Pontificia Universidad Católica Chile
Facultad de Matemáticas - Mat1620
Profesor: Natham Aguirre
Ayudante: Francisco Rubio (fvrubio@uc.cl)

Ayudantía 11

Multiplicadores de Lagrange

Método de los multiplicadores de Lagrange Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso a). El más grande de estos valores es el valor máximo de f, el más pequeño es el valor mínimo de f.

Caso con 2 restricciones

Sumando la restricción $h(x,y,z)=c$, obtenemos que $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right)=\lambda \nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right)+\mu \nabla h\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Lo que lleva a resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
f_x &= \lambda g_x+\mu h_x \\
f_y &= \lambda g_y+\mu h_y \\
f_z &= \lambda g_z+\mu h_z \\
g(x, y, z) &= k \\
h(x, y, z) &= c
\end{aligned}$$

Definición Integral doble

La integral doble de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) d A=\lim _{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f\left(x_{i j}^*, y_{i j}^*\right) \Delta A$$

si el limite existe

Valor promedio

Se define el valor promedio de una función f de dos variables de - finidas sobre un rectángulo R como

$$f_{\text{prom}}=\frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) d A$$

donde A(R) es el área de R

Teorema de Fubini

4 Teorema de Fubini Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que f está acotada sobre R, f es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy \quad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]$$

Ejercicios

1. ($I_2 : P6 \quad 2018-1$) Determine y clasifique los puntos críticos de la función

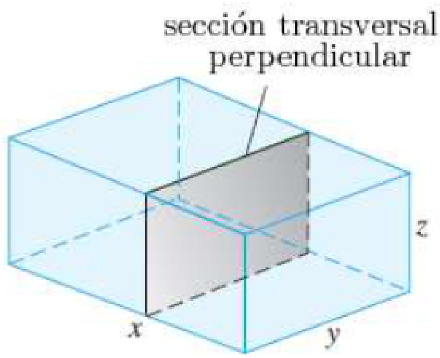
$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

2. ($I_2 : P7 \quad 2018-1$) Determine los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$$

   definida sobre el triángulo de vértices $(1, 0), (5, 0), (1, 4)$

3. ($I_2 : P8 \quad 2017-1$) Un paquete en forma de una caja rectangular se puede enviar a través de servicio postal si la suma de su largo y el perimetro de una seción transversal perpendicular al largo es 108cm como máximo.



   Calcule las dimensiones del paquete con el volumen más grande que se puede enviar por paquete postal. Justifique su respuesta.

4. ($I_3 : P6 \quad 2018-2$) El plano $x + y + 2z = 2$ al intersectar al paraboloide $z = x^2 + y^2$ determina una elipse. Encuentre los puntos de la elipse que se encuentran mas cercanos y mas lejanos del origen.

5. ($I_3 : P6 \quad 2016-1$) Calcule el volumen del sólido delimitado por los planos $x = 0, x = 1, y = 0$ e $y = 1, z = 0$ y la superficie dada por $z = \frac{x}{1+xy}$

Solución

Ejercicio 1.

Comenzaremos calculando los puntos críticos de la función dada,

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y) = (0,0).$$

Resolviendo se obtienen

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (-5/3, 0), \quad P_3 = (-1, 2), \quad P_4 = (-1, -2).$$

A continuación calculamos la respectiva matriz Hessiana de f.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(6x+5) & 2y \\ 2y & 2(x+1) \end{pmatrix}.$$

Y evualamos para determinar la naturaleza de cada uno de los puntos criticos obtenidos.

$$\begin{array}{rlr} det(Hf(P_1)) = 20, & f_{xx}(P_1) = 12, & P_1 \text{ es un mínimo local} \\ det(Hf(P_2)) = 40/3, & f_{xx}(P_2) = -2, & P_2 \text{ es un máximo local} \\ det(Hf(P_3)) = -16, & & P_3 \text{ es un punto tipo silla} \\ det(Hf(P_4)) = -16, & & P_4 \text{ es un punto tipo silla} \end{array}$$

Ejercicio 2.

Para determinar los máximos y mínimos absolutos debemos analizar el interior del triangulo respectivo asi como en su frontera. Para realizar el análisis en el interior de la región buscaremos determinar la existencia de puntos criticos en ella,

$$\nabla f(x,y) = (y-1, x-2),$$

El unico punto críticos es $P_1 = (2,1)$.

