FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 6

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Derivadas parciales: Las derivadas parciales para una función de 2 variables se escriben:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$, es la derivada parcial con respecto a x (y es una constante).
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y)$, es la derivada parcial con respecto a y (x es una constante).

Derivadas parciales (punto conflictivo): Se usa por definición.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$

Derivada direccional: Se define la derivada direccional en dirección $\vec{u} = (a, b)$ en el punto (x, y) como:

$$D_u f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h}$$

Vector Gradiente: Se define el vector gradiente como:

$$\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$$

Diferenciabilidad: Se dice que una función es diferenciable en $((a, b)$ si el siguiente límite existe.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|}$$

Regla de la cadena:

<u>**Caso 1:**</u> z es una función de x e y y a su vez x e y son funciones de t. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

<u>**Caso 2:**</u> z es una función de x e y y a su vez x e y son funciones de s y t. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

1. Calcule las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = (x^2+y^2)sen(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   b) $f(x,y) = x^y$ (calcule las segundas derivadas parciales)

   c) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = sen(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

2. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial x}$.

   a) $x - z = \arctan(yz)$

   b) $sen(xyz) = x + 2y + 3z$

3. Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Encuentre las primeras derivadas parciales cuando $(x,y) \neq (0,0)$.
   b) Calcule $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
   c) Demuestre que $f_{xy}(0,0) = -1$ y $f_{yx}(0,0) = 1$.
   d) ¿El resultado del inciso anterior contradice el teorema de Clairaut?

4. Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Demuestre que existen las primeras derivadas parciales en el punto $(0,0)$ pero f no es diferenciable en $(0,0)$.
   b) Explique por qué f_x y f_y no son continuas en $(0,0)$.

5. Calcule una aproximación lineal de la función $f(x,y) = \ln(x-3y)$ en $(7,2)$ y aproxime el valor de $f(6.9, 2.06)$. Calcule el plano tangente de f.

6. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$.

7. Si $z = f(x,y)$, donde f es diferenciable.

$$x = g(t), y = h(t), g(3) = 3, h(3) = 7, g'(3) = 5, h'(3) = -4, f_x(2,7) = 6. f_y(2,7) = -8$$

   Determine $\frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $t = 3$.

8. Si $u = f(x,y)$, donde $x = e^s cost$ y $y = e^s sent$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$