PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2017
Profesor: Gabriela Fernández - Ayudante: Rubén Soza - Constanza Barriga

Cálculo II - MAT1620
Solución Ayudantía 3

1. Determine si las siguientes series son convergentes o no.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

Se tiene que:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Dado que la serie de la sucesión mayor converge, por criterio de comparación, la serie pedida converge.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$$

Aplicamos criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\frac{1}{n}} - 1} = A \Rightarrow \ln(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2^{\frac{1}{n}} - 1)} 2^{\frac{1}{n}} \left(\frac{-\ln(2)}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(2) 2^{\frac{1}{n}}}{n^2 (2^{\frac{1}{n}} - 1)} = \frac{-\ln(2)}{\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n^2}}}$$

Aplicando L'Hopital nuevamente:

$$= \frac{-\ln(2)}{\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} \frac{-\ln(2)}{n^2}}{\frac{-2}{n^3}}} = \frac{-\ln(2)}{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2) n 2^{\frac{1}{n}}}{2}} = \frac{-\ln(2)}{\ln(\sqrt{2}) n} = 0$$

Luego:

$$\ln(A) = 0 \Rightarrow A = 1$$

No se puede afirmar convergencia o divergencia.

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} e^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^2}$$

La primera serie converge por ser geométrica ($\frac{1}{e} < 1$). Luego, se analiza la convergencia de las otras dos series. Se tiene, por un lado, que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}e^{-n}n^2 = \lim_{n\to\infty} 2n\frac{1}{e^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

Luego, por criterio de comparación al límite y dado que a serie de la sucesión $\frac{1}{n^2}$ converge, entonces la serie de la sucesión estudiada también covnerge. Por otro lado, se tiene que:

$$\frac{1}{n^2}\frac{1}{e^n} < \frac{1}{n^2}$$

La serie de la sucesión mayor converge, por lo tanto, por criterio de comparación, la serie de la sucesión menor converge. De este modo, la serie pedida converge.

$$d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$$

Se utilizará el criterio de comparación al límite con la serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, ya que se sabe que esta serie converge. Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}\sqrt[3]{n^4} &= \lim_{n\to\infty}(n+5)\frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{7}{3}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}(n+5)\frac{1}{n} = 1 > 0\end{aligned}$$

La serie pedida converge.

$$e)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot (n+1)\cdot (n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)(n+2)}$$

Se utiliza criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+3)}\frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(n+3)} = 2 > 1$$

Luego, la serie pedida diverge.

$$f)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{4n+1}$$

Al ser una serie alternante se puede probar con criterio de Leibniz, sin embargo, en el desarrollo se dará cuenta que la sucesión de la serie no es decreciente, por lo cual no cumple con las condiciones para aplicar dicho criterio. Por ello, por inspección, se calcula el límite de la sucesión:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{2n}{4n+1} = \pm\frac{1}{2}$$

Luego, la serie pedida es divergente. De todos modos, se puede intentar con criterio de la raíz o de la razón.

$$g)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

Se utilizará criterio de comparación al límite con $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$$

Luego, como la serie de la sucesión utilizada para comparar al límite diverge, la serie pedida diverge.

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Se comparará al límite con la sucesión $\frac{1}{n}$, ya que su serie diverge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$$

Luego, la serie pedida diverge.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{3}{4}}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$$

Se utiliza criterio de Leibniz, por ser una serie alternante. Claramente, la sucesión de la serie es decreciente y:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} = 0$$

Luego, la serie pedida converge.

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Se utilizará criterio de la raíz. Así:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Luego, la serie pedida es convergente.

$$k) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n}$$

Por ser alternante, utilizamos criterio de Leibniz. Primero, vemos que sea decreciente:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

La derivada es negativa, al menos para x tendiendo al infinito. Luego, calculamos el límite de la sucesión de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Así, la serie pedida converge.

$$l)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$$

Utilizamos criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}{1}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0<1$$

Luego, la serie pedida converge.

2. Encuentre los valores de $p\in\mathbb{R}$ que hacen que la siguiente serie converja:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^p(n)}{n}$$

Al ser una serie alternante, se utilizará criterio de Leibniz y se evaluará para distintos valores de p. Se calculará la derivada de la función asociada a la sucesión de la serie para comprobar si es decreciente en cada caso.

$$f(x)=\frac{\ln^p(x)}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{p\ln^{p-1}(x)\frac{1}{x}x-\ln^p(x)}{x^2}=\frac{p\ln^{p-1}(x)-\ln^p(x)}{x^2}$$

Para $p<-1$:

$$f'(x)=\frac{\frac{p}{\ln^{1-p}(x)}-\frac{1}{\ln^{-p}(x)}}{x^2}<0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^p(n)}{n}=0$$

Para $p=-1$:

$$f'(x)\frac{\frac{-1}{\ln^2(x)}-\frac{1}{\ln(x)}}{x^2}<0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)n}=0$$

Para $-1<p<0$:

$$f'(x)=\frac{\frac{p}{\ln^{1-p}(x)}-\frac{1}{\ln^{-p}(x)}}{x^2}<0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^p(n)}{n}=0$$

Para $p=0$:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}<0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Para $0 < p < 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{p}{\ln^{1-p}(x)} - \ln^p(x)}{x^2} < 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^p(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} p\ln^{p-1}(n)\frac{1}{n} = 0$$

Para $p = 1$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Para $p > 1$:

$$f'(x) = \frac{p\ln^{p-1}(x) - \ln^p(x)}{x^2} < 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^p(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} p\ln^{p-1}(n)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} p(p-1)\ln^{p-2}(n)\frac{1}{n}$$

$$... = \lim_{n\to\infty} p(p-1)(p-2)...(p-p)\ln^{-1}(n)\frac{1}{n} = 0$$

De este modo, la serie converge $\forall p \in \mathbb{R}$.

