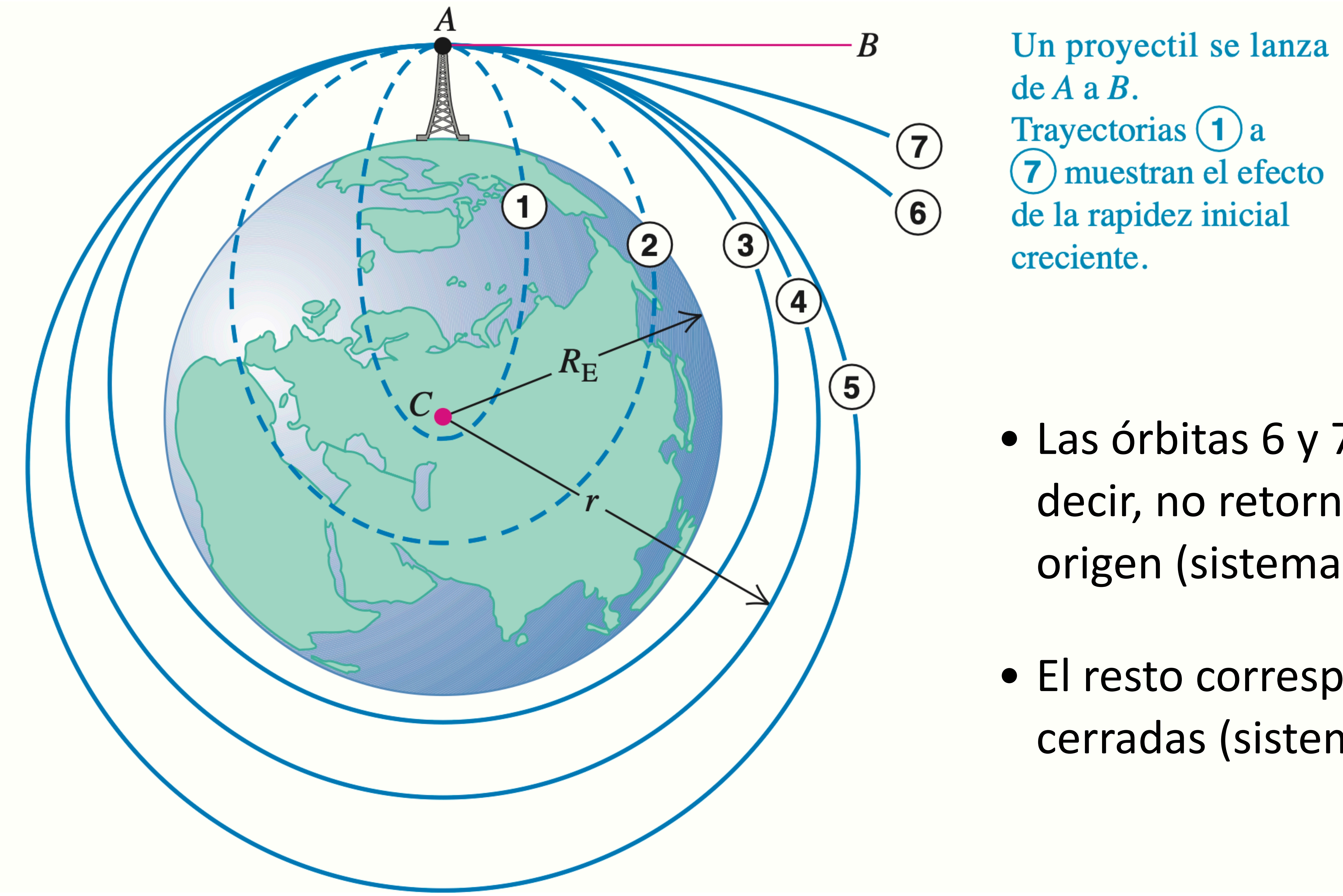
$$W_{\mathrm{grav}} = Gm_{\mathrm{E}}m\frac{r_1 - r_2}{R_{\mathrm{E}}^2}$$

