FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 12

Calculo II - MAT1620

Momento y Centro de masa: Sea una región D con densidad variable $\rho(x,y)$, entonces las coordenadas del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dA\,, M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dA\,, m = \iint\limits_D \rho(x,y)dA$$

$$M_x = Momento\ con\ respecto\ al\ eje\ x$$
$$M_y = Momento\ con\ respecto\ al\ eje\ y$$
$$m = Masa\ de\ la\ region\ D$$

Teorema de Fubini para Integrales Triples:
Si f es continua en el cuadro rectangular $R = [a,b]x[c,d]x[r,s]$, entoces

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

Funciona también, cambiar los límites de integración.

Integrales triples en regiones generales: Sea una región
$E = \{(x,y,z) | c \leq y \leq d, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$, entonces

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

En español, para saber cuáles son los primeros límites de integración, es ver cuál es el piso y cuál es el techo de la región E (son superficies, por ejemplo, planos, paraboloides, etc). Luego para saber los segundos y terceros límites de integración, es ver en este caso la proyección de la región en el plano (x,y), es decir, tratar como si fuera una integral doble.

1. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante. Encuentre su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje x.

2. Halle el centro de masa de una lámina en la forma de triángulo isósceles recto con lados iguales de longitud a si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto a la hipotenusa.

3. La frontera de una lámina está formada por los semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = \sqrt{4 - x^2}$ junto con las porciones del eje x que las une. Encuentre el centro de masa de la lámina si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia desde el origen.

4. Calcule

$$\iiint_R 6xydV$$

Donde R yace bajo el plano $z = 1 + x + y$ y arriba de la región del plano xy acotado por las curvas $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$.

5. Reescriba la siguiente integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)dzdydx$$

con orden de integración $dydxdz$.