PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Interrogación 3 - MAT1620

1. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Solución:

Observe que si $(x,y)\neq(0,0)$ tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ y que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0,$$

por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Dada la simetría respecto a las variables x y y tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) por la derivada parcial respecto a x en los puntos distintos de $(0,0)$.
- (1 punto) por la derivada parcial respecto a x en el punto $(0,0)$.
- (0.5 puntos) por la derivada parcial respecto a y en los puntos distintos de $(0,0)$.
- (1 punto) por el la derivada parcial respecto a y en el punto $(0,0)$.

b) Decida, justificadamente, si f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

Observe que la función f no es continua en el punto $(0,0)$ ya que, por ejemplo, al considerar la trayectoria $y = x$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0),$$

por lo tanto f no es diferenciable en el origen.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por escoger una trayectoria adecuada para ver que la función no es continua (o que no se puede aproximar por el plano tangente).
- (1 punto) por los cálculos para la justificación del punto anterior.
- (1 punto) por conclusión.

2. a) En una región la temperatura está dada por $T(x,y,z)$ que varía de acuerdo a las siguiente ecuaciones: $T_x = 3x$, $T_y = \dfrac{y}{(z+1)^2}$ y $T_z = \dfrac{-y^2}{(z+1)^3}$.

Un objeto recorre la curva $c(t) = (t^2, -t, t^3)$ para $t \in (0,2)$. Determine la variación de la temperatura del objeto $\dfrac{dT}{dt}$ a lo largo de la curva (como función de t).

Solución:

La función Temperatura con respecto al tiempo está dada por $T(t) = T \circ c(t)$ Llamando a las coordenadas de $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tenemos que la derivada pedida es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dT}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dT}{dz}\frac{dz}{dt} = 3x2t + \frac{y}{(z+1)^2}(-1) + \frac{-y^2}{(z+1)^3}3t^2$$

$$= 3t^2 2t + \frac{-t}{(t^3+1)^2}(-1) + \frac{-t^2}{(t^3+1)^3}3t^2 = 6t^3 + \frac{+t}{(t^3+1)^2} + \frac{-3t^4}{(t^3+1)^3}.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por la fórmula de la regla de la cadena para obtener $\dfrac{dT}{dt}$.
- (0.5 punto) por determinar $\frac{dx}{dt}$.
- (0.5 punto) por determinar $\frac{dy}{dt}$.
- (0.5 punto) por determinar $\frac{dz}{dt}$.
- (0.5 punto) por cálculo final.

b) Explique por qué la función $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$ es diferenciable en el punto $(3, 0)$, determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(3, 0, 2)$ y úsela para aproximar el valor de f en el punto $(3.1, 0.1)$.

Solución:

Observe que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + e^{4y}}}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{4e^{4y}}{2\sqrt{x + e^{4y}}}$ existen y son continuas en $(3, 0)$ por lo tanto f es diferenciable en $(3, 0)$.

Al evaluar tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 0) = \dfrac{1}{4}$ y que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$ por lo que una ecuación para el plano tangente es

$$z = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) + y.$$

De lo anterior tenemos que

$$f(3.1, 0.1) \approx 2 + \frac{1}{4}(0.1) + 0.1 = \frac{17}{8}.$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) por el cálculo de la derivada parcial respecto a x.
- (0.5 punto) por el cálculo de la derivada parcial respecto a y.
- (0.5 punto) por justificar la diferenciabilidad en el punto $(3, 0)$.
- (1 punto) por la ecuación del plano tangente.
- (0.5 punto) por la la aproximación.

3. Determine los valores máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = \frac{4y}{1+x^2+y^2}$$

en la región dada por $x^2 + y^2 \leq 4$.

Solución:

Para encontrar los puntos críticos en el interior debemos resolver $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^2} \text{ y que } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{4(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $y = 0$.

Veamos primero el caso $x = 0$, con esto al reemplazar en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, tendremos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{4(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$, lo que es cero si y sólo si $y^2 = 1$, obteniendo dos puntos críticos interiores: $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Veamos ahora el caso $y = 0$, reemplazando está información en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial xy}(x,y) = -\frac{4(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$, lo que nunca es cero, entonces no existen puntos críticos interiores con segunda coordenada cero.

Ahora resta buscar los candidatos a extremos en el borde de la región, es decir, em los puntos tales que $x^2 + y^2 = 4.$, en el borde podemos observar que la función equivale a $h(y) = \frac{4y}{5}$ con $y \in [-2,2]$ y cuyo valor máximo es $\frac{8}{5}$ y cuyo mínimo es $-\frac{8}{5}$.

Observe además que al evaluar f en los puntos críticos interiores tenemos que $f(0,1) = 2$ y $f(0,-1) = -2$ de esta forma podemos concluir que 2 es el máximo y que -2 es el mínimo de la función f en la región dada.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por plantear la ecuación para determinar los puntos críticos interiores.
- (0.5 punto) por determinar que $(0,1)$ es punto crítico.
- (0.5 punto) por determinar que $(0,-1)$ es punto crítico.
- (0.5 punto) por evaluar en $(0,1)$.
- (0.5 punto) por evaluar en $(0,-1)$.
- (0.5 punto) por determinar que $(0,2)$ es punto crítico del borde.

- (0.5 punto) por determinar que $(0,-2)$ es punto crítico del borde.
- (0.5 punto) por evaluar en $(0,2)$.
- (0.5 punto) por evaluar en $(0,-2)$.
- (0.5 punto) por concluir que 2 es el máximo.
- (0.5 punto) por concluir que -2 es el mínimo.

4. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z) = 2x + 2y + 2z$ en la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

   Solución:

   Usaremos multiplicadores de Lagrange, para eso observe que debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2 & = 2\lambda x \\ 2 & = 2\lambda y \\ 2 & = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 9 \end{cases}$$

   cuya solución debe cumplir que $x = y = z$, reemplazando esto en la última ecuación del sistema obtenemos $x^2 = 3$, de esta manera obtenemos dos puntos: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, evaluando la función f en dichos puntos tenemos que:
   $f((\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})) = 6\sqrt{3}$ y que $f((-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})) = -6\sqrt{3}$, luego $6\sqrt{3}$ es el máximo y $-6\sqrt{3}$ es el mínimo.

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por plantear el sistema.
   - (1 punto) por determinar que $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ es punto crítico.
   - (1 punto) por determinar que $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ es punto crítico.
   - (0.5 punto) por evaluar en $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.
   - (0.5 punto) por evaluar en $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.
   - (1 punto) por concluir que $6\sqrt{3}$ es el máximo.
   - (1 punto) por concluir que $-6\sqrt{3}$ es el mínimo.