FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 8

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Derivadas parciales: Las derivadas parciales para una función de 2 variables se escriben:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$, es la derivada parcial con respecto a x (y es una constante).
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y)$, es la derivada parcial con respecto a y (x es una constante).

Derivadas parciales (punto conflictivo): Se usa por definición.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$

Regla de la cadena:

<u>Caso 1:</u> z es una función de x e y y a su vez x e y son funciones de t. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

<u>Caso 2:</u> z es una función de x e y y a su vez x e y son funciones de s y t. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

1. Dada la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^3y - 2y^3x}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Encuentre $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
   b) Calcule $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
   c) Demuestre que $f_{xy}(0,0) = -2$ y $f_{yx}(0,0) = 5$.
   d) ¿Es resultado del inciso c) contradice el teorema de Clairaut? Fundamente su respuesta.

2. Mediante la regla de la cadena encuentre $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$:

   a) $z = x^2y^3, x = scos(t)x, y = ssen(t)$.
   b) $z = e^r \cos(\theta)\,, r = st\ y\ \theta = \sqrt{s^2+t^2}$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables que satisfacen

$$f\left(\frac{x}{y}, \frac{g(x,y)}{x}\right) = 0, \qquad \text{para cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Suponga que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$. Demuestre que,

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = g(x,y).$$