Ayudantía 10

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Puntos Críticos: Son todos los (x, y) que cumplen:

$$\nabla f(x, y) = 0$$

Matriz Hessiana: Sea (x_0, y_0) un punto crítico de $f(x, y)$. Se define la matriz hessiana:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Llamamos D al determinante de la matriz.

- Si el $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) es mínimo relativo.
- Si el $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) es máximo relativo.
- Si el $D > 0$, (x_0, y_0) es un punto silla.

Teorema Valor Extremo: Si f está acotada por un conjunto D cerrado y acotado, entonces la función alcanza un valor mínimo y máximo absoluto. En estos casos, se calculan los puntos críticos de la función f por si sola y los puntos en la frontera de D.

Método de multiplicadores de Lagrange: Se utiliza cuando hay restricciones del tipo $g(x, y, z) = k \ o \ h(x, y, z) = l$.

Caso 1: Si una función $f(x, y, z)$ está sujeta a una restricción, se debe buscar los puntos que cumplan:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$
$$g(x, y, z) = k$$

Caso 2: Si una función $f(x, y, z)$ está sujeta a dos restricciones, se debe buscar los puntos que cumplan:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$
$$g(x, y, z) = k$$
$$h(x, y, z) = l$$

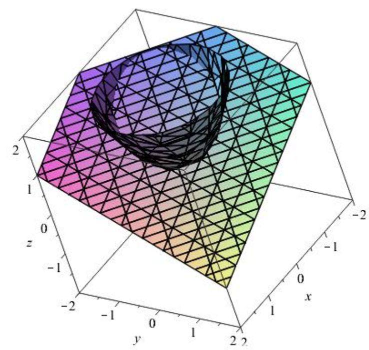
1. Calcule y clasifique los extremos de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + x + y + 1.$$

2. Encuentre los máximos, mínimos locales y puntos sillas de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$$

3. El plano $x + y + 2z = 2$ al cortar el paraboloide $z = x^2 + y^2$ forma una elipse. Calcule los puntos de la elipse que son los más cercanos y los más lejanos al origen.



Ayudantía 6:

4. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que:
   a) Pasa por el punto $(1,0,6)$ y es ortogonal al plano $x + 3y + z = 5$.
   b) Pasa por el punto $(0,1,2)$ que es paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t$.

5. Determine la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(1,-1,1)$ y contiene a la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$.