



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Segundo semestre de 2016
Ayudante: Ignacio Tejeda (ijtejeda@uc.cl)

Cálculo II - MAT1620

Ayudantía 7

1. Evalúe los siguientes límites, si es que existen:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}.$$

2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } y \geq x^2 \text{ o } y \leq 0 \\ 1 & , \text{ si } 0 < y < x^2 \end{cases}.$$

a) Compruebe que si $0 < \alpha < 2$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^\alpha) = 0$.

b) Muestre que f es discontinua en $(0, 0)$.

3. Estudie la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

4. Sea $f(x, y) = y \cos(x - y)$.

a) Muestre que f es diferenciable en $(2, 2)$.

b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z = y \cos(x - y)$ en el punto $(2, 2, 2)$ y haga una estimación del valor de $f(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

5. *Adicional: continuidad y abiertos.* Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo $\mathbf{x}_0 \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \epsilon \Rightarrow \mathbf{x} \in A.$$

Pruebe que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R}^n y $c \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces el conjunto

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < c\}$$

es abierto.