Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2025

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación 2

Cada pregunta tiene como máximo 1.5 puntos.

1. Dados los puntos $A = (2, 1, 1)$ y $B = (0, 4, 1)$ y $C = (-2, 1, 4)$

   (a) Demuestre que A, B y C son no colineales. Luego determine el área del triángulo con vértices A, B y C.

   Solución: Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos A y B son

$$\begin{aligned} x = & \quad 2+2t \\ y = & \quad 1-3t \\ z = & \quad\quad 1 \end{aligned}$$

   con $t \in R$.
   Luego, si C perteneciera a dicha recta, entonces su coordenada z sería 1, lo cual no es verdad. Por lo que A, B y C no son colineales.

   El área del triángulo con vértices A, B y C es

$$\frac{1}{2}\|\vec{BC} \times \vec{AB}\|$$

   Como $\vec{BC} = (-2, -3, 3)$ y $\vec{AB} = (-2, 3, 0)$
   se tiene que

$$\frac{1}{2}\|\vec{BC} \times \vec{AB}\| = \frac{1}{2}\|(-2, -3, 3) \times (-2, 3, 0)\| = \frac{1}{2}\|(-9, -6, -12)\| = \frac{\sqrt{261}}{2}$$

   .
   Criterio de corrección:

   - (0.3 punto) por análisis correcto de no colinealidad.
   - (0.3 punto) por $\frac{1}{2}\|\vec{BC} \times \vec{AB}\|$ para cálculo de área.
   - (0.2 punto) por cálculo correcto.

   (b) Determine la ecuación del plano que pasa por el origen y que es paralelo al plano determinado por los puntos A, B y C.

   Solución: La normal al plano es:

$$\vec{BC} \times \vec{AB} = (-2, -3, 3) \times (-2, 3, 0) = (-9, -6, -12)$$

   Es decir la familia de ecuaciones del plano que tienen como normal al vector
   $\vec{n} = (-9, -6, -12)$ es

$$-9x - 6y - 12z + d = 0, \; d \in R$$

   El plano que pasa por el origen es cuando $d = 0$, es decir

$$-9x - 6y - 12z = 0 \text{ o } -3x - 2y - 4z = 0.$$

- (0.3 punto) por vectores directores del plano
- (0.2 punto) por vector normal al plano
- (0.2 punto) por ecuación del plano
- NOTA: La ecuación del plano se pudo haber escrito en forma paramétrica. En dicho caso no se necesita el cálculo del vector normal. Agregár ese puntaje a las ecuaciones paramétricas.

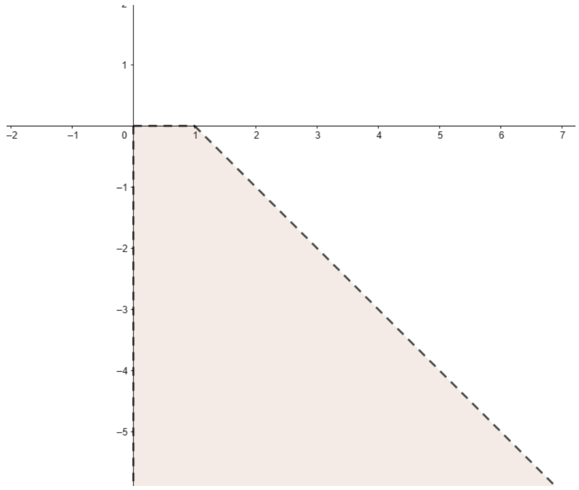
2. (a) Dada la función

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{-y}} + \frac{1}{\sqrt{x + y - 1}}$$

Determine el dominio de f y represéntelo gráficamente.

Solución: $\text{Dom}f = \{(x, y) : x > 0, y < 0 \wedge x + y < 1)\}$

Gráficamente es:



Criterio de corrección:

- (0.4 punto) por conjunto dominio
- (0.4 punto) por gráfico dominio

(b) Dada la función

$$f(x, y) = \frac{1}{|\, x \,| + |\, y \,|}$$

Encuentre, si es que existe, el o los valores de y tal que $f(-\frac{1}{3}, y) = 1$. Luego bosqueje la curva de nivel para $k = 1$.

Solución: $f(-\dfrac{1}{3}, y) = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + |\, y \,|} = 1$

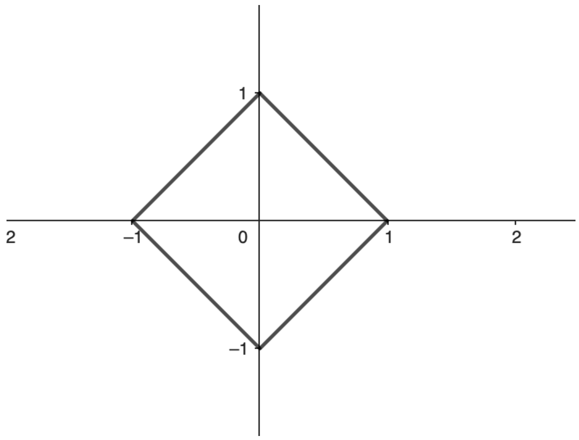
Luego se busca y tal que $\dfrac{1}{3} + |\, y \,| = 1$ o $|\, y \,| = \dfrac{2}{3}$.

Luego $y = \dfrac{2}{3}$ o $y = \dfrac{-2}{3}$.

