# Ayudantía 13

Calculo II - MAT1620

**Cambio a Coordenadas Polares:**

Si $f$ es continua en un rectángulo polar $R = \{(r,\theta)|a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$$

Si $f$ es continua en una región polar $D = \{(r,\theta)|h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$$

**Momento y Centro de masa:** Sea una región $D$ con densidad variable $\rho(x,y)$, entonces las coordenadas del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)dA\,, M_y = \iint_D x\rho(x,y)dA\,, m = \iint_D \rho(x,y)dA$$

$$M_x = Momento\ con\ respecto\ al\ eje\ x$$
$$M_y = Momento\ con\ respecto\ al\ eje\ y$$
$$m = Masa\ de\ la\ region\ D$$

**Momento de inercia:** Sea una región $D$ con densidad variable $\rho(x,y)$, entonces

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dA\,, I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dA\,, I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dA$$

$$I_x = Momento\ de\ inercia\ con\ respecto\ al\ eje\ x$$
$$I_y = Momento\ de\ inercia\ con\ respecto\ al\ eje\ y$$
$$I_0 = Momento\ de\ inercia\ con\ respcto\ al\ origen\ o\ momento\ polar\ de\ inercia$$

1. Calcule

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA$$

Donde $D$ es el disco $x^2+y^2 \leq 1$.

2. Calcule el volumen del sólido delimitado por:
   a) Los planos $x=0, x=1, y=0$ $e$ $y=1, z=0$ $y$ $z=\frac{x}{1+xy}$.
   b) El plano $x+2y-z=0$ por arriba y por abajo por la región acotada por $y=x, y=x^4$.

3. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2+y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante. Encuentre su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje $x$.

4. Halle el centro de masa de una lámina en la forma de triángulo isósceles recto con lados iguales de longitud $a$ si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto a la hipotenusa.

5. Considere un aspa cuadrada con lados de longitud $2$ y la esquina inferior izquierda colocada en el origen. Si la densidad del aspa es $\rho(x,y)=1+0.1x$. ¿Es más difícil girar el aspa respecto al eje $x$ o el eje $y$? Encuentre el radio de giro con respecto a los ejes coordenados.