Pontificia Universidad Católica Chile
Facultad de Matemáticas - Mat1620
Profesor: Natham Aguirre
Ayudante: Francisco Rubio (fvrubio@uc.cl)

Ayudantía 12

Teorema de Fubini

4 Teorema de Fubini Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\, c \leqslant y \leqslant d\}$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que f está acotada sobre R, f es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy \quad \text{donde } R = [a,b] \times [c,d]$$

Tipo I

3 Si f es continua sobre una región D tipo I tal que

$$D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Tipo II

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

si D es una región que se puede expresar como

$$D = \{(x,y) | c \leqslant y \leqslant d, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

Área de una Región D

$$\iint_D 1dA = A(D)$$

Propiedad

si $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ para toda (x,y) en D, entonces

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x,y)dA \leqslant MA(D)$$

Ejercicios

1. ($I_2 : P8 \quad 2018-1$) Determine los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida sobre la superficie $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

2. ($I_2 : P3 \quad 2019-1$) Determine los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ definida sobre el conjunto

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

3. ($I_3 : P7 \quad 2016-1$) Sea $\mathcal{R}$ la region del plano encerrada por las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$(con $x \geq 0$) Calcule el volumen del sólido definido sobre $\mathcal{R}$ y delimitado por el plano $z = 0$ y por la superficie $z = x + y$.

4. ($I_3 : P5 \quad 2019-1$)
a) Invierta el orden de integración en la integral

$$\int_0^1 \int_y^{2-\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

5. ($I_3 : P7 \quad 2018-2$) Considere la función

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Calcule el integral utilizando el orden

$$\iint f(x,y)dxdy$$

Solución

Ejercicio 1.

Para resolver lo pedido utilizamos el método de los Multiplicadores de Lagrange, además notamos que en caso de existir varios puntos que satisfagan la condición de Lagrange, como la función f es continua y se encuentra definida sobre una región cerrada y acotada de $\mathbb{R}^3$, su máximo y su mínimo existe y debe ser alguno de los puntos encontrados.
La ecuación $\nabla f(x,y) = \lambda\lambda\nabla g(x,y)$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x \\ 2y &= \frac{1}{2}\lambda y \\ 2z &= -\frac{2}{9}\lambda z \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene por solución los siguientes 6 puntos,

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 2, 0), \quad (0, 0, \pm 3).$$

Evaluamos nuestra función f en estos puntos para obtener,

$$f(\pm 1, 0, 0) = 1, \quad f(0, \pm 2, 0) = 4, \quad f(0, 0, \pm 3) = 9,$$

de donde se concluye que el máximo valor de f es 9 y lo alcanza en los puntos $(0, 0, \pm 3)$ y su mínimo valor es 1 y lo alcanza en los puntos $(\pm 1, 0, 0)$.

Ejercicio 2.

Solución:
Comenzamos buscando los puntos críticos que puedan existir en el interior de D, para ello resolvemos

$$(2x - 1, 2y - 1) = (0, 0)$$

Con lo cual el punto $P_1 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es el único punto crítico en el interior de D.

A continuación debemos mirar en la frontera de D para ello parametrizamos a esta como $h(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$. Con lo cual la función se representa como

$$f(t) = 2 - \cos(t) - \operatorname{sen}(t).$$

Los respectivos puntos criticos de esta función de una variable serán

$$f'(t) = 0,$$

los cuales son $t = \frac{\pi}{4}$, $\quad t = \frac{3\pi}{4}$ es decir

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Finalmente debemos agregar los extremos del respectivo intervalo,

$$P_4 := f(\cos(0), \operatorname{sen}(0)) = f(\cos(2\pi), \operatorname{sen}(2\pi)) = (1, 0)$$

Una vez encontrados todos los puntos posibles, notamos que dado que la función f es continua y la región D es cerrada y acotada, esta alcanza su máximo y su minimo en alguno de los puntos encontrados anteriormente, luego calculamos,

$$f(P_1) = \frac{1}{2}, \qquad f(P_2) = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(P_3) = 2 + \sqrt{2}, \qquad f(P_4) = 1,$$

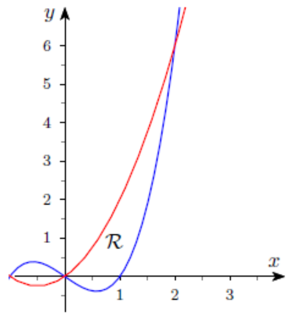
de donde se concluye que P_3 es el punto donde f alcanza su máximo absoluto y P_1 donde f alcanza el respectivo mínimo.

Ejercicio 3.

Solución. Las curvas se intersectan cuando

$$x^3 - x = x^2 + x \iff x^3 - x^2 - 2x = 0 \iff x(x^2 - x - 2) = 0 \iff x(x-2)(x+1) = 0$$

Como $x \geqslant 0$ obtenemos $x = 0$ y $x = 2$, geométricamente la región $\mathcal{R}$ es



que es una región tipo I y se puede describir como

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 2\,,\ x^3 - x \leqslant y \leqslant x^2 + x\}\,.$$

Entonces, el volumen del sólido es

$$V = \iint\limits_{\mathcal{R}} (x+y)\, dA$$

Entonces, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
V &= \iint\limits_{\mathcal{R}} (x+y)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_{x^3-x}^{x^2+x} (x+y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^3-x}^{y=x^2+x} dx \\
&= \int_0^2 \left[\left(x(x^2+x) + \frac{(x^2+x)^2}{2} \right) - \left(x(x^3-x) + \frac{(x^3-x)^2}{2} \right) \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^3 + \frac{x^2}{2} - x^4 + x^2 - \frac{x^6}{2} + x^4 - \frac{x^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[-\frac{x^6}{2} + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x^2 \right] dx \\
&= \left[-\frac{x^7}{14} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{2} + \frac{2}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{776}{105}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.

Al hacer el cambio de orden la integral se reescribe como:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dydx + \int_1^2 \int_0^{(x-2)^2} f(x,y)\, dydx.$$

Ejercicio 5.

Se tiene que,

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\, dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dxdy.$$

Y al reemplazar con la función dada,

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$