Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 - Sección 1

Felipe Sánchez Varas
fssanchez@uc.cl
2 de mayo de 2015

Ayudantía #8

Planos tangentes, derivadas direccionales y gradiente.

P1. Determine la ecuación del plano tangente en el punto específico.

a) $z = y \ln x, \qquad (1, 4, 0)$

b) $z = y \cos(x - y), \qquad (2, 2, 2)$

P2. Verifique la aproximación lineal en $(0, 0)$

a) $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$

b) $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}y$

P3. Determine la diferencial de la función.

a) $z = x^3 \ln(y^2)$

b) $w = xye^{xz}$

P4. Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ

a) $f(x, y) = x^2y^3 - y^4, \qquad (2, 1), \qquad \theta = \pi/4$

b) $f(x, y) = x \sin(xy), \qquad (2, 0), \qquad \theta = \pi/3$

P5. En el siguiente ejercicio, determine el gradiente de f, evalúe el gradiente en el punto P y en cuentr la razón de cambio de f en P en la dirección del vector u

$$f(x, y) = xe^{2yz}, \qquad P(3, 0, 2) \qquad u = (2/3, -2/3, 1/3)$$

P6. La temperatura en un punto (x,y,z) está dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

Donde T se mide en Celsius y x, y, z en metros.

a) Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(2, -1, 2)$ en la dirección hacia el punto $(3, -3, 3)$.

b) ¿En qué dirección la temperatura se incrementa más rápido en P?

c) Encuentra a razón máxima de incremento en P

Felipe Sánchez Varas
fssanchez@uc.cl

En primer lugar, necesitamos conocer el vector unitario u que nos indicará la dirección en la que queremos conocer la razón de cambio de temperatura, esto es:

$$u = (3, -3, 3) - (2, -1, 2) = (1, -2, 1)$$

Como necesitamos que sea unitario, calculamos su módulo y lo dividimos por este, quedando:

$$||u|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\text{u}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

La razón de cambio está relacionada con la derivada direccional, la que podemos obtener calculando el gradiente de T y haciendo un producto punto mediante la fórmula:

$$D_u T(2, -1, 2) = \nabla T(2, -1, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \tag{1}$$

Recordando que $\nabla T = \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}, \dfrac{\partial T}{\partial y}, \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial T}{\partial y}\hat{k}$

Calculando las derivadas parciales se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}(-2x) &&= -400e^{-x^2-3y^2-9z^2}(x) \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}(-6y) &&= -400e^{-x^2-3y^2-9z^2}(3y) \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}(-18z) &&= -400e^{-x^2-3y^2-9z^2}(9z)
\end{aligned}$$

Por lo que podemos escribir de forma simplificada y factorizada por $-400e^{-x^2-3y^2-9z^2}$ el gradiente de T, quedando:

$$\nabla T(x, y, z) = -400e^{-x^2-3y^2-9z^2}(x, 3y, 9z)$$

Si evaluamos en el punto de interés tendremos que:

$$\begin{aligned}
\nabla T(2, -1, 2) &= -400e^{-(2)^2-3(-1)^2-9(2)^2}(2, 3 \cdot -1, 9 \cdot 2) \\
&= -400e^{-43}(2, -3, 18)
\end{aligned} \tag{2}$$

Reemplazando ahora este valor en la formula (1), tendremos que:

$$\begin{aligned}
D_u T(2, -1, 2) &= -400e^{-43}(2, -3, 18) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \\
&= \left(\frac{-400e^{-43}}{\sqrt{6}}\right)(2, -3, 18) \cdot (1, -2, 1) \\
&= \left(\frac{-400e^{-43}}{\sqrt{6}}\right)(2 \cdot 1 + -3 \cdot -2 + 18 \cdot 1) \\
&= \frac{-5200\sqrt{6}e^{-43}}{3}
\end{aligned}$$

Por ende, decimos que la razón de cambio en la dirección pedida es de $\dfrac{-5200\sqrt{6}e^{-43}}{3} {}^\circ C/m$

Felipe Sánchez Varas
fssanchez@uc.cl

b) La dirección que se incrementa más rápido, está dado por el gradiente de T, evaluado en el punto P, lo que ya fue calculado en (2), por ende la dirección es $(2, -3, 18)$

c) La razón máxima de incremento, es la que se obtiene al dirigirse en la dirección encontrada en b), lo que es equivalente a calcular el módulo del gradiente en ese punto, es decir:

$$\begin{aligned} |\nabla T| &= 400e^{-x^2-3y^2-9z^2}\sqrt{x^2+9y^2+81z^2} \\ &= 400e^{-(2)^2-3(-1)^2-9(2)^2}\sqrt{(2)^2+9(-1)^2+81(2)^2} \\ &= 400e^{-43}\sqrt{377} \end{aligned}$$