Pontificia Universidad Catolica de Chile
Facultad de Matemáticas
Semestre 2017-2

Curso: MAT1620 - Calculo II
Profesor: Vania Ramirez
Ayudante: Ignacio Castañeda
Mail: `ifcastaneda@uc.cl`

Ayudantía 15

Repaso Examen

9 de noviembre de 2017

1. Sea

$$I = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)dxdy$$

escribir I como una única integral doble.

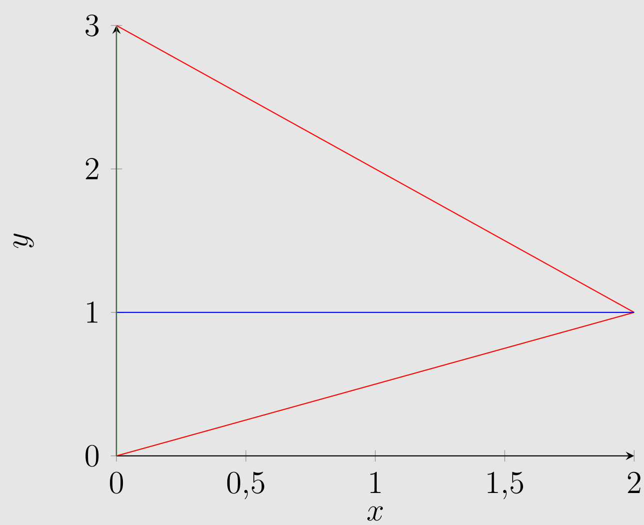
Solución:

Veamos las regiones de cada integral por separado.

En la primera tenemos que $y \in [0,1]$ y vemos que y va entre 0 y $x = 2y \to y = \frac{x}{2}$

En la segunda, vemos que $y \in [1,3]$ y que x va entre 0 y $x = 3 - y \to y = 3 - x$

Graficamente, esto sería:

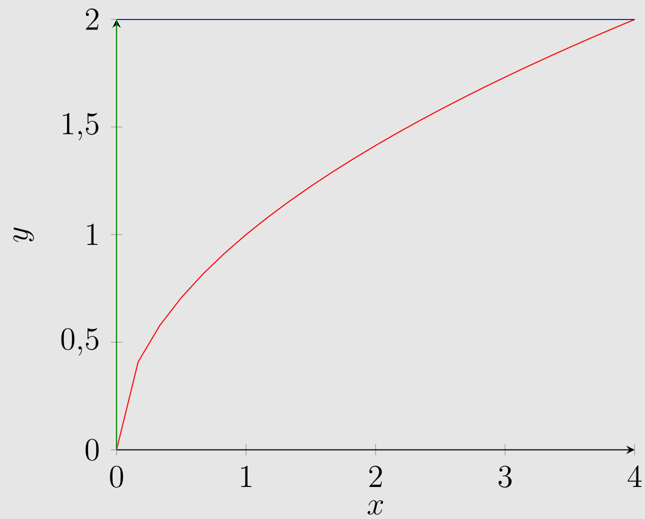


Viendo el gráfico, podemos ver que si miramos el eje x primero (lluvia cae desde arriba), solo hay un techo y un piso. Dicho esto, la integral iría desde 0 a 2 en el eje x y desde $\frac{x}{2}$ a $3 - x$ en el eje y. Luego, nuestra nueva integral será

$$I = \int_0^2 \int_{x/2}^{3-x} f(x,y)dydx$$

2. Evalúe $\iint_S sen(y^3)dA$, siendo S la región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ y $x = 0$.

Solución:
Graficamente, la región S corresponde a



Luego, podemos concluir que

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$$

Además, podemos escribir esto en el orden contrario (primero el eje y)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y^2\}$$

Usaremos esta segunda definición de S, ya que trabajar con y^2 es más facil que trabajar con $\sqrt{x}$. Entonces, nuestra integral será

$$\iint_S sen(y^3)dA = \int_0^2 \int_0^{y^2} sen(y^3)dxdy$$

$$= \int_0^2 y^2 sen(y^3)dy$$

$$= -\frac{1}{3}cos(y^3)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{3}(1 - cos(8))$$

3. Sea la aplicación de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, $\varphi : (u,v) \to (x,y)$, definida por:

$$x = \left(\frac{u+v}{2}\right)^{1/2} \quad ; \quad y = \left(\frac{v-u}{2}\right)^{1/2}$$

encontrar la imagen $D = \varphi(R)$ por esta aplicación (en el plano xy) del rectangulo R en el plano uv limitado por $u = 1,\ u = 4,\ v = 9,\ v = 16$ y calcular

$$\iint\limits_D xydxdy$$

Solución:
Para realizar este cambio de variables, lo primero que debemos hacer es calcular la matriz jacobiana, es decir

$$D_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{-1/2} & \frac{1}{4}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{-1/2} \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{v-u}{2}\right)^{-1/2} & \frac{1}{4}\left(\frac{v-u}{2}\right)^{-1/2} \end{bmatrix}$$

Luego, calculamos el Jacobiano

$$\frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)} = \frac{1}{16}\left(\frac{v^2-u^2}{4}\right)^{-1/2} + \frac{1}{16}\left(\frac{v^2-u^2}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}$$

Omitimos el valor absoluto, ya que esta función es estrictamente positivaen R

Luego, la nueva integral queda

$$\iint\limits_D xydxdy = \int_1^4 \int_9^{16} \frac{\sqrt{v^2-u^2}}{8\sqrt{v^2-u^2}} dvdu = \frac{1}{8}\int_1^4 \int_9^{16} dvdu = \frac{21}{8}$$

