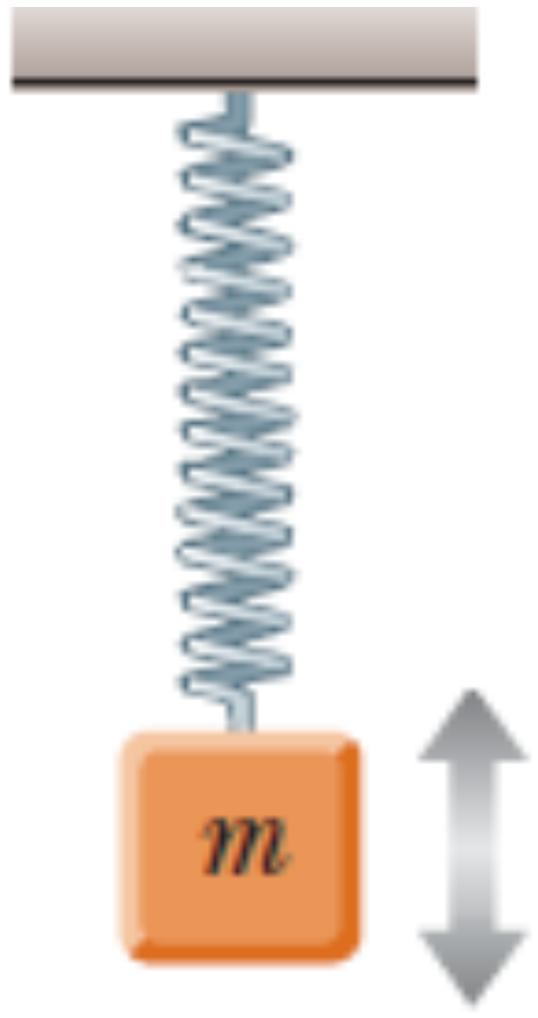
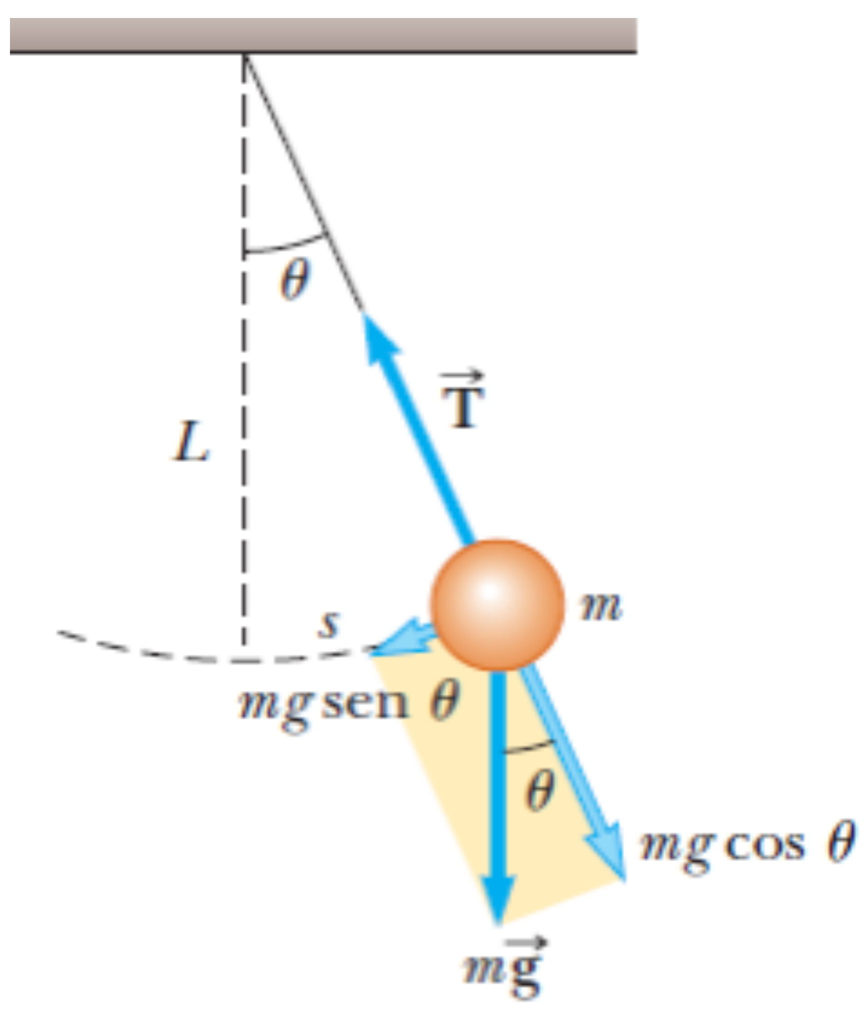
