

Ejercicios MAT1620

Integrales Impropias

1. Integrales Impropias

Sección 7.8: 1,2,7,8,11,18,23,25,26,35,48,52,53,54,55,56,57,58,59,71-80

Sucesiones y Series

1. Sucesiones

Sección 11.1: 1-3,6,9,11,19,20,24,25,33,42,43,47,52,69,72-82,90-92

2. Series: sumas parciales, convergencia

Sección 11.2: 1-8,15,17,20,23,27,29,31,39,43,45,46,67,73,74,75,83,84,85,89,90

3. Criterio de la Integral

Sección 11.3: 1,2,5,6,7,11,12,15,17,18,27,28,30,34,36,43,46

4. Convergencia de Series por Comparación:

Sección 11.4: 1,2,5,6,7,14,17,19,20,35,36,37,40,41,45,46

5. Convergencia de la serie alternante.

Sección 11.5: 1,3,11,12,15,17,20,27,28,32

6. Criterio de convergencia absoluta, criterio de la raíz y cociente

Sección 11.6: 1,3,5,6,11,12,13,19,22,29,30,31,33,35,36,38,42,45

Observación: Los ejercicios de la sección 11.7 son una buena forma de repasar los criterios.

7. Series: Intervalo y radio de convergencia

Sección 11.8: 1,2,4,5,6,7,15,19,21,23,29-33,39,40,41,42

8. Representación de Funciones

Sección 11.9: 3,5,6,8,9,11,14,13,15,25-27,19,20,21,24,30,34,37,39,42

9. Series de Taylor

Sección 11.10: 1,2,3,4,5,7,8,9,14,15,16,21,22,24,29,31,33,38,43,51-62

Vectores y el espacio \mathbb{R}^3

1. Coordenadas cartesianas en el espacio: \mathbb{R}^3

Sección 12.1: 1,2,3,5,6,7,10,12,13,16,21,23-38,41,42,44

2. Vectores en \mathbb{R}^3

Sección 12.2: 1,2,3,4,7,9,13,19-22,26

3. Producto Punto

Sección 12.3: 1-10,14-20,23-26,29,30

4. Producto Cruz

Sección 12.4: 1-7,13,27-36

5. Rectas y planos en \mathbb{R}^3

Sección 12.5: 1-7,10-13,16,19,22,24,26,27,30,37-44,46,51,54,64,65,72

Funciones de Varias Variables

1. Funciones de varias variables

Sección 14.1: 1,2,9-12,15-19,23-25,32-36,38-44,59-64

2. Límites

Sección 14.2: 1-4,7,8,13-17,39-41

3. Continuidad

Sección 14.2: 25,26,29-38,44

4. Derivadas parciales

Sección 14.3: 1,2,3,4,15-40,45,46

5. Derivadas de Orden Superior

Sección 14.3: 51-58,63-70,72-78

6. Plano Tangente y Aproximaciones Lineales

Sección 14.4: 1-6,12,13,17-21

7. Regla de la cadena

Sección 14.5: 1,3,7,10,13-16,19,21,27-35

8. Derivada Direccional y Gradiente

Sección 14.6: 1,2,3,4,8-12,21-25,29-34,41-42

9. mínimos y máximos locales y absolutos

Sección 14.7: 1-4,7,9,10,15-20,29-36,40-42,50,51

10. Multiplicadores de Lagrange

Sección 14.8: 1,7,8,9,19-22,42-44

Integrales Dobles y Triples

1. Integrales dobles sobre rectángulos

Sección 15.1: 4-6,11-13,17

2. Integrales Iteradas

Sección 15.2: 3-24,26,27,37,38

3. Integrales Dobles sobre regiones generales:

Sección 15.3: 1-10,13-16,18-20,22,24,25,29-32

4. Integrales dobles en coordenadas polares

Sección 15.4: 7-20,22,24,25,27-32

5. Integrales triples

Sección 15.7: 3-8,11-14,18,20,21,27-32,34-36

6. Integrales triples en coordenadas Cilíndricas

Sección 15.8: 18-22,29,30

7. Integrales triples en coordenadas Cilíndricas

Sección 15.9: 11-15,17,18,22-27,30,39-41

8. Cambio de Variables

Sección 15.10: 8,9,11-20,23-25

Objetivos e indicadores asociados

1. Integrales Impropias:

Analizar la convergencia de una integral impropia de tipo 1 o tipo 2.

