Ayudantía 7

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Límite de funciones de varias variables: El límite de $f(x_1, x_2)$ cuando (x_1, x_2) tiende a (a_1, a_2) es L se escribe:

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1, x_2) = L$$

No Existencia del límite: Si tomamos una trayectoria $C_1 \neq C_2$ y se cumple que si:
$f(x_1, x_2)$ tiende a L_1 cuando (x_1, x_2) tiende a (a_1, a_2) a lo largo de C_1
$f(x_1, x_2)$ tiende a L_2 cuando (x_1, x_2) tiende a (a_1, a_2) a lo largo de C_2
Si $L_1 \neq L_2$ entonces no existe el límite anterior.

Continuidad: Una función de f de m variables, es continua en (a_1, a_2) si:

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2)$$

Derivadas parciales: Las derivadas parciales para una función de 2 variables se escriben:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$, es la derivada parcial con respecto a x (y es una constante).
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y)$, es la derivada parcial con respecto a y (x es una constante).

Derivadas parciales (punto conflictivo): Se usa por definición.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$

Derivada direccional: Se define la derivada direccional en dirección $\vec{u} = (a, b)$ en el punto (x, y) como:

$$D_u f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h}$$

Vector Gradiente: Se define el vector gradiente como:

$$\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$$

Diferenciabilidad: Se dice que una función es diferenciable en $((a, b)$ si el siguiente límite existe.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - \nabla f(a, b) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|}$$

1. Determine el límite, si es que existe, o demuestre que el límite no existe:

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xycosy}{3x^2+y^2}$

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7}{x^6+y^6}$

   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

   d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$

   e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)sen(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   f) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

2. Calcule las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = (x^2+y^2)sen(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   b) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ (calcule las segundas derivadas parciales)

   c) $f(x,y) = 2xy + x^2y + x + y$

3. Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^7}{x^6+y^6} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Analice la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
   b) Calcule todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.
   c) Analice la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Analice la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
   b) Determine si $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$.

5. Considere la función $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y+1}}$
   a) Determine la ecuación del plano tangente al grafico de f en el punto correspondiente a $(x,y) = (1,3)$.
   b) Estime, justificadamente, el valor de $f(0{,}97; 3{,}05)$.