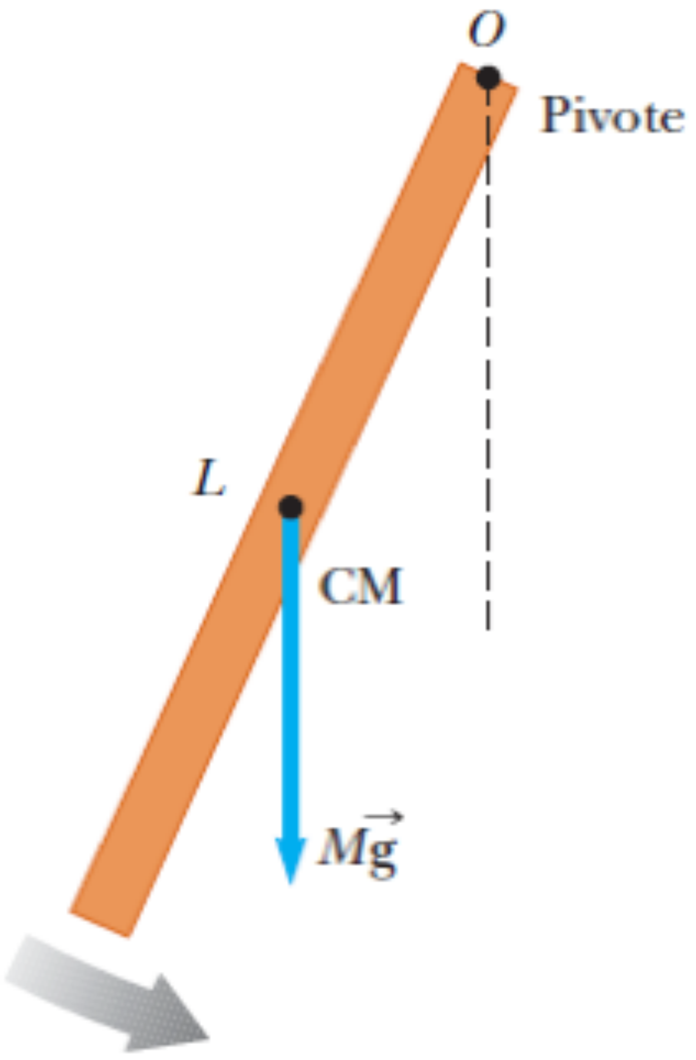
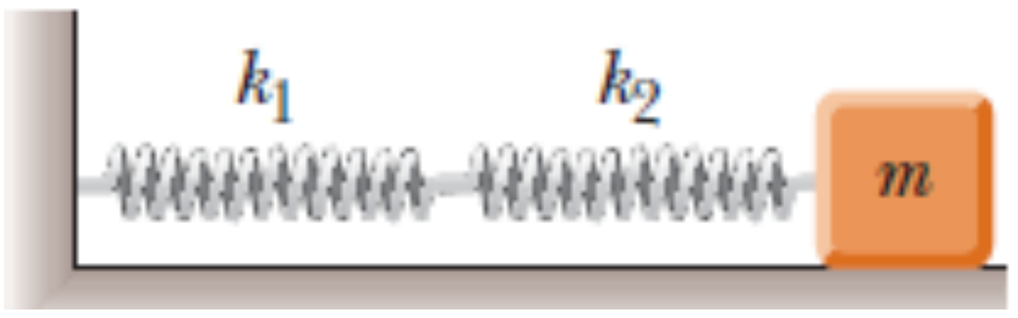
Movimiento Armónico Simple: M.A.S.

