Pontificia Universidad Católica Chile
Facultad de Matemáticas - Mat1620
Profesor: Natham Aguirre
Ayudante: Francisco Rubio (fvrubio@uc.cl)

Ayudantía 11

Multiplicadores de Lagrange

Método de los multiplicadores de Lagrange Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso a). El más grande de estos valores es el valor máximo de f, el más pequeño es el valor mínimo de f.

Caso con 2 restricciones

Sumando la restricción $h(x, y, z) = c$, obtenemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$. Lo que lleva a resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x + \mu h_x \\ f_y &= \lambda g_y + \mu h_y \\ f_z &= \lambda g_z + \mu h_z \\ g(x,y,z) &= k \\ h(x,y,z) &= c \end{aligned}$$

Definición Integral doble

La integral doble de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A$$

si el limite existe

Valor promedio

Se define el valor promedio de una función f de dos variables de - finidas sobre un rectángulo R como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)dA$$

donde A(R) es el área de R

Teorema de Fubini

$\boxed{4}$ **Teorema de Fubini** Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que f está acotada sobre R, f es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy \quad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]$$

Ejercicios

1. $(I_2 : P6 \quad 2018 - 1)$ Determine y clasifique los puntos críticos de la función

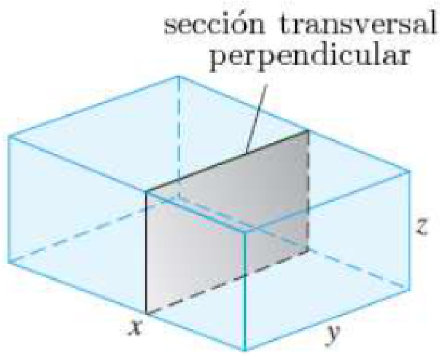
$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

2. $(I_2 : P7 \quad 2018 - 1)$ Determine los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$$

definida sobre el triángulo de vértices $(1, 0), (5, 0), (1, 4)$

3. $(I_2 : P8 \quad 2017 - 1)$ Un paquete en forma de una caja rectangular se puede enviar a través de servicio postal si la suma de su largo y el perimetro de una seción transversal perpendicular al largo es 108cm como máximo.



Calcule las dimensiones del paquete con el volumen más grande que se puede enviar por paquete postal. Justifique su respuesta.

4. $(I_3 : P6 \quad 2018 - 2)$ El plano $x + y + 2z = 2$ al intersectar al paraboloide $z = x^2 + y^2$ determina una elipse. Encuentre los puntos de la elipse que se encuentran mas cercanos y mas lejanos del origen.

5. $(I_3 : P6 \quad 2016 - 1)$ Calcule el volumen del sólido delimitado por los planos $x = 0, x = 1, y = 0$ e $y = 1, z = 0$ y la superficie dada por $z = \frac{x}{1+xy}$