Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2025

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación 1

Cada pregunta tiene como máximo 1.5 puntos.

1. (a) Determine, si es que existe, el valor de

$$\int_0^1 \ln x dx$$

SOL:

Integrando por partes obtenemos que

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx = (x \ln x) \mid_t^1 - \int_t^1 dx = \lim_{t\to 0^+} -t \ln t - (1-t) = -1$$

Criterio de corrección:

- (0.2 punto) reconocer intregral impropia, es decir $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx$.
- (0.3 punto) Por cálculo correcto de la integral.
- (0.2 punto) Por cálculo correcto del límite.

(b) Determine si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_2^\infty \frac{x}{(\ln x)^2} dx$$

SOL:

Como $\ln x < x$ entonces $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\ln x}$ (ya que $x > 0$ y $\ln x > 0$ en $(2, \infty)$). Por lo que $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{(\ln x)^2}$. Multiplicando por x a ambos lados obtenemos que

$$\frac{1}{x} < \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Como $\int_2^\infty \frac{1}{x} dx$ diverge se deduce por el criterio de comparación que $\int_2^\infty \frac{x}{(\ln x)^2} dx$ también diverge.

Criterio de corrección:

- (0.4 punto) Por aplicar correctamente criterio.
- (0.4 punto) Por determinar divergencia.

2. (a) Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

es creciente y acotada. Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

SOL:

Se demostrará por inducción que a_n es creciente.

- Como $\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}}$, entonce se cumple el primer paso inductivo, $a_1 < a_2$.

- Supondremos que $a_n < a_{n+1}$ (hipótesis de indicción).
- Demostraremos que $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Por hipótesis se tiene que $a_n < a_{n+1}$. Luego $2a_n < 2a_{n+1}$ y por lo tanto $\sqrt{2a_n} < \sqrt{2a_{n+1}}$. Por lo que $a_{n+1} < a_{n+2}$.
Por lo que $a_n n < a_{n+1}$ para todo n y por lo tanto creciente.

Ahora se demostrará por inducción que $a_n < 2$ para todo $n > 0$.

- Como $\sqrt{2} < 2$, entonce se cumple el primer paso inductivo, $a_1 < 2$.
- Supondremos que $a_n < 2$ (hipótesis de inducción).
- Demostraremos que $a_{n+1} < 2$.

Por hipótesis se tiene que $a_n < 2$. Luego $2a_n < 4$ y por lo tanto $\sqrt{2a_n} < 2$.
Por lo que $a_n < 2$ para todo n y por lo tanto acotada.

Como a_n es monótona y acotada entonces es convergente. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, luego $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, es decir $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = L$. Luego $\sqrt{2L} = L$, por lo que $L = 0$ o $L = 2$. Pero como a_n es creciente mayor que $\sqrt{2}$ se obtiene que $L = 2$.

Criterio de corrección:

- (0.3 punto) Por demostrar que la a_n es creciente (0.1 por cada paso correcto inductivo.)
- (0.3 punto) Por demostrar que a_n es acotada(0.1 por cada paso correcto inductivo.)
- (0.2 punto) Por cálculo de límite

(b) Calcular

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{9^8} + ... + \frac{1}{9^{2n}}$
SOL:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{9^8} + ... + \frac{1}{9^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{9})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{9^2})^n$$

que reconocemos como una serie geométrica con $r < 1$ por lo que es convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{9^2})^n = \frac{\frac{1}{9^2}}{1 - \frac{1}{9^2}} = \frac{1}{80}$$

Criterio corrección:

- **0.2 pto** Reconocer serie geométrica.
- **0.2 pto** Cálculo suma.

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}$
SOL:

Reconocemos la suma

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}$$

como una suma telescópica, de donde

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(2N+5)}}.$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{5}} - \frac{1}{(\sqrt[4]{2N+5})} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

Criterio corrección:

- **0.1 pto** Reconocer suma telescópica.
- **0.1 pto** Resolver suma telescópica.
- **0.1 pto** Resolver serie.

3. Determine si las siguientes series son o no convergentes.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-3n}}{4^{2n}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+6}n}{n^2+9}$.

