PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Pauta Interrogación 1 - MAT1620

1. a) Determine si la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$ es convergente o divergente.

Solución:

Observe que

$$0 \leq \frac{e^x}{e^{2x}+3} \leq \frac{e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x} \text{ para todo } x \geq 0$$

y que

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{e^x}\right)\Big|_0^t = 1.$$

Por lo tanto, por el criterio de comparación, ya que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ es convergente podemos concluir que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$ es convergente.

b) Determine para qué valores de $p > 0$ la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p(\sqrt[3]{x^2}+1)}dx$$

es convergente.

Solución:

Observe que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p(\sqrt[3]{x^2}+1)}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p(\sqrt[3]{x^2}+1)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p(\sqrt[3]{x^2}+1)}dx$$

la primera de estas integrales, dado que $p > 0$, es una integral de tipo II, que puede ser comparada con $\dfrac{1}{x^p}$.

Tenemos que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1/x^p}{1/(x^p(\sqrt[3]{x^2}+1))} = 1$, por lo que la integral converge si y solo si $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge, y esto sucede si y solo si $p < 1$.

Por otra parte, la segunda integral, por criterio de comparación, tiene el mismo comportamiento que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{p+\frac{2}{3}}}dx$ y esta integral converge si y solo si $p + \dfrac{2}{3} > 1$, es decir solo si $\dfrac{1}{3} < p$.

Dado que la integral propuesta converge si y solo si ambas, las de tipo I y tipo II convergen, tenemos que converge si y solo si $\frac{1}{3} < p < 1$.

Distribución de puntajes:

(0.5 punto) Por verificar las hipótesis del criterio que se usará.

(1 punto) Por usar criterio adecuado.

(0.5 punto) Por concluir que la integral converge.

(0.5 punto) Por separar en dos integrales.

(0.5 punto) Por comparar con $1/x^p$ la primera integral.

(1 punto) Por concluir que la primera converge si y sólo si $p < 1$.

(0.5 punto) Por comparar con $1/x^{p+2/3}$ la segunda integral.

(1 punto) Por concluir que la primera converge si y sólo si $p > 1/3$.

(0.5 punto) Por concluir que $1/3 < p < 1$.

2. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} \quad \text{con } a_1 = \sqrt{3}.$$

a) Demuestre, usando inducción, que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona y acotada.
Solución:

Primero demostraremos por inducción que la sucesión es creciente, es decir, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$.

i) Veamos que la desigualdad se cumple para $n = 1$, para esto vemos que $a_1 = \sqrt{3}$ y que $a_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, por lo que tenemos que

$$a_1 \leq a_2.$$

ii) Debemos mostrar que si $a_k \leq a_{k+1}$ entonces $a_{k+1} \leq a_{k+2}$.
Si $a_k \leq a_{k+1}$, entonces $3 + a_k \leq 3 + a_{k+1}$, luego $\sqrt{3 + a_k} \leq \sqrt{3 + a_{k+1}}$, lo que equivale a que

$$a_{k+1} \leq a_{k+2}.$$

De i) y ii) tenemos que la sucesión es creciente.
Observe que, por definición $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos, usando inducción, que $a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Veamos que la desigualdad se cumple para $n = 1$, para esto vemos que $a_1 = \sqrt{3} \leq 3$ por lo tanto tenemos que la desigualdad se cumple para $n = 1$.

ii) Debemos mostrar que si $a_k \leq 3$ entonces $a_{k+1} \leq 3$.
Si $a_k \leq 3$, entonces $3 + a_k \leq 6$, luego $\sqrt{3 + a_k} \leq \sqrt{3 + 3} \leq 3$, lo que equivale a que

$$a_{k+1} \leq 3.$$

De i) y ii) tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $a_n \leq 3$ y por lo tanto $0 \leq a_n \leq 3$.

b) Demuestre que la sucesión converge y determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Solución:

Del inciso anterior sabemos que la sucesión es monótona y acotada por lo tanto es convergente. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces tendremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ y por lo tanto debe cumplirse que $L = \sqrt{3 + L}$ entonces L debe cumplir que $L^2 = 3 + L$, lo que es ceirto si y solo si $L = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$ o $L = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$, como L debe ser positivo, ya que $\sqrt{3} \leq a_n \leq 3$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Distribución de puntajes:

(1 punto) Por determinar que $a_1 \leq a_2$.

