

Ayudantía 4

MAT1620 Cálculo II – Temporada Académica de Verano 2018

Ayudantes: Nicolás Morales (nymorale@uc.cl)

8 de Enero de 2018

Criterios de convergencia de series, series alternates y series de potencia

1. Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$$

b)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \left[\ln \left(\ln(n) \right) \right]^p}$$

2. Considere la comparación con integral, para demostrar que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, entonces se tiene que:

$$s_n \le 1 + \ln(n)$$

La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Con ayuda del inciso a) demuestre que la suma del primer millón de términos es menor que 15 y que la suma de los primeros mil millones de términos es menor que 22.

3. Muestre que la serie a continuación es convergente, ¿Cuántos términos debemos considerar para que el error al estimar la serie con su suma parcial sea menor a 0.0001?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n5^n}$$

4. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

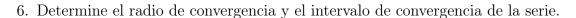
$$e) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1} \right)^{5n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan(n)}{n^2}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

5. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$



$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$$

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} n! (2x-1)^n$$

7. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

8. Encuentre expresiones como serie de potencia para las siguientes funciones, indique el radio de convergencia:

$$a) \ f(x) = \ln\left(5 - x\right)$$

b)
$$f(x) = x^2 \arctan(x^3)$$

9. Encuentre expresiones como serie de potencia para las siguientes integrales indefinidas, indique el radio de convergencia:

$$a) \int \frac{t}{1-t^8} dt$$

$$b) \int \frac{\sin(x)}{x} dx$$

10. Use las series de Taylor correspondientes, para calcular los siguientes límites:

a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 - x - e^x}$$

b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

11. Para las funciones a continuación, determine una aproximación de Taylor con el grado n indicado, en torno al punto a, y calcule el error en el intervalo que se pide.

a)
$$f(x) = \sqrt{x}$$
, en $a = 4$, con $n = 2$, para el intervalo $4 \le x \le 4.2$

b)
$$f(x) = x^{2/3}$$
, en $a = 1$, con $n = 3$, para el intervalo $0.8 \le x \le 1.2$

12. Usando una serie de Taylor en torno al punto apropiado, estime el valor de cos(80°), con 5 decimales de precisión.