Ayudantía 9

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Puntos Críticos: Son todos los (x, y) que cumplen:

$$\nabla f(x, y) = 0$$

Matriz Hessiana: Sea (x_0, y_0) un punto crítico de $f(x, y)$. Se define la matriz hessiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Llamamos D al determinante de la matriz.

- Si el $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, (x_0, y_0) es mínimo relativo.
- Si el $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, (x_0, y_0) es máximo relativo.
- Si el $D > 0$, (x_0, y_0) es un punto silla.

Teorema Valor Extremo: Si f está acotada por un conjunto D cerrado y acotado, entonces la función alcanza un valor mínimo y máximo absoluto. En estos casos, se calculan los puntos críticos de la función f por si sola y los puntos en la frontera de D.

Método de multiplicadores de Lagrange: Se utiliza cuando hay restricciones del tipo $g(x, y, z) = k \ o \ h(x, y, z) = l$.

Caso 1: Si una función $f(x, y, z)$ está sujeta a una restricción, se debe buscar los puntos que cumplan:

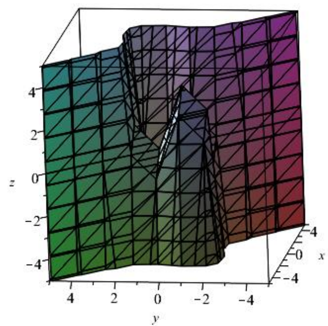
$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$
$$g(x, y, z) = k$$

1. Calcule y clasifique los extremos de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + x + y + 1.$$

2. Determine y clasifique los puntos críticos de la siguiente función

$$f(x,y) = x(x^2 - 3) + y(y^2 - 3).$$



3. Determine el máximo y el mínimo valor que alcanza la expresión

$$f(x,y) = x^2 - 4xy - y^2 + 2y,$$

para

$$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2.$$

4. Encuentre los máximos, mínimos locales y puntos sillas de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$$

5. Mediante los multiplicadores de Lagrange, demuestre que el rectángulo con área máxima que tiene un perímetro p es un cuadrado.