Ayudantía 4

MAT1620 Cálculo II – Temporada Académica de Verano 2018

Ayudantes: Nicolás Morales (nvmorale@uc.cl) 8 de Enero de 2018

Criterios de convergencia de series, series alternates y series de potencia

---

1. Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

   b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\,[\ln(\ln(n))]^p}$

2. Considere la comparación con integral, para demostrar que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, entonces se tiene que:

$$s_n \leq 1 + \ln(n)$$

   La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Con ayuda del inciso a) demuestre que la suma del primer millón de términos es menor que 15 y que la suma de los primeros mil millones de términos es menor que 22.

3. Muestre que la serie a continuación es convergente, ¿Cuántos términos debemos considerar para que el error al estimar la serie con su suma parcial sea menor a 0.0001?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n5^n}$$

4. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\arctan(n)}{n^2}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

   e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

5. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

6. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

7. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

8. Encuentre expresiones como serie de potencia para las siguientes funciones, indique el radio de convergencia:

   a) $f(x) = \ln(5-x)$

   b) $f(x) = x^2 \arctan\left(x^3\right)$

9. Encuentre expresiones como serie de potencia para las siguientes integrales indefinidas, indique el radio de convergencia:

   a) $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8} dt$

   b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$

10. Use las series de Taylor correspondientes, para calcular los siguientes límites:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1-x-e^x}$

    b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

11. Para las funciones a continuación, determine una aproximación de Taylor con el grado n indicado, en torno al punto a, y calcule el error en el intervalo que se pide.

    a) $f(x) = \sqrt{x}$, en $a = 4$, con $n = 2$, para el intervalo $4 \leq x \leq 4.2$

    b) $f(x) = x^{2/3}$, en $a = 1$, con $n = 3$, para el intervalo $0.8 \leq x \leq 1.2$

12. Usando una serie de Taylor en torno al punto apropiado, estime el valor de $\cos(80°)$, con 5 decimales de precisión.