Anteriormente mostramos que $g = GM_E/R_E^2$, con lo cual finalmente encontramos que

$$W_{\mathrm{grav}} = mg(r_1 - r_2) = mgh$$

Movimiento orbital de satélites y planetas

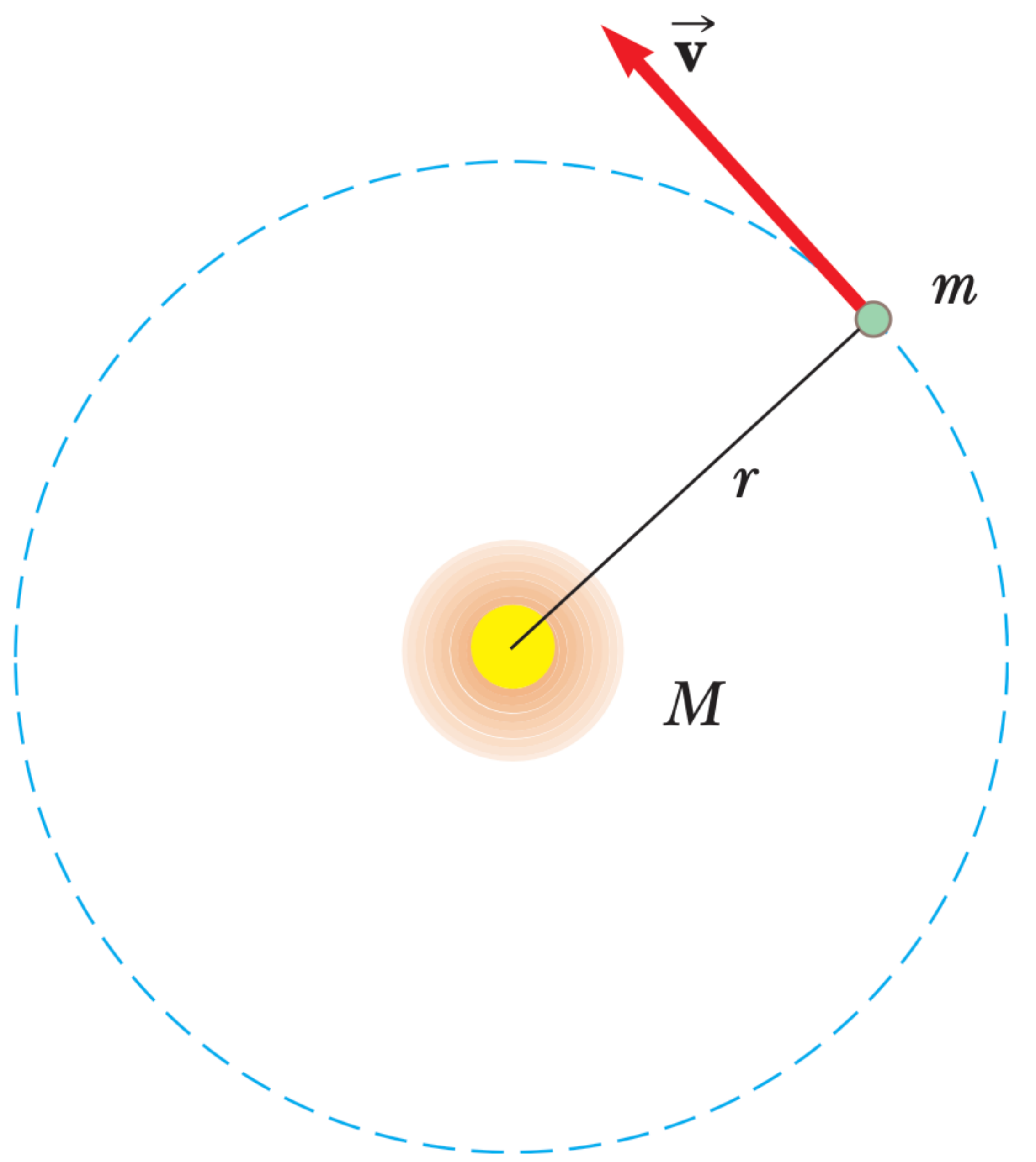
- Si lanzamos un objeto desde una torre muy alta en la tierra hacia el horizonte: que trayectoria describirá?
- El tipo de trayectoria depende de la velocidad (energía) que se le imprima.



