Pontificia Universidad Católica Chile
Facultad de Matemáticas - Mat1620
Profesor: Natham Aguirre
Ayudante: Francisco Rubio (fvrubio@uc.cl)

Ayudantía 10

Derivación implícita, derivada direccional, gradiente, máximos y mínimos

Derivación implícita

Se supone que z está dada en forma implicita como una función $z = f(x, y)$ me- diante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Derivada direccional

10 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

o de otra forma

$$D_{\mathrm{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

Teorema

Supongamos que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_u f(x)$ es $|\nabla f(x)|$ y se presenta cuando u tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(x)$.

Prueba de la segunda derivada

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

3 Prueba de la segunda derivada Supongamos que las segundas derivadas parciales de f son continuas sobre un disco de centro (a, b), y supongamos que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo local ni un mínimo local.

NOTA 1 En caso de c) el punto (a, b) se llama punto silla de f y la gráfica de f cruza el plano tangente en (a, b).
NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: f podría tener un máximo local o un mínimo local en (a, b), o bien, en (a, b) podría haber un punto silla de f.

Ejercicios

1. Si $x - z = \arctan(yz)$, calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

2. Sea f una función diferenciable de la cual se sabe:

$$D_u(f)(3,1) = 3, \quad D_v(f)(3,1) = \sqrt{2}$$

siendo $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \quad v = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$. Calcule $D_w(f)(3,1)$ si $w = (3,2)$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. Consideremos los puntos

$$A(1,3); \quad B(3,3); \quad C(1,7); \quad D(6,15)$$

La derivada direccional de f en A en la directón del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AC}$ es 26. Determine la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

4. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está definido por

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a)Determine la razón de cambio del potencial en $P(3,4,5)$ en la dirección del vector $v = i + j - k$

b)¿En qué dirección cambia V con mayor rapidez en P?

c)¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

5. ¿En qué punto del paraboloide $y = x^2 + z^2$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + 3z = 1$?

6. Determine y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2$$

7. Encuentre los máximos y mínimos locales y los puntos de silla de la función $f(x,y)$ dada por

$$f(x,y) = \frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$$