Ayudantía 14

Calculo II - MAT1620

Teorema de Fubini para Integrales Triples:
Si f es continua en el cuadro rectangular $R = [a, b]x[c, d]x[r, s]$, entoces

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

Funciona también, cambiar los límites de integración.

Integrales triples en regiones generales: Sea una región
$E = \{(x,y,z)|c \leq y \leq d, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$, entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

En español, para saber cuáles son los primeros límites de integración, es ver cuál es el piso y cuál es el techo de la región E (son superficies, por ejemplo, planos, paraboloides, etc). Luego para saber los segundos y terceros límites de integración, es ver en este caso la proyección de la región en el plano (x,y), es decir, tratar como si fuera una integral doble.

Coordenadas Cilíndricas: Dada una función f continua y la región
$E = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$, donde D es la región que se forma al proyectar la región E en el plano (x,y) y puede describirse fácilmente en coordenadas polares. Haciendo la transformación: $x = rcos\theta, y = rsen\theta, z = z$ queda

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(rcos\theta,rsen\theta)}^{u_2(rcos\theta,rsen\theta)} rf(rcos\theta, rsen\theta, z)dzdrd\theta$$

Coordenadas Esféricas: Dada una función f continua, utilizando la transformación:
$x = rcos\theta sen\varphi, y = rsen\theta sen\varphi, z = rcos\varphi$ queda

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b r^2 sen\varphi f(rcos\theta sen\varphi, rsen\theta sen\varphi, rcos\varphi)drd\theta d\varphi$$

Donde $E = \{(r,\theta,\varphi)|\ a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d\}$ y $|d - c| \leq \pi$. Esta transformación se utiliza generalmente a regiones cónicas y esféricas. Además puede pasar también que r este acotada por términos que dependan de los angulos.

1. Exprese y calcule la integral dada como la integral iterada indicada.

   a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dzdydx, \iiint_D \ dydxdz$
   b) $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y dzdxdy \, , \iiint_D \ dxdydz$

2. Evalué la integral

$$\iiint_R x^2 dV$$

   Donde R es el solido que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arribla del plano $z = 0$ y debajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

3. Encuentre el volumen del solido que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y arriba del plano xy y debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Encuentre el centro de masa de una semiesfera solida de radio a cuya densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el centro de la base

5. Encuentre el volumen del solido arriba del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y debajo del semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.