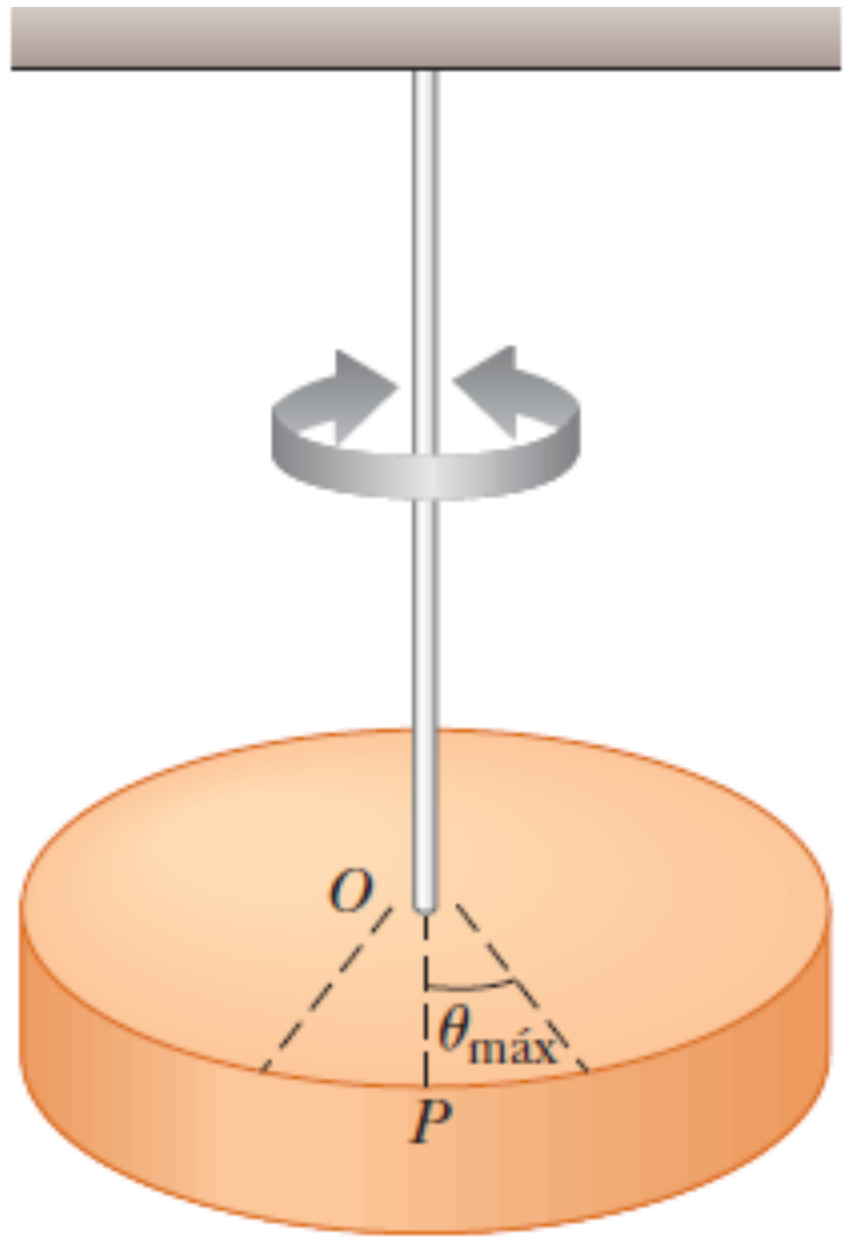
1. Cinemática del M.A.S.
2. Dinámica del M.A.S.







