

Pauta Interrogación 1 - MAT1620

1. Determine si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

es convergente, en tal caso determine el valor de la integral. Si no conoce la integral se recomienda usar sustitución para resolver.

Solución:

Para estudiar la convergencia de la integral propuesta estudiaremos la convergencia de las integrales impropias

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \text{ y } \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

de tipo II y tipo I, respectivamente.

- Observe que

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(x) + C$$

- Al usar la sustitución $u = \sqrt{x^2-1}$ se obtiene que

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \arctan(\sqrt{x^2-1}) + C$$

- De manera equivalente, al hacer la sustitución $x = \sec(\theta)$ se obtiene que

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(x) + C$$

en todos los casos se tiene que

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} \operatorname{arcsec}(2) - \operatorname{arcsec}(t) = \frac{\pi}{3}.$$

Al estudiar la convergencia de la segunda integral y vemos que

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arcsec}(t) - \operatorname{arcsec}(2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}.$$

Como ambas integrales convergen se tiene que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ es convergente y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

- (1 punto) Por evidenciar que sabe que debe separar en dos integrales.
- (1 puntos) Por determinar la primitiva de $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
- (1 puntos) Por determinar que la integral impropia de tipo I converge.
- (1 punto) Por determinar que la integral impropia de tipo II converge.
- (1 punto) Por concluir que la integral planteada converge.
- (1 punto) Por determinar el valor de la integral.

2. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{con } a_1 = 2.$$

Demuestre que la sucesión converge y determine el límite.

Solución:

Observe que $0 < a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, para demostrar esto haremos inducción:

Por definición tenemos que $a_1 = 2$ es positivo, si suponemos que $a_k > 0$ es evidente que $a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + 1}$ es también positivo ya que es cociente de positivos, con esto tenemos que la sucesión dada es de términos positivos y por lo tanto acotada inferiormente.

Ahora observemos que

$$a_{k+1} < a_k \iff \frac{a_k}{a_k + 1} - a_k < 0 \iff \frac{-a_k^2}{a_k + 1} < 0$$

la última de estas afirmaciones es ciertas ya sabemos de lo anterior que a_k es positivo.

Como la sucesión a_k es decreciente y acotada inferiormente podemos concluir que converge.

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = L$, entonces $L = \frac{L}{L+1}$ y por lo tanto $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Distribución de puntajes:

- (1.5 puntos) Por demostrar que la sucesión es decreciente.
- (1.5 puntos) Por demostrar que la sucesión es acotada inferiormente.
- (2 puntos) Por concluir que la sucesión converge.
- (1 punto) Por determinar el valor del límite.

3. Determine si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ converge condicionalmente, absolutamente o diverge.

Solución:

Primero veremos si converge absolutamente, es decir, estudiaremos si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ es convergente o divergente. Al calcular la n-ésima suma parcial, vemos que

$$\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$$

si tomamos límite tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - 1 = \infty$$

entonces, la serie planteada no converge absolutamente.

Para ver si la serie converge condicionalmente usaremos el criterio para series alternantes, para eso vemos que:

- i) $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 0$
- ii) Los términos $(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ son decrecientes, ya que si consideramos $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, tenemos que la derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$.

De i) y ii) tenemos que la serie alternante converge.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por calcular las sumas parciales.
- (1 punto) Por determinar el límite.
- (1 punto) Por concluir que la serie no converge absolutamente.
- (1 punto) Por determinar que los términos de la sucesión alternante tienen a cero.
- (1 punto) Por determinar que los términos de la sucesión alternante son decrecientes.
- (1 punto) Por concluir que la serie converge.

4. ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^p}$ converge?

Solución:

Si $p \leq 0$, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(k)}{k^p} = \infty$, por lo tanto la serie diverge.

Si $0 < p \leq 1$ tenemos que $\frac{1}{k} < \frac{\ln(k)}{k^p}$ para $k \geq 3$, además los términos de la serie son positivos, por lo tanto, por criterio de comparación, la serie diverge ya que la serie armónica diverge.

Si $p > 1$ observe que, si definimos $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^p}$, tenemos que, para $x > 1$, f es positiva y, ya que $f'(x) = \frac{x^{1-p}(1-p\ln(x))}{x^{2p}} < 0$, f es decreciente para $x > e$ por lo tanto podemos usar el criterio de la integral.

Haciendo integración por partes con $u = \ln(x)$, tenemos que

$$\int \frac{\ln(x)}{x^p} dx = \int x^{-p} \ln(x) dx = \ln(x) \frac{x^{1-p}}{1-p} - \int \frac{x^{-p}}{1-p} dx = \ln(x) \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{x^{1-p}}{(1-p)^2} + C$$

por lo que la integral impropia

$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(t) \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-p)^2} \right) = \frac{1}{(1-p)^2}$ es convergente, luego la serie es convergente para $p > 1$. **Distribución de puntajes:**

- (2 puntos) Por determinar justificadamente que diverge para $p < 0$.
- (2 puntos) Por determinar justificadamente que diverge para $0 < p \leq 1$. Esta parte se podría hacer también con el criterio de la integral.
- (2 puntos) Por determinar justificadamente que converge para $p > 1$.

5. Demuestre que si $a_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{a_k} - 1)$ es convergente.

Solución:

Dado que $a_k > 0$ tenemos que $e^{a_k} - 1 > 0$ y por tanto podemos usar el criterio de comparación al límite con a_k y $(e^{a_k} - 1)$. Vemos, además, que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{e^{a_k} - 1}$ es de la forma $0/0$, ya que

$a_k \rightarrow 0$, pues la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, usando L'Hopital, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{e^{a_k} - 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{a_k}} = 1$$

por lo tanto ambas series tienen el mismo comportamiento, luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{a_k} - 1)$ converge.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por verificar las hipótesis del criterio de comparación.
- (2 puntos) Por calcular el límite. acá es muy importante considerar que se puede determinar de manera directa ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ es un límite notable o porque corresponde a la derivada de e^x en $x = 0$.
- (2 puntos) Por concluir que la serie pedida converge.