FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 12

Calculo II - MAT1620

Coordenadas Esféricas: Dada una función f continua, utilizando la transformación: $x = rcos\theta sen\varphi, y = rsen\theta sen\varphi, z = rcos\varphi$ queda

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b r^2 sen\varphi f(rcos\theta sen\varphi, rsen\theta sen\varphi, rcos\varphi)drd\theta d\varphi$$

Donde $E = \{(r,\theta,\varphi)|\ a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d\}$ y $|d-c| \leq \pi$. Esta transformación se utiliza generalmente a regiones cónicas y esféricas. Además puede pasar también que r este acotada por términos que dependan de los ángulos.

Jacobiano: Dada una transformación T en que $x = g(u,v)$ y $y = h(u,v)$ o en que $x = g(u,v,w), y = h(u,v,w)$ y $z = (u,v,w)$ el jacobiano es

$$Jacobiano = J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Cambio de variables en una Integral Doble: dado un cambio de variable en que $x = g(u,v)$ y $y = h(u,v)$. Al integran en una región R se tiene

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f\big(g(u,v),h(u,v)\big) * J * dudv$$

Cambio de variables en una Integral Triple: dado un cambio de variable en que $x = g(u,v,w)$ y $y = h(u,v,w)$ y $z = k(u,v,w)$. Al integran en una región R se tiene

$$\iiint_R f(x,y)dA = \iiint_S f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w)) * J * dudv\, dw$$

1. Encuentre el volumen del solido determinado por
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$
Donde $a > 0$ es una constante arbitraria

2. Encuentre el volumen del solido que se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

3. Encuentre el volumen del solido limitado por la superficie $2z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 3, z \geq 0$.

4. Calcule la siguiente integral usando un cambio de variable adecuado.
$$\iint_D \cos(x - y)\, sen(x + y) dA$$
Siendo S el triangulo con vertices $(0,0), (\pi, -\pi), (\pi, \pi)$.

5. Evalúe
$$\iint_D \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$$
Donde R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$.

6. Calcule
$$\iint_D \frac{ye^y}{(x + y)^2} dA$$
Donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, x \leq y \leq 1, y \geq \frac{1}{2} - x$.
[*Sugerencia*: Considere $x + y = u, y = uv$].

7. **Propuesto.** Evalúe
$$\iiint_R z dV$$
Donde R se localiza arriba del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y debajo del plano $z = 2y$.

8. **Propuesto.** Calcule el volumen de la parte común de los siguientes elipsoides
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - c)^2}{c^2} = 1$$
[*Sugerencia*: Haga un cambio de variable que ayude a formar un sólido más simple].