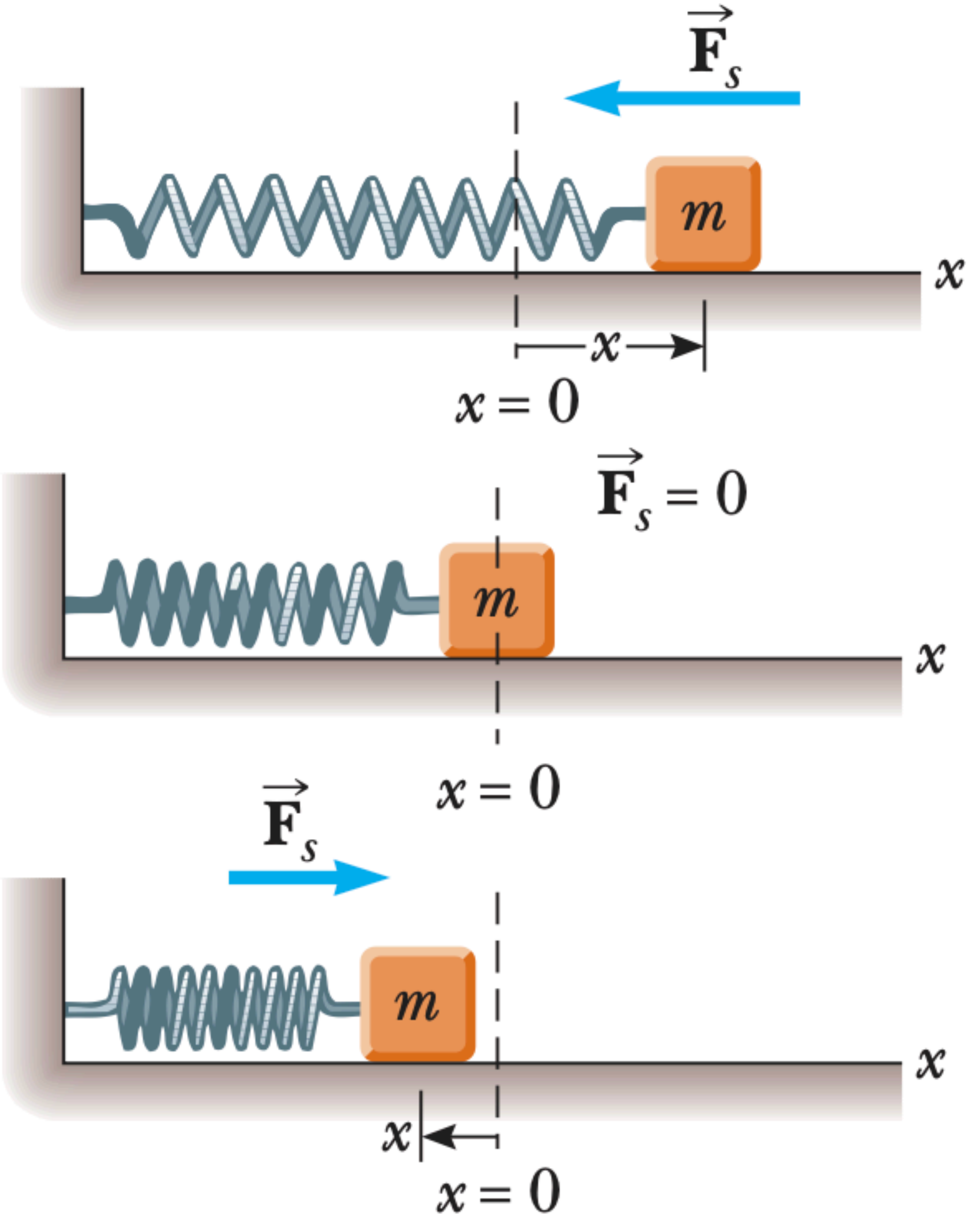




Definición Cinemática del M.A.S.

Posición: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{ACos}(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi_0})$:

- $A = Amplitud\ del\ MAS, en\ [m]$.
- $\omega = frecuencia\ angular\ del\ MAS, en \left[\frac{rad}{s}\right]$.
- $\varphi_0 = fase\ inicial\ del\ MAS$, en [rad].
- $T = \frac{2\pi}{\omega} \quad y \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$



Definición Cinemática del M.A.S.

- El movimiento harmónico simple se parametriza mediante funciones harmónicas:

