Pontificia Universidad Católica Chile
Facultad de Matemáticas - Mat1620
Profesor: Natham Aguirre
Ayudante: Francisco Rubio (fvrubio@uc.cl)

Ayudantía 1

Integrales impropios tipo I y II, teorema de coomparación

Integrales impropias tipo I: Intervalos infinitos

Definición 1.1

1. Si la función $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a,c]$, para todo $c \in [a,+\infty[$, entonces definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx,$$

cuando este límite existe.

2. Si la función $f :]-\infty,a] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[c,a]$ para todo $c \in]-\infty,a]$, entonces definimos:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,dx,$$

cuando este límite existe.

3. Si la función $f :]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R}$ es tal que para algún $a \in \mathbb{R}$ existen las dos integrales impropias $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, entonces definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Esta integral también puede denotarse como $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

Teorema 1.1 (Criterio de Comparación)

Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones continuas, positivas y tales que $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \geqslant a$. Entonces se tiene que:

- Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Teorema 1.2 (Criterio de comparación al límite)

Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones continuas, positivas y supongamos que

$$K = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

. Entonces, para $x \geqslant a$ tenemos que:

- Si $K \neq 0$, entonces ambas integrales impropias sobre $[a,+\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

convergen o ambas divergen.
- Si $K = 0$, entonces la convergencia de $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ implica la convergencia de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.
- Si $K = +\infty$, entonces la divergencia de $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ implica la divergencia de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Integrales impropias de tipo II: Integrandos discontinuos

Definición 1.2

1. Si $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ es una función tal que, para todo $c \in]a,b[$, f es integrable en $[c,b]$, entonces se define

$$\int_{a^+}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx,$$

cuando este límite existe.

2. Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ es una función tal que, para todo $c \in]a,b[$, f es integrable en $[a,c[$, entonces se define

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx,$$

cuando este límite existe.

Ejercicios integrales impropios

Si $a > 0$ y $p \in R$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p \leqslant 1 \end{cases}$$

Ejercicio 1. Analice la convergencia de la siguiente integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+x}\, dx.$$

Ejercicio 2. Analice la convergencia.

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\, dx.$$

Ejercicio 3. Analice la convergencia.

$$\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

Ejercicio 4. Analice la convergencia.

$$\int_0^{3} \frac{dx}{x^2-6x+5}$$

Ejercicio 5. Si $f'(x)$ es continua en $[0,+\infty[$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, muestre que

$$\int_0^{\infty} f'(x) = -f(0)$$

Ejercicio 6. Analice la convergencia de la siguiente integral. En caso que sea convergente, calcule su respectivo valor.

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

Ejercicio 7. Determine si la siguiente integral impropia converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2} dx$$

Ejercicio 1.

$\boxed{1}$ $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+x}\,dx$

$I = \int_1^{\infty} \frac{\cancel{x+1}}{x\,(\cancel{x+1})}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \ln(c) - \ln(1)$

$I = \ln(\infty) - 0 = \infty$, Diverge.

Ejercicio 2.

21. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t \quad \left[\begin{array}{l}\text{by substitution with}\\ u=\ln x,\ du = dx/x\end{array}\right] \quad = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty.$ Divergent

Ejercicio 3.

40. Integrate by parts with $u = \ln x$, $dv = dx/\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $du = dx/x$, $v = 2\sqrt{x}$.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left(\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_t^1 - 2\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(-2\sqrt{t}\,\ln t - 4\left[\sqrt{x}\right]_t^1\right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \left(-2\sqrt{t}\,\ln t - 4 + 4\sqrt{t}\right) = -4$$

since $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\,\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{t^{-1/2}} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-t^{-3/2}/2} = \lim_{t\to 0^+}\left(-2\sqrt{t}\right) = 0.$ Convergent

Ejercicio 4.

35. $\displaystyle I = \int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)(x-5)} = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-5)} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)(x-5)}.$

Now $\displaystyle\frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} \quad\Rightarrow\quad 1 = A(x-5) + B(x-1).$

Set $x=5$ to get $1 = 4B$, so $B = \frac14$. Set $x = 1$ to get $1 = -4A$, so $A = -\frac14$. Thus

$$I_1 = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \left(\frac{-\frac14}{x-1} + \frac{\frac14}{x-5}\right)dx = \lim_{t\to 1^-}\left[-\frac14 \ln|x-1| + \frac14 \ln|x-5|\right]_0^t$$
$$= \lim_{t\to 1^-}\left[\left(-\tfrac14\ln|t-1| + \tfrac14\ln|t-5|\right) - \left(-\tfrac14\ln|-1| + \tfrac14\ln|-5|\right)\right]$$
$$= \infty, \quad \text{since} \lim_{t\to 1^-}\left(-\tfrac14 \ln|t-1|\right) = \infty.$$

Since I_1 is divergent, I is divergent.

Ejercicio 5.

Si f' es continua en $[0,+\infty[$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, muestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = -f(0)$.

Solución. Usando el Teorema fundamental del Cálculo, vemos que

$$\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}[f(b) - f(0)] = \lim_{b\to\infty} f(b) - f(0) = 0 - f(0) = -f(0)\,.$$

Ejercicio 6.

Trateremos de calcular el valor de la integral dada. Para ello, haciendo uso de la difinición, se tiene que

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^{c} xe^{-x^2}\,dx$$

haciendo la sustitución $u = -x^2$ se tiene que

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^{c} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\frac{-1}{2}\left(e^{-c^2/2}-1\right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto la integral es convergente y su valor es el calculado.

Ejercicio 7.

La integral $\int_1^{+\infty}\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2}\,dx$ es convergente.
Usando el criterio de comparación, tenemos:

$$|\operatorname{sen}(x)| \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int_1^{+\infty}\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Como $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ es convergente, la integral dada inicialmente también converge.