

# Cálculo 1

Godofredo Iommi



# Contents

<b>1</b>	<b>Numerabilidad</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Números Reales</b>	<b>7</b>
2.1	Axioma del Supremo . . . . .	7
2.2	Propiedad Arquimideana . . . . .	10
2.3	Teorema de los Intervalos Encajados . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Sucesiones</b>	<b>15</b>
3.1	Límite de Sucesiones . . . . .	15
3.2	Subsucesiones . . . . .	26
3.3	Sucesiones de Cauchy . . . . .	29
3.4	Límites Infinitos . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Límite de funciones</b>	<b>34</b>
4.1	Límite de Funciones . . . . .	34
4.2	Límites Laterales . . . . .	44
4.3	Límites Infinitos . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Funciones Continuas</b>	<b>49</b>
5.1	Funciones Continuas . . . . .	49
5.2	Discontinuidades . . . . .	55
5.3	Funciones Continuas en el Intervalo . . . . .	57
<b>6</b>	<b>La Derivada</b>	<b>63</b>
6.1	Definición y Ejemplos . . . . .	63
6.2	Interpretaciones de la Derivada . . . . .	70
6.3	Técnicas de derivación y derivadas de funciones elementales . . . . .	73
6.4	Funciones derivables en un intervalo . . . . .	84
6.5	Derivadas de Orden Superior . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>101</b>
7.1	Numerabilidad . . . . .	101
7.2	Axioma del Supremo . . . . .	101
7.3	Propiedad Arquimideana . . . . .	101
7.4	Teorema Intervalos Encajados . . . . .	102

7.5	Límite de sucesiones . . . . .	102
7.6	Subsucesiones . . . . .	103
7.7	Sucesiones de Cauchy . . . . .	103
7.8	Límites infinitos . . . . .	103
7.9	Límite de funciones . . . . .	103
7.10	Funciones Continuas . . . . .	104
7.11	Funciones Continuas en un Intervalo . . . . .	104
7.12	Técnicas de derivación . . . . .	105
7.13	Funciones derivables en el intervalo . . . . .	105
7.14	Derivadas de orden superior . . . . .	105

# Chapter 1

## Numerabilidad

En esta primera sección discutiremos la teoría de conjuntos numerables y no numerables desarrollada por G. Cantor durante la década de 1870. Para más detalles ver [L, Capítulo 2].

**Definition 1.0.1.** Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice *inyectiva* si dados dos elementos  $x, y \in A$  tales que  $f(x) = f(y)$  se tiene que  $x = y$ . Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice *sobreyectiva* si para todo  $z \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = z$ . Diremos que una función  $f : A \rightarrow B$  es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

**Definition 1.0.2.** Sea  $I_n = \{p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n\}$ . Diremos que un conjunto  $A$  es *finito* si existe  $n \in \mathbb{N}$  y una biyección  $F : I_n \rightarrow A$ .

**Remark 1.0.3.** Sea  $X \subset \mathbb{N}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) el conjunto  $X$  es finito.
- (b) el conjunto  $X$  es acotado.
- (c) el conjunto  $X$  posee un elemento máximo.

**Definition 1.0.4.** Diremos que un conjunto  $A$  es *numerable* si es finito o si existe una biyección  $F : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Caso contrario diremos que el conjunto es *no numerable*.

Si existe una biyección  $F : \mathbb{N} \rightarrow A$  diremos que la cardinalidad de  $A$  es igual a la del conjunto de los números naturales. Notemos que es posible que un subconjunto propio  $A \subset B$  tenga la misma cardinalidad que  $B$ . Es más, todo conjunto infinito numerable  $X$  posee un subconjunto propio  $Y \subset X$  tal que existe una biyección entre  $X$  e  $Y$ .

**Example 1.0.5.** El conjunto de los números pares  $2\mathbb{N} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto numerable y posee la misma cardinalidad que  $\mathbb{N}$ . En efecto, basta notar que la función  $F : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$  definida por  $F(n) = 2n$  es una biyección.

No es difícil construir biyecciones entre el conjunto de los números naturales y conjuntos de la forma  $k\mathbb{N} := \{kn : n \in \mathbb{N}\}$ . Es más, es posible construir una biyección entre el conjunto de los números primos y  $\mathbb{N}$ .

**Example 1.0.6.** El conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  es numerable. En efecto, basta considerar la biyección,  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , definida por

$$F(n) = \begin{cases} m & \text{si } n = 2m; \\ -m & \text{si } n = 2m - 1. \end{cases}$$

**Remark 1.0.7.** Las biyecciones son el morfismo que preserva la cardinalidad.

**Theorem 1.0.8.** *Todo subconjunto  $X$  de los números naturales es numerable.*

*Proof.* Si el conjunto es finito es numerable. Si fuese infinito definimos inductivamente una biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Sea  $f(1)$  el menor elemento de  $X$ . Supongamos que  $f(1), \dots, f(n)$  están definidos de modo que se satisfacen las siguientes condiciones:

- (a)  $f(1) < \dots < f(n)$ .
- (b) si  $B_n = X \setminus \{f(1), \dots, f(n)\}$  entonces para todo  $x \in B_n$  se tiene que  $f(n) < f(x)$ .

Como  $X$  es infinito se tiene que  $B_n \neq \emptyset$ , definimos  $f(n+1)$  como el menor elemento de  $B_n$ . Esto completa la definición de  $f$  y prueba que es inyectiva. Además se tiene que  $f$  es sobreyectiva. En efecto, si existe  $x \in X \setminus f(\mathbb{N})$  tendríamos  $x \in B_n$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x > f(n)$ . Por lo que el conjunto infinito  $f(\mathbb{N})$  poseería un elemento máximo. Esta contradicción prueba la afirmación.  $\square$

**Remark 1.0.9.** El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable. En efecto, basta probar que el conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es numerable. Para ello consideramos la función  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(n, m) = 2^m 3^n$ . Por la unicidad de la descomposición en números primos tenemos que  $f$  es inyectiva. Por lo tanto existe una biyección entre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  y  $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ .

**Example 1.0.10.** El conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es numerable. En efecto, basta notar que como el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$  es numerable, tenemos que el conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  también es numerable. Luego si consideramos la función sobreyectiva,  $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$  definida por

$$F(m, n) = \frac{m}{n},$$

tenemos que la cardinalidad de  $\mathbb{Q}$  es menor o igual a la de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , de donde se obtiene el resultado.

**Example 1.0.11.** El conjunto definido por

$$A = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \{0, 1\}\},$$

es no numerable.

*Proof.* En efecto, supongamos por el contrario que existe una biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Denotemos por

$$f(n) = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}, \dots).$$

Sea

$$\overline{x_{nm}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{nm} = 0, \\ 0 & \text{si } x_{nm} = 1, \end{cases}$$

La sucesión  $(\overline{x_{11}}, \overline{x_{22}}, \dots, \overline{x_{nn}}, \dots)$  no posee preimagen. Por lo tanto  $f$  no es una biyección. Esta contradicción prueba el resultado.  $\square$

**Theorem 1.0.12.** (*Cantor*) *El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  es no numerable.*

*Proof.* Considere el subconjunto de los números reales que se escriben en base dos como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},$$

donde  $x_n \in \{0, 1\}$ . En virtud del ejemplo anterior este subconjunto es no numerable.  $\square$

## Chapter 2

# Números Reales

### 2.1 Axioma del Supremo

El conjunto de los números reales, que denotaremos por  $\mathbb{R}$ , satisface diversas propiedades. Desde la perspectiva algebraica es un cuerpo. Es decir,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ , satisface todos los axiomas de cuerpo, por ejemplo, ambas operaciones son asociativas, conmutativas, poseen inversos y además son distributivas. El conjunto de los números racionales, que denotaremos por  $\mathbb{Q}$ , también posee estructura de cuerpo. Es posible, además, dotar al conjunto de los reales de un orden. En efecto, para ello basta definir la clase de *números positivos*  $\mathcal{P}$  (que es cerrada tanto para la suma como para el producto). Así, diremos que  $a$  es mayor que  $b$  si  $a - b \in \mathcal{P}$ . Notemos que los números racionales también poseen una estructura de orden, de hecho es la misma que se hereda de los números reales. En esta sección estudiaremos una propiedad que es exclusiva de los números reales y que no la satisface el conjunto de los números racionales, a saber, la completitud.

Los axiomas son postulados que asumiremos y a partir de los cuales se deben probar todas las propiedades de los números reales. Como mencionamos en el párrafo anterior, asumiremos tres tipos de axiomas: los de cuerpo (que describen la estructura algebraica de los números reales), los de orden y finalmente el axioma del supremo. Una pregunta natural es la existencia de un conjunto que satisfaga los axiomas antes enumerados. Este problema fue abordado durante el siglo XIX. Existen diversas construcciones de los números reales. Tres construcciones distintas fueron propuestas por Dedekind, Cantor y Weierstrass. A partir de los números naturales ellos fueron capaces de construir un conjunto que satisface los axiomas antes mencionados. Por su puesto, cabe la pregunta de si existe único conjunto que satisface estos axiomas (y por lo tanto las tres construcciones producen esencialmente el mismo conjunto). La respuesta es afirmativa, existe (esencialmente, salvo *isomorfismo*) un único conjunto que satisface los axiomas de cuerpo, orden y completitud. Tal conjunto se denomina conjunto de los números reales. En esta sección describiremos y discutiremos el axioma del supremo que describe la completitud del conjunto de los números



reales. Más detalles pueden encontrarse en los textos [A, CJ, L, I, K, S].

**Definition 2.1.1.** Sea  $A$  subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Diremos que  $b \in \mathbb{R}$  es cota superior de  $A$  si para todo  $a \in A$ , se tiene que  $a \leq b$ . Si  $A$  es un conjunto que posee cotas superiores diremos que  $A$  acotado superiormente.

**Example 2.1.2.** El número  $x = 5$  es cota superior para el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}.$$

**Example 2.1.3.** El conjunto  $(0, \infty)$  no posee cota superior.

**Definition 2.1.4.** Análogamente definimos cota inferior. Diremos que  $b \in \mathbb{R}$  es cota inferior de  $A$  si para todo  $a \in A$ , se tiene que  $b \leq a$ , en tal caso diremos que  $A$  es acotado inferiormente.

**Example 2.1.5.** El número  $x = 0$  es cota inferior para el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Definition 2.1.6.** Diremos que el conjunto  $A$  es acotado si es acotado superior e inferiormente.

**Remark 2.1.7.** Las cotas superiores e inferiores no son únicas, en efecto si  $b$  es cota superior para el conjunto  $A$ , entonces  $b + n$  es cota superior de  $A$  para todo  $n > 0$ .

**Definition 2.1.8.** Sea  $A$  un conjunto acotado superiormente (resp. inferiormente) de modo tal que  $b$  es cota superior (resp. inferior). Si  $b \in A$  entonces diremos que  $b$  es máximo (resp. mínimo) de  $A$ .

**Example 2.1.9.** El conjunto

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

no posee mínimo, pero el máximo es igual a 1.

**Example 2.1.10.** El conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\},$$

posee mínimo y es igual a 2, mientras que

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\},$$

no posee mínimo.

**Example 2.1.11.** El conjunto  $(2, 3]$  posee máximo igual a 3 y no posee mínimo.

**Definition 2.1.12.** Sea  $A$  un conjunto no vacío acotado superiormente. Diremos que el número  $a \in \mathbb{R}$  es el *supremo* de  $A$ , que denotaremos por  $\sup A = a$ , si satisface las siguientes propiedades:

- (a) El número  $a$  es cota superior de  $A$ ;
- (b) Si  $b$  es cota superior de  $A$ , entonces  $a \leq b$ .

Es decir,  $a$  es el supremo de  $A$  si es la menor de las cotas superiores.

**Remark 2.1.13.** Una condición equivalente a la segunda parte de la definición es,

- (a) Si  $b < a$ , entonces existe  $x \in A$  tal que  $b < x$ .

Otra forma de expresar la condición anterior es que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in A$  tal que  $a - \varepsilon < x \leq a$ . En efecto, en tal caso  $a - \varepsilon$  no es cota superior de  $A$ .

Análogamente podemos definir el ínfimo.

**Definition 2.1.14.** Sea  $A$  un conjunto no vacío acotado inferiormente. Diremos que el número real  $a$  es el ínfimo de  $A$ , que denotaremos por  $\inf A = a$ , si

- (a) El número  $a$  es cota inferior de  $A$ .
- (b) Si  $b$  es cota inferior de  $A$ , entonces  $b \leq a$ .

Es decir,  $a$  es el ínfimo de  $A$  si es la mayor de las cotas inferiores. Al igual que en la definición de supremo, tenemos una condición equivalente a la segunda parte de la definición,

- (a) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in A$  tal que  $a \leq x < a + \varepsilon$ .

El siguiente es el último axioma que asumiremos (además de los de cuerpo y orden). Existe un único conjunto que satisface estos tres conjuntos de axiomas, tal conjunto es el que denominamos de los números reales.

**Axioma del Supremo.** Todo subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$ , no vacío y acotado superiormente posee supremo.

**Remark 2.1.15.** Un conjunto que satisface el Axioma del supremo se dice completo. Así el conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado y completo.

**Remark 2.1.16.** Es posible deducir directamente a partir del Axioma del supremo que todo subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$ , no vacío y acotado inferiormente posee ínfimo.

**Example 2.1.17.** Pruebe que si  $A = (a, b)$ , entonces  $\inf A = a$ .

**Solución** De la definición del conjunto  $A$ , tenemos que  $x = a$  es cota inferior de  $A$ . Probaremos ahora que es la mayor de las cotas inferiores. Dado  $0 < \varepsilon < b - a$ , notamos que el número

$$c = a + \frac{\varepsilon}{2}$$

es tal que  $a < c$  y además

$$c < a + \varepsilon < a + b - a = b,$$

es decir  $c \in A$  y por lo tanto  $a + \varepsilon$  no es cota inferior de  $A$ . Por lo otra parte, si suponemos que  $\varepsilon \geq b - a$ , entonces  $b \leq a + \varepsilon$ . Luego, por la caracterización del ínfimo tenemos que  $\inf A = a$ .

## 2.2 Propiedad Arquimideana

Durante el siglo XIX varias construcciones de los números reales fueron exhibidas. La idea es comenzando con el conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ , llegar a construir el conjunto de los reales. Son conocidas ciertas extensiones de naturaleza algebraica que permiten extender el conjunto de los números naturales al conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ , agregando los inversos aditivos de todo elemento en  $\mathbb{N}$ . Agregando ahora los inversos multiplicativos de  $\mathbb{Z}$  y completando algebraicamente obtenemos el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$ . Los trabajos de Cantor, Dedekind y Weierstrass permiten a partir de los números racionales construir los reales. Notemos que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . El siguiente teorema, consecuencia del axioma del supremo, describe la contención  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ .

**Theorem 2.2.1** (Propiedad Arquimidiana). *Dado un número real  $x \in \mathbb{R}$ , existe un número natural  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x < n$ .*

*Proof.* Cabe notar que la afirmación anterior es equivalente a decir que el conjunto de los números naturales no es acotado superiormente. Ahora, supongamos por el contrario que sí lo es y que  $c = \sup \mathbb{N}$ . Entonces  $c - 1$  no es cota superior de  $\mathbb{N}$ , es decir, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$c - 1 < n.$$

Así

$$c < n + 1,$$

pero  $n + 1 \in \mathbb{N}$  y  $c = \sup \mathbb{N}$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $\mathbb{N}$  no es acotado superiormente.  $\square$

**Example 2.2.2.** Pruebe que el ínfimo del conjunto

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es igual a cero.

*Proof.* El número  $x = 0$  es cota inferior del conjunto ya que todos los elementos de éste son positivos. Supongamos que  $a = \inf A > 0$ . Es decir, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$0 < a < \frac{1}{n}.$$

Tenemos entonces que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple  $n < 1/a$  contradiciendo la propiedad arquimideana.  $\square$

**Example 2.2.3.** Demuestre que el ínfimo del conjunto

$$A = \left\{ \frac{|\sin(n)|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es igual a cero.

**Solución** Notemos que el número  $x = 0$  es cota inferior para el conjunto  $A$ , ya que  $|\sin(n)| \geq 0$  y  $n > 0$ . Probaremos ahora que  $x = 0$  es la mayor de las cotas inferiores. Dado  $\varepsilon > 0$ , debemos probar que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 < \frac{|\sin(n)|}{n} < \varepsilon.$$

Recordemos que  $|\sin(n)| \leq 1$ , luego

$$\frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

En virtud del Ejemplo 2.2.2 existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n_0 < \varepsilon$ . Por lo tanto,

$$0 < \frac{|\sin(n_0)|}{n_0} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Es decir, el número  $x = 0$  es la mayor de las cotas inferiores.

**Example 2.2.4.** Pruebe que

$$\inf \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

**Solución** Notemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $(1/2)^n > 0$ , por lo tanto  $x = 0$  es una cota inferior del conjunto. Notemos que para todo número natural  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $2^n > n$ , es decir,  $1/2^n < 1/n$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n_0 < \varepsilon$  y por lo tanto,

$$0 < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Es decir,  $x = 0$  es la mayor de las cotas inferiores.

El siguiente teorema describe ahora la inclusión,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Mostraremos que que  $\mathbb{Q}$  es *denso* en  $\mathbb{R}$ . Es decir, que todo intervalo no degenerado de números reales contiene números racionales.

**Theorem 2.2.5.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ , entonces existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $r \in (a, b)$ .

*Proof.* Sin pérdida de generalidad asumamos que  $0 \leq a < b$ . Para probar el resultado debemos encontrar  $m, n \in \mathbb{N}$  tales que  $a < m/n < b$ . Por la propiedad arquimidiaana existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n < b - a$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$m - 1 \leq na < m.$$

Notemos que tenemos que  $a < m/n$ . Notando por otra parte que  $a < b - 1/n$  tenemos que

$$m \leq na + 1 < n \left( b - \frac{1}{n} \right) + 1 = nb.$$

Como  $m < nb$  implica que  $m/n < b$  tenemos que el resultado.  $\square$

**Example 2.2.6.** Consideremos el subconjunto de  $\mathbb{Q}$  definido por

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

Determine el supremo de  $A$ .

**Solución** Como sub-conjunto de  $\mathbb{R}$  tenemos que  $\sup A = \sqrt{2}$ . Sin embargo,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Notemos que esto implica que para todo  $p/q \in \mathbb{Q}$  cota superior de  $A$  existe un número racional  $p'/q' \in \mathbb{Q}$  tal que  $p'/q'$  es cota superior de  $A$  y  $p'/q' < p/q$ . En efecto, en virtud del Teorema 2.2.5, en el intervalo  $(\sqrt{2}, p/q)$  existe un número racional  $p'/q'$ . De la discusión anterior tenemos que como subconjunto de  $\mathbb{Q}$  el conjunto  $A$  no posee supremo. En particular tenemos que  $\mathbb{Q}$  no es un cuerpo ordenado completo, ya que no satisface el axioma del supremo. Desde la perspectiva del Análisis la mayor carencia de los racionales es que no es completo. Es interesante notar que la construcción de los números reales llevada a cabo por Dedekind se basa en conjuntos de la forma de  $A$ , a estos Dedekind les llama *cortadura*. Notemos que el conjunto  $A$  se define utilizando números racionales, pero se identifica de manera clara con un irracional. Esta es la idea que desarrolla y formaliza Dedekind en su construcción.

Probaremos a continuación algunas propiedades del supremo y el ínfimo.

**Example 2.2.7.** Sea  $A \subseteq B$ . Pruebe que  $\sup A \leq \sup B$ .

**Solución** Notemos que  $\sup B$  es cota superior de  $B$ , es decir, para todo  $x \in B$  se tiene que  $x \leq \sup B$ . En particular, si  $y \in A$ , como  $A \subseteq B$ , tenemos que  $y \leq \sup B$ . Luego como  $\sup A$  es la menor cota superior de  $A$ , concluimos que

$$\sup A \leq \sup B.$$

**Example 2.2.8.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto acotado inferiormente y sea  $-A = \{-x : x \in A\}$ . Pruebe que  $-A$  es acotado superiormente y que  $\sup\{-A\} = -\inf\{A\}$ .

**Solución** Sea  $a$  cota inferior de  $A$ , es decir, para todo  $x \in A$  se tiene que  $x \geq a$ . De donde  $-a \geq -x$ . Recordemos que un elemento  $y \in -A$  es de la forma  $y = -x$ . Es decir, para todo  $y \in -A$  tenemos que  $-a \geq y$ . De donde, el conjunto  $-A$  es acotado superiormente y por lo tanto, posee supremo,  $\sup\{-A\}$ . Por otra parte, notemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $x' \in A$  tal que  $\sup\{-A\} - \varepsilon < -x' < \sup\{-A\}$ , es decir,  $-\sup\{-A\} < x' < \varepsilon - \sup\{-A\}$ . Por lo tanto  $-\sup\{-A\} = \inf\{A\}$ .

**Example 2.2.9.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío y acotado. Dado  $c > 0$  considere el conjunto

$$cA := \{cx : x \in A\}.$$

Pruebe que el conjunto  $cA$  es acotado (superior e inferiormente) y que  $\sup(cA) = c \sup A$ .

**Solución** Sea  $a \in \mathbb{R}$  cota superior de  $A$ , es decir, para todo  $x \in A$  se tiene que  $x \leq a$ . Como  $c > 0$  tenemos que  $cx \leq ca$ . Es decir  $ca$  es cota superior de  $cA$ . Análogamente, sea  $b \in \mathbb{R}$  cota inferior de  $A$ , es decir, para todo  $x \in A$  se tiene que  $x \geq b$ . Como  $c > 0$  tenemos que  $cx \geq cb$ . Es decir  $cb$  es cota inferior de  $cA$ . Así el conjunto  $cA$  es acotado.

Notemos que como  $\sup A$  es cota superior de  $A$  tenemos que  $\sup(cA) \leq c \sup A$ . En particular  $c \sup A$  es cota superior de  $cA$ . Por otra parte, notemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in A$  tal que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{c} < x \leq \sup A.$$

Multiplicando por  $c > 0$  obtenemos que

$$c \sup A - \varepsilon < cx \leq c \sup A.$$

Por lo tanto

$$\sup(cA) = c \sup A.$$

**Example 2.2.10.** Sea  $X \subset \mathbb{R}$ . Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada cuando  $f(X)$  es un conjunto acotado. Diremos que el supremo de una función  $f$  es  $\sup f = \sup\{f(x) : x \in X\}$ . Pruebe que si  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  son acotadas superiormente, entonces también lo es  $f + g$  y  $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ .

