Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2019

A

MAT1620 – Cálculo II

ENSAYO 1 PRUEBA FINAL

1. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones son verdaderas respecto de la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}?$$

I.- La convergencia de I depende de la convergencia de las integrales $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ y $I_2 = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

II.- I_1 diverge al compararla al límite con la función $1/\sqrt{x}$.

III.- I_2 es convergente.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) I y II
D) I y III

2. Sea n el número para el cual la integral impropia

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^n}$$

converge. Determine el valor de la integral.

A) $\dfrac{1}{n}$.
B) $\dfrac{1}{n-1}$.
C) $\dfrac{\ln(n)}{n+1}$.
D) $\dfrac{\ln(n)}{n-1}$.

3. Si a y b son números positivos, ¿cuál es el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{(1+e^{ax})(1+e^{bx})}\,dx$?

A) 1.
B) $a-b$.
C) $(a-b)\log(2)$.
D) $\dfrac{a-b}{ab}\log(2)$.

4. Considere la sucesión definida por

$$a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \quad \text{para } n \geqslant 1\,.$$

¿Cuál de la siguientes afirmaciones es FALSA?

A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.
B) La sucesión $\{a_n\}$ es divergente.
C) Si el primer término es $a_1 = 2$ entonces la sucesión es convergente.
D) La sucesión $\{a_n\}$ es convergente independiente del valor del primer término.

5. El valor del primer término, x_1, de una sucesión (x_n) de números reales es desconocido, pero se conoce que x_1 no es cero. Además se sabe que, para todo entero $n \geqslant 1$, la sucesión satisface la siguiente fórmula de recursión

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas acerca de esta sucesión?

A) La sucesión diverge si $x_1 < 0$ y converge a $\sqrt{2}$ si $x_1 > 0$.

B) La sucesión converge a -1 si $x_1 < 0$ y converge a $\sqrt{2}$ si $x_1 > 0$.

C) La sucesión converge a $-\sqrt{2}$ si $x_1 < 0$ y converge a $\sqrt{2}$ si $x_1 > 0$.

D) La sucesión diverge para cualquier $x_1 \neq 0$.

6. ¿Cual de las siguientes series es una serie geometrica?

A) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$.

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

D) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots$.

7. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ es convergente, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmación es(son) FALSA(S)?

I. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ es convergente.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$ es convergente.

III. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es convergente.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo II y III

8. Si $\sum a_n$ es convergente $(a_n \neq 0)$ y $\sum b_n$ es divergente. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) FALSA(S)?

I. $\sum(a_n + b_n)$ es divergente.

II. $\sum \left(\frac{1}{a_n} + b_n\right)$ es divergente.

III. $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

A) Solo II.

B) Solo III.

C) Solo II y III.

D) Solo I y II.

9. Considere las series

$$(S_1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^n}, \qquad (S_2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n^2}}$$

entonces

A) S_1 es convergente y S_2 es divergente.

B) S_1 es divergente y S_2 es convergente.

C) S_1 y S_2 son convergentes.

D) S_1 y S_2 son divergentes.

.

10. Suponga que sabe que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es convergente para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$?

    A) Diverge para $x = -1$.

    B) Converge para $|x| < 2$.

    C) Converge para $|x| \leqslant 2$.

    D) Tiene radio de convergencia $R = 1$.

11. Determine cuál de las siguientes es una representación para $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$.

    A) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}$.

    B) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$.

    C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{4n}$.

    D) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n}$.

12. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)^{n/2}}{(n!)^2} x^n$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera con respecto al valor de $f^{(4)}(0)$?

    A) Es negativo.

    B) Es positivo y menor que 1.

    C) Es igual a 1.

    D) Es mayor que 1.

13. En la expansión en serie de Taylor (en potencias de x) de la función $f(x) = e^{x^2 - x}$, ¿cuál es el coeficiente de x^3?

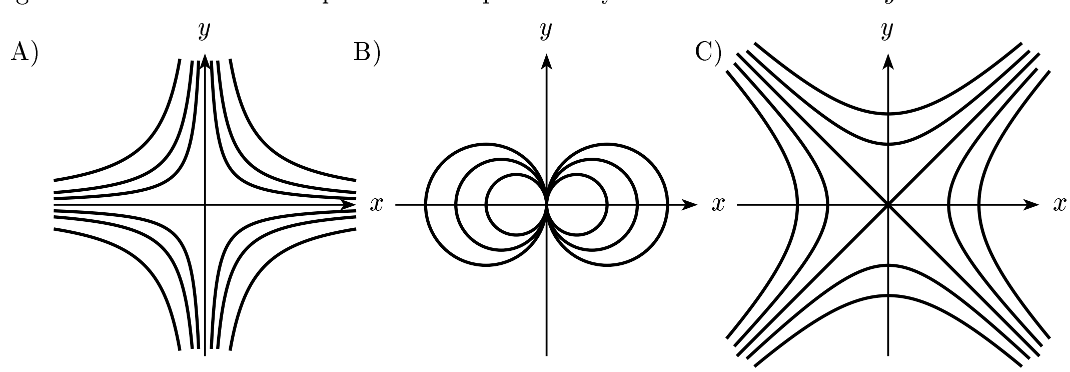
    A) -7.

