Ayudantía 7

Calculo II - MAT1620

Francisco Salinas (fvsalinas@uc.cl)

Regla de la cadena:

Caso 1: z es una función de x e y y a su vez x e y son funciones de t. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Caso 2: z es una función de x e y y a su vez x e y son funciones de s y t. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Derivada direccional: Se define la derivada direccional en la dirección $\vec{u} = (a,b)$ en el punto (x,y) como

$$\mathrm{D_u} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x,y)}{h}$$

Puntos Críticos: Son todos los (x,y) que cumplen:

$$\nabla f(x,y) = 0$$

Matriz Hessiana: Sea (x_0, y_0) un punto crítico de $f(x,y)$. Se define la matriz hessiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Llamamos D al determinante de la matriz.

- Si el $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, (x_0,y_0) es mínimo relativo.
- Si el $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, (x_0,y_0) es máximo relativo.
- Si el $D > 0$, (x_0,y_0) es un punto silla.

1. Si $z = f(x,y)$, donde f es diferenciable.

$$x = g(t), y = h(t), g(3) = 3, h(3) = 7, g'(3) = 5, h'(3) = -4, f_x(2{,}7) = 6. f_y(2{,}7) = -8$$

Determine $\frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $t = 3$.

2. Si $u = f(x,y)$, donde $x = e^s cost$ y $y = e^s sent$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

3. La temperatura en un punto (x,y,z) está dada por

$$T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

donde T se mide en °C y x, y, z en metros.

a) Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(2,-1{,}2)$ en la dirección hacia el punto $(3,-3{,}3)$.
b) ¿En qué dirección la temperatura se incrementa más rápido en P?
c) Encuentre la razón máxima de incremento en P.

4. Demuestre que la función $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua y que las derivadas parciales f_x y f_y existen en el origen, pero que no existen las derivadas direccionales en todas las otras direcciones.

5. Encuentre los máximos, mínimos locales y puntos sillas de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + x + y + 1$$

6. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de f en el conjunto D.

$$f(x,y) = xy^2, D = \{(x,y)|\, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$$

7. Demuestre que $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tiene un número infinito de puntos críticos y que $D = 0$ en cada uno. A continuación demuestre que f tiene un mínimo local (y absoluto) en cada punto crítico.