**Solución** Sea  $a_1$  cota superior de  $f$  y  $a_2$  cota superior de  $g$ , entonces es claro que para todo  $x \in X$  se tiene que  $f(x) + g(x) \leq a_1 + a_2$ , es decir,  $(f + g)(x)$  es acotado superiormente y posee supremo. Como  $\sup f + \sup g$  es cota superior tenemos que

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g. \quad (2.2.1)$$

**Remark 2.2.11.** Notemos que no siempre tenemos igualdad en la ecuación (2.2.1). En efecto, sean  $f(x) = x$  y  $g(x) = -x$  donde  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tenemos que  $\sup f = 1$  y  $\sup g = 1$ , sin embargo  $(f + g)(x) = x - x = 0$ , es decir,  $\sup(f + g) = 0$ .

**Example 2.2.12.** Considere el conjunto

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pruebe que  $A$  posee supremo e ínfimo.

**Solución** Sea

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Claramente  $0 < a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y además  $a_n \leq a_{n+1}$ . más aún

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 3,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , es decir, el conjunto  $A$  es acotado. El resultado se sigue en virtud del axioma del supremo.

## 2.3 Teorema de los Intervalos Encajados

El siguiente teorema es consecuencia del axioma del supremo y permite dar una intuición geométrica a la idea de completitud.

**Theorem 2.3.1** (Teorema de los Intervalos Encajados). *Considere una sucesión decreciente de intervalos cerrados y acotados*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

con  $I_n = [a_n, b_n]$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$c \in \bigcap_{n \geq 1} I_n.$$

*Proof.* Las inclusiones  $I_n \supset I_{n+1}$  significan que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

El conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  es acotado y por lo tanto, posee supremo  $c = \sup A$ . Claramente  $a_n \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y además como cada  $b_n$  es cota superior de  $A$ , entonces se tiene que  $c < b_n$ , luego  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## Chapter 3

# Sucesiones

### 3.1 Límite de Sucesiones

Una *sucesión* es una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. En vez de la notación usual, a saber  $f(n)$ , utilizaremos la siguiente:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  o a veces simplemente  $(x_n)$ . Así  $x_n = f(n)$ .

**Definition 3.1.1.** Sea  $(x_n)_n$  una sucesión real. Diremos que el límite de  $(x_n)_n$  cuando  $n$  tiende a infinito es igual a  $a$ , lo que denotaremos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que para cada  $n \geq N$  se tiene

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

**Remark 3.1.2.** Una sucesión que posee límite se dice *convergente*. En caso contrario, diremos que la sucesión es *divergente*.

**Example 3.1.3.** La sucesión  $(a_n)_n = a$  es claramente convergente con  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**Example 3.1.4.** Sea  $(a_n)_n = 1/n$ , demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Solución.** Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $x = 0$  es el ínfimo de  $(a_n)_n$  tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n_0 < \varepsilon$ . además como  $a_{n+1} < a_n$ , tendremos que  $1/n < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ , es decir,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

para todo  $n \geq n_0$ .



**Theorem 3.1.5** (Unicidad del límite). Sea  $(a_n)_n$  una sucesión convergente. Si se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

Entonces  $a = b$ .

*Proof.* Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  y  $b \neq a$ . Sea  $\varepsilon = |b - a|/2$ , entonces los intervalos  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  y  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  son disjuntos. Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  para todo  $n \geq n_0$ , es decir,  $a_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq b.$$

□

□

**Example 3.1.6.** La sucesión

$$(a_n)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

no es convergente.

**Theorem 3.1.7.** Toda sucesión convergente es acotada.

*Proof.* Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  y  $\varepsilon = 1$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se tiene que  $a_n \in (a - 1, a + 1)$ . Consideremos ahora el conjunto de elementos de la sucesión aún no estudiados, sea  $F = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a - 1, a + 1\}$ ,  $c = \min F$  y  $d = \max F$ , entonces  $c \leq a_n \leq d$ . Por lo tanto,  $\{a_n\}_n$  es acotada. □ □

**Example 3.1.8.** La sucesión  $(a_n)_n = n$  es divergente.

**Solución.** Es divergente pues no es acotada. En efecto, dado  $a \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $a_n > a + \varepsilon$  para  $n$  lo suficientemente grande.

**Remark 3.1.9.** Existen sucesiones acotadas que no son convergentes. Por ejemplo,

$$(a_n)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Diremos que la sucesión  $(a_n)$  es *creciente* si para todo  $n < m$  se tiene que  $a_n \leq a_m$ . Análogamente diremos que la sucesión  $(a_n)$  es *decreciente* si para todo  $n < m$  se tiene que  $a_n \geq a_m$ . En caso que las desigualdades sean estrictas diremos que las sucesiones son *estrictamente crecientes* y *estrictamente decrecientes*, respectivamente. Una sucesión se dice *monótona* si es creciente o decreciente.

**Theorem 3.1.10.** Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

*Proof.* Probaremos el caso en que la sucesión es creciente, el caso decreciente es completamente análogo. Sea  $(a_n)_n$  tal que  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$  y sea  $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Afirmamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . En efecto, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{n_0} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Como la sucesión es monótona, para todo  $n \geq n_0$  tenemos que  $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < a$ , es decir,  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  para  $n \geq n_0$ . □ □

**Example 3.1.11.** Cuando  $a = 0$  y  $a = 1$ , la sucesión  $(a^n)_n$  es constante y en consecuencia, convergente. Cuando  $a = -1$  la sucesión oscila y por tanto, no converge. Si  $a > 1$  entonces la sucesión no es acotada y por lo tanto diverge, y lo mismo sucede cuando  $a < -1$ . Consideremos el caso en que  $a \in (0, 1)$ . Entonces la sucesión  $1, a, a^2, a^3, \dots$  es decreciente y acotada. Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

En efecto, notemos que para  $b > 1$  la sucesión  $x_n = b^n$  es creciente y no es acotada superiormente. Esto es consecuencia de la desigualdad de Bernoulli (Si  $x > -1$  entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ), si  $b = 1+d$  se tiene que para  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $b^n \geq 1+nd$ . Así para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{a^N} \geq n.$$

Luego, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ , entonces  $a^n < \varepsilon$ .

**Example 3.1.12.** Sea  $0 < a < 1$  y  $a_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ . Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1-a}.$$

**Solución.** Notemos que  $a_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ , luego

$$\left| a_n - \frac{1}{1-a} \right| = \left| \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{1-a} \right|.$$

En virtud del ejemplo 6.4.24 tenemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$  entonces  $a^{n+1} < \varepsilon|1-a|$ . Luego, si  $n > n_0$  entonces  $\frac{a^{n+1}}{1-a} < \varepsilon$ , es decir,

$$\left| a_n - \frac{1}{1-a} \right| < \varepsilon.$$

**Example 3.1.13.** Demuestre que la siguiente sucesión es convergente:

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n},$$

acote el valor de su límite.

**Solución.** La sucesión  $(a_n)_n$  es decreciente y acotada inferiormente, en efecto:

(a) Es claro que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $0 < a_n$ , ya que  $a_n$  es el cuociente de reales positivos. Por lo tanto es acotada inferiormente.

(b) Notemos que

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

y  $\frac{2n}{2n+1} < 1$ , es decir  $a_{n+1} < a_n$ . Por lo tanto la sucesión es decreciente.

Luego, la sucesión es convergente. Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . Notemos que  $L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}$  y que todos los elementos de la sucesión son positivos, por lo tanto

$$0 \leq L \leq \frac{1}{2}.$$

**Example 3.1.14.** Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2} \text{ para } n > 1,$$

es convergente. Calcule su límite.

**Solución.** La sucesión es creciente. En efecto, probaremos el resultado por inducción. Notemos que el resultado es válido para los dos primeros términos

$$a_1 = 2 < 4 = a_2.$$

Supongamos ahora que  $a_n < a_{n+1}$ . Entonces

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2} < \frac{a_{n+1} + 6}{2} = a_{n+2}.$$

Por lo tanto la sucesión es creciente. Notemos además que es acotada superiormente. En efecto,  $a_1 = 2 < 6$ . Supongamos que  $a_n < 6$ , entonces

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2} < \frac{6 + 6}{2} = 6.$$

Hemos probado que la sucesión es creciente y acotada superiormente. Por lo tanto es convergente. Denotemos por  $L$  su límite. Así, por álgebra de límites,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} + 6}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 6}{2} = \frac{L + 6}{2}.$$

Luego

$$L = \frac{L + 6}{2}$$

De donde

$$L = 6.$$

**Example 3.1.15.** Sea  $a > 0$ . Definimos la siguiente sucesión

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Demuestre la sucesión es decreciente, acotada inferiormente y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$$

**Solución.** Probaremos que para  $n \geq 2$  la sucesión es acotada inferiormente por  $\sqrt{a}$ . Es decir,

$$\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{a}.$$

Elevando al cuadrado, la expresión anterior es equivalente a

$$\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 \geq 4a.$$

Tenemos que para todo  $x > 0$

$$\left(x - \frac{a}{x}\right)^2 \geq 0,$$

es decir  $x^2 - 2a + \frac{a^2}{x^2} \geq 0$ . Sumando  $4a$  obtenemos que

$$x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2} \geq 4a.$$

Luego

$$\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 = x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2} \geq 4a = (2\sqrt{a})^2.$$

De donde

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{a}.$$

Por lo tanto, para todo  $n \geq 1$  tenemos que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a}.$$

Probaremos ahora que la sucesión es decreciente. Notemos que si  $x^2 \geq a$  entonces

$$\frac{1}{4} \left(x + \frac{a}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \left(x + \frac{x^2}{x}\right)^2 = x^2.$$

En particular, como  $x_n^2 \geq a$  tenemos que  $x_{n+1}^2 \leq x_n^2$ . Como todos los términos de la sucesión son positivos podemos concluir que

$$x_{n+1} \leq x_n.$$

Hemos probado que la sucesión  $(x_n)$  es decreciente y acotada inferiormente, por lo tanto es convergente.

Sea  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , entonces por álgebra de límites

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}\right) = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L}\right).$$

De donde

$$2L^2 = L^2 + a,$$

Como  $L \geq 0$  concluimos que  $L = \sqrt{a}$ .

**Theorem 3.1.16.** Sean  $(a_n)_n, (b_n)_n$  dos sucesiones. Si  $(a_n)_n$  es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

y  $(b_n)_n$  es una sucesión acotada, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

(incluso si  $(b_n)_n$  no es convergente.)

*Proof.* Sabemos que existe  $C > 0$  tal que  $|b_n| < C$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $a_n \rightarrow 0$ , existe  $n_0$  tal que si  $n > n_0$ , entonces  $a_n < \varepsilon/C$ . Luego,  $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon$ .  $\square$

**Example 3.1.17.** Sea  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0,$$

ya que la sucesión  $a_n = 1/n$  converge a 0 y  $|\sin(nx)| \leq 1$ .

**Example 3.1.18.** Sea  $a \in [0, 1]$ , entonces como la sucesión  $(a^n)$  es acotada y  $1/n^2 \mapsto 0$  tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^2} = 0.$$

**Example 3.1.19.** Sea  $a_n = (-1)^n$ , entonces se sigue directamente del Teorema 3.1.16 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0$ .

**Theorem 3.1.20.** Sean  $(a_n)_n, (b_n)_b$  dos sucesiones tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Entonces

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ .
- (c) Si  $b \neq 0$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .

*Proof.* Probaremos sólo el primer caso. Dado  $\epsilon > 0$  existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tales que si  $n > n_1$  entonces  $|x_n - a| < \epsilon/2$ . Por otra parte, si  $n > n_2$  entonces  $|y_n - b| < \epsilon/2$ . Sea  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Si  $n > n_0$  tenemos que

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \epsilon.$$

$\square$

**Remark 3.1.21.** Es importante notar que el teorema 3.1.20 sólo es válido bajo la hipótesis de que tanto la sucesión  $(a_n)_n$  como la sucesión  $(b_n)_n$  convergen. De otro modo no es posible hacer ningún tipo de afirmación como vemos en los siguientes ejemplos. Sea  $c_n = 0$  la sucesión constante igual a cero, entonces

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-n).$$

Sea  $d_n = 1$  la sucesión constante igual a uno. Entonces

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \neq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n}.$$

**Theorem 3.1.22** (Sandwich). Sean  $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$  tres sucesiones tales que  $x_n \leq z_n \leq y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $x_n \rightarrow a$  e  $y_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $z_n \rightarrow a$  cuando  $\infty$ .

*Proof.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $n_1, n_2 > 0$  tales que si  $n > n_1$ , entonces  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  y si  $n > n_2$ , entonces  $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Si tomamos  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , entonces para todo  $n > n_0$  tendremos

$$a - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq a + \varepsilon.$$

□

□

**Example 3.1.23.** La sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , converge. En efecto, notemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que

$$\frac{n}{n^2 + n} + \frac{n}{n^2 + n} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \leq a_n.$$

Luego

$$\frac{n}{n^2 + n} + \frac{n}{n^2 + n} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} = n \left( \frac{n}{n^2 + n} \right) = \frac{n^2}{n^2 + n} \leq a_n.$$

Por otra parte, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que

$$a_n \leq \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Así

$$a_n \leq \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 1} \leq n \left( \frac{n}{n^2 + 1} \right) = \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Luego,

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1.$$

Por le Teorema del Sandwich (Teorema 3.1.22) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

**Theorem 3.1.24.** Sean  $(x_n)_n, (y_n)_n$  dos sucesiones convergentes. Si  $x_n \leq y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ , entonces  $x \leq y$ .

*Proof.* En efecto si  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , entonces

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n).$$

De donde podemos concluir que para  $n$  suficientemente grande  $x_n > y_n$ . Esta contradicción prueba el resultado.  $\square$

**Remark 3.1.25.** Si sólo suponemos  $x_n < y_n$  no es posible concluir que  $x < y$ . Basta considerar las sucesiones  $x_n = 0$  e  $y_n = 1/n$ .

El resto de esta sección está dedicado a desarrollar ejemplos.

**Example 3.1.26.** Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2}{n^3}.$$

**Solución.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right) = 0.$$

**Example 3.1.27.** Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}.$$

**Solución.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - (n-1)^4}{n(n^3 - (n-1)^3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 6n^2 + 4n - 1}{-3n^3 + 3n^2 - n} = -\frac{4}{3}$$

**Example 3.1.28.** Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}.$$

**Solución.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

**Example 3.1.29.** Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},$$

es convergente.

**Solución.** Notemos que el límite  $L$  buscado es,

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = L.$$

En primer lugar probaremos que la sucesión es creciente, es decir que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $a_n \leq a_{n+1}$ . Notemos que

$$\sqrt{2} = a_1 \leq a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Supongamos que  $a_n \leq a_{n+1}$ . Tenemos que

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ si y sólo si } \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}} \text{ si y sólo si } a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

Probaremos ahora que la sucesión es acotada superiormente por  $C = 10$ , es decir que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $a_n \leq 10$ . Notemos que  $a_1 = \sqrt{2} \leq 10$ . Supongamos que  $a_n \leq 10$ . Tenemos que

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{12} \leq 10.$$

Así, la sucesión  $(a_n)$  es creciente y acotada superiormente, por lo tanto es convergente. Denotemos por  $L$  el valor del límite. Si asumimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ , lo que es cierto, pero aún no hemos demostrado. Entonces

$$L = \sqrt{2 + L} \text{ si y sólo si } L^2 - L - 2 = 0.$$

Luego, como  $a_n > 0$ , tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = 2.$$

**Example 3.1.30.** Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

**Solución.**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \end{aligned}$$

**Example 3.1.31.** Considere la sucesión

$$a_n = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n.$$

Decida su convergencia.



**Solución.** Por la fórmula del binomio tenemos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{n!}\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Así la sucesión  $\{a_n\}_n$  es creciente ya que a medida que crece  $n$  no solo el número de sumandos aumenta (estos son positivos) sino que además cada sumando crece. Probamos que la sucesión

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

es acotada. Como

$$\begin{aligned} &1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

obtenemos el resultado. Denotaremos por  $e$  el límite de ésta sucesión.

**Example 3.1.32.** Considere la sucesión

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

Decida su convergencia.

**Solución.** Probaremos que la sucesión es decreciente, como todos sus términos son positivos, esto implica su convergencia. Notemos que  $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$  si y sólo si

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

En efecto, basta elevar a la potencia  $n(n+1)$ . Es decir,

$$n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Como en virtud de los problemas anteriores tenemos que

$$3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

El resultado es válido a partir de  $n = 3$ . Así hemos probado que  $a_n$  es decreciente (a partir de su tercer término) y acotada por lo tanto converge.

**Example 3.1.33.** Si  $x_n > 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Solución.** En efecto, sea  $a < c < 1$ , entonces para  $n$  suficientemente grande, tenemos que

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < c,$$

es decir,

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} x_n < c x_n < x_n.$$

Luego, la sucesión  $(x_n)_n$  es monótona y acotada y por lo tanto convergente. Sea  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Como

$$x_{n+1} < c x_n,$$

tenemos que si  $n \rightarrow \infty$  entonces

$$b \leq c b \Rightarrow (1 - c)b \leq 0.$$

Pero como  $b \geq 0$  y  $1 - c > 0$ , concluimos que  $b = 0$ .

**Example 3.1.34.** Como aplicación del ejemplo anterior, tenemos que si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

**Solución.** En efecto, si consideramos  $x_n = n^k/a^n$ , entonces tenemos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a \cdot a^n} : \frac{n^k}{a^n} = \frac{(n+1)^k}{a n^k} = \frac{1}{a} \left( \frac{n+1}{n} \right)^k = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^k,$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a} < 1.$$

Si  $y_n = a^n/n!$ , entonces

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)n!} : \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1},$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 0.$$

Si  $z_n = n!/n^n$ , entonces

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n!(n+1)n^n}{n!(n+1)(n+1)^n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n,$$

luego

$$\lim_{\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

## 3.2 Subsucesiones

Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión y sea  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$  un subconjunto de cardinalidad infinita de los números naturales. Llamaremos *subsucesión* de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a la sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ .

**Example 3.2.1.** Considere la siguiente sucesión

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Las siguientes son algunas subsucesiones de  $(a_n)$ . La sucesión formada por los números pares  $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  y la sucesión formada por los números impares  $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Ambas subsucesiones son convergentes, en efecto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 0.$$

La demostración del siguiente resultado es sencilla.

**Theorem 3.2.2.** Sea  $(a_n)_n$  una sucesión convergente con límite igual a  $b$ , entonces toda subsucesión converge a  $b$ .

*Proof.* En efecto, sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  una subsucesión. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0$  se tiene que  $a_n \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$ . Como el subconjunto  $\mathbb{N}'$  es de cardinalidad infinita, existe  $n_1 \in \mathbb{N}'$  tal que  $n_1 > n_0$ . Luego, para todo  $n \in \mathbb{N}'$  tal que  $n > n_1$  se tiene que  $a_n \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$ .  $\square$

**Example 3.2.3.** Consideremos la sucesión  $a_n = \sqrt[n]{a}$  para  $a > 0$ . Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**Solución.** Si  $a > 1$  la sucesión es decreciente y si  $a \in (0, 1)$  la sucesión es creciente. En ambos casos es acotada, por lo que posee límite. Sea  $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ . Tenemos que  $L > 0$ , en efecto, si  $a \in (0, 1)$  entonces  $a^{1/n} > a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de donde  $L \geq a$ . Si  $a > 1$  entonces  $a^{1/n} > 1$ , de donde  $L \geq 1$ . Consideremos la subsucesión  $a^{1/(n(n+1))}$ . Notemos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Luego

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/(n(n+1))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{1/n}}{a^{1/(n+1)}} = \frac{L}{L} = 1.$$

**Example 3.2.4.** Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Solución.** Ya hemos probado que esta sucesión converge. Sea  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ . Notemos que  $l = \inf\{n^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ , por lo tanto  $l \geq 1$ . Consideremos la subsucesión  $(2n)^{1/2n}$ . Tenemos que

$$l^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (2n)^{\frac{1}{2n}} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = l.$$

Como  $l \neq 0$  tenemos que  $l = 1$ .

**Example 3.2.5.** Sea  $\{b_k\}$  una sucesión acotada. Se define una sucesión  $\{a_n\}$  por medio de:

$$a_n = \sup \{b_k; k \geq n\}.$$

Demuestre que  $\{a_n\}$  es convergente.

**Solución.** Recordemos que si  $A \subset B$  entonces  $\sup A \leq \sup B$ . Como  $\{b_k : k \geq n+1\} \subset \{b_k : k \geq n\}$  tenemos que

$$a_{n+1} = \sup \{b_k : k \geq n+1\} \leq \sup \{b_k : k \geq n\} = a_n,$$

es decir, la sucesión es decreciente. Por otro lado, como  $\{b_n\}_n$  es acotada inferiormente existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $m \leq b_n$ . Como además, para todo  $k \geq n$  se tiene que  $a_n \geq b_n$ , obtenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\{a_n\}_n$  es acotada inferiormente. por lo tanto es convergente. Llamaremos *límite superior* al número

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := \limsup b_n.$$

**Theorem 3.2.6.** Toda sucesión  $(a_n)_n$  posee una subsucesión monótona.

*Proof.* Sean

$$A = \{i \in \mathbb{N} : a_i \leq a_j \text{ excepto para un número finito de índices } j\}$$

$$B = \{i \in \mathbb{N} : a_i \geq a_j \text{ excepto para un número finito de índices } j\},$$

y consideremos además el complemento  $C = \mathbb{N} \setminus (A \cup B)$ .

Si el conjunto  $A$  contiene infinitos elementos entonces para cada  $i \in A$  existe  $j \in A$  con  $j > i$  tal que  $a_i \leq a_j$ . Por lo tanto podemos definir una subsucesión monótona decreciente escogiendo los índices del siguiente modo:

$$n_1 = \min A \text{ y } n_{k+1} = \min \{i \in A : n_{k+1} > n_k \text{ y } a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}}\}.$$

Si conjunto  $B$  contiene infinitos elementos entonces podemos construir una subsucesión no creciente de manera análoga.

En caso que tanto  $A$  como  $B$  sean conjuntos finitos, entonces para cada  $i \in C$  existen enteros  $j, k \in C$  con  $j > i, k > i$  tal que  $a_i < a_j$  y  $a_i > a_k$ . Del mismo modo podemos construir subsucesiones decrecientes y crecientes.  $\square$

**Corollary 3.2.7.** Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

*Proof.* Basta notar que como toda sucesión  $(a_n)_n$  posee una subsucesión monótona. Si suponemos además que  $(a_n)_n$  es acotada, entonces existe una subsucesión monótona y acotada.  $\square$

**Example 3.2.8.** Demuestre que si  $(a_n)_n$  es una sucesión acotada tal que  $a_n \neq 0$  entonces existe una subsucesión  $(b_n)_n$  de  $(a_n)_n$  tal que la sucesión  $\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)_n$  converge.