El bosquejo de la curva de nivel $\dfrac{1}{|\, x \,| + |\, y \,|} = 1$ lo muestra la figura. Esto debido a que si

- Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ se tiene la recta $x + y = 1$
- Si $x \leq 0$ e $y \geq 0$ se tiene la recta $-x + y = 1$

- Si $x \geq 0$ e $y \leq 0$ se tiene la recta $x - y = 1$
- Si $x \leq 0$ e $y \leq 0$ se tiene la recta $-x - y = 1$



Criterio de corrección:

- (0.2 punto) por valor de primera coordenada y
- (0.2 punto) por valor de segunda coordenada y
- (0.3 punto) gráfico curva de nivel

3. (a) Determine si existe el siguiente límite y en caso de existir determine su valor $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

   (b) Determine si $f : R^2 \to R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es continua en $(0,0)$.

Solución:

(a) Para el cálculo de este límite usemos algunos caminos
Si consideramos acercarnos por la recta $y = 0$
Obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 0^3}{(x^2+0^2)^{5/2}} = 0$$

Ahora consideremos la trayectoria $x = y$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2x^3}{(x^2+x^2)^{5/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{4\sqrt{2}x^5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Luego por la unicidad del límte concluimos que el límite no existe.
Criterio de corrección:

- (0.3 punto) Por considerar una primera trayectoria y calcular su límite
- (0.3 punto) Por considerar una segunda trayectoria y calcular un limite diistinto al anterior.
- (0.1 punto) Por concluir correctamente que el limite no existe.

(b) Verifiquemos si f es continua:

i) Notar que $f(0,0) = 0$, por lo que f está definida en $(0,0)$.

ii) Calculemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$$

Basta notar que:

$$\left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x|$$

y de este modo

$$-|x| \leq \frac{xy^2}{x^4+y^2} \leq |x|$$

Así tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -|x| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

Por el Teorema del Sandwich se concluye que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$$

Por lo tanto el límite existe.

iii) Finalmente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Por lo tanto se tiene que f es continua en $(0,0)$.

Criterio de corrección:

- (0.1 punto) Por notar que f está definida en $(0,0)$.
- (0.2 punto) Por encontrar la cota en el teorema del Sandwich.
- (0.2 punto) Por concluir el valor del limite por el teorema del Sandwich.
- (0.1 punto) Por indicar que el valor del limite de f coincide con $(0,0)$.
- (0.2 punto) Por concluir que f es continua.

4. (a) Considere la función

$$w = x^3 y e^z$$

Suponga que:

$$\begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ y = s^2 + t^2 \\ z = s + t \end{cases}$$

Demuestre que: $\dfrac{\partial w}{\partial s}(1,0) + \dfrac{\partial w}{\partial t}(1,0) = 10e$

(b) Determine $D_{\vec{u}} f(3,-1,0)$ para $f(x,y,z) = 4x - y^2\mathbf{e}^{3xz}$ en la dirección de $\vec{v} = \langle -1, 4, 2\rangle$. En el punto $(3,-1,0)$ ¿cuál es la máxima derivada direccional para f?

SOL:

(a) Usando la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}$$
$$\frac{dw}{ds} = 3x^2ye^z(2s) + x^3e^z(2s) + x^3ye^z(1)$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}$$
$$\frac{dw}{dt} = 3x^2ye^2\cdot(-2t) + x^3e^z\cdot(2t) + x^3ye^z(1)$$

Por otro lado notar que:

Si $s=1$ y $t=0 \begin{cases} x=1 \\ z=1 \\ y=1 \end{cases}$

Reemplazando obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds}(1,0) &= 3e(2)+2e+e = 9e \\ \frac{dw}{dt}(1,0) &= e \end{aligned}$$

Por tanto $\dfrac{dw}{ds}(1,0)+\dfrac{dw}{dt}(1,0)=10e$

Criterio de corrección:

- (0.2 punto) Por calcular la derivada de $\frac{dw}{ds}$
- (0.2 punto) Por calcular la derivada de $\frac{dw}{dt}$
- (0.1 punto) Por evaluar correctamente$\frac{dw}{ds}(1,0)$
- (0.1 punto) Por evaluar correctamente$\frac{dw}{dt}(1,0)$
- (0.1 punto) Por verificar la igualdad pedida

(b) Comencemos calculando el gradiente de f

$$\nabla f = \left\langle 4-3zy^2\mathbf{e}^{3xz}, -2y\mathbf{e}^{3xz}, -3xy^2\mathbf{e}^{3xz}\right\rangle$$

Luego:

$$\nabla f(3,-1,0) = \langle 4,2,-9\rangle$$

Notar que la dirección que nos entregan no da un vector unitario, entonces para obtener nuestro $\vec{u}$ normalizamos $\vec{v}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2+(4)^2+(2)^2} = \sqrt{21}; \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\langle -1,4,2\rangle = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right\rangle$$

Por lo tanto la derivada direccional será dada por:

$$D_{\vec{u}}f(3,-1,0) = \langle 4,2,-9\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right\rangle = -\frac{14}{\sqrt{21}}$$

Notar que en el punto $(3,-1,0)$ la máxima derivada direccional será:

$$\|\nabla f(3,-1,0)\| = \sqrt{4^2+2^2+(-9)^2} = \sqrt{101}.$$

Criterio de corrección:

- (0.2 punto) Por calcular el gradiente de f evaluada en $(3,-1,0)$
- (0.1 punto) Por normalizar el vector $\vec{v}$.
- (0.2 punto) Por el cálculo correcto de la derivada diireccional.
- (0.2 punto) Por indicar que el valor máximo de la derivada es la norma del gradiente
- (0.1 punto) Por calcular la máxima derivada direccional.