FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 2

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Definición: ***Sucesiones monótonas.***

- Una sucesión es creciente si se puede demostrar:
$$a_n < a_{n+1} \ \forall \ n \geq 1$$
- Una sucesión es decreciente si se puede demostrar:
$$a_n > a_{n+1} \ \forall \ n \geq 1$$

Definición: ***Sucesiones acotadas.***

- Una sucesión está acotada por arriba si hay un M tal que:
$$a_n \leq M \ \forall \ n \geq 1$$
- Una sucesión está acotada por abajo si hay un m tal que:
$$a_n \geq m \ \forall \ n \geq 1$$

Teorema: Si una sucesión es monótona y acotada es convergente.

Definición: Se llama sumas parciales de una serie a la suma de los términos de una serie hasta el n-ésimo término:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Si $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ (numero finito), la serie converge.
- Si$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ o no existe, la serie diverge.

Serie Geométrica: La serie geométrica se define de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

- Converge si $|r| < 1$ y la suma es $\frac{a}{1-r}$.
- Diverge si $|r| \geq 1$.

Teorema: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o no existe, la serie es divergente.

Prueba de la Integral: Si f es continua, positiva y decreciente y $a_n = f(n)$:

Si $\int_n^{\infty} f(x)dx$ es convergente, $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ es convergente. (Lo mismo si es divergente)

1. Considere la sucesión a_n definida por:

$$a_1 = 2 \,; a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

   a) Demostrar que la sucesión es monótona.
   b) Demostrar que la sucesión es convergente.
   c) Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y distinta de 0. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es divergente.

3. Determine si la serie es convergente o divergente.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}}$$

4. Para que valores de x la serie converge. Determine la suma de la serie para dicho valor de x.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{2^n}$$

5. Encuentre todos los valores de C para los cuales la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n} - \frac{1}{n+1}$$