Ayudantía 15

Cálculo 2

Problema 1

Demuestre que el área de una esfera es $4\pi r^2$.

Problema 2

Encuentre la región E tal que

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\mathrm{d}V$$

es un máximo. Luego evalúe la integral.

Problema 3

Calcule la integral de $f(x, y, z) = xz$ sobre la región encerrada por el paraboloide $y = x^2 + (z-1)^2$ y el plano $y + 2z = 2$.

Problema 4

Calcular:

$$\iiint_S 5z\, dV$$

Donde S es el solido acotado superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y acotado inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Problema 5

El *valor promedio* de una función $f(x,y,z)$ sobre una región sólida E se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x,y,z)\, dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E.
Encuentre el valor promedio de la función $f(x,y,z) = x^2 z + y^2 z$ sobre la región encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

Problema 6*

Considere un volumen C con forma de cuña situada en el primer octante, con vértices en el origen, a distancia a del origen en los ejes x e y, y a distancia $\frac{3}{2}a$ en el eje z.

a) Describa la región C en la forma

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1 \le z \le c_2\,,\; g_1(z) \le y \le g_2(z)\,,\; u_1(y,z) \le x \le u_2(y,z) \right\}.$$

b) (Opcional) Verifique su descripción anterior calculando el volumen de la cuña y comparando con la fórmula del volumen de una pirámide.

c) Calcule la integral

$$\iiint_C f(x,y,z)\, dV\ ,$$

con $f(x,y,z) = 1 - \frac{1}{a^2}(x + y + \frac{2}{3}z)^2$.