Ayudantía 3

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Definición: Se llama sumas parciales de una serie a la suma de los términos de una serie hasta el n-ésimo término:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Si $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ (número finito), la serie converge.
- Si $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ o no existe, la serie diverge.

Serie Geométrica: La serie geométrica se define de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \ o \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

- Converge si $|r| < 1$ y la suma es $\frac{a}{1-r}$.
- Diverge si $|r| \geq 1$.

Teorema: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o no existe, la serie es divergente.

Teorema: Si la serie a_n es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prueba de la integral: Si f es continua, positiva y decreciente y $a_n = f(n)$:
Si $\int_0^{\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente (lo mismo si es divergente).

Prueba por Comparación: Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos:
Si $\sum a_n \leq \sum b_n$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
Si $\sum a_n \geq \sum b_n$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

1. El significado de un numero decimal $0.d_1d_2d_3$ ... (donde el digito d_i es uno de los números $\{0,1,2,\ldots,9\}$ es que

$$0.d_1d_2d_3,\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente. ***Hint:*** Demuestre que la suma parcial es monótona creciente y acotada.

2. Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$a) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$

$b) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)e^n}$

$c) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nsen(\frac{1}{n})$

$d) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2-1}$

3. Determine para que valores de p la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p}$$

4. Determine si son convergentes las siguientes series:

$a) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

$b) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

$c) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

$d) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$