Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

MAT1620-3: Cálculo II - 1er Semestre 2016

Profesor: Rodrigo Vargas - rsvargas@mat.puc.cl
Ayudante: Matías Joaquín Henríquez Zerené - mjhenriquez@uc.cl

Ayudantía 3

Series y Criterios de Convergencia

1. Serie Geométrica

Definición 1.1. La serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... \tag{1.1}$$

es **convergente** si $|r| < 1$ y su suma vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1 \tag{1.2}$$

Notemos que si $|r| \geq 1$, entonces la serie es **divergente**.

Problema 1. Encuentre el valor de α tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\alpha} = 10$$

Solución: Notemos que la serie es una serie **geométrica**, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\alpha})^{n-1} \\ &= \frac{1}{1-e^{\alpha}} = 10, \quad \Rightarrow 1 = 10 - 10e^{\alpha} \\ e^{\alpha} &= \frac{9}{10}, \quad \Rightarrow \alpha = \ln\left(\frac{9}{10}\right) \end{aligned}$$

Problema 2. Determine a cuánto converge la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10e^n + n(n+1)}{e^n n(n+1)}$$

Solución: Notemos que podemos descomponer la serie en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10e^n + n(n+1)}{e^n n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n(n+1)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}}_{\textit{serie geométrica}}$$

Veamos la primera sumatoria. Utilizando fracciones paraciales vemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{10}{n} - \frac{10}{n+1}\right)}_{\textit{propiedad telescópica}} \\
&= \frac{10}{1} - \cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1}} \\
&= 10
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10e^n + n(n+1)}{e^n n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \\
&= 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = 10 + \frac{1}{e} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n-1}} \\
&= 10 + \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} \\
&= 10 + \frac{1}{e-1}
\end{aligned}$$

2. La prueba de la divergencia

Definición 2.1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **no existe** o es **distinto** de 0, en tal caso, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

es **divergente**.

Problema 3. Determine si las siguientes series son divergentes o convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k(k+4)}{(k+3)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Solución:

(a) Vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2k(k+4)}{(k+3)^2} = 2$$

Por lo tanto la serie **diverge**.

(b) De igual manera que en el caso anterior:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto la serie **diverge**.

(c) En este caso vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(1) = 0$$

Por lo tanto la serie podría eventualmente converger (es decir, no sabemos si converge o diverge). Notemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n - \ln(n+1)), \quad \leftarrow \textit{Propiedad telescópica} \\ &= \ln(1) - \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = -\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie **diverge**.

3. La prueba de la integral

Suponga que f es una función **continua, positiva y decreciente** en $[1,\infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces:

(a) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es **convergente**, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es **convergente**.

(b) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es **divergente**, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es **divergente**.

Problema 4. Determine los valores de p para los cuales las siguientes series **convergen**:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\cdot[\ln(\ln(n))]^p}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

Solución:

(a) Vamos a utlizar la prueba de la integral. Realicemos la sustitución $v = \ln(x)$, entonces:

$$\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)\cdot[\ln(\ln(x))]^p} = \int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{dv}{v\cdot[\ln(v)]^p}$$

Haciendo nuevamente la sustitución $u = \ln(v)$, entonces la integral se transforma:

$$\begin{aligned}\int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{dv}{v\cdot[\ln(v)]^p} &= \int_{\ln(\ln(3))}^{\infty} \frac{du}{u^p} \\ &= \left.\frac{1-p}{u^{p-1}}\right|_{\ln(\ln(3))}^{\infty} \\ &= \lim_{u\to\infty} \frac{1-p}{u^{p-1}} - \frac{1-p}{\ln^{p-1}(\ln(3))}\end{aligned}$$

y para que el límite exista es necesario que $p \geq 1$.

(b) Utilizando el criterio de la integral y sustituyendo con $u = 1 + x^2$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} x(1+x^2)^p dx &= \frac{1}{2}\int_{2}^{\infty} u^p du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left.\left[\frac{u^{1+p}}{1+p}\right]\right|_{2}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{u\to\infty}\frac{u^{1+p}}{1+p} - \frac{2^{1+p}}{1+p}\right]\end{aligned}$$

por lo tanto, es necesario que $p < -1$ para que la serie **converja**.

4. Pruebas por comparación

4.1. Prueba por comparación directa

Definición 4.1. Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos, entonces:

(a) Si $\sum b_n$ es **convergente** y $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $\sum a_n$ también es **convergente**.

(b) Si $\sum b_n$ es **divergente** y $a_n \geq b_n$ para todo n, entonces $\sum a_n$ también es **divergente**.

