



## Ayudantía 9

Calculo II - MAT1620

**Teorema de Fubini:** Si  $f$  es continua en el rectángulo  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

**Región Tipo I:** Es una región donde la coordenada  $y$  está acotada por dos funciones de  $x$ . Si  $f$  es continua en una región  $D$  tipo I tal que

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

**Región Tipo II:** Es una región donde la coordenada  $x$  está acotada por dos funciones de  $y$ . Si  $f$  es continua en una región  $D$  tipo I tal que

$$D = \{(x, y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

1. Calcule las siguientes integrales en los cuadrados R.

$$a) \int \frac{xy}{1+x^2+y^2} dA, R = [0,1] \times [0,1], \int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) + C$$

$$b) \int xy e^{x^2 y} dA, R = [0,1] \times [0,2]$$

2. Calcular

$$\iint_D xy dx dy$$

$$\text{Donde } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 - y \leq 3/4\}.$$

3. Evalúe las siguientes integrales

$$a) \int_0^1 \int_{\arcsen y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$$

$$b) \int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx$$

4. Escriba las siguientes integrales como una sola integral.

$$a) \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) dx dy$$

$$b) \int_{-2}^0 \int_0^{(x+2)^2} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_0^{(x-2)^2} f(x, y) dy dx$$

5. Exprese el área como integral de cada una de las dos partes en que la parábola  $y = \frac{5x^2}{8}$  corta al círculo  $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ .
6. Calcule el volumen encerrado por el paraboloide  $z = x^2 + 3y^2$  y los planos  $x = 0, y = 1, y = x$  y  $z = 0$ .