Consideramos dos casos. Supongamos en primer lugar que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|a_k| \geq \epsilon$  para infinitos valores  $k \in \mathbb{N}$ . Sea  $(b_n)_n$  la subsucesión formada por dichos elementos. Entonces

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq \frac{\sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}}{\epsilon}.$$

Como la sucesión de los cuocientes es acotada existe una subsucesión convergente. Consideremos ahora el caso restante. Existe una subsucesión  $(b_n)_n$  tal que  $|b_{n+1}| < |b_n|$ . En este caso la sucesión del módulo de los cuocientes también es acotada, de donde se tiene el resultado.

Concluimos esta sub-sección con el siguiente lema probado por Michael Fekete en 1939. Probaremos que una sucesión sub-aditiva converge.

**Example 3.2.9.** Demuestre que si la sucesión  $(a_n)$  es sub-aditiva, es decir, para todo  $n, m \in \mathbb{N}$  se tiene que  $a_{n+m} \leq a_n + a_m$  entonces el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n},$$

existe o es igual a menos infinito.

**Solución.** Supondremos que el límite no es menos infinito. La prueba en ese caso es más sencilla y se deduce de la que presentamos. Sea  $\alpha = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Sea  $\epsilon > 0$  y  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{a_m}{m} < \epsilon + \alpha.$$

Notemos que todo número natural  $n$ , puede escribirse de la forma  $n = qm + r$  donde  $r \in \mathbb{Z}$  es tal que  $0 \leq r \leq m - 1$ . Definimos  $a_0 = 0$ . Tenemos entonces

$$a_n = a_{qm+r} \leq a_m + a_m + \dots + a_m + a_r = qa_m + a_r.$$

Así

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{qa_m + a_r}{qm+r} = \frac{a_m}{m} \frac{qm}{qm+r} + \frac{a_r}{n}.$$

El resultado se obtiene notando que

$$\alpha \leq \frac{a_n}{n} < (\alpha + \epsilon) \frac{qm}{qm+r} + \frac{a_r}{n}.$$

### 3.3 Sucesiones de Cauchy

Es posible dar una definición equivalente de convergencia para una sucesión. La ventaja de la siguiente caracterización de sucesión convergente es que no es necesario conocer el límite. En efecto, basta probar que para valores suficientemente grandes de los índices  $n, m \in \mathbb{N}$ , los valores de la sucesión  $x_n$  y  $x_m$  están arbitrariamente cerca.

**Definition 3.3.1.** Sea  $(x_n)_n$  una sucesión. Diremos que  $(x_n)_n$  es una *sucesión de Cauchy* si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m > n_0$  se tiene que  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

**Theorem 3.3.2.** Una sucesión  $(x_n)_n$  es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

*Proof.* Probaremos en primer lugar que toda sucesión convergente es de Cauchy. Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Es decir, dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$  entonces  $|x_n - a| < \epsilon/2$  y si  $m > N$  entonces  $|x_m - a| < \epsilon/2$ . Luego, si  $n, m > N$  tenemos que

$$|x_m - x_n| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto  $(x_n)_n$  es una sucesión de Cauchy.

Probaremos ahora que toda sucesión de Cauchy es acotada. Para ello consideremos  $\epsilon = 1$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m > n_0$  se tiene que  $|x_n - x_m| < 1$ . Luego si  $n > n_0$  tenemos que  $|x_n - x_{n_0}| < 1$ . Considerando  $x^* := \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x_{n_0}-1, x_{n_0}+1\}$  y  $x_* := \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x_{n_0}-1, x_{n_0}+1\}$  tenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in [x_*, x^*].$$

A continuación probaremos que si una sucesión de Cauchy  $(x_n)_n$  posee una subsucesión que converge al punto  $a$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m > N$  entonces  $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ . Existe también  $n_1 > n_0$  tal que  $|x_{n_1} - a| < \epsilon/2$ . Luego para  $n > n_0$  tenemos que

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \epsilon.$$

Finalmente, podemos probar que toda sucesión de Cauchy converge. Para ello, basta notar que es acotada y que por lo tanto posee una subsucesión convergente. En vista de lo anterior, la sucesión converge. □

### 3.4 Límites Infinitos

Sea  $(x_n)_n$  una sucesión de números reales. Diremos que  $(x_n)_n$  tiende a más infinito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

si y sólo si para todo  $A > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se tiene que  $x_n > A$ .

**Remark 3.4.1.** En esta definición hemos cambiado una vecindad del punto  $a$ , es decir, un conjunto de la forma  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  por una vecindad de *infinito*. En efecto, conjuntos de la forma  $(A, +\infty)$ , con  $A$  suficientemente grande, pueden entenderse como vecindades de infinito. Con este punto de vista, la definición de  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , coincide con la de una sucesión convergente. Hay que considerar, por cierto, la diferencia obvia que emana del hecho que infinito no es un número real.

Análogamente diremos que la sucesión  $(x_n)_n$  tiende a menos infinito, y anotaremos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = +\infty.$$

**Example 3.4.2.** El siguiente resultado es consecuencia directa de la propiedad arquimideana.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

**Example 3.4.3.** Si  $a > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty.$$

**Solución.** En efecto, si  $a > 1$ , entonces podemos escribir  $a = 1 + h$  con  $h > 0$ . Sea  $A > 0$ , entonces  $a^n = (1 + h)^n > 1 + nh > A$ , siempre que  $n > (A - 1)/h$ . Luego, basta escoger  $n_0 > (A - 1)/h$ .

**Remark 3.4.4.** En general, una sucesión creciente es convergente si es acotada y tiene límite infinito si no es acotada.

**Example 3.4.5.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = +\infty,$$

para  $p \in \mathbb{N}$ .

**Example 3.4.6.** La sucesión  $x_n = (-1)^n n$  no tiene límite ni  $+\infty$  ni  $-\infty$ . En efecto la subsucesión  $(x_{2n})$  tiende a más infinito y la subsucesión  $(x_{2n-1})$  tiende a menos infinito.

**Example 3.4.7.** La sucesión

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, \\ k & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

no posee límite. En efecto, la subsucesión  $(a_{2n+1})$  converge a cero, mientras que la subsucesión  $(a_{2n})$  tiende a más infinito.

**Remark 3.4.8.** Los números  $+\infty$  y  $-\infty$  no son números reales. Por lo tanto si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  la sucesión  $(a_n)$  no converge.

**Theorem 3.4.9** (Operaciones Aritméticas con Límites Infinitos). Sean  $(x_n)_n, (y_n)_n$  dos sucesiones, entonces se tiene que

- (a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  e  $(y_n)_n$  es acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

- (b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  y existe  $c > 0$  tal que  $y_n > c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty.$$

- (c) Sea  $x_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty.$$

- (d) Si  $x_n, y_n \geq 0$ , entonces

- (a) Si existe  $c > 0$  tal que  $x_n > c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y si  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

- (b) Si  $(x_n)_n$  es acotada y  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

**Remark 3.4.10.** No es posible decir nada en el caso que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$

**Example 3.4.11.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) = +\infty.$$

**Remark 3.4.12.** Tampoco es posible hacer ninguna afirmación general en el caso de un cociente del tipo infinito sobre infinito.

**Example 3.4.13.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = +\infty.$$

**Example 3.4.14.** Sea  $a > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$



**Solución.** En efecto, si tomamos  $a = 1 + h$  con  $h > 0$ , luego si  $n \geq 2$

$$a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

y por lo tanto,

$$\frac{a^n}{n} \geq \frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2,$$

y como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2 \right) = +\infty,$$

se tiene el resultado.

**Example 3.4.15.** Sea  $a > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty.$$

**Solución.** En efecto, si tomamos  $a = 1 + h$  con  $h > 0$ , luego si  $n \geq 3$

$$a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3,$$

y por lo tanto,

$$\frac{a^n}{n^2} \geq \frac{1}{n^2} + \frac{h}{n} + \frac{n-1}{2n}h^2 + \frac{n}{3!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) h^3,$$

y por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty.$$

Ahora, con esto podemos además deducir que dado  $p \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty.$$

**Example 3.4.16.** Para todo real  $a > 0$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty.$$

**Solución.** En efecto, sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0/a > 2$ , entonces si denotamos  $K = n_0!/a^{n_0}$  tenemos que para todo  $n > n_0$ ,

$$\frac{n!}{a^n} = K \cdot \frac{(n_0+1)}{a} \frac{(n_0+2)}{a} \dots \frac{n}{a} > K 2^{n-n_0},$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty,$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = +\infty.$$

**Remark 3.4.17.** Es importante notar que existen sucesiones  $(a_n)_n$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ , pero la sucesión  $(a_n)_n$  no converge. Considere, por ejemplo, la sucesión definida por  $a_n = \sqrt{n}$ . Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Existen muchos ejemplos de este tipo. Si  $b_n = \log n$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_{n+1} - b_n| = 0$ . Incluso, existen ejemplos en que la sucesión es acotada, a saber  $c_n = \sin(\sqrt{n})$ . La sucesión  $(c_n)_n$  es acotada y oscila. Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

## Chapter 4

# Límite de funciones

### 4.1 Límite de Funciones

En esta sección estudiaremos una generalización de la noción de límite para funciones definidas en sub-conjuntos arbitrarios de los números reales,  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si bien nociones informales de límite se utilizaban en matemática desde antiguo, es quizás con Fermat que se hace evidente la necesidad de formalizar esta noción. Cauchy, en algunas demostraciones que aparecen su famoso texto *Cours d'Analyse*, utiliza argumentos similares al método  $(\epsilon, \delta)$ . Es finalmente Bolzano, en 1817, y luego Weierstrass quienes, por vez primera, formulan una definición rigurosa de la noción de límite. Por cierto, esta se relaciona con la construcción formal del conjunto de los números reales. Más detalles pueden encontrarse en los textos [A, CJ, L, I, K, S].

Un punto  $a \in \mathbb{R}$  se dice *punto de acumulación de  $X$*  si para todo  $\epsilon > 0$  se tiene que  $X \cap (a - \epsilon, a + \epsilon) \setminus \{a\} \neq \emptyset$ . Es decir, es un punto que puede aproximarse por elementos, distintos del propio punto, pertenecientes al conjunto  $X$ . En una primera lectura es quizás más sencillo suponer que el conjunto  $X$  es un intervalo, en cuyo caso, todos los puntos de  $X$  son puntos de acumulación.

**Definition 4.1.1.** Sea  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función real. Diremos que el número real  $L$  es el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a “ $a$ ”, lo que denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$  y  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

**Remark 4.1.2.** Es importante recordar que si  $c, d \in \mathbb{R}$  son dos números reales entonces  $|c - d|$  es la distancia entre ambos puntos. Así, la expresión  $|x - a|$  es la distancia entre  $x$  y  $a$  y la expresión  $|f(x) - L|$  es la distancia entre  $f(x)$  y  $L$ . Esta simple observación permite generalizar la definición de límite que hemos dado a espacios métricos arbitrarios.

**Remark 4.1.3.** Notemos que la condición  $0 < |x - a| < \delta$  significa que el punto  $x$  esté cerca de  $a$ , pero que es distinto de  $a$ .

**Remark 4.1.4.** Notemos que en nuestra definición no exigimos que el punto  $a$  pertenezca al dominio de  $f$ . Podría suceder que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $a \notin X$ .

**Remark 4.1.5.** Incluso si  $a \in X$ , la definición  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  nada dice sobre el valor  $f(a)$ . En efecto si consideramos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 1$  para todo  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0).$$

**Example 4.1.6.** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función constante  $f(x) = c$ .

*Proof.* Sea  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$ . Con lo que se prueba el resultado.  $\square$

**Example 4.1.7.** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por  $f(x) = x$ .

*Proof.* Sea  $\epsilon > 0$  y  $\delta = \epsilon$ . Si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \epsilon$ . Con lo que se prueba el resultado.  $\square$

**Example 4.1.8.** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2,$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se define por  $f(x) = x^2$ .

*Proof.* Sea  $\epsilon > 0$ , es necesario probar que existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$ , es decir,  $a - \delta < x < \delta + a$  entonces  $a^2 - \epsilon < x^2 < a^2 + \epsilon$ . Notemos que

$$|x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < \delta|x + a| \quad \text{y} \quad |x + a| = |x - a + 2a| \leq |x - a| + |2a| < \delta + |2a|,$$

así  $|x^2 - a^2| < \delta(\delta + |2a|)$ . Luego, basta escoger  $\delta > 0$  tal que  $\delta(\delta + |2a|) < \epsilon$ . Notemos que tal valor de  $\delta$  existe por la propiedad arquimideana.  $\square$

**Example 4.1.9.** Sea  $a > 0$ . Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

*Proof.* Notemos que para todo  $x \geq 0$ , se tiene que

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}(\sqrt{x} - \sqrt{a}) = \frac{x - a}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}.$$

Por lo tanto,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq |x - a| \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ . Luego, si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|x - a| < \sqrt{a}\varepsilon$ , es decir,

$$\frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon.$$

□

**Theorem 4.1.10** (Unicidad del límite). Sea  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2,$$

entonces  $L_1 = L_2$ .

*Proof.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $\delta_1 > 0$  tal que, si  $0 < |x - a| < \delta_1$  entonces  $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ . Existe, también,  $\delta_2 > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta_2$  entonces  $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Luego, si  $0 < |x - a| < \delta$  (en particular menor que  $\delta_1$  y  $\delta_2$ ), se tiene que

$$|L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_2| + |L_1 - f(x)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $L_1 = L_2$ .

□

**Theorem 4.1.11.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, entonces  $f$  es acotada en una vecindad de  $a$ . Es decir, existe  $A > 0$  y  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta$  con  $x \in X$ , entonces  $|f(x)| \leq A$ .

*Proof.* Sea  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Sea  $\varepsilon = 1$ , luego existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - L| < 1$  y por lo tanto tendremos

$$|f(x)| < |L| + 1.$$

Si  $f$  no está definida en  $x = a$ , basta tomar  $A = |L| + 1$ . Si  $f$  está definida en  $x = a$  entonces basta escoger  $A = \max\{|L| + 1, f(a)\}$ . □ □

**Theorem 4.1.12.** Sea  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$  y  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si para todo  $x \in X$ ,  $x \neq a$  se tiene que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

*Proof.* Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta_1$  entonces  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ . Por otra parte si  $0 < |x - a| < \delta_2$  entonces  $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ . Luego, escogiendo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  tenemos que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

De donde

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

□

□

**Theorem 4.1.13.** Sea  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$ . Si  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  son tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  con  $L < M$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  se tiene que  $f(x) < g(x)$ .

*Proof.* Sea  $0 < \varepsilon < (M - L)/2$  entonces  $L + \varepsilon < M - \varepsilon$  y existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta_1$  entonces  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  y si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta_2$  entonces  $g(x) \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  entonces

$$f(x) < L + \varepsilon = M - \varepsilon < g(x).$$

□

□

**Corollary 4.1.14.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $f(x) > 0$ .

**Corollary 4.1.15.** Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , entonces  $L \leq M$ .

**Theorem 4.1.16.** Sea  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si y sólo si para toda sucesión  $(x_n)_n \subset X \setminus \{a\}$  tal que  $x_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

*Proof.* Supongamos primero que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $x_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$  con  $(x_n)_n \subset X \setminus \{a\}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Luego, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0$  se tiene  $0 < |x_n - a| < \delta$ . Luego, si  $n > n_0$  entonces  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

Supongamos ahora, por el contrario, que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ . Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in X$  tal que  $0 < |x_n - a| < 1/n$  pero  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ . Luego, tenemos que  $x_n \rightarrow a$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq L$ , lo que es una contradicción. □ □

**Corollary 4.1.17.** Para que exista  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  es necesario que exista  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  y que sea independiente de la sucesión  $(x_n)_n \subset X \setminus \{a\}$  con  $x_n \rightarrow a$  si  $n \rightarrow \infty$ .

Notemos que en virtud del Teorema 4.1.16 podemos utilizar todos los resultados obtenidos en el capítulo anterior concernientes a sucesiones.

**Corollary 4.1.18.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$ . Si existe  $C > 0$  tal que para todo  $x \in X$  se tiene  $|f(x)| < C$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

**Theorem 4.1.19** (Álgebra de límites). Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ . Entonces,

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$ .

(c) Si  $M \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

*Proof.* La demostración de estos resultados en consecuencia del Teorema 4.1.16 y de las afirmaciones equivalentes en el caso de sucesiones. En efecto, sea  $(x_n)$  una sucesión tal que  $x_n \in X \setminus \{a\}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = L + M.$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$ . La demostración de las otras afirmaciones es análoga.  $\square$

**Example 4.1.20.** En el Ejemplo 4.1.7 demostramos que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por  $f(x) = x$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ . En virtud del Teorema 4.1.19 tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = a^2,$$

es decir,  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ . Del mismo modo obtenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ . Es más, para todo polinomio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

**Example 4.1.21.** Sea  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = x \sin(1/x)$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  y  $|\sin(1/x)| < 1$  entonces por el Corolario 4.1.18 tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Del mismo modo, si  $n \in \mathbb{N}$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^n \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt[n]{|x|} \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

**Example 4.1.22.** Sea  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sin(1/x)$  no posee límite cuando  $x$  tiende a 0.

**Solución.** En efecto, si existen dos sucesiones  $(x_n)_n, (y_n)_n$  tales que  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$  entonces  $f$  no posee límite. Para eso, basta escoger  $x_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$ , ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  y  $f(x_n) = 1$  e  $y_n = 1/(3\pi/2 + 2n\pi)$  ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  y  $f(y_n) = -1$ . Luego  $f$  no posee límite.

**Example 4.1.23.** La siguiente función fue definida por Dirichlet alrededor de 1820. Sea

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

y sea  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe.

**Solución.** En efecto, sea  $(x_n)_n$  una sucesión tal que  $x_n \rightarrow a$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $x_n \in \mathbb{Q}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ . Por otro lado, si  $(y_n)_n$  es una sucesión tal que  $y_n \rightarrow a$  pero para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$ .

**Example 4.1.24.** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que la compuesta  $g \circ f$  esté bien definida. Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c,$$

construya un ejemplo de manera que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) \neq c.$$

**Solución.** Consideremos las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x) \equiv 0$  y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es claro que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  y  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$ , sin embargo

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0 \neq 1.$$

**Example 4.1.25.** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

**Solución.** Sea  $x \in (0, \pi/2)$  y considere los siguientes puntos en el plano  $O = (0, 0)$ ,  $P = (\cos x, \sin x)$ ,  $B = (1, 0)$ . Notemos que los puntos  $P$  y  $B$  pertenecen a la circunferencia unitaria. Sea  $L$  el rayo que parte en el origen  $O$  y que pasa por el punto  $P$ . Sea  $A$  el punto en el eje  $x$  que corresponde a la intersección de la recta perpendicular al eje  $x$  que pasa por el punto  $P$ . Sea  $C$  el punto en el



rayo  $L$  que corresponde a la intersección con la recta perpendicular al eje  $x$  que pasa por el punto  $B$ . Notemos que

$$\text{Área}(\triangle OPB) \leq \text{Área}(\text{sector } OPB) \leq \text{Área}(\triangle OCB).$$

De la definición de las funciones trigonométricas, tenemos que el largo del segmento  $\overline{PA} = \sin x$  y el largo del segmento  $\overline{CB} = \tan x$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\text{Área}(\triangle OPB) &= \frac{\sin x}{2}; \\ \text{Área}(\text{sector } OPB) &= \frac{1}{2}xr^2 = \frac{x}{2}; \\ \text{Área}(\triangle OCB) &= \frac{\tan x}{2},\end{aligned}$$

donde  $r$  es el radio de la circunferencia, en este caso  $r = 1$ . Así

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}. \quad (4.1.1)$$

Luego, si  $x \in (0, \pi/2)$  entonces  $\sin x \leq x \leq \tan x$ . De manera análoga es posible probar que si  $x \in (-\pi/2, 0)$  entonces  $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ . Como para todo  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que  $|\sin x| \leq 1$  podemos concluir que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se tiene

$$|\sin x| \leq |x|. \quad (4.1.2)$$

Utilizando lo anterior probaremos el resultado,

$$\begin{aligned}|\cos x - \cos a| &= \left| -2 \sin \left( \frac{x+a}{2} \right) \sin \left( \frac{x-a}{2} \right) \right| = \\ &= 2 \left| \sin \left( \frac{x+a}{2} \right) \right| \left| \sin \left( \frac{x-a}{2} \right) \right| \leq \\ &= 2 \left| \sin \left( \frac{x-a}{2} \right) \right| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} \leq |x-a|.\end{aligned}$$

Luego dado  $\varepsilon$  existe  $\delta = \varepsilon$  tal que si  $x \in \mathbb{R}$  con  $0 < |x-a| < \delta$  entonces  $|\cos x - \cos a| < \varepsilon$ .

**Example 4.1.26.** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Solución.** Para demostrar este resultados utilizaremos las desigualdades obtenidas en el ejemplo 4.1.25. Sea  $x \in (0, \pi/2)$ . En virtud de las desigualdades en (4.1.1), tenemos que

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \text{ y } \cos x \leq \frac{\sin x}{x}.$$

Así

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$  concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Solución.** Una demostración alternativa se sugiere en [?]. En efecto, considere un círculo de radio 1 de centrado en el origen del plano que denotaremos por  $A$ . Considere los radios  $AC$  y  $AD$ , donde este último yace sobre el eje  $y$ , y donde el radio  $AC$  se ubica en el primer cuadrante. Sea  $E$  el punto de intersección entre la recta perpendicular al segmento  $AD$  que pasa por  $C$  y  $AD$ . Si denotamos por  $x$  el ángulo  $BAE$  entonces el largo del trazo  $AE$  es igual a  $\cos x$  y el largo del trazo  $CE$  es igual a  $\sin x$ . Tenemos que

$$\text{sector } ABE < \text{triángulo } ACE < \text{sector } ACD.$$

Por lo tanto

$$\frac{x \cos^2 x}{2} < \frac{\sin x \cos x}{2} < \frac{x}{2}.$$

De donde

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Así

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

**Example 4.1.27.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

**Solución.** Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \right) \left( \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = 0.$$

**Example 4.1.28.** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x},$$

no existe.

**Solución.** Si el límite existe entonces la función es localmente acotada (ver Teorema 4.1.11). Es consecuencia de la propiedad arquimideana que la función  $1/x$  no es acotada en ninguna vecindad que contiene al cero y por lo tanto el límite no existe. Daremos ahora otro argumento que prueba que el límite

no existe. Supongamos que existe y que es igual a  $L$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , tendremos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} x$  existe. Así,

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} x = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} x \right) = L \cdot 0 = 0.$$

Esta contradicción prueba que el límite no existe.

**Example 4.1.29.** Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sin^2(x)}.$$

**Solución.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sin^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sin^2(x)} \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(x)})}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (1 + \cos(x))}{\sin^2(x)(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{(1 - \cos^2(x))(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos(x))(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(x)})} \\ &= \frac{1}{(1 + 1)(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**Example 4.1.30.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x-1} - 2}.$$

**Solución.** Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x-1} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x-1} - 2} \left( \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} \right) \left( \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)} + 4}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)} + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{x-1} + 4)}{(x-1-8)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{x-1} + 4}{\sqrt{x} + 3}. \end{aligned}$$

De donde

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x-1} - 2} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{3 + 3} = 2.$$

**Example 4.1.31.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3(\cos x - 1)^3}{\tan^2 x} \left( \cot \frac{x}{2} \right) \right).$$

**Solución.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3(\cos x - 1)^3}{\tan^2 x} \left( \cot \frac{x}{2} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-3(1 - \cos x)^3}{\sin^2 x \sin(x/2)} \cos^2 x \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)^3 (1 + \cos x)^3}{\sin^2 x \sin(x/2) (1 + \cos x)^3} \left( \cos^2 x \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3(1 - \cos^2 x)^3}{\sin^2 x \sin(x/2)} \frac{\cos^2 x \cos(x/2)}{(1 + \cos x)^3} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3(\sin^2 x)^3}{\sin^2 x \sin(x/2)} \frac{\cos^2 x \cos(x/2)}{(1 + \cos x)^3} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^4 \left( \frac{3 \sin^4 x}{x^4} \right) \cos^2 x \cos(x/2)}{\frac{x}{2} \frac{\sin(x/2)}{x/2} (1 + \cos x)^3} \right). \end{aligned}$$

De donde

$$- \lim_{x \rightarrow 0} 6x^3 \frac{\left( \frac{\sin x}{x} \right)^4}{\frac{\sin(x/2)}{x/2}} \left( \frac{\cos^2 x \cos(x/2)}{(1 + \cos x)^3} \right) = -6 \cdot 0 \cdot \frac{1}{1} \frac{1}{2^3} = 0.$$

**Example 4.1.32.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}.$$

**Solución.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)}{1 - \cos x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x (1 - \cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\cos x (1 - \cos x) (1 + \cos x)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\cos x \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (1 + \cos x)}{\sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos x \frac{\sin x}{x}} = 2. \end{aligned}$$

**Example 4.1.33.** Considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ es un número racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

En esta definición asumimos siempre que el número racional está escrito como fracción irreducible. Calcule  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Solución.** Afirmamos que dado  $a \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Debemos probar que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x)| < \epsilon$ . Si  $x$  es irracional entonces  $f(x) = 0$ , por lo tanto debemos probar que si  $0 < |p/q - a| < \delta$  entonces  $1/q < \epsilon$ .

Sea  $S = \{q \in \mathbb{N} : q \leq \epsilon^{-1}\}$ . Notemos que, en virtud de la propiedad arquimideana, el conjunto  $S$  es finito. Para cada  $q \in S$  fijo, las fracciones  $m/q$  con  $m \in \mathbb{Z}$  descomponen la recta en intervalos de largo  $1/q$ . Denotemos por  $m_q \in \mathbb{Z}$  al mayor entero tal que  $m_q/q < a$ . Como el conjunto  $S$  es finito, existe  $m/q'$  la mayor de las fracciones  $m_q/q$  con  $q \in S$  tal que  $m_q/q < a$ . Así,  $m/q'$  es la mayor de las fracciones con denominador en  $S$  y que es menor que  $a$ . Del mismo modo, existe  $n/q''$ , la menor fracción con denominador en  $S$  tal que  $a < n/q''$ . Con la posible excepción de  $a$  ningún número racional en el intervalo  $(m/q', n/q'')$  puede tener denominador en  $S$ . Luego, tomando

$$\delta = \min \left\{ a - \frac{m}{q'}, \frac{n}{q''} - a \right\},$$

tenemos que si  $0 < |p/q - a| < \delta$  entonces  $q \notin S$ . Por lo tanto  $q > 1/\epsilon$ . Con lo que se prueba el resultado.

## 4.2 Límites Laterales

Utilizando la estructura de orden de los números reales definiremos nociones de límite que dependen del modo en que nos aproximamos al número.

**Definition 4.2.1.** Sea  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación de  $X$ . Diremos que un número  $L \in \mathbb{R}$  es el *límite a la derecha* de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a “ $a$ ” y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L,$$

si y sólo si dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $0 < x - a < \delta$  entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Del mismo modo, el *límite a la izquierda* se define por

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L,$$

si y sólo si dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $0 < a - x < \delta$  entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Todo límite puede caracterizarse en virtud de los límites laterales.

**Theorem 4.2.2.** Sea  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $a \in \mathbb{R}$  un punto de acumulación. Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si y sólo si los límites laterales existen y son iguales a  $L$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L.$$

*Proof.* Si el límite existe, en virtud del Teorema (4.1.16), es claro que los límites laterales también existen y son iguales a  $L$ .

Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$ , existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que si  $x \in X \cap (a, a + \delta_1)$  entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Además si  $x \in X \cap (a - \delta_2, a)$  entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  entonces si  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$  entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .  $\square$

**Example 4.2.3.** El siguiente límite no existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

En efecto, notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1.$$

**Example 4.2.4.** Sea  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x \mapsto x + \frac{x}{|x|}$ , es claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1,$$

luego el límite no existe.

**Example 4.2.5.** Sea  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x \mapsto e^{-1/x}$ . Así

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{ no existe,}$$

luego el límite no existe.

**Example 4.2.6.** Consideremos la función parte entera  $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x \mapsto \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ . Así

$$\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow n-} [x] = n - 1,$$

Luego el límite no existe.

**Example 4.2.7.** Calcule, si existe, el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a 1, donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+2}-\sqrt{x^2+3}}{x-1} & \text{si } x < 1; \\ \frac{x^3-1}{3(x^2-1)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

**Solución.** Calcularemos los límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x^2+2}-\sqrt{x^2+3}}{x-1} = \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x^2+2}-\sqrt{x^2+3}}{x-1} \frac{\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{x^2+3}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{x^2+3})} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3-1}{3(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2+x+1)(x-1)}{3(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

De donde

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

**Remark 4.2.8.** Notemos que la validez del Teorema 4.2.2 depende crucialmente de la estructura de orden la recta real. Dado un número arbitrario podemos aproximarnos solo por dos direcciones, la izquierda y la derecha. En dimensión superior, a saber en  $\mathbb{R}^n$ , existen múltiples formas de aproximarse a un vector  $a \in \mathbb{R}^n$ . En esos casos existen resultados análogos, pero en los que se deben considerar todas las posibles formas de aproximarse a un vector dado.

## 4.3 Límites Infinitos

En esta sección discutiremos las definiciones de límite que involucran infinito. Recordemos que infinito no es un número real y en tal sentido es necesario adaptar las definiciones a este nuevo contexto. En particular es preciso dar una noción de vecindad de infinito.

**Definition 4.3.1.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $X$  no es acotado superiormente. Diremos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que si  $x \in X$  y  $x > A$  entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Análogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $A > 0$  tal que si  $x \in X$  y  $x < -A$  entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Remark 4.3.2.** Es importante recalcar que esta definición es completamente análoga a la de límite cuando la variable tiende a un número real. En efecto, en ese caso dado  $\epsilon > 0$  es necesario encontrar una vecindad del punto  $a$ , lo que en el lenguaje de la definición es  $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ . En este caso procedemos de la misma manera, notando que una vecindad del infinito es un intervalo de la forma  $(A, \infty)$ .

**Example 4.3.3.**

- (a) Notemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- (b) El siguiente límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  no existe ya que la función oscila en el intervalo  $[-1, 1]$ .
- (c) Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , pero notemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x},$$

no existe.

Como en el caso de las sucesiones, es posible definir la noción de límite igual a infinito.

**Definition 4.3.4.** Diremos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

si y sólo si para todo  $A > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $f(x) > A$ .

**Example 4.3.5.**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^2} = +\infty.$$

De modo similar,

**Definition 4.3.6.** Diremos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

si y sólo si para todo  $A > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $f(x) < -A$ .

**Example 4.3.7.**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{(x - a)^2} = -\infty.$$

**Remark 4.3.8.** Nada podemos decir de límites en los que se tienen expresiones del tipo cero dividido cero o infinito menos infinito. En efecto, consideremos  $c \in \mathbb{R}$  fijo.



(a) Sea  $f(x) = xc$  y  $g(x) = x$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

(b) Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

no existe.

(c) Sean  $f(x) = c + \frac{1}{(x-a)^2}$  y  $g(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ , entonces es claro que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty,$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

## Chapter 5

# Funciones Continuas

### 5.1 Funciones Continuas

Durante buena parte del siglo diecinueve no hubo una definición formal de continuidad. La idea intuitiva era lo único que se tenía. Las razones para una falta de definición formal son de diversa índole, por una parte el desarrollo de la matemática no había alcanzado el nivel que permitiese dicha formalización (no existía definición de límite) y por otra existían dificultades de orden filosófico. Por ejemplo, la idea de que el continuo puede formarse de puntos (el caso de la recta real es fundamental) era una idea a la que Aristóteles se opuso explícitamente. Coincidentemente con la disminución de la influencia del pensamiento Aristotélico se obtuvo una definición formal de continuidad. Notemos que la falta de una definición formal hace imposible la caracterización y el estudio de las propiedades de continuidad. La definición que hoy utilizamos de *continuidad* fue propuesta por Bolzano en 1817, en un artículo en el que demostraba el Teorema del Valor Intermedio (ver sección 5.2). Un punto interesante en este artículo es que distinguía la noción de continuidad de la propiedad del valor intermedio. Discutiremos estas ideas en detalle más adelante. De momento daremos la definición de continuidad. Más detalles pueden encontrarse en los textos [A, CJ, L, I, K, S].

**Definition 5.1.1.** Sea  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X$ . Diremos que la función  $f$  es continua en el punto  $x = a$  si y sólo si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$ ,  $|x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Si  $f$  es continua en todos los puntos  $a \in X$ , diremos que  $f$  es continua en  $X$ .

**Remark 5.1.2.** Al contrario de la definición del límite, sólo tiene sentido hablar de continuidad de la función  $f$  es un punto de su dominio.

**Remark 5.1.3.** Notemos que de la definición de continuidad tenemos que la función  $f$  es continua en un punto  $a \in X$  donde  $a$  es un punto de acumulación si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**Remark 5.1.4.** Sea  $a \in X$  un punto aislado de  $X$  (es decir, un punto que no es de acumulación), entonces la función  $f$  es continua en  $a$ .

**Example 5.1.5.** La identidad  $f(x) = x$  es una función continua en todo punto  $a \in \mathbb{R}$ . Lo mismo ocurre con  $f(x) = x^n$ . En particular, todo polinomio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  es continuo en todo punto  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $q(x)$  es un polinomio tal que  $q(a) \neq 0$  entonces la función racional  $p(x)/q(x)$  es continua en  $x = a$ .

**Example 5.1.6.** Las funciones  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas ya que para todo real  $a \in \mathbb{R}$  se tiene que  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ .

**Example 5.1.7.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$f(x) = \begin{cases} 16 - 2x & \text{si } x < 5; \\ x + 1 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

Entonces  $f$  es continua en todo punto de  $\mathbb{R}$ .

**Solución.** En efecto, si  $a > 5$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a + 1 = f(a)$ . Del mismo modo, si  $a < 5$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 16 - 2a = f(a)$ . Si  $a = 5$  entonces  $f(5) = 5 + 1 = 6$ . Para calcular el límite utilizamos los límites laterales,

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} x + 1 = 6.$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 16 - 2x = 16 - 2 \cdot 5 = 6.$$

Es decir  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$ . De donde se obtiene el resultado.

**Example 5.1.8.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$  no es continua en  $x = 0$  ya que el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a cero no existe. Sin embargo, es continua para todo  $x \neq 0$ .

**Example 5.1.9.** La función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es continua en todo punto, pues para todo  $x \in \mathbb{R}$  el límite no existe.

**Example 5.1.10.** La siguiente función, definida en el Ejemplo 4.1.33

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ es un número racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \end{cases}$$

es continua en todo número irracional y no es continua en todo número racional. En efecto, el resultado se deduce del hecho que dado  $a \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

**Example 5.1.11.** Sea  $f$  una función monótona cuyo dominio es el conjunto de los números reales positivos. Suponga que  $f$  satisface

$$f(xy) = f(x) + f(y). \quad (5.1.1)$$

Demuestre que  $f$  es continua en todo su dominio.

**Solución.** La siguiente aproximación al problema se encuentra en [?]. De la ecuación (5.1.1) tenemos que

- (a)  $f(1) = 0$ ,
- (b)  $f(x/y) = f(x) - f(y)$ ,
- (c) para todo racional  $q \in \mathbb{Q}$  se tiene que  $f(x^q) = qf(x)$ .

De la segunda propiedad se deduce que la continuidad en  $x$  es consecuencia de la continuidad en 1. Debemos por lo tanto probar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ . Para ello, escojamos  $a, b \in \mathbb{R}^+$  tal que  $a < x < b$ . De la tercera propiedad tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^{1/n}) = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} f(b^{1/n}) = 0.$$

Luego, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(a^{1/n_0})| < \epsilon$  y  $|f(b^{1/n_0})| < \epsilon$ . Sea  $\delta = \min\{|a^{1/n_0} - 1|, |b^{1/n_0} - 1|\}$ . Entonces  $|x - 1| < \delta$  implica  $|f(x)| < \epsilon$  por la monotonicidad, de donde se obtiene el resultado.

**Theorem 5.1.12.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  un función continua en el punto  $a \in X$ , entonces  $f$  es acotada en una vecindad de  $x = a$ .

*Proof.* Como la función  $f$  es continua en el punto  $a$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  entonces  $f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ . Es decir, la función es acotada en el intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$ .  $\square$

**Theorem 5.1.13.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en el punto  $a \in X$ . Si  $f(a) < g(a)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta$  y  $x \in X$  entonces  $f(x) < g(x)$ .

*Proof.* Sea  $0 < \epsilon < (g(a) - f(a))/2$ . Como  $f$  es continua en el punto  $x = a$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $x \in X$  y  $|x - a| < \delta_1$  entonces  $f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ . Del mismo modo, como  $g$  es continua en el punto  $x = a$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que si  $x \in X$  y  $|x - a| < \delta_2$  entonces  $g(x) \in (g(a) - \epsilon, g(a) + \epsilon)$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Luego, si  $x \in X$  y  $|x - a| < \delta$  tenemos que  $f(x) < f(a) + \epsilon < g(a) - \epsilon < g(x)$ .  $\square$

**Theorem 5.1.14.** La función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $a \in X$  si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  para toda sucesión  $(x_n)_n \subset X$  con  $x_n \rightarrow a$  cuando  $\infty$ .

*Proof.* Este resultado es consecuencia directa del hecho que  $f$  es continua en  $a \in X$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  y del Teorema 4.1.16 que relaciona límite de funciones con límite de sucesiones.  $\square$

**Theorem 5.1.15.** Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el punto  $a \in X$ , entonces  $f+g, f-g, f \cdot g$  son continuas en  $a$ . Si  $g(a) \neq 0$ , entonces  $f(x)/g(x)$  es continua en  $a$ .

*Proof.* Este resultado es consecuencia directa de los Teoremas 5.1.14 y 3.1.20.  $\square$

**Example 5.1.16.** La función tangente es el cuociente de dos funciones continuas, por lo tanto  $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua.

**Theorem 5.1.17.** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en  $a \in X$  y en  $b = f(a) \in Y$  respectivamente con  $f(X) \subset Y$ , entonces  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $a$ .

*Proof.* Dado  $\epsilon > 0$ , como la función  $g$  es continua en el punto  $y = b$  existe  $\eta > 0$  tal que si  $y \in Y$  con  $|y - b| < \eta$  entonces  $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ . Por otra parte, como la función  $f$  es continua en el punto  $x = a$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in X$  con  $|x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(a)| < \eta$ . Luego, si  $x \in X$  es tal que  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  entonces  $|g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$ .  $\square$

Notemos que el resultado anterior puede expresarse de la siguiente manera, si  $f$  y  $g$  son como en el Teorema 5.1.17 entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

Esta ecuación da origen a una técnica para calcular límites denominada cambio de variable. A continuación ilustraremos esta idea con un par de ejemplos. Es importante notar que las funciones involucradas deben ser continuas para poder aplicar esta técnica, en efecto vea el Ejemplo 4.1.24.

**Example 5.1.18.** Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(-\cos^2(x))}{1 - \sin(x)}.$$

**Solución.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(-\cos^2(x))}{1 - \sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(-\cos^2(x))}{1 - \sin(x)} \frac{(1 + \sin(x))}{(1 + \sin(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\cos^2(x))}{\sin^2(x) - 1} (1 + \sin(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\cos^2(x))}{-\cos^2(x)} (1 + \sin(x)). \end{aligned}$$

Pero notemos que  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \sin(x)) = 2$  y sea  $u = \cos^2(x)$ , entonces si  $x \rightarrow \pi/2$ , tendremos que  $u \rightarrow 0$ , por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\cos^2(x))}{\cos^2(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\cos^2(x))}{-\cos^2(x)} (1 + \sin(x)) = (-1) \cdot 2 = -2.$$

**Example 5.1.19.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{4}}.$$

**Solución.** Utilizaremos el siguiente cambio de variables, sea  $y^6 = 3 + x$ . Luego si  $x$  tiende a 1 tenemos que  $y$  tiende a  $\sqrt[3]{2}$ . Así

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{4}} &= \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{2}} \frac{y^3 - 2}{y^2 - \sqrt[3]{4}} = \\ \lim_{y \rightarrow \sqrt[3]{2}} \frac{(y - \sqrt[3]{2})(y^2 + \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4})}{(y - \sqrt[3]{2})(y + \sqrt[3]{2})} &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

**Corollary 5.1.20.** El Teorema 5.1.17 nos permite calcular de modo sencillo ciertas sucesiones. En efecto, si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $(x_n)_n$  es una sucesión convergente de elementos en  $X$ , tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n).$$

**Example 5.1.21.** La función exponencial es continua. En virtud del Teorema 5.1.17 tenemos que si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $x = a$  entonces la función  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = e^{f(x)},$$

es continua en el punto  $x = a$ .

**Example 5.1.22.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sin(1/x)$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = a$ , no es continua independiente del valor de  $a$ . Ya que el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a cero oscila en el intervalo  $[-1, 1]$ .

**Example 5.1.23.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ . La función  $f$  es discontinua en  $x = 0$  ya que no existe el límite.

**Example 5.1.24.** La función parte entera  $f(x) = [x]$  es discontinua en todo punto  $n \in \mathbb{Z}$ , ya que en esos puntos no existe el límite.

**Example 5.1.25.** Determine los valores de  $A$  y  $B$  de modo que la función  $f$  sea continua,

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin(x) & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ A \sin(x) + B & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos(x) & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Solución.** Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2-} -2 \sin(x) = -2 \sin(-\pi/2) = 2,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2+} A \sin(x) + B = -A + B.$$

Además,  $f(-\pi/2) = 2$ . Luego  $f$  es continua en  $-\pi/2$  si y sólo si  $-A + B = 2$ .

Por otra parte,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2-} A \sin(x) + B = A + B,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2+} \cos(x) = 0.$$

Además,  $f(\pi/2) = 0$ . Luego  $f$  es continua en  $\pi/2$  si y sólo si  $A + B = 0$ . Por lo tanto la función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  si

$$\left. \begin{array}{rcl} -A + B & = & 2 \\ A + B & = & 0 \end{array} \right|,$$

es decir,  $A = -1$  y  $B = 1$ .

**Example 5.1.26.** Determine los valores de  $a$  y  $b$  de modo que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{ax^5 + bx^4 - ax - b}{x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

**Solución.** Debemos entonces verificar la continuidad en  $x = 1$  y en  $x = -1$ . Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1) = 0$$

Pero,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{ax^5 + bx^4 - ax - b}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(ax + b)(x^4 - 1)}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (ax + b)(x^2 + 1) = 2(b - a). \end{aligned}$$

Por tanto, para que  $f$  sea continua en  $-1$  debe tenerse que

$$2(b - a) = 0 \text{ equivalentemente } a = b.$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) = 1.$$

Además

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax + b)(x^2 + 1) = 2(a + b).$$

Por lo tanto,

$$a + b = \frac{1}{2}.$$

De las dos ecuaciones obtenidas deducimos que  $a = b = \frac{1}{4}$ .

**Example 5.1.27.** La siguiente función,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es continua sólo en un punto, a saber  $x = 0$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Para todo punto  $x \neq 0$  el límite de  $f$  no existe.

## 5.2 Discontinuidades

Diremos que  $a \in X$  es un punto de discontinuidad de la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (o simplemente una discontinuidad) si  $f$  no es continua en  $x = a$ , es decir, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$ , existe  $x \in X$  tal que  $|x - a| < \delta$  y  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ .

**Definition 5.2.1.** Diremos que el punto  $x = a$  es una discontinuidad de primera especie (o removible) para la función  $f$  cuando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, pero  $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

En este caso la función es discontinua en  $x = a$ , sin embargo es posible redefinir la función en el punto  $x = a$  de modo tal que sea continua. En efecto, podemos redefinir  $f$  como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a; \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

De este modo  $\tilde{f}$  es continua en  $a$ .

**Example 5.2.2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función  $f$  no es continua en  $x = 0$ . La discontinuidad es removible y es posible redefinir  $f$  en el punto  $x = 0$  de modo que sea continua. En efecto, la función  $\tilde{f}(x) \equiv 1$  es continua y coincide con  $f$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Example 5.2.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1; \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3,$$



por lo que  $f$  es discontinua en  $x = 1$ . Sin embargo, la discontinuidad es removible y podemos redefinir  $f$  como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{Si } x \neq 1 \\ 3 & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

la que es continua en  $x = 1$ .

**Definition 5.2.4.** Diremos que el punto  $x = a$  es un discontinuidad de segunda especie para  $f$  si no es posible redefinir la función en un punto de manera de que la resultante sea continua.

Distinguimos los siguientes tipos,

- (a) *Infinita*. Si la función  $f$  no es acotada en una vecindad de  $x = a$ , tenemos una discontinuidad de segunda especie en  $x = a$ .

**Example 5.2.5.** Sea  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x \mapsto 1/x$ ,  $f(0) = b$  y

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty.$$

Esta función posee una discontinuidad de segunda especie en  $x = 0$ .

- (b) *Oscilación*. Diremos que la función  $f$  oscila alrededor del punto  $a$ , si existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  se tiene que existen  $x_1, x_2 \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$  tales que  $|f(x_1) - f(x_2)| > \delta$ . Si la función oscila alrededor de  $x_0$  no es posible redefinirla en ese punto de modo que sea continua.

**Example 5.2.6.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sin(1/x)$  y  $f(0) = a$  posee una discontinuidad de segunda especie en  $x = 0$ .

- (c) *Límites laterales distintos*. Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in X$ . Si

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x),$$

entonces la función posee una discontinuidad de segunda especie en  $x = a$ .

**Theorem 5.2.7.** Suponga que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función monótona, entonces  $f$  no admite discontinuidades de segunda especie del tipo Oscilación ni Infinito.

