Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Primer Semestre de 2025

Pauta Interrogación 3

Problema 1

(a) **(1pts)** Considere $g(x,y) = \dfrac{x^2(e^x-1)}{x^2+y^2}$. ¿Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_y(x,y)$?

(b) **(2pts)** Considere la función f, definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(e^x-1)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ en el que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua.

(c) Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide de ecuación $9x^2 + 45y^2 - 5z = 45$ y sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de H.

(i) **(1.5pts)** Determine la ecuación $Ax + By + Cz = D$ del plano tangente a H en el punto P, obteniendo las expresiones de A, B, C y D en términos de (x_0, y_0, z_0).

(ii) **(1.5pts)** Para $x_0 = \dfrac{5}{3}$ determine los valores de y_0 y z_0 sabiendo que el plano calculado en **(i)** es paralelo al plano de ecuación $8x - 4y - \dfrac{4}{3}z = 0$.

Solución

(a) Notemos que, para $(x,y) \neq (0,0)$, tenemos

$$g(x,y) = x^2(e^x-1)\cdot\frac{1}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad g_y(x,y) = x^2(e^x-1)\cdot\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y(e^x-1)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Para $y = x$, se tiene $g_y(x,x) = \dfrac{-2x^3(e^x-1)}{2x^4}$.

Así,

$$\lim_{x\to 0} g_y(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{-2x^3(e^x-1)}{4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Por otro lado, para $y = x^2$, se tiene $g_y(x,x) = \dfrac{-2x^4(e^x-1)}{(x^2+x^4)^2} = \dfrac{-2(e^x-1)}{(1+x^2)^2}$.

Así,

$$\lim_{x\to 0} g_y(x,x^2) == \lim_{x\to 0} \frac{-2(e^x-1)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

De lo anterior, deducimos que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_y(x,y)$ no existe.

(b) Notemos que para todo $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = \dfrac{-2x^2y(e^x-1)}{(x^2+y^2)^2}$.

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Así, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2y(e^x-1)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Por álgebra de funciones continuas, deducimos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ es continua para todo $(x,y)\neq(0,0)$.

De (a) tenemos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$ no existe, por lo que f_y no es continua en $(0,0)$. Por lo tanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) De $9x^2+45y^2-5z=45$ encontramos que $\dfrac{9}{5}x^2+9y^2-9=z$.

Definiendo $H(x,y) = \dfrac{9}{5}x^2+9y^2-9$, tenemos:

(i) El plano tangente está definido por:

$$z - z_0 = H_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + H_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

Tenemos que, $H_x = \dfrac{18}{5}x$, $H_y = 18y$. Así,

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{18}{5}x_0\cdot(x-x_0) + 18y_0\cdot(y-y_0) \\ z - z_0 &= \frac{18}{5}x_0x + 18y_0y - \frac{18}{5}x_0^2 - 18y_0^2. \end{aligned}$$

Luego, el plano tangente a H en el punto P tiene ecuación

$$\frac{18}{5}x_0x + 18y_0y + (-1)z = \frac{18}{5}x_0^2 + 18y_0^2 - z_0,$$

por lo tanto:

$$A = \frac{18}{5}x_0; \quad B = 18y_0; \quad C = -1; \quad D = \frac{18}{5}x_0^2 + 18y_0^2 - z_0.$$

(ii) Como el plano $Ax + By + Cz = D$ es paralelo al plano de ecuación $8x - 4y - \frac{4}{3}z = 0$, entonces debe existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $\langle A, B, C\rangle = k\left\langle 8, -4, -\frac{4}{3}\right\rangle$. Así,

$$\begin{cases} A = 8k & \Rightarrow & \frac{18}{5}x_0 = 8k & \Rightarrow & x_0 = \frac{20}{9}k \\ B = -4k & \Rightarrow & 18y_0 = -4k & \Rightarrow & y_0 = -\frac{2}{9}k \\ C = -\frac{4}{3}k & \Rightarrow & -1 = -\frac{4}{3}k & \Rightarrow & \frac{3}{4} = k. \end{cases}$$

De aquí se obtiene, $y_0 = -\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{6}$ y notemos que, $x_0 = \frac{20}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{3}$ que coincide con la información proporcionada en el enunciado.
Reemplazando x_0 e y_0 en la ecuación $\frac{9}{5}x^2 + 9y^2 - 9 = z$, se obtiene

$$z_0 = \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 9\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - 9 = -\frac{15}{4}$$

Por lo tanto, $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{15}{4}\right)$.

