Ayudantía 10

Calculo II - MAT1620

Cambio a coordenadas polares en una Integral Doble: Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$$

Momento y Centro de masa: Sea una región D con densidad variable $\rho(x,y)$, entonces las coordenadas del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)dA\,, M_y = \iint_D x\rho(x,y)dA\,, m = \iint_D \rho(x,y)dA$$

$$M_x = Momento\ con\ respecto\ al\ eje\ x$$
$$M_y = Momento\ con\ respecto\ al\ eje\ y$$
$$m = Masa\ de\ la\ region\ D$$

1. Calcule las siguientes integrales:

$$a) \iint_D arctg(\frac{y}{x})dA$$

donde $D = \{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

2. Calcule las siguientes integrales:

$$\iint_D xydA$$

donde D es la región en el primer cuadrante, limitada por abajo por el circulo con centro en $(0,1)$ y radio 1, y por abajo la recta $y = \sqrt{3}x$.

3. Halle el centro de masa de una lámina en la forma de un triángulo isósceles recto con lados iguales de longitud a si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto a la hipotenusa.

4. Una lámina ocupa la región dentro del circulo $x^2 + y^2 = 2y$ pero fuera del circulo $x^2 + y^2 = 1$. Encuentre el centro de masa si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia desde el origen.

5. Calcule

$$\iint_D xydA$$

Donde D es la región en el primer cuadrante localizada entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

6. Hallar el volumen del solido acotada por el paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ y el plano $z = 7$ en el primer octante.