Ayudantía 6

Cálculo 2

Problema 1

1. Si $r = (x, y)$, $r_1 = (x_1, y_1)$ y $r_2 = (x_2, y_2)$. Describa el conjunto de todos los puntos (x, y) tal que $|r - r_1| + |r - r_2| = k$, con $k > |r_1 - r_2|$.
2. Aplique el producto triple para demostrar que los siguientes puntos son coplanares:
   $u = i + 5j - 2k$; $v = 3i - j$; $w = 5i + 9j - 4k$.
3. Encuentre una ecuación para la esfera con centro en $(2, -6, 4)$ y radio 5. Describa su intersección con cada uno de los planos coordenados.

Respuesta

1. Notamos que la descripción presentada corresponde a la representación de una elipse como el *locus* de puntos para los cuales la suma de la distancia a los focos r_1 y r_2 es constante.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = k$$

Sea $R = (r_1 + r_2)/2$, $r' = r - R$ y $s = (r_2 - r1)/2$. Luego podemos escribir la igualdad como:

$$\begin{aligned} |r' + R - (R - s)| + |r' + R - (R + s)| &= k \\ |r' + s| + |r' - s| &= k \end{aligned}$$

Logramos así centrar la elipse en el origen del plano cartesiano. Luego se puede expandir la expresión para encontrar la forma general. Para ello se recuerda la igualdad $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ y la linealidad del producto punto.

$$\begin{aligned} |r' + s| + |r' - s| &= k \qquad /()^2 \\ (r'+s)\cdot(r'+s) + (r'-s)\cdot(r'-s) + 2|r'+s||r'-s| &= k^2 \\ 2r'\cdot r' + 2s\cdot s + 2|r'+s||r'-s| &= k^2 \end{aligned}$$

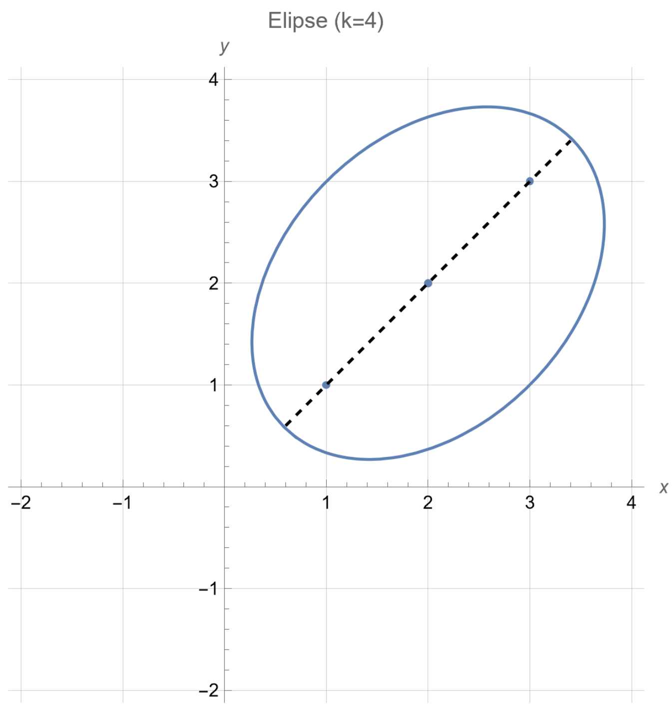
Luego, podemos eliminar el producto de las normas.

$$\begin{aligned} 2|r'+s||r'-s| &= k^2 - 2r'\cdot r' - 2s\cdot s \qquad /()^2 \\ 4\left[(r'\cdot r' + s\cdot s + 2r'\cdot s)(r'\cdot r' + s\cdot s - 2r'\cdot s)\right] &= k^4 + 4(r'\cdot r')^2 + 4(s\cdot s)^2 \\ &\quad - 4k^2(r'\cdot r') - 4k^2(s\cdot s) \\ &\quad + 8(r'\cdot r')(s\cdot s) \\ -16(r'\cdot s)^2 &= k^4 - 4k^2(r'\cdot r') - 4k^2(s\cdot s) \end{aligned}$$

Si la expresión anterior se expande se obtiene

$$(k^2 - 4s_x^2)(r_x')^2 - 8s_xs_y(r_x'r_y') + (k^2 - 4s_y^2)(r_y')^2 + (k^2s_x^2 + k^2s_y^2 - k^4/4) = 0$$

Esto corresponde a la ecuación de una elipse rotada centrada en el origen: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D = 0$. A continuación se presenta un ejemplo de la figura anterior.



