Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Primer Semestre del 2025

Ayudantía 1

Cálculo 2

Problema 1

La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\ (1+x)}\, dx$$

es impropia por dos razones: el integrando tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y el intervalo de integración es no acotado. Resuélvala separándola en dos integrales, una en el intervalo $[0, a]$ y otra en el intervalo $[a, \infty)$ $(a \in (0, \infty))$.

Problema 2

Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, entonces la siguiente integral converge:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\, dx$$

Problema 3

Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral converge. Evalúe la integral para el valor de C.

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2} \right)$$

Problema 4

Determine para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral $\int_0^\infty te^{-\alpha t}\, dt$ es convergente, en tal caso determine el valor.

Problema 5

Use el criterio de comparación para determinar si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx.$$

Problema 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

   Hint: *Integre por partes, utilizando* $1-\cos x$ *como antiderivada para* $\sin x$.

2. **Propuesto:** Utilice lo anterior para mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)dx$ es convergente.

Problema 7**

Considere la superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ descrita por la ecuación

$$x^2+y^2=\frac{1}{z^2},\quad z\geq 1.$$

Calcule su área y el volumen que encierra. A esta superficie se le conoce como *cuerno de Gabriel* o *la trompeta de Torricelli.* ¿Cómo pintaría el interior de esta figura?

Problema 8**

Sea $\alpha>0$. Muestre que la siguiente integral impropia no converge:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2+x^2)}\,dx.$$

Más aún, muestre que si f y g son funciones crecientes, que no se anula, y tal que $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$, entonces el límite

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-g(t)}^{f(t)}\frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2+x^2)}\,dx,$$

de existir, puede ser cualquier número real, -∞, o ∞, dependiendo de f y g. ¿En qué caso es 0?

1 Problemas Propuestos

Problema Propuesto 1

Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral converge. Evalúe la integral para el valor de C.

$$\int_0^\infty\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{C}{3x+1}\right)$$

Problema Propuesto 2

Use el criterio de comparación para determinar si las siguientes integrales convergen o divergen

(a) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\arctan(x)}{2+e^x}\,dx.$

Problema Propuesto 3

Evalúe la integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

para $n = 1, 2,$ y 3. Conjeture el valor de la integral cuando n es un entero positivo arbitrario.
Propuesto: Demuestre su conjetura ocupando inducción.