Ayudantía 6

MAT1620 Cálculo II – Temporada Académica de Verano 2018

Ayudante: Nicolás Morales (nvmorale@uc.cl) 12 de Enero de 2018

Plano tangente, derivadas direccionales, regla de la cadena en varias variables

---

1. Considere la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Pruebe que en el punto $(0,0)$, la función posee derivada direccional en todas las direcciones posibles del plano, determine la dirección de máxima derivada direccional.

2. Sea $f(x,y)$ diferenciable. La recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0,y_0) tiene pendiente 2. Determine el valor de $f_x(x_0,y_0)$ sabiendo que $f_y(x_0,y_0) > 0$ y que la derivada direccional máxima en dicho punto es igual a 4.

3. Demuestre que todos los planos tangentes al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ pasan por el origen.

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, considere la función $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)dt$.

   a) Muestre que f es diferenciable.

   b) Pruebe que un plano tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$ a $z = f(x,y)$ pasa por el origen si y solo si:

   $$bg(b) - ag(a) = \int_a^b g(t)dt$$

5. Para una función $f(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^2$ (2 veces diferenciable), se define $g(u,v) = f(x,y)$, donde $x = u+v$, $y = uv^2$, suponiendo que para el punto $(2,1)$ se tiene que:

   $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

   Calcule los valores de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(1,1)$ y $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(1,1)$

6. Sea $f(x,y)$ diferenciable, entonces calcule $\nabla f \cdot \nabla f$ en coordenadas polares, esto en función de las variables r y θ, luego calcule el valor de la expresión:

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$