- Evaluando una integral impropia.
- Aplicando el Teorema de comparación.

2. Sucesiones y Series:

a) Estudiar la convergencia de una sucesión dada de forma explícita o recursiva.

- Escribiendo sus primeros términos
- Calculando su límite usando álgebra de límites y límites conocidos.
- Acotando y determinando la monotonía de una sucesión.
- Determinando la convergencia por comparación.
- Determinando la convergencia por monotonía.

b) Analizar la convergencia de una serie numérica.

- Calculando la suma de una serie geométrica.
- Calculando la suma de una serie telescópica.
- Aplicando el criterio de la integral.
- Aplicando pruebas por comparación.
- Aplicando la prueba de la serie alternante.
- Reconociendo el concepto de convergencia absoluta y condicional.
- Aplicando las pruebas de la razón y la raíz.

c) Comprender las series de potencias en centradas en 0 o un punto a .

- Determinando el radio de convergencia.
- Determinando el intervalo de convergencia.
- Determinando si una serie de potencias es convergente en algún punto a partir de su radio e intervalo de convergencia.
- Representando funciones como series de potencias.
- Aplicando derivación e integración término a término de una serie de potencias en un intervalo de convergencia apropiado.

d) Representar funciones como una serie de potencias utilizando Series de Taylor y Maclaurin.

- Determinando la serie de Maclaurin de una función y su radio de convergencia.
- Determinando la serie de Taylor de una función en un punto.
- Integrando funciones representadas como una serie infinita, usando la serie de Taylor y Maclaurin.
- Multiplicando y dividiendo series de potencias obtenidas usando la serie de Taylor o Maclaurin de una función.

3. Vectores y el Espacio \mathbb{R}^3

- a) Reconocer el sistema coordenado tridimensional y sus elementos.
 - Localizando puntos en el espacio dadas sus coordenadas.
 - Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos para resolver problemas.
 - Describiendo gráficamente o con palabras, regiones presentadas a partir de una ecuación o desigualdad.
 - Describiendo con una ecuación o una desigualdad a una región descrita gráficamente o con palabras.
 - Determinando la ecuación de una esfera.
 - Resolviendo problemas que involucran esferas y otros sólidos.
- b) Comprender el concepto de vector, su interpretación, operaciones y propiedades.
 - Clasificando magnitudes en escalares o vectoriales.
 - Combinando vectores de forma algebraica y geométrica.
 - Representando un segmento dirigido mediante un vector.
 - Calculando la magnitud de un vector.
 - Reconociendo cuándo dos vectores tienen la misma dirección.
- c) Comprender los conceptos de producto punto, producto cruz, sus propiedades e interpretación geométrica.
 - Reconociendo si tienen sentido expresiones que involucran el producto punto y el producto cruz.
 - Calculando el producto punto y el producto cruz entre dos vectores.
 - Determinando si dos vectores son ortogonales usando el producto punto.
 - Utilizando el producto cruz para encontrar un vector ortogonal a otros dos vectores dados.
 - Resolver problemas de área y volumen que involucran el uso del producto cruz.
- d) Reconocer los conceptos de rectas y planos en el espacio y sus distintas representaciones.
 - Identificando relación de paralelismo y perpendicularidad entre planos, rectas y entre rectas y planos.
 - Determinando la ecuación vectorial, paramétrica o simétrica de una recta a partir de la información dada.
 - Determinando la intersección entre rectas, rectas y planos, entre dos planos.
 - Determinando la ecuación de un plano a partir de la información dada.
 - Esbozando la gráfica de un plano en el espacio.

