PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2019.

AYUDANTÍA 6
CALCULO II $\star$ MAT1620

Vicente Merino - vamerino@uc.cl

Algunas definiciones útiles:

1. **Radio e intervalo de convergencia** Para una serie de potencias dada $\sum c_n(x-a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

   i) La serie converge solo cuando $x = a$.

   ii) La serie converge para toda x.

   iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$

   El número R en el caso iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso i) y $R = \infty$ en el caso ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso iii) la desigualdad $|x-a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a-R < x < a+R$. Cuando x es un extremo del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos.

2. **Serie geométrica**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

3. **Derivación e integración de series de potencias** Si la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

   es derivable (y por tanto, continua) sobre el intervalo $(a-R, a+R)$ y

   i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

ii) $\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\dfrac{(x-a)^2}{2} + c_2\dfrac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Los radios de convergencia de las series de potencias de i) y ii) son R.

4. **Series de Taylor** Si f se puede representar como una serie de potencias (expansión en a), es decir si:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

entonces sus coeficientes están dados por $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

1. Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n.$$

2. Determine la representación en serie de potencias asi como el respectivo intervalo de convergencia, para la función.

$$f(x) = \frac{2}{3-x}.$$

3. Determine la representación en serie de potencias asi como el respectivo intervalo de convergencia, para la función.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+1}.$$

4. Exprese la siguiente función como una serie de potencias, para ello en primer lugar utilice la descomposición en fracciones parciales de la expresión.

$$f(x) = \frac{3}{x^2-x-2}.$$

5. *a*) Utilice la propiedades relativas a la derivada, para obtener la representación en serie de potencia de,

   $$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

   b) Utilice lo anterior para obtener la representación en serie de potencias de,

   $$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

6. Calcule la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ centrada en $a = \pi/2$