Posición: $$x(t) = ACos(\omega t + \varphi_0)$$

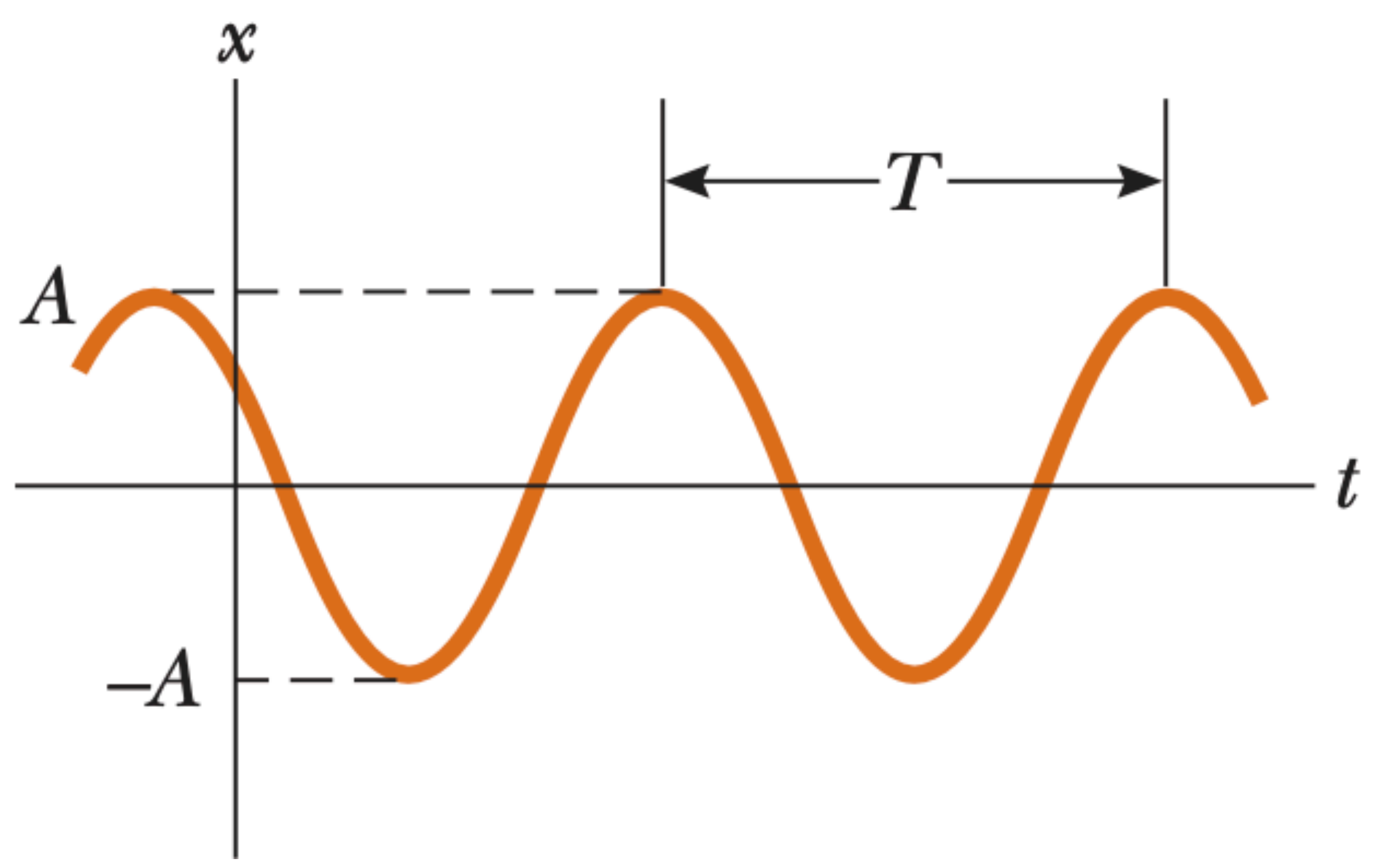
Velocidad: $$\dot{x}(t) = -A\omega Sen\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

Aceleración: $$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 Cos(\omega t + \varphi_0)$$

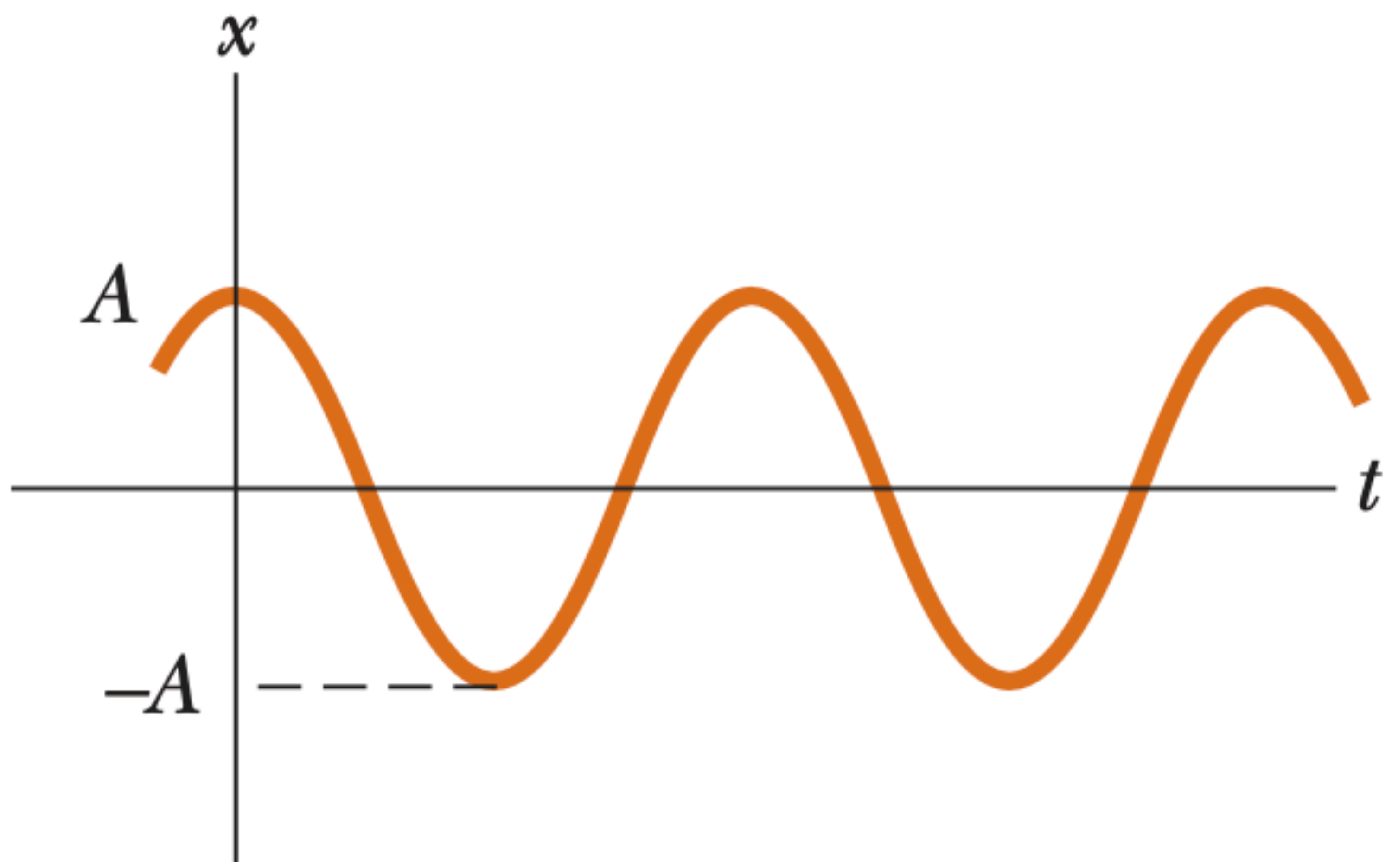
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

