Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II 2016-2

Ayudantía N°9

Optimización

Néstor Catalán Salas (nacatalan@uc.cl)

1. Introducción

- Optimización irrestricta:
  - En primer lugar, los puntos críticos se obtienen de la condición $\nabla f(\vec{x}) = 0$
  - Estos se evalúan con el criterio de la matriz Hessiana. En el caso de $\mathbb{R}^2$, esta tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

  a) Si $\mathcal{H}$ es definida positiva (o todos sus valores propios son positivos), luego el punto crítico es un mínimo local.

  b) Si $\mathcal{H}$ es definida negativa (o todos sus valores propios son negativos), entonces el punto es un máximo local.

  c) Si no se cumple ninguno de los dos casos anteriores, entonces se trata de un punto silla.

- Optimización sujeta a restricciones: Sea f una función a optimizar sujeta a una curva de nivel dada $g(\vec{x}) = k$. Entonces, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos se obtienen según:

$$\nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x})$$
$$g(\vec{x}) = k$$

  Finalmente, se compara f en los puntos obtenidos y se determinan los máximos y mínimos globales.

2. Ejercicios

1. Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$.
2. Dada la función

$$f(x,y) = ax^2y + bxy^2 + \frac{a^2y^2}{2} + 2y$$

   determine los valores de a y b de modo que la función tenga un punto silla en (1,1).
3. Determine los puntos críticos y su naturaleza para

$$f(x,y,z) = x^3 - xz + yz - y^3 + 2z^3$$

4. Hallar el punto de la curva

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 1$$

   más cercano al origen (0,0,0).
5. Determine los máximos y mínimos de la función $f(x,y,z) = x - y + z$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ con $z \geq 0$.