PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

Interrogación 2 - MAT1620

1. Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}.$$

Solución:

Para determinar el intervalo convergencia usamos el criterio del cociente, esto es

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x-1}{5}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = \left|\frac{2x-1}{5}\right|.$$

obteniendo que la serie converge si $|2x-1|<5$ y diverge su $|2x-1|>5$, por lo tanto queda estudiar qué pasa cuando $|2x-1|=5$, es decir en $x=3$ y en $x=-2$.

Para $x=3$ se obtiene la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, que diverge por criterio p.

Para $x=-2$ se obtiene la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, que converge por criterio de series alternantes.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es $[-2,3)$.

- (1 punto) por plantear correctamente el criterio del cociente.
- (1 punto) por calcular correctamente el límite del cociente
- (1 punto) por concluir que converge en $(-2,3)$.
- (1 punto) Por determinar, justificadamente, que diverge en $x=3$.
- (1 punto) Por determinar, justificadamente, que converge en $x=-2$.
- (1 punto) Por determinar el intervalo de convergencia.

2. Exprese como serie de potencia la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \ln(1+x)dx.$$

Solución:

Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ para todo } |x| < 1$$

por lo que tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x},$$

ya que $(\ln(x+1))' = \dfrac{1}{1+x}$, tenemos que

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Al multiplicar por x^2 obtenemos que

$$x^2 \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{k+2}}{k}$$

integrando término a término tenemos que

$$\int x^2 \ln(1+x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int \frac{x^{k+2}}{k}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{k+3}}{k(k+3)} + C.$$

- (1 punto) por conocer la serie de $\dfrac{1}{1-x}$.
- (1 punto) por determinar la serie de $\dfrac{1}{1+x}$.
- (1 punto) por determinar la serie de $\ln(1+x)$.
- (1 punto) por determinar la serie de $x^2 \ln(1+x)$.
- (1 punto) por integrar para determinar la serie de $\displaystyle\int x^2 \ln(1+x)$.
- (1 punto) por incluir C en el resultado.

3. Considere las rectas

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(0,-1,-1)+t(1,3,1):\ t\in\mathbb{R}\},\\ L_2 &= \{(3,2,-1)+s(2,0,-1):\ s\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

a) Encuentre el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.
Solución:

Para encontrar el punto de intersección de las rectas debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} t &= 3+2s\\ -1+3t &= 2\\ -1+t &= -1-s \end{aligned}$$

De la tercera ecuación tenemos que $t=-s$, sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $s=-1$ y por tanto $t=1$, reemplazando en la segunda ecuación verificamos que se satisface y por tanto hay un punto de intersección y este corresponde a $(1,2,0)$.

- (0.5 punto) por plantear sistema correctamente.
- ((0.5 punto) por determinar el valor de s.
- (0.5 punto) por determinar el valor de t.
- (0.5 punto) por verificar que el punto satisface todas las ecuaciones del sistema.
- (1 punto) por determinar el punto de intersección.

b) Encuentre una ecuación del plano que contiene a las rectas L_1 y L_2.
Solución:

Observamos que el producto cruz entre los vectores directores de las rectas corresponde a un vector normal al plano pedido, así

$$(1,3,1)\times(2,0,-1)=(-3,3,-6)=-3(1,-1,2)$$

corresponde a un vector normal, luego, como pasa por el punto $(1,2,0)$ tenemos que una ecuación del plano es

$$x-y+2z=-1.$$

- (1 punto) por determinar producto cruz.
- (1 punto) por plantear los coeficientes del vector normal en la ecuación del plano.
- (1 punto) por determinar una ecuación.

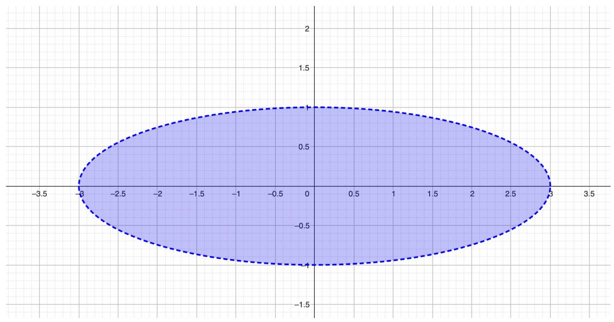
4. Considere la función definida por

$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$$

a) Determine y bosqueje, en el plano, el dominio de f.

Solución:

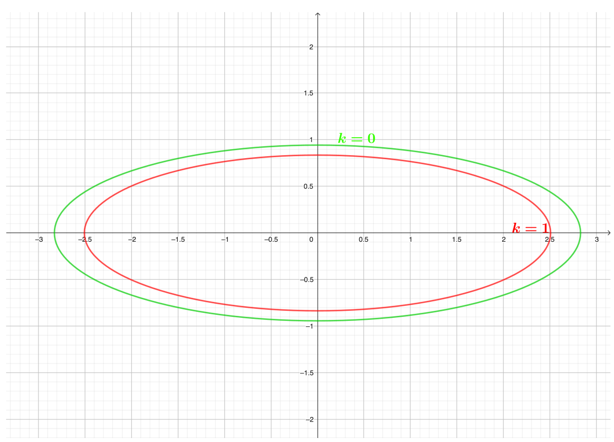
Observe que $(x, y) \in \text{Dom}(f)$ si y solo si $9 - x^2 - 9y^2 > 0$ es decir, el dominio de f corresponde a todos los puntos (x, y) del plano tales que $\dfrac{x^2}{3^2} + y^2 < 9$ que corresponde al interior de la elipse de la siguiente figura:



- (1 punto) por determinar la descripción analítica.
- (1 punto) por bosquejar la elipse.
- (1 punto) por dejar fuera el borde.

b) Bosqueje el mapa de contorno para los niveles $k = 1$ y $k = 0$ para la función f.

Solución:



- (1 punto) por elipse para $k = 1$
- (1 punto) por la elipse para $k = 0$
- (1 punto) por determinar el orden de las parábolas de manera correcta.

5. Determine si los siguientes límites existen:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$.
Solución:

Si determinamos el límite pedido por la recta $y = x$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x^2+1} = 0.$$

Si determinamos el límite por la curva $y = x^2$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^4+x^4} = \frac{3}{2}$$

como los límites son distintos tenemos que el límite pedido no existe.

- (1 punto) por determinar el límite correctamente por una curva.
- (1 punto) por determinar el límite correctamente por una curva en la que se obtiene un resultado diferente a la curva anterior.
- (1 punto) por concluir que el límite no existe.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$.
Solución:

Para determinar este límite usaremos coordenadas polares, obteniendo que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos^3(\theta)\text{sen}(\theta)-\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta))}{r^2}\\ &= \lim_{r\to 0} r^2(\cos^3(\theta)\text{sen}(\theta)-\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta))\\ &= 0\end{aligned}$$

- (1 punto) por determinar el límite a calcular coordenadas polares.
- (1 punto) por el álgebra de límites.
- (1 punto) por determinar que el límite es cero.