La fase inicial φ_0 del MAS

- Caso **general** en que $\varphi_0 \neq 0$:
  - La partícula no se encuentra en el máximo de amplitud en t=0.



- Caso **especial** en que $\varphi_0 = 0$:
  - La partícula se encuentra en el máximo de amplitud (A) en t=0.



Definición Dinámica del MAS

$$M.A.S. \;\Leftrightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

Aplicando la 2ª Ley de Newton a una masa atada al resorte.

$$\sum \vec{F}_i = \vec{\boldsymbol{F}} = m\ddot{\vec{x}}$$

$$\Rightarrow F = m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

Luego, vemos que la fuerza que ejerce el resorte tiene la forma:

$$F = -kx \qquad \text{donde} \quad k = m\omega^2$$

Notar que: $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

La ley de Hooke

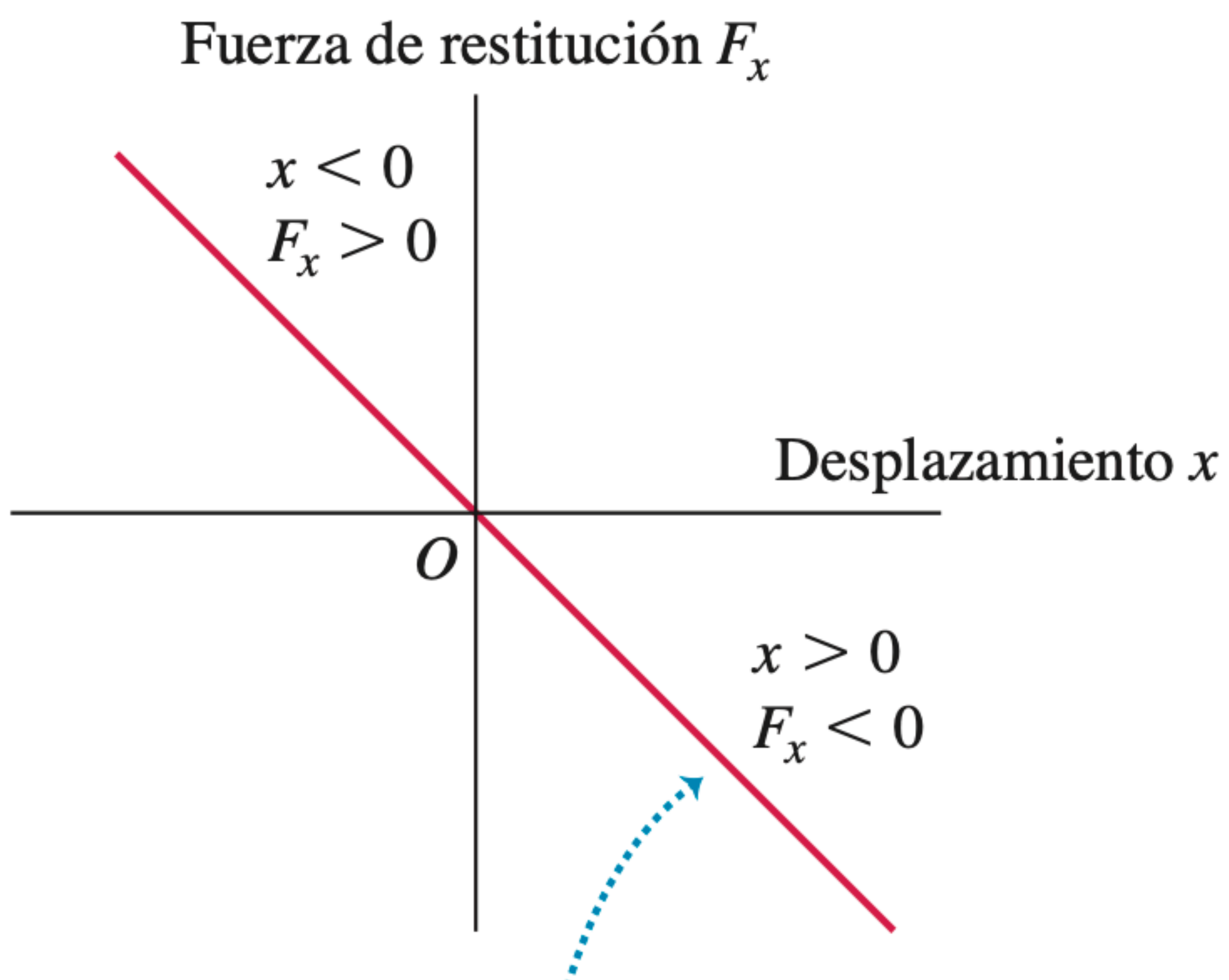
- La fuerza que da lugar al MAS está dada por:

$$F_x = -kx$$

- Esta fuerza se denomina ley de Hooke, y k se conoce como la **constante del resorte**.

- Esta fuerza se denomina “restauradora” (o de restitución) ya que al estirarlo o comprimirlo, el resorte siempre busca recuperar su longitud original.

- Solo aplica a resortes ideales.



La fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal es directamente proporcional al desplazamiento (ley de Hooke, $F_x = -kx$): la gráfica de F_x contra x es una recta.

Energía en el MAS

$$M.A.S. \Leftrightarrow F = -kx \quad ; F(x) es\ conservativa$$

$$U_{elástica} = \frac{1}{2}kx^2 \quad y \quad K = \frac{1}{2}mV^2$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Importante:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

EJEMPLO 15.3 **Oscilaciones sobre una superficie horizontal**

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el que la constante de fuerza es 20.0 N/m oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción.

A) Calcule la energía total del sistema y la rapidez máxima del carro si la amplitud del movimiento es 3.00 cm.

Solución:

Conocida la amplitud y la constante del resorte, la energía puede calcularse como:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(20.0\ \mathrm{N/m})(3.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2$$
$$= \boxed{9.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}}$$

Recordar que $E = K + U$ se conserva. La velocidad máxima se alcanza cuando la energía cinética es máxima, es decir cuanto la energía potencial del resorte toma su valor mínimo $U = 0$, lo cual ocurre en x=0. Luego

$$E = \tfrac{1}{2}m{v^2}_{\text{máx}}: \qquad v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2(9.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{J})}{0.500\ \mathrm{kg}}} = \boxed{0.190\ \ \mathrm{m/s}}$$

B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es 2.00 cm?

Solución:

Dado que conocemos la amplitud, podemos calcular la velocidad como:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$\begin{aligned} v &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \\ &= \pm\sqrt{\frac{20.0\ \mathrm{N/m}}{0.500\ \mathrm{kg}}\left[(0.030\,0\ \mathrm{m})^2 - (0.020\,0\ \mathrm{m})^2\right]} \\ &= \boxed{\pm 0.141\ \mathrm{m/s}} \end{aligned}$$

C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición es 2.00 cm.

Solución:

Ya calculamos la velocidad en dicha posición, por lo que la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.500\ \text{kg})(0.141\ \text{m/s})^2 = \boxed{5.00 \times 10^{-3}\ \text{J}}$$

Por otra parte, evaluando la energía potencial para la posición dada, encontramos que:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(0.0200\ \text{m})^2 = \boxed{4.00 \times 10^{-3}\ \text{J}}$$

Notar que la suma de ambas energías es igual a la energía total calculada en a), a pesar de que esta fue calculada en una posición distinta, ya que E se conserva.

El Péndulo Simple

La masa colgada describe un movimiento de oscilación en torno al punto más bajo, debido a la acción del peso.