Problema 2

(a) **(2pts)** Considere los vectores $\overrightarrow{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ y $\overrightarrow{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$. Suponga que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(1, 2)$ y que

$$D_u f(1,2) = 2 \qquad \text{y} \qquad D_v f(1,2) = -2.$$

Determine $\nabla f(1, 2)$ y $D_w f(1, 2)$ donde w es un vector unitario paralelo al vector $\langle 4, 3\rangle$.

(b) La función $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + a) + by + cz$ tiene valor máximo de la derivada direccional en el punto $(1, 1, 0)$ y en la dirección del vector $\langle 2, 3, 6\rangle$, y su valor es 7.

(i) **(2pts)** Demuestre que las constantes a, b y c son -1, 1 y 6, respectivamente.

(ii) **(2pts)** Escriba la aproximación lineal de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y$, en el punto $(1, 1)$ y luego úsela para aproximar $f(1.1, 1.1)$.

Solución

(a) Notemos que $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1\rangle$ y $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, -1\rangle$.

Como f es diferenciable, entonces

$$\begin{cases} D_u f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \overrightarrow{u} & = & \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) \\ D_v f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \overrightarrow{v} & = & \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, -1\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right). \end{cases}$$

Como $D_u f(1,2) = 2$ y $D_v f(1,2) = -2$, tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = 2 & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2\sqrt{2} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = -2 & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2\sqrt{2}, \end{cases}$$

de donde obtenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2\sqrt{2}$, y por lo tanto $\nabla f(1,2) = \langle 0, 2\sqrt{2}\rangle$.

Como w es un vector unitario en la misma dirección del vector $\langle 4,3\rangle$, entonces $w = \left\langle \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right\rangle$ y

$$D_w f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot w = \left\langle 0, 2\sqrt{2}\right\rangle \cdot \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle = \frac{6\sqrt{2}}{5}.$$

(b) **(i)** La derivada direccional máxima ocurre en la dirección del vector gradiente:

$$\nabla h(x,y,z) = \left\langle \frac{2x}{x^2+y^2+a} \,,\, \frac{2y}{x^2+y^2+a} + b \,,\, c \right\rangle.$$

Evaluando, tenemos $\nabla h(1,1,0) = \left\langle \dfrac{2}{2+a} \,,\, \dfrac{2}{2+a} + b \,,\, c\right\rangle$.

Para que $\nabla h(1,1,0)$ esté en la dirección de $\langle 2,3,6\rangle$, entonces debe existir $k > 0$ tal que $\nabla h(1,1,0) = k\,\langle 2,3,6\rangle$. Así,

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2+a} = 2k & \Rightarrow \quad a = \dfrac{1}{k} - 2 \\[2ex] \dfrac{2}{2+a} + b = 3k & \Rightarrow \quad b = k \\[2ex] c = 6k. \end{cases}$$

Por otro lado, $\|\nabla h(1,1,0)\| = 7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(\dfrac{2}{2+a}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{2+a} + b\right)^2 + c^2} = 7$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2} = 7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{49k^2} = 7 \quad \Rightarrow \quad k = 1.$

Por lo tanto, $a = -1$, $b = 1$ y $c = 6$.

(ii) La linealización de f en $(1,1)$ está dada por

$$L(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1).$$

Notemos que, $f(1,1) = \ln(1) + 1 = 1$; $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2-1}$; $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2-1} + 1$.
Luego, $f(1,1) = 1$; $f_x(1,1) = 2$; $f_y(1,1) = 3$. Así,

$$L(x,y) = 1 + 2(x-1) + 3(y-1) = 2x + 3y - 4.$$

La aproximación de $f(1.1, 1.1)$ está dada por:

$$f(1.1, 1.1) \approx 2 \cdot 1.1 + 3 \cdot 1.1 - 4 = 2.2 + 3.3 - 4 = 1.5.$$

Problema 3

Una función f se dice homogénea de grado n si satisface la igualdad $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde n es un entero positivo y f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.

