Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Primer Semestre del 2025

Solución de algunos problemas Ayudantía 1

Cálculo 2

Problema 5

Use el criterio de comparación para determinar si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}dx.$$

Respuesta

Para esta integral, primero tenemos que fijarnos que ese $+1$ en el denominador significa que no tenemos problemas con 0 y sólo con ∞. Por tanto, primero separar la integral en dos:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} = \int_1^\infty \frac{x}{x^3+1} + \int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}$$

La primera integral no tiene problemas, pero ahora debemos analizar la segunda. Podemos hacer la siguiente comparación en el dominio $(1, \infty)$

$$x^3+1 \geq x^3 \implies \frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^3} \implies \frac{x}{x^3+1} \leq \frac{x}{x^3}.$$

Ahora, podemos aplicar integral, donde se mantiene la desigualdad:

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1} \leq \int_1^\infty \frac{x}{x^3}.$$

Al tener que la integral de la derecha converge (test $p > 1$), la integral original también converge.

Problema 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

   Hint: *Integre por partes, utilizando* $1-\cos x$ *como antiderivada para* $\sin x$*.*

2. **Propuesto:** Utilice lo anterior para mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)dx$ es convergente.

Respuesta

Utilizando integración por partes tenemos:

$$u = \frac{1}{x} \qquad\qquad dv = \sin x\,dx$$
$$du = -\frac{1}{x^2}\,dx \qquad\qquad v = 1-\cos x$$

Luego:

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^t + \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

Veamos en primer lugar la convergencia de la integral. Notemos que, para $x \geq 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq 1-\cos x \leq 2 \\
\iff\quad & 0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2} \\
\implies\quad & \int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ converge por la prueba de comparación. Por otro lado, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ converge pues $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ es continua y acotada en $(0,1]$, y $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, luego la integral no es impropia y, por tanto, converge. Se sigue que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ converge.
Para analizar la convergencia del límite restante, la evaluación en $x=0$ se debe analizar con límite pues la función no está definida en ese punto:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\frac{1-\cos t}{t} - \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x}$$

El primer límite es 0 por teorema del sándwich, y el segundo también es 0 utilizando límites trigonométricos.
Finalmente se concluye que la integral inicial es convergente.

Respuesta Propuesto

Considere la sustitución $u = x^2 \iff \sqrt{u} = x$, luego $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$. Los límites de integración quedan igual, por lo que tenemos:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

Integrando por partes, de manera similar al ejercicio anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{u}} & ds &= \sin u \, dx \\ dr &= -\frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}\, dx & s &= 1 - \cos u \end{aligned}$$

Luego, reemplazando:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \frac{1-\cos t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^+} \frac{1-\cos u}{\sqrt{u}} + \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\, du \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\, du \end{aligned}$$

Los límites son 0 por la misma idea del ejercicio anterior. Por un argumento similar, la integral que queda es convergente.

Problema 7**

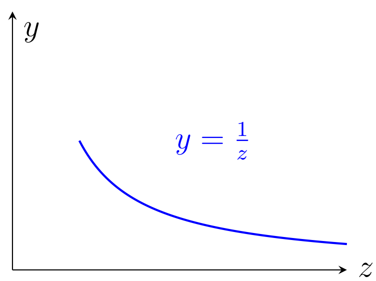
Considere la superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ descrita por la ecuación

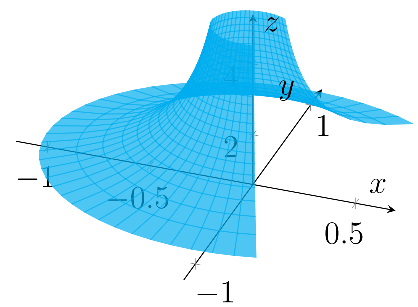
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{z^2}, \quad z \geq 1.$$

Calcule su área y el volumen que encierra. A esta superficie se le conoce como *cuerno de Gabriel* o *la trompeta de Torricelli*. ¿Cómo pintaría el interior de esta figura?

Respuesta

La forma de poder atacar este problema es tratando de entender la superficie como una superficie de revolución, al notar que es simétrica respecto al eje z. Al hacerlo, podemos determinar que la superficie se puede obtener al rotar la curva $y = \frac{1}{z}$ en el plano yz alrededor del eje z.





