PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Facultad de Matemática

Momentos y Centros de Masa

Dr. Claudio Rivera

Resumen: En este documento encontrará ejercicios de longitud de arco. Estos ejercicios fueron tomados en su mayoría del libro guía del curso MAT1620.

Actualizado el: 18 de Junio de 2015

wcrivera@uc.cl
Version 1.0

Momento

Si m es la masa de una partícula localizada en el punto x, el número mx es denominado **momento** (respecto al origen).

Centro de masa unidimensional

Si se tiene un sistema de n partículas con masas $m_1, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ se define el **centro de masa** del sistema conformado por las n partículas como

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{m}$$

donde $m = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k$ es la masa total del sistema, y la suma de los momentos individuales

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$$

es denominada **momento del sistema respecto al origen**.

Centro de masa bidimensional

Si se tiene un sistema de n partículas con masas $m_1, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ se definen

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$$

momento del sistema respecto al eje Y

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

momento del sistema respecto al eje X

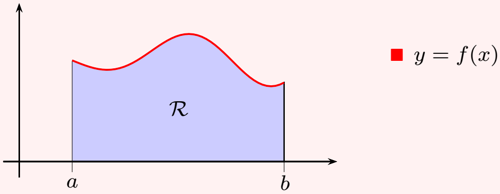
El **centro de masa** $(\overline{x}, \overline{y})$ se define

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = \sum_{k=1}^{n} m_k$.

Centroide

Sea f función continua en el intervalo $[a, b]$ y $\mathcal{R}$ la región de la siguiente figura:



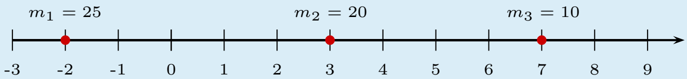
Si la región $\mathcal{R}$ representa una placa con densidad constante ρ se define el **centroide** (o centro de masa) de la placa como el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, donde

$$\overline{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \tfrac{1}{2} \left(f(x)\right)^2\, dx$$

donde $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Pregunta 1

Determine el momento M del sistema respecto al origen y el centro de masa $\overline{x}$, del sistema que se presenta en la siguiente imagen



Respuesta.

1. $M =$ ☐
2. $\overline{x} =$ ☐

Pregunta 2

Las masas $m_1 = 6$, $m_2 = 5$, $m_3 = 1$, $m_4 = 4$ se localizan en los puntos $P_1 = (1, -2)$, $P_2 = (3, 4)$, $P_3 = (-3, -7)$, $P_4 = (6, -1)$. Determine los momentos M_x y M_y, y el centro de masa del sistema.

Respuesta.

1. $M_x =$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
2. $M_y =$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
3. $(\overline{x}, \overline{y}) =$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Pregunta 3

Bosqueje la región acotada por las curvas

$$y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1,$$

y determine las coordenadas del centroide.

Respuesta.

$(\overline{x}, \overline{y}) =$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Pregunta 4

Determine las coordenadas del centroide de la región acotada por las curvas

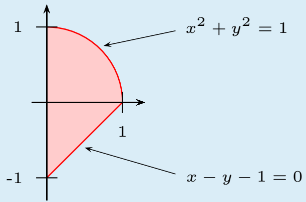
$$y = \sin(x), \quad y = \cos(x), \quad x = 0, \quad x = \pi/4$$

Respuesta.

- $\overline{x} =$ ☐ ☐
- $\overline{y} =$ ☐ ☐

Pregunta 5

Calcule los momentos M_x y M_y, y el centro de masa de la placa con densidad $\rho = 3$ que se muestra en la siguiente figura:



Respuesta.

- $M_x =$ ☐
- $M_y =$ ☐
- $\overline{x} =$ ☐
- $\overline{y} =$ ☐

Pregunta 6

Determine las coordenadas del centro de masa de la región delimitada por un triángulo de vértices $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ y $C = (0, c)$.

Respuesta.

- $\overline{x} = \boxed{}$ $\boxed{}$
- $\overline{y} = \boxed{}$ $\boxed{}$

Nota

El centro de masa de un triángulo con vértices en $A = \vec{a}$, $B = \vec{b}$ y $C = \vec{c}$ es

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

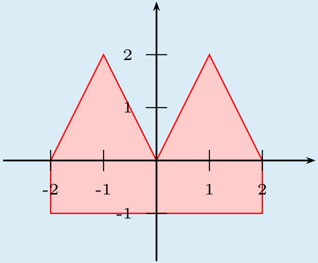
Pregunta 7

Usando el ejercicio anterior, determine las coordenadas del centro de masa de la región delimitada por un triángulo de vértices $A = (1, -1)$, $B = (2, 6)$ y $C = (3, 1)$.

Respuesta. $(\overline{x}, \overline{y}) =$

Pregunta 8

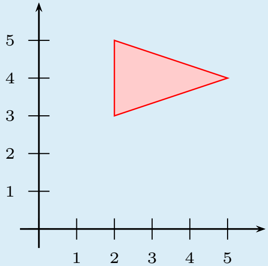
Sabiendo conocidos los centros de masa de los triángulos y rectángulos, determinar el centroide de la región



Respuesta. $(\overline{x}, \overline{y}) =$

Pregunta 9

Use el teorema de Pappus para determinar el volumen del sólido que resulta de hacer girar el triángulo de la figura en torno al eje X.



Respuesta.

Volumen: [ ] [ ]

Pregunta 10

Use el teorema de Pappus para determinar el volumen de un cono de altura h y radio de base r.

Respuesta.

Volumen: