Ayudantía 1

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Integral impropia tipo I: Estas integrales se evalúan desde un número finito hasta el $\pm\infty$.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Si los límites existen, se dice que la integral es **convergente**. En caso contrario es **divergente.** Aplica de la misma forma para el límite en $-\infty$.

Integral impropia tipo II: Estas integrales se evalúan desde un punto en que la función tiene una discontinuidad hasta un número finito (sin discontinuidad).

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^{t} f(x)dx \;\; o \;\; \int_c^{a} f(x)dx = \lim_{t\to c^+} \int_t^{a} f(x)dx$$

Si los límites existen, se dice que la integral es **convergente**. En caso contrario es **divergente.**

Teorema de comparación: Si consideramos dos funciones: $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para $x \geq a$.

Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^{\infty} g(x)dx$ es convergente.
Si $\int_a^{\infty} g(x)dx$ es divergente, entonces $\int_a^{\infty} g(x)dx$ es divergente.

Teorema de comparación al límite: Si consideramos dos funciones: $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para $x \geq a$ y se supone que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Si $K \neq 0$, entonces **ambas** integrales divergen o convergen.
Si $K = 0$, entonces si $\int_a^{\infty} g(x)dx$ **converge**, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **converge**.
Si $K = \infty$, entonces si $\int_a^{\infty} g(x)dx$ **diverge**, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **diverge**.

Los mismos criterios se pueden utilizar para integrales de tipo II.

Límite de una sucesión: Sea una sucesión $\{a_n\}$ y su limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Se dice que **converge** si $L \neq \infty$ y **diverge** en caso contrario.

1. Evalué la siguiente integral.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

2. Decida si las siguientes integral son convergentes o divergentes.

$a) \int_2^{\infty} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^4 - x}}$

$b) \int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)}{(|x|+1)x} dx$

$c) \int_1^{2} \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$

$d) \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

3. Para que valores de "p" las siguientes integrales convergen.

$a) \int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^p} dx$

$b) \int_e^{\infty} \frac{1}{x(lnx)^p} dx$

4. Determine todos los valores de C para que la integral converja.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{C}{x+1}\right) dx$$

5. Determine si las siguientes sucesiones convergen.

$a) a_n = \frac{\cos^2(n)}{2^n}$

$b)\ a_n = nsin(\frac{1}{n})$

6. Demostrar que la siguiente sucesión converge a cero.

$$a_n = \int_1^{2} (\ln(x))^n \, dx$$