Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2025

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación 3

1. Dada la función

$$f(x,y) = x^3 - xy + y^2$$

(a) Demuestre que $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ es un mínimo local de la función f.

Solución:

Se observa que $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ es un punto crítico de f ya que

como $f_x(x,y) = 3x^2 - y$, se tiene que $f_x\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 0$ y como $f_y(x,y) = -x + 2y$

se tiene que $f_y\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 0$.

Por otro lado se tiene que $D\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) > 0$, donde $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$ y que $f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) > 0$, donde $f_{xx} = 6x$, por lo que por la prueba de la segunda derivada se concluye que $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ es un mínimo local de la función f.

Criterio de corrección:

- (0.1 pto) por $f_x\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 0$ y $f_x\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 0$
- (0.1 pto) por $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$
- (0.1 pto) por $D\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) > 0$
- (0.1 pto) por $f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) > 0$

(b) Determine todos los puntos máximos y mínimos globales de f definida sobre la región $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

NOTA: Algunos de estos dados podrían ser útiles

- $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \approx 0.62$
- $f(1, \frac{1}{2}) \approx 0.75$
- $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \approx 0.19$
- $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) \approx 0$
- $f(\frac{1}{2}, 1) \approx 0.63$
- $f(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 1.91$
- $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \approx 1.38$
- $f(1, \frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 0.76$
- $f(0, \frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 0.33$
- $f(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 0.33$
- $f(1, -\frac{1}{2}) \approx 1.75$
- $f(-\frac{1}{2}, 1) \approx 1.38$

Solución:

Del sistema con ecuaciones $f_x = 3x^2 - y = 0$ y $f_y = -x + 2y = 0$ obtenemos dos puntos críticos, $\boxed{(0,0)}$ y $\boxed{\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)}$, los cuales ambos pertenecen a la región$\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$

Veamos ahora los puntos crítios de la frontera de $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$.

- Si $x = 1$ con $0 \leq y \leq 1$ tenemos que $f(1,y) = g(y) = 1 - y + y^2$. Luego como $g'(y) = -1 + 2y = 0$ si $y = \frac{1}{2}$, entones $\boxed{(1, \frac{1}{2})}$ es un punto crítico en ese segmento. Agregamos los puntos extremos, estos son cuando $y = 0$ e $y = 1$: $\boxed{(1,0)}$ y $\boxed{(1,1)}$

- Si $x = 0$ con $0 \leq y \leq 1$ tenemos que $f(0,y) = g(y) = y^2$. Luego como $g'(y) = 2y = 0$ si $y = 0$, entones $(0,0)$ es un punto crítico en ese segmento. Agregamos los puntos extremos, esto son cuando $y = 0$ e $y = 1$: $\boxed{(0,0)}$ y $\boxed{(0,1)}$

- Si $y = 0$ con $0 \leq x \leq 1$ tenemos que $f(x,0) = g(x) = x^3$. Luego como $g'(x) = 3x^2 = 0$ si $x = 0$, entones $(0,0)$ es un punto crítico en ese segmento. Agregamos los puntos extremos, esto son cuando $x = 0$ y $x = 1$: $\boxed{(0,0)}$ y $\boxed{(1,0)}$

- Si $y = 1$ con $0 \leq x \leq 1$ tenemos que $f(x,1) = g(x) = x^3 - x + 1$. Luego como $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ si $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces $\boxed{(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)}$ y $\boxed{(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)}$ son puntos críticos en ese segmento. Agregamos los puntos extremos, esto son cuando $x = 0$ e $x = 1$: $\boxed{(0,1)}$ y $\boxed{(1,1)}$

Juntando todos los puntos críticos, finalmente obtenemos que todos ellos son

- $(0,0)$
- $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$
- $(1, \frac{1}{2})$
- $(1,0)$
- $(1,1)$
- $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$
- $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$
- $(0,1)$

Como la función es continua en la región
$\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$, que es un conjunto cerrado y acotado, el teorema de valor extremo nos garantiza que f alcanza máximos y mínimos absolutos, por lo que solo basta mirar las imágenes de todos sus puntos. Estos son:

- $f(0,0) = 0$
- $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \approx 0$
- $f(1, \frac{1}{2}) \approx 0.75$
- $f(1,0) = 1$
- $f(1,1) = 1$
- $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \approx 0.62$

- $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \approx 1.38$
- $f(0,1) = 1$

Por lo que se alcanza un mínimo absoluto en $(0,0)$ y máximo absoluto en los puntos $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

NOTA: Observar que $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \approx 0$, no es cero, por lo que no es absoluto. Pero si el alumno lo incluye como absoluto, considerarlo bueno.

