PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

Examen - MAT1620

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$, determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{b^k}(x-a)^k.$$

Solución:

Si $a_k = \dfrac{k}{b^k}(x-a)^k$, tendremos que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{bk}|x-a| = \frac{|x-a|}{b}$$

por lo tanto la serie converge cuando $|x-a| < b$ y diverge cuando $|x-a| > b$.

Revisaremos ahora los extremos del intervalo. Si $x = a+b$, debemos estudiar la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} k$ que diverge ya que los términos se van a infinito. Si $x = a-b$ entonces debemos estudiar la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$ que también diverge ya que los términos de la suma no convergen a cero.

Por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie es $(a-b, a+b)$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar el cociente de términos consecutivos.
- (1 punto) Por calcular el límite correctamente.
- (1 punto) Por determinar que el radio de convergencia es b.
- (1 punto) Por estudiar cuando $x = a+b$.
- (1 punto) Por estudiar cuando $x = a-b$.
- (1 punto) por concluir el intervalo de convergencia.

2. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) ¿Es f continua en $(0,0)$?

Solución:

Observe que al considerar acercarse al origen por la trayectoria $x=y^2$ obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^8y^4}{(y^4+y^4)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{y^{12}}{8y^{12}}=\frac{1}{8}\neq f(0,0)$$

por lo tanto f no es continua en $(0,0)$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar una trayectoria donde el límite es distinto de cero.
- (1 punto) Por determinar correctamente el límite.
- (1 punto) Por concluir que no es continua.

b) ¿Existe $f_x(0,0)$?

Solución:

Por definición tenemos que

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

por lo tanto $f_x(0,0)=0$.

Distribución de puntajes:

- (2 punto) Por plantear correctamente la definición.
- (1 punto) Por calcular correctamente el valor.

3. a) Si $\quad w=f\left(\dfrac{y-x}{xy},\dfrac{z-y}{yz}\right)$ con f diferenciable en $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, demuestre que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x}+y^2\frac{\partial w}{\partial y}+z^2\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Solución:

Si $u=\dfrac{y-x}{xy}$ y $v=\dfrac{z-y}{yz}$ tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{z^2}$$

de esta forma

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} = x^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial w}{\partial u}$$

$$y^2\frac{\partial w}{\partial y} = y^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$z^2\frac{\partial w}{\partial z} = z^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial w}{\partial v}$$

reemplazando tenemos que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) Por determinar $\dfrac{\partial w}{\partial x}$.
- (0.5 puntos) Por determinar $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.
- (0.5 puntos) Por determinar $\dfrac{\partial w}{\partial z}$.
- (1.5 puntos) Por concluir.

b) Determine los máximos y mínimos locales y puntos sillas de la función $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$.
Solución:

Buscamos los puntos críticos, para eso resolvemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

lo que equivale, en este caso, a $-2xe^y = 0$ y $e^y(y^2 - x^2 + 2y) = 0$ obteniendo como puntos críticos a $(0, 0)$ y $(0, -2)$.
Observe que $D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = -2e^{2y}(y^2 - x^2 + 4y + 2) - 4x^2e^{2y}$, que al evaluar en:

- $D(0, 0) = -4$ por lo tanto $(0, 0)$ es punto silla.
- $D(0, -2) = 4e^{-4}$ y $f_{xx}(0, -2) = -2e^{-4}$, por lo tanto $f(0, -2) = 4e^{-2}$ es un máximo local.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar los puntos críticos
- (1 punto) por determinar que $f(0, -2) = 4e^{-2}$ es un máximo local.
- (1 punto) Por determinar que $(0, 0)$ es punto silla.

4. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^4+y^4+2x^2y^2}\,dx\,dy$, donde $D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le x\le y\}$.

Solución:

Usaremos coordenadas polares, de esta forma la región D corresponde a

$$D=\left\{(\rho,\theta):1\le\rho\le 2,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

obteniendo que

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{xy}{x^4+y^4+2x^2y^2}\,dx\,dy &= \int_1^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho^4}\rho d\theta d\rho\\ &= \int_1^2\frac{1}{\rho}\,d\rho\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta\\ &= \frac{\ln(2)}{4}.\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por describir la región con el cambio de coordenadas polares.
- (1 punto) Por plantear correctamente la integral
- (1 punto) Por calcular el valor.

b) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx.$

Solución:

Para resolver esta integral, cambiamos el orden de integración. El dominio original es $D=\{(x,y):0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$, otra manera de de describir esta región es $D=\{(x,y):0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$, de esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx &= \int_0^1\int_0^y e^{x/y}\,dx\,dy\\ &= \int_0^1\left(ye^{x/y}\right)_0^y\,dy\\ &= \int_0^1 y(e-1)\,dy\\ &= \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por hacer el cambio de descripción.

- (1 punto) Por plantear correctamente la integral
- (1 punto) Por calcular el valor.

5. Sea $\mathcal{S}$ el sólido que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, por encima del plano $z = 0$ y por abajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   a) Escriba el volumen de $\mathcal{S}$ como integral triple, usando coordenadas cilíndricas.
   Solución:

   En coordenadas cilíndricas tenemos las siguientes conversiones:

   $$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z$$

   El diferencial del volumen es $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$, obteniendo así que el volumen puede ser calculado como

   $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_z^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$$

   Distribución de puntajes:

   - (0.5 puntos) Por los límites de integración de θ.
   - (0.5 puntos) Por los límites de integración de z.
   - (1 punto) Por los límites de integración de r.
   - (1 punto) Por determinar el diferencial de volumen correctamente.

   b) Escriba el volumen de $\mathcal{S}$ como integral triple, usando coordenadas esféricas.
   Solución:

   En coordenadas esféricas tenemos las siguientes conversiones:

   $$x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta), y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta), z = \rho\cos(\phi)$$

   El diferencial del volumen es $dV = \rho^2\sin(\phi)d\rho\,d\phi\,d\theta$, obteniendo así que el volumen puede ser calculado como

   $$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} \rho^2\sin(\phi)d\rho\,d\phi\,d\theta$$

   Distribución de puntajes:

   - (0.5 puntos) Por los límites de integración de θ.
   - (0.5 puntos) Por los límites de integración de ρ.
   - (1 punto) Por los límites de integración de ϕ.
   - (1 punto) Por determinar el diferencial de volumen correctamente.