Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo semestre de 2021

MAT1620 – Cálculo II

Interrogación N° 2

1. *a*) Sea $b > 0$. Exprese la función $\ln(1 + bx^2)$ como una serie de potencias centrada en cero y encuentre su radio de convergencia.

   b) Analice la existencia de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2}$. Justifique su respuesta.

2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \sqrt{2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$.

   a) **(1 pt)** Determine el dominio de $f(x,y)$.

   b) **(1 pt)** Bosqueje el dominio de $f(x,y)$.

   c) **(2 pts)** Bosqueje las curvas de nivel de alturas 0 y $\sqrt{2}$ de f; es decir, las curvas de nivel para los valores $k = 0$ y $k = \sqrt{2}$.

   d) **(2 pts)** Bosqueje las curvas de nivel de altura 0 de la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $g(x,y) = \operatorname{sen}(\pi f(x,y))$.

3. Considere la función diferenciable$f(x,y) = 1 - xy\cos(\pi y)$.

   a) **(4 pts)** Sea π_1 el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(2,1)$. Determine las ecuaciones paramátricas de la recta que pasa por el punto $(1,-1,0)$ y es perpendicular al plano π_1.

   b) **(2 pts)** Utilice el plano tangente en un punto apropiado para aproximar $f(2.02\ ,\ 0.97)$.

4. *a*) Sean g una función diferenciable con derivadas parciales constantes y $f(x,y) = g(x\cos(y), x\sin(y))$. Demuestre que $h(x,y) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ no depende de y.

   b) Sea $z = z(x,y)$ la superficie determinada implicitamente por la ecuación $2x^2 + y^2 + 3xz^2 + yz = 5$ cerca del punto $(1,-1,1)$. Calcule la derivada direccional de $z(x,y)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (1,2)$ en el punto $(1,-1)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} + x - 2y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Calcule la derivada direccional $D_{\hat{u}}f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\hat{u} = (a,b)$, donde $b \neq 0$.

   b) Calcule las derivadas parciales de f en el punto $(-1,1)$.

   c) Decida si existe alguna dirección en que la derivada direccional de f a partir del punto $(-1,1)$ sea igual a 3? Justifique.