Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Matemática

Cálculo con Curvas Paramétricas

Dr. Claudio Rivera

Resumen: En este documento encontrará ejercicios de longitud de arco. Estos ejercicios fueron tomados en su mayoría del libro guía del curso MAT1620.

Actualizado el: 24 de Junio de 2015

wcrivera@uc.cl
Version 1.0

Pendiente

Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ ecuaciones paramétricas que determinan una curva. Entonces

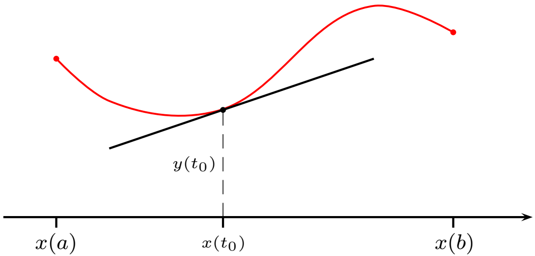
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

cada vez que $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$.

Recta Tangente

La ecuación de la **recta tangente** a la curva en $t = t_0$ es

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))$$



Nota

En relación a la definición anterior:

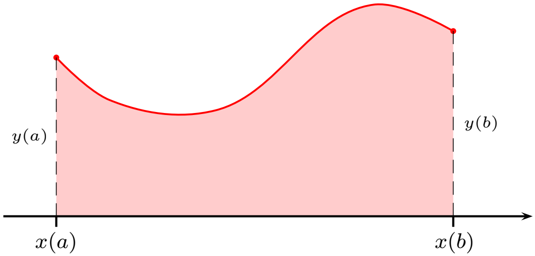
- Si $y'(t_0) = 0$, entonces la recta es paralela al eje X.
- Si $x'(t_0) = 0$, entonces la recta es paralela al eje Y.

Área bajo la curva

El **área** bajo la curva es

$$A = \int_a^b y(t)x'(t)\,dt$$

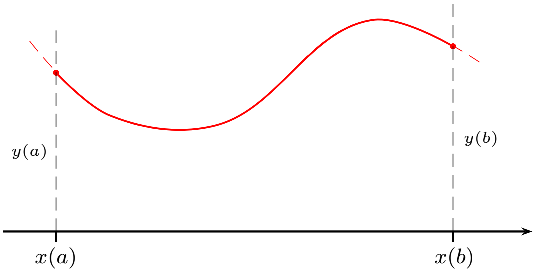
siempre que $y(t) \geq 0$ y $x'(t) \geq 0$.



Longitud de Arco

La **longitud de arco** es

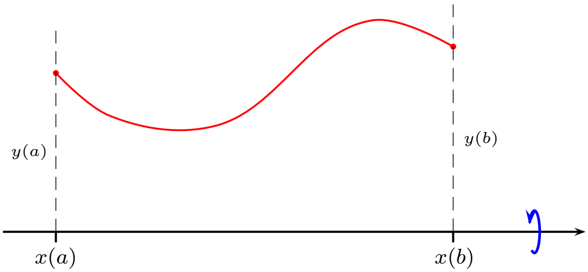
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$



Área de Superficie

Si la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, se hace girar en torno al eje X, el **área de la superficie** resultante está dada por

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$



Pregunta 1

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para la ecuación paramétrica $x = t\sin(t)$, $y = t^2 + t$.

Respuesta.

Pregunta 2

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación paramétrica $x = t^4 + 1$, $y = t^3 + t$, para $t = -1$.

Respuesta.

Pregunta 3

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación paramétrica $x = e^{\sqrt{t}}$, $y = t - \ln(t^2)$, para $t = 1$.

Respuesta.

Pregunta 4

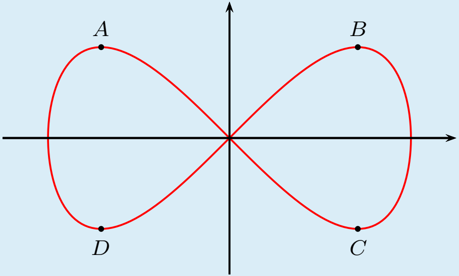
Calcule dy/dx y d^2y/dx^2, para la curva de ecuación paramétrica $x = 4+t^2$, $y = t^2+t^3$. Además, determine los valores de t para los cuales la curva es cóncava hacia arriba.

Respuesta.

- $\dfrac{dy}{dx} = \boxed{}$ $\boxed{}$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \boxed{}$ $\boxed{}$
- $t \in \boxed{}$ $\boxed{}$

Pregunta 5

Determine los puntos sobre la curva de ecuaciones paramétricas $x = 2\cos(t)$, $y = \sin(2t)$, donde la recta tangente es **horizontal**.

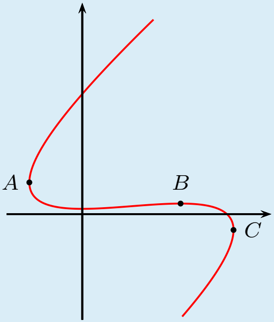


Respuesta.