(a) **(2pts)** Compruebe que $f(x, y) = x^4y + 2x^3y^2 - 5x^2y^3 + 6y^5$ es homogénea de grado 5.

$\star$ **(b)** **(2pts)** Demuestre que si f es homogénea de grado n, entonces

$$x\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n\, f(x, y).$$

[*Sugerencia*: aplique la regla de la cadena para derivar $f(tx, ty)$ con respecto a t.]

(c) **(2pts)** Demuestre que si f es homogénea de grado n, entonces

$$x^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = n(n-1)\, f(x, y).$$

Solución

(a) Tenemos que verificar que f es homogénea de grado 5. Notemos primero que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^4(ty) + 2(tx)^3(ty)^2 - 5(tx)^2(ty)^3 + 6(ty)^5 \\ &= t^5x^4y + 2t^5x^3y^2 - 5t^5x^2y^3 + 6t^5y^5 \\ &= t^5 f(x, y). \end{aligned}$$

Por otro lado, como f es una función polinomial, todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas (y de hecho las de cualquier orden). En conclusión, f es homogénea de grado 5.

(b) De la definición tenemos $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Derivando a ambos lados con respecto a t y usando regla de la cadena se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(tx, ty) &= nt^{n-1} f(x, y) \\ \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial (tx)} \frac{\partial (tx)}{\partial t} + \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial (ty)} \frac{\partial (ty)}{\partial t} &= nt^{n-1} f(x, y) \\ \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial (tx)} x + \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial (ty)} y &= nt^{n-1} f(x, y) \end{aligned}$$

Como la igualdad se cumple para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular se cumple para $t = 1$. Así,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nf(x, y)$$

(c) Como f es homogénea, entonces sus derivadas parciales de segundo orden son contínuas y por el teorema de Clairut, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. De (b) tenemos que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$$

para simplificar notación usaremos $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf \qquad (*)$.

Derivando $(*)$ con respecto a x, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = n\frac{\partial f}{\partial x} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = n\frac{\partial f}{\partial x} \\
&\Rightarrow \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = nx\frac{\partial f}{\partial x} \\
&\Rightarrow \quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (n-1)x\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (*1)
\end{aligned}$$

Derivando $(*)$ con respecto a y, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = n\frac{\partial f}{\partial y} \quad &\Rightarrow \quad x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n\frac{\partial f}{\partial y} \\
&\Rightarrow \quad xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ny\frac{\partial f}{\partial y} \\
&\Rightarrow \quad xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (n-1)y\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (*2)
\end{aligned}$$

Sumando $(*1)$ con $(*2)$, se obtiene:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (n-1)nf$$

Por lo tanto, $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (n-1)nf(x,y)$.

Asignación de puntajes

Problema 1

(a) **(i)** **(0.2pts)** Calcula correctamente g_y para $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) **(0.3pts)** Calcula el límite por el camino $y = x$.

(iii) **(0.3pts)** Calcula el límite por el camino $y = x^2$.

(iv) **(0.2pts)** Deduce que el límite solicitado no existe.

(b) **(i)** **(0.2pts)** Calcula correctamente f_y para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(ii) **(0.8pts)** Calcula correctamente f_y en el punto $(0, 0)$.

(iii) **(0.5pts)** Establece correctamente la continuidad de f_y para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(iv) **(0.5pts)** Establece, basándose en la parte **(a)**, que f_y no es continua en $(0, 0)$.

(c) **(i)** **(1)** **(0.2pts)** Escribe la ecuación del paraboloide en la forma $z = H(x, y)$.

(2) **(0.3pts)** Establece correctamente cómo determinar el plano tangente.

(3) **(0.4pts)** Calcula correctamente H_x y H_y.

(4) **(0.2pts)** Establece correctamente el plano tangente en función del punto P.

(5) **(0.1pts)** Determina correctamente A.

(6) **(0.1pts)** Determina correctamente B.

(7) **(0.1pts)** Determina correctamente C.

(8) **(0.1pts)** Determina correctamente D.

(ii) **(1)** **(0.5pts)** Señala que el vector normal al plano buscado es una ponderación del vector normal al plano del enunciado.

