Ayudantía 4

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Teorema: Dada una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, hay solo 3 posibilidades:
i) La serie converge solo cuando $x = a$.
ii) La serie converge para toda x.
iii) Hay un número positivo R (radio de convergencia), tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$. Verificar en los extremos si converge.

Teorema: Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, con radio de convergencia$R > 0$:

- $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[a_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$
- $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x-a)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1} + C$

Serie de Taylor: La serie de Taylor se define de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Para $a = 0$ se denomina **Serie de Maclaurin.**

Teorema: Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a. Si se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, para \; |x-a| < R$$

Entonces $f(x) = T_n(x) \; para \; |x-a| < R$. Para demostrar esto se usa la **desigualdad de Taylor.** Si $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \ll M, para \; |x-a| \ll d$, entonces $R_n(x)$ cumple con:

$$|R_n(x)| \ll \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, para \; |x-a| \ll d$$

Algunas cosas para aprenderse de memoria:

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $R = 1$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, para $R = \infty$
- $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para $R = \infty$
- $cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para $R = \infty$
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, para $R = 1$
- $(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$, para $R = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

1. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia para la siguiente serie de potencia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2+1}$$

2. Determine una representación como serie de potencias para las siguientes funciones.
   $a) f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$
   $b) f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

3. Encuentre la serie o expansión de Mclaurin de las siguientes funciones:

   $a) f(x) = \frac{x - senx}{x^3}$
   $b)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   $c)\ f(x) = 2x^3 - 3x + 2$

4. Sea k un entero positivo, fijo. Encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

5. Calcule la suma de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi)^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$$

6. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ centrada en $a = \pi/3$.