Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Mat1620 - Cálculo II

Ayudantía 1
integrales impropias

Ayudante: Cristian Cornejo V. (crcornejo@uc.cl)

Problema 1. Calcular las siguientes integrales impropias.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x} cos(x) dx$

Respuesta: *i)* $\frac{9}{2}$, *ii)* $\frac{1}{2}$.

Problema 2. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias.

i) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{x}{ln(x)^4} dx.$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x(x+\sqrt{x})} dx.$

iii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1-x^3)^3} dx.$

[Propuesto.] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(\sqrt[3]{x})}{(|x|+1)x} dx.$

Respuesta: *i)* Diverge, *ii)* Diverge,
iii) Diverge, *vi)* Converge.

Problema 3 Encuentre los valores de r para que las siguientes integrales impropias converjan.

i) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x[ln(x)]^r} dx.$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{r}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+r} dx.$

Respuesta: *i)* $r > 1$, *ii)* $r = \frac{3}{2}$.

Contenidos.

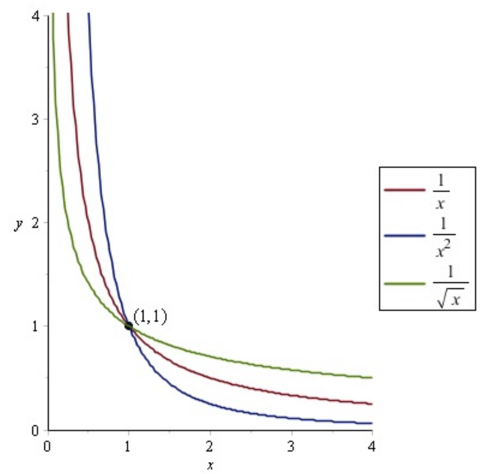
Integrales de comportamiento conocido.

Las siguientes integrales cumplen:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \ : \ \begin{cases} \text{Converge} & si \quad p > 1 \\ \text{Diverge} & si \quad p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \ : \ \begin{cases} \text{Converge} & si \quad p < 1 \\ \text{Diverge} & si \quad p \geq 1 \end{cases}$$

Se puede apreciar que $\frac{1}{x}$ diverge en ambos casos, por lo que puede utilizarse como un punto de referencia para las demás integrales.



Ya sabemos que $\frac{1}{x}$ diverge. Además, si miramos la curva $\frac{1}{x^2}$ podemos notar que en $[1,\infty]$ se acerca mucho más rápido al eje x que $\frac{1}{x}$. Es más, como $p = 2 > 1$, podemos asegurar que la curva converge. Sin embargo, esta misma curva en el intervalo $[0,1]$ pasa por sobre la curva $\frac{1}{x}$, la cual diverge, por lo que se puede concluir que $\frac{1}{x^2}$ también diverge (también se puede apreciar este comportamiento observando que $p = 2 \geq 1$, lo que en el intervalo $[0,1]$ implica divergencia).

Para el caso de la función $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ ocurre algo similar pero al revés, es decir, en el intervalo $[1,\infty]$ diverge y en $[0,1]$ converge. El comportamiento para los demás valores de p sigue siendo el mismo, si para $x \geq 1$ presenta un comportamiento, para $x < 1$ el comportamiento es el contrario (a excepción de $\frac{1}{x}$, que diverge en ambos intervalos).

Lo anterior ocurre debido a que para las curvas de la forma $\frac{1}{x^p}$, cuando $x \to \infty$ mientras mayor es p, menor es el valor de $\frac{1}{x^p}$, es decir, a mayor valor de p, en el infinito la curva tiende a acercarse más al eje x, lo que determina la convergencia. Sin embargo, en el intervalo $[0,1]$ cuando $x \to 0$, a mayor valor de p, x^p es menor, por lo que $\frac{1}{x^p}$ es más grande, lo que explica por qué en la imagen $\frac{1}{x^2}$ es mayor que las otras 2 funciones en ese intervalo.

NOTA: Lo que importa es la ubicación de la asíntota, es decir, los intervalos de análisis podrían haber sido $[0,a]$ y $[a,\infty]$, pero se utilizó $a = 1$ debido a que las funciones pasan por ese punto y se observa mejor el cambio de comportamiento

Más integrales cuyo comportamiento debe conocerse:

$$\int_1^{\infty} e^{-px}dx \ : \begin{cases} \text{Converge} & si \quad p > 0 \\ \text{Diverge} & si \quad p \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx \quad , \int_a^b \frac{1}{(x-b)^p}dx \ : \begin{cases} \text{Converge} & si \quad p < 1 \\ \text{Diverge} & si \quad p \geq 1 \end{cases}$$

Observación: Notemos que para las 2 últimas integrales presentadas, podría utilizarse el cambio de variable $y = x - a$, $y = x - b$ respectivamente, de donde se obtiene,

$$\int_0^{b-a} \frac{1}{(y)^p}dy \quad , \int_{a-b}^{0} \frac{1}{(y)^p}dy$$

Como se sabe que estamos analizando una asíntota vertical, lo correcto sería utilizar los criterios expuestos anteriormente para $\frac{1}{x^p}, \ x \in [0, 1]$.

$$\int_0^{b-a} \frac{1}{(y)^p}dy \quad , \int_{a-b}^{0} \frac{1}{(y)^p}dy \ : \begin{cases} \text{Converge} & si \quad p < 1 \\ \text{Diverge} & si \quad p \geq 1 \end{cases}$$

Criterio de comparación.

