Pauta examen

Problema 1

Considere la función definida por $f(x,y) = xye^{x+by}$, donde $b \neq 0$.

(a) **(4pts)** Determine los puntos críticos de f y clasifíquelos dependiendo del valor de b.

(b) **(2pts)** Considere el caso $b = 2$. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, determine el punto donde se alcanza el valor máximo de f bajo la restricción $x + 2y - 1 = 0$. Puede asumir que el máximo existe de manera de poder utilizar el método.

Instrucción: debe obligatoriamente utilizar el método señalado para obtener puntaje, justificando su desarrollo.

Solución

(a) Tenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_x(x,y) & = & 0 \\ f_y(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ye^{x+by} + xye^{x+by} & = & 0 \\ xe^{x+by} + bxye^{x+by} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{x+by}\,(y+xy) & = & 0 \\ e^{x+by}\,(x+bxy) & = & 0 \end{array}\right.$$

Como $e^{x+by} \neq 0$, el sistema anterior es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} y + xy & = & 0 \\ x + bxy & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y(1+x) & = & 0 \\ x(1+by) & = & 0. \end{array}\right.$$

Notemos que si $y = 0$ entonces $x = 0$ y que si $1 + x = 0$ entonces $x = -1$ y $y = -\frac{1}{b}$.

De forma análoga, si $x = 0$ entonces $y = 0$ y si $1 + by = 0$ entonces $y = -\frac{1}{b}$ y $x = -1$.

Por lo tanto, f posee dos puntos críticos: $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = \left(-1, -\frac{1}{b}\right)$.

Notemos que f es 2 veces diferenciable, por ser un producto de funciones 2 veces diferenciables (polinomios y exponenciales lo son), así que para clasificar los puntos críticos $P = (x_0, y_0)$, debemos calcular el determinante de la matriz Hessiana de f, es decir,

$$D(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2.$$

Tenemos $\left\{\begin{array}{rcl} f_x(x,y) & = & e^{x+by}\,(y+xy) \\ f_y(x,y) & = & e^{x+by}\,(x+bxy) \end{array}\right.$

Así,

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) &= e^{x+by}(y+xy)+ye^{x+by} &= ye^{x+by}(2+x)\\ f_{xy}(x,y) &= be^{x+by}(y+xy)+e^{x+by}(1+x) &= e^{x+by}(by+1)(1+x)\\ f_{yx}(x,y) &= e^{x+by}(x+bxy)+e^{x+by}(1+by) &= e^{x+by}(by+1)(1+x)\\ f_{yy}(x,y) &= be^{x+by}(x+bxy)+bxe^{x+by} &= bxe^{x+by}(2+by). \end{cases}$$

Para $P_1=(0,0)$, se tiene

$$\begin{cases} f_{xx}(0,0) &= 0\\ f_{xy}(0,0) &= 1\\ f_{yy}(0,0) &= 0. \end{cases}$$

Así, $D(0,0)=\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0$ y por lo tanto $P_1=(0,0)$ es un punto silla de f.

Para $P_2=\left(-1,-\frac{1}{b}\right)$, se tiene

$$\begin{cases} f_{xx}\left(-1,-\frac{1}{b}\right) &= -\dfrac{1}{be^2}\\ f_{xy}\left(-1,-\frac{1}{b}\right) &= 0\\ f_{yy}\left(-1,-\frac{1}{b}\right) &= -\dfrac{b}{e^2} \end{cases}$$

Así, $D\left(-1,-\frac{1}{b}\right)=\begin{vmatrix} -\frac{1}{be^2} & 0\\ 0 & -\frac{b}{e^2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{e^4}>0$. Analizamos el signo de $f_{xx}\left(-1,-\frac{1}{b}\right)=-\dfrac{1}{be^2}$.

- Si $b>0$, entonces $f_{xx}\left(-1,-\frac{1}{b}\right)<0$ y por lo tanto $P_2=\left(-1,-\frac{1}{b}\right)$ es un punto de máximo local de f.
- Si $b<0$, entonces $f_{xx}\left(-1,-\frac{1}{b}\right)>0$ y por lo tanto $P_2=\left(-1,-\frac{1}{b}\right)$ es un punto de mínimo local de f.

