Colegio Santa María de Maipú
Departamento de Matemática

GUIA DE AUTOAPRENDIZAJE Nº2 MATEMATICA
SEGUNDO MEDIO

NOMBRE: _________________________________ CURSO: 2°_____ FECHA: ___ / ___ / ___

Objetivo de Aprendizaje: OA1 Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales. OA 2 Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos. *Deducir propiedades de la multiplicación de raíces

Tema: Multiplicación de raíces y algunas de sus propiedades

¿Recordemos?

Índice

Símbolo de raíz

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Cantidad subradical o radicando

Recuerda que las **raíces** están definidas como **potencias de exponente racional fraccionario**, por lo que podemos asegurar que las propiedades que se cumplen en las potencias también se cumplen para las raíces.

Le llamaremos **raíz enésima** a aquella raíz que tenga índice "n"

Antes de iniciar revisemos algunos casos de raíces especiales:

a) $\sqrt[n]{1} = ¿?$

Prueba con distintos valores para n:

n	2	3	6	10
$\sqrt[n]{1}$				

Conclusión: **Para cualquier valor del _____________, toda raíz ___________________ de _____ resulta 1.**

b) $\sqrt[n]{0} = ¿?$

Prueba con distintos valores para n:

n	2	3	6	10
$\sqrt[n]{0}$				

Conclusión: **Para cualquier valor del _____________, toda raíz ___________________ de _____ resulta ______.**

En la guía anterior aprendimos a sumar y restar raíces, ¿Qué pasa si multiplicamos raíces? ¿Se podrá usar algún procedimiento que nos ayude a facilitar nuestros cálculos?

Analizando…

Caso 1: Raíces con distinto índice e igual subradical

$$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} =$$

Observaciones:

- A pesar de que ambas raíces tienen igual subradical, las dos tienen distinto índice; la primera es una raíz cuarta (índice cuatro), y la segunda es una raíz cuadrada (índice dos).
- Ya que recién estamos conociendo el tema de las raíces, quizás es mejor convertir cada una en potencias… ¡probemos!

$$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} =$$

- Ahora el procedimiento se transformó en multiplicación de potencias de igual base. ¿Recuerdas cómo resolver? (sino, te dejo el link →https://www.youtube.com/watch?v=U8LGr4IoYo8)

Entonces:

$$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} =$$

$$3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$3^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[4]{3^3}$$

Para multiplicar potencias de igual base, se mantiene la base y se suman los exponentes.

- En conclusión, podemos decir que cuando **multiplicamos raíces de igual subradical, pero distinto índice, podemos aplicar propiedades de las potencias.**
- Más adelante aprenderemos otra forma de realizar este procedimiento…

Ahora ¡Inténtalo!

1. Multiplica las siguientes raíces con igual subradical:

a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} =$

b) $\sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[3]{3^2} =$

c) $\sqrt[6]{10^2} \cdot \sqrt[3]{100} =$

d) $\sqrt[7]{27} \cdot \sqrt[3]{81} =$

e) $\sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} =$

Sugerencia: Si te encuentras con algunos productos de raíces que no tienen igual subradical, intenta escribirlos como potencias de igual base. ¡Tú puedes!

Caso 2: Raíces con distinto subradical pero igual índice.

$$\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{6} =$$

Por propiedades de las potencias, deberíamos agrupar el producto entre 10 y 6 y elevar al exponente en común.

Observaciones:

- Ambas son raíces cuadradas pero con distinto subradical.
- Convertiremos nuevamente en potencias:

$$10^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} =$$

$$(10 \cdot 6)^{\frac{1}{3}} =$$

$$60^{\frac{1}{3}} =$$

$$\sqrt[3]{60} =$$

- ¡Qué simple! Entonces quizás no es necesario convertir en potencias. Observa:

$$\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{60}$$

Entonces:

Para multiplicar raíces que tengan igual _______________,
debes conservar el __________ y multiplicar los _____________.

Es decir:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

En caso existir coeficientes en las raíces, debes obtener el producto entre coeficientes y raíces por separado.

$$2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10} = 8\sqrt{50} = 8 \cdot 5\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$$

Nota: Recuerda que en la guía anterior, aprendimos que algunas raíces se pueden descomponer y así poder calcularlas de manera más fácil. Por lo tanto, un óptimo resultado del ejemplo anterior es:

$$\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{60} = 2\sqrt[3]{15}$$

Ahora ¡Inténtalo!

2. Multiplica las siguientes raíces con igual índice, recuerda descomponer el resultado, si es posible.
   a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} =$

   b) $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{18} =$

   c) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{10} =$

   d) $\sqrt[10]{10} \cdot \sqrt[10]{25} =$

   e) $\sqrt[3]{ab^4} \cdot \sqrt[3]{b} =$

Caso 3: Raíces con distinto subradical y distinto índice.