4. Funciones de Varias Variables

- a) Comprender funciones de dos y tres variables como una extensión de las ideas ya conocidas para funciones de una variable.
 - Determinando el dominio máximo de una función de dos o tres variables.
 - Evaluando funciones de dos o tres variables.
 - Esbozando las curvas de nivel de una función de dos variables.
 - Identificando la gráfica de una función de dos variables.

- b) Comprender los conceptos de límite y continuidad de funciones de dos o tres variables.
- Conjeturando acerca del valor del límite en un punto a partir de una tabla de datos.
 - Calculando el límite de una función de dos o tres variables usando acotamiento, manipulación algebraica, coordenadas polares o probando su no existencia.
 - Determinando el conjunto de puntos en el cual una función es continua.
 - Determinado el límite de una función.
 - Demostrando la continuidad de una función en un punto.
- c) Trabajar con derivadas parciales y derivadas parciales de orden superior.
- Reconociendo la interpretación de la derivada parcial como una variación.
 - Reconociendo la interpretación de la derivada parcial como una pendiente.
 - Calculando las primeras derivadas parciales de una función de dos o tres variables de manera algebraica o por definición.
 - Calculando las segundas y terceras derivadas parciales de una función de dos o tres variables.
 - Verificando que una función satisface una ecuación en derivadas parciales.
 - Aplicando el Teorema de Clairaut para resolver problemas que involucran derivadas parciales.
- d) Comprender el concepto de plano tangente y su similitud con la construcción de la recta tangente en un punto, en una función de una variable.
- Encontrando la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto dado.
 - Resolviendo problemas que involucran a la obtención de la ecuación del plano tangente para obtener una linealización y aproximación lineal de una función en un punto.
 - Relacionando el concepto de diferenciabilidad con el de linealización.
 - Aplicando el teorema que entrega una condición suficiente para probar la diferenciabilidad.
- e) Aplicar la regla de la cadena para derivar una función compuesta.
- Calculando derivadas de diversas funciones compuestas.
 - Dibujando un diagrama de árbol para describir una relación entre las variables.
 - Aplicando el teorema de la función implícita para calcular derivadas parciales.
- f) Comprender el concepto de derivada direccional.
- Aplicando la definición para obtener una derivada direccional.
 - Interpretando geoméricamente el concepto de derivada direccional.
 - Calculando una derivada direccional dada una función y un vector unitario.
- g) Comprender el concepto de gradiente y sus interpretaciones.
- Reconociendo al gradiente como la dirección en que ocurre el valor máximo de la derivada direccional (máxima razón de cambio).
 - Usar el gradiente para obtener la ecuación de la recta tangente a una curva de nivel, del plano tangente a una superficie de nivel y de las rectas normales.
- h) Usar las derivadas parciales para localizar los máximos y mínimos de una función de dos variables.

- Identificando los puntos críticos de una función, de manera algebraica y en sus curvas de nivel.
- Clasificando los puntos críticos en máximo local, mínimo local o punto silla.
- Resolviendo problemas de optimización en contextos diversos.
- Aplicando el teorema del valor extremo para funciones de dos variables sobre un conjunto cerrado y acotado.
- Usando el método de Lagrange para maximizar o minimizar una función sujeta a una restricción.

