Ayudantía 9

Cálculo 2

Problema 1

Considere la función $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ dada por la ecuación

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

¿Es posible extender f de tal forma que sea continua en $(0,1)$?

Problema 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por la ecuación

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & \text{si } x^2 \neq -y \\ 0 & \text{si } x^2 = -y \end{cases}.$$

Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todos los puntos que estas existan.

Problema 3

1) Determine para la siguiente función, si es que existe, $f_x(0,0)$:

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Problema 4

En este problema se revisa la aplicación del teorema de Clairaut.

- Compruebe que las conclusiones del teorema son correctas para $u = e^{xy}\sin(y)$.

- Para la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  Encuentre las derivadas parciales en todo $\mathbb{R}^2$ y las derivadas parciales cruzadas de segundo orden en $(0,0)$. ¿Qué se puede decir sobre la conclusión del teorema de Clairaut?

Problema 5

Un estudio demostró que la temperatura en el suelo durante el año se puede modelar por:

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

Con t en días y x la profundidad.

- Encuentre $\frac{\partial T}{\partial x}$ y $\frac{\partial T}{\partial t}$. ¿Qué representan?
- Muestre que la función satisface la ecuación del calor $T_t = kT_{xx}$, para alguna constante k.

Problema 6 **

Sean $I = (t_0, t_1)$ y $J = (a,b)$ intervalos (no necesariamente acotados), y $f : I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada tal que

1. Para todo $x \in J$, $f(t,x)$ es derivable con respecto a la primera variable en todo $t \in I$.
2. Existe una función continua y no-negativa $g : J \to \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b g(x)dx < \infty$ y $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq g(x)$ para todo $t \in I$, $x \in J$.

Entonces, es posible demostrar que

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(t,x)\,dx \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx\;.$$

Use este hecho para calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$. Hint: defina $f(t,x) = e^{-tx}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln(x)}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sinc}(x)\,dx$, donde $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ para todo $x \neq 0$ y $\operatorname{sinc}(0) = 0$.