Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Primer Semestre del 2025

Ayudantía 14

Cálculo 2

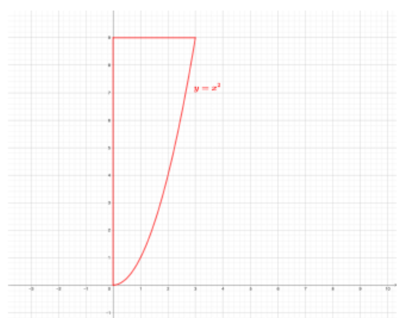
Problema 1

Calcule

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x\cos(y^2)\,dy\,dx.$$

Respuesta

Observe que la región de integración es la descrita en la siguiente figura



la que también puede ser descrita como

$$\{(x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{y},\, 0 \leq y \leq 9\}$$

lo que nos permite cambiar el orden de integración, obteniendo que

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x\cos(y^2)\,dy\,dx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x\cos(y^2)\,dx\,dy$$

y al calcular esta integral, obtenemos que

$$\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x\cos(y^2)\,dx\,dy = \int_0^9 \left[\frac{x^2}{2}\cos(y^2)\right]_0^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^9 \frac{y}{2}\cos(y^2)\,dy$$

Para resolver esta última integral hacemos cambio de variable $u = y^2$, obteniendo que $du = 2y\,dy$ y así

$$\int_0^9 \frac{y}{2}\cos(y^2)\,dy = \frac{1}{4}\int_0^{81}\cos(u)\,du = \frac{1}{4}\left[\sin(u)\right]_0^{81} = \frac{1}{4}\sin(81).$$

Problema 2

Sea R la región en el primer cuadrante acotada por las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$. Calcule $\iint_R x\, dA$.

Respuesta

Antes de proceder con el cálculo de la integral, es fundamental identificar la región de integración R. Para ello, analizamos las ecuaciones de las curvas que delimitan dicha región. En este caso, corresponden a circunferencias, por lo que se estudiará cada una de ellas.

Circunferencia $x^2 + y^2 = 4$:
Circunferencia de radio 2

Circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 2 \cdot r\cos\theta$$

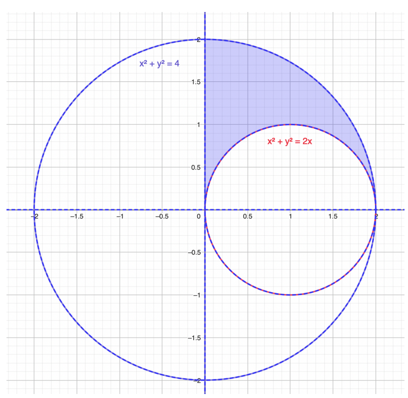
$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2 \cdot r\cos\theta$$

$$r^2 = 2 \cdot r\cos\theta$$

$$r = 2\cos\theta$$

Circuferencia de radio $2\cos\theta$ tangente al eje y

Es así como se presntan dos circunferencias en la región, con R (zona pintada) la zona de integración.



Por tanto, para resolver la integral nos movemos en el área del primer cuadrante comprendida entre una circunferencia de radio 2 y una circunferencia de radio $2\cos\theta$, que además es tangente al eje y. Para ello, utilizamos el siguiente cambio a coordenadas polares.

$$2\cos(\theta) \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Con ello se resuleve la integral

$$
\begin{aligned}
\iint_R x\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{2} r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,\frac{r^3}{3}\Big|_{2\,\cos\theta}^{2} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos\theta - \frac{8}{3}\cos^4\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{8}{3} - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4}\,d\theta \\
&= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} 1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} 1+\cos 4\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Problema 3

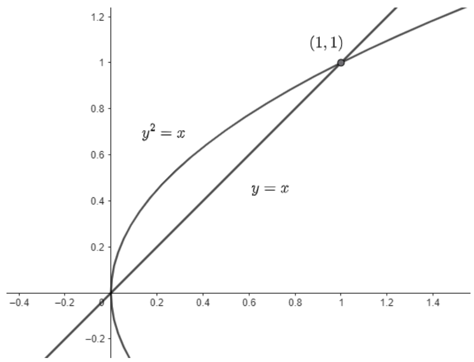
Calcule el volumen de los sólidos descritos a continuación:

a) Acotado por las superficies $y^2 = x$, $y = x$, $z = x^2 + y^2$ y $z = 0$.

b) Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

Respuesta

a) La región D proyectada sobre el plano xy se muestra a continuación:



