Ayudantía 13

Cálculo II

Problema 1

Determine los semiejes de la elipse que se obtiene al intersecar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$, determinando los extremos condicionados de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las dos restricciones mencionadas anteriormente.

Problema 2

Calcule las siguientes integrales dobles

a) $\displaystyle\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 x^2 y e^{xy}\, dx\, dy$

c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x + y}\, dA$, donde R es la región limitada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $y = x$.

d) $\displaystyle\iint_D xy\, dA$, donde D está encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = 3x$.

Problema 3

Calcule el área encerrada por la parábola $y = \dfrac{x^2}{2}$ y la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Problema 4*

a) Maximice la función

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

sujeta a las restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$$

b) Use lo anterior para demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\,\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}\,,$$

para cualquier par de vectores $(a_1, \ldots a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$. Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Cauchy–Schwarz.