3. Determine el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^{2017}9^n}$$

Utilizaremos criterio de la razón imponiendo la convergencia.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)^{2017}9^{n+1}} \frac{n^{2017}9^n}{(x-1)^n} \right| = \left| \frac{(x-1)}{9} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x-1| < 9$$

El radio de convergencia es 9. Para determinar el intervalo de convergencia, falta analizar las condiciones de borde:
Si $(x-1) = 9$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n^{2017}9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2017}} \quad Converge.$$

Si $(x-1) = -9$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n^{2017}9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2017}} \quad Converge.$$

Luego, el intervalo de convergencia es $I = [-8, 10]$.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n2^n}$$

Utilizaremos criterio de la raíz imponiendo la convergencia.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(2x-1)^n}{n2^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x-1)}{2\sqrt[n]{n}} \right| = \left| \frac{(2x-1)}{2} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |2x-1|<2$$
$$\Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|<1$$

El radio de convergencia es 1. Para determinar el intervalo de convergencia, falta analizar las condiciones de borde:
Si $(2x-1)=2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\quad Diverge.$$

Si $(2x-1)=-2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\quad Converge.$$

Luego, el intervalo de convergencia es $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$.

$$c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

Utilizaremos criterio de la razón imponiendo la convergencia.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+2)}\frac{n+1}{(-1)^n x^n}\right|=|x|<1$$

El radio de convergencia es 1. Para determinar el intervalo de convergencia, falta analizar las condiciones de borde:
Si $x=1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 1^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\quad Converge.$$

Si $x=-1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\quad Diverge.$$

Luego, el intervalo de convergencia es $I=]-1,1]$.

$$d)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$$

Utilizaremos criterio de la razón imponiendo la convergencia.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-4)^{n+1}}{(n+1)^3+1}\frac{(n^3+1)}{n(x-4)^n}\right|=|x-4|<1$$

El radio de convergencia es 1. Para determinar el intervalo de convergencia, falta analizar las condiciones de borde:
Si $(x-4)=1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n1^n}{n^3+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+\frac{1}{n}}\quad Converge.$$

Si $(x-4)=-1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^3+1}\quad Converge.$$

Luego, el intervalo de convergencia es $I = [3, 5]$.

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} n!(2x-1)^n$$

Utilizaremos criterio de la razón imponiendo la convergencia.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!(2x-1)^{n+1}}{n!(2x-1)^n} \right| = |(2x-1)| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(n+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| < 0$$

El radio de convergencia es 0. Para determinar el intervalo de convergencia, falta analizar las condiciones de borde:
Si $(2x-1) = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!0^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \quad Converge.$$

Luego, el intervalo de convergencia es $I = \left[\frac{1}{2}\right]$.

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n \quad , \quad b > 0$$

Utilizaremos criterio de la razón imponiendo la convergencia.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(x-a)^{n+1}}{b^{n+1}} \frac{b^n}{n(x-a)^n} \right| = \left| \frac{(x-a)}{b} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x-a| < |b|$$

El radio de convergencia es $|b|$. Para determinar el intervalo de convergencia, falta analizar las condiciones de borde:
Si $(x-a) = b$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{b^n} b^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \quad Diverge.$$

Si $(x-1) = -b$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{b^n}(-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad Diverge.$$

Luego, el intervalo de convergencia es $I =]a-|b|, a+|b|[$.

4. Sea k un entero positivo. Encuentre el radio de convergencia de la siguiente serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$.
Utilizaremos criterio de la razón imponiendo convergencia.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!^k x^{n+1}}{(k(n+1))!} \frac{(kn)!}{x^n (n!)^k} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^k 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (kn)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (kn)(kn+1)(kn+2) \cdot ... \cdot (kn+k-1)(kn+k)} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^k}{(kn+1)(kn+2) \cdot ... \cdot (kn+k-1)(kn+k)} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+1)\cdot ... \cdot(n+1)}{(kn+1)(kn+2)\cdot ... \cdot(kn+k-1)(kn+k)}\right| < 1$$

Dividiendo por n arriba y abajo:

$$\Leftrightarrow |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdot ... \cdot(1+\frac{1}{n})}{(k+\frac{1}{n})(k+\frac{2}{n})\cdot ... \cdot(k+\frac{k}{n}-\frac{1}{n})(k+\frac{k}{n})}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{k^k}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < k^k$$

Así, el radio de convergencia de la serie es k^k.

5. Pruebe que si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = c \neq 0$ entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^n$ es $R = \frac{1}{c}$. Utilizamos criterio de la raíz imponiendo convergencia

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n x^n|} < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{c}$$

Queda demostrado lo pedido.

6. Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ usando lasuma de los primeros 10 términos. Estime el error originado en esta aproximación. ¿Cuántos términos se requieren para asegurar que la suma no difiere en más de 0.0005?

Primero estimamos la suma pedida:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975$$

Luego de comprobar que la función asociada a la sucesión de la serie es continua, positiva y decreciente, y que la serie pedida converge, se tiene que:

$$R_{10} \leq \int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

De este modo, el error es a lo más de 0.005. Luego, si queremos una precisión de 0.0005, se debe encontrar un n tal que $R_n \leq 0{,}0005$.

$$\frac{1}{2n^2} \leq 0{,}0005 \Rightarrow n > 31{,}6 \approx 32$$

Se necesitan 32 términos para tener la seguridad de que no habrá una diferencia mayor que 0.0005.