Ayudantía 10

Cálculo II

Problema 1

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demuéstrela, y si es falsa, dé un contraejemplo o demuestre que es falsa.

a) Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces sus derivadas parciales en x_0 no existen.

b) La aproximación lineal de $f(x,y) = \sqrt{y + \cos^2 x}$ en $(0,0)$ es $L(x,y) = 1 + \dfrac{y}{2}$.

Problema 2

Considere la función $f(x,y) = x^2 e^{y-2} + ye^{x-1}$.

a) Muestre que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

b) Determine el plano tangente al gráfico de f en el punto $\big(1, 2, f(1,2)\big)$.

c) Aproxime el valor de $f(0.9, 2.1)$ usando la linealización de f en $(1,2)$.

Problema 3

Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $(0,0)$, pero que sus derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$. ¿Contradice esto el teorema visto en clases?

Problema 4

a) Sea $z = f(x, y)$ una función con segundas derivadas parciales continuas, en donde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

b) Suponga que la expresión

$$\int_{xz}^{y+z} g(t)\, dt + \int_{3x+y}^{z^2} h(t)\, dt = 0$$

donde $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, define implícitamente una función diferenciable $z = f(x, y)$. Halle sus derivadas parciales.

Problema 5*

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

a) Muestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, t) := g(x - vt)$ es diferenciable y cumple la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial t} \;=\; 0\ .$$

Además, encuentre la aproximación lineal de f en (x_0, t_0).

b) Muestre que la función $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) := g(\frac{x}{y})\frac{1}{y}$ es diferenciable y cumple la ecuación diferencial parcial

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \;=\; -f\ .$$