Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2017
Profesor: Gabriela Fernandez – Ayudante: Constanza Barriga y Ruben Soza

Calculo II - MAT1620
Ayudantía 7
27 de Abril de 2017

1. Determine el límite, si es que existe, o demuestre que el límite no existe.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2+y^8}$ *b*) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

2. Considere la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   Pruebe que f es continua.

3. Si $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2y)}$. Encuentre $f_x(1,0)$ y $f_y(0,1)$.

4. Considere la función $yz = \ln(x+z^2)$. Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   a) Calcule $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ en todo punto.

   b) Demuestre que $f_{xy}(0,0) = -1$ y $f_{yx}(0,0) = 1$. ¿Contradice esto el teorema de Clairaut?. Fundamenta tu respuesta.

6. Considere la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   Pruebe que $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0,0)$.

Propuesto.

1. Demostrar que la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$
no es continua en el origen. ¿Dónde más es discontinua?.

2. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \alpha & \text{si } y = 0 \end{cases}$$
¿Será posible encontrar un valor de α para que f sea continua en $(x,0)$?.

3. Encuentre las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

   b) $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   c) $u(\vec{x}) = \sin(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)$

   d) $h(x,y) = \displaystyle\int_y^x \cos(t^2)\, dt$

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones dos veces derivables. Muestre que la función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$
es solución de la ecuación en derivadas parciales $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.