2. Recordamos que el producto triple $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ corresponde al volumen del un paralelepípedo determinado por aquellos vectores. Si al computar el producto triple de los vectores que determinan los puntos este resulta ser nulo, las únicas opciones posibles son que los puntos sean colineales o coplanares.

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(4) - 5\cdot(-12) - 2(27+5) = 0$$

A continuación se presenta una imagen de los puntos en el espacio.

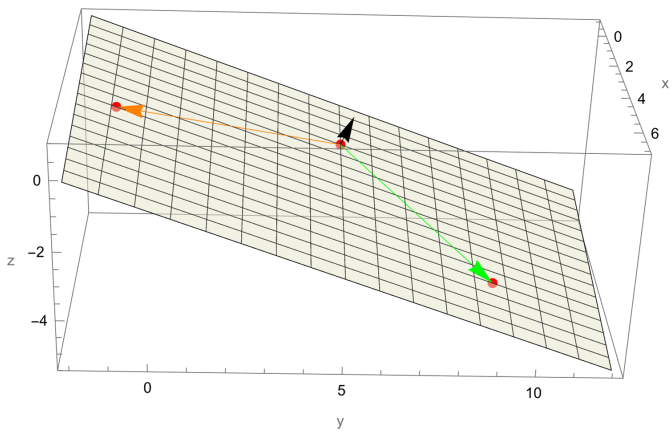


Figure 1: Puntos coplanares.

3. Recordamos que una esfera corresponde al conjunto de puntos cuya distancia al centro es igual al radio, o equidistantes del centro.

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+6)^2+(z-4)^2} = 5$$

Si se buscan las curvas de intersección con los planos coordenados, resolvemos la expresión anterior con una de las coordenadas nula.

(a) Plano XY

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y+6)^2+(0-4)^2 &= 5^2 \\ (x-2)^2+(y+6)^2 &= 5^2-4^2\end{aligned}$$

(b) Plano XZ

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(0+6)^2+(z-4)^2 &= 5^2 \\ (x-2)^2+(z-4)^2 &= 5^2-6^2 \nrightarrow\end{aligned}$$

(c) Plano YZ

$$\begin{aligned}(0-2)^2+(y+6)^2+(z-4)^2 &= 5^2\\ (y+6)^2+(z-4)^2 &= 5^2-2^2\end{aligned}$$

Notamos que la esfera no intersecta el plano XZ, y en los otros planos la curva de intersección corresponde a un circulo. A continuación se presenta una imagen de la situación.

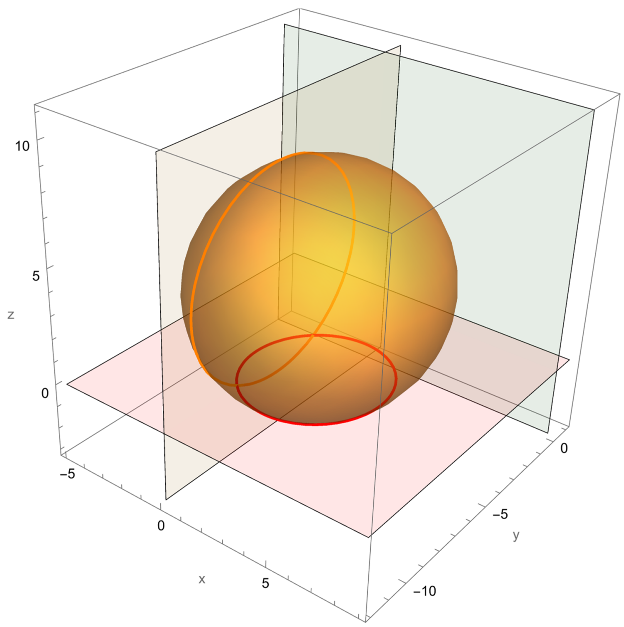


Figure 2: Esfera e intersección con planos coordenados.

Problema 2

1. Encuentre el ángulo agudo entre las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$ en sus puntos de intersección.
2. Encuentre el ángulo entre los vectores $i + 2j - 2k$ y $4i - 3k$.

Respuesta

1. Se identifica que los puntos de intersección son $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (1, 1)$. Dado que en el origen las derivadas de las curvas son nulas, estas son paralelas en P_1. En P_2 se obtienen las pendientes de las rectas tangentes.

