Pauta Interrogación 2

Problema 1

(a) **(3pts)** Determine si la serie $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ es condicionalmente convergente, absolutamente convergente ó divergente.

(b) **(3pts)** Considere la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 - \arctan(n^2)}{\sqrt{n}} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o no.

Solución

(a) Notemos que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Definiendo $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$b_{n+1} \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Por lo tanto, el criterio de la serie alternante implica que la serie $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Por otro lado,

$$\sum_{n=10}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

la cual es divergente dado que $\frac{1}{2} \leq 1$. En conclusión, la serie $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ es condicionalmente convergente.

(b) Notemos que $0 \leq \arctan(n^2) \leq \frac{\pi}{2} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto

$$\frac{2 - \arctan(n^2)}{\sqrt{n}} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que $a_1 = 1$, por inducción se deduce fácilmente que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o no, utilizaremos el criterio de la razón. Para ello, calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \arctan(n^2)}{\sqrt{n}} = 0,$$

donde usamos que $\lim_{n\to\infty} \arctan(n^2) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ y álgebra de límites. Como $0 < 1$, deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Problema 2

(a) **(2pts)** Determine el dominio de la función definida por

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

(b) **(2pts)** Considere la serie de potencias

$$T(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$ (lo cual no debe demostrar). Escriba T como una suma infinita y muestre que satisface la ecuación

$$T''(x) - T(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Considere la función h definida por

$$h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

(i) **(1pt)** Sabiendo que $h^{(n)}$ es una función continua en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deduzca que $h^{(n)}(1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\star$**(ii)** **(1pt)** ¿Existe un radio $R > 0$, para el cual h puede ser representada como su serie de Taylor en $x = 1$, es decir,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n, \quad \text{para } |x-1| < R?$$

Justifique su respuesta.

Solución

(a) Para determinar el dominio de f, debemos encontrar los x's en $\mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$ converge. Claramente para $x = 0$ la serie converge. Para $x \neq 0$, analizaremos la convergencia de la serie utilizando el criterio de la razón.

Usando que $(n+1)! = (n+1)n!$, tenemos, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (fijo),

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{((n+1)!)^2 2^{2(n+1)}}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(n+1)^2 2^2} = 0.$$

Por lo tanto, como $0 < 1$, por el criterio de la razón concluimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) Notar que

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Luego,

$$T'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

y

$$T''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = T(x).$$

Por lo tanto, $T''(x) - T(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) **(i)** Sea $n \in \mathbb{N}$. Notar que $\lim_{x\to 1^+} h^{(n)}(x) = 0$. Luego, como $h^{(n)}$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, $h^{(n)}(1) = \lim_{x\to 1} h^{(n)}(x) = \lim_{x\to 1^+} h^{(n)}(x) = 0$.

(ii) No, no existe $R > 0$ tal que

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n, \quad \text{para } |x-1| < R. \tag{1}$$

Por la parte **(i)**, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, como $h(x) > 0$ para $x \in (-1,1)$, si existiera un $R > 0$ tal que (1), necesariamente $h(x) = 0$ para algún $x \in (-1,1)$, lo cual es una contradicción.

Problema 3

(a) **(3pts)** Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Usando la identidad

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ vectores en } \mathbb{R}^3,$$

deduzca que

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) + \vec{v}_2 \times (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) + \vec{v}_3 \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0.$$

(b) **(3pts)** Determine la ecuación del plano que es perpendicular a los planos

$$2x - y + 5z = 28 \quad \text{y} \quad x + 3y - z = 7$$

y cuya intersección con estos planos es $(-1, 5, 7)$.

Solución

(a) Usando la identidad, tenemos que

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) &= (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3 \\
\vec{v}_2 \times (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) &= (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_3 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) &= (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_1 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando obtenemos

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) + \vec{v}_2 \times (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) + \vec{v}_3 \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \\
&\qquad = \left[(\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2) - (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)\right]\vec{v}_1 + \left[(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3) - (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\right]\vec{v}_2 + \left[(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\right]\vec{v}_3 = 0,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad utilizamos la conmutatividad del producto punto.

