Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2021

Guía de ejercicios y ejemplos relacionado con capítulo 1 de clase a clase MAT1620

Agosto de 2021.

A tráves del desarrollo de esta guía se espera que pueda consolidar los siguientes aprendizajes:

1. Identificar y analizar las integrales impropias.
2. Aplicar definiciones o criterios para analizar la convergencia de integrales impropias.
3. Conocer sucesiones y las propiedades del límite de una sucesión.
4. Utilizar definiciones o criterios para analizar la convergencia de una sucesión.
5. Relacionar series con sucesiones.
6. Conocer y clasificar series.
7. Utilizar definiciones o criterios para analizar la convergencia de series.
8. Realizar la importancia de representación de funciones vía series.

Ejercicios sugeridos del texto guía J. Stewart, Cálculo, la septima edición

1. Sección 7.8, páginas 527-529, ejercicios:
   7, 8, 9, 11, 13, 14, 18, 21, 23, 25, 26, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 44, 46, 49, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 66, 67, 68, 71, 74, 75, 77, 78, 79, 80.

2. Sección 11.1, páginas 700-702, ejercicios:
   23, 25, 28, 29, 31, 32, 37, 38, 42, 43, 48, 49, 52, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 77, 78, 79, 81, 82.

3. Sección 11.2, páginas 711-714, ejercicios:
   17, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 32, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 45, 46, 52, 53, 54, 69, 70, 73, 74, 80, 82, 83, 84, 85.

4. Sección 11.3, páginas 720-722, ejercicios:
   13, 14, 17, 18, 22, 24, 26, 29, 30, 31, 32, 32, 36, 39, 40.

5. Sección 11.4, páginas 726-727, ejercicios:
   10, 12, 14, 16, 20, 22, 24, 28, 30, 32, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46.

6. Sección 11.5, páginas 731-732, ejercicios:
   6, 8, 10, 9, 11, 12, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 32, 33, 34.

7. Sección 11.6, páginas 737-739, ejercicios:
   6, 8, 9, 10, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 30, 44, 45.

8. Sección 11.8, páginas 745-746, ejercicios:
   4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 20, 22, 23, 29, 30, 31, 32, 33, 41, 42.

9. Sección 11.9, páginas 751-753, ejercicios:
   2, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18, 22, 23, 27, 32, 34, 37, 38, 39, 40, 42.

10. Sección 11.10, páginas 765 -766, ejercicios:
    1,2, 3, 4, 5, 6, 9, 17, 18, 21, 31, 33, 37, 38, 39, 41, 48, 49, 54, 58, 63, 74.

Ejemplos y ejercicios adicionales

Se sugiere que hagan los siguientes ejercicios después de hacer los ejercicios del libro. Los ejercicios del libro están relacionados con los temas y en la mayoría de los casos están ordenados según el nivel de dificultad o complejidad del problema.
Tengan en consideración que los ejercicios adicionales de esta guía no cubren todos los temas, tampoco están en el orden de la materia (clase a clase). Esto es para que los estudiantes desarrollen la hablidad de relacionar una pregunta con un tema, prueben un método, puedan equivocarse, pero aprendan de su error y sigan intentando para construir su propio camino de aprendizaje.
La solución sugerida para algunos ejercicios no es la única solución y tampoco es la mejor. Se espera que los estudiantes escriban su propia solución.

1. ¿Converge o diverge la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$?

   Nota: Esta pregunta es una modificación de la pregunta 14 sección 7.8 del texto guía.
   Solución. Note que esta integral impropia es una combinación de intergral impropia tipo 1 y tipo 2 , puesto que el intervalo de integración, $[0, +\infty[$, no es acotado superiormente y la función del integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

   Luego $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ es convergente si y solo si para todo $c \in]\,0, +\infty[$,

$$\int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \text{ y } \int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \text{ convergen.}$$

   En efecto

$$\int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_c^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_c^c = \lim_{e\to 0^+} -2e^{-\sqrt{c}} + 2e^{-\sqrt{\epsilon}} = 2 - 2e^{-\sqrt{c}}.$$
$$\int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to +\infty} \int_c^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to +\infty} -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_c^b = \lim_{b\to +\infty} -2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-\sqrt{c}} = 2e^{-\sqrt{c}}.$$

   Por tanto $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ es convergente y se tiene que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2.$$

2. ¿Converge o diverge la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}dx$?

Solución. Para analizar la integral dada, comenzamos separando como sigue,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}dx = \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}dx + \int_{1/2}^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}dx$$

Para la primera integral utilizaremos el criterio de comparación con la función

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

y calculando se tiene.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

Con lo cual la primera integral es convergente. Para el caso de la segunda integral realizamos un proceso análogo comparando con la función

$$g_2(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}.$$

Se tiene que, por comparación al límite, la segunda integral tambien es convergente y se puede concluir que la integral dada tambien lo es.

3. Usando el polinomio de Taylor de la función $\ln(1+x)$ centrada en $x_0 = 0$ determine el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Solución. Recuerde que $a = e^{\ln(a)}$. Primero, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)/x}$$

Luego, usamos el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x + R_1(x)$$

Así

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+R_1(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{R_1(x)}{x} = 1$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)/x} = e.$$

4. Usando el polinomio de Taylor de las funciones seno y coseno centradas en cero calcule el siguiente límite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x-\operatorname{sen}(x)}$$
Sugerencia: Primero, notemos que
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x-\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{\cos(x)}$$
Luego, usamos el polinomio de taylor de orden 3 y 2 de las funciones seno y coseno respectivamente.
La respuesta final es -2.

5. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n-1}(2n)!} = 3\sqrt{3}-6$

6. Demuestre que $0{,}3 - \dfrac{(0{,}3)^2}{2} + \dfrac{(0{,}3)^3}{3} - \cdots = \ln(1{,}3)$.

7. Evalúe
   a) $1 - \ln 3 + \dfrac{(\ln 3)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 3)^3}{3!} + \dfrac{(\ln 3)^4}{4!} - \cdots$.
   Sugerencia: Recuerde que $e^{\ln\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$. Utilice la Tabla 1 del libro, Capítulo 11.10.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0{,}7)^n$.

8. Sabemos que la función $f(x) = e^{x^2}$ es continua y por lo tanto su integral existe. Sin embargo, la antiderivada de dicha función no es una función elemental. Esto significa que no importa el esfuerzo que se haga, ya que nunca se logrará evaluar $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx$. Las técnicas de integración como integración por partes o por sustitución no funcionan!
   Utilizar las series es una de las mejores herramientas para evaluar la integral de $f(x) = e^{x^2}$.
   a) Evalúe $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx$ como una serie infinita.
   b) Dé un ejemplo de otra función que no tiene una antiderivada elemental y luego evalúe su integral indefinida como una serie infinita.

9. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$.
   a) Encuentre una serie de potencias en torno al 0 para la función f.
   b) Calcule $f^{(2020)}(0)$.

10. Sea $f(x) = \ln(x)$. Calcule $\ln(1,1)$ con un error menor a una milésima.
    Sugerencia: Determine la serie de Taylor en torno a 1 de f.

11. Determine el valor de $x \in \mathbb{R}$ de modo que $1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots = 9$.

12. Muestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < |b|$,

$$\frac{a}{b+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{b}\left(-\frac{x}{b}\right)^n.$$

13. Aproxime $ln((0{,}01)^2 + (1{,}02)^2)$ con 2 decimales de exactitud.
Sugerencia: Forme una función de dos variables y calcule su plano tangente en un punto conveniente.