Criterio de corrección:

- (0.1 pto) por encontrar puntos críticos del interior de la región.
- (0.2 pto) por encontrar puntos críticos en uno de los segmentos de la región.
- (0.2 pto) por encontrar puntos críticos en otro de los segmentos de la región.
- (0.2 pto) por encontrar puntos críticos en otro de los segmentos de la región.
- (0.2 pto) por encontrar puntos críticos en otro de los segmentos de la región.
- (0.1)por determinar los mínimos absolutos usando el teorema
- (0.1)por determinar los máximos absolutos usando el teorema

2. Encuentre los valores máximos y mínimos de $f(x,y,z) = xyz$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Solución:

Se tiene que $\nabla f = (yz, xz, xy)$ y que $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ donde $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Luego usando el método de Lagrange, debemos encontrar los puntos (x,y,z) tal que $\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g$ para algún λ. con $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Es decir debemos resolver el sistema

$$\begin{align} yz &= \lambda 2x \tag{1}\\ xz &= \lambda 2y \tag{2}\\ xy &= \lambda 2z \tag{3}\\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \tag{4}\end{align}$$

Multiplicando ecuación (1) por x, ecuación (2) por y y ecuación (3) por z obtenemos

$$\begin{align} xyz &= \lambda 2x^2 \tag{5}\\ xyz &= \lambda 2y^2 \tag{6}\\ xyz &= \lambda 2z^2 \tag{7}\\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \tag{8}\end{align}$$

luego se obtienes que $3xyz = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$,. Como $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, se obtienes que $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}xyz}$

- Si $xyz \neq 0$, entonces reemplazando en ecuaciones $(5), (6)$ y (7) obtenemos que $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, $z = -1$ o $z = 1$. Con esta información podemos obtener los puntos que satisfacen el sistema.
  - $(1,1,1)$, $f(1,1,1) = 1$
  - $(-1,1,1)$, $f(-1,1,1) = -1$
  - $(1,-1,1)$, $f(1,-1,1) = -1$

- $(1,1,-1)$, $f(1,1,-1) = -1$
- $(-1,-1,1)$, $f(-1,-1,1) = 1$
- $(1,-1,-1)$, $f(1,-1,-1) = 1$
- $(-1,1,-1)$, $f(-1,1,-1) = 1$
- $(-1,-1,-1)$, $f(-1,-1,-1) = -1$

Notar que si, por ejemplo $x = 1$ y que y y z sean distintos de 1 o -1, luego como $f(x,y,z) = yz$ y como $y^2 + z^2 = 2$, se obtiene que $-1 < yz < 1$ por lo que estos puntos críticos no serán max o min. (mismo cosa otros casos)

- Si $xyz = 0$, significa que $x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$, en cuyo caso $f(x,y,z) = 0$, que no será max o minimos ya que las imagenes de los otros puntos son 1 o -1.

Por lo que los valores máximos y mínimos de $f(x,y,z) = xyz$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ son

- $f(1,1,1) = 1$ max
- $(-1,1,1)$, $f(-1,1,1) = -1$, min
- $(1,-1,1)$, $f(1,-1,1) = -1$, min
- $(1,1,-1)$, $f(1,1,-1) = -1$, min
- $(-1,-1,1)$, $f(-1,-1,1) = 1$, max
- $(1,-1,-1)$, $f(1,-1,-1) = 1$, max
- $(-1,1,-1)$, $f(-1,1,-1) = 1$, max
- $(-1,-1,-1)$, $f(-1,-1,-1) = -1$, min

Criterio de corrección:

- (0.2 pto) por $\nabla f = (yz, xz, xy)$
- (0.2 pto) por $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$
- (0.2 pto) por sistema con las 4 ecuaciones de Lagrange.
- (0.3 pto) por análisis en encontrar las soluciones del sistema.
- (0.2 pto) por evaluar los puntos críticos.
- (0.2)por determinar los mínimos
- (0.2)por determinar los máximos

3. (a) Calcule la siguiente integral $\displaystyle\int_0^3 \int_{2x}^6 \sqrt{y^2+2}\,dydx$, cambiando primero el orden de integración.

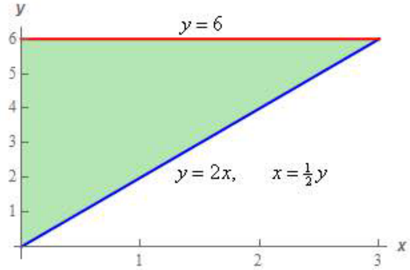
   (b) Use integrales dobles para calcular el volumen del sólido que está bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, arriba del plazo $z = 0$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 5$.
   Nota: Puede dejar indicados sus cálculos finales.