(2) **(0.3pts)** Establece correctamente el sistema de ecuaciones.

(3) **(0.2pts)** Calcula correctamente el valor de k.

(4) **(0.2pts)** Determina correctamente y_0.

(5) **(0.1pts)** Verifica correctamente que el valor de x_0 es consistente.

(6) **(0.2pts)** Determina correctamente z_0.

Problema 2

(a) **(i)** **(0.3pts)** Calcula correctamente $D_u f(1, 2)$.

(ii) **(0.3pts)** Calcula correctamente $D_v f(1, 2)$.

(iii) **(0.4pts)** Establece correctamente el sistema de ecuaciones.

(iv) **(0.2pts)** Calcula correctamente $f_x(1, 2)$.

(v) **(0.2pts)** Calcula correctamente $f_y(1, 2)$.

(vi) **(0.1pts)** Determina correctamente $\nabla f(1, 2)$.

(vii) **(0.2pts)** Determina correctamente el vector w.

(viii) **(0.3pts)** Calcula correctamente $D_w f(1, 2)$.

(b) **(i)** **(1)** **(0.2pts)** Señala correctamente cuándo ocurre la derivada direccional máxima.

(2) **(0.5pts)** Calcula correctamente $\nabla h(x, y, z)$.

(3) **(0.3pts)** Calcula correctamente $\nabla h(1, 1, 0)$.

(4) **(0.2pts)** Señala correctamente cuándo un vector está en la misma dirección que otro.

(5) **(0.3pts)** Establece correctamente el sistema de ecuaciones.

(6) **(0.2pts)** Calcula correctamente k usando que el valor máximo es 7.

(7) **(0.1pts)** Determina correctamente a.

(8) **(0.1pts)** Determina correctamente b.

(9) **(0.1pts)** Determina correctamente c.

(ii) **(1)** **(0.4pts)** Establece correctamente cómo determinar la linealización.

(2) **(0.3pts)** Determina correctamente f_x.

(3) **(0.3pts)** Determina correctamente f_y.
(4) **(0.1pts)** Calcula correctamente $f(1,1)$.
(5) **(0.1pts)** Calcula correctamente $f_x(1,1)$.
(6) **(0.1pts)** Calcula correctamente $f_y(1,1)$.
(7) **(0.4pts)** Establece correctamente la linealización de f en el punto $(1,1)$.
(8) **(0.3pts)** Aproxima correctamente $f(1.1, 1.1)$ utilizando la aproximación lineal.

Problema 3

(a) **(i)** **(1.2pts)** Verifica correctamente que $f(tx, ty) = t^5 f(x, y)$.

(ii) **(0.8pts)** Argumenta correctamente que todas las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas.

(b) **(i)** **(0.2pts)** Establece correctamente que se debe derivar con respecto a t ambos lados de la igualdad $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

(ii) **(0.3pts)** Deriva correctamente con respecto a t, $t^n f(x, y)$, obteniendo $nt^{n-1} f(x, y)$.

(iii) **(0.5pts)** Aplica correctamente la regla de la cadena en el lado izquierdo de la igualdad.

(iv) **(0.5pts)** Deriva correctamente el lado izquierdo de la igualdad.

(v) **(0.3pts)** Señala correctamente que al cumplirse la relación para todo $t \in \mathbb{R}$, basta tomar $t = 1$.

(vi) **(0.2pts)** Concluye correctamente la identidad.

(c) **(i)** **(0.5pts)** Deriva correctamente con respecto a x la igualdad $(*)$.

(ii) **(0.5pts)** Deriva correctamente con respecto a y la igualdad $(*)$.

(iii) **(0.1pts)** Multiplica correctamente por x a lo derivado con respecto a x.

(iv) **(0.1pts)** Multiplica correctamente por y a lo derivado con respecto a y.

(v) **(0.3pts)** Suma correctamente ambas igualdades, $(*1)$ y $(*2)$.

(vi) **(0.2pts)** Ordena correctamente los términos de la igualdad obtenida.

(vii) **(0.2pts)** Usa correctamente $(*)$ y reemplaza correctamente.

(viii) **(0.1pts)** Concluye correctamente la identidad.