Ayudantía 2

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Definición: *Sucesiones monótonas.*

- Una sucesión es creciente si se puede demostrar:
$$a_n < a_{n+1} \ \forall \ n \geq 1$$
- Una sucesión es decreciente si se puede demostrar:
$$a_n > a_{n+1} \ \forall \ n \geq 1$$

Definición: *Sucesiones acotadas.*

- Una sucesión está acotada por arriba si hay un M tal que:
$$a_n \leq M \ \forall \ n \geq 1$$
- Una sucesión está acotada por abajo si hay un m tal que:
$$a_n \geq m \ \forall \ n \geq 1$$

Teorema: Si una sucesión es monótona y acotada es convergente.

Definición: Se llama sumas parciales de una serie a la suma de los términos de una serie hasta el n-ésimo término:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Si $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ (numero finito), la serie converge.
- Si$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ o no existe, la serie diverge.

Serie Geométrica: La serie geométrica se define de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

- Converge si $|r| < 1$ y la suma es $\frac{a}{1-r}$.
- Diverge si $|r| \geq 1$.

Teorema: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o no existe, la serie es divergente.

Prueba de la Integral: Si f es continua, positiva y decreciente y $a_n = f(n)$:
Si $\int_n^\infty f(x)dx$ es convergente, $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es convergente. (Lo mismo si es divergente)

Prueba por Comparación: Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$son series con términos positivos:
Si $\sum a_n \leq \sum b_n$ y $\sum_{i=1}^\infty b_n$es convergente, entonces $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es convergente.
Si $\sum a_n \geq\sum b_n$ y $\sum_{i=1}^\infty b_n$es divergente, entonces $\sum_{i=1}^\infty a_n$ es divergente.

1. Determine si la sucesión es creciente o decreciente. ¿Está acotada la sucesión?

   $a)\ a_n = \frac{1}{2n+3}$
   $b)\ b_n = ne^{-n}$

2. Considere la sucesión a_n definida por:

$$a_0 = \sqrt{2}\,;\, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

   a) Demostrar que la sucesión es monótona.
   b) Demostrar que la sucesión es convergente.
   c) Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Determine si la serie es convergente o divergente.

   $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$
   $b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n}{n+1})$

4. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es:

$$\left\{s_n = \frac{n-1}{n+1}\right\}$$

   Determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

5. Para que valores de x la serie converge. Determine la suma de la serie para dicho valor de x.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosx^n}{2^n}$$

6. Estudie la convergencia o divergencia de las siguientes series:

   $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(e^n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
   $b)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$