Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
30/Enero/2020

MAT 1620 - Cálculo II.
Interrogación 3.
Solución.

1. Sea $a > 0$. Calcule el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad az = 2a^2 + x^2 + y^2,$$

y el plano $z = 0$.

Solución

El dominio de integración, donde yace el volumen limitado por las superficies, es:

$$D = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

luego el volumen está dado por

$$V = \int\int (2a + \frac{1}{a}(x^2 + y^2))\, dA$$

haciendo el cambio de variables a polares, se tiene

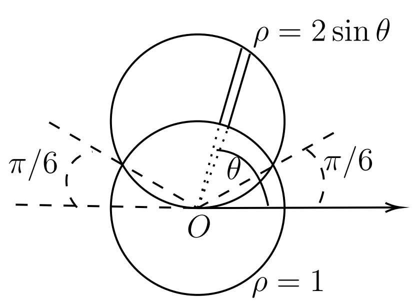
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a (2a + \frac{1}{a}\rho^2)\, \rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi(2a \int_0^a \rho\, d\rho + \frac{1}{a}\int_0^a \rho^3\, d\rho$$

$$= 2\pi(a\rho^2\Big|_0^a + \frac{1}{a}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a) = 2\pi(a^3 + \frac{1}{4}a^3) = \frac{5}{2}a^3.$$

2. Sea D la región del plano que se encuentra dentro del círculo de ecuación $x^2+y^2 = 2y$ pero fuera de $x^2 + y^2 = 1$. Calcule

$$\int\int_D \frac{dA}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Solución



Haciendo el cambio de variables a polares la región D en el plano polar está dado por:

$$D: \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},\ 1 \leq \rho \leq 2\operatorname{sen}\theta$$

asi:

$$\int\int_D \frac{dA}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^{2\operatorname{sen}\theta} \frac{1}{\rho}\,\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2\operatorname{sen}\theta - 1)\, d\theta$$

$$= (-2\cos\theta - \theta)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} = -(2\cos 5\pi/6 + 5\pi/6 - (2\cos\pi/6 + \pi/6)) = 2(\sqrt{3} - \pi/3).$$

También se puede calcular en este caso usando el concepto de simetría, es decir

$$\int\int_D \frac{dA}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_1^{2\operatorname{sen}\theta} \frac{1}{\rho}\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

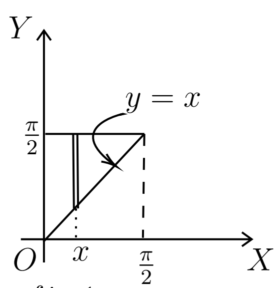
3. Evalúe la siguiente integral

$$\int_0^{\pi/2}\int_x^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{y}\, dy\, dx.$$

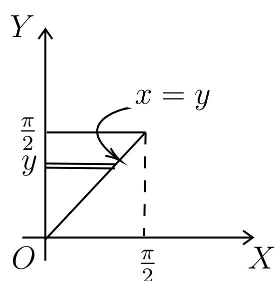
Sugerencia: Cambie el orden de integración.

Solución

Notemos que el dominio de integración es $D:\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ y cuyo gráfico en la dirección $dy\,dx$ se indica en fig 1. Al efectuar el cambio de direccción a $dx\,dy$ fig 2, se tiene



$fig\ 1$



$fig\ 2$

$$\int_0^{\pi/2}\int_x^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{y}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{y} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{y}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{y}\, x\Big|_0^y\, dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 y\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2y)}{2}\, dy = \frac{1}{2}(y\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2y)\Big|_0^{\pi/2}) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{4}$$