4. Sea R la región del plano en el cuarto cuadrante acotada por las rectas

$$x + y = 0, \quad x - y = 1, \quad y = 0$$

Calcule $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dxdy}{[(x+y)(x-y)]^{2/5}}$

Solución:
Dada la repetición de $x+y$ y $x-y$ en la región R y en la función a integrar, resulta evidente que la sustitución a realizar es

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Buscamos entonces el Jacobiano

$$\frac{\delta(u,v)}{\delta(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)} = -\frac{1}{2}$$

Recordemos que este debe ser positivo, por lo que el diferencial quedará

$$dxdy \rightarrow \frac{dudv}{2}$$

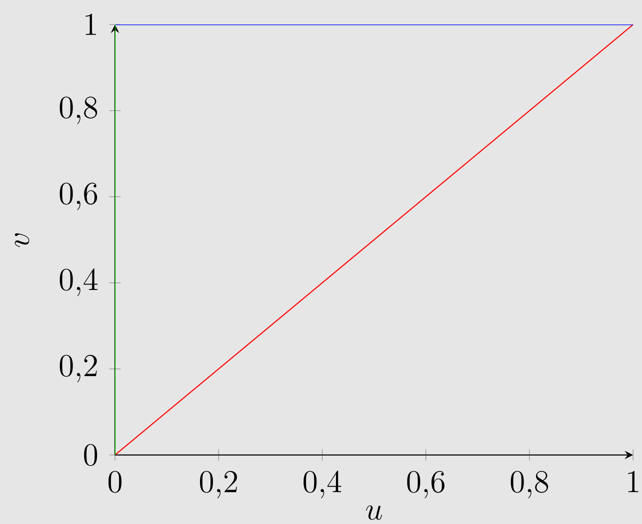
Ahora, vemos que nuestra nueva región de integración, R', está acotada por

$$x + y = 0 \rightarrow u = 0$$

$$x - y = 0 \rightarrow v = 1$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{u - v}{2} = 0 \rightarrow u = v$$

Graficamente, esta región sería



A partir del gráfico podemos escribir la nueva integral, que quedaría

$$\iint\limits_R \frac{dxdy}{[(x+y)(x-y)]^{2/5}} = \int_0^1 \int_u^1 \frac{dvdu}{2(uv)^{2/5}}$$

Resolviendo,

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_u^1 \frac{dvdu}{(uv)^{2/5}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{u^{2/5}} \left(\frac{5}{3} u^{3/5} \Big|_u^1 \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \int_0^1 \frac{1}{u^{2/5}} (1 - u^{3/5}) du$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{6} \right)$$

$$= \frac{25}{36}$$

5. Calcule la masa de una esfera sólida de radio 5 si su densidad de masa en cada punto es el triple de la distancia del punto al centro de la esfera.

Solución:
Sea Ω la esfera, en coordenadas esféricas la podemos definir como

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 5,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Como la densidad es el triple de la distancia al centro, esta se puede escribir como

$$\sigma(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como en coordenadas esféricas, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, tenemos que

$$\sigma(\rho, \theta, \phi) = 3\rho$$

Recordemos también que en coordenadas esféricas, $dxdydz \to \rho^2 sen\theta\ d\rho d\theta d\phi$

Luego, la integral a calcular es

$$M = \iiint\limits_\Omega \sigma(x, y, z) dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5} \sigma(\rho,\theta,\phi)\rho^2 sen\theta \ d\rho d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5} 3\rho\cdot\rho^2 sen\theta \ d\rho d\theta d\phi$$

$$= 3\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^{\pi} sen\theta \ d\theta\right)\left(\int_0^{5}\rho^3 \ d\rho\right)$$

$$= 3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{5^4}{4}$$

$$= 1875\pi$$

6. Determine el volumen del sólido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, arriba del plano xy y debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Solución:
Para resolver esto, utilizaremos coordenadas esféricas. Recordemos que el cambio a coordenadas esféricas viene dado por

$$\begin{cases} x=\rho sen\theta cos\phi & \rho\in[0,\infty] \\ y=\rho sen\theta sen\phi & \theta\in[0,\pi] \\ z=\rho cos\theta & \phi\in[0,2\pi] \end{cases}$$

Dado que estamos dentro de una esfera de radio 2, es claro que

$$0\le\rho\le 2$$

Además, sabemos que estamos sobre el plano xy que corresponde a $z=0$, es decir

$$z\ge 0\to\rho cos\theta\ge 0\to cos\theta\ge 0\to\theta\le\frac{\pi}{2}$$

También, podemos escribir el cono como

$$\rho cos\theta\le\sqrt{\rho^2 sen^2\theta cos^2\phi+\rho^2 sen^2\theta sen^2\phi}=\rho sen\theta$$

$$\rho cos\theta\le\rho sen\theta\to cos\theta\le sen\theta\to\theta\ge\frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, concluimos que el sólido viene dado por

$$S=\{(\rho,\theta,\phi):0\le\rho\le 2,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\phi\le 2\pi\}$$

De esta manera, el volumen viene dado por

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 sen\theta \; d\rho d\theta d\phi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} sen\theta \; d\theta \right) \left(\int_0^2 \rho^2 \; d\rho \right) \\
&= 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2^3}{3} \\
&= \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}
\end{aligned}
$$