   (a) Función $y = x^2$

   $$y'(x) = 2x$$
   $$y'(1) = 2$$

   (b) Función $y = x^3$

   $$y'(x) = 3x^2$$
   $$y'(1) = 3$$

   Ahora, se puede resolver el problema de dos formas:

   - Recordamos que la pendiente de una curva equivale a la tangente de su ángulo con el eje x. Luego se tiene que el ángulo entre las rectas tangentes es $\theta = \arctan(3) - \arctan(2) = 71.56° - 63.43° = 8.13°$
   - Una segunda opción es escribir las rectas tangentes en forma vectorial y calcular el ángulo entre los vectores directores.

     (a) Función $y = x^2$

     $$\gamma(\lambda) = (1, 1) + \lambda(1, 2)$$

     (b) Función $y = x^3$

     $$\gamma(\lambda) = (1, 1) + \lambda(1, 3)$$

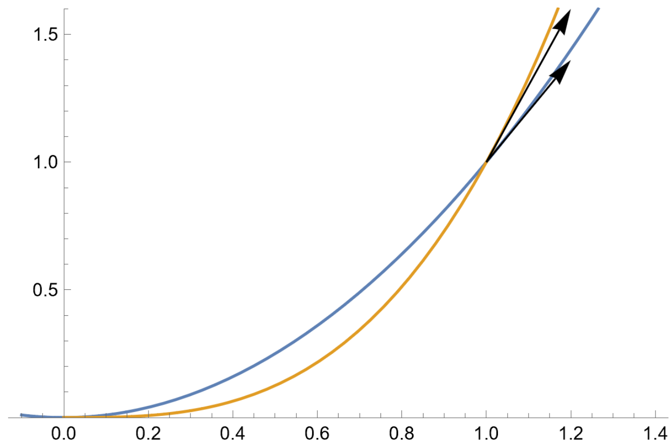


Figure 3: Funciones con vector tangente en punto de intersección

Luego el ángulo entre las rectas es $\cos(\theta) = \frac{(1,2)\cdot(1,3)}{|(1,2)||(1,2)|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0.98995) = 8.13^\circ$

2. Aplicamos la igualdad $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\theta)$. Luego

$$\cos(\theta) = \frac{(1,2,-2)\cdot(4,0,-3)}{|(1,2,-2)||(4,0,-3)|} = \frac{10}{3\cdot 5} \Rightarrow \theta = 48.2^\circ$$

Problema 3

Resuelva los siguientes propuestos.

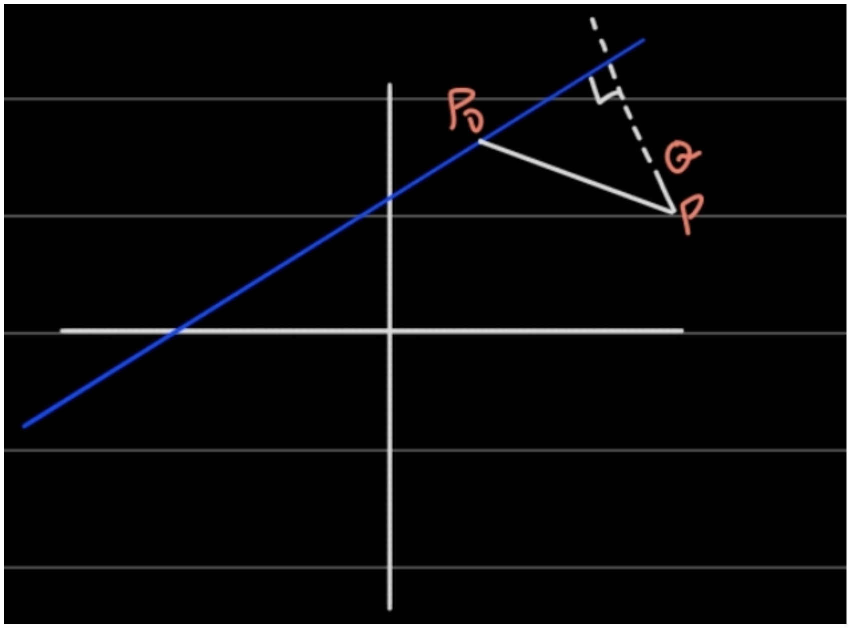
1. Demuestre que la distancia de un punto (x_1, y_1) a la recta $ax + by + c = 0$ se escribe de la forma
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto que no se encuentra en la línea L que pasa por los puntos $Q, R \in \mathbb{R}^3$, muestre que la distancia de P a L es
$$d = \frac{|a \times b|}{|a|}$$
con $a = \overrightarrow{QR}$ y $b = \overrightarrow{QP}$.

3. Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto fuera del plano que pasa por $Q, R, S \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que la distancia de P al plano es
$$d = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|a \times b|}$$
Con $a = \overrightarrow{QR}$, $b = \overrightarrow{QS}$ y $c = \overrightarrow{QP}$.

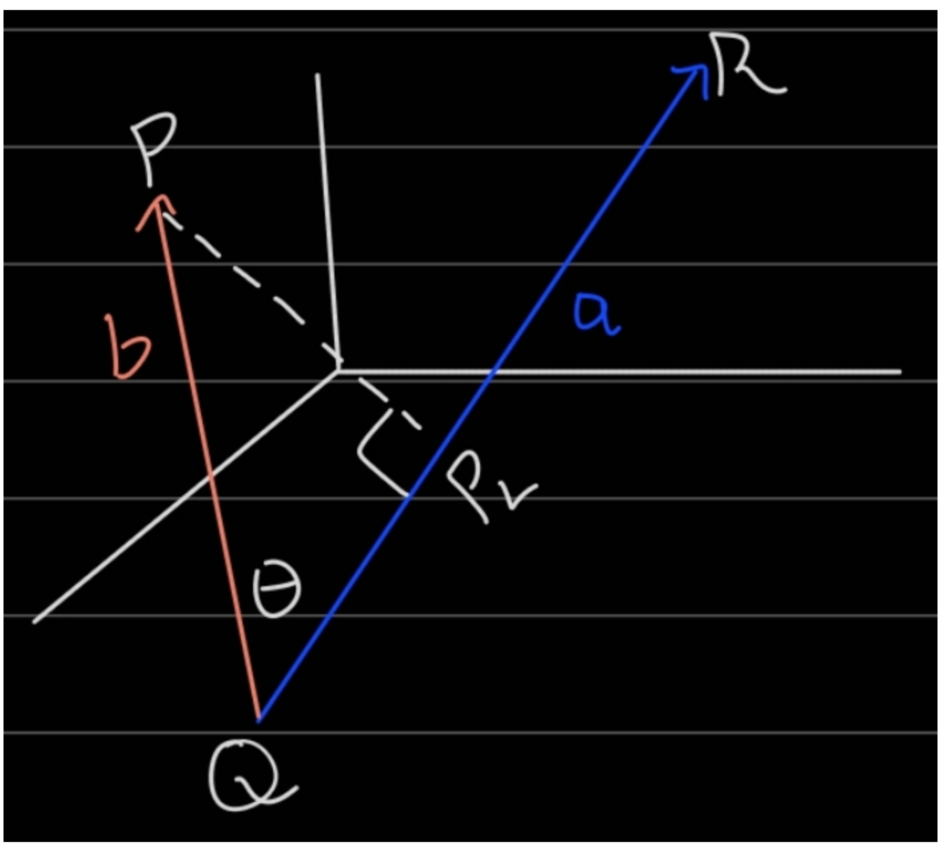
Respuesta

1. Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto en L, $v = (-b, a)$ un vector director de L y $n = (a, b)$ un vector normal. Si $Q = (a + x_1, b + y_1)$, notemos que d es el largo del vector proyección de $\overrightarrow{PP_0}$ sobre $\overrightarrow{PQ} = n$, luego,
$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|n \cdot \overrightarrow{PP_0}\right|}{|n|} \\ &= \frac{|(a, b) \cdot (x_0 - x_1, y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|-c - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$