*Proof.* Como  $f$  es monótona, tenemos que para todo  $a \in X$ , la función es acotada en un intervalo de la forma  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Además tenemos que como la función es monótona los límites laterales existen.  $\square$

Dado un conjunto finito,  $D \subset \mathbb{R}$ , es fácil construir una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sea continua en  $\mathbb{R} \setminus D$ , pero discontinua en todo punto de  $D$ . Hemos visto, por otra parte, ejemplos de funciones definidas en los reales que no son continuas en ningún punto (ver Ejemplo 5.1.9). La situación puede ser particularmente complicada, existen funciones que son continuas en todo punto irracional y

discontinuas en todo punto racional (ver Ejemplo 5.1.10). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y denotemos por

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : \text{la función } f \text{ es discontinua en } x\},$$

el conjunto de puntos donde la función  $f$  es discontinua. Una pregunta natural es si dado un conjunto arbitrario  $K \subset \mathbb{R}$  existe una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $D_f = K$ . La respuesta a esta pregunta es negativa, no todo subconjunto de los reales es el conjunto de discontinuidad de una función  $f$ . La caracterización de los conjuntos que sí satisfacen esta propiedad excede el nivel de este texto.

### 5.3 Funciones Continuas en el Intervalo

En esta sección revisaremos una serie de propiedades de las funciones continuas definidas en intervalos cerrados y acotados. Las propiedades aquí discutidas dependen no solo de la continuidad de la función  $f$  sino que también de las características especiales de su dominio.

**Theorem 5.3.1** (Teorema del Valor Intermedio). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $d \in (f(a), f(b))$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = d$*

*Proof.* Sea  $A = \{x \in [a, b] : f(x) < d\}$ . El conjunto  $A$  es no vacío, ya que  $f(a) < d$  (es decir,  $a \in A$ ), notemos además que  $b \notin A$ . Afirmamos que  $A$  no posee máximo. En efecto, sea  $\alpha \in A$ , en particular  $\alpha < b$ . Sea  $\varepsilon = d - f(\alpha)$ . Como  $f$  es continua en  $\alpha$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$  se tiene que  $f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$ , es decir,  $f(x) < d$ . Así todos los puntos  $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$  pertenecen a  $A$ . Es decir, el conjunto  $A$  no posee máximo. Sin embargo, como  $A$  es un conjunto acotado superiormente por  $b$ , posee supremo. Sea  $c = \sup A$ , es decir, existe  $(x_n)_n \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow c$ . Como  $f$  es continua y los elementos de la sucesión  $(x_n)_n$  pertenecen al conjunto  $A$  tenemos que  $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq d$ . Como  $A$  no posee máximo,  $c \notin A$ . Luego  $f(c) \geq d$ , es decir,  $f(c) = d$ .  $\square$   $\square$

**Corollary 5.3.2.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, si  $I$  es un intervalo, entonces  $f(I)$  es un intervalo.*

*Proof.* Si la función  $f$  es constante el resultado es obvio. Denotemos por  $I = [a, b]$ . Supongamos que  $f$  no es constante y sean  $\alpha = \inf\{f(x) : x \in I\}$  y  $\beta = \sup\{f(x) : x \in I\}$ . Si el conjunto  $f(I)$  no fuese acotado definimos  $\alpha = -\infty$  y/o  $\beta = \infty$ . Para probar que  $f(I)$  es un intervalo cuyos extremos son  $\alpha$  y  $\beta$  consideramos  $d \in (\alpha, \beta)$ . De la definición de supremo e ínfimo existen  $a, b \in I$  tales que  $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$ . Por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = d$ . Luego  $d \in f(I)$  y por lo tanto  $(\alpha, \beta) \subset f(I)$ . De la definición de supremo e ínfimo tenemos que  $f(I) \subset [\alpha, \beta]$ .  $\square$

Hasta antes del artículo de Bolzano mencionado al comienzo de esta sección, se pensaba que la tesis del Teorema del valor Intermedio, a la que llamaremos

*propiedad del valor intermedio*, era una buena definición de continuidad. A continuación veremos que existen una serie de dificultades cuando se adopta este punto de vista. La función,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(1/x)}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

satisface la propiedad del valor intermedio, sin embargo no es acotada. Por otra parte, la propiedad del valor intermedio no se preserva por la suma. En efecto, sean

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2(1/x) & \text{si } x \neq 0 & \quad \text{y} \quad f(0) = 0, \\ g(x) &= \cos^2(1/x) & \text{si } x \neq 0 & \quad \text{y} \quad g(0) = 0. \end{aligned}$$

Ambas funciones satisfacen la propiedad del valor intermedio, sin embargo su suma

$$f(x) + g(x) = \sin^2(1/x) + \cos^2(1/x) = 1 \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0) + g(0) = 0,$$

calaramente no satisface dicha propiedad. La siguiente función satisface la propiedad del valor intermedio, independiente de cómo la definamos en  $x = 0$ ,

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0) = a.$$

Nuestra definición de continuidad nos permite aproximar el valor de una función en un punto  $x = x_0$  evaluando la función en puntos suficientemente cercanos. La función anterior claramente no satisface esa propiedad. Darboux en 1875 contruyó una función que satisface la propiedad del valor intermedio, pero que es discontinua en todo punto racional. La función construída por Darboux es integrable en el sentido de Riemann. Volterra construyó una función que satisface la propiedad del valor intermedio y que no es integrable.

**Example 5.3.3.** Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio,  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  donde  $n$  es un número impar, entonces  $p(x)$  posee una raíz.

**Solución.** En efecto,  $p(x)$  es una función continua. Podemos escribir  $p(x) = a_n x^n r(x)$  donde

$$r(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}.$$

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = 1.$$

Supongamos que  $a_n > 0$  (el otro caso se trata de manera análoga). Como  $n$  es impar tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = -\infty,$$

y por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty.$$

Es decir, existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) > 0$  y  $f(b) < 0$ , y por lo tanto por teorema del valor intermedio concluimos que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $p(c) = 0$ .

**Example 5.3.4.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  definida por  $f(x) = x^n$  es creciente con  $f(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Su imagen es un intervalo en  $[0, +\infty)$ , es decir,  $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$  (Como es creciente estrictamente, es inyectiva), entonces  $f$  es biyectiva, es decir, existe un único  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $a = f(b) = b^n$ , es decir,  $\sqrt[n]{a} = b$ .

**Example 5.3.5.** (Teorema del Punto Fijo) Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua tal que  $f(a) \geq a$  y  $f(b) \leq b$ , entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = c$ .

**Solución.** Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(x) = x - f(x)$ , es continua,  $\varphi(a) \geq 0$  y  $\varphi(b) \leq 0$ . Lugo existe  $c \in [a, b]$  tal que  $\varphi(c) = 0$ , es decir,  $f(c) = c$ .

**Example 5.3.6.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y tal que  $f(0) = f(1)$ . Demuestre que existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ .

**Solución.** Considere la función  $\varphi : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$ . La función  $\varphi$  es continua ya que es la compuesta y la diferencia de funciones continuas. Además  $\varphi(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$  y

$$\varphi(1/2) = f(1) - f(1/2) = f(0) - f(1/2) = -(f(1/2) - f(0)) = -\varphi(0).$$

Si  $\varphi(1/2) = 0$  entonces  $x = 1/2$  satisface  $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ . Caso contrario  $\varphi(1/2)$  y  $\varphi(0)$  poseen signos opuestos. En virtud del teorema del valor intermedio existe  $c \in (0, 1/2)$  tal que  $\varphi(c) = 0$ . Con lo que se prueba el resultado.

**Example 5.3.7.** Demuestre que la ecuación  $8x \cos^2(x) = 1$  tiene una solución positiva.

**Solución.** Basta mostrar que la función  $m(x) = 8x \cos^2(x) - 1$  tiene un cero en el intervalo  $J_0 = [0, \infty[$ . Notemos que la función  $m(x)$  es continua en la recta real, en particular en  $J_0$ . Además

$$\begin{aligned} m(0) &= -1 < 0 \\ m(\pi/4) &= \pi - 1 > 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, existe  $a \in (0, \pi/4)$  tal que  $m(a) = 0$ , lo que demuestra la afirmación.

**Remark 5.3.8.** Notemos que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua e  $I, J$  son dos intervalos cerrados tales que  $J \subset f(I)$  entonces existe un intervalo cerrado  $I' \subset I$  tal que  $f(I') = J$ .

**Example 5.3.9.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función continua. Supongamos que existe un punto  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $(f \circ f \circ f)(x_0) = x_0$  (es decir, posee un punto periódico de período tres). Demuestre que dado  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in (a, b)$  tal que  $f^n(x_n) = x_n$  donde  $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{veces}}(x)$ . Es decir, si existe un punto

periódico de período tres entonces existen puntos periódicos de todos los períodos.

**Solución.** Supongamos que  $f$  posee un punto periódico de período tres. Utilizaremos la siguiente notación,  $x_0, f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2$ . Notemos que  $f(x_2) = x_0$ . Sin pérdida de generalidad supondremos que  $x_0 < x_1 < x_2$ . Sean  $I_0 = [x_0, x_1]$  y  $I_1 = [x_1, x_2]$ . Tenemos que  $I_1 \subset f(I_0)$  y  $I_0 \cup I_1 \subset f(I_1)$  ya que  $f$  es continua. Probaremos, en primer lugar, que existen órbitas periódicas de período  $n$ , para  $n > 3$ .

Como  $I_1 \subset f(I_1)$  existe  $A_1 \subset I_1$  tal que  $I_1 = f(A_1)$ . Ahora como  $A_1 \subset I_1 = f(A_1)$ , podemos encontrar  $A_2 \subset A_1$  tal que  $f(A_2) = A_1$ . Repitiendo este proceso  $n - 1$  veces obtenemos la siguiente sucesión de conjuntos

$$A_{n-2} \subset A_{n-3} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1 \subset I_1,$$

de modo que  $f(A_i) = A_{i-1}$  y  $f(A_1) = I_1$ . Notemos que  $f^{n-2}(A_{n-2}) = I_1$  y  $A_{n-2} \subset I_1$ . Ahora como  $A_{n-2} \subset I_1 \subset f(I_0)$  existe un intervalo cerrado  $A_{n-1} \subset I_0$  tal que  $f(A_{n-1}) = A_{n-2}$ . Así existe  $A_n \subset I_1$  tal que  $f(A_n) = A_{n-1}$ . De este modo obtenemos la siguiente sucesión

$$A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_1 \longrightarrow I_1.$$

Así  $f^n(A_n) = I_1$ . Como  $A_n \subset I_1$  existe un punto fijo  $x_0 \in A_n$  para  $f^n$ . Es decir, existe un punto periódico de período  $n$  para  $f$ .

Consideremos ahora los dos casos restantes. Como  $I_1 \subset f(I_1)$  la función  $f$  posee un punto fijo. Del mismo modo, como  $I_1 \subset f(I_0)$  y  $I_0 \subset f(I_1)$  existe un punto periódico de período dos.

**Proposition 5.3.10.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua entonces es acotada.

*Proof.* Supongamos por el contrario que la función no es acotada, demostraremos que esto implica que existe un punto donde la función no es continua. Sean  $x_1 = a$  e  $y_1 = b$  denotemos por

$$c_1 = \frac{x_1 + y_1}{2}.$$

La función  $f$  es no acotada en alguno de los intervalos  $[x_1, c_1]$  o  $[c_1, y_1]$ . Consideremos el intervalo donde no es acotada y denotemos por  $x_2$  e  $y_2$  sus extremos derechos e izquierdos respectivamente. Así

$$x_1 \leq x_2 < y_2 \leq y_1.$$

Repetimos el procedimiento definiendo

$$c_2 = \frac{x_2 + y_2}{2}$$

y escogiendo un intervalo donde  $f$  no es acotada. De este modo obtenemos una sucesión de intervalos encajados de largos arbitrariamente cortos  $[x_k, y_k]$  tales que

$$x_1 \leq x_2 < \dots x_n < y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1.$$

Así la función  $f$  es no acotada en cada intervalo  $[x_k, y_k]$ . En virtud del Teorema de los intervalos encajados (ver Teorema 2.3.1) existe un punto  $c \in \mathbb{R}$  que pertenece a todos los intervalos. Probaremos que  $f$  no es continua en  $x = c$ .

Supongamos que la función  $f$  es continua en el punto  $x = c$ . Es decir, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - c| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ . Notemos que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $y_k - x_k < \delta$  y que  $f$  es no acotada en el intervalo  $[x_k, y_k]$ . Por lo tanto existe  $x \in [x_k, y_k]$  tal que  $f(x) > f(c) + \epsilon$ . Esta contradicción prueba el resultado.  $\square$

**Theorem 5.3.11** (Teorema de Weierstrass). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces  $f$  alcanza su mínimo y su máximo, es decir, existen  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tal que*

$$f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad y \quad f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

*Proof.* Sea  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  y supongamos que para todo  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \neq M$ . Entonces la función

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

es continua en  $[a, b]$  y por lo tanto acotada. Así, existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $|g(x)| = 1/(M - f(x)) \leq C$  para todo  $x \in [a, b]$ . Esto implica que para todo  $x \in [a, b]$  se tiene que  $f(x) \leq M - 1/C$ . Lo anterior contradice el hecho que  $M$  es el supremo de  $f$ .  $\square$

**Remark 5.3.12.** Notemos que la función puede alcanzar su máximo y su mínimo en más de un punto, basta considerar  $f(x) = c$  que alcanza su máximo y mínimo en todo intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

**Remark 5.3.13.** Es fundamental que el intervalo sea cerrado para la validez del Teorema anterior, basta considerar la función  $f(x) = 1/x$  con dominio  $(0, 1)$  o  $f(x) = x$  con dominio  $(0, 1)$

Diremos que una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  posee un *máximo local estricto* en  $x = c$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f(c) > f(x)$  para todo  $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$  (análogamente podemos definir *mínimo local estricto*). Schoenflies en 1900 demostró que el conjunto de puntos que son máximos locales estrictos de una función continua es a lo más numerable. No es difícil construir una función continua que posea máximos locales en el conjunto  $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ . Es posible construir

una función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que posea máximos locales estrictos en cada punto racional. En un sentido preciso, podemos afirmar que existe una gran cantidad de funciones continuas tales que el conjunto de puntos que son máximos locales estrictos es un conjunto denso.

## Chapter 6

# La Derivada

### 6.1 Definición y Ejemplos

A fines del siglo *XVII* se formalizó la noción de derivada y se desarrollaron técnicas para manipularlas. Newton en 1665 introdujo el concepto de derivada ligado estrechamente al concepto de velocidad. En 1675 Leibniz redescubrió estos resultados, en su trabajo la derivada tiene un carácter más bien geométrico. Si bien la definición de derivada es del siglo *XVII* la definición precisa se obtuvo durante el siglo diecinueve. Tanto Bolzano como Gauss, a comienzos del 1800, tenían ya una idea bastante clara sobre cómo definir estos conceptos. Una de las mayores influencias en el desarrollo de estas ideas la tuvo el texto *Cours d'Analyse* escrito por Cauchy en 1820. Sin embargo, no fue hasta 1850 en que tras los trabajos de Weierstrass y Riemann se obtuvo una definición precisa de derivada. En esta sección estudiaremos esta definición y desarrollaremos algunos ejemplos.

**Definition 6.1.1.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $a \in A$  un punto de acumulación. Diremos que  $f$  es derivable (o diferenciable) en el punto  $a \in A$  si el siguiente límite existe,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

y lo llamaremos derivada de  $f$  en el punto  $x = a$ .

**Notación.** Existen múltiples notaciones para la derivada de una función  $f$  en un punto  $x = a$ . La siguiente notación es debida a Leibniz

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}.$$

La ventaja de esta notación es que especifica la variable con respecto a la cual se está diferenciando "dx". Para funciones definidas en una variable, como las



estudiadas en este texto, la notación de Lagrange es menos recargada:

$$f'(a).$$

Newton introdujo la siguiente notación para la derivada de la función  $f$ :

$$\dot{f}(x).$$

Finalmente, mencionaremos la notación de Euler que tiene la ventaja de explicitar la naturaleza de operador de la diferenciación:

$$D_x f(x).$$

**Remark 6.1.2.** Como la derivada es un límite podemos definir los correspondiente límites laterales. Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A$  un punto de acumulación. La *derivada por la derecha* de  $f$  en el punto  $x = a$  se define por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

en caso que límite exista. Del mismo modo la *derivada por la izquierda* de  $f$  en el punto  $x = a$  se define por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

en caso que límite exista. En virtud de los resultados para límites, la derivada de  $f$  en el punto  $x = a$  existe si y sólo si existen las derivadas laterales de  $f$  en  $x = a$ .

**Remark 6.1.3.** Es importante recalcar el carácter local de la derivada. La diferenciabilidad es una propiedad de la función en un punto. Por lo tanto, toda información que podamos deducir a partir de la derivada de una función será local, es decir, válida en una vecindad del punto.

**Example 6.1.4.** Sea  $c \in \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = c$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} = 0,$$

es decir,  $f'(a) = 0$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

**Example 6.1.5.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  y  $a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a,$$

es decir,  $f'(a) = 2a$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

**Example 6.1.6.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sin(x)$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos(a). \end{aligned}$$

Luego,  $(\sin(a))' = \cos(a)$ .

**Example 6.1.7.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine si existe la derivada de  $f$  en  $x = 1$ .

**Solución.** Como la derivada es un límite, para determinar si existe calcularemos los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = -1.$$

Por lo tanto, la derivada de  $f$  no existe en  $x = 1$ .

**Remark 6.1.8.** Considerando el siguiente cambio de variable  $h = x - a$  tenemos que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

**Example 6.1.9.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cos(x)$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a + h) - \cos(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2a+h}{2}\right) \left(\sin \frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin\left(\frac{2a + h}{2}\right) \frac{\sin(h/2)}{h/2} \right) = -\sin a. \end{aligned}$$

Luego,  $(\cos(a))' = -\sin(a)$ .

**Example 6.1.10.** Sea  $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$ . Determine  $f'(x)$ .

**Solución.**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \frac{-3}{(2+x)^2}
 \end{aligned}$$

**Example 6.1.11.** Sea  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt{x}$ . Calcule su derivada en  $a \in (0, +\infty)$ .

**Solución.** Notemos que

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

Luego,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

**Example 6.1.12.** Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Para  $x > 0$  determine  $f'(x)$ .

**Solución.** Notemos que  $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \frac{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x)^2} + \sqrt[3]{(x)x} + \sqrt[3]{x^2}} \\
 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}
 \end{aligned}$$

Es posible generalizar este ejemplo, en efecto,

**Example 6.1.13.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Determine la derivada de la función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}. \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente cambio de variables,  $u = \sqrt[n]{x+h}$  y  $v = \sqrt[n]{x}$ . Tenemos entonces que  $u^n - v^n = h$  y por otra parte

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}),$$

luego

$$\frac{u - v}{h} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}}.$$

Ahora, como

$$\lim_{h \rightarrow 0} u^{n-j}v^{j-1} = x^{1-1/n},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \frac{1}{nx^{1-1/n}} = \frac{x^{1/n-1}}{n}. \end{aligned}$$

**Example 6.1.14.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en  $x = 0$ . En efecto,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

**Example 6.1.15.** Sea  $\alpha > 1$ . Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\rho > 0$  tales que si  $x \in (-\rho, \rho)$  se tiene que  $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ . Demuestre que bajo estas hipótesis la función  $f$  es diferenciable en cero.

**Solución.** De la hipótesis tenemos que  $f(0) = 0$ . Es decir, debemos determinar si existe el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Notemos que como

$$-\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

y como  $|f(x)| \leq |x|^\alpha$  tenemos que

$$0 \leq \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|^{\alpha-1}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0,$$

de donde se tiene el resultado.

**Definition 6.1.16.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la función derivada  $f' : D \subset A \rightarrow \mathbb{R}$  se define por  $f'(x)$  y está definida en el conjunto  $D$  de los puntos donde  $f$  es diferenciable.

**Example 6.1.17.** Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , entonces la función derivada  $f' : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se define por  $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ . Notemos que  $D = (0, +\infty) \subset [0, +\infty) = A$ .

Daremos a continuación algunos ejemplos de funciones no diferenciables en un punto.

**Example 6.1.18.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |x|$ . La función  $f$  no es diferenciable en  $x = 0$ . En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Luego, la derivada no existe.

**Example 6.1.19.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

no es diferenciable en  $x = 0$ . En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

luego el límite no existe

El siguiente resultado relaciona las nociones de continuidad y de diferenciableidad.

**Theorem 6.1.20.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A$ . Si existe la derivada de  $f$  en el punto  $x = a$ , entonces la función  $f$  es continua en el punto  $x = a$ .

*Proof.* Si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

también existe el límite,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{(f(x) - f(a))}{(x - a)} (x - a) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

luego  $f$  es continua en  $a$ .  $\square$

**Remark 6.1.21.** Si  $f$  no es continua en el punto  $a$ , entonces  $f$  no es diferenciable en el punto  $a$ .

**Remark 6.1.22.** Notemos que existen funciones continuas que no son diferenciables. Por ejemplo, la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |x|$  es continua y no es diferenciable en  $x = 0$ .

**Example 6.1.23.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \sqrt[3]{3x} & \text{si } x \in (0, 9]; \\ bx + a & \text{si } x \in (9, \infty). \end{cases}$$

Determinar  $a$  y  $b$  de modo que  $f$  sea diferenciable en  $(0, \infty)$ .

**Solución.** Notemos que una condición necesaria para que la función  $f$  sea diferenciable es que sea continua. El único punto donde puede no serlo es en  $x = 9$ . Calculemos,

$$\lim_{x \rightarrow 9+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} bx + a = 9b + a,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 9-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} 5 + \sqrt[3]{3x} = 8.$$

Luego para que  $f$  sea continua es necesario que  $8 = 9b + a$ .

Además, para que sea diferenciable las derivadas laterales deben coincidir. Nuevamente el único punto donde esta condición puede fallar es en  $x = 9$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 9-} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{5 + \sqrt[3]{3x} - 8}{x - 9} = \frac{1}{\sqrt[3]{(27)^2}} = \frac{1}{9}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 9+} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{bx + a - 8}{x - 9} = b.$$

Luego

$$b = \frac{1}{9} \text{ y } a = 7.$$

## 6.2 Interpretaciones de la Derivada

### 6.2.1 Aproximación lineal de una función

La interpretación de la derivada que mejor se generaliza es la de aproximación lineal. Toda función diferenciable en un punto  $x = a$  puede aproximarse (localmente) por una recta. Como las rectas (o equivalentemente, los polinomios de grado uno) son las funciones reales más sencillas esto nos permite deducir propiedades locales de la función original.

Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en el punto  $x = a$ . Dado  $h \neq 0$ , definamos  $r(h) := f(a + h) - f(a) - f'(a)h$ . Notemos que como la función es diferenciable en el punto  $x = a$  tenemos que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h) \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Si consideramos la recta  $L_a(h) := f'(a)h + f(a)$ , tenemos que para  $h = 0$  las funciones  $L_a$  y  $f$  coinciden, en efecto  $L_a(0) = f(a)$ . Es decir, la recta  $L_a$  es una aproximación de la función  $f$ . Existen, sin embargo, infinitas rectas de la forma  $L(h) = mh + f(a)$ , tales que  $L(0) = f(a)$ . La particularidad de la recta  $L_a$  es que es la que mejor aproxima la función  $f$ , en el sentido que el error,  $r(h)$ , tiende a cero más rápido que para cualquier otra recta  $L$ . En efecto, como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

tenemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$  y que tiende a cero más rápido que  $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ . Notemos que si consideramos otra recta que aproxime  $f(x)$  en el punto  $x = a$ , por ejemplo  $L(h) = mh + f(a)$ , tenemos que el error,

$$R_L(h) := f(a + h) - f(a) - mh$$

es tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_L(h)}{h} = -\frac{mh}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) - m.$$

Luego, si la pendiente de la recta (polinomio de grado uno) con que aproximamos la función no es igual a la derivada  $f'(a)$  entonces como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_L(h)}{h} \neq 0.$$

el error en la aproximación  $R_{L(h)}(h)$  tiende a cero a una velocidad menor que  $r(h)$ .

**Example 6.2.1.** Sea  $f(x) = \sqrt{x}$  para aproximar el valor de la raíz en el punto  $x = 2$ , calculamos  $f'(2) = 1/(2\sqrt{2})$ . Luego, si  $h$  es un número real cerca de cero tenemos que

$$\sqrt{2 + h} \sim \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}h.$$

**Example 6.2.2.** Notemos que si  $f(x) = x^2$ , tenemos que  $f'(a) = 2a$ , es decir,

$$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2,$$

donde  $f(a) = a^2$ ,  $f'(a) = 2a$  y  $r(h) = h^2$ , es decir,  $f(a+h) = (a+h)^2 \sim a^2 + 2ah$ .

**Example 6.2.3.** Tenemos que si  $f(x) = \sin(x)$ , entonces  $f'(a) = \cos(a)$ . Luego  $\sin(a+h) = \sin(a) + \cos(a)h + r(h)$ , es decir,  $\sin(a+h) \sim \sin(a) + h\cos(a)$ .

**Remark 6.2.4.** Notemos que de esta interpretación podemos deducir propiedades locales de la función  $f$  de un modo directo. Por ejemplo, si  $f'(a) > 0$  entonces la aproximación lineal de la función es creciente, de donde podemos deducir que localmente  $f$  es creciente. Más adelante desarrollaremos estas ideas.

## 6.2.2 Interpretación geométrica de la derivada

Recordemos algunas nociones básicas de geometría. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, la pendiente de la recta secante a  $f$  que pasa por los puntos  $(x, f(x))$ ,  $(a, f(a))$  es

$$m_l = (f(x) - f(a))/(x - a).$$

La recta secante intersecta en dos puntos el gráfico de la función  $f$ . Cuando el punto  $x$  se aproxima al punto  $a$ , los puntos de intersección de las correspondientes rectas secantes con el gráfico de  $f$  se aproximan. En el límite, la recta secante intersecta (localmente) en un solo punto el gráfico de  $f$ , a saber, en el punto  $(a, f(a))$ . Esta nueva recta se denomina recta *tangente*. El problema de encontrar tangentes es uno de los principales en la geometría del siglo *XVII*. De hecho, la definición de derivada propuesta por Leibniz es de naturaleza completamente geométrica y corresponde a la pendiente  $a$  de la recta tangente. En efecto,

**Definition 6.2.5.** Supongamos que  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en el punto  $a \in A \subset \mathbb{R}$ . La recta tangente a la curva  $f(x)$  en el punto  $(a, f(a))$  es la recta que pasa por  $(a, f(a))$  con pendiente igual a

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La ecuación de dicha recta viene dada por

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Así, la derivada de una función  $f$  en el punto  $x = a$  corresponde a la pendiente de la recta tangente a  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ .

**Example 6.2.6.** Determine la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = 4x - x^2$ , en el punto  $(2, 4)$ .



**Solución.**

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 4h - 4 - 4h - h^2 - 4}{h} \\&= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} h = 0.\end{aligned}$$

Luego,  $f'(2) = 0$  y así

$$y = f'(2)(x - 2) + 4 = 4.$$

**Definition 6.2.7.** La recta normal a  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  es la recta perpendicular a la tangente de  $f$  en  $(a, f(a))$  que pasa por  $(a, f(a))$ . Luego, si  $f'(a) \neq 0$  entonces la pendiente de la normal es  $(-1)/(f'(a))$ . Por lo tanto la ecuación de la recta normal viene dada por,

$$y = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) + f(a).$$

Ahora, si  $f'(a) = 0$  entonces la recta normal tiene por ecuación  $x = a$ .

**Example 6.2.8.** Dada la curva  $y = x + 1/x$ , determine los puntos pertenecientes al gráfico de la curva donde la normal a la curva es paralela a la recta  $y = 3x + 5$ .

**Solución.** Sea  $(a, f(a))$  tal que la normal a la curva es paralela a la recta  $y = 3x + 5$ , es decir,  $-1/(f'(a)) = 3$ , pero

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x + \frac{1}{x} - a - \frac{1}{a}}{x - a} \\&= \lim_{x \rightarrow a} 1 + \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \\&= 1 + \lim_{x \rightarrow a} -\frac{x - a}{ax} \frac{1}{x - a} = 1 - \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

Luego,  $\frac{-1}{1 + \frac{1}{a^2}} = 3$ , es decir,  $a = \pm\sqrt{3}/2$ .

**Remark 6.2.9.** De esta interpretación tenemos que si las derivadas laterales de una función  $f$  en un el punto  $x = a$  existen y son distintas, entonces el gráfico de la función en el punto  $x = a$  posee *punta*. Por ejemplo  $f(x) = |x|$  en  $x = 0$ . Así, si el gráfico de una función  $f$  en el punto  $x = a$  posee una punta entonces la función no es diferenciable.

### 6.2.3 Interpretación física de la derivada

Newton definió e interpretó la noción de derivada en términos físicos. A saber, la velocidad de un móvil. En efecto, la velocidad media de un móvil en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  se define por

$$V_m = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1},$$

donde  $f(t)$  es la distancia recorrida por el móvil en movimiento rectilíneo durante el tiempo  $t$ . La noción de velocidad en un instante preciso (y no en un intervalo de tiempo) se denomina *velocidad instantánea* en  $t = t_0$  y se define por

$$V(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

**Example 6.2.10.** La distancia recorrida por un cuerpo en caída libre a tiempo  $t$  es proporcional a  $t^2$ , es decir existe una constante  $a > 0$  tal que  $f(t) = at^2$ . La velocidad instantánea viene dada por

$$f'(t) = 2at.$$

Luego, la velocidad de un cuerpo en caída libre crece en proporción al tiempo.

## 6.3 Técnicas de derivación y derivadas de funciones elementales

En esta sección desarrollaremos técnicas que nos permitirán calcular las derivadas de una gran cantidad de funciones.

**Theorem 6.3.1.** Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en el punto  $a \in A$ , entonces  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  (si  $g(a) \neq 0$ ) son derivables en el punto  $x = a$ . Además

(a)  $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ .

(b)  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .

(c)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

*Proof.* Comenzaremos probando la parte (1).

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

La demostración de la parte (2) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \left( \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] g(x) + f(a) \left[ \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \right) \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

Finalmente, para probar la parte (3) calcularemos en primer lugar

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} \\
&= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \frac{1}{g(x)g(a)} \\
&= - \frac{g'(a)}{(g(a))^2}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a) \frac{1}{g(a)} + f(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}$$

□

**Example 6.3.2.** Demuestre que la derivada de  $f(x) = x^n$  viene dada por  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Solución** Demostraremos este resultado por inducción. Recordemos que si  $f(x) = x$  entonces  $f'(x) = 1$  y que si  $f(x) = x^2$  entonces  $f'(x) = 2x$ . Supongamos que la fórmula es válida para  $n$ . Entonces, en virtud de la fórmula para derivar el producto, tenemos que

$$(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)'x + x^n = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

**Example 6.3.3.** Determine la derivada del polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Una aplicación directa del Teorema 6.3.1 y del ejemplo 6.3.2 nos permiten hacer el cálculo:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots 2a_2x + a_1.$$

**Example 6.3.4.** Sea  $f(x) = 4x^3 + 5 \sin(x)$ , calcule  $f'(x)$ . En virtud del Teorema 6.3.1 tenemos que

$$f'(x) = 12x^2 + 5 \cos(x).$$

**Example 6.3.5.** Sea  $f(x) = \tan(x)$ , determine  $f'(x)$ .

**Solución** Notemos que  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , luego aplicando la regla de derivación del cociente (Teorema 6.3.1) tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x). \end{aligned}$$

Del mismo modo es posible calcular las derivadas de todas las funciones trigonométricas elementales,

- (a)  $(\tan(x))' = \sec^2(x)$ .
- (b)  $(\cot(x))' = -\csc^2(x)$ .
- (c)  $(\sec(x))' = \sec(x) \tan(x)$ .
- (d)  $(\csc(x))' = -\csc(x) \cot(x)$ .

Dado que la composición de funciones es una operación fundamental en funciones, es natural intentar describir la derivada de la compuesta de dos funciones.

**Theorem 6.3.6** (Regla de la Cadena). Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(X) \subset Y$ . Sea  $a \in X$ . Si existen  $f'(a)$  y  $g'(f(a))$  entonces  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en el punto  $x = a$  y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

*Proof.* Sea  $b = f(a)$  entonces existen funciones  $\rho$  y  $\sigma$  tales que

$$f(a+h) = f(a) + (f'(a) + \rho(h))h$$

$$g(b+k) = g(b) + (g'(b) + \sigma(k))k$$

donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0.$$

Si  $k = f(a + h) - f(a) = (f'(a) + \rho(h))h$ , tenemos que

$$f(a + h) = b + k,$$

y

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + h) &= g(f(a + h)) = g(b + k) = g(b) + (g'(b) + \sigma(h))k \\ &= g(b) + (g'(b) + \sigma(h))(f'(a) + \rho(h))h = g(b) + (g'(b)f'(a) + \theta(h))h, \end{aligned}$$

donde  $\theta(h) = \sigma(f(a + h) - f(a))(f'(a) + \rho(h)) + g'(b)\rho(h)$ . Como la función  $f$  es continua en el unto  $x = a$  y la función  $\sigma$  es continua en el punto  $h = 0$ , tenemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(f(a + h) - f(a)) = 0$ , luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0.$$

Así

$$(g \circ f)(a + h) = g(f(a)) + (g'(f(a))f'(a))h + h\theta(h),$$

donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\theta(h)}{h} = 0.$$

Es decir

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

□

*Proof.* La siguiente es una demostración alternativa de la regla de la cadena. Es más simple, pero no se generaliza a otros contextos. Sea

$$Q(x) := \begin{cases} \frac{g(x) - g(f(a))}{x - f(a)} & \text{si } x \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } x = f(a). \end{cases}$$

Notemos que para todo  $x \in \text{dom } f$  se tiene que

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = Q(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Por otra parte, como la función  $f$  es diferenciable en  $x = a$ , tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Notemos además que como la función  $g$  es diferenciable en  $f(a)$ , la función  $Q$  es continua en  $f(a)$ , en efecto, esto se sigue de la definción de la derivada de  $g$  en  $f(a)$ . Luego  $Q \circ f$  es continua en  $x = a$  y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} Q(f(x)) = Q(f(a)) = g'(f(a))$$

Así

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( Q(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} Q(f(x)) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = g'(f(a)) f'(a).\end{aligned}$$

Notemos que en esta demostración es necesario definir la función auxiliar  $Q(x)$  pues es posible que para  $x$  arbitrariamente cerca de  $a$  se puede tener que  $f(x) = f(a)$ .  $\square$

**Example 6.3.7.** Sea  $f(x) = (5x^2 + 10)^{20}$ , entonces si  $g(x) = x^{20}$  y  $h(x) = 5x^2 + 10$ , tenemos que

$$f(x) = g(h(x)).$$

Luego,

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 20(5x^2 + 10)^{19}10x.$$

**Example 6.3.8.** Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  y considere la función definida por  $h(x) = x^{m/n}$ . Notemos que si  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  y  $g(x) = x^m$  entonces  $h(x) = f \circ g$  y por lo tanto

$$h'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

**Example 6.3.9.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y sea  $n \in \mathbb{N}$ . Calcule la derivada de  $f(x)^n$ . Utilizaremos la regla de la cadena. Sea  $h(x) = x^n$  entonces  $f(x)^n = h \circ f$ , de donde

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}f'(x).$$

Utilizando este resultado podemos calcular la derivada de la función  $f(x) = (\sin(x))^n$ . En efecto,

$$f'(x) = n \sin^{n-1}(x) \cos(x).$$

**Remark 6.3.10.** Notemos que si la función  $f$  es diferenciable en el punto  $x = h(g(a))$ , la función  $h$  es diferenciable en el punto  $g(a)$  y la función  $g$  es diferenciable en el punto  $a$  entonces

$$(f \circ h \circ g)' = f'(h(g(a)))h'(g(a))g'(a).$$

Claramente un resultado análogo es valido para la composición de un número finito de funciones diferenciables.

**Example 6.3.11.** Sea  $f(x) = \sqrt[3]{\cos(x^2 + 3)}$ , luego la derivada de  $f$  viene dada por

$$f'(x) = \frac{1}{3}(\cos(x^2 + 3))^{-2/3}(-\sin(x^2 + 3))2x.$$

**Example 6.3.12.** Sea  $f(x) = \tan^4(x^4 + x \sin(x^2))$ . La derivada de la función  $f$  viene dada por

$$f'(x) = 4 \tan^3(x^4 + x \sin(x^2)) \sec^2(x^4 + x \sin(x^2))(4x^3 + \sin(x^2) + x \cos(x^2))2x.$$

**Example 6.3.13.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 4} & \text{Si } x \leq 2 \\ 3x^2 - 8x + 8 & \text{Si } x > 2 \end{cases}$$

Determinar, si existe, la derivada de  $f$  en  $x = 2$ .

**Solución** Si  $x \leq 2$ , entonces la derivada de  $f$  viene dada por

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 4}} 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}.$$

Si  $x > 2$ , entonces la derivada de  $f$  viene dada por  $f'(x) = 6x - 8$ . Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 4,$$

la función no es diferenciable en el punto  $x = 2$ .

**Example 6.3.14** (Derivada del Arcoseno). La función  $\sin(y) = x$  posee inversa en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Llamaremos arcoseno a dicha función. Utilizando la fórmula de la función inversa tenemos que

$$\sin(\arcsin(x)) = x,$$

luego por la regla de la cadena obtenemos,

$$\cos(\arcsin(x))(\arcsin(x))' = 1.$$

Así

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Las derivadas de las otras funciones trigonométricas inversas vienen dadas por

$$(a) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(b) \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(c) \quad (\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(d) \quad (\sec^{-1} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},$$

$$(e) \quad (\csc^{-1} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

**Example 6.3.15.** Notemos que la misma idea utilizada en el Ejemplo 6.3.14 nos permite calcular de una manera más sencilla la derivada de la raíz cuadrada (obtenida en el Ejemplo 6.1.11). En efecto, como

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x})' = 1.$$

Luego

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El siguiente resultado nos permite calcular de un modo sistemático las derivadas de las funciones inversas.

**Corollary 6.3.16** (Derivada de una función Inversa). *Sea  $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$  una función que posee inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Si  $f$  es diferenciable en  $a \in X$  y  $f^{-1}$  es continua en  $b = f(a)$ . Entonces  $f^{-1}$  es diferenciable en  $b$  si y sólo si  $f'(a) \neq 0$ . En tal caso*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

*Proof.* Como la función  $f^{-1}$  es continua en el punto  $y = b$  tenemos que

$$\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a.$$

Luego, como  $f^{-1}(y) \neq a$  para  $y \neq b$  tenemos que

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \left( \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Es posible, asumiendo que la inversa es diferenciable, utilizando la técnica desarrollada en el Ejemplo 6.3.14 calcular su derivada. En efecto, como  $f(f^{-1}x) = x$ , tenemos que

$$1 = \frac{d}{dx} f(f^{-1}x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'.$$

Luego,

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Es decir,  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ . □

**Example 6.3.17.** Defina  $h(x) = x^2 \arctan(x)$ . Calcule la derivada de la función inversa de  $h$  en el punto  $\pi/4$ . Aplicamos la fórmula para la derivada de la función Inversa,

$$(F^{-1})'(b) = \frac{1}{F'(a)}, \quad \text{con } F(a) = b.$$

siempre que  $F'(a) \neq 0$ . En nuestro caso,  $F(x) = x^2 \arctan(x)$  y  $F(1) = \frac{\pi}{4}$ . Además,

$$F'(x) = 2x \arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$$



y

$$F'(1) = 2 \arctan(1) + \frac{1}{2} = 2 \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$(F^{-1})' \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\pi + 1}.$$

Estudiaremos a continuación la derivada de funciones exponenciales.

**Example 6.3.18.** Dado  $a > 0$  sea  $f(x) = a^x$ . Notemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - a^0}{h} \\ &= a^x f'(0). \end{aligned}$$

Es decir,  $f'(x) = a^x f'(0)$ . Notemos que a partir de la definición dada en al Capítulo 1 del número  $e$ , es posible demostrar (llevaremos a cabo dicha demostración en el Capítulo 4) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Luego,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Por otra parte, haciendo un cambio de base tenemos que

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln(a)} = e^{x \ln(a)} \frac{d}{dx} (\ln(a)x) = a^x \ln(a),$$

es decir,

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a).$$

Utilizando la fórmula para la derivada de la función inversa obtenemos además

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}.$$

**Example 6.3.19.** Sea  $f(x) = e^{\sin(x)}$ , utilizando la regla de la cadena y la derivada de la exponencial obtenemos

$$f'(x) = e^{\sin(x)} \cos(x).$$

**Example 6.3.20.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La derivada de esta función en  $x \neq 0$  viene dada por

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

En  $x = 0$  tenemos que  $f'(0) = 0$ . En efecto, recordemos que si  $x \neq 0$  entonces  $e^x > 1 + x$ , es decir

$$x^2 e^{1/x^2} > x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 1 > 1,$$

luego

$$|x| > \frac{1}{|x| e^{1/x^2}} = \left| x^{-1} e^{-1/x^2} \right|.$$

Así, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \epsilon$  tal que si  $|x| < \delta$  entonces

$$\left| x^{-1} e^{-1/x^2} \right| < |x| < \epsilon.$$

De donde se obtiene el resultado.

**Example 6.3.21.** Sea  $f(x) = \ln(\cos(x^2))$ , utilizando la regla de la cadena y la derivada del logaritmo obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x^2)} (-\sin(x^2)) 2x.$$

**Example 6.3.22.** Sea  $f(x) = 2^{\sin(x)}$ , entonces

$$f'(x) = 2^{\sin(x)} \ln(2) \cos(x).$$

**Example 6.3.23.** Calcule la derivada de  $f(x) = 2^{\tan(x)}$ . Aplicando la regla de la cadena y la fórmula de derivación de la exponencial tenemos que

$$f'(x) = 2^{\tan(x)} \sec^2(x) \ln(2).$$

**Example 6.3.24.** Sea  $f(x) = \log_a(x)$ , entonces  $f'(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ . Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

**Example 6.3.25.** Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función diferenciable y  $f(x) = e^{g(x)}$  de la regla de la cadena tenemos que

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

**Example 6.3.26.** Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función diferenciable y  $f(x) = \ln(g(x))$ , entonces

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

**Example 6.3.27.** Sean  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables. Considere la función  $f(x) = g(x)^{h(x)}$ . Determine  $f'(x)$ .

**Solución** Tenemos que  $f(x) = e^{\ln(g(x))h(x)}$ , luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{h(x)\ln(g(x))} \left( h'(x)\ln(g(x)) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)} \right) \\ &= g(x)^{h(x)} \left( h'(x)\ln(g(x)) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)} \right). \end{aligned}$$

**Example 6.3.28.** Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^x$ , determine  $f'(x)$ .

**Solución** Si  $f(x) = x^x$ , entonces  $\ln(f(x)) = x \ln(x)$ . Luego

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + \frac{x}{x},$$

entonces

$$f'(x) = x^x(\ln(x) + 1).$$

Hemos probado que toda función diferenciable es continua, sin embargo la función derivada puede ser irregular. En efecto, ya poseemos las herramientas para dar ejemplos donde mostramos cómo puede fallar la continuidad de la función derivada.

**Example 6.3.29.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función  $f$  es diferenciable en toda la recta real

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x^2) - (2/x) \cos(1/x^2) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Notemos entonces que  $f'$  restringida al intervalo  $[-1, 1]$  es finita y no acotada (recordemos que toda función continua definida en un intervalo cerrado es acotada, por lo tanto  $f'$  no es continua).

**Example 6.3.30.** El siguiente es un ejemplo de una función cuya derivada existe y es finita, pero que no posee máximos ni mínimos locales en un intervalos cerrado (recordemos que el Teorema de Weierstrass afirma que toda función

continua en un intervalo cerrado posee máximos y mínimos locales, por lo tanto la derivada de esta función no es continua). Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{-x^2/4} \sin(8/x^3) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2/4} ((4x^3 - x^5/2) \sin(8/x^3) - 24 \cos(8/x^3)) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sea  $\epsilon > 0$  entonces

$$\begin{aligned} \sup f'(x) &= \sup\{f'(x) : x \in [-\epsilon, \epsilon]\} = 24 \quad \text{y} \\ \inf f'(x) &= \inf\{f'(x) : x \in [-\epsilon, \epsilon]\} = -24. \end{aligned}$$

Sin embargo para todo  $x \in [-\epsilon, \epsilon]$  se tiene que  $f'(x) \neq 24$  y  $f'(x) \neq -24$ .

**Example 6.3.31.** Sea  $\epsilon > 0$  y  $f : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Sea  $0 < |\lambda| < 1$  y  $\Lambda : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $\Lambda(x) = \lambda x$ . Demuestre que si para todo  $x \in [-\epsilon, \epsilon]$  se tiene que  $f(\lambda x) = \lambda(f(x))$  entonces  $f$  es una función lineal, es decir, existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = ax$ .

**Solución** Como  $f$  y  $\Lambda$  conmutan se tiene que  $f(0) = \lambda f(0)$  por lo tanto  $f(0) = 0$ . Además, inductivamente tenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in [-\epsilon, \epsilon]$

$$f(\lambda^n x) = \lambda^n(f(x)).$$

Como la función  $f$  es diferenciable en  $x = 0$ , para toda sucesión  $(x_n)_n$  que converge a cero se tiene que el siguiente límite existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{x_n}.$$

En particular, si tomamos la sucesión  $x_n = \lambda^n x$  obtenemos que el siguiente límite existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda^n x)}{\lambda^n x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n f(x)}{\lambda^n x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Sea  $a = f'(0)$ , entonces

$$a = \frac{f(x)}{x}$$

es decir,  $f(x) = ax$ .