5. Integrales Dobles y Triples

- a) Comprender las integrales dobles como una extensión de la integral definida en una variable.
- Estimando volúmenes de sólidos sobre regiones rectangulares usando sumas de Riemann.
 - Calculando integrales dobles mediante su interpretación como volumen de sólido conocidos.
 - Usando la regla del punto medio para estimar el valor de una integral.
 - Aplicando la propiedad de linealidad de la integral para integrales dobles sobre rectángulos.
 - Evaluando integrales iteradas.
 - Aplicando el teorema de Fubini para evaluar integrales dobles sobre rectángulos.
 - Reconociendo regiones planas de tipo 1 y tipo 2.
 - Evaluando integrales dobles sobre regiones de tipo 1 y tipo 2.
 - Calculando el volumen de un sólido que está sobre una región de tipo 1 o tipo 2 y bajo otra superficie, usando una integral doble.
 - Aplicando la propiedad de linealidad de la integral para integrales dobles sobre regiones generales.
 - Aplicando la propiedad de la integral que evaluar integrales dobles sobre regiones que no son ni tipo 1 ni 2, pero que se pueden expresar como unión de dos regiones de tipo 1 o tipo 2.
 - Calculando el área de una región D como la integral doble de la función constante $f(x, y) = 1$.
 - Acotando el valor de una integral doble a partir del área de la región y las cotas para la función sobre la región.
- b) Utilizar el sistema de coordenadas polares para describir una región D y calcular una integral doble haciendo el cambio a coordenadas polares.
- Describiendo una región plana en el sistema de coordenadas polares.
 - Evaluando una integral doble haciendo el cambio a coordenadas polares.
 - Utilizando integrales dobles para calcular el área de regiones encerradas por curvas definidas en coordenadas polares.
 - Calculando el volumen de un sólido sobre una región D que se puede describir usando coordenadas polares.

- c) Comprender el concepto de integrales triples, entendiendo las integrales triples y como una extensión de la idea de la integral definida.
- Reconociendo la estimación de una integral triple, sobre una caja rectangular, como una triple suma de Riemann.
 - Reconociendo a la integral triple, sobre una caja rectangular, como el límite de una triple suma de Riemann.
 - Aplicando el teorema de Fubini para evaluar integrales triples sobre cajas rectangulares.
 - Identificando y describiendo regiones de tipo 1,2 y 3.
 - Evaluando integrales triples sobre regiones de tipo 1,2 y 3.
 - Reescribiendo una integral triple en un orden diferente.
 - Calculando el área de una región E tridimensional, como la integral triple de la función constante $f(x, y, z) = 1$.
- d) Utilizar el sistema de coordenadas cilíndricas para dar una descripción conveniente de algunas superficies y sólidos comunes, para calcular integrales triples de manera más sencilla.
- Graficando puntos del espacio en coordenadas cilíndricas a partir de la definición y su interpretación geométrica.
 - Graficando puntos del espacio en coordenadas cilíndricas, obteniendo sus coordenadas rectangulares.
 - Describiendo una superficie con una ecuación en coordenadas rectangulares, dada su ecuación en coordenadas cilíndricas.
 - Reconociendo la conveniencia de utilizar coordenadas cilíndricas cuando la proyección de la región tridimensional E sobre alguno de los planos xy, xz o yz tiene una descripción conveniente en coordenadas polares.
 - Evaluando una integral triple usando la fórmula para la integración triple en coordenadas cilíndricas.
- e) Utilizar el sistema de coordenadas esféricas para simplificar la evaluación de integrales triples sobre regiones tridimensionales acotadas por esferas o conos.
- Graficando puntos del espacio en coordenadas esféricas a partir de la definición y su interpretación geométrica.
 - Graficando puntos del espacio en coordenadas esféricas, obteniendo sus coordenadas rectangulares.
 - Evaluando una integral triple usando la fórmula para la integración triple en coordenadas esféricas.
 - Expresando una integral triple usando los tres sistemas de coordenadas y evaluando según sea conveniente.
- f) Utilizar un cambio de coordenadas apropiado para evaluar integrales múltiples.
- Determinando imagen y preimagen de una región dado un cambio de coordenadas.
 - Calculando el jacobiano del cambio de coordenadas.
 - Calculando la integral doble o triple en las nuevas coordenadas.

Requisitos

De los conocimientos previos necesarios para tener éxito en el curso destacamos:

1. Coordenadas cartesianas en el plano.
2. Gráfico de funciones de una variable.
3. Funciones exponencial, logaritmo, trigonométricas y sus inversas.
4. Límites y continuidad de funciones de una variable.
5. Definición y cálculo de derivadas de funciones de una variable, incluyendo dominio de la regla de la cadena.
6. Comprensión y cálculo de la recta tangente a una curva.
7. Definición y cálculo de integral definida en un intervalo finito.
8. Dominio de técnicas de integración como sustitución, integración por partes, sustituciones trigonométricas, fracciones parciales.