Sea $0 \leq f(x) \leq g(x)$, con $f(x)$ y $g(x)$ continuas en su dominio. En las siguientes integrales impropias (Tipo I y II) se cumple:

$$\begin{aligned} \text{Si } \int g(x)\,dx \text{ converge } &\Longrightarrow \int f(x)\,dx \text{ converge.} \\ \text{Si } \int f(x)\,dx \text{ diverge } &\Longrightarrow \int g(x)\,dx \text{ diverge.} \end{aligned}$$

Criterio + idea de límite

Sean $f(x), g(x) \geq 0$ en su dominio y sea $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, luego, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \ M > 0 :$
$x > M \to |\frac{f(x)}{g(x)} - L| < \epsilon$. De donde se puede obtener que para x suficientemente grande,

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$$

$$g(x)\frac{L}{2} < f(x) < g(x)\frac{3L}{2}$$

Por lo que su comportamiento es el mismo.

$$L \neq 0 \Longrightarrow \int f(x)\,dx \text{ converge/diverge} \iff \int g(x)\,dx \text{ converge/diverge}$$

Datos importantes

i) Suma y ponderación de integrales convergentes, es convergente, es decir, si $\int f(x)\,dx$ y $\int g(x)\,dx$ son convergentes, entonces,

$$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\,dx \text{ es convergente.}$$

ii) En integrales tipo I la **condición necesaria** para convergencia está dada por,

$$\text{Si } \int f(x)\,dx \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

iii) Para $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ basta considerar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge } \iff (\forall a \in \mathbb{R}) \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ y } \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \text{ convergen.}$$

iv) Para todas las implicancias de los criterios, es posible ocupar el contrarrecíproco lógico, esto es,

$$p \Rightarrow q \iff \neg q \Rightarrow \neg p.$$

Ejemplo:

$$\text{Si } \underbrace{\int f(x)\,dx \text{ converge}}_{p} \to \underbrace{\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0}_{q} \iff \text{Si } \underbrace{\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) \neq 0}_{\neg q} \to \underbrace{\int f(x)\,dx \text{ diverge.}}_{\neg p}$$

Solución

Problema 1. Calcular las siguientes integrales impropias.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{a\to 0^-}\int_{-1}^{a} x^{-\frac{1}{3}}dx + \lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{8} x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{a\to 0^-}\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - -1^{\frac{2}{3}}\right) + \lim_{a\to 0^+}\frac{3}{2}\left(8^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right).$

Al aplicar el límite se obtiene como resultado $\frac{9}{2}$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}cos(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}cos(x)dx &= sen(x)e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\ sen(x)\ dx \\ &= sen(x)e^{-x}\Big|_0^\infty + \overbrace{-cos(x)e^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}cos(x)\ dx}\end{aligned}$$

Al evaluar los 2 primeros términos en los límites correspondientes y despejar la integral se obtiene,

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty e^{-x}cos(x)dx &= 1 \\ \int_0^\infty e^{-x}cos(x)dx &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Problema 2. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias.

i) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{x}{ln(x)^4}dx.$

Cómo no tenemos criterios para $\ln(x)$ lo mejor en este caso es tratar de que desaparezca por medio de integración por parte o sustitución. Al integrarlo por partes, si se elige derivar el logaritmo se obtendrá la función $\frac{1}{x}$. En este caso, esa opción se descartará debido a que el logaritmo se encuentra en el denominador.

Realizando la sustitución $u = \ln x$,

$$\int_2^\infty \frac{x}{\ln x^4}\ dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{e^{2u}}{u^4}\ du.$$

Como es una integral de tipo I, veremos si cumple la condición necesaria de convergencia, esto es,

$$\text{si} \int f(x)\ dx \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

En este caso,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2u}}{u^4} \neq 0 \Longrightarrow \text{ La integral diverge.}$$

Observación: Como la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio cuando $x \to \infty$, el límite da como resultado ∞ (el límite no existe).

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x(x+\sqrt{x})}dx.$

En primer lugar, es necesario notar es una integral ”tipo III” (I y II en una misma integral) y que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x(x+\sqrt{x})}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+x^{\frac{3}{2}}}dx.$$

Primero se analizará el límite en el infinito y luego en el origen.

Cuando $x \to \infty$, $\dfrac{1}{x^2+x^{\frac{3}{2}}} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Además, sabemos que $\dfrac{1}{x^2}$ converge, por lo tanto, por criterio de comparación, en infinito, la integral converge.