   Solución:

   (a) Consideremos el criterio de comparación al limite:
   Sea

   $$b_n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{n^2}{n^{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

   Calculamos:

   $$\begin{aligned} \lim \frac{\frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^{\frac{7}{3}}+n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{n^7\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{7}{3}}\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}} \\ &= \frac{4}{\sqrt[3]{1}} = 4 \end{aligned}$$

   Dado que la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ diverge, por el criteriro de comparación al limite concluimos que la serie:
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}$ diverge.
   Criterio de corrección:

   - (0.1 punto) Por comparar correctamente con el término $b_n = n^{1/3}$
   - (0.2 punto) Por calcular correctamente el límite
   - (0.2 punto) Por concluir la divergencia de la serie por el criterio de comparación.

   (b) Para esta serie podemos aplicar el criterio de la raíz:

   $$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^{1-3n}}{4^{2n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^{\frac{1}{n}-3}}{4^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^{\frac{1}{n}}n^{-3}}{4^2}\right| = \frac{(1)(0)}{16} = 0$$

   Dado que $L = 0 < 1$ tenemos que por el criterrio de la raíz la serie converge.
   Criterio de corrección:

- (0.1 punto) Por identificar un criterio adecuado.
- (0.2 punto) Por justifiicar las condiciones del criterio empleado.
- (0.2 punto) Por concluir la convergencia de la serie.

(c) Notar que la serie dada es una serie alternante
Sea $b_n = \frac{n}{n^2+9}$, la cual es siempre positiva.
Notamos además que la sucesión es decreciente pues si:
$f(x) = \frac{x}{x^2+9}, \quad f'(x) = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2} < 0, x \geq 4$ esto implica que b_n taambién decrece para $n \geq 4$.
Además:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+9} = 0$$

Luego por el criterio de la serie alternante concluimos que la serie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+6}n}{n^2+9}$ es convergente.

Criterio de corrección:

- (0.1 punto) Por identificar que la serie es alternante.
- (0.2 punto) Por verificar correctamente las hipótesis del criterio.
- (0.2 punto) Por concluir la convergencia de la serie por el criiterio de la serie alternante.

4. Determine el intervalo y radio de convergencia para la siguiente serie de potencia:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(4x-5)^k}{k^3 \cdot 5^k}.$$

SOL:

Notar que, aplicando el criterio del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\dfrac{4^{4+1} \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right)^{k+1}}{(k+1)^3 \cdot 5^{k+1}}}{\dfrac{4^k \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right)^k}{k^3 \cdot 5k}} \right| \\
&= \frac{4}{5}\left| x - \frac{5}{4} \right| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{(k+1)^3} \\
&= \frac{4}{5}\left| x - \frac{5}{4} \right|
\end{aligned}$$

La serie converge si $\frac{4}{5}\left|x - \frac{5}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|x - \frac{5}{4}\right| < \frac{5}{4}$. Concluyendo que el radio de convergencia es $R = \frac{5}{4}$.
Para el intervalo de convergencia notemos que:

$$\begin{gathered}
\left|x - \frac{5}{4}\right| < \frac{5}{4} \Longleftrightarrow -\frac{5}{4} < x - \frac{5}{4} < \frac{5}{4} \\
x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).
\end{gathered}$$

Analizamos los extremos del intervalo:
Si $x = 0$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(4(0)-5)^k}{k^3 5^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3},$$

Notamos que la serie es alternante con coeficientes positivos y decreciente y $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^3} = 0$. Entonces, por criterio de laa serie alternante la serie converge.

Si $x = \frac{5}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(4\left(\frac{5}{2}\right) - 5\right)^k}{k^3 5^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3},$$

obtenemos una p-serie con $p = 3 > 1$, converge.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es $I = \left[0, \dfrac{5}{2}\right]$.

Criterio de corrección:

- (0.1 punto) Por identificar un criterio adecuado.
- (0.3 punto) Por calcular el límite del criterio usado.
- (0.2 punto) Por identificar el radio de convergencia.
- (0.3 punto) Por verificar que la serie converge en $x = 0$
- (0.3 punto) Por verificar que la serie converge en $x = 5/2$
- (0.3 punto) Por determinar el intervalo de convergencia correctamente.