FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 7

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Derivada direccional: Se define la derivada direccional en la dirección $\vec{u} = (a, b)$ en el punto (x, y) como

$$D_u f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x,y)}{h}$$

Vector Gradiente: Se define el vector gradiente como:

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$$

Otra forma de calcular la derivada direccional: Se puede calcular la derivada direccional en la dirección $\vec{u} = (a, b)$ de la siguiente forma.

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Puntos Críticos: Son todos los (x, y) que cumplen:

$$\nabla f(x, y) = 0$$

Matriz Hessiana: Sea (x_0, y_0) un punto crítico de $f(x, y)$. Se define la matriz hessiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Llamamos D al determinante de la matriz.

- Si $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, (x_0,y_0) es mínimo relativo.
- Si $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, (x_0,y_0) es máximo relativo.
- Si $D < 0$ y (x_0,y_0) es punto silla.

Método de multiplicadores de Lagrange: Cuando hay una restricción del tipo $g(x, y, z) = k$ se buscan los puntos que cumplan:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$
$$g(x,y,z) = k$$

1. a) Sea $f(x,y)$ una función que describe la temperatura sobre la superficie de la Tierra. Determine la derivada direccional de f en el punto $(-1,2)$ en la dirección del vector $(-1,1)$suponiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -1, \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 2$$

b) Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x,y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0,2)$ tiene valor 1. Cuál es la dirección que cambia f con mayor rapidez en $(0,2)$.

c) Sea f una función diferenciable tal que sus derivadas direccionales en el punto $(1,2)$ en las direcciones de los vectores $(1,1)$ y $(1,-3)$ son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$, respectivamente. Hallar el valor de las derivadas parciales $f_x(1,2)$ y $f_y(1,2)$.

2. a) Sea la superficie S dada por $z = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 3$. Determine todos los puntos P sobre S de modo que el plano tangente a S en P tenga a $n = (1,0,1)$ como su vector normal.
b) Determine los puntos del hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $z = x + y$.

3. Sea $F(x,y) = xyln(x^2+y^2), x^2+y^2 > 0$. Encuentre los puntos críticos de F y clasifíquelos.

4. Determine el máximo y el mínimo valor que alcanza la expresión

$$z = x^2 - 4xy - y^2 + 2y$$

Para

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2.$$

5. Determinar la distancia mínima entre el origen y un punto de la superficie

$$2z = x^2 - y^2 - 3$$