



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

**MAT1640** - Cálculo 2

**Profesor:** Hector Pastén

**Ayudante:** Vicente Castro Solar (vvcastro@uc.cl)

Primer Semestre 2019

---

## Ayudantía 12

### *Integrales triples*

#### 1. Momentos y centros de masa.

Masa de una superficie  $D$ :

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Momento respecto al eje  $x$ :

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dA$$

Coordenada del centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

Momento de Inercia respecto eje  $x$ :

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$$

Momento de Inercia respecto al origen:

$$I_x = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

1. Hallar el centro de masa de una lámina con forma de un triángulo rectángulo isósceles con lados iguales de longitud  $a$  si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto a la hipotenusa.
2. Considerar un aspa cuadrada con lados de longitud  $a = 2$  y la esquina inferior izquierda colocada en el origen. Si la densidad del aspa es  $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$ . Es más difícil girar el aspa respecto al eje  $x$  o el eje  $y$ .

## 2. Integrales triples.

1 Calcular

$$\iiint_E \sin(y) dV$$

donde  $E$  yace bajo el plano  $z = 1 + x + y$  y arriba de la región en el plano  $xy$ , acotado por las curvas  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$  y  $x = 1$ .

2 Hallar el volúmen del tetraedro encerrado por los planos coordenados y el plano  $2x + y + z = 4$ .

3 Evalúe  $\iiint_E x^2 dV$ , donde  $E$  está encerrada por los planos  $z = 0$  y  $z = x + y + 5$  y los cilindros  $x^2 + y^2 = 4$  y  $x^2 + y^2 = 9$ .

4 Encuentre el volúmen del sólido que está entre el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .