FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 3

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Prueba de la Integral: Si f es continua, positiva y decreciente y $a_n = f(n)$:
Si $\int_n^\infty f(x)dx$ es convergente, $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es convergente. (Lo mismo si es divergente)

Prueba por Comparación: Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos:
Si $\sum a_n \leq \sum b_n$ y $\sum_{i=1}^\infty b_n$ es convergente, entonces $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es convergente.
Si $\sum a_n \geq \sum b_n$ y $\sum_{i=1}^\infty b_n$ es divergente, entonces $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es divergente.

Prueba por Comparación al límite: Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos:
Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ = c, siendo c un numero finito y $c > 0$, ambas series divergen o convergen.

Prueba de la serie Alternante: Si la serie alternante $\sum_{i=1}^\infty (-1)^n a_n$ cumple con:
i) $a_{n+1} < a_n$
ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
La serie converge.

Teorema: Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente

Prueba de la razón: Consideremos la prueba $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$:
Si $L < 1$ entonces, $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es absolutamente convergente.
Si $L > 1$ o $L = \infty$ entonces, $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es divergente.
Si $L = 1$ no se puede concluir nada.

Prueba de la raíz: Consideremos la prueba $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$:
Si $L < 1$ entonces, $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es absolutamente convergente.
Si $L > 1$ o $L = \infty$ entonces, $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es divergente.
Si $L = 1$ no se puede concluir nada.

1. Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(lnn)^2}{n^2} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^3+4n^2-1}, \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

2. Estudie la convergencia o divergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nln(n+1)}$$

3. Dada la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{2k(2k+1)(2k+2)}$$

   a) Demuestre que la serie es convergente.
   b) Con un error menor a 4^{-3}, calcule el valor aproximado de:

$$3+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{2k(2k+1)(2k+2)}$$

4. Determine si la serie alternante converge. ¿Es absolutamente convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n lnn}{n}$$

5. Determine si la serie es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

6. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}x^n$$