PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

Interrogación 2 - MAT1620

1. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n.$$

Solución:

Para determinar el radio de convergencia usamos el criterio del cociente, esto es

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| x(n+1)^k \frac{(kn)!}{(kn+k)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{(n+1)(n+1)\cdots(n+1)(n+1)}{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+2)(kn+1)} \\
&= |x| \frac{1}{k^k}
\end{aligned}$$

obteniendo que el radio es k^k.

- (1 punto) por plantear correctamente el criterio del cociente.
- (2 punto) por el desarrollo algebraico del cociente
- (2 punto) por concluir correctamente el límite del cociente
- (1 punto) Por determinar el radio de convergencia.

2. Calcule el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n5^n}.$$

Solución:

Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ para todo } |x| < 1$$

por lo que tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x},$$

ya que $(\ln(x+1))' = \dfrac{1}{1+x}$, tenemos que

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}.$$

Por otra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

que corresponde a la serie anterior evaluada en $3/5$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n5^n} = \ln\left(1+\frac{3}{5}\right) = \ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

- (1 punto) por conocer la serie de $\dfrac{1}{1-x}$.
- (1 punto) por determinar la serie de $\dfrac{1}{1+x}$.
- (1 punto) por determinar la serie de $\ln(1+x)$.
- (2 puntos) por reconocer que la serie pedida corresponde a evalaur $3/5$ en $\ln(1+x)$.
- (1 punto) por concluir el valor.

3. Sea Π_1 el plano de ecuación $x - y + 2z + 1 = 0$ y Π_2 el plano que pasa por los puntos $(3,2,-1), (0,0,1)$ y $(1,2,1)$.

   a) Determine una ecuación para Π_2.
   Solución:

   Para encontrar una ecuación para el plano encontraremos dos vectores que estén contenidos en él:

   $$v_1 = (3,2,-1) - (0,0,1) = (3,2,-2) \text{ y } v_2 = (1,2,1) - (0,0,1) = (1,2,0)$$

   al hacer $v_1 \times v_2 = (4,-2,4)$ obtenemos un vector normal al plano, por lo tanto una ecuación para Π_2 es

   $$4x - 2y + 4z = 4$$

   - (1 punto) por determinar dos vectores contenidos en el plano.
   - (1 punto) por determinar un vector normal.
   - (1 punto) por determinar una ecuación.

b) Determine una ecuación paramétrica para la recta de intersección de los planos Π_1 y Π_2.
Solución:

Despejando y de la ecuación de Π_1 obtenemos que $x = 2z + x + 1$, reemplazando esto en la ecaución de Π_2 tenemos que $x = 3$, por lo tanto

$$x = 3, y = 2z + 4$$

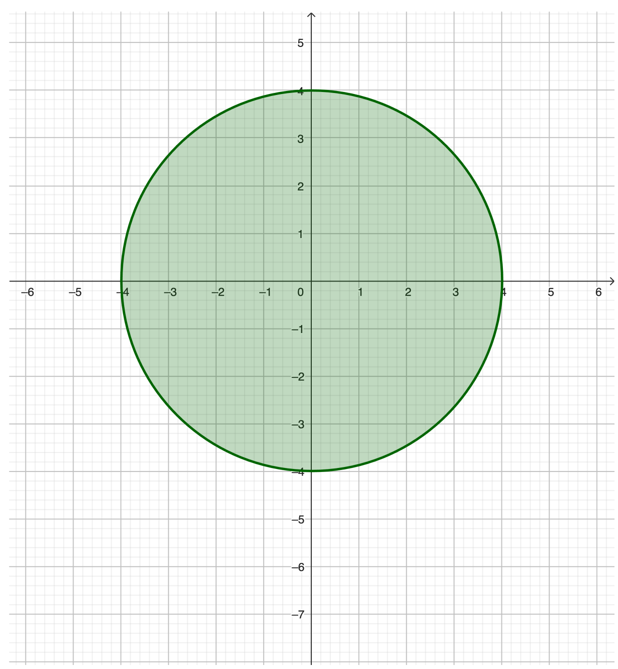
luego una ecuación paramétrica es $x = 3, y = 4 + 2t, z = t$.