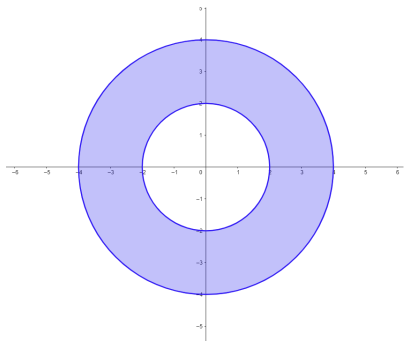
El volumen se calcula como

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \left[\tfrac{x^3}{3} + x\, y^2 \right]_{x=y^2}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\tfrac{4y^3}{3} - y^4 - \tfrac{y^6}{3} \right) dy \\ &= \left[\tfrac{y^4}{3} - \tfrac{y^5}{5} - \tfrac{y^7}{21} \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

b) Por simetría, el volumen del sólido puede escribirse como

$$V \;=\; 2 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dA,$$

donde D es la proyección sobre el plano xy:



Cambiamos a coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad 2 \le r \le 4, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{2\pi}\int_2^4 r\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\theta \\
&= 2(2\pi)\left[-\frac{(16-r^2)^{3/2}}{3}\right]_{r=2}^{r=4} \\
&= 4\pi\cdot 8\sqrt{3} \\
&= 32\sqrt{3}\,\pi.
\end{aligned}$$

Problema 4

Evalúe las siguientes integrales triples:

a) $\iiint_E (x+2y)\,\mathrm{d}V$, donde E es la región encerrada por $y = x^2$ y los planos $x = z$, $z = y$ y $z = 0$.

b) $\iiint_R x\,\mathrm{d}V$, donde R es el sólido comprendido entre los planos coordenados y el plano $x + 2y + z = 4$.

c) $\iiint_T x\,\mathrm{d}V$, donde T está acotada por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$.

Respuesta

a)

$$\iiint_E (x+2y)\,dV$$

Del enunciado se concluye que los límites de integración son:

$$0 \le x \le 1, \qquad x^2 \le y \le x, \qquad 0 \le z \le x$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iiint_E (x+2y)\,dV &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^x (x+2y)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^x x\,(x+2y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2+2xy)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\, x^2y + xy^2 \,\right]_{y=x^2}^{y=x}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^3 - x^4 - x^5\right)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

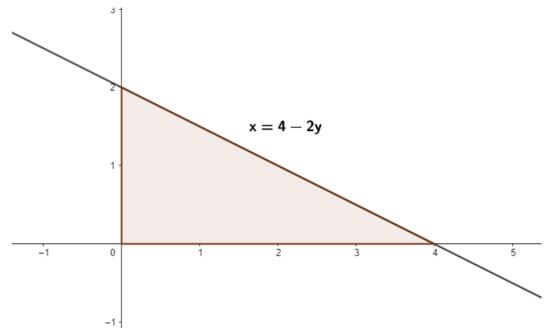
b)

$$\iiint_R x\,dV$$

Del enunciado se obtiene que

$$0 \le z \le 4 - x - 2y$$

Podemos obtener los límites de integración de x e y proyectando el sólido R en el plano xy.



Por lo tanto, tenemos que

$$0 \leq x \leq 4 - 2y$$
$$0 \leq y \leq 2$$

Evaluamos la integral,

$$\begin{aligned}
\iiint_R x\,dV &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-x-2y} x\,dz\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2y} \left(4x - x^2 - 2yx\right) dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - x^2 y\right]_0^{4-2y} dy \\
&= \int_0^2 \frac{4}{3}(2-y)^3\,dy \\
&= \left[-\frac{(2-y)^4}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

c)

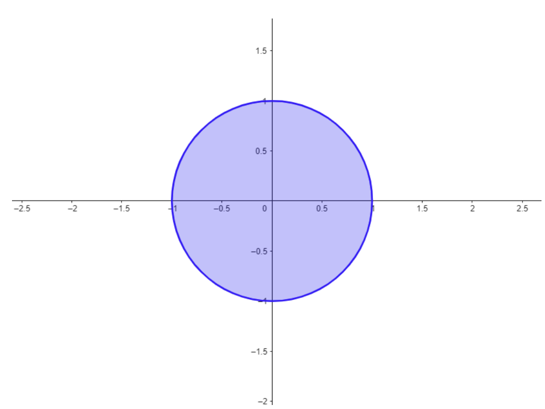
$$\iiint_T x\,dV$$

Del enunciado se concluye que el rango de x está dado por

$$4y^2 + 4z^2 \leq x \leq 4.$$

Al proyectar T sobre el plano yz se obtiene el disco

$$D: \; y^2 + z^2 \leq 1.$$



Así,

$$\begin{aligned}
\iiint_T x\,dV &= \iint_D \left[\int_{4y^2+4z^2}^{4} x\,dx\right] dA \\
&= \iint_D \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=4y^2+4z^2}^{x=4} dA \\
&= 8\iint_D \left[\,1-(y^2+z^2)^2\right] dA.
\end{aligned}$$

