# MAT1610

fblazco

August 14, 2024

# 1 Clase 1

## 1.1 Fechas evaluaciones

1. I1 lunes 2 de Septiembre (hasta Clase 10). Bloque 7-8
2. I2 Martes 8 de Octubre (hasta Clase 20). Bloque 7-8
3. I3 Lunes 4 de Noviembre (hasta Clase 30). Bloque 7-8
4. Examen Lunes de Diciembre (toda la materia)

## 1.2 Ponderaciones

NF ≡ Interrogaciones 20%x3 + Lab 10% + Ex 30%

## 1.3 Limite de Funciones

1. Consideremos esta funcion

$$f(x) = x**2 - 1/x - 1, Dom(f) = R - \{1\} \tag{1}$$

   Que ocurre si me acerco a 1?

2. $x- > 1-$ me acerco por la izquierda
   $x- > 1+$ me acerco por la derecha

3. si x $- >$ 1 ≡ f(x) ≡ ?

4. esto lo podemos escribir como

$$\lim_{x->1} f(x) = 2 \tag{2}$$

5. tecnicamente: "si x esta muy cerca de 1 entonces f(x) esta muyt cerca de 2"

$$f(x) = x^2 - 1/x - 1 = (x-1)(x+1) \div (x-1) \equiv x+1 \tag{3}$$

6.

$$f(x) = x + 1, x \not\equiv 2 \tag{4}$$

7. Formalmente:

   (a) Supongamos que f(x) esta definida para todo x cerca de "a"

   (b) Escribiremos:

   $$\lim_{x->a} f(x) = L \tag{5}$$

   Si cuando x se aproxima a "a" entonces f(x) se aproxima a "n"

8. Sea

   $$f(x) \equiv (x+2)^2 + 1, x <= -1 f(x) \equiv (x+3), x > -1 \tag{6}$$

   Grafique f(x) y concluya el valor de

   $$\lim_{x->-1} f(x) \tag{7}$$

   Si me acerco por + se acerca a 2 y si que acerco por - tambien me acerco a 2 (viendolo desde el grafico de la funcion) y eso es igual al grafico de f(-1)

# 2 Clase 2

## 2.1 Calculo de Algunos Limites

1.

$$\lim_{x->9} \frac{\sqrt[2]{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x->9} \frac{\sqrt[2]{x} - 3 \cdot (\sqrt[2]{x} + 3)}{x - 9 \cdot (\sqrt[2]{x} + 3)} = \lim_{x->9} \frac{\sqrt[2]{x} - 3}{x - 9} \equiv \frac{1}{6} \tag{8}$$

2.

$$\lim_{x->2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \equiv 3 \tag{9}$$

3.

$$\lim_{x->-1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x->-1} \frac{(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)}{(x+1)} = \lim_{x->-1} (x^2 - x + 1) \equiv 3 \tag{10}$$

4.

$$\lim_{x->27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} = \lim_{x->27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{(\sqrt[3]{x} - 3) \cdot (\sqrt[3]{x}^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9)} = \tag{11}$$

5.

$$\lim_{t->0} \frac{\sqrt[2]{t^2 + 9} - 3}{t^2} \equiv \frac{1}{6} \tag{12}$$

## 2.2 Limites Laterales

1. $$\lim_{x->a+} f(x) = L2 \tag{13}$$

   Limite lateral derecho y se da cuando x se acerca a "a" por la derecha

2. $$\lim_{x->a-} f(x) = L1 \tag{14}$$

   Limite lateral izquierdo y se da cuando x se acerca a "a" por la izquierda

3. $$\lim_{x->a} f(x) \tag{15}$$

   **No existe**

**Teorema**

$$\lim_{x->a} f(x) = L \equiv \lim_{x->a+} f(x) = L = \lim_{x->a-} f(x) \tag{16}$$

Obs: Limites laterales distintos imploca que el limite no existe
**Ejemplo:**

1. Para
   $$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \tag{17}$$

   Calcular
   $$\lim_{x->1} f(x) \tag{18}$$

   $$y = |x-1| \begin{cases} (x-1) & , si\ x >= 1 \\ -(x-1) & , si\ x < 1 \end{cases} \tag{19}$$

   Veamos los limites laterales de f(x)

   $$\lim_{x->+1} f(x) = \lim_{x->+1} \frac{x-1}{x-1} \equiv 1 \tag{20}$$

   $$\lim_{x->-1} f(x) = \lim_{x->-1} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x->-1} -1 \equiv -1 \tag{21}$$

   -¿
   $$\lim_{x->1} f(x) \tag{22}$$

   NO existe pues los laterales son distintos

2. Sea g(x) =
   $$\begin{cases} 2x & , si\ x >= 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & , si\ x < 3 \end{cases} \tag{23}$$

