Pontificia Universidad Católica Chile
Facultad de Matemáticas - Mat1620
Profesor: Natham Aguirre
Ayudante: Francisco Rubio (fvrubio@uc.cl)

Ayudantía 8

Derivadas parciales, regla de la cadena

Derivadas parciales

$\boxed{4}$ Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y, definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Teorema de Clairaut

Teorema de Clairaut Suponga que f está definida sobre un disco D que contiene el punto (a, b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas sobre D entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Ecuación plano tangente

$\boxed{2}$ Suponga que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sea F diferenciable en un punto $(x, y, z) = (a, b, c)$, una ecuación del plano tangente a la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ en (a, b, c) es

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

Caso 1 regla de la cadena

$\boxed{2}$ **Regla de la cadena (caso 1)** Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Caso 2 regla de la cadena

$\boxed{3}$ **Regla de la cadena (caso 2)** Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Caso generalizado regla de la cadena

$\boxed{4}$ **Regla de la cadena (versión general)** Supongamos que u es una función derivable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ejercicios

1. Determine el conjunto de puntos en los cuales la función $f(x,y)$ es continua

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Calcule $f_x(x,y)$
   b) Calcule $f_{xy}(0,0)$
   c) ¿Es continua, $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$?

3. Considere la superficie de ecuación,

$$x^3 + 2y^3 + z^3 + 6xyz = -17$$

   Determine la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,-2)$.

4. Considere la gráfica de la función

$$z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7$$

   Determine los puntos P, sobre la gráfica dada, de modo que el plano tangente en P sea perpendicular a la recta de ecuación

$$l(t) = (1,2,3) + t(6,4,-1)$$

5. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en el punto $(2,1)$. Utilice sto para estimar el valor de $f(1,95;1,08)$.

6. Considere $u(r,s) = f\left(r^2+s^2, 2rs\right)$, donde f es una función dos veces derivable. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s}$, en términos de las derivadas parciales de f

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 1$$

$$f_i^{caract}$$