FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 10

Calculo II - MAT1620

Teorema de Fubini: Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Región Tipo I: Es una región donde la coordenada y está acotada por dos funciones de x. Si f es continua en una región D tipo I tal que

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

Región Tipo II: Es una región donde la coordenada x está acotada por dos funciones de y. Si f es continua en una región D tipo I tal que

$$D = \{(x,y) \mid h_1(x) \leq x \leq h_2(x), c \leq y \leq d\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Jacobiano: Dada una transformación T en que $x = g(u,v)$ y $y = h(u,v)$, el jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Cambio de variables en una Integral Doble: dado un cambio de variable en que $x = g(u,v)$ y $y = h(u,v)$. Al integran en una región R se tiene

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f\big(g(u,v), h(u,v)\big) * \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| * dudv$$

1. Calcule las siguientes integrales dobles:

    a. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\, dxdy$
    b. $\int_0^1 \int_0^y 1\, dxdy$

2. Dada la región D que está acotada por $y = \sqrt{x}$ y por $y = x^2$, Calcule

$$\iint_D (x+y)dA.$$

3. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_{arcseny}^{\frac{\pi}{2}} cosx\sqrt{1+\cos^2 x}\, dxdy$$

4. Considere la siguiente región en el plano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x \le y \le 2x+1, 1-2x \le y \le 8-2x\}\,.$$

   Exprese las integrales iteradas

$$\iint_D f(x,y)dydx\,, \iint_D f(x,y)dxdy$$

5. Sea D la región acotada por las rectas

$$y - x = -2, y + x = 2, y - x = 1, y + x = 0.$$

   Calcule

$$\iint_D (y^2 - x^2)dxdy$$

Propuesto. Sea f continua en $[0,1]$ y sea R la región triangular con vértices $(0,0), (1,0), (0,1)$. Demuestre que

$$\iint_R f(x+y)dA = \int_0^1 uf(u)du$$