(b) Para $b=2$, tenemos que $f(x,y)=xye^{x+2y}$. Denotamos $g(x,y)=x+2y$. Usando el método de multiplicadores de Lagrange, buscamos todas las soluciones (x,y,λ) del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y)\\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y)\\ g(x,y) &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+2y}(y+xy) &= \lambda\\ e^{x+2y}(x+2xy) &= 2\lambda\\ x+2y &= 1 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, sabemos que $e^{x+2y}=e\neq 0$. Luego, combinando las primeras dos ecuaciones deducimos que $x=2y$. Finalmente, insertando esto en la tercera ecuación obtenemos $x=\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{4}$. Dado que por enunciado se puede asumir que el máximo existe, por el método de los multiplicadores de Lagrange concluimos que el máximo se alcanza en el punto $P=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Problema 2

(a) **(3pts)** Reescriba la siguiente suma de integrales iteradas

$$\int_0^1 \int_0^x \sin(2y - y^2) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{2-x} \sin(2y - y^2) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

como una única integral iterada en el orden de integración inverso. Luego, calcule la integral.

(b) **(3pts)** Considere la integral, definida sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$,

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}A := \lim_{a \to \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}A,$$

donde $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ es el disco cerrado con radio a y centro en el origen. Demuestre que $I = \pi$.

Nota: este es un ejemplo de una integral impropia en $\mathbb{R}^2$.

Solución

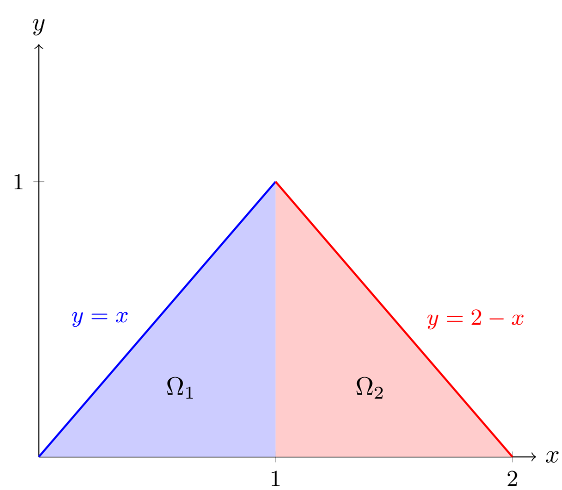
(a) Sean

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}, \\ \Omega_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2 - x\}, \\ \Omega &:= \Omega_1 \cup \Omega_2. \end{aligned}$$

Denotando $f(x, y) = \sin(2y - y^2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x &= \iint_{\Omega_1} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \iint_{\Omega_2} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \iint_{\Omega} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Graficando, observamos que



de donde es fácil ver que podemos escribir $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 2 - y\}$.

De este modo, tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega \sin(2y - y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_\Omega \sin(2y - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_y^{2-y} \sin(2y - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \sin(2y - y^2)x\Big|_{x=y}^{x=2-y} dy \\
&= \int_0^1 \sin(2y - y^2)(2 - 2y)dy \\
&= -\cos(2y - y^2)\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= -\cos(1) + \cos(0) \\
&= 1 - \cos(1).
\end{aligned}$$

(b) Para integrar la función $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sobre D_a utilizamos coordenadas polares. Tenemos que

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad \mathrm{d}A = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,$$

por lo que $D_a = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ y $f(r, \theta) = e^{-r^2}$. Luego,

$$\iint_{D_a} f(x, y)\mathrm{d}A = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^a e^{-r^2} r\mathrm{d}r = -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

Por lo tanto,

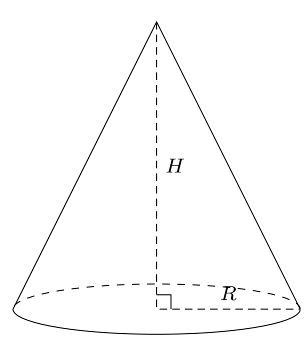
$$I = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} f(x, y)\mathrm{d}A = \lim_{a\to\infty} \pi(1 - e^{-a^2}) = \pi.$$

Problema 3

(a) **(3pts)** Calcule $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}(x^3 + 1)}\mathrm{d}A$, donde Ω es la región delimitada por las curvas $x = -y^{\frac{1}{3}}$, $x = 3$ y el eje x.