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4^2} =$$

En este caso, se podría hacer una estimación de los valores de ambas raíces totalmente distintas y calcular un valor aproximado de su producto, pero en lugar de eso, aprenderás un método que simplificara dicho proceso:

Método para igualar índices (o reducción a común índice):

Paso 1: Hallamos el mínimo común múltiplo entre los índices.
Paso 2: Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

El mcm entre los índices 5 y 3 es **15**

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4^2} =$$

Al dividir el común índice (**15**) entre 5 y luego 3, se obtiene 3 y 5 respectivamente, luego se realiza la multiplicación

$$\sqrt[5\cdot 3]{2^{1\cdot 3}} \cdot \sqrt[3\cdot 5]{4^{2\cdot 5}} =$$

Al quedar con índices iguales, se aplica la propiedad anterior, manteniendo el índice y multiplicando los subradicales.

$$\sqrt[15]{2^3} \cdot \sqrt[15]{4^{10}} =$$

Hasta acá esta lista la multiplicación!

$$\sqrt[15]{2^3 \cdot 4^{10}} =$$

Pero podemos reducir aun más aplicando propiedades de las potencias.

$$\sqrt[15]{2^3 \cdot (2^2)^{10}} =$$

$$\sqrt[15]{2^3 \cdot 2^{20}} =$$

$$\sqrt[15]{2^{23}}$$

Para mayor explicación → https://www.youtube.com/watch?v=FXQapwnod7A

Ahora ¡Inténtalo!

3. Resuelve las siguientes multiplicaciones, de forma muy ordenada, limpia y clara.
   a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{5} =$

   b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{7} =$

   c) $\sqrt[5]{2} \cdot 3\sqrt[3]{4} =$

   d) $\sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt{ab^3} =$

Recuerdas esta propiedad de las potencias…

Analizando…

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

"La potencia de una potencia se obtiene conservando la base y dejando en el exponente el producto entre ellos"

¿Cómo sería la raíz de una raíz?

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a} \quad , p \wedge q \neq 0$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Redacta con tus propias palabras como enunciarías esta propiedad, raíz de una raíz:

Ahora ¡Inténtalo!

4. Aplica raíz de una raíz para calcular las siguientes expresiones, recuerda descomponer el resultado, si es posible.
   a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{35}} =$
   b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{200}}} =$
   c) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{46}}} =$

Para terminar, analiza el siguiente procedimiento:

Dado que **las raíces se pueden escribir como potencias**, podemos decir que existen **raíces equivalentes** que se originan a partir de la **simplificación** del exponente fraccionario. Observa:

$$\sqrt[8]{36^4} \; es \; equivalente \; a \; \sqrt{36}$$

¿Porqué?

$$\sqrt[8]{36^4} \; es \; 36^{\frac{4}{8}}$$

$$Dado \; que \; \frac{4}{8} \; se \; puede \; simplificar \; por \; 4, resulta \; \frac{1}{2}$$

$$Lo \; que \; significa: \sqrt{36}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[8]{36^4} \; es \; equivalente \; a \; \sqrt{36}}$$

¡Inténtalo!

5. Simplifica las siguientes raíces:

a) $\sqrt[8]{5^2} = \ 5^{\frac{2}{8}} \ = \ 5^{\frac{1}{4}} \ = \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{49^3} =$ ____ = ____ = _____

c) $\sqrt[10]{32^2} =$ ____ = ____ = _____

d) $\sqrt[6]{(0,2)^{16}} =$ ____ = ____ = _____

Nota: A veces, usando este procedimiento, sólo reduciremos raíces para estimar su valor, como por ejemplo a) y d). Otras, podremos calcular raíces exactas sin problemas como es el caso de b) y c).

Con los siguientes ejercicios, revisaremos si aprendimos correctamente los procedimientos estudiados.
Instrucciones: Marca la alternativa correcta, resuelve clara y ordenadamente. (2 puntos cada uno)

1. $\sqrt[10]{1} =$

a) 0
b) 1
c) 10
d) 10^1
e) Ninguna de las anteriores

2. $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[3]{3^4}$ resulta:

a) $\sqrt[15]{3}$
b) $\sqrt[15]{23}$
c) $\sqrt[15]{3^{23}}$
d) $\sqrt[5]{3^5}$
e) Ninguna de las anteriores

3. Obtén el producto entre $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[7]{3} =$

a) $\sqrt[21]{6}$
b) $\sqrt[21]{6^{21}}$
c) $\sqrt[10]{2^7 \cdot 3^3}$
d) $\sqrt[21]{2^7 \cdot 3^3}$
e) Ninguna de las anteriores

4. Reduce $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} =$

a) 2
b) $\sqrt[16]{2}$
c) $\sqrt[8]{2}$
d) 2^2
e) $(\sqrt{2})^8$

5. Simplifica $\sqrt[10]{20^2}$

a) $\sqrt{20}$
b) $\sqrt[5]{20}$
c) $\sqrt[10]{5}$
d) 20
e) Ninguna de las anteriores

Si has llegado hasta aquí sin problemas significa que has aprendido a seguir el procedimiento anterior correctamente. Tienes habilidades para repetir procesos lógicos y sistemáticos sin que te generen dificultad. ¡¡¡¡Felicitaciones!!!!

Te propongo ahora el siguiente desafío:

$$\left(\sqrt[15]{-2+\sqrt{100}}\right)^5 - \left(-1-\sqrt[3]{-27}\right)^2 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} =$$