Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Primer Semestre del 2025

Ayudantía 3

Cálculo 2

Problema 1

Determine si las siguientes series convergen.

a) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\left(n^3-1\right)(n+1)}{(n-4)(n^5-8)}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

c) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

Problema 2

Aproxime la serie por sus primeros cinco términos, estime el error y determine cuantos terminos se deben sumar para obtener un error absoluto menor a 0.0001.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

Problema 3

Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \neq 0$ entonces $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ diverge.

Problema 4*: Conjunto de Cantor Generalizado

Sea $0 < \gamma < 1$. El conjunto de Cantor C_γ se construye de la siguiente forma:
Comenzamos con el intervalo cerrado $[0,1]$. En el primer paso, removemos el intervalo abierto de largo γ, situado en el centro del intervalo. Esto deja dos intervalos, $\left[0, \frac{1-\gamma}{2}\right]$ y $\left[\frac{1+\gamma}{2}, 1\right]$. En el segundo paso, eliminamos el intervalo abierto central de largo γ de cada uno de estos intervalos. Continuamos este procedimiento de manera indefinida, eliminando en cada paso el intervalo abierto central de largo γ de cada intervalo restante. El conjunto C_γ consiste en los números que permanecen en $[0,1]$ después de eliminar todos estos intervalos.

1. Demuestre que la longitud de todos los intervalos eliminados es 1.

2. ¿Puede C_γ contener un intervalo abierto?

3. (Propuesto) Demuestre que C_γ contiene infinitos puntos.

Problema 5

Determine los valores de p para los cuales la siguiente serie converge,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln{(n)}^p}.$$

Problemas propuestos

Problema Propuesto 1

Sea $n \in \mathbb{N}$ y considere la sucesión

$$x_k = \sqrt{\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} ne^{-nt} dt}.$$

Muestre que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converge.

Problema Propuesto 2

Use el criterio de comparación para determinar si las siguientes integrales convergen o divergen

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}}\, dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{2+e^x}\, dx.$