PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Pauta Interrogación 2 - MAT1620

1. Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n\sqrt{n+1}}(x-3)^n.$$

Solución:

Para determinar el intervalo de convergencia usaremos el criterio del cociente, esto es

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n+2}}|x-3| \\ &= \frac{|x-3|}{4} \end{aligned}$$

por lo tanto la serie converge si $|x-3|<4$ y diverge si $|x-3|>4$, veamos ahora que pasa cuando $|x-3|=4$, es decir para $x=7$ y $x=-1$.

Observe que para $x=-1$ la serie corresponde a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

que diverge porque se puede comparar al límite con al serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ que corresponde a una serie divergente por criterio p.

Observe que para $x=7$ la serie corresponde a la serie alternante

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que corresponde a una serie convergente ya que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ es una sucesión decreciente que converge a cero, luego por el criterio de series alternantes dicha serie converge.

De lo anterior tenemos que el intervalo de convergencia es $(-1,7]$.

Distribución de puntajes:

(1 punto) Por determinar el límite del cociente.

(1 punto) Por determina que converge en $(-1, 7)$

(0.5 punto) Por determinar que diverge en $x = -1$.

(1 punto) Por justificar que diverge en $x = -1$.

(0.5 punto) Por determinar que converge en $x = 7$.

(1 punto) Por justificar que converge en $x = 7$.

(1 punto) Por determinar el intervalo

2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Use la serie de Taylor, centrada en $x = 0$, de la función $\operatorname{sen}(x)$ para encontrar la serie de Taylor de la función f.

b) Encuentre la serie de potencias, centrada en $x = 0$, de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Solución:

a) La serie de Taylor de la función seno centrada en $x = 0$ es

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Luego,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

que efectivamente en $x = 0$ vale 1.

b) Integrando obtenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Que efectivamente en $x = 0$ vale 0.

Distribución de puntajes:

(1 punto) Por saber la serie del $\text{sen}(x)$.

(1 punto) Por determina la serie de $\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

(1 punto) Por verificar que en $x = 0$ vale 1.

(2 punto) Por integrar correctamente la serie.

(1 punto) Por verificar que en $x = 0$ vale 0.

3. Considere los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ determinados por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 :&3x - 2y + z - 5 = 0\\ \mathcal{P}_2 :&x + y - 3z + 8 = 0\end{aligned}$$

Determine una parametrización para la recta que pasa por el punto $(1, -4, 2)$ y es paralela a la intersección de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$

Solución: Para obtener un vector director de la recta, podemos proceder de diferentes formas. Una es mediante el producto cruz de los vectores normales a los planos dados.

$$(3, -2, 1) \times (1, 1, -3) = ((-2)(-3) - (1)(1), (1)(1) - (3)(-3), (3)(1) - (-2)(1)) = (5, 10, 5)$$

Otra forma sería resolver el sistema de ecuaciones dado por los dos planos, obteniendo expresiones para x e y en términos de z por ejemplo. Para eliminar la variable y calculamos $\mathcal{P}_1 + 2\mathcal{P}_2$ de manera que

$$5x - 5z + 11 = 0$$

Así $x = z - \frac{11}{5}$. Para obtener y, despejamos en la segunda ecuación:

$$y = 3z - x - 8 = 3z - (z - \frac{11}{5}) - 8 = 2z - \frac{29}{5}$$

Se desprende de esto que un vector director es

$$(1, 2, 1)$$

Usando ahora el punto que debe pertenecer a la recta buscada, obtenemos

$$P = (1, -4, 2) + t(1, 2, 1)$$

o por coordenadas

$$\begin{aligned}x &= 1 + t\\ y &= -4 + 2t\\ z &= 2 + t\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

(3 punto) Por determinar el director de la recta buscada.

(1punto x 3) Por la descripción paramétrica de cada coordenada.

4. Considere la función definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{2 + x - y^2}$$

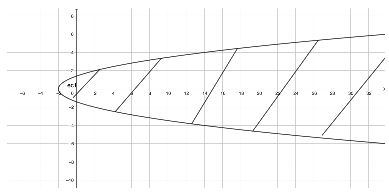
a) Determine y bosqueje el dominio de f.

b) Determine el rango (recorrido) de f.

c) Bosqueje las curvas de nivel para los valores $k = 2$ y $k = 4$.

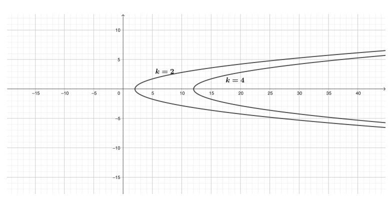
Solución:

a) Observe que (x, y) pertenece al dominio de f si y sólo si $2 + x - y^2 \geq 0$ lo que equivale a que $y^2 \leq 2 + x$ que gráficamente corresponde a la figura adjunta.



b) Observe que sobre el eje X la función corresponde a $\sqrt{x+2}$ cuyo recorrido es $[0, \infty)$, además por definición de la raíz, el recorrido solo puede tener números mayores o iguales a cero, por lo tanto el rango es $[0, \infty)$.

c) Las curvas de nivel pedida son:



Distribución de puntajes:

(1 punto) Por describir el dominio.

(1 punto) Por bosquejar el dominio.

(1 punto) Por determinar recorrido.

(1 punto) Por explicar porque dicho recorrido.

(1 punto) Por la curva para $k = 2$.

(1 punto) Por la curva para $k = 4$.

5. Determine si los siguientes límites existen. En caso de existir determine su valor.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \text{sen}^2(x)}{x^4+y^4}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Solución:

a) Observe que si nos acercamos al origen por el eje X tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \text{sen}^2(x)}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0.$$

Si nos acercamos por la curva $y = x$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \text{sen}^2(x)}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \text{sen}^2(x)}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

por lo tanto el límite pedido no existe.

b) Al realizar coordenadas polares tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} \frac{\sqrt{r^2+1}+1}{\sqrt{r^2+1}+1} \\
&= \lim_{r\to 0} \sqrt{r^2+1}+1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

(1 punto) Por el límite de una trayectoria bien calculada.

(1 punto) Por el límite de otra trayectoria con resultado distinto bien calculada.

(1 punto) Por concluir que el límite no existe.

(1 punto) Por hacer el cambio a coordenadas polares.

(1 punto) Por el desarrollo algebraico.

(1 punto) Por el valor del límite.