Ahora, cuando $x \to 0$,

$$\begin{aligned} x^{\frac{3}{2}} &\geq x^2 \\ 2x^{\frac{3}{2}} &\geq x^{\frac{3}{2}} + x^2 \\ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^2} &\geq \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Luego, cuando $x \to 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx}_{\text{Diverge}}$$

Finalmente, por (*) se deduce que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+x^{\frac{3}{2}}}dx$ diverge cuando $x \to 0$.

Como la integral diverge hacia uno de sus extremos, se concluye que diverge.

iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x^3)^3}dx.$

Para este problema, es útil recordar que $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, luego la integral queda

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^3(1+x+x^2)^3}$$

Al escribirla de este forma, se puede apreciar que una buena función para comparar podría ser $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

Realizando la comparación,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{(1-x)^3(1+x+x^2)^3}}{\frac{1}{(1-x)^3}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}.$$

Luego, ambas funciones presentan igual comportamiento.

Por último, sabemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^3}\ dx \quad \text{diverge, por lo que} \quad \int_0^1 \frac{1}{(1-x^3)^3(1+x+x^2)^3}\ dx \text{ también lo hace.}$$

Otra forma de llegar a este resultado hubiese sido notar que el factor $(1+x+x^2)^3$ no genera discontinuidades en el intervalo de análisis y que su valor máximo en el intervalo de estudio corresponde a 27, cuando $x=1$, por lo que se puede acotar la función de la siguiente manera.

Para $x\in[0,1]$

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x+x^2)^3} > \frac{1}{(1-x)^3\cdot 28}$$

Por lo que basta con analizar la integral impropia

$$\frac{1}{28}\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^3}\ dx$$

cuya divergencia es conocida, por lo que se concluye, por criterio de comparación, que

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x^3)^3(1+x+x^2)^3}\ dx \quad \text{diverge.}$$

Problema 3 Encuentre los valores de r para que las siguientes integrales impropias converjan.

i) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x[ln(x)]^r}dx.$

En esta integral, nuevamente aparece un logaritmo en el divisor, y además se aprecia una sustitución sencilla, ya que se puede ver una función y su derivada dentro de la integral. La sustitución que haremos será $u = \ln x$.
Reemplazando se obtiene.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x[ln(x)]^r}\ dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{u^r}dx.$$

Esta última integral es conocida,

$$\int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{u^r}\ du\ :\ \begin{cases} \text{Converge} & si \quad r > 1 \\ \text{Diverge} & si \quad r \leq 1 \end{cases}$$

ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{r}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+r}dx.$

En este caso lo primero que debemos notar es que, como los denominadores no pueden ser 0, no hay presencia de asíntotas verticales dentro del rango de integración, por lo que la integral es de tipo I. Además, es relativamente sencillo determinar que cada fracción del argumento de la integral diverge por si sola, pero aún así no podemos saber nada sobre su resta, por lo que procederemos a restar ambas fracciones.

$$\int_0^\infty \frac{r}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+r}\ dx = \int_0^\infty \frac{(2r-3)x^2 - 3x + r^2}{2x^3+2x^2+rx+r}\ dx$$

Notemos que cuando $x \to \infty$ el argumento de la integral es similar a $\dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$, por lo que compararemos con esta función, teniendo en mente la idea de límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(2r-3)x^2-3x+r^2}{2x^3+2x^2+rx+r}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2r-3)xs - 3x^2 + r^2x}{2x^3+2x^2+rx+r} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{2r-3}{2}$$

Sabemos que si el valor del límite es distinto de cero, las integrales de ambas funciones poseen el mismo comportamiento, en este caso, divergen.

Se tiene que el valor del límite será distinto de cero si

$$\frac{2r-3}{2} \neq 0 \leftrightarrow 2r - 3 \neq 0 \leftrightarrow r \neq \frac{3}{2}.$$

Ahora, como sabemos que si $r \neq \frac{3}{2}$ la integral diverge, de todos los posibles valores de $r \in \mathbb{R}$ solo queda uno por probar, que es $r = \frac{3}{2}$.

Notemos que si $r = \frac{3}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{r}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+r}\ dx = \int_0^\infty \frac{\cancel{(2r-3)}^0 x^2 - 3x + r^2}{2x^3+2x^2+rx+r}\ dx$$

La integral obtenida es similar a $\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ cuando $x \to \infty$, por lo que comparamos por criterio de paso al límite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3x+r^2}{2x^3+2x^2+rx+r}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^3+r^2x^2}{2x^3+2x^2+rx+r} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{-3}{2}.$$

Como en este caso el límite es -3/2, las integrales de ambas funciones poseen el mismo carácter, por lo tanto,

$$\text{Como} \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \ \text{ converge } \implies \int_0^\infty \frac{r}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+r}\,dx \ \text{ converge cuando } \ r = \frac{3}{2}.$$