- (1 punto) por el desarrollo algebrriaco.
- (1 punto) por despejar en función de una misma variable.
- (1 punto) por determinar una ecuación paramétrica.

4. Considere la función definida por

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

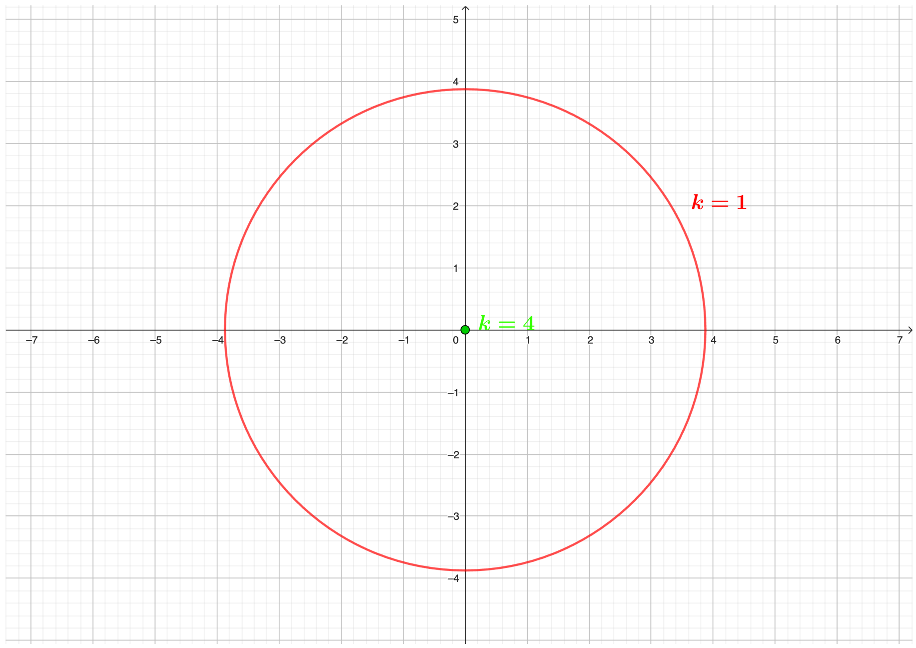
a) Determine y bosqueje, en el plano, el dominio de f.
Observe que $(x, y) \in \text{Dom}(f)$ si y solo si $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ es decir, el dominio de f corresponde a todos los puntos (x, y) del plano tales que $x^2 + y^2 \leq 16$ que corresponde al interior de la circunferencia centrada en el origen y de radio 4, incluyendo el borde de ésta, de la siguiente figura:



- (1 punto) por determinar la descripción analítica.
- (1 punto) por bosquejar la circunferencia.
- (1 punto) por incluir el borde.

b) Bosqueje el mapa de contorno para los niveles $k = 1$ y $k = 4$ para la función f.

Solución:



- (1 punto) por la circunferencia para $k = 1$
- (1 punto) por la circunferencia para $k = 4$
- (1 punto) por determinar el orden de las circunferencias de manera correcta (cuál va afuera y cuál va adentro).

5. Determine si los siguientes límites existen:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2}$.
Solución:

Si determinamos el límite pedido por la recta $y=0$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^8} = 0.$$

Si determinamos el límite por la curva $y=x^2$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{4x^8} = \frac{1}{4}$$

como los límites son distintos tenemos que el límite pedido no existe.

- (1 punto) por determinar el límite correctamente por una curva.
- (1 punto) por determinar el límite correctamente por una curva en la que se obtiene un resultado diferente a la curva anterior.
- (1 punto) por concluir que el límite no existe.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(\theta)\cos^2(y)}{x^2+y^2}$.
Solución:

Para determinar este límite usaremos coordenadas polares, obteniendo que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\cos^3(\theta)\cos^2(y)}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3(\theta)(\cos^2(r\text{sen}(\theta))}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos^3(\theta)\cos^2(r\text{sen}(\theta)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- (1 punto) por determinar el límite a calcular coordenadas polares.
- (1 punto) por el álgebra de límites.
- (1 punto) por determinar que el límite es cero.