4.2. Prueba por comparación en el límite

Definición 4.2. Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \tag{4.1}$$

entonces:

- Si C es un número finito y mayor a 0, entonces ambas series **poseen el mismo comportamiento**.
- Si $C = 0$, entonces si $\sum b_n$ **converge**, entonces $\sum a_n$ **también lo hace**. Si $\sum b_n$ **diverge** entonces no se puede asegurar la convergencia de $\sum a_n$.
- Si $C = \infty$, entonces si $\sum b_n$ **diverge**, entonces $\sum a_n$ **también lo hace**. Si $\sum b_n$ **converge** entonces no se puede asegurar la convergencia de $\sum a_n$.

Problema 5. Determine la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5^n}{n+7^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1,2}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{10^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Solución:

(a) Notemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5^n}{n+7^n} &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5^n}{7^n} \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}}_{\textit{prueba integral}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n}}_{\textit{serie geométrica}}\end{aligned}$$

Se tiene que, por medio de la prueba de integral (y resolviendo la integral utilizando integración por partes):

$$\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{7^x} = \frac{1+\ln(7)}{7\ln^2(7)}$$

y la serie geométrica evidentemente converge ($5/7 < 1$), por ende la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5^n}{n+7^n}$$

converge, utilizando el criterio de la comparación directa.

(b) Vamos a comparar con la serie $\sum \frac{1}{n}$, vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

como $1/2 > 0$, por el criterio de comparación en el límite, vemos que la serie **diverge**.

(c) Notemos que para todo n se tiene que $\arctan n < \pi/2$, por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1,2}} < \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,2}}}_{\textit{criterio de la integral}}$$

Vemos que la serie de la derecha converge, ya que $1{,}2 > 1$, por lo tanto por el criterio de comparación directa, la serie **converge**.

(d) Sea $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{n} - n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}} = 1$$

Como $\sum b_n$ converge $(1{,}5 > 1)$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también **converge**.

(e) Notemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{10^n} < 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

la cual es una serie geométrica con $r = 1/10$, por lo tanto, la serie **converge** gracias al criterio de la comparación.

(f) Comparamos con $b_n = \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **diverge**.

5. Series alternantes

Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$$

cumple con

(a) $b_n \geq 0$ y $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces la serie es convergente.

6. Criterio de la razón o Criterio de D'Alembert

Sea $\sum a_n$ una serie, y sea:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \tag{6.1}$$

entonces:

- Si $L < 1$, entonces la serie **converge absolutamente**, y por lo tanto $\sum a_n$ converge.
- Si $1 < L \leq \infty$, entonces la serie $\sum a_n$ **diverge**.
- Si $L = 1$, el test **no es concluyente**, y se requiere un análisis de otro tipo para poder determinar la convergencia de la serie.

este criterio es muy utilizado y se recomienda mucho utilizar cuando a_n tiene factoriales y potencias.

7. Criterio de la Raíz

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$ en seguida la serie $\sum a_n$ es convergente. Si $L > 1$ la serie diverge, y si $L = 1$ el criterio no es concluyente.

8. Convergencia absoluta y condicional

La serie $\sum a_n$ se dice absolutamente convergente si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ es convergente. Si $\sum a_n$ converge pero no es absolutamente convergente, se le dice condicionalmente convergente. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Problema 6. Determine si las series siguientes son divergentes, absolutamente convergentes o condicionalmente convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(c) $1 - \dfrac{1\cdot 3}{3!} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{5!} - \dots$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n+2)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

Solución:

(a) La serie converge, pues es una serie alternante con término general decreciente en valor absoluto. Sin embargo, no converge absolutamente. Basta con notar que para cierto $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\ln n \leq n$ y que la serie armónica diverge.

(b) Por el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e > 1$$

Por lo tanto la serie diverge.

(c) El término general de la sucesión es claramente decreciente. Basta ver que el término a_n es el término anterior multiplicado por un número menor que 1. Por el criterio de series alternantes se tiene que converge. Para la convergencia absoluta notar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-1}{(2(n+1)-1)!}(2n-1)! = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

Por lo tanto la serie converge absolutamente.

(d) Notar que $\dfrac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n+2)} = \dfrac{2\cdot 1}{5} \cdot \ldots \dfrac{2n}{3n+2}$. Por lo que el término general es decreciente, y así la serie converge.
Consideremos ahora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(3(n+1)+2)} = \frac{2}{3} < 1$$

Por lo que la serie converge absolutamente.

(e) Notar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1$$

Por lo que la serie converge absolutamente.

(f) Por el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Por lo que la serie converge absolutamente.