Cambiamos a coordenadas polares en el plano yz:

$$y = r\cos\theta, \qquad z = r\sin\theta, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\iiint_T x\,dV &= 8\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[1-r^4\right] r\,dr\,d\theta \\
&= 8\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(r-r^5\right) dr \\
&= 8(2\pi)\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{16\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Problema 5**

a) Demuestre que para $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+b)^2}\, dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

b) Use lo anterior para mostrar que si $a > 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}-c}\,.$$

c) Sea A una matriz simétrica 2×2, cuyos valores propios son estrictamente positivos.

Demuestre que:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\intercal A\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \;=\; \sqrt{\det(2\pi A^{-1})}\,.$$

Respuesta

Solución: a) Comencemos por el caso $a = 1$, $b = 0$. Tenemos que calcular

$$I \;:=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\,.$$

Notemos que

$$I^2 \;=\; \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)^2 \;=\; \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy\right) \;=\; \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy\,.$$

Cambiando a coordenadas polares, con $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$I^2 \;=\; \int_0^\infty\!\!\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\, d\theta\, d\rho \;=\; \int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, d\rho \;=\; 2\pi \int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\,.$$

Usando el cambio de variable $u = \rho^2$, $du = 2\rho\, d\rho$, obtenemos

$$I^2 \;=\; \pi \int_0^\infty e^{-u}\, du \;=\; \pi\, e^{-u}\Big|_0^\infty \;=\; \pi\,.$$

Con esto, concluímos que $I = \sqrt{\pi}$. Para el caso general, notamos que, haciendo el cambio de variable $v = \sqrt{a}(x+b)$, $dv = \sqrt{a}\, dx$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+b)^2}\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}\frac{1}{\sqrt{a}}\, dv \;=\; \frac{1}{\sqrt{a}} I \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

b) Notemos que $ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) = a(x + \frac{b}{2a})^2$, por lo que

$$e^{-(ax^2+bx+c)} \;=\; e^{-ax^2-bx-\frac{b^2}{4a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}-c} \;=\; e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2}\, e^{\frac{b^2}{4a}-c}\,.$$

Luego, el resultado se obtiene aplicando la parte a).

c) Sean a_{ij}, con $i, j \in \{1, 2\}$ las entradas de A. Como es simétrica, tenemos que $a_{12} = a_{21}$. Como ambos valores propios λ_1 y λ_2 de A son positivos, su determinante $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2$ debe ser positivo, dado que $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$. Esto nos dice que a_{11} y a_{22} deben tener el mismo signo, y como $a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, tenemos que tanto $a_1 1$ como $a_2 2$ son positivos. Además, recordamos que como los valores propios de A^{-1} son λ_1^{-1} y λ_2^{-1}, tenemos $\det(A^{-1}) = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} = (\lambda_1\lambda_2)^{-1} = \det(A)^{-1}$. La integral que queremos calcular es

$$\begin{aligned}
J \;:=\; \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\intercal A\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \;&=\; \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2)\right) dx_1\, dx_2 \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2)\right) dx_1\, dx_2 \;.
\end{aligned}$$

Quitando el término que no depende de x_1 de la integral interior:

$$J \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2)\right) dx_1\right) \exp\left(-\frac{1}{2}a_{22}x_2^2\right) dx_2 \;.$$

La integral que queda al interior tiene la forma de la vista en la parte b), y por ende,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2)\right) dx_1 \;=\; \sqrt{\frac{2\pi}{a_{11}}}\, \exp\left(\frac{4a_{12}^2x_2^2}{4a_{11}}\right) \;=\; \sqrt{\frac{2\pi}{a_{11}}}\, \exp\left(\frac{a_{12}^2x_2^2}{a_{11}}\right) \;.$$

Reemplazando esto en la expresión para J,

$$\begin{aligned}
J \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2\pi}{a_{11}}}\, \exp\left(\frac{a_{12}^2x_2^2}{a_{11}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}a_{22}x_2^2\right) dx_2 \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{a_{11}}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right) x_2^2\right) dx_2 \;.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det(A) > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
J \;&=\; \sqrt{\frac{2\pi}{a_{11}}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2a_{11}}\det(A)x_2^2\right) dx_2 \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{a_{11}}}\sqrt{\frac{2\pi a_{11}}{\det(A)}} \\
&= \sqrt{(2\pi)^2\det(A^{-1})} \\
&= \sqrt{\det(2\pi A^{-1})}\;,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $\det(cA) = c^2\det(A)$.