PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2019.

INTERROGACIÓN 1
CALCULO II ⋆ MAT1620

La siguiente evaluación consta de 5 preguntas, dispone de 120 minutos para responderla.

1. *a*) Analice la convergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

   b) Analice la convergencia de la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx.$$

2. *a*) Determine la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n\geq 0} ne^{-n^2}$$

   b) Sea $p \geq 0$. Determine los valores de p para los cuales la siguiente serie es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p}.$$

3. *a*) Analice la convergencia de la siguiente serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}.$$

   b) Analice la convergencia condicional o absoluta de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n+3}.$$

4. Considere la sucesión de término general a_n, definida por:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}, \quad \text{para todo}\, n > 1.$$

   a) Pruebe que la sucesión a_n es decreciente.

   b) Asumiendo que la sucesión dada satisface,

$$2 \geq a_n \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Deduzca que es convergente y calcule su límite.

5. *a*) Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3 + \sqrt{n}}$$

   b) Encuentre una representación en serie de potencias para la función

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

   Determine el respectivo radio de convergencia.

Una solución

1. *a*) Para analizar la convergencia de la integral pedida comenzamos notando que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int_2^7 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \int_7^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Para la primera integral, compararemos la función dada con la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto el comportamiento de las respectivas integrales impropias es el mismo y como

$$\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x-2}},$$

es convergente se tiene que la primera parte es una integral convergente.

Para la segunda integral, comparamos con la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Se tiene en este caso,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 1,$$

por lo tanto nuevamente ambas integrales tienen el mismo comportamiento.

Finalmente se concluye que la integral dada es convergente.

b) Para analizar la integral dada, consideraremos

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx = \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx + \int_{1/2}^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx.$$

Para la primera de las integrales comparamos la función del integrando con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, es decir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

por lo tanto ambas funciones presentan el mismo comportamiento. Luego ambas son convergentes.

Para la segunda integral comparamos la función del integrando con $h(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{2/3}}$

es decir,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{2/3}}}=\operatorname{sen}(1),$$

Con lo cual nuestra integral nuevamente es convergente.
Se concluye que la integral dada es convergente.

2. *a*) Para analizar la convergencia de la serie dada, consideremos la función $f(x)=xe^{-x^2}$, la cual es decreciente ($f'(x)<0$) y claramente continua, luego por el Criterio de la Integral, nos basta analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx.$$

Para esto notamos que

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx=\lim_{c\to\infty}\int_1^c xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2e}.$$

Por lo tanto la serie dada es convergente.

b) Analizaremos 3 casos, en la integral dada, a saber

- Si $0\leq p\leq 1$ se tiene que

$$\frac{\ln(n)}{n^p}\geq\frac{1}{n^p},\text{para n suficientemente grande,}$$

como la serie de término general $\dfrac{1}{n^p}$ es divergente, nuestra serie tambien lo es.

- Si $p\geq 2$ se tiene que

$$\frac{\ln(n)}{n^p}\leq\frac{\sqrt{n}}{n^p}=\frac{1}{n^{p-1/2}},$$

y para $p\geq 2$ esta última serie es convergente, por lo tanto nuestra serie tambien lo es.

- Si $1<p<2$. Utilizamos el criterio de la integral y la serie resulta ser convergente.

De los tres casos anteriores, se concluye que la serie es convergente para $p>1$.

3. *a*) Para analizar la convergencia de la serie dada la compararemos con la serie de término general

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n}},$$

la cual es divergente. Comparamos en el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = 2,$$

Por lo tanto ambas series tienen el mismo comportamiento.

b) Comenzamos analizando la convergencia absoluta de la serie dada,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n+3},$$

Consideramos la serie de termino general

$$b_n = \frac{\ln}{n},$$

Por criterio de comparación al limite ambas series tiene el mismo comportamiento, además por el problema anterior se puede concluir que ambas series son divergente. Analizamos a continuación, la serie alternante dada, para ello notamos que la función

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x+3},$$

tiene derivada negativa (luego es decreciente) y es fácil calcular que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x+3} = 0,$$

por lo tanto por el Criterio de Leibnitz, concluimos que la serie dada converge condicionalmente.

4. Probaremos por inducción que la sucesión dada es decreciente. Es decir probaremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Para el caso base, se tiene que

$$a_2 = 1 < 3 = a_1.$$

La hipótesis de inducción

$$a_n \leq a_{n-1}$$

a partir de la cual se obtiene que

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n-1} \\ -a_n &\geq -a_{n-1} \\ 3-a_n &\geq 3-a_{n-1} \\ \frac{1}{3-a_n} &\leq \frac{1}{3-a_{n-1}} \\ a_{n+1} &\leq a_n. \end{aligned}$$

De donde concluimos que a_n es decreciente. Por otro lado, podemos asumir que la serie es acotada inferiormente, por lo tanto al ser decreciente el Teorema de las sucesiones monótonas, esta es convergente. Sea L su límite. Finalmente utilizando la recursividad en la definición de a_n tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}, \\
L &= \frac{1}{3-L} \\
L^2 - 3L + 1 &= 0 \\
L &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

5. *a*) Comenzamos calculando el valor del radio de convergencia, en este caso

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{3+\sqrt{n+1}}}{\dfrac{1}{3+\sqrt{n}}} = 1,$$

Luego $R = 1$. Por otro lado para determinar el intervalo de convergencia debemos analizar:
$x = 2$
En dicho punto la serie es

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3+\sqrt{n}},$$

la cual es una serie divergente.
$x = 4$
En dicho punto la serie es

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3+\sqrt{n}},$$

la cual es una serie convergente.
Se concluye que la serie dada tiene intervalo de convergencia $]2, 4]$.

b) Recordamos que para $|x| < 1$ se tiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n,$$

luego derivando dentro del intervalo de convergencia se tiene que

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\sum_{n\geq 0} (-1)^n n x^{n-1},$$

o de manera equivalente

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}nx^{n-1}, \qquad |x| < 1.$$