Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
22/Enero/2020

MAT 1620 - Cálculo II.
Interrogación 2.
Solución

1. *a*) Analice la continuidad de la función $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ en el punto $(0,0)$.

   b) Utilizando el concepto de aproximación lineal de una función en un punto, hallar el valor aproximado de $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

Solución.

a) La función es discontinua en $(0,0)$ pués no está definida para $(0,0)$.
Para que la discontinuidad sea evitable se debe tener que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x+y} = f(0,0)$$

así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}$$

considerando $y \neq -x$ entonces

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-xy+y^2) = 0$$

Note que los valores de acercamiento al punto $(0,0)$ tanto como se quiera, no puede tomar los puntos tales que $y=-x$ pues no están en el dominio de la función, por tanto el límite en cuestión es 0.

b) Considerando la función $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ y el punto $(1,2)$. Se tiene que que

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}, \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \right) \Rightarrow \nabla f(1,2) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

De esta manera tenemos que la aproximación lineal de f en $(1,2)$ es
$L(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2)\cdot(x-1, y-1) = 3 + \left(\frac{1}{2}, 2\right)\cdot(x-1, y-2)$, y

$$f(1{,}02, 1{,}97) \approx L(1{,}02, 1{,}97) = 3 + \left(\frac{1}{2}, 2\right)\cdot(0{,}02, -0{,}03) = 3 + 0{,}01 - 0{,}06 = 2{,}95$$

2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy + y^2 & \text{si } x \neq y \\ x + y & \text{si } x = y \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) ¿ Es f diferenciable en $(0,0)$?

Solución.

a) Notemos que $f(0,0) = 0$ y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

b) Sea L la posible aproximación lineal de f en (0,0), esto es:

$$L(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x - 0, y - 0) = 0 + (0,0) \cdot (x,y) = 0$$

Utilizando la definición de diferenciabilidad, f es diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y) - L(x,y)|}{||(x,y) - (0,0)||} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y) - L(x,y)|}{||(x,y) - (0,0)||} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Si consideramos la trayectoria $T : x = y$,

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{|f(x,x)|}{\sqrt{2}|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{|2x|}{\sqrt{2}|x|} = \sqrt{2} \neq 0,$$

por tanto la función no es diferenciable en $(0,0)$.

También se puede mostrar que el límite no existe, tomando otra trayectoria y que resulte otro valor del límite en cuestión.

3. *a*) Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,\mathrm{sen}\,y-y\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

calcule $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$.

b) Si $z=f(u,v)$, donde $u=\ln(x+y), v=\ln(x-y)$ y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$(x^2-y^2)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]=4\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

Solución.

a) Aplicando la definición de derivada, se tiene

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t}\qquad (1)$$

Ahora, calculamos: $f_x(0,0)$ y $f_x(x,y)$, $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\,\mathrm{sen}\,0-0\,\mathrm{sen}\,t}{t^3}=\lim_{t\to 0}0=0$$

$$f_x(x,y)=\frac{(\mathrm{sen}\,y-y\cos x)(x^2+y^2)-(x\,\mathrm{sen}\,y-y\,\mathrm{sen}\,x)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

luego en (1) resulta

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{(\mathrm{sen}\,t-t)t^2-(0\,\mathrm{sen}\,t-t\,\mathrm{sen}\,0)2\cdot 0}{t^5}=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,t-t}{t^3}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\mathrm{sen}\,t}{6t}=-\frac{1}{6}$$

analogamente

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}\qquad (2)$$

calculamos: $f_y(0,0)$ y $f_y(x,y)$, $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0\,\mathrm{sen}\,t-t\,\mathrm{sen}\,0}{t^3}=\lim_{t\to 0}0=0$$

$$f_y(x,y)=\frac{(x\cos y-\mathrm{sen}\,x)(x^2+y^2)-(x\,\mathrm{sen}\,y-y\,\mathrm{sen}\,x)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

luego en (2) resulta

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{(t\cos 0-\mathrm{sen}\,t)t^2-(t\,\mathrm{sen}\,0-0\,\mathrm{sen}\,t)2\cdot 0}{t^5}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\mathrm{sen}\,t}{t^3}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,t}{6t}=\frac{1}{6}$$

b) Considerando $z = f(u,v),\ u = \ln(x+y), v = \ln(x-y)$ y derivando se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{x+y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{x-y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{x+y} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{x-y}$$

Ahora, derivando respecto de x y de y las dos igualdades anteriores respectivamente, resultan:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\,\frac{1}{x^2-y^2} + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\,\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,\frac{1}{x^2-y^2} + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{1}{(x-y)^2}$$

ahora, restando de la primera la segunda, usando Clairaut y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,\frac{1}{x^2-y^2}$$

4. Determine la ecuación del plano tangente al elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ en el punto $(1, 2, 2)$.

Solución. Sea $F(x) = 4x^2+2y^2+z^2-16 = 0$ entonces la ecuación del plano tangente al elipsoide en el punto $(1, 2, 2)$ está dada por:

$$\vec{\nabla} F(1, 2, 2) \cdot (x - 1, y - 2, z - 2) = 0$$

donde

$$\vec{\nabla} F(x, y, z) = (8x, 4y, 2z)$$

asi, resulta la ecuación:

$$(8, 8, 4) \cdot (x - 1, y - 2, z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z = 8$$

5. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2y^2 + y^2$ en la región $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x^2 + y^2 \leq 9$. En caso de puntos críticos interiores decida si corresponden a máximo, mínimo o puntos silla. Además determine los extremos absolutos.

Solución.