Aplicando la 2da ley de Newton a la masa, en la dirección tangencial

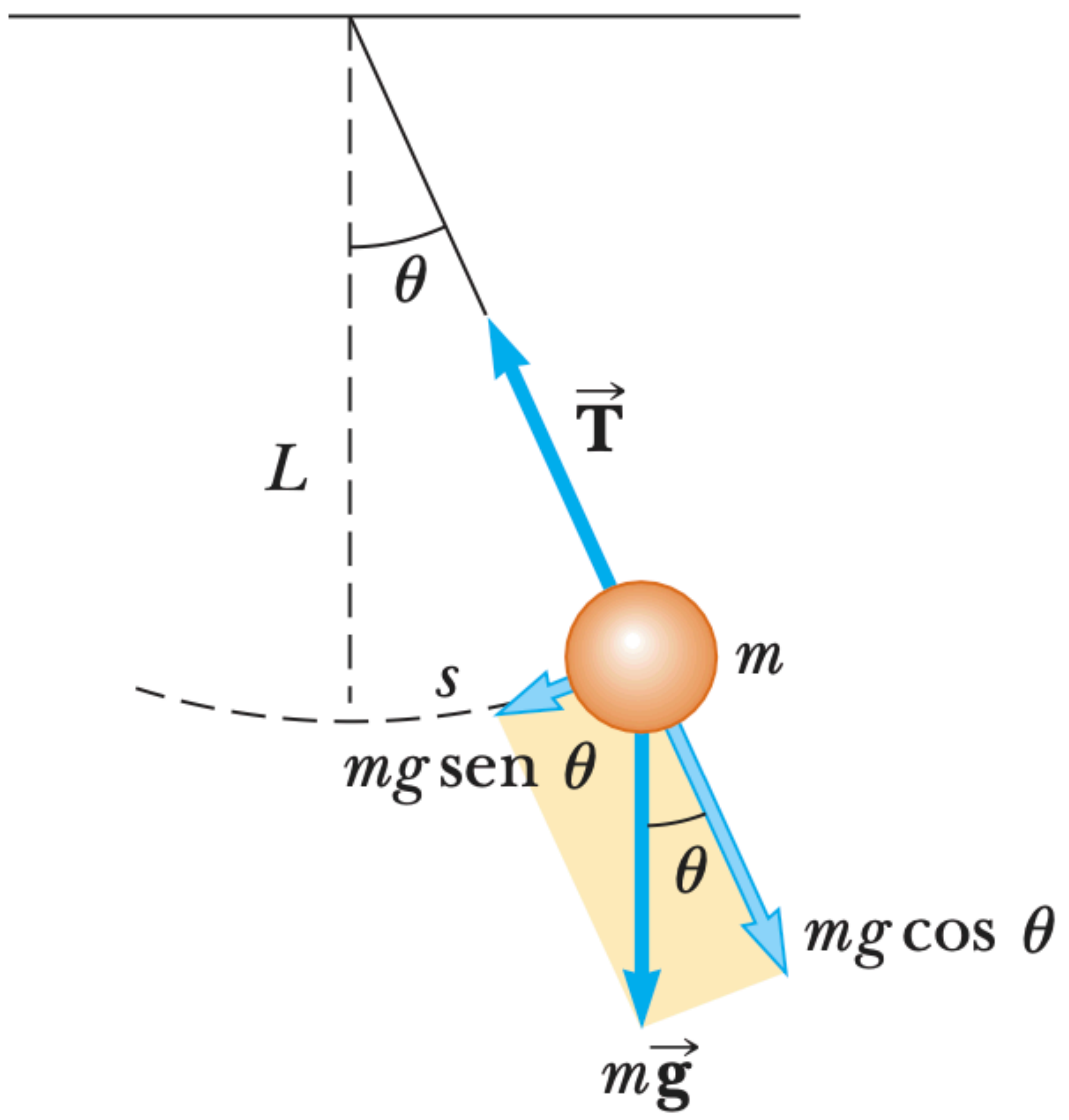
$$a_s = \ddot{s} = -g \sin\theta$$

El movimiento del péndulo no es en general MAS, **a menos que** θ **sea pequeño**, tal que $Sen\theta \approx \theta$. Con esta aproximación:

$$a_s = -g \bullet \theta = -g\frac{s}{l} \qquad \Longrightarrow \ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0$$

Entonces, el péndulo describe un MAS con frecuencia y período:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



Validez de la aproximación de ángulos pequeños

Ángulos y senos de ángulos

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno de ángulo	Porcentaje de diferencia
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%