Definición

Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene al punto (a, b) en su interior. Diremos que el límite de f *cuando (x, y) tiende a (a, b) es igual a L, denotado por:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

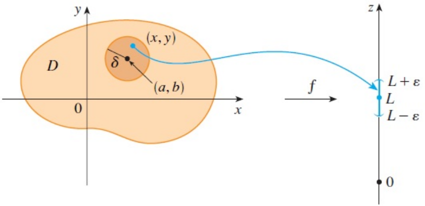
si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

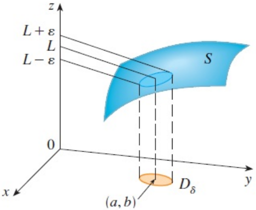
$$si\,(x, y) \in D, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta,$$

entonces

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Notemos que la expresión $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ corresponde a la distancia entre los puntos, del dominio, (x, y); (a, b). Asimismo $|f(x, y) - L|$ representa la distancia en el conjunto de llegada de f.





Ejemplo

Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

no existe.

Ejemplo

Determine la existencia de:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Unicidad de límite.

Uno de los primeros resultados en relación a los límites, nos habla de la unicidad de este, es decir, si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_2$$

entonces $L_1 = L_2$.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Limites iterados

Un caso particular, que en algunas ocasiones puede ser útil, para analizar la existencia de un límite es revisar los limites iterados, es decir,

Teorema

Sea f una función tal que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)f(x,y)} = L$$

entonces

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L.$$

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Ejemplo

A modo de ejemplo del resultado anterior, calcular los lḿites iterados para:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+3y}.$$

Limites por acotamiento

Podemos utilizar la definición o acotar las respectivas expresiones para calcular los respectivos límites.
En estos casos puede ser útil tener en cuenta la desigualdad,

$$\left|\frac{a}{b+c}\right| \leq \left|\frac{a}{b}\right|, \qquad \text{si, c es positivo.}$$

Ejemplo

Demuestre usando la definición, que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

existe.

Coordenadas polares

Finalmente tenemos un última herramienta para calcular límites de funciones de varias variables, para ello comencemos recordando las coordenadas polares en el plano.
Todo punto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en el plano esta univocamente determinado por la distancia r al origen y el ángulo θ respecto del eje X. El par de coordendas (r, θ) las llamamos las **coordenadas polares** de P.
Las respectivas coordenadas cartesianas de P se recuperan mediante la relación,

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta).$$

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Teniendo en consideración lo anterior, decir que

$$(x, y) \to (0, 0),$$

equivale a decir, en coordenadas polares que

$$r \to 0, \quad \text{independiente del valor de } \theta.$$

Consideremos la función $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^4+y^4}$, haciendo el cambio a coordenadas polares,

$$f(r\cos(\theta), r\sin(theta)) = \frac{r\cos^4(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}.$$

La expresión anterior se puede entender como el producto de una función acotada

$$\varphi(\theta) = \frac{\cos^4(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)},$$

y una función $\psi(r) = r$ la cual tiene a cero, por lo tanto

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \varphi(\theta)\psi(r) = 0.$$

En el resultado anterior, hemos hecho uso de un resultado conocido de funciones de una variable,

Si φ *es una función acotada, en una vecindad del cero y* ψ *es una función que tiene a cero, entonces la función obtenida del producto de ambas tambien tiene a cero*