## 6.4 Funciones derivables en un intervalo

Una propiedad fundamental de la derivada es la relación que existe con el crecimiento local de una función. Esta relación fue notada por Fermat en 1637 y en modo menos preciso por Kepler en 1615 (notemos que Newton nació en 1642).

**Theorem 6.4.1.** *Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en el punto  $a \in A$  tal que  $f'(a) > 0$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (a, a + \delta) \cap A$  entonces  $f(a) \leq f(x)$  y si  $y \in (a - \delta, a) \cap A$  entonces  $f(a) \geq f(y)$ .*

*Proof.* Como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$  entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Por lo tanto si  $x > a$  entonces  $f(x) > f(a)$  y si  $y \in (a - \delta, a) \cap A$  entonces  $f(a) \geq f(y)$ .  $\square$

**Remark 6.4.2.** Notemos el carácter local del resultado. Sólo podemos describir la función en una vecindad del punto  $x = a$ .

**Remark 6.4.3.** Notemos que este resultado no nos dice cómo se compra la imagen de dos puntos  $x, y \in (a - \delta, a)$ . En efecto, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces  $f$  diferenciable en todos los números reales y

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si escogemos  $x_0 \in (0, 0 + \delta)$  de modo que  $\sin(1/x_0) = 0$  y  $\cos(1/x_0) = 1$  entonces  $f'(x_0) < 0$ . Del mismo modo si escogemos  $x_1 \in (0, 0 + \delta)$  de modo que  $\sin(1/x_1) = 1$  y  $\cos(1/x_1) = 0$  entonces  $f'(x_1) > 0$ . Por lo tanto la función  $f$  no es monótona en ningún intervalo que contiene a cero.

Los siguientes resultados, Teorema 6.4.4 y Corolario 6.4.5, pueden deducirse del Teorema del Valor Medio y lo haremos en lo que sigue. Hemos incluido estas demostraciones ya que son independientes de dicho resultado. En una primera lectura se pueden omitir y pasar directamente al Corolario 6.4.6.

**Theorem 6.4.4.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si para todo  $x \in [a, b]$  se tiene  $f'(x) > 0$  entonces  $f$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$ .*

*Proof.* Asuma por contradicción que existe un punto  $p \in (a, b)$  tal que el conjunto

$$S = \{x \in (a, p) : f(x) \geq f(p)\}$$

es no vacío. Sea  $q = \sup S$ , notemos que  $q < p$ . En efecto, si  $q = p$  entonces existe una sucesión  $(x_n)_n$  en  $(a, p)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$  y  $f(x_n) \geq f(p)$ . Por lo tanto

$$f'(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(p) - f(x_n)}{p - x_n} \leq 0.$$

Como  $f'(p) > 0$  se tiene que  $q < p$ . Recordemos que de la definición de derivada se deduce (Corolario 6.4.1) que si una función diferenciable en  $x = c$  es tal que  $f'(c) > 0$  se tiene que existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (c, c + \delta)$  entonces  $f(c) \leq f(x)$ . Así, si  $f(q) \geq f(p)$  entonces, como  $f'(q) > 0$ , existe  $x > q$  tal que  $f(q) \leq f(x)$ . En particular  $x \in S$ , pero  $q$  es el supremo de  $S$ . Por lo tanto  $f(q) < f(p)$ . Sin embargo, si  $f(q) < f(p)$  tenemos que  $q \notin S$  y por continuidad de  $f$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $S \cap (q - \delta, q] = \emptyset$ . Esto contradice el hecho que  $q$  sea el supremo de  $S$ . Por lo tanto, tenemos que ninguna de las siguientes afirmaciones es verdadera  $f(q) \geq f(p)$ ,  $f(q) < f(p)$ . Esta contradicción prueba el resultado.  $\square$

**Corollary 6.4.5.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si para todo  $x \in [a, b]$  se tiene  $f'(x) \geq 0$  entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .

*Proof.* Sea  $\epsilon > 0$  y aplique el Teorema 6.4.4 a la función  $g(x) = f(x) + \epsilon x$ . En efecto, para todo  $x \in [a, b]$  se tiene que  $g'(x) > 0$ . Luego, si  $x < y$  entonces  $f(x) + \epsilon x < f(y) + \epsilon y$ . Es decir,

$$f(x) - f(y) < \epsilon(y - x).$$

Así,

$$f(x) - f(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f(x) - f(y)) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon(y - x)) = 0.$$

Con lo que se tiene el resultado.  $\square$

Al final del Capítulo 2 definimos las nociones de máximo y mínimo local (ver la sección 5.3). En virtud del Teorema 6.4.1 tenemos

**Corollary 6.4.6.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en el punto  $c \in A$  y  $f$  posee un máximo (o un mínimo) local en  $x = c$  entonces  $f'(c) = 0$ .

*Proof.* Como  $x = c$  es un máximo local, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|h| < \delta$  y  $c + h \in A$  tenemos que  $f(c) \geq f(c + h)$ , es decir,  $f(c + h) - f(c) \leq 0$ .

Así,

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0,$$

y por las mismas razones, tomando  $h \leq 0$  tendremos que

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

luego como  $f$  es diferenciable, los límites laterales anterior deben ser iguales, es decir,

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0.$$

La demostración en el caso del mínimo es análoga.  $\square$

**Remark 6.4.7.** Notemos que la recíproca no es válida, en efecto  $f(x) = x^3$  es tal que  $f'(0) = 0$  y  $x = 0$  no es ni máximo ni mínimo local.

En lo que sigue probaremos resultados que no sólo dependen de la diferenciable de la función considerada sino que también del dominio en que están definidas. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Recordemos que  $f$  es continua, sin embargo su derivada puede no serlo, en efecto

**Example 6.4.8.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces  $f$  diferenciable en todos los números reales y

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función  $f'$  no es continua en  $x = 0$ .

El siguiente teorema establece la propiedad del valor intermedio para  $f'$ . Lo sorprendente es que esta proposición se satisface a pesar de que  $f'$  no sea necesariamente continua.

**Theorem 6.4.9** (Darboux). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Si  $d \in (f'(a), f'(b))$ , entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f'(c) = d$ .*

*Proof.* Consideremos en primer lugar, el caso en que  $d = 0$ , es decir,  $f'(a) < 0 < f'(b)$ . Como la función  $f$  es continua en  $[a, b]$ , por Teorema de Weierstrass (5.3.11), el mínimo de  $f$  se alcanza en un punto  $c \in [a, b]$ . Probaremos que  $c \neq a$  y  $c \neq b$ . Como  $f'(a) < 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (a, a + \delta)$  tenemos que  $f(a) > f(x)$ . Por otra parte, existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $x \in (b - \varepsilon, b)$  tendremos que  $f(b) > f(x)$ . Luego  $c \in (a, b)$  y en virtud del Corolario 6.4.6 tenemos que  $f'(c) = 0$ . En el caso general, basta considerar la función auxiliar  $g(x) = f(x) - dx$  y aplicar el argumento anterior, así  $g'(c) = 0$ , es decir,  $f'(c) = d$ .  $\square$

El Teorema de Darboux describe el tipo de discontinuidades que puede poseer una función derivada. En particular no puede suceder que los límites laterales existan y sean distintos. Es decir, las discontinuidades son de naturaleza más bien complicada. Dado cualquier conjunto numerable  $(d_n)_n$  en  $[a, b]$  es posible construir una función diferenciable en  $[a, b]$  cuya derivada sea discontinua exactamente en los puntos  $(d_n)_n$ . En particular, es posible construir

una función diferenciable cuya derivada sea discontinua en los puntos racionales de  $[a, b]$ . Fue Darboux en 1875 quien construyó una tal función por primera vez. Es posible caracterizar los conjuntos  $D \subset \mathbb{R}$  para los que se pueden construir funciones diferenciables cuya derivada sea discontinua exactamente en  $D$ . Notamos, finalmente, que no toda función que satisface la propiedad del valor intermedio es la derivada de otra función, esto fue observado por primera vez por Lebesgue en 1904.

**Corollary 6.4.10.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y sea  $c \in (a, b)$ , si  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = L$  entonces  $f'(c) = L$ .*

*Proof.* Supongamos que  $L > f'(c)$  y sea  $d \in (f'(c), L)$ . Si este es el caso, existe  $\delta > 0$  tal que si  $c < x < c + \delta$  entonces  $d < f'(x)$ . En particular

$$f'(c) < d < f'(c + \delta/2).$$

Lo que contradice el teorema de Darboux, pues no existiría  $x \in (c, c + \delta/2)$  tal que  $f'(x) = d$ .  $\square$

**Theorem 6.4.11** (Rolle). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y diferenciable en  $(a, b)$  tal que  $f(a) = f(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

*Proof.* Si  $f$  es constante, entonces  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in [a, b]$ . Caso contrario, sabemos que alcanza su máximo o su mínimo en algún punto  $c \in (a, b)$ . Luego,  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Remark 6.4.12.** Notemos que el teorema no es cierto en caso que la función no sea continua sobre el intervalo, para ello basta tomar la función  $f(x) = x$  si  $x \in [0, 1)$  y  $f(1) = 0$ . Es claro que  $f(0) = f(1) = 0$  y que  $f'(x) = 1$  si  $x \in (0, 1)$  pero no existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$  ya que  $f(x)$  no es continua en  $[0, 1]$ .

**Theorem 6.4.13** (Valor Medio de Lagrange). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y diferenciable en  $(a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Proof.* Consideremos la recta  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ . Es decir,  $g'(x)$  es constante y

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Considere la función  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ . Luego,  $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$  y  $\varphi(b) = f(b) - g(b) = 0$ . Es consecuencia directa del Teorema de Rolle (Teorema 6.4.11) que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $\varphi'(c) = 0$ . Por lo tanto.

$$f'(c) = g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$



**Remark 6.4.14.** Geométricamente este resultado establece que la tangente en el punto  $c$  tiene la misma pendiente que la secante que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .

**Remark 6.4.15.** Lipman Bers en una nota publicada en el American Mathematical Monthly en 1967 llamada *On avoiding the Mean Value Theorem* argumenta que el resultado que uno necesita en cálculo diferencial es un resultado más débil que el teorema del valor medio. Según Bers la hipótesis que se debe asumir es que la función sea diferenciable con derivada continua. Recordemos que el resultado que hemos probado es válido solo con la hipótesis de diferenciabilidad. Es posible bajo las hipótesis propuestas por Bers deducir la tesis del teorema del valor medio del teorema a partir del teorema del valor intermedio. Leon Cohen en una nota llamada *On Being mean to the mean value theorem* también discute este tipo de problema. A continuación formalizamos la idea de Bers.

**Lemma 6.4.16.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si para todo  $x \in [a, b]$  se tiene  $m \leq f'(x) \leq M$  entonces

$$m(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x - a).$$

*Proof.* La demostración de este Lema se basa en el Corolario 6.4.5. Notemos que si  $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones diferenciables tales que para todo  $x \in [a, b]$  se tiene  $h'(x) \leq g'(x)$  entonces para todo  $x \in [a, b]$  se tiene  $h(x) - h(a) \leq g(x) - g(a)$ . En efecto, basta aplicar el Teorema 6.4.5 a la función  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(x) := g(x) - h(x)$ . Como  $\varphi'(x) > 0$  tenemos que  $\varphi(a) \geq \varphi(x)$ . Es decir,  $g(a) - h(a) \leq g(x) - h(x)$ , por lo tanto  $h(x) - h(a) \leq g(x) - g(a)$ .

Considere ahora las funciones  $f(x)$  y  $Mx$ . Aplique el resultado que acabamos de mostrar para obtener  $f(x) - f(a) \leq M(x - a)$ . Del mismo modo, aplique el resultado a  $f(x)$  y  $mx$  para obtener  $m(x - a) \leq f(x) - f(a)$ .  $\square$

**Theorem 6.4.17** (Teorema del Valor Medio con hipótesis adicionales). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Proof.* Sean  $m := \inf\{f'(x) : x \in [a, b]\}$  y  $M := \sup\{f'(x) : x \in [a, b]\}$ . Haciendo  $x = b$  en el Lema 6.4.16 obtenemos

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

Como la función  $f'$  es continua, por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Notemos que no solo las hipótesis del Teorema 6.4.17 son más fuertes que el Teorema 6.4.13, también lo es su conclusión. En efecto, en el Teorema 6.4.13 tenemos que  $c \in (a, b)$ , es decir  $c \neq a$  y  $c \neq b$  y además puede aplicarse a funciones que son diferenciables en  $(a, b)$ , continuas en  $[a, b]$  y no diferenciables en  $x = a$  o  $x = b$ , como por ejemplo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) := \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \in (0, 1]; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Remark 6.4.18.** Una demostración similar a la que hemos dado del Teorema 6.4.13 puede obtenerse aplicando el Teorema de Rolle a la función  $h$  definida por la distancia entre el gráfico de la función y la recta que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ . Para ello basta notar que la distancia entre un punto  $(x_1, y_2)$  y una recta de la forma  $y = mx + b$  viene dado por

$$\frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Ver el trabajo de Poliferno donde se desarrollan los detalles de este argumento.

**Corollary 6.4.19.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y derivable en  $(a, b)$  tal que para todo  $x \in (a, b)$  se tiene que  $f'(x) = 0$ . Entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in [a, b]$  se tiene que  $f(x) = c$ .

*Proof.* Sea  $x \in (a, b)$ . Entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe  $d \in [a, x]$  tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(d).$$

Como la derivada es cero para todo punto en  $(a, b)$  tenemos que  $f'(d) = 0$ . Es decir,  $f(x) = f(a)$ . Como la elección del punto  $x$  es arbitraria, podemos concluir que para todo  $z \in [a, b]$  se tiene que  $f(z) = f(a)$ .  $\square$

**Corollary 6.4.20.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas y derivables en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = g(x) + c$  para todo  $x \in [a, b]$ .

*Proof.* Basta aplicar el corolario 6.4.19 para la función  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  $\square$

**Corollary 6.4.21.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y derivable en  $(a, b)$ . Si existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $|f'(x)| < K$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces para todo  $x, y \in (a, b)$  se tiene que

$$|f(x) - f(y)| < K|x - y|.$$

*Proof.* Del Teorema del valor medio tenemos que dados  $x, y \in (a, b)$  existe  $c < y$  de modo que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)||x - y| < K|x - y|.$$

$\square$

El siguiente resultado lo probamos en Corolario 6.4.5 sin utilizar el Teorema del Valor Medio, la siguiente es la sencilla demostración que es posible dar utilizando dicho Teorema.

**Corollary 6.4.22.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y derivable en  $(a, b)$ . La función  $f$  es monótona creciente si y solo si para todo  $x \in (a, b)$  se tiene  $f'(x) \geq 0$ .

*Proof.* Sean  $x, y \in (a, b)$  con  $x < y$ . Por el Teorema del Valor Medio existe  $c \in (x, y)$  tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como  $f'(c) \geq 0$  y además  $y - x > 0$  tenemos que  $f(y) \geq f(x)$ . Por otra parte, si la función  $f$  es creciente entonces para  $a < x < y < b$  tenemos que  $f(x) - f(y) < 0$ , luego

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0.$$

De donde  $f'(y) \geq 0$ . Como la función es diferenciable tenemos que para todo  $y \in (a, b)$  se tiene que  $f'(y) \geq 0$ .  $\square$

**Remark 6.4.23.** Notemos que de manera análoga podemos probar que la función  $f$  es monótona decreciente si y solo si para todo  $x \in (a, b)$  se tiene  $f'(x) \leq 0$ . Resultados análogos también se obtienen utilizando desigualdades estrictas, en cuyo caso la función es estrictamente creciente o decreciente.

**Example 6.4.24.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función diferenciable con derivada continua. Sea  $p \in (a, b)$  tal que  $f(p) = p$  y  $|f'(p)| < 1$ . Demuestre que existe un intervalo  $(p - \delta, p + \delta)$  tal que si  $x \in (p - \delta, p + \delta)$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p,$$

donde  $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f(x)}_{n \text{ veces}}$ .

**Solución.** Como  $f'$  es una función continua y  $|f'(p)| < 1$  existen  $0 \leq \lambda < 1$  y  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (p - \delta, p + \delta)$  entonces  $|f'(x)| \leq \lambda$ . Sea  $x \in (p - \delta, p + \delta)$ , por el Teorema del Valor Medio existe  $c \in (p - \delta, p + \delta)$  tal que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c)||x - p| < \lambda|x - p|.$$

Luego

$$|f^2(x) - p| = |f(f(x)) - f(f(p))| < \lambda|f(x) - f(p)| < \lambda^2|x - p|.$$

En general obtenemos que  $|f^n(x) - p| < \lambda^n|x - p|$ . Como  $\lambda \in (0, 1)$  tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

**Example 6.4.25** (Principio de contracción). Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función tal que existe  $\lambda \in (0, 1)$  de modo que si  $x, y \in [a, b]$  entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|.$$

Entonces  $f$  posee un único punto fijo  $x_0$  y para todo  $x \in (a, b)$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ .

**Solución.** Sea  $x \in [a, b]$  un punto arbitrario, probaremos que la sucesión

$$\{x, fx, f^2x, \dots, f^nx, \dots\},$$

donde  $f^nx = f \circ \dots \circ f(x)$  es una sucesión de Cauchy. Notemos que

$$|f^n(x) - f^{n-1}(x)| \leq \lambda|f^{n-1}(x) - f^{n-2}(x)| \leq \dots \leq \lambda^{n-1}|f(x) - x|. \quad (6.4.1)$$

Ahora si  $n \geq N$  entonces

$$|f^n(x) - f^N(x)| \leq \lambda|f^{n-1}(x) - f^{N-1}(x)| \leq \dots \leq \lambda^N|f^{n-N}(x) - x|.$$

Por la desigualdad triangular y ecuación (6.4.1)

$$\begin{aligned} |f^n(x) - f^N(x)| &\leq \lambda^N \sum_{j=1}^{n-N} |f^{n-N-j+1}(x) - f^{n-N-j}(x)| \leq \\ &\lambda^N \sum_{j=1}^{n-N} \lambda^{n-N-j} |f(x) - x| \leq \frac{\lambda^N}{1-\lambda} |f(x) - x|. \end{aligned}$$

Sea  $\epsilon > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{\lambda^N}{1-\lambda} |f(x) - x| < \epsilon$$

Luego si  $n, m \geq N$  tenemos que

$$|f^n(x) - f^m(x)| \leq |f^n(x) - f^N(x)| + |f^N(x) - f^m(x)| < \frac{2\lambda^N}{1-\lambda} |f(x) - x| < \epsilon.$$

Así hemos probado que la sucesión  $\{x, fx, f^2x, \dots, f^nx, \dots\}$  es de Cauchy y por lo tanto existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) := x_0$ . Como la función  $f$  es continua tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n x) = f(x_0).$$

Pero, por otra parte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}x = x_0$ . Por lo tanto  $f(x_0) = x_0$ . Finalmente, supongamos que existe otro punto fijo  $y \in [0, 1]$ ,  $y \neq x_0$ . Como

$$|x_0 - y| = |f(x_0) - f(y)| \leq \lambda|x_0 - y|$$

Como  $\lambda \in (0, 1)$  concluimos que  $x_0 = y$ .

**Example 6.4.26.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función diferenciable. Si  $f'(x)$  es monótona creciente entonces para todo  $c \in (a, b)$  se tiene

$$(b-a)f(c) + (c-b)f(a) \geq (c-a)f(b). \quad (6.4.2)$$

Observe que si  $f'$  es monótona decreciente entonces la desigualdad se invierte. Concluya que si  $0 < m < n$  y  $\alpha > 0$  entonces

$$\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

**Solución.** La solución aquí presentada es debida a Bush. Por el Teorema del valor Medio tenemos que

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(\beta) \geq f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A partir de este resultado es posible deducir algunas desigualdades. En efecto, sea  $f(x) = \ln(1+x)$ . Entonces  $f'$  es una función monótona decreciente para  $x \geq 0$ . Sea  $\alpha > 0$  y sean  $0, \alpha/n, \alpha/m$ , con  $0 < m < n$  los valores correspondientes a  $a, b, c$  en la ecuación 6.4.2. Entonces

$$\frac{\alpha}{n} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) < \frac{\alpha}{m} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right).$$

De donde obtenemos que para  $m < n$ ,

$$\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

**Example 6.4.27.** Un número  $x \in \mathbb{R}$  se dice *algebraico* si existen números enteros  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  tales que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0. \quad (6.4.3)$$

El grado de un número algebraico es el menor entero  $n \in \mathbb{N}$  para el que  $x$  satisface una ecuación del tipo (6.4.3). Demuestre que si  $x \in \mathbb{R}$  es un número algebraico de grado  $n > 1$  existe un entero positivo  $M$  tal que para cualquier par de enteros  $p, q \in \mathbb{Z}$  con  $q > 0$  se tiene

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

**Solución.** Sea  $f(z)$  un polinomio de grado  $n$  con coeficientes enteros para el que  $f(x) = 0$ . Sea  $M$  un entero positivo tal que si  $|z - x| \leq 1$  entonces  $|f'(z)| \leq M$ . Por el Teorema del Valor Medio tenemos que, si  $|z - x| < 1$

$$|f(x)| = |f(z) - f(x)| \leq M|x - z|.$$

Considere ahora dos enteros  $p, q$  con  $q > 0$ . Si  $|z - p/q| > 1$  el resultado se obtiene de inmediato. Supongamos entonces que  $|z - p/q| \leq 1$ . Entonces

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \leq M\left|z - \frac{p}{q}\right|,$$

y por lo tanto

$$|q^n f(p/q)| \leq M q^n |z - \frac{p}{q}|.$$

La ecuación  $f(z) = 0$  no posee raíces racionales (en tal caso el grado de  $x$  sería menor). Además  $q^n f(p/q)$  es un número entero. De donde se obtiene el resultado.

**Example 6.4.28.** Existe una demostración alternativa del Teorema de Darboux (ver Teorema 6.4.9) descubierta por Lars Olsen en la que se utiliza el Teorema del valor medio. Definamos una nueva función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a, \\ \frac{f(2x-a)-f(a)}{2x-2a} & \text{si } a < x \leq (a+b)/2, \\ \frac{f(b)-f(2x-b)}{2b-2x} & \text{si } (a+b)/2 < x < b, \\ f'(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

La función  $g$  es continua. Dado  $d \in (f'(a), f'(b))$ , entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $g(c) = d$ . Para  $x \in (a, b)$  tenemos que

$$g(x) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

para  $a \leq s < t \leq b$ . Por el Teorema del Valor Medio cualquier valor de  $g$  es el valor de la derivada de  $f$  en algún punto de  $[a, b]$ .