- Las órbitas 6 y 7 son abiertas, es decir, no retornan al punto de origen (sistema no ligado).
- El resto corresponde a órbitas cerradas (sistema ligado).

La energía en el movimiento planetario y de satélites

- Considere un objeto de masa *m* que se mueve con una rapidez *v* en la vecindad de un objeto pesado de masa *M*, donde *M*>>*m*.
- El sistema puede ser un planeta que se mueve alrededor del Sol, un satélite en órbita alrededor de la Tierra o un cometa que hace un vuelo una sola vez alrededor del Sol.
- Si supone que el objeto de masa *M* está en reposo en un marco de referencia inercial, la energía mecánica total del sistema es

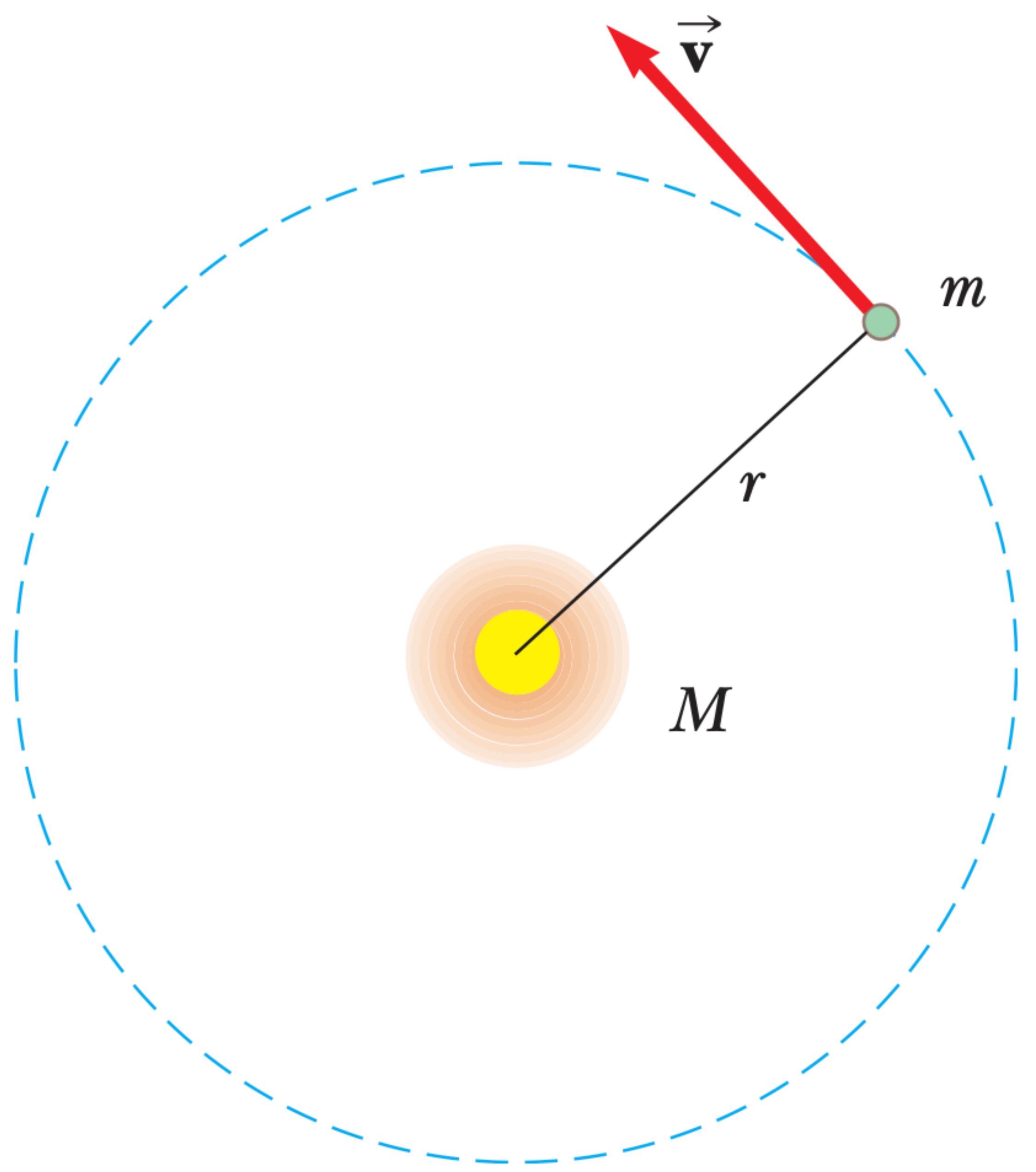


$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

La energía en el movimiento planetario y de satélites

- E puede ser positiva, negativa, o cero, dependiendo de la rapidez v.
- Sin embargo, para un **sistema ligado** como este, necesariamente $E < 0$, ya que se eligió la convención de que $U \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$.
  - El caso $E \geq 0$ equivale a el caso en el cual no existen órbitas cerradas, sino más bien trayectorias abiertas.
- Esto puede demostrarse aplicando la 2da Ley de Newton a la partícula que orbita en movimiento circular:

