



## Ayudantía 5

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas ([fvsalinas@uc.cl](mailto:fvsalinas@uc.cl))

**Curvas de nivel:** Las curvas de nivel de una función  $f$  de 2 variables, son las curvas cuyas ecuaciones son  $f(x_1, x_2) = k$ , donde  $k$  es una constante (en el rango de  $f$ ).

**Límite de funciones de varias variables:** El límite de  $f(x_1, x_2)$  cuando  $(x_1, x_2)$  tiende a  $(a_1, a_2)$  es  $L$  se escribe:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x_1, x_2) = L$$

**No Existencia del límite:** Si tomamos una trayectoria  $C_1 \neq C_2$  y se cumple que si:

$f(x_1, x_2)$  tiende a  $L_1$  cuando  $(x_1, x_2)$  tiende a  $(a_1, a_2)$  a lo largo de  $C_1$

$f(x_1, x_2)$  tiende a  $L_2$  cuando  $(x_1, x_2)$  tiende a  $(a_1, a_2)$  a lo largo de  $C_2$

Si  $L_1 \neq L_2$  entonces no existe el límite anterior.

**Continuidad:** Una función de  $f$  de  $m$  variables, es continua en  $(a_1, a_2)$  si:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2)$$

1. Determine el dominio de las siguientes funciones y gráfíquelas.

a)  $f(x) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

b)  $f(x) = \arcsen(\frac{x}{x+y})$

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

2. Grafique las curvas de nivel de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = ye^x$

b)  $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

3. Grafique la siguiente función.

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

4. Determine el límite, si es que existe, o demuestre que el límite no existe:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2+y^2}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^7}{x^6+y^6}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^3+y^3}}$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^4+y^4}$

e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 \sen^2(y)}{x^2+2y^2}$

f)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(xy+yz+xz^2)}{x^2+y^2+z^2}$

5. Considere la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sen(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ .

6. ¿Para qué valores del número  $r$  es continua la siguiente función

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

en  $\mathbb{R}^3$ ?