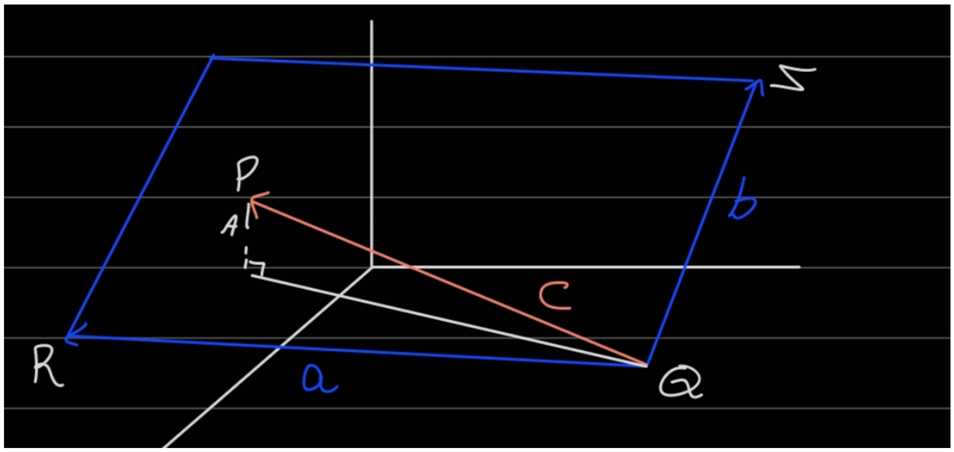
2. Si P_L es la proyección ortogonal de P a L, siendo θ el ángulo entre los vectores a y b vemos que

$$d = \left|\overrightarrow{P_L P}\right| = \sin(\theta) \cdot |b| = \frac{\sin(\theta) \cdot |b| \cdot |a|}{|a|} = \frac{|a \times b|}{|a|}.$$



3. Primero notemos que $a \times b$ es un vector normal al plano. Tomando $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{PA} = a \times b$, la distancia de P al plano es el largo del vector proyección de $\overrightarrow{PQ} = -c$ sobre $\overrightarrow{PA}$, entonces

$$d = \frac{|(a \times b) \cdot (-c)|}{|a \times b|} = \frac{|-((a \times b) \cdot c)|}{|a \times b|} = \frac{|(a \times b) \cdot c|}{|a \times b|} = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|a \times b|}.$$



Problema 4

1. Considere los puntos P tal que la distancia P a $(-1,5,3)$ es el doble de la distancia de P a $(6,2,-2)$. Muestre que corresponden a una esfera, encuentre su radio y su centro.
2. Si $r=(x,y,z)$, $a=(a_1,a_2,a_3)$ y $b=(b_1,b_2,b_3)$ muestre que la ecuación vectorial $(r-a)\cdot(r-b)=0$ representa una esfera.
   Encuentre su centro y radio.

Respuesta

1. La distancia de un punto a otro punto de la forma (a,b,c) se obtiene tal que:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

Por lo tanto, los puntos que cumplen con la condición mencionada satisfacen:

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2}=2\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}\ \ /()^2 \\
(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=4(x-6)^2+4(y-2)^2+4(z+2)^2 \\
x^2+y^2+z^2+2x-10y-6z+(1+25+9)= \\
4(x^2+y^2+z^2-12x-4y+4z+(36+4+4)) \\
3x^2+3y^2+3z^2-48x-16y+16z+176=2x-10y-6z+35 \\
3x^2+3y^2+3z^2-50x-6y+22z+141=0\ \ /:3 \\
x^2+y^2+z^2-\tfrac{50}{3}x-2y+\tfrac{22}{3}z+47=0
\end{gathered}$$

Ahora hay que completar los cuadrados:

Para x:

$$\begin{gathered}
x^2-\tfrac{50}{3}x=0 \\
x^2-\tfrac{50}{3}x+(\tfrac{25}{3})^2=(\tfrac{25}{3})^2 \\
(x-\tfrac{25}{3})^2=\tfrac{625}{9}
\end{gathered}$$

Para y:

$$y^2 - 2y = 0$$
$$y^2 - 2y + 1 = 1$$
$$(y-1)^2 = 1$$

Para z:

$$z^2 + \frac{22}{3}z = 0$$
$$z^2 + \frac{22}{3}z + \frac{121}{9} = \frac{121}{9}$$
$$(z + \frac{11}{3})^2 = \frac{121}{9}$$

Uniendo todos los casos:

$$(z + \frac{11}{3})^2 + (y-1)^2 + (x - \frac{25}{3})^2 = \frac{121}{9} + \frac{9}{9} + \frac{625}{9} - 47 = \frac{755}{9} - \frac{423}{9} = \frac{332}{9}$$

lo que es una esfera centrada en $(\frac{25}{3}, -1, \frac{11}{3})$ con radio $\frac{\sqrt{332}}{3}$