4. Calcule la integral

$$\int\int_D x^2\, dA.$$

Siendo D la región limitada por las curvas,

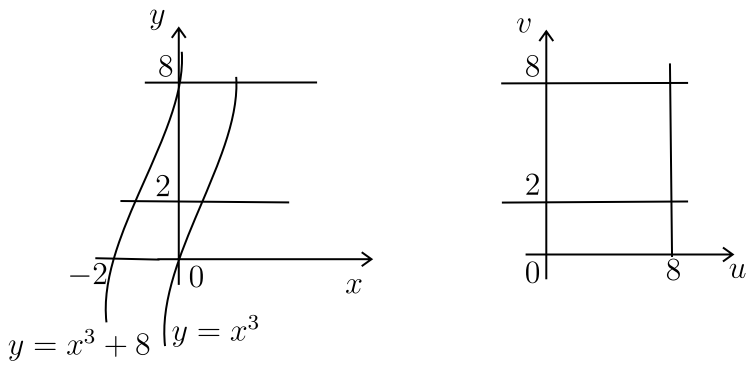
$$y = 2,\ y = 8, \quad y = x^3,\ y = x^3 + 8$$

Solución

<u>Primera forma</u>

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} u = y - x^3 \\ v = y \end{cases}, \quad J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} -3x^2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x^2$$



luego:

$$\begin{cases} y = x^3 \Rightarrow y - x^3 = 0 \Rightarrow u = 0 \\ y = x^3 + 8 \Rightarrow y - x^3 = 8 \Rightarrow u = 8 \\ y = 2 \Rightarrow v = 2, \quad y = 8 \Rightarrow v = 8 \end{cases}$$

entonces

$$\int\int_D x^2\, dA = \int_0^8 \int_2^8 x^2 \left| -\frac{1}{3x^2} \right| dv\, du = \frac{1}{3} \int_0^8 v\Big|_2^8 du = 2\int_0^8 du = 16$$

<u>Segunda forma</u>

Sin cambio de variables, integrando en la dirección $dA = dx\, dy$ resulta

$$\int\int_D x^2\, dA = \int_2^8 \int_{(y-8)^{1/3}}^{y^{1/3}} x^2\, dx\, dy = \int_2^8 \frac{x^3}{3}\Big|_{(y-8)^{1/3}}^{y^{1/3}} dy = \frac{1}{3}\int_2^8 [y - (y-8)]\, dy = \frac{8}{3}(8-2) = 16$$

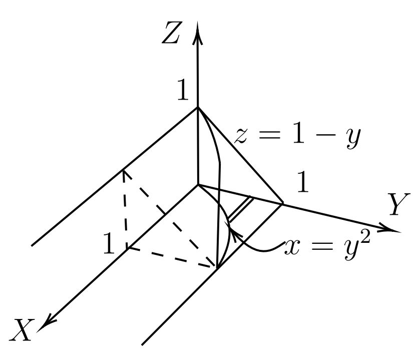
5. Calcule la integral,

$$\int\int\int_D y\, dV,$$

siendo D la región limitada por

$$z = 0,\ x = 0, \quad z = 1 - y,\ y = \sqrt{x}.$$

Solución



Primera forma

Considerando la figura se tiene:

$$\int\int\int_D y\,dV = \int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y} y\,dz\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{y^2} y\,z\Big|_0^{1-y} dx\,dy$$
$$= \int_0^1\int_0^{y^2} y(1-y)\,dx\,dy = \int_0^1 y(1-y)x\Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 y(1-y)y^2\,dy$$
$$= \int_0^1 (y^3-y^4)\,dy = (\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5})\Big|_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

Segunda forma

Cambiando la dirección de integración y también de la figura se tiene:

$$\int\int\int_D y\,dV = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y} y\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 y\,z\Big|_0^{1-y} dy\,dx$$
$$= \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 y(1-y)\,dy\,dx = \int_0^1 (\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3})\Big|_{\sqrt{x}}^1 dx = \int_0^1 (\frac{1}{6}-\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{3})\,dx$$
$$= (\frac{x}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{2x^{5/2}}{15})\Big|_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{2}{15} = \frac{1}{20}.$$

Observemos que también dan el mismo resultado en las direcciones:

$$dx\,dy\,dz;\ dx\,dz\,dy;\ dy\,dz\,dx;\ dy\,dx\,dz$$

es decir los integrales

$$\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{y^2} y\,dx\,dy\,dz; \quad \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y^2} y\,dx\,dz\,dy; \quad \int_0^1\int_0^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} y\,dy\,dz\,dx$$
$$\int_0^1\int_0^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} y\,dy\,dx\,dz.$$