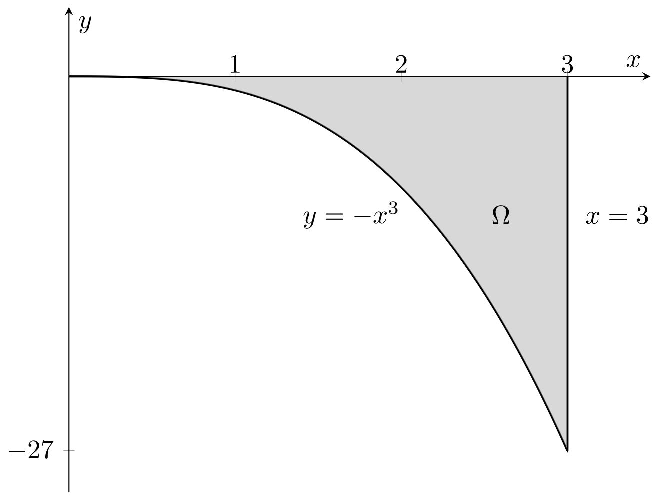
(b) **(3pts)** Utilizando una integral triple, muestre que el volumen de un cono de altura H y radio R (ver figura) es $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Instrucción: debe obligatoriamente utilizar el método señalado para obtener puntaje, justificando su desarrollo.



Solución

(a) El gráfico de la región Ω es



por lo que podemos escribir la región de la forma

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge -x^3 \leq y \leq 0\}.$$

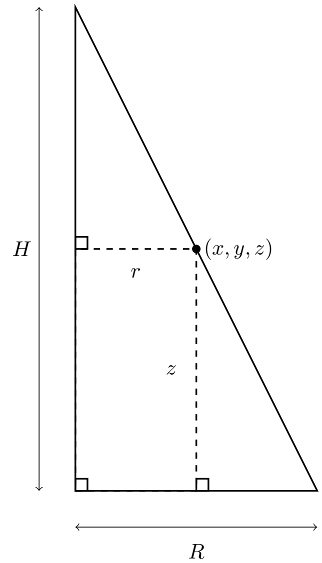
Luego,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}(x^3+1)} \mathrm{d}A = \int_0^3 \int_{-x^3}^0 \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}(x^3+1)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \frac{3}{2} \int_0^3 \frac{1}{(x^3+1)} \left(y^{\frac{2}{3}}\right)\Big|_{y=-x^3}^{y=0} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{2} \int_0^3 \frac{x^2}{(x^3+1)} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \ln(x^3+1)\Big|_{x=0}^{x=3} \\
&= -\frac{1}{2} \ln(28).
\end{aligned}$$

(b) Fijamos el cono C de forma que su proyección en el plano xy sea el disco centrado en el origen con radio R (con el origen en el centro de la base del cono), mientras que su proyección en el plano xz sea el triángulo isósceles cuyo eje de simetría está es el eje z. Afirmamos que

$$C = \left\{(x, y, z) : -R \leq x \leq R \wedge -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \wedge 0 \leq z \leq H \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right)\right\}.$$

En efecto, sea (x, y, z) un punto que pertenece al borde del cono con $z > 0$. Al intersectar el plano que es perpendicular al plano xy y pasa por el origen y por el punto (x, y, z) con el cono, y escribiendo $r^2 = x^2 + y^2$, tenemos



Por el teorema de Tales, obtenemos la relación

$$\frac{H}{R} = \frac{H-z}{r},$$

y por lo tanto

$$z = H\left(1 - \frac{r}{R}\right) = H\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right),$$

de donde se sigue directamente la afirmación.

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(C) = \int_C \mathrm{d}V &= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^{H\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= H\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Para calcular esta integral utilizamos coordenadas polares

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{r}{R}\right) r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right) r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} = \frac{1}{3}\pi R^2,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathrm{Vol}(C) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Asignación de puntajes

Problema 1

(a) **(i)** **(0.5 pts)** Calcula correctamente las derivadas parciales f_x y f_y.