2. Escribimos los vectores:

$\vec{ra} =< x - a_1, y - a_2, z - a_3 >$
$\vec{rb} =< x - b_1, y - b_2, z - b_3 >$

Ahora aplicamos el producto punto
$\vec{ra} \cdot \vec{rb} = (x - a_1)(x - b_1) + (y - a_2)(y - b_2) + (z - a_3)(z - b_3) = 0$

Completando:

$$\vec{ra} \cdot \vec{rb} = x^2 - (a_1 + b_1)x + a_1b_1 + y^2 - (a_2 + b_2)y + a_2b_2 + z^2 - (a_3 + b_3)z + a_3b_3 = 0$$

Reordenando un poco:

$$\vec{ra} \cdot \vec{rb} = x^2 + y^2 + z^2 - (a_1 + b_1)x - (a_2 + b_2)y - (a_3 + b_3)z + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación general de la esfera.

Completando cuadrados para x:

$$x^2 - (a_1 + b_1)x = 0$$
$$x^2 - (a_1 + b_1)x + \frac{(a_1+b_1)^2}{2} = \frac{(a_1+b_1)^2}{2} \; (x - \frac{(a_1+b_1)}{2})^2 = \frac{(a_1+b_1)^2}{4}$$

Completando cuadrados para y:

$$y^2 - (a_2 + b_2)y = 0$$
$$y^2 - (a_2 + b_2)y + \frac{(a_2+b_2)^2}{2} = \frac{(a_2+b_2)^2}{2}\ (y - \frac{(a_2+b_2)}{2})^2 = \frac{(a_2+b_2)^2}{4}$$

Completando cuadrados para z:

$$z^2 - (a_3 + b_3)z = 0$$
$$z^2 - (a_3 + b_3)z + \frac{(a_3+b_3)^2}{2} = \frac{(a_3+b_3)^2}{2}\ (z - \frac{(a_3+b_3)}{2})^2 = \frac{(a_3+b_3)^2}{4}$$

Como resultado obtenemos:

$$r\vec{a} \cdot r\vec{b} = (x - \frac{(a_1+b_1)}{2})^2 + (y - \frac{(a_2+b_2)}{2})^2 + (z - \frac{(a_3+b_3)}{2})^2 z = \frac{(a_1+b_1)^2}{4} + \frac{(a_2+b_2)^2}{4} + \frac{(a_3+b_3)^2}{4} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

Con esta forma de la ecuación podemos obtener el radio y el centro:

$$c = (\frac{(a_1+b_1)}{2}, \frac{(a_2+b_2)}{2}, \frac{(a_3+b_3)}{2})$$
$$r = \sqrt{\frac{(a_1+b_1)^2}{4} + \frac{(a_2+b_2)^2}{4} + \frac{(a_3+b_3)^2}{4} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)}$$

Problema 5*

Sea P un punto en el espacio y L una recta que no interesecta a P.

a) Demuestre que hay un único punto $Q \in L$ que minimiza la distancia a P, esto es,

$$d(P, Q) = \min_{Q' \in L} d(P, Q') ,$$

donde $d(\cdot\,,\cdot)$ denota la distancia entre dos puntos. ¿Cuál sería la distancia del punto P a la recta L?

b) Suponga que estamos usando cierto sistema de coordenadas en donde P está representado por un vector $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, y L está representado por el conjunto $\{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, donde $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ es un vector de norma 1. Determine el vector de coordenadas w de Q a partir de u y v.

c) Demuestre que para todo vector $v' \in L$, se tiene $u \cdot v' = w \cdot v'$.

Propuesto: Vuelva a hacer lo anterior pero usando un plano M en lugar de la recta L.

Respuesta

a) Fijamos un sistema de coordenadas con vectores base $\{i, j, k\}$ en que P es el origen y L es paralela al espacio generado por un vector básico i. Como L no intersecta a P, en este sistema de coordenadas se trata de una recta que no contiene al origen, y por ende existe un vector $l = (l_1, l_2, l_3) \neq 0$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $L = \{l + \alpha i \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Por otro lado, vemos que un vector genérico de L tiene la forma $l + \alpha i = (l_1 + \alpha, l_2, l_3)$. Definimos el vector $q = l - l_1 i = (0, l_2, l_3)$, el cual corresponde al vector en L con $\alpha = -l_1$. Con esto, tenemos que

$$L = \{q + (l_1 + \alpha)i \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{q + \beta i \in \mathbb{R}^3 \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\beta, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta \in \mathbb{R}\} .$$

