



Ayudantía 6

Cálculo 2

Problema 1

1. Si $r = (x, y)$, $r_1 = (x_1, y_1)$ y $r_2 = (x_2, y_2)$. Describa el conjunto de todos los puntos (x, y) tal que $|r - r_1| + |r - r_2| = k$, con $k > |r_1 - r_2|$.
2. Aplique el producto triple para demostrar que los siguientes puntos son coplanares:
 $u = i + 5j - 2k$; $v = 3i - j$; $w = 5i + 9j - 4k$.
3. Encuentre una ecuación para la esfera con centro en $(2, -6, 4)$ y radio 5. Describa su intersección con cada uno de los planos coordenados.

Problema 2

1. Encuentre el ángulo agudo entre las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$ en sus puntos de intersección.
2. Encuentre el ángulo entre los vectores $i + 2j - 2k$ y $4i - 3k$.

Problema 3

Resuelva los siguientes propuestos.

1. Demuestre que la distancia de un punto (x_1, y_1) a la recta $ax + by + c = 0$ se escribe de la forma

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto que no se encuentra en la línea L que pasa por los puntos $Q, R \in \mathbb{R}^3$, muestre que la distancia de P a L es

$$d = \frac{|a \times b|}{|a|}$$

con $a = \overrightarrow{QR}$ y $b = \overrightarrow{QP}$.

3. Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto fuera del plano que pasa por $Q, R, S \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que la distancia de P al plano es

$$d = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|a \times b|}$$

Con $a = \overrightarrow{QR}$, $b = \overrightarrow{QS}$ y $c = \overrightarrow{QP}$.

Problema 4

1. Considere los puntos P tal que la distancia P a $(-1, 5, 3)$ es el doble de la distancia de P a $(6, 2, -2)$. Muestre que corresponden a una esfera, encuentre su radio y su centro.
2. Si $r = (x, y, z)$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ muestre que la ecuación vectorial $(r - a) \cdot (r - b) = 0$ representa una esfera. Encuentre su centro y radio.

Problema 5*

Sea P un punto en el espacio y L una recta que no interseca a P .

- a) Demuestre que hay un único punto $Q \in L$ que minimiza la distancia a P , esto es,

$$d(P, Q) = \min_{Q' \in L} d(P, Q'),$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ denota la distancia entre dos puntos. ¿Cuál sería la distancia del punto P a la recta L ?

- b) Suponga que estamos usando cierto sistema de coordenadas en donde P está representado por un vector $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, y L está representado por el conjunto $\{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, donde $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ es un vector de norma 1. Determine el vector de coordenadas w de Q a partir de u y v .

c) Demuestre que para todo vector $v' \in L$, se tiene $u \cdot v' = w \cdot v'$.

Propuesto: Vuelva a hacer lo anterior pero usando un plano M en lugar de la recta L .