A continuación analizaremos la frontera, la cual la dividiremos en 2 segmentos, a saber:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y \in [0,4]\} \longrightarrow f|_{B_1} = 2 - y \\ B_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [1,5]\} \longrightarrow f|_{B_2} = 3 - x \\ B_3 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + 5, x \in [1,5]\} \longrightarrow f|_{B_3} = -x^2 + 6x - 7. \end{aligned}$$

Cada una de las restricciones de f a B_1, B_2, B_3 determinan respectivamente los siguientes candidatos a máximo o minimo,

$$P_2 = (1,0), \quad P_3 = (1,4), \quad P_4 = (5,0), \quad P_5 = (3,2).$$

Evaluamos en todos los puntos encontrados,

$$f(P_1) = 1, \quad f(P_2) = 2, \quad f(P_3) = -2, \quad f(P_4) = -2, \quad f(P_5) = 2.$$

Se concluye que P_2, P_5 son los puntos donde f alcanza su máximo y P_3, P_4 puntos donde f alcanza su valor mínimo.

Ejercicio 3.

Solución. Debemos maximizar la función volumen $V(x,y,z) = xyz$ sujeto a la restricción

$$g(x,y,z) = x + 2y + 2z \leqslant 108 \,.$$

Notemos que la función V no tiene puntos críticos al interior de la región $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ y $g(x,y,z) \leqslant 108$. Por lo que basta, determinar el máximo de V con la resstricción $g(x,y,z) = 108$. Aplicando multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla V = \lambda \nabla g(x,y,z)$ lo que nos lleva:

$$\left.\begin{array}{rcl} yz & = & \lambda \\ xz & = & 2\lambda \\ xy & = & 2\lambda \\ x + 2y + 2z & = & 108 \end{array}\right|$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z se obtiene

$$\begin{array}{rcl} xyz & = & \lambda x \\ xyz & = & 2\lambda y \\ xyz & = & 2\lambda z \end{array}$$

Observe que $\lambda \neq 0$ por que $\lambda = 0$ significaría que $xyz = 0$ pero el volumen no puede ser cero. Entonces, igualando las primeras ecuaciones se obtiene $x = 2y$ e igualando las dos últimas $y = z$. Sustituyendo en la restricción obtenemos

$$x + 2y + 2z = 108 \Longleftrightarrow 2y + 2y + 2y = 108 \Longleftrightarrow 6y = 108 \Longleftrightarrow y = 18$$

de este modo $x = 36$, $z = 18$. Entonces, las dimensiones del paquete con el volumen más grande son $x = 36$ cm , $y = 18$ cm , $z = 18$ cm.

Ejercicio 4.

Consideraremos la función $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ para determinar los máximos y mínimos buscados. Las restricciones del problema estaran dadas por las superficies de nivel,

$$g(x,y,z) := x + y + 2x = 2, \qquad h(x,y,z) := x^2 + y^2 - z = 0.$$

Como la intersección es una elipse, la cual es una región cerrada y acotada, y además la función F es continua, podemos afirmar que el máximo y el mínimo existen.
Luego utilizando el Método de los multiplicadores de Lagrange, el máximo y mínimo pedido deben verificar:

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= 2 \\ h(x,y,z) &= 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

o de manera equivalente,

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda + 2\mu x, \\ 2y &= \lambda + 2\mu y, \\ 2z &= 2\lambda - \mu, \\ x + y + 2z &= 2, \\ x^2 + y^2 - z &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se obtienen por solución los puntos

$$P_1 = (-1,-1,2)\,, \qquad P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Finalmente evaluamos en la función,

$$F(P_1) = 6, \qquad F(P_2) = \frac{3}{4},$$

para concluir que el punto P_1 es el punto mas lejano del origen a distancia $\sqrt{6}$ y que el punto P_2 es el punto más cercano del origen a distancia $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicio 5.

Solución. Tenemos que el volumen es

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy dx \\
&= \int_0^1 \Big[\ln(1+xy) \Big]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\
&= (1+x)\ln(1+x) - (1+x) \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= (2\ln(2) - 2) - (\ln(1) - 1) = 2\ln(2) - 1 \,.
\end{aligned}$$