- $A =$ [ ] [ ]
- $B =$ [ ] [ ]
- $C =$ [ ] [ ]
- $D =$ [ ] [ ]

Pregunta 6

Determine los puntos sobre la curva de ecuaciones paramétricas $x = 2t^3 + 3t^2 - 12t$, $y = 2t^3 + 3t^2 + 1$, donde la recta tangente es **horizontal** y donde la recta tangente es **vertical**.

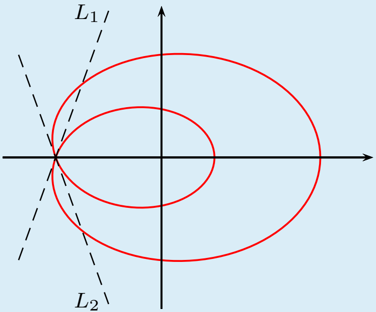


Respuesta.

- $A =$ ☐ ☐
- $B =$ ☐ ☐
- $C =$ ☐ ☐

Pregunta 7

Determine los puntos donde la curva de ecuación paramétrica $x = \cos(t) + 2\cos(2t)$, $y = \sin(t) + 2\sin(2t)$ se curzan. Además, determine las ecuaciones de las rectas tangentes en dicho punto.

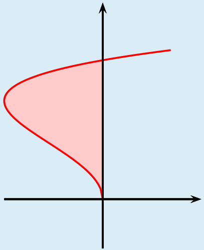


Respuesta.

- L_1 : ☐ ☐
- L_2 : ☐ ☐

Pregunta 8

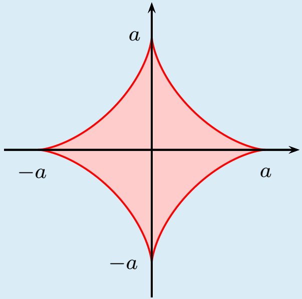
Dada la curva de ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$, determine el área de la región sobreada.



Respuesta.

Pregunta 9

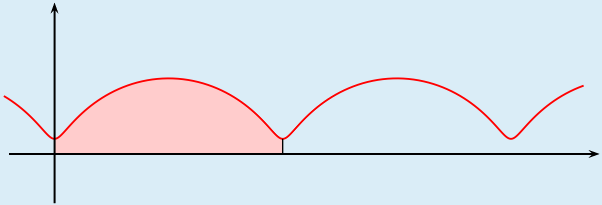
Determine el área de la región encerrada por la **astroide** $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$.



Respuesta.

Pregunta 10

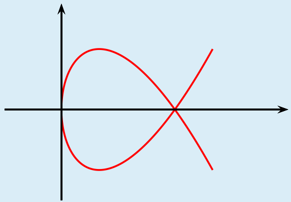
Determine el área bajo un arco de la **trocoide** de ecuación paramétrica $x = at - b\sin(t)$, $y = a - b\cos(t)$, con $a > b$.



Respuesta.

Pregunta 11

Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada por el ciclo de la curva de ecuación paramétrica $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.



1. Determine el área de $\mathcal{R}$.
2. Si $\mathcal{R}$ se hace girar en torno al eje X, determine el volumen del sólido resultante.
3. Determine el centroide de $\mathcal{R}$.

Respuesta.

1.
2.
3.

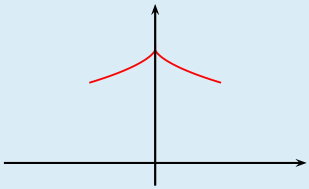
Pregunta 12

Determine la longitud de la curva de ecuaciones paramétricas $x = 3\cos(t) - \cos(3t)$, $y = 3\sin(t) - \sin(3t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Respuesta.

Pregunta 13

Determine la longitud de la curva de ecuaciones paramétricas $x = \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}t\right)\right)$, $y = \sin(t)$, $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$.



Respuesta.

Pregunta 14

Determine la longitud de la astroide $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$, donde $a > 0$.

Respuesta.

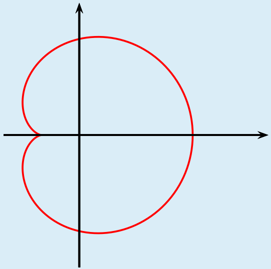
Pregunta 15

Determine el área de la superficie obtenida al girar la **astroide** de ecuación paramétrica $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$ en torno al eje X.

Respuesta.

Pregunta 16

Determine el área de la superficie obtenida al girar curva de ecuación paramétrica $x = 2\cos(t) - \cos(2t)$, $y = 2\sin(t) - \sin(2t)$ en torno al eje X.



Respuesta.

Pregunta 17

Determine el área de la superficie obtenida al girar curva de ecuación paramétrica $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, $0 \leq t \leq 1$ en torno al eje Y.

Respuesta.