Puntos criticos en el interior de D,

donde

$$D = \{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 9,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$$

$$\vec{\nabla} f = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = x^3 - 2xy^2 = 0 & (1) \\ f_y = -2x^2y + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) se obtiene: $x = 0 \vee x^2 = 2y^2$ entonces,

Si $x = 0$ de (2) se obtiene $y = 0$

Si $x^2 = 2y^2$ también de (2) se sigue $-2y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee -2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ahora, considerando el interior de D solo se tiene como punto crítico a $P_1 = (1, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Analizando la naturaleza de este punto crítico, se tiene

$$H_2 f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 - 2y^2 & -4xy \\ -4xy & -2x^2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Por tanto en el punto $P_1 = (1, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ la función f tiene un punto silla.

Puntos críticos en el borde de D.

El punto crítico $P_2 = (0,0))$ pertenece al borde o frontera de D es más es un vértice.

En el borde $x = 0$, con $0 \leq y \leq 3$ se tiene $f(0,y) = y^2 \Rightarrow f' = 2y > 0$ por tanto f crece en este borde, y se debe considerar al punto $P_3 = (0,3)$ como crítico

En el borde $y = 0$, con $0 \leq x \leq 3$ se tiene $f(x,0) = \dfrac{1}{4}x^4 \Rightarrow f' = x^3 > 0$ por tanto f también crece en este borde, y también se debe considerar el punto $P_4 = (3,0)$

En el borde $x^2 + y^2 = 9$ con $0 < x < 3$ e $0 < y < 3$ lo analizamos por medio de Lagrange, luego:

$$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{4}x^4 - x^2y^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$$

asi:

$$\vec{\nabla} L = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_x = x^3 - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_y = -2x^2y + 2y + 2\lambda y = 0 & (2) \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 9 = 0 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando: (1) por y y (2) por $-x$ y sumando resulta

$$3x^3y - 2xy^3 - 2xy = 0 \Leftrightarrow xy(3x^2 - 2y^2 - 2) = 0$$

Cómo $x \neq 0$ e $y \neq 0$ y tomando en cuenta (3), resulta el sistema a resolver:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{aligned}$$

y cuyas soluciones son: $x = \pm 2$ e $y = \pm\sqrt{5}$ pero cómo $0 < x < 3$ e $0 < y < 3$ entonces solo es crítico el punto $P_5 = (2, \sqrt{5})$.

En resumen para determinar los extremos absolutos de f en D, tenemos los puntos:

$$P_1 = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ P_2 = (0,0),\ P_3 = (0,3),\ P_4 = (3,0),\ P_5 = (2, \sqrt{5})$$

finalmente evaluando la función f en estos puntos, se obtiene:

$f(1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4}$

$f(0,0) = 0$

$f(0,3) = 9$

$f(3,0) = \frac{81}{4} \leftarrow$ Máximo absoluto de f.

$f(2, \sqrt{5}) = -11 \leftarrow$ Mínimo absoluto de f.

6. Determine los puntos en la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 1$ que están más cercanos y más lejanos al origen.

Solución

Se trata de encontrar el máximo y mínimo de la distancia desde el origen $(0, 0, 0)$ **a la curva de intersección de las superficies** $x^2+y^2 = 1$ **y** $x+y+z = 1$**, es decir de la función** $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **en un conjunto cerrado y acotado, dado que los puntos críticos de** f **coinciden con los puntos críticos de la función** $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ **ya que** $f = \sqrt{g}$ **es una función monótana y creciente, esto conserva incluso la naturaleza de los puntos críticos.**

Así, usando multiplicadores de Lagrange el problema se reduce a determinar el Máx. y Mín. de la función:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z - 1)$$

$$\begin{gathered} L_x = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ L_z = 2z + \lambda_2 = 0 \\ L_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ L_{\lambda_2} = x + y + z - 1 = 0 \end{gathered}$$

restando entre si las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$(x - y)(\lambda_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee \lambda_1 = -1$$

Si $x = y$ **de la cuarta ecuación se tiene,** $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **por tanto** $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **y remplazndo estos valores en la quinta ecuación se obtiene** $z = 1 \mp \sqrt{2}$ **y de la tercera ecuación** $\lambda_2 = -2(1 \mp \sqrt{2})$**, así resultan:**

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}},\ z = 1 - \sqrt{2},\ \lambda_1 = \sqrt{2} - 3,\ \lambda_2 = -2(1 - \sqrt{2})$$

$$x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ z = 1 + \sqrt{2},\ \lambda_1 = -\sqrt{2} - 3,\ \lambda_2 = -2(1 + \sqrt{2})$$

Si $\lambda_1 = -1$ **de la primera ecuación** $\lambda_2 = 0$ **y de la tercera ecuación** $z = 0$ **y así queda el sistema**

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{gathered}$$

de donde resultan: $x = 0,\ y = 1$ **o bien** $x = 1,\ y = 0$

así se tiene:

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0$$

$$x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0$$

La intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ **y el plano** $x + y + z = 1$ **es una elipse que es un conjunto cerrado y acotado. Como** g **es continua en** $\mathbb{R}^3$**,** g **alcanza su máx. y su mín. en la elipse. Evaluando** g **en los puntos críticos obtenidos se tiene:**

$$g(0, 1, 0) = 1 = g(1, 0, 0),\ \ g(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2},\ \ g(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$$

luego:

El punto más alejado del origen es: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2})$**.**

0.5 puntos

El punto más cercano al origen se produce en los puntos: $(0,1,0)$ **o** $(1,0,0)$**.**

0.5 puntos

TIEMPO: 120 MINUTOS
SIN CONSULTAS
SIN CALCULADORA