# 3 Clase 3

# 4 Clase 4

1. $$\lim_{x\to -2} f(x) + 5 \lim_{x->-2} g(x) \tag{24}$$
   $$2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) - 10 = -8 \tag{25}$$
   Finalmente
   $$\lim_{x->2} f(x) = -8 \tag{26}$$

2. $$\frac{\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1 f(x) -} \lim_{x\to 1} g(x)} \tag{27}$$
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 1-} g(x) = 0 \quad \lim_{x\to 1} g(x) \ \mathit{NO\ existe} \\ \lim_{x\to 1+} g(x) = -2 \end{aligned} \tag{28}$$

**Calculo de limites**: Evaluar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\liminf P(x)}{\liminf Q(x)} \tag{29}$$

1. numero ()
2. $$\frac{c+0}{0} = (\pm\infty) \tag{30}$$
3. $$\frac{0}{0} \tag{31}$$
   Factorizar y Calcular (propiedades de limites)

# 5 Clase 5

**Algebra de Limites**: supongamos que

$$\begin{gathered} \lim_{x\to a} f(x) = L1 \ y \\ \lim_{x\to a} g(x) = L2 \ y \ c \ \epsilon \mathcal{R} \end{gathered} \tag{32}$$

1. $$\lim_{x\to a} (f(X) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L1 + L2 \tag{33}$$
2. $$\lim_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x\to a} f(x) = C \cdot L1 \tag{34}$$

3.
$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = L1\cdot L2 \tag{35}$$

4.
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ si\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0 \tag{36}$$

**Ejemplo**

(a)
$$\begin{gathered}\lim_{x\to 2}(3x^2-8)\cdot(\sqrt{3x+3})\\ \lim_{x\to 2}(3x^2-8)\ \ = 4\ y\ \lim_{x\to 2}\sqrt{3x+3}\ \ = 3\end{gathered} \tag{37}$$

Ambos existen. Finalmente L1 · L2 = 3 · 4 = 12

**Veamos**

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{f(x)-g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1+} f(X)}{\lim_{x\to 1+} f(x)-g(x)} = \frac{2}{2-(-2)} = \frac{1}{2} \tag{38}$$

(continua...)

5.
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L_1^n \tag{39}$$

6.
$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \tag{40}$$

7. Si P(x) es un polinomio

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a) \tag{41}$$

8.
$$\lim_{x\to a} C = C \tag{42}$$

**Ahora**:
Suponga que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 6 \tag{43}$$

Calcule:

1.
$$\begin{gathered}\lim_{x\to 0} f(x)\\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)\cdot\frac{x}{x}\ \ = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x\\ = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0} x = 6\cdot 0 = 0\end{gathered} \tag{44}$$

2.
$$
\begin{gathered}
\lim_{x\to 0}\frac{(f(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x})^2 \\
(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x})^2 = 6^2 = 36
\end{gathered} \tag{45}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\sqrt{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \\
= 6\cdot 0 = 0
\end{aligned} \tag{46}
$$

## 5.1 Cambio de variable

$$
\lim_{x\to a} f(g(x)) \tag{47}
$$

Sea $\mathcal{U}$ = g(x)

1. Si x$\to$a $\Longrightarrow \mathcal{U} \to$ g(x) (Nueva Tendencia)
2. $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{\mathcal{U}\to g(x)} f(\mathcal{U}) \tag{48}$$
3. Calcule:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \tag{49}$$
Sea $\mathcal{U} = \sqrt{x+1} \Longleftrightarrow \mathcal{U}$ = x+1 $\Longleftrightarrow$ x = $\mathcal{U}^2$-1
   (a) Si x $\to$ 0 $\Longrightarrow \mathcal{U} \to 1$
   (b)
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{\mathcal{U}\to 1}\frac{\mathcal{U}-1}{\mathcal{U}^2-1} \\
\lim_{\mathcal{U}\to 1}\frac{\mathcal{U}-1}{(\mathcal{U}-1)(\mathcal{U}+1)} \\
\lim_{\mathcal{U}\to 1}\frac{1}{\mathcal{U}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{50}
$$
   Asi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2} \tag{51}$$
4. Calcule
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} \tag{52}$$
Sea: $\mathcal{U} = \sqrt[12]{x} \Longleftrightarrow x = \mathcal{U}^{12}$

## 5.2 Teorema del Sanwich

Sea f(x), g(x) y h(x) funciones tal que: f(x) $\leq$ g(x) $\leq$ h(x), cuando x se acerca a "a" y ademas

$$\begin{gathered}\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x) \\ Entonces,\ \lim_{x \to a} g(x) = L\end{gathered} \tag{53}$$