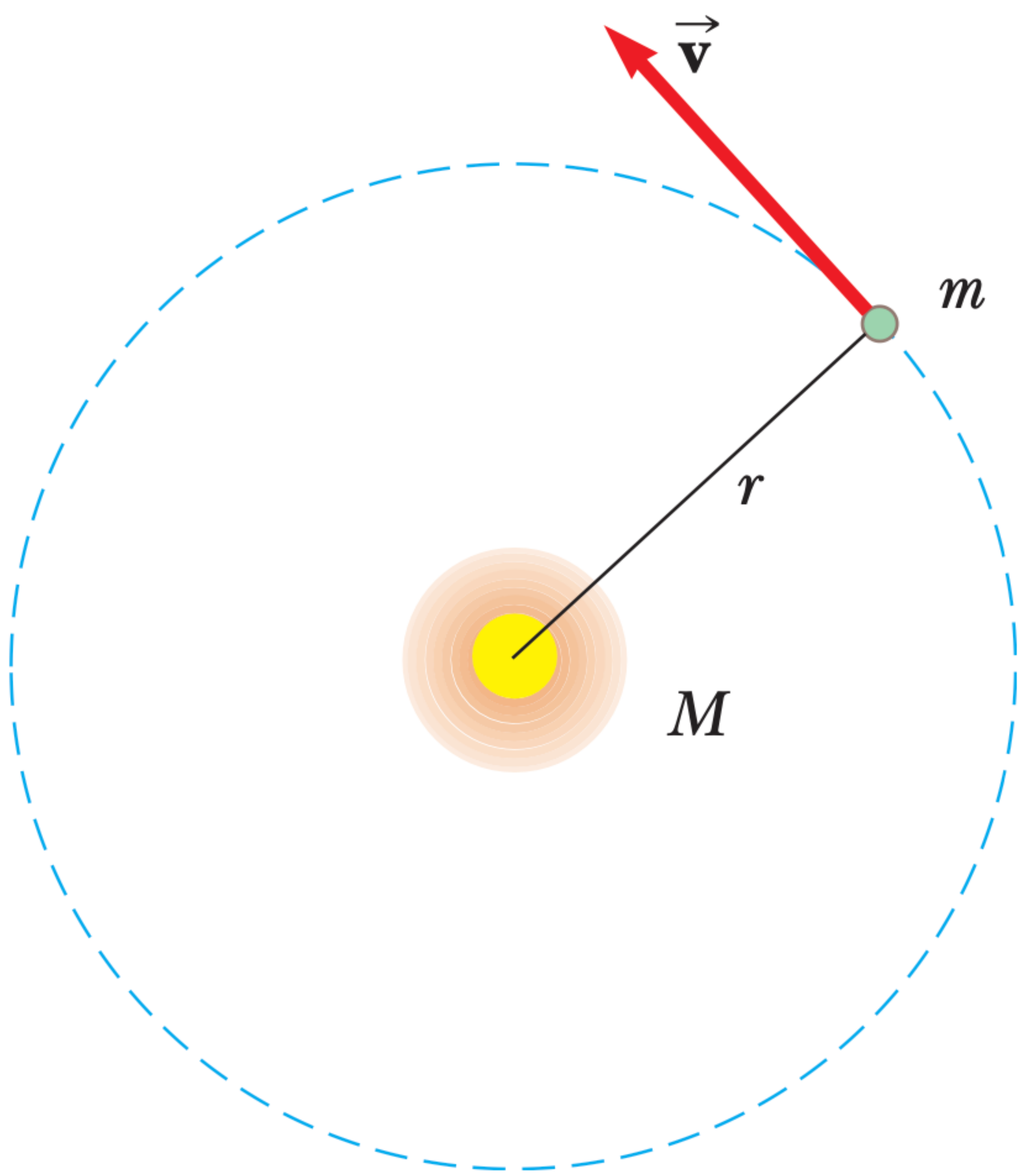


$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(órbitas circulares)}}$$

La energía en el movimiento planetario y de satélites

- El resultado anterior fue deducido asumiendo órbitas circulares.
- Para órbitas elípticas, es posible mostrar que el resultado anterior solo cambia reemplazando r por el semi-eje mayor de la elipse, "a":



$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(órbitas elípticas)}$$

- Si consideramos el sistema planetario aislado, entonces se conserva:
  - La energía total.
  - El momento angular total.