Solución:

(a) Notar que de los límites de integración tenemos que:

$$0 \le x \le 3$$
$$2x \le y \le 6$$

Cuya región es:



De lo anterior tenemos:

$$0 \leq y \leq 6$$
$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}y$$

Y por lo tanto al cambiar el orden de integración tendriamos:

$$\int_0^3 \int_{2x}^6 \sqrt{y^2+2}dydx = \int_0^6 \int_0^{\frac{1}{2}y} \sqrt{y^2+2}dxdy$$

Ahora calculando tenemos:

$$\int_0^3 \int_{2x}^6 \sqrt{y^2+2}dydx = \int_0^6 \left(x\sqrt{y^2+2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}y} dy = \int_0^6 \frac{1}{2}y\sqrt{y^2+2}dy = \left(\frac{1}{6}\left(y^2+2\right)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^6 = \frac{1}{6}\left(38^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)$$

Criterio de corrección:

- (0.2 punto) por identificar la dependencia inicial de las variables x e y.
- (0.1 punto) Por reescribir la nueva dependecia de la variables.
- (0.2 punto) por intercambiar el orden de integración correctamente.
- (0.2 punto) por calcular las antiderivadas correctamente.
- (0.1 punto) por el cálculo final (puede quedar indicado)

(b) Dado que lal región que nos interesa es la parte superior de la esfera tendriamos que: $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ y por otro lado la región sobre la cual integraremos será el disco: $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 5\}$ esto debido cilindro.
De este modo el volumen del cilindro será:

$$V = \iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}dA$$

Usando coordenadas polares tenemos que: $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$ con

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq r \leq \sqrt{5}$$

Por lo tanto el cálculo del volumen será:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} r\sqrt{9-r^2}drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\left(9-r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{5}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{19}{3}d\theta \\ &= \frac{38\pi}{3} \end{aligned}$$

Criterio de corrección:

- (0.2 punto) por plantear la integral que calcula el volumen.
- (0.2 punto) por realizar el cambio de coordenadas correctamentte.
- (0.2 punto) por calcular las antiderivadas correctamente.
- (0.1 punto) por el cálculo final (puede quedar indicado)

4. (a) Evalue la integral $\iiint_E 3-4x dV$ donde E es la región bajo $z=4-xy$ y arriba de la región del plano xy definida por $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$.

   (b) Use coordenadas esféricas para evaluar la integral $\iiint_E 16z dV$ donde E es la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

   Nota: Puede dejar indicados sus cálculos finales.

Solución:

(a) Notar que de las condiciones del problema:

$$0\le z\le 4-xy$$

y por tanto nuestra integral triple es:

$$\iiint_E 3-4xdV=\iint_D\left[\int_0^{4-xy}3-4xdz\right]dA$$

Con $D=\{(x,y):0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1.\}$.

Luego tendríamos:

$$\iiint_E 3-4xdV=\int_0^2\int_0^1\int_0^{4-xy}3-4xdzdydx$$

Calculando:

$$\begin{aligned}
\iiint_E 3-4xdV &= \int_0^2\int_0^1(3-4x)z\Big|_0^{4-xy}dydx\\
&=\int_0^2\int_0^1(3-4x)(4-xy)dydx\\
&=\int_0^2\int_0^1 4x^2y-3xy-16x+12dydx\\
&=\int_0^2\left(2x^2y^2-\frac{3}{2}xy^2-16xy+12y\right)\Big|_0^1dx\\
&=\int_0^2 12-\frac{35}{2}x+2x^2dx\\
&=\left(12x-\frac{35}{4}x^2+\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2\\
&=\left(12(2)-\frac{35}{4}(4)+\frac{2}{3}(8)\right)=-\frac{17}{3}
\end{aligned}$$

Criterio de corrección:

- (0.1 punto) por escribir entre que valores de mueve z.
- (0.2 punto) por plantear la integral triple con todos sus límites.
- (0.2 punto) por calcular las antiderivadas correctamente.
- (0.2 punto) por el cálculo final (puede quedar indicado)

(b) Dado que la región sobre la cual integramos es la mitad superior de la esfera tenemos que:

$$0\le\rho\le 1$$
$$0\le\theta\le 2\pi$$
$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

Así la integral a calcular será:

$$
\begin{aligned}
\iiint_E 16z dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi (16\rho\cos\varphi) d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 8\rho^3 \sin(2\varphi) d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2\sin(2\varphi) d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\pi \sin(2\varphi) d\varphi \\
&= -\, 2\pi \cos(2\varphi)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

Criterio de corrección:

- (0.1 punto) por escribir entre que valores de mueve ρ.
- (0.1 punto) por escribir entre que valores de mueve θ.
- (0.1 punto) por escribir entre que valores de mueve φ.
- (0.2 punto) por plantear la integral triple con todos sus límites.
- (0.2 punto) por calcular las antiderivadas correctamente.
- (0.1 punto) por el cálculo final (puede quedar indicado)