Ayudantía 7

Cálculo II

Problema 1

a) Considere el plano $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta que pasa por los puntos $(-3, 1, 0)$ y $(-1, 5, 6)$. Determine, si es que lo hay, el punto de intersección.

b) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el plano $x + y + 2z + a = 0$ es tangente a la esfera centrada en $(3, 0, 0)$ y de radio 2.

Problema 2

a) Determine la ecuación del plano que es perpendicular a la recta dada por la intersección de los planos $2x - y + z = 10$ y $x - y + 3z = 8$, y que pasa por el punto $(0, 1, 2)$.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta de intersección de los planos $5x - 3y + 2z = -1$ y $x + 3y - z = -11$, y que es paralelo a la recta de intersección de los planos $x + 4y - 3z = 2$ y $3x - y + 4z = 9$.

Problema 3

a) Dados los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$, muestre que la distancia D entre ellos está dada por:

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

b) Sea el plano $x + 2y - 2z = 1$. Use lo anterior para encontrar las ecuaciones de los planos paralelos al plano dado que están a dos unidades de distancia.

Problema 4

Considere la recta dada por $r(t) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ y el plano $ax + by + cz + d = 0$.
Muestre que el ángulo agudo entre la recta y el plano está dado por

$$\sin \varphi = \frac{|av_1 + bv_2 + cv_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$$

Problema 5*

Sean $\hat{n}$ y $\vec{r}_0$ vectores en $\mathbb{R}^3$, L la recta descrita por la ecuación

$$\vec{r} \;=\; \gamma\hat{n} + \vec{r}_0 \;,$$

y M el plano descrito por la ecuación

$$\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \;=\; 0 \;.$$

Como podemos observar, la ecuación vectorial de la recta y la ecuación vectorial del plano se ven muy diferentes. En este ejercicio, escribiremos la ecuación del plano en una forma análoga a la de la recta, y la ecuación de la recta en una forma análoga a la del plano.

a) Demuestre que existen vectores normalizados $\hat{u}$ y $\hat{v}$ tales que $\hat{u}\cdot\hat{v} = 0$, $\hat{u}\cdot\hat{n} = 0$ y $\hat{v} \cdot \hat{n} = 0$.

b) Demuestre que $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{n}\}$ es una *base* de $\mathbb{R}^3$, esto es, demuestre que para todo vector $\vec{r}$, existen constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{r} \;=\; \alpha\hat{u} + \beta\hat{v} + \gamma\hat{n} \;.$$

Más aún, muestre que $\alpha = \hat{n} \cdot \hat{r}$, $\beta = \hat{u} \cdot \hat{r}$ y $\gamma = \hat{v} \cdot \hat{r}$ (esta condición es característica de las llamadas *bases ortonormales*).

c) Demuestre que el plano M consiste exactamente de los vectores $\vec{r}$ de la forma

$$\vec{r} \;=\; \alpha\hat{u} + \beta\hat{v} + \vec{r}_0 \;.$$

d) Demuestre que la recta L consiste exactamente de los vectores $\vec{r}$ que satisfacen

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{u} \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{v} \;=\; 0 \;.$$