FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 4

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Teorema: Dada una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, hay solo 3 posibilidades:
i) La serie converge solo cuando $x = a$.
ii) La serie converge para toda x.
iii) Hay un número positivo R (radio de convergencia), tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$. Verificar en los extremos si converge.

Teorema: Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, con radio de convergencia$R > 0$:

- $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[a_n (x-a)^n] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$
- $\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x-a)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1} + C$

Serie de Taylor: La serie de Taylor se define de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Para $a = 0$ se denomina **Serie de Maclaurin.**

Teorema: Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a. Si se cumple:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0, para\ |x-a| < R$$

Entonces $f(x) = T_n(x)\ para\ |x-a| < R$. Para demostrar esto se usa la **desigualdad de Taylor.** Si $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \ll M, para\ |x-a| \ll d$, entonces $R_n(x)$ cumple con:

$$|R_n(x)| \ll \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}, para\ |x-a| \ll d$$

Algunas cosas para aprenderse de memoria:

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $R = 1$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, para $R = \infty$
- $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para $R = \infty$
- $cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para $R = \infty$
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, para $R = 1$
- $(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$, para $R = 1$
- $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

1. Determine una representación como serie de potencias para las siguientes funciones y determine el radio de convergencia.

$a)\ f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$

2. Encuentre la serie o expansión de Maclaurin de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = sen^2(x)$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Utilizando series, obtenga el valor aproximado de la integral definida:

$$\int_0^1 \mathrm{x}\cos(x^3)dx$$

con un error menor a 0,01

4. Calcule la suma de la serie:

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\pi)^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$ $\qquad$ $b)\ 3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} \ldots$

5. Determine la serie de Taylor de la función pedida centrada en a.

$$f(x) = sen(x), \qquad a = \frac{\pi}{2}.$$

6. Utilice la serie de potencia de $\arctan(x)$ para que la expresión siguiente.

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

7. Evalúe el siguiente limite sin usar L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x) - x}{x^3}$$

8. Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

no es igual a la serie de Maclaurin