(ii) **(0.2 pts)** Impone que las derivadas parciales en los puntos críticos deben ser 0.

(iii) **(0.3 pts)** Usa que $e^{x+2y} \neq 0$, encontrando el sistema de ecuaciones $y(1+x) = 0$ y $x(1+by) = 0$.

(iv) **(0.5 pts)** Resuelve el sistema encontrando los puntos críticos $(0,0)$ y $(-1,-\frac{1}{b})$.

(v) **(0.5 pts)** Calcula correctamente las segundas derivadas parciales f_{xx}, f_{xy} y f_{yy}.

(vi) **(0.3 pts)** Calcula correctamente el signo del discrimante del Hessiano en el punto $(0,0)$.

(vii) **(0.2 pts)** Deduce a partir de lo anterior que $(0,0)$ es un punto silla.

(viii) **(0.3 pts)** Calcula correctamente el signo del discrimante del Hessiano en el punto $(-1,-\frac{1}{b})$.

(ix) **(0.6 pts)** Muestra que si $b > 0$ entonces $f_{xx}(-1,-\frac{1}{b}) < 0$, y que si $b < 0$ entonces $f_{xx}(-1,-\frac{1}{b}) > 0$.

(x) **(0.3 pts)** Muestra que si $b > 0$ entonces $(-1,-\frac{1}{b})$ es un punto de máximo local.

(xi) **(0.3 pts)** Muestra que si $b < 0$ entonces $(-1,-\frac{1}{b})$ es un punto de mínimo local.

(b) **(i)** **(0.8 pts)** Encuentra correctamente el sistema de ecuaciones que resulta de aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange.

(ii) **(0.8 pts)** Resuelve correctamente el sistema, encontrando como única solución $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

(iii) **(0.4 pts)** Deduce por la hipótesis del enunciado, que el método de los multiplicadores de Lagrange implica que el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ máximiza la función f bajo la restricción $x+2y-1=0$.

Problema 2

(a) **(i)** **(0.5 pts)** Grafica correctamente la región de integración.

(ii) **(0.5 pts)** Escribe la región de integración como

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 2-y\right\}.$$

(iii) **(0.5 pts)** Reescribe la suma de integrales como una sola integral, utilizando lo anterior.

(iv) **(0.3 pts)** Calcula correctamente la integral con respecto a x.

(v) **(0.9 pts)** Calcula correctamente la primitiva de $\sin(2y-y^2)(2-2y)$.

(vi) **(0.3 pts)** Encuentra el valor correcto de la integral pedida, es decir, $1-\cos(1)$.

(b) **(i)** **(1 pt)** Escribe correctamente la integral sobre D_a utilizando coordenadas polares.

(ii) **(1.2 pts)** Encuentra el valor correcto de la integral sobre D_a, es decir, $\pi(1-e^{-a^2})$.

(iii) **(0.8 pts)** Muestra que $I = \pi$.

Problema 3

(a) (i) **(0.5 pts)** Grafica correctamente la región de integración Ω.

(ii) **(0.5 pts)** Escribe la región de integración como

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge -x^3 \leq y \leq 0\}.$$

(iii) **(0.5 pts)** Escribe correctamente la integral a calcular en términos de la parte anterior.

(iv) **(0.5 pts)** Calcula correctamente la integral con respecto a y.

(v) **(0.8 pts)** Calcula correctamente la primitiva de $\frac{x^2}{x^3+1}$.

(vi) **(0.2 pts)** Encuentra el valor correcto de la integral sobre Ω, es decir, $-\frac{1}{2}\ln(28)$.

(b) (i) **(0.8 pts)** Utiliza correctamente el teorema de Tales para calcular la ecuación que caracteriza el borde del cono para $z > 0$.

(ii) **(0.4 pts)** Utilizando lo anterior, describe correctamente el cono en coordenadas cartesianas.

(iii) **(0.5 pts)** Escribe el volumen del cono en términos de una integral triple.

(iv) **(0.2 pts)** Calcula correctamente la integral con respecto a z.

(v) **(0.5 pts)** Utiliza coordenadas polares para escribir la integral doble restante.

(vi) **(0.6 pts)** Encuentra que el volumen de un cono de altura H y radio R es $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.