Pontificia Universidad Católica Chile
Facultad de Matemáticas - Mat1620
Profesor: Natham Aguirre
Ayudante: Francisco Rubio (fvrubio@uc.cl)

Ayudantía 9

Repaso I2

Derivadas parciales

$\boxed{4}$ Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y, definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Teorema de Clairaut

Teorema de Clairaut Suponga que f está definida sobre un disco D que contiene el punto (a, b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas sobre D entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Ecuación plano tangente

$\boxed{2}$ Suponga que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sea F diferenciable en un punto $(x, y, z) = (a, b, c)$, una ecuación del plano tangente a la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ en (a, b, c) es

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

Caso 1 regla de la cadena

$\boxed{2}$ **Regla de la cadena (caso 1)** Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Caso 2 regla de la cadena

$\boxed{3}$ **Regla de la cadena (caso 2)** Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Caso generalizado regla de la cadena

4 **Regla de la cadena (versión general)** Supongamos que u es una función derivable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ejercicios

1. Considere $u(r,s) = f\left(r^2+s^2, 2rs\right)$, donde f es una función dos veces derivable. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s}$, en términos de las derivadas parciales de f

2. Sean $z = x^3y^3, x = s\cos(t), y = s\,\mathrm{sen}(t)$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$

3. Si $x - z = \arctan(yz)$, calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

4. Calcule la suma de la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}\cdot(2n)!}$$

5. Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el radio de convergencia.
$$f(x) = \ln(5-x)$$

6. Calcule el radio y el intervalo de convergencia para la serie de potencias
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(n+\sin(n))x^n}{n^2+n}$$
especificando con claridad qu ?e pasa en los extremos del intervalo.

7. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus afirmaciones.

   a) El plano tangente a la superficie $z = y\cos(x/2)$ en el punto $(\pi, 1, 0)$ tiene ecuación $2z + x = 2$.

   b) El punto $(-1, 2)$ pertenece a la curva de nivel $k = 9$ de la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

   c) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ es convergente entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ tambien es convergente.