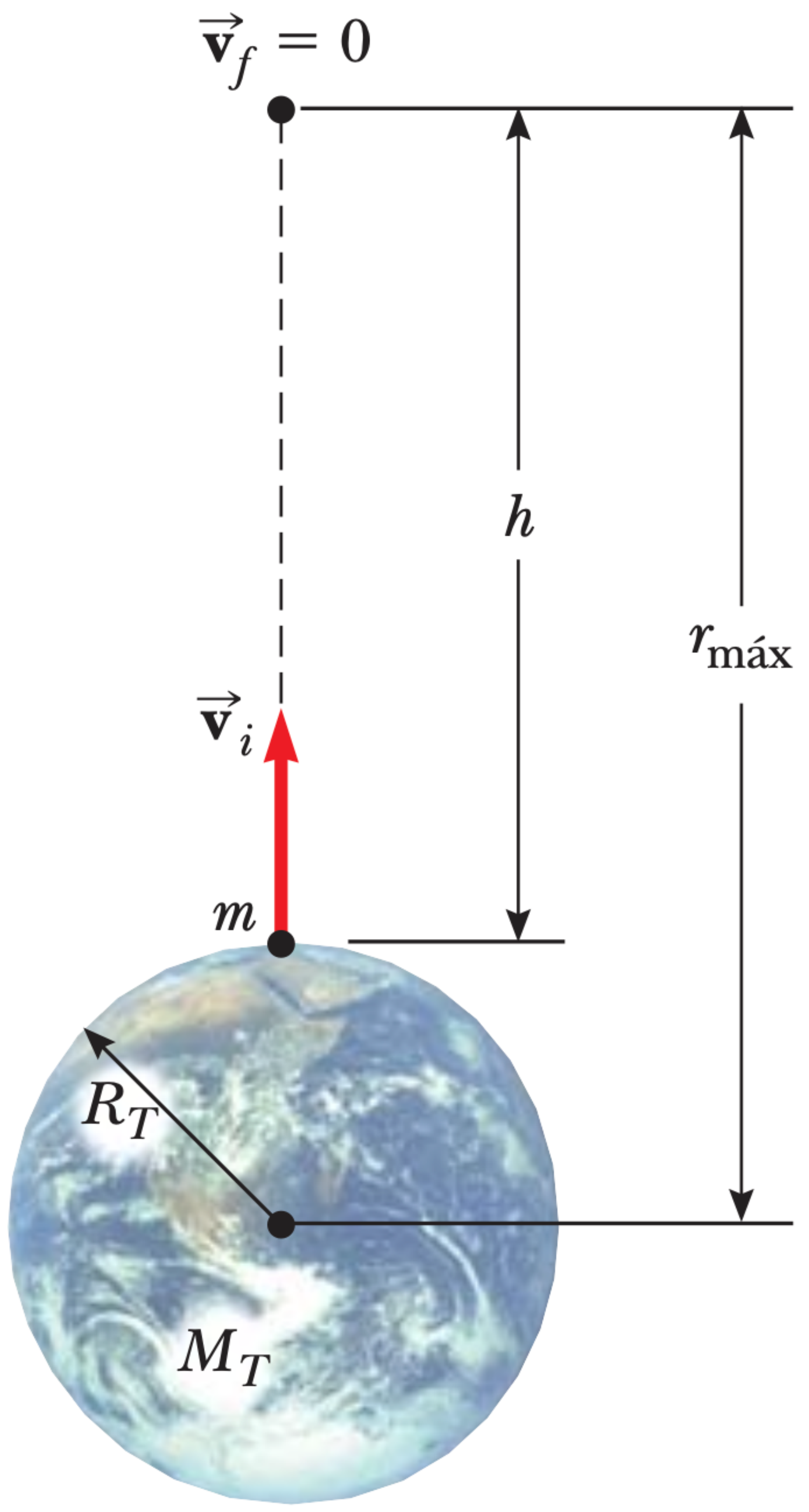
La velocidad de escape

- Supongamos ahora que lanzamos una partícula de masa m verticalmente desde la superficie de la tierra con rapidez v_i.
- Ignorando la influencia de la atmósfera: Qué rapidez v_i debe tener para poder "escapar" de la Tierra? Es decir, para poder llegar infinitamente lejos de esta sin volver a caer?
- Si llega al punto más lejano con $v_f = 0$, utilizando que E se conserva:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{r_{\text{máx}}} \Rightarrow v_i^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{\text{máx}}}\right)$$

- Luego, al hacer $r_{max} \to \infty$, encontramos la *velocidad de escape*:

$$\boxed{v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$$



La velocidad de escape

- Notar que la velocidad de escape es independiente de la masa del objeto: solo depende de las propiedades del cuerpo que genera el campo gravitacional que actúa sobre la partícula de escape.

Magnitudes de velocidad de escape de las superficies de los planetas, Luna y Sol

Planeta	v_{esc}(km/s)
Mercurio	4.3
Venus	10.3
Tierra	11.2
Marte	5.0
Júpiter	60
Saturno	36
Urano	22
Neptuno	24
Luna	2.3
Sol	618