(1 punto) Por el paso inductivo para demostrar que es creciente.

(1 punto) Por determinar que $0 \leq a_1 \leq 3$ (podría ser otra cota superior).

(1 punto) Por el paso inductivo para demostrar que es acotada superiormente.

(1 punto) Por justificar que el límite existe.

(1 punto) Por determinar el valor del límite.

3. a) Sea $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $n \geq 1$ se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2n-3}{n}$. Determine una fórmula para a_k y encuentre el valor de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

   Solución:
   Como S_n es la suma de los primeros n términos, tenemos $a_1 = S_1 = -1$. Para los otros términos

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n-3}{n} - \frac{2(n-1)-3}{n-1} = \frac{3}{n(n-1)}.$$

   Por otro lado, el valor de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n} = 2.$$

   b) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$ es convergente, use los 3 primeros términos para estimar el valor de la serie (puede quedar en términos de e) y acote el residuo de esta estimación.

   Solución:
   Considere la función $f(x) = xe^{-x}$ y observe que f es continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$ luego, por el criterio de la integral, tenemos que la serie converge si y sólo si la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx$ es convergente.
   Realizando integración por partes con $u = x$ y $dv = e^{-x}dx$, tenemos que

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \tag{1}$$

por lo tanto la integral

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} -te^{-t} - e^{-t} + 2e^{-1} = 2e^{-1}.$$

por lo tanto la serie es convergente.

La aproximación por los primeros tres términos es $e^{-1} + 2e^{-2} + 3e^{-3}$.

El residuo, R_3, de esta aproximación puede ser acotado por

$$\int_4^{\infty} xe^{-x}\,dx \leq R_3 \leq \int_3^{\infty} xe^{-x}\,dx$$

que usando (1), tenemos que

$$5e^{-4} \leq R_3 \leq 4e^{-3}.$$

Distribución de puntajes:

(1 punto) Por determinar la fórmula del término general.

(1 punto) Por calcular límite correctamente para determinar el valor de la serie.

(0.5 punto) Por verificar las hipótesis del criterio de la integral.

(1 punto) Por determinar que la integral converge.

(0.5 punto) Por concluir que la serie converge.

(1 punto) Por determinar la suma de los tres primeros términos.

(1 punto) Por acotar correctamente el residuo.

4. Determine si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!}$.

Solución:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-4)^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-4)}{n+1} \right| = 0 < 1$$

por el criterio del cociente, la serie converge absolutamente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Solución:

Sea $c_n = \frac{2n+1}{n^2+n}$. Veamos que la sucesión es decreciente.

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &< c_n \\
\frac{2n+3}{(n+1)^2 + (n+1)} &< \frac{2n+1}{n^2+n} \\
(2n+3)(n^2+n) &< (2n+1)(n^2+3n+2) \\
2n^3 + 5n^2 + 3n &< 2n^3 + 7n^2 + 7n + 2 \\
0 &< 2n^2 + 4n + 2 \\
0 &< (n+1)^2
\end{aligned}$$

lo que es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} = 0.$

Por el criterio de la serie alternante, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ converge.

Veamos ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Como la sucesión es de términos positivos, compararemos al límite con la serie armónica. Como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\frac{2n+1}{n(n+1)} = 2$$

ambas series tendrán el mismo comportamiento y como la armónica diverge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ diverge. De este modo la serie original converge condicionalmente.

Distribución de puntajes:

(1 punto) Por usar el criterio del cociente.

(1 punto) Por calcular correctamente el límite.

(1 punto) Por concluir que converge absolutamente.

(0.5 punto) Por verificar que los términos positivos de la serie alternante son decrecientes.

(0.5 punto) Por ver que los términos de la serie alternante tienen a cero.

(0.5 punto) Por concluir que la serie alternante converge.

(0.5 punto) Por realizar comparación (u otro criterio).

(0.5 punto) Por calcular el límite.

(0.5 punto) Por concluir que no converge absolutamente.