Para poder calcular el área de la superficie, podemos usar la fórmula de la superficie de revolución (respecto al eje z), generada por la curva $y = \frac{1}{z}$ en el intervalo $(1, \infty)$:

$$A_z = 2\pi \int_a^b z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\, dz \Longrightarrow \lim_{s\to\infty} 2\pi \int_1^s z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{z^2}\right)^2}\, dz$$

$$= \lim_{s\to\infty} 2\pi \int_1^s z \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{z^4}}\, dz = \lim_{s\to\infty} 2\pi \int_1^s \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}\, dz$$

Podemos ocupar la siguiente desigualdad:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} > \frac{1}{z^2} \Longrightarrow \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} > \sqrt{\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z}$$

Por lo que:

$$A_z = \lim_{s\to\infty} 2\pi \int_1^s \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}\, dz > \lim_{s\to\infty} 2\pi \int_1^s \frac{1}{z}\, dz = \lim_{s\to\infty} 2\pi \ln(s) = \infty$$

Por tanto, concluimos que $A_z = +\infty$.
Por otro lado, para calcular volumen, podemos ocupar volumen de sólido de revolución a través de secciones transversales. Recordando Cálculo 1, notamos que cada segmento lo podemos determinar como un disco, tal que su radio es igual al valor de la función. Por tanto, se tiene:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx = \lim_{s\to\infty} \pi \int_1^s \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{s\to\infty} \pi \int_1^s \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{s\to\infty} \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{s^2} = \pi.$$

Por tanto, concluimos que el volumen de la superficie es π.

Con esto, tendríamos una superficie con volumen finito y área infinita, por lo que no podríamos pintar con una cantidad finita *con una brocha* o de forma *secuencial*, pero sí se puede al vertir un balde de pintura de volumen $V > \pi$ encima.

Problema 8**

Sea $\alpha > 0$. Muestre que la siguiente integral impropia no converge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx.$$

Más aún, muestre que si f y g son funciones crecientes, que no se anula, y tal que $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx,$$

de existir, puede ser cualquier número real, -∞, o ∞, dependiendo de f y g. ¿En qué caso es 0?

Respuesta

Se puede ver que la integral no converge ocupando comparación al límite. Primero, sacando las constantes y separando intervalos, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx = \frac{\alpha}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{\alpha^2 + x^2}\ dx. + \int_{1}^{\infty} \frac{x}{\alpha^2 + x^2}\ dx.\right]$$

Podemos definir nuestra función $f(x) = \alpha x/(\alpha^2 + x^2)$, y una segunda función $g(x) = 1/x$. Comparando para la integral de la derecha, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\alpha^2 + x^2} \div \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\alpha^2}{x^2} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1,$$

por lo que tienen el mismo comportamiento al infinito. Como $g(x) = 1/x$ diverge, entonces la integral también diverge y por tanto en el intervalo completo debe diverger.

Para nuestro segundo caso, se tiene que:

$$\int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{d(\alpha^2 + x^2)}{\pi(\alpha^2 + x^2)} = \frac{\alpha}{2\pi}\left[\ln(\alpha^2 + x^2)\right]_{-f(t)}^{g(t)} = \frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{\alpha^2 + g^2(t)}{\alpha^2 + f^2(t)}\right).$$

Si podemos definir c tal que $g(t) = c \cdot f(t)$, $I(t) = \frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{\alpha^2 + c^2 f^2(t)}{\alpha^2 + f^2(t)}\right)$, entonces se tiene que:

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{\alpha^2 + c^2 f^2(t)}{\alpha^2 + f^2(t)}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{\frac{\alpha^2}{f^2(t)} + c^2}{\frac{\alpha^2}{f^2(t)} + 1}\right) = \frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(c^2\right) = \frac{\alpha}{\pi}\ln(c).$$

Luego, para cualquier $u \in \mathbb{R}$, donde elegimos $c = e^{\frac{\pi}{2}u}$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx = \frac{\alpha}{\pi}\ln(e^{\frac{\pi}{2}u}) = u,$$

por lo que el límite puede ser cualquier número real, dependiendo de f y g. Más aún, si $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = \infty$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{\alpha^2 + g^2(t)}{\alpha^2 + f^2(t)}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{\pi}\ln\left(\frac{g(t)}{f(t)}\right) = \infty.$$

y si $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 0$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{g(t)}{f(t)}\right) = -\infty.$$

Si es que $f(t) = g(t)$ en el límite ($\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 1$), y reconociendo que el interior es una función impar, entonces la integral es la da una función impar en un intervalo simétrico:

$$\int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\ dx = 0$$

Finalmente, al reconocer el patrón, nos importa más que todo el *qué tan rápido crecen una función con respecto a la otra*. Si g mucho más lento, algo más lento, de igual manera, algo más rápido, o mucho más rápido en comparación con f, entonces el límite será -∞, $u \in (-\infty, 0)$, 0, $u \in (0, \infty)$,∞, respectivamente. Incluso, podría pasar que el límite directamente no exista. Podemos observar esto de manera más clara en la forma de límites:

$$\begin{array}{rcc}
\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 0 & \implies & \lim_{t\to\infty} I(t) = -\infty, \\
\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = c \in (0,1) & \implies & \lim_{t\to\infty} I(t) = u \in (-\infty, 0), \\
\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = 1 & \implies & \lim_{t\to\infty} I(t) = 0, \\
\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = c \in (0,1) & \implies & \lim_{t\to\infty} I(t) = u \in (0, \infty), \\
\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = \infty & \implies & \lim_{t\to\infty} I(t) = \infty. \\
\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = \text{no existe} & \implies & \lim_{t\to\infty} I(t) = \text{no existe}.
\end{array}$$