PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2017
Profesor: Gabriela Fernandez – Ayudante: Constanza Barriga y Ruben Soza

Calculo II - MAT1620
Ayudantía 7
27 de Abril de 2017

1. Sea $f(x,y) = y\cos(x-y)$. Demuestre que esta función es diferenciable y encuentre el valor estimado de $f\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

2. Sea $z = f(x,y)$, donde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$ y f de clase $\mathcal{C}^2$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial r \partial s}$.

3. Encuentre y clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

4. Encuentre los puntos en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ que minimizan la distancia al punto $(4,2,0)$.

5. Encuentre los extremos globales de $f(x,y) = xy^2$ en la región
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant 3\right\}.$$

6. Pruebe que el máximo valor de $x^2y^2z^2$ bajo $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ corresponde a $\dfrac{R^6}{27}$. Con esto, demuestre que
$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leqslant \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6}$$

Propuesto.

1. Considere la función
$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - x^2y^2 + y^2.$$
Encuentre el máximo y el mínimo de f en la región dada por las ecuaciones $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ y $x^2 + y^2 \leqslant 9$. Determine además los extremos locales situados en el interior de esta región y clasifíquelos.

2. Sea $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
   a) Demuestre que $(0,0)$ es punto crítico de f.
   b) Demuestre directamente que, a lo largo de toda recta por el origen, f alcanza un mínimo en $(0,0)$.
   c) Determine si $(0,0)$ es máximo local, mínimo local o punto silla.

3. En este problema demostraremos que la curva

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + x^3y + y^4 = 1\right\}$$

es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que para todo $(x, y) \in C$ se cumple que $|x| \leqslant M$ e $|y| \leqslant M$. Para esto:

a) Demuestre que $x^3y > \dfrac{3}{4}$ si $x^4 + y^4 = 1$

b) Demuestre que $x^3y > \dfrac{3}{4}(x^4 + y^4)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

c) Use la información anterior para concluir.