

MAT1610

fb lazco

August 15, 2024

1 Clase 1

1.1 Fechas evaluaciones

1. I1 lunes 2 de Septiembre (hasta Clase 10). Bloque 7-8
2. I2 Martes 8 de Octubre (hasta Clase 20). Bloque 7-8
3. I3 Lunes 4 de Noviembre (hasta Clase 30). Bloque 7-8
4. Examen Lunes de Diciembre (toda la materia)

1.2 Ponderaciones

NF \equiv Interrogaciones 20% + Lab 10% + Ex 30%

1.3 Limite de Funciones

1. Consideremos esta funcion

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \quad (1)$$

Que ocurre si me acerco a 1?

2. $x \rightarrow 1-$ me acerco por la izquierda
 $x \rightarrow 1+$ me acerco por la derecha
3. si $x \rightarrow 1 \iff f(x) = ?$
4. esto lo podemos escribir como

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad (2)$$

5. tecnicamente: "si x esta muy cerca de 1 entonces f(x) esta muyt cerca de 2"

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1)} = x + 1 \quad (3)$$

6.

$$f(x) = x + 1, x \neq 2 \quad (4)$$

7. Formalmente:

(a) Supongamos que $f(x)$ esta definida para todo x cerca de "a"

(b) Escribiremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (5)$$

Si cuando x se aproxima a "a" entonces $f(x)$ se aproxima a "L"

8. Sea

$$f(x) \equiv (x + 2)^2 + 1, x \leq -1 \quad f(x) \equiv (x + 3), x > -1 \quad (6)$$

Grafique $f(x)$ y concluya el valor de

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad (7)$$

Si me acerco por + se acerca a 2 y si que acerco por - tambien me acerco a 2 (viendolo desde el grafico de la funcion) y eso es igual al grafico de $f(-1)$

9. Sea

$$f(x) \begin{cases} (x + 2)^2 + 1, & x \leq -1 \\ (x + 3), & x > -1 \end{cases} \quad (8)$$

2 Clase 2

2.1 Calculo de Algunos Limites

1.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[2]{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[2]{x} - 3 \cdot (\sqrt[2]{x} + 3)}{x - 9 \cdot (\sqrt[2]{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[2]{x} - 3}{x - 9} \equiv \frac{1}{6} \quad (9)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \equiv 3 \quad (10)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) \equiv 3 \quad (11)$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} = \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{(\sqrt[3]{x} - 3) \cdot (\sqrt[3]{x}^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9)} = \quad (12)$$

5.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{t^2 + 9} - 3}{t^2} \equiv \frac{1}{6} \quad (13)$$

2.2 Limites Laterales

1.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L2 \quad (14)$$

Limite lateral derecho y se da cuando x se acerca a "a" por la derecha

2.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L1 \quad (15)$$

Limite lateral izquierdo y se da cuando x se acerca a "a" por la izquierda

3.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (16)$$

No existe

Teorema

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \equiv \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \quad (17)$$

Obs: Limites laterales distintos implora que el limite no existe

Ejemplo:

1. Para

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \quad (18)$$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (19)$$

$$y = |x-1| \begin{cases} (x-1) & , si \ x \geq 1 \\ -(x-1) & , si \ x < 1 \end{cases} \quad (20)$$

Veamos los limites laterales de f(x)

$$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x-1}{x-1} \equiv 1 \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} -1 \equiv -1 \quad (22)$$

-i

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (23)$$

NO existe pues los laterales son distintos

2. Sea g(x) =

$$\begin{cases} 2x & , si \ x \geq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & , si \ x < 3 \end{cases} \quad (24)$$

3 Clase 3

4 Clase 4

1.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) \quad (25)$$

$$2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) - 10 = -8 \quad (26)$$

Finalmente

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -8 \quad (27)$$

2.

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) &= 0 & \lim_{x \rightarrow 1} g(x) & \text{NO existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) &= -2 \end{aligned} \quad (29)$$

Calculo de limites: Evaluar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\liminf P(x)}{\liminf Q(x)} \quad (30)$$

1. numero ()

2.

$$\frac{c + 0}{0} = (\pm\infty) \quad (31)$$

3.

$$\frac{0}{0} \quad (32)$$

Factorizar y Calcular (propiedades de limites)

5 Clase 5

Algebra de Limites: supongamos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L1 \text{ y} \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= L2 \text{ y } c \in \mathcal{R} \end{aligned} \quad (33)$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L1 + L2 \quad (34)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \cdot L1 \quad (35)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L1 \cdot L2 \quad (36)$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \quad (37)$$

Ejemplo

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 8) \cdot (\sqrt{3x + 3}) \\ \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 8) = 4 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x + 3} = 3 \end{aligned} \quad (38)$$

Ambos existen. Finalmente $L1 \cdot L2 = 3 \cdot 4 = 12$

Veamos

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{f(x) - g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - g(x)} = \frac{2}{2 - (-2)} = \frac{1}{2} \quad (39)$$

(continua...)

5.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n = L_1^n \quad (40)$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \quad (41)$$

7. Si $P(x)$ es un polinomio

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad (42)$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C \quad (43)$$

Ahora:

Suponga que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 6 \quad (44)$$

Calcule:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 6 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \\ \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}\right)^2 &= 6^2 = 36\end{aligned}\tag{46}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \\ &= 6 \cdot 0 = 0\end{aligned}\tag{47}$$

5.1 Cambio de variable

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))\tag{48}$$

Sea $\mathcal{U} = g(x)$

1. Si $x \rightarrow a \implies \mathcal{U} \rightarrow g(x)$ (Nueva Tendencia)

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{\mathcal{U} \rightarrow g(x)} f(\mathcal{U})\tag{49}$$

3. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}\tag{50}$$

$$\text{Sea } \mathcal{U} = \sqrt{x+1} \iff \mathcal{U} = x+1 \iff x = \mathcal{U}^2 - 1$$

(a) Si $x \rightarrow 0 \implies \mathcal{U} \rightarrow 1$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{\mathcal{U} \rightarrow 1} \frac{\mathcal{U} - 1}{\mathcal{U}^2 - 1} \\ &= \lim_{\mathcal{U} \rightarrow 1} \frac{\mathcal{U} - 1}{(\mathcal{U} - 1)(\mathcal{U} + 1)} \\ &= \lim_{\mathcal{U} \rightarrow 1} \frac{1}{\mathcal{U} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{51}$$

Asi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2}\tag{52}$$

4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}\tag{53}$$

$$\text{Sea: } \mathcal{U} = \sqrt[12]{x} \iff x = \mathcal{U}^{12}$$

5.2 Teorema del Sandwich

Sea $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ funciones tal que: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, cuando x se acerca a "a" y ademas

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \\ \textit{Entonces, } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \end{aligned} \tag{54}$$