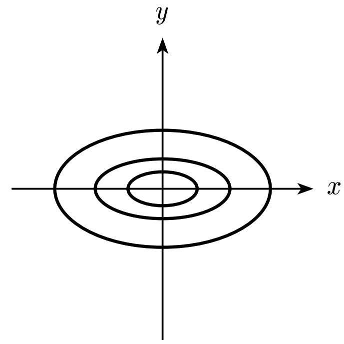
    B) $-\dfrac{3}{2}$.

    C) $-\dfrac{7}{6}$.

    D) $\dfrac{7}{6}$.

14. ¿Cuál de las siguientes curvas de nivel representa la superficie cuya ecuación es $z = x^2 - y^2$



D) 

15. ¿Cuál de las siguientes igualdades NO es correcta?

A) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\cos z}{e^x+e^y} = \frac{1}{1+e}$.

B) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.

C) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{y+x^2}} = 0$.

D) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,2)} \left(\frac{zy}{x} - \frac{xy^3z}{(x+1)^2+y^2}\right) = 0$.

16. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f(x,y))^2 = 1$. Podemos afirmar que:

A) si existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, entonces vale 1.

B) existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y vale 1 o -1.

C) no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

D) Si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = a$ entonces $a^2=1$.

17. Suponga que $w=f(x,y)$ es una función de dos variables tal que

$$x = x(s,t)\,, \quad y = y(t,\theta)\,, \quad t = t(\theta)\,.$$

Luego, w es una función de s y θ. ¿Cuál de las siguientes fórmulas nos da $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$?

A) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial \theta}$.

B) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial y}$.

C) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

D) Ninguna de las anteriores.

18. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua tal que para todo punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y todo vector $\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ con $\|\vec{v}\|=1$ la derivada direccional de f en (x,y) en la dirección de dicho vector es:

$$D_{\vec{v}}f(x,y) = 3v_1 + v_2\,.$$

Con respecto a la afirmación:

$$f \text{ es diferenciable en } \mathbb{R}^2$$

¿Cuáles de las siguientes son verdaderas?

I. Falso, pues del enunciado no podemos deducir ni siquiera la existencia de las derivadas parciales de f.

II. Falso, al no conocer la expresión analítica de la función f, no se puede estudiar su diferenciabilidad.

III. Verdadero, pues del enunciado se deduce que las derivadas parciales de f existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$, entonces f es diferenciable.

A) Solo I.

B) Solo II.

C) Solo III.

D) Solo II y III.

19. La ecuación $x^3z^5 - y^2z^3 - 3xy = 1$ define una función implícita $z = f(x,y)$. ¿Cuál es el valor de $\partial f/\partial y$ en el punto $(x,y,z) = (-1,1,1)$?

A) -1.

B) $-\dfrac{1}{8}$.

C) $\dfrac{1}{8}$.

D) 8.

20. El plano $y = 1$ corta a la superficie

$$z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

en una curva C. Hallar la pendiente de la recta tangente a C en el punto donde $x = 2$.

A) -1.

B) $\dfrac{1}{5}$.

C) $\dfrac{1}{3}$.

D) $\dfrac{1}{2}$.

21. Sea $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existen dos puntos distintos P y Q tales que f tiene un

A) un punto silla en P y en Q.

B) máximo local en P y un punto silla en Q.

C) mínimo local en P y un punto silla en Q.

D) mínimo local en P y en Q.

22. Sea f una función continua de dos variables. Considere los conjuntos

$$A = \mathbb{R}^2, \quad B = \{(x,y) \;\; x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{y} \quad C = [0,1] \times [0,\pi].$$

Sobre cuáles de estos conjuntos se puede afirmar que f alcanza su mínimo y máximo?

A) A, B y C.

B) B y C.

C) Solo C.

D) Ninguno.

23. Supongamos que tenemos alguna superficie $z = f(x,y)$ y sabemos que las primeras parciales

$$f_x = 2xy^2 - 2x^2 \;, \quad f_y = 2x^2y - 2y^2 \;.$$

Claramente por sustitución, vemos que $(1,1)$ es un punto crítico. Use el test de las segundas derivadas parciales para determinar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

A) $D = 4 > 0$ y es un máximo relativo.

B) $D < 0$ y es un punto silla.

C) $D = 0$ y el test no es concluyente.

D) $D > 0$ y $f_{xx}(1,1) = 0$ y el test no es concluyente.