(b) Notemos que $\vec{u} := \langle 2, -1, 5\rangle$ y $\vec{v} := \langle 1, 3, -1\rangle$ son vectores normales a los planos $2x - y + 5z = 28$ y $x + 3y - z = 7$ respectivamente. Además, el vector $\vec{w} := \vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$. Por cálculo directo, tenemos

$$w = \vec{u} \times \vec{v} = \langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1\rangle = \langle -14, 7, 7\rangle,$$

por lo que el plano de ecuación

$$-14x + 7y + 7z + d = 0,$$

para cualquier $d \in \mathbb{R}$ (fijo) es ortogonal a los planos $2x - y + 5z = 28$ y $x + 3y - z = 7$. Finalmente, como el plano buscado pasa por el punto $(-1, 5, 7)$, encontramos d imponiendo que

$$-14(-1) + 7(5) + 7(7) + d = 0 \implies d = -98.$$

La ecuación del plano buscado es entonces

$$-14x + 7y + 7z - 98 = 0.$$

Asignación de puntajes

Problema 1

(a) **(i)** **(0.5pts)** Escribe la serie como una serie alternante.

(ii) **(1pt)** Aplica correctamente el criterio de la serie alternante (verificando sus hipótesis) para concluir que la serie es convergente.

(iii) **(1pt)** Deduce correctamente que la serie no converge de manera absoluta.

(v) **(0.5pts)** Concluye que la serie es condicionalmente convergente.

(b) **(i)** **(0.5pts)** Argumenta que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (o bien que es distinto de 0 para todo $n \in \mathbb{N}$).

(ii) **(1pt)** Utiliza el criterio de la razón para analizar la convergencia de la serie y concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\arctan(n^2)}{\sqrt{n}}$.

(iii) **(1pt)** Calcula correctamente el límite anterior utilizando propiedades de los límites.

(iv) **(0.5pts)** Deduce que la serie es convergente.

Problema 2

(a) **(i)** **(0.2pts)** Indica que la serie converge cuando $x = 0$.

(ii) **(0.7pt)** Utiliza el criterio de la razón para analizar la convergencia de la serie y concluye que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(n+1)^2 2^2}$.

(iii) **(0.5pts)** Concluye que el límite anterior es 0 para cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(iv) **(0.3pts)** Deduce que la serie es convergente para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

(v) **(0.3pts)** Deduce que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) **(i)** **(0.5pts)** Escribe la serie como una suma infinita.

(ii) **(0.5pts)** Calcula correctamente $T'(x)$.

(iii) **(0.5pts)** Calcula correctamente $T''(x)$.

(iv) **(0.5pts)** Deduce que $T''(x) - T(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) (i)

1. **(0.5pts)** Justifica que $\lim_{x\to 1^+} h^{(n)}(x) = 0$.
2. **(0.5pts)** Utiliza correctamente la continuidad de $h^{(n)}$ y lo anterior para deducir que $h^{(n)}(1) = 0$.

(c) $\star$(ii)

1. **(0.2pts)** Identifica que la serie de Taylor de h en $x = 1$ es la serie nula.
2. **(0.2pts)** Indica que $h(x) > 0$ para todo $x \in (-1, 1)$.
3. **(0.6pts)** Justifica correctamente a partir de lo anterior que no existe $R > 0$ para el cual se satisface la igualdad del enunciado.

Problema 3

(a) **(i)** **(1pt)** Aplica correctamente la identidad para escribir los 3 productos cruz triples.

(ii) **(1pt)** Suma correctamente las expresiones de los 3 productos cruz triples.

(iii) **(1pt)** Concluye que la suma es 0 utilizando la conmutatividad del producto punto.

(b) **(i)** **(0.5pts)** Identifica los vectores normales $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a los planos $2x-y+5z=28$ y $x+3y-z=7$.

(ii) **(1pt)** Calcula $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, señalando que el vector resultante es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(iii) **(0.5pts)** Indica que el plano de ecuación $-14x+7y+7z+d=0$ es ortogonal a los planos $2x-y+5z=28$ y $x+3y-z=7$, para cualquier $d\in\mathbb{R}$.

(iv) **(0.5pts)** Calcula d a partir del hecho que el plano buscado pasa por el punto $(-1,5,7)$.

(v) **(0.5pts)** Encuentra la ecuación del plano buscado.