Luego, la distancia entre un punto Q' con coordenadas $v = (\beta, l_2, l_3)$ y el punto P, con coordenadas $\vec{0} = (0, 0, 0)$, será

$$d(P, Q') = |v - \vec{0}| = |v| = \sqrt{\beta^2 + l_2^2 + l_3^2} = \sqrt{\beta^2 + |q|^2} \geq \sqrt{|q|^2} = |q| = d(P, Q) ,$$

donde Q denota el punto determinado por el vector q. De esto, deducimos que Q minimiza la distancia a P, y como la desigualdad anterior es estricta para todo $\beta \neq 0$, deducimos que es el único minimizante. Así, la distancia del punto P a la recta L será, en abstracto, $d(P, Q)$.

b) Como w pertenece a L, tenemos que $w = \alpha v$ para algún valor de α; nuestra tarea es determinar este valor. Como primera observación, notamos que si tomamos el producto punto de ambos lados de la ecuación anterior con v, nos queda $w \cdot v = \alpha v \cdot v = \alpha$, y si tomamos el producto punto de ambos lados consigo mismos, obtenemos $|w|^2 = \alpha^2 |v|^2 = \alpha^2$. Sigue que $\alpha = \pm|w|$. Como w minimiza la distancia a u, para todo $\beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|u - w|^2 \ \leq \ |u - \beta v|^2 \ .$$

En particular, tomando $\beta = 0$,

$$|u - w|^2 \ \leq \ |u|^2 \ .$$

Expandiendo esto,

$$|u|^2 - 2(u \cdot w) + |w|^2 \ \leq \ |u|^2 \ ,$$

lo cual nos lleva a

$$0 \ \leq \ \frac{1}{2}|w|^2 \ \leq \ u \cdot w$$

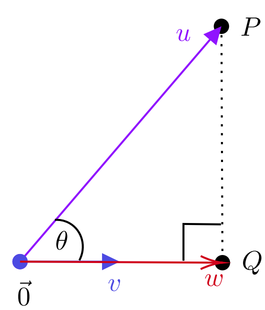
Por lo que $u \cdot w \geq \frac{1}{2}|w|^2 \geq 0$. Notemos que L pasa por el origen en estas coordenadas, por lo que $u \neq 0$. Así, el ángulo $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ comprendido entre el vector u y el vector v está determinado por la condición

$$\cos(\theta) \ = \ \frac{u \cdot v}{|u||v|} \ = \ \frac{u \cdot v}{|u|} \ .$$

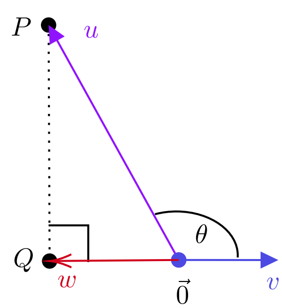
Ahora veremos que $\alpha = |u|\cos(\theta) = u \cdot v$. Veamos esto por casos. Si $\alpha = 0$, entonces $w = 0$. Si $\alpha > 0$, entonces $w = \alpha v \neq 0$ y

$$\cos(\theta) \ = \ \frac{\alpha}{\alpha}\frac{u \cdot v}{|u|} \ = \ \frac{u \cdot w}{\alpha|u|} \ \geq \ \frac{|w|^2}{2\alpha|u|} \ > \ 0 \ ,$$

por lo que $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y $|w| = \alpha$. Más aún, por trigonometría tenemos que $\alpha = |w| = |u|\cos(\theta) = u \cdot v$ (ver figura abajo). Análogamente, si $\alpha < 0$, tenemos $\cos(\theta) < 0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ y $|w| = -\alpha$. A partir de esto, nuevamente por trigonometría tenemos que $\alpha = -|w| = |u|\cos(\theta) = u \cdot v$.



$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

Finalmente, con esto concluímos que $w = \alpha v = (u \cdot v)v$.

c) Sea $v' \in L$ un vector. Entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $v' = \beta v$. Con esto,

$$(u-w)\cdot v' \;=\; (u-(u\cdot v)v)\cdot(\beta v) \;=\; \beta(u\cdot v-(u\cdot v)v\cdot v) \;=\; \beta(u\cdot v-u\cdot v) \;=\; 0\;.$$

Concluímos que $u \cdot v' = w \cdot v'$, para todo $v' \in L$.