Agujeros negros

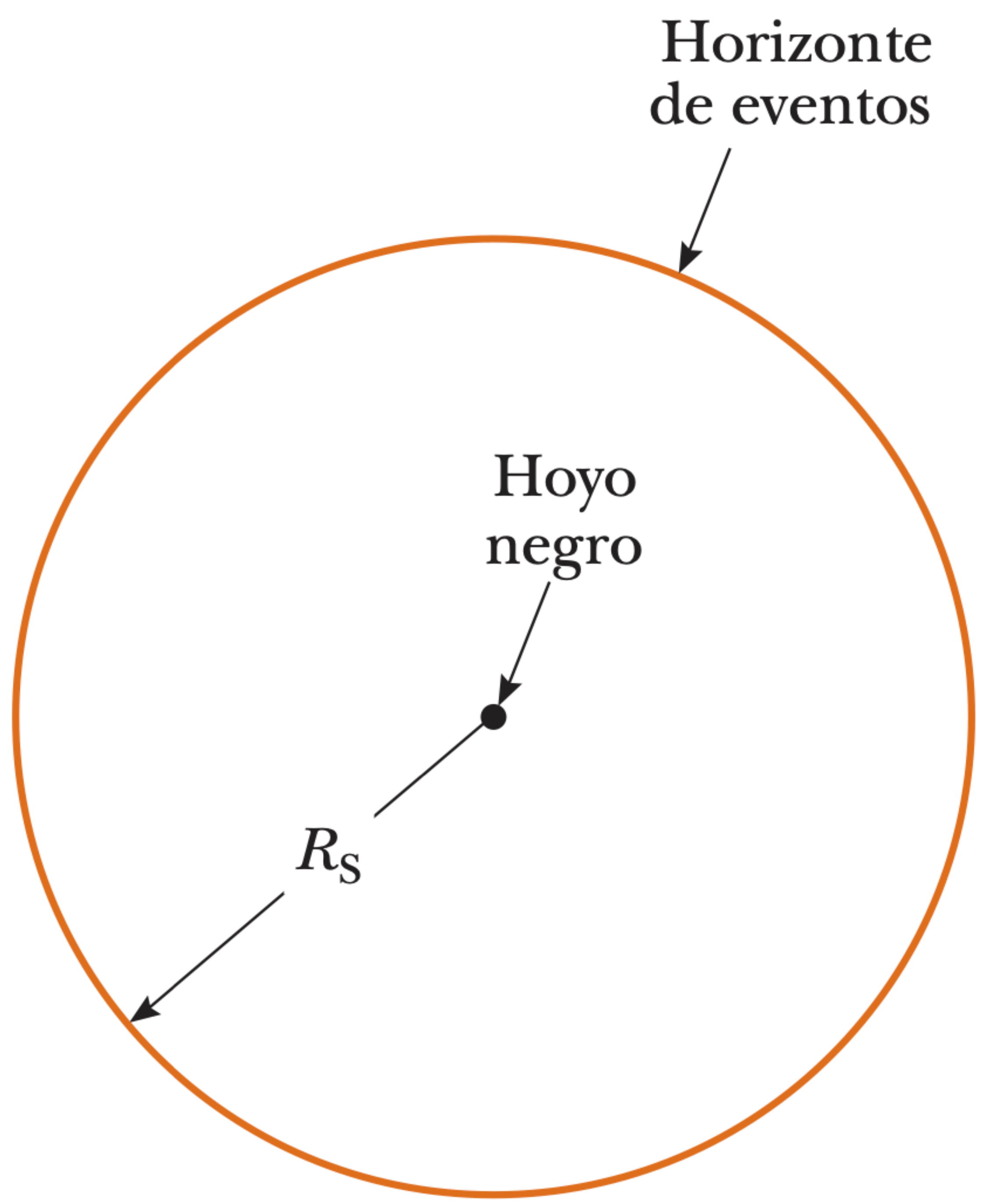
- La rapidez de escape crece con la masa del cuerpo, y con el inverso de su radio (es decir, qué tan *compacto* o *denso* es):

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

- Qué pasa si un cuerpo fuese tan masivo y compacto que la velocidad de escape fuese mayor a la velocidad de la luz (c)?
- Si evaluamos $v_{\text{esc}} = c$, podemos determinar el radio necesario para que eso ocurra (dado una cierta masa M):

$$R_s = \sqrt{\frac{2GM}{c^2}}$$

- Esta cantidad se conoce como el radio de Schwarzschild, y determina si un cuerpo o no corresponde a un *agujero negro*.



Agujeros negros

- La superficie esférica imaginaria (cascarón) que define el radio de Schwarzschild se conoce como el Horizonte de eventos del agujero negro.
- Cualquier objeto que se acerca a dicha distancia o más al centro del agujero negro, no podrá volver a escapar de el (ni siquiera la luz).
- Esta "pérdida de contacto" con el exterior del Horizonte tiene importantes implicancias en la física que se discutirán en cursos superiores.
- En la práctica, los agujeros negros suelen estar rodeados de materia sometida a procesos físicos extremos, lo que emite luz justo desde el exterior del agujero y hace visible su contorno.