**Example 6.4.29.** La siguiente igualdad es consecuencia del Teorema del Valor Medio

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

En efecto, notemos que  $f(x) = e^x$  y  $f'(x) = e^x$ . Dado  $x > 0$ , por el Teorema del Valor Medio tenemos que existe  $c \in (0, x)$  tal que  $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$ . Es decir,  $e^x = 1 + e^c x$ . Como  $c > 0$ , entonces  $e^c > 1$ . Es decir,  $e^x > 1 + x$ , así

$$e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1}.$$

De donde

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)}} \quad \text{lo que implica que} \quad \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{(n+1)}}.$$

Así

$$\frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)^{(n+1)}}{x}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}}{x} = 0.$$

**Example 6.4.30.** Toda función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable es continua. Supongamos además que su derivada es acotada, es decir que existe  $M \geq 0$  tal que para todo  $x \in [a, b]$  se tiene que  $|f'(x)| \leq M$ . En este caso, podemos obtener una descripción más precisa de la continuidad de la función. En efecto, por el Teorema del Valor Medio tenemos que si  $x, y \in (a, b)$  entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq f'(c)|x - y| \leq M|x - y|.$$

Luego, dado  $\epsilon > 0$ , si consideramos  $\delta = \epsilon/M$  y  $|x - y| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Es decir, el valor de  $\delta > 0$  no depende del punto  $x \in [a, b]$ . Hemos probado en particular que la función  $f$  es uniformemente continua.

**Example 6.4.31** (Teorema del binomio). Utilizando el Teorema del Valor Medio es posible probar la fórmula del binomio. El argumento aquí presentado es debido a J. Singh. Probaremos que dado  $n \in \mathbb{N}$  y  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k y^{n-k}.$$

Sea  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ . Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , utilizando la fórmula de la derivada del cociente, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{t^k}{(1+t)^n} \right) = \frac{kt^{k-1} - (n-k)t^k}{(1+t)^{n+1}}.$$

Multiplicando por  $\frac{n!}{(n-k)!k!}$  y sumando sobre  $k = 0, \dots, n$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{t^k}{(1+t)^n} &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \left( \frac{kt^{k-1} - (n-k)t^k}{(1+t)^{n+1}} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{(n-k)!k!} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^n} - \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)n!}{(n-k)!k!} \frac{t^k}{(1+t)^n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \frac{t^k}{(1+t)^{n+1}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}} - \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{t^k}{(1+t)^n} = c.$$

Tomando límite  $t \mapsto 0$  tenemos que  $c = 1$ . Luego

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{t^k}{(1+t)^n} = 1,$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} t^k = (1+t)^n.$$

Tomando límite en las ecuaciones anteriores con  $t \mapsto -1$  obtenemos

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (-1)^k = (1-1)^n = 0.$$

Luego,

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} t^k = (1+t)^n$$

para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Para completar la demostración basta hacer  $t = x/y$ .

Concluimos esta sección probando uno de los resultados fundamentales en análisis. En el corolario 6.3.16 suponiendo que la función tiene inversa y que es diferenciable hemos calculado la derivada de la inversa. Es posible, probar un resultado mucho más fuerte. A saber

**Theorem 6.4.32** (Teorema de la función inversa). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si  $c \in (a, b)$  es tal que  $f'(c) \neq 0$  y  $f'$  es una función continua en  $x = c$  entonces  $f$  es invertible en un intervalo de la forma  $(c-\epsilon, c+\epsilon)$  y  $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$ , donde  $f(x) = y$ .*

Lo notable de este resultado es que a partir de información sobre la derivada de la función en un único punto podemos concluir que la función es invertible en una vecindad del punto. La fórmula de la derivada de la inversa es una consecuencia relativamente sencilla, como vimos en el Corolario 6.3.16. Es decir, información sobre la derivada en un punto nos permite deducir una gran cantidad de información local sobre la función.

*Proof.* Notemos que dado  $y \in \mathbb{R}$  queremos resolver la ecuación  $f(x) = y$ . esto es equivalente a encontrar una raíz de  $F_y(x) = y - f(x)$ . Consideremos la función  $\varphi_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi_y(x) := x + \frac{y - f(x)}{f'(c)}.$$

Notemos que  $x \in [a, b]$  es un punto fijo de  $\varphi_y$ , es decir  $\varphi_y(x) = x$  si y solo si  $f(x) = y$ . Probaremos que  $\varphi_y$  posee un único punto fijo. Sea  $A := f'(c)$  y  $\alpha = |A|/2$ . Como  $f'$  es continua en  $x = a$  existe  $\epsilon > 0$  y  $W := (c-\epsilon, c+\epsilon) \subset [a, b]$  de modo que si  $x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$  entonces  $|f'(x) - A| < \alpha$ . Notemos que si  $x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$  entonces

$$|\varphi_y'(x)| = \left| 1 - \frac{f'(x)}{A} \right| = \left| \frac{A - f'(x)}{A} \right| < \frac{\alpha}{|A|} = \frac{1}{2}.$$



Por el teorema del valor medio tenemos que si  $x', x \in W$  entonces

$$|\varphi_y(x) - \varphi_y(x')| \leq \frac{|x - x'|}{2}.$$

Probaremos ahora que  $\varphi_y([c - \epsilon, c + \epsilon]) \subset [c - \epsilon, c + \epsilon]$  para valores de  $y$  suficientemente cerca de  $d = f(c)$ . Sea  $\delta = A\epsilon/2$  y  $V = (d - \delta, d + \delta)$ . Luego si  $y \in V$  tenemos que

$$|\varphi_y(c) - c| = \left| c + \frac{y - f(c)}{A} - c \right| = \left| \frac{y - d}{A} \right| = \left| \frac{\delta}{c} \right| = \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego si  $x \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$  entonces

$$|\varphi_y(x) - c| = |\varphi_y(x) - \varphi_y(c)| + |\varphi_y(c) - c| < \frac{x - c}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto  $\varphi_y(x) \in W$ . Por lo tanto, en virtud del principio de contracción (Ejemplo 6.4.25) la función  $\varphi_y(x) : [c - \epsilon, c + \epsilon] \rightarrow [c - \epsilon, c + \epsilon]$  posee un único punto fijo,  $g(y)$ , que depende continuamente de  $y$ .

Debemos probar ahora que la inversa es diferenciable. Es decir, para  $y = f(x) \in V$  queremos probar que  $g'(y)$  existe. Sea  $U = g(V) = W \cap f^{-1}(V)$ . Sea  $y + k = f(x + h) \in V$ . Entonces

$$\frac{|h|}{2} \geq |\varphi_y(x + h) - \varphi_y(x)| = \left| h + \frac{f(x) - f(x + h)}{A} \right| = \left| h - \frac{k}{A} \right| \geq |h| - \left| \frac{k}{A} \right|,$$

y luego

$$\frac{|h|}{2} \leq \left| h - \frac{k}{A} \right| < \frac{|k|}{\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{1}{|k|} < \frac{2}{\alpha|h|}.$$

Como  $g(y + k) - g(y) - k/B = h - k/B = -(f(x + h) - f(x) - Bh)/B$  tenemos que

$$\frac{|g(y + k) - g(y) - k/B|}{|k|} < \frac{2}{|B|\alpha} \frac{|f(x + h) - f(x) - Bh|}{|h|},$$

converge a cero si  $|h| \leq 2|k|/\alpha \rightarrow 0$ . De donde  $g'(y) = 1/B = 1/f'(g(y))$ .  $\square$

**Remark 6.4.33.** Es posible dar una demostración más sencilla de este resultado, sin embargo hemos escogido esta demostración pues se generaliza de un modo elemental en dimensión superior.

## 6.5 Derivadas de Orden Superior

Esta sección esta dedicada al estudio de las derivadas de orden superior de una función. Así como la primera derivada nos permite construir una buena aproximación lineal de una función diferenciable, las derivadas de orden superior nos permiten construir una buena aproximación polinomial de una función varias veces diferenciable.

**Definition 6.5.1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $x = c$ . Denotaremos por  $f^{(1)}(c)$  la derivada de  $f$  en  $x = c$ . Inductivamente definimos la  $n$ -ésima derivada de la función  $f$  en el punto  $c \in (a, b)$  por

$$f^{(n)}(c) := \frac{d^n}{dx^n}(f(x)) \Big|_{x=c} := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(c)}{x - c}.$$

Diremos que  $f$  es  $n$ -veces diferenciable en  $c \in (a, b)$  si existen los límites

$$\{f^{(1)}(c), f^{(2)}(c), \dots, f^{(n)}(c)\}.$$

**Example 6.5.2.** Sea  $f(x) = x^n + 1$ , entonces  $f^{(1)}(x) = nx^{n-1}$ ,  $f^{(2)}(x) = n(n-1)x^{n-2}$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n-1)}(x) = n!x$ ,  $f^{(n)}(x) = n!$  y  $f^{(n+1)}(x) = 0$ . En general, todo polinomio posee derivadas de todos los ordenes.

**Example 6.5.3.** Sea  $f(x) = \cos(x)$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que

$$f^{(4n)}(x) = \cos(x), \quad f^{(4n+1)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(4n+2)}(x) = -\cos(x), \quad f^{(4n+3)}(x) = \sin(x).$$

**Example 6.5.4.** Si  $f(x) = x^2 \sin(x)$ , entonces

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x),$$

y la segunda derivada de  $f$  viene dada por

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = 2 \sin(x) + 4x \cos(x) - x^2 \sin(x).$$

**Example 6.5.5.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en toda la recta real con

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Sin embargo, la segunda derivada no existe en  $x = 0$  ya que  $f'$  no es continua en  $x = 0$ .

**Example 6.5.6.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) & \text{si } x \leq 2; \\ a(x-2)^2 + b(x-2) + c & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  de modo que  $f$  sea dos veces diferenciable.

**Solución.** Notemos que si  $x \neq 2$  entonces claramente la función es dos veces diferenciable. Debemos determinar condiciones de modo que  $f$  sea continua en  $x = 2$ . Por una parte

$$f(2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x),$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = c.$$

Entonces

$$c = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Analicemos la primera derivada,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c - c}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} a(x - 2) + b = b. \end{aligned}$$

Por otra parte la derivada por la derecha puede calcularse utilizando técnicas de diferenciación

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= f'_-(2) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \frac{\pi}{3} \\ &= \pi \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Luego,

$$b = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Así

$$f'(x) = \begin{cases} \pi \cos\left(\frac{x\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{x\pi}{3}\right) & x \leq 2; \\ 2a(x - 2) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\sqrt{3} & x > 2. \end{cases}$$

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = f'(2).$$

Es decir  $f'$  es continua en la recta real y diferenciable en  $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ , con

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3} \sin\left(\frac{x\pi}{3}\right) - \frac{\pi^2}{9} \cos\left(\frac{x\pi}{3}\right) & x < 2 \\ 2a & x > 2 \end{cases}$$

Luego, las condiciones necesarias y suficientes para que  $f$  sea dos veces diferenciable en  $x = 2$  son

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) = 2a,$$

es decir,

$$a = \frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}.$$

**Example 6.5.7** (Derivada Schwarziana). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función tres veces diferenciable. Si  $f'(x) \neq 0$  definimos la *derivada Schwarziana* por

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Notemos que si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones tres veces diferenciables entonces,

$$S(f \circ g)(x) = ((Sf \circ g)(x)) (g'(x))^2 + Sg(x).$$

En efecto, si denotamos por  $h = f \circ g$  entonces  $h' = (f' \circ g)g'$ , de donde

$$h''(x) = (f'' \circ g(x))(g'(x))^2 + (f' \circ g(x))g''(x).$$

Derivando una vez más obtenemos

$$h'''(x) = (f''' \circ g(x))(g'(x))^3 + 3(f'' \circ g(x))g'(x)g''(x) + (f' \circ g(x))g'''(x).$$

Reemplazando esta igualdades en la fórmula para  $S(f \circ g)(x)$  se obtiene el resultado. En particular, obtenemos que si  $Sf < 0$  entonces  $S(f \circ f) < 0$ . El siguiente resultado se sigue de la hipótesis de derivada Schwarziana negativa.

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $Sf(x) < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y la función derivada  $f'$  posee un mínimo local en  $x_1 \in \mathbb{R}$  entonces  $f'(x_1) < 0$  (análogamente si  $f'$  posee un máximo local en  $x_1$  entonces  $f'(x_1) > 0$ ). En efecto, como  $x_1$  es un valor crítico de  $f'$  tenemos que  $f''(x_1) = 0$ , luego

$$Sf(x_1) = \frac{f'''(x_1)}{f'(x_1)}.$$

En un mínimo local de  $f'$  tenemos que  $f'''(x_1) > 0$ , luego la hipótesis  $Sf(x) < 0$  implica que  $f'(x_1) < 0$  (un argumento análogo prueba el otro caso). Una serie de resultados que involucran la derivada Schwarziana pueden encontrarse en sección de ejercicios.

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces diferenciable con segunda derivada continua. Aplicando el teorema del valor medio a la primera derivada de  $f$  es posible estimar la magnitud del error en la aproximación de  $f$  por una recta de pendiente  $f'$ . En efecto, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|x - c| < h$  de modo que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = f'(c) - f'(x).$$

Como la función posee segunda derivada, existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que

$$f'(c) - f'(x) = f''(d)(c - x).$$

Como la segunda derivada es continua existe  $M \in \mathbb{R}$  de modo que si  $y \in [x, x+h]$  entonces  $|f''(y)| < M$  (lo mismo es válido para  $y \in [x-h, x]$ ). Así

$$|\epsilon| := |c - x| |f''(d)| \leq hM.$$

Luego  $|\epsilon h|$ , que mide la diferencia entre  $f(x+h)$  y  $f(x) + hf'(x)$  es a lo más  $Mh^2$  (magnitud menor a  $f'(x)h$  si  $f'(x) \neq 0$ .)

**Example 6.5.8** (El método de Newton-Raphson). . El problema de encontrar soluciones a ecuaciones de la forma  $f(x) = 0$  es antiguo, métodos para resolver ecuaciones de la forma  $p(x) = 0$  donde  $p(x)$  es un polinomio de grado menor que cinco, se conocen desde el siglo dieciséis. Sin embargo, durante el siglo diecinueve se demostró que no existe una forma general de resolver dicha ecuación para polinomios de grado mayor o igual que cinco. Por lo tanto, los métodos para aproximar raíces son importantes. Presentamos ahora uno de ellos, el llamado *método de Newton-Raphson*. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. La transformación de Newton se define por

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Notemos que si  $x_0 \in \mathbb{R}$  es una raíz de  $f$  cuya derivada no es nula, es decir  $f(x_0) = 0$  entonces  $N_f(x_0) = x_0$ . La recíproca también es válida. Por lo tanto la búsqueda de raíces de  $f$  es equivalente (con la excepción de las raíces con derivada cero) a la búsqueda de puntos fijos para la transformación de Newton. Notemos que

$$N'_f(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Luego, si  $x_0 \in \mathbb{R}$  es una raíz de  $f$  cuya derivada no es nula

$$N_f(x_0) = x_0 \quad \text{y} \quad |N'_f(x_0)| = 0.$$

En virtud del resultado obtenido en el Ejemplo 6.4.24 tenemos que existe una vecindad  $(x_0 - L, x_0 + L)$  tal que si  $x \in (x_0 - L, x_0 + L)$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_f^n(x) = x_0,$$

Donde  $N_f^n(x) = \underbrace{N_f \circ N_f \circ \cdots \circ N_f(x)}_{n\text{-veces}}$ . Es decir, el método de Newton-Raphson

nos entrega un algoritmo para aproximar raíces. La idea de la definición de la transformación de Newton es simple. Tome un punto arbitrario, digamos  $x_1 \in \mathbb{R}$ , y aproxime la función  $f$  en el punto  $x_1$  por su recta tangente. Es decir por  $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ . Determine el punto donde esa recta se anula, es decir resuelva  $f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0$ . Obtenemos como solución

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Repita el proceso ahora considerando  $x_2$ . El método afirma que si  $x_1$  está suficientemente cerca de  $x_0$  entonces la sucesión  $(x_n)_n$  definida inductivamente converge a  $x_0$ .

## Chapter 7

# Ejercicios

### 7.1 Numerabilidad

- (a) Construya una descomposición de los números naturales,  $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$  tal que los conjuntos  $X_i$  son infinitos y dos a dos disjuntos.
- (b) Pruebe que la cardinalidad del conjunto  $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  es igual a la del conjunto  $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ .
- (c) Demuestre que existe una biyección entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números primos.

### 7.2 Axioma del Supremo

- (a) Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$  dos subconjuntos no vacíos y acotados de números positivos. Definimos el conjunto

$$AB := \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Demuestre que  $AB$  es un conjunto acotado y determine el supremo de  $AB$ .

- (b) Demuestre que si  $A, B \subset \mathbb{R}$  son dos conjuntos acotados tales que para todo  $s \in A$  y  $S \in B$  se tiene que  $s \leq S$ , entonces  $\sup A = \inf B$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existen  $x_0 \in A$  y  $y_0 \in B$  tales que  $S_1 - s_1 < \epsilon$ .

### 7.3 Propiedad Arquimideana

- (a) Demuestre que el ínfimo del conjunto

$$A := \left\{ \frac{|\cos n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

es igual a cero.

- (b) Sea  $a \in (0, 1)$ . Demuestre que el ínfimo del conjunto

$$A := \{a^n : n \in \mathbb{N}\},$$

es igual a cero.

## 7.4 Teorema Intervalos Encajados

- (a) Utilizando el Teorema de los intervalos encajados demuestre que el conjunto de los números reales es no numerable.

## 7.5 Límite de sucesiones

- (a) Sea  $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ . Demuestre que la sucesión es monótona creciente y acotada. Calcule su límite.
- (b) Calcule los siguientes límites:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n,$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n},$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 1}\right)^{(n+1)^2}.$$

- (c) Sean  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ . Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$ .
- (d) Demuestre que si  $(a_n)_n$  es una sucesión de términos no negativos tal que existe  $K \in (0, 1)$  de modo que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $a_{n+1} \leq K a_n$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- (e) En 1615 Galileo notó que la sucesión de los números impares tiene la siguiente propiedad

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots$$

Galileo observó que esta es la única progresión aritmética con esta propiedad. Determine si la afirmación de Galileo es correcta. Considere sucesiones para las cuales la razón de la suma de los primeros  $n$  términos sobre la suma de los siguientes  $n$  términos es constante.

## 7.6 Subsucesiones

- (a) Demuestre que si  $(a_n)_n$  es una sucesión tal que toda subsucesión  $(b_n)_n$  es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq 1,$$

entonces existen a lo más dos puntos a los que converge toda subsucesión convergente.

- (b) De un ejemplo de una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que para todo  $m \in \mathbb{N}$  existe una subsucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ , de modo ésta que converja a  $m$ .

## 7.7 Sucesiones de Cauchy

- (a) Sin utilizar el hecho de que convergen, pruebe que las siguientes sucesiones son de Cauchy:

(1)

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n,$$

(2)

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{4n},$$

- (b) Sea  $(a_n)_n$  una sucesión de Cauchy tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $a_n \in \mathbb{Z}$ , es decir la sucesión toma valores en los enteros. Demuestre que existe  $C \in \mathbb{R}$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > N$  se tiene  $a_n = C$ .

## 7.8 Límites infinitos

- (a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  e  $(y_n)_n$  es acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

- (b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  y existe  $c > 0$  tal que  $y_n > c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty.$$

## 7.9 Límite de funciones

- (a) Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$$



- (b) Calcule el siguiente límite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{x} \cdot 2^{\sin(\frac{\pi}{x})} \right).$$

- (c) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona y acotada. Demuestre que para todo  $a \in \mathbb{R}$  existen los límites laterales,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

## 7.10 Funciones Continuas

- (a) Determine para qué valores  $x \in \mathbb{R}$  la siguiente función es continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

- (b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} q & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } x = p/q; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

donde el número racional  $p/q$  se asume escrito de modo que  $p$  y  $q$  no tengan factores comunes y tal que  $q > 0$ . Demuestre que  $f$  no es acotada en ningún intervalo y estudie su continuidad.

- (c) Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona, demuestre que el conjunto de puntos donde  $f$  es discontinua es numerable.

## 7.11 Funciones Continuas en un Intervalo

- (a) Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es *monótona a pedazos* si existe una partición del intervalo  $\{a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$  tal que  $f$  es monótona en cada uno de los intervalos  $(x_i, x_{i+1})$ . Demuestre que si  $f$  es monótona a pedazos y satisface la propiedad del valor intermedio entonces es continua.
- (b) Sea  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(0) = f(2)$ . Demuestre que existen  $a, b \in [0, 2]$  tales que  $a - b = 1$  y  $f(a) = f(b)$ .
- (c) Pruebe que la ecuación  $(1 - x) \cos x = \sin x$  posee al menos una solución en  $(0, 1)$ .

## 7.12 Técnicas de derivación

- (a) Determine, en los puntos en que existen, las derivadas de las siguientes funciones

$$f(x) = |x|x, \quad f(x) = \sqrt{|x|}, \quad f(x) = \log_x 3, \quad f(x) = \log_x(\cos x).$$

- (b) Suponga que las funciones  $f$  y  $g$  son diferenciables en el punto  $x = a$ . Determine

(1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a},$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

## 7.13 Funciones derivables en el intervalo

- (a) Determine el número de raíces menores que uno de la ecuación

$$f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2 = 0.$$

Es decir, determine el número de elementos  $x \leq 1$  tales que  $f(x) = 0$ .

- (b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Pruebe que  $f$  es constante.

- (c) Supongamos que  $f$  es una función diferenciable para todo  $x > 0$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

Sea  $g(x) = f(x + 1) - f(x)$ . Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

## 7.14 Derivadas de orden superior

- (a) Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces diferenciable. Suponga que la segunda derivada es acotada y que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

# Bibliography

- [A] T. M. Apostol *Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra, 2nd Edition*. Wiley, 1991. (Cited on pages 8, 34, and 49.)
- [CJ] R. Courant, J.F. John *Introduction to Calculus and Analysis, Vol. I*, Springer-Verlag, 1999 (Cited on pages 8, 34, and 49.)
- [L] E. Lima. *Curso de Análise, Vol I*. IMPA 1976. (Cited on pages 4, 8, 34, and 49.)
- [I] G. Iommi. *Cálculo Real* (disponible en <http://www.mat.uc.cl/~giommi/>) 2011. (Cited on pages 8, 34, and 49.)
- [K] J. Kitchen *Calculus of One Variable*. Adison-Wesley 1968. (Cited on pages 8, 34, and 49.)
- [S] M. Spivak *Calculus, Fourth Edition* Publish or Perish, Inc. 2008. (Cited on pages 8, 34, and 49.)