FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Ayudantía 11

Calculo II - MAT1620

Teorema de Fubini para Integrales Triples:
Si f es continua en el cuadro rectangular $R = [a,b]x[c,d]x[r,s]$, entoces

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

Funciona también, cambiar los límites de integración.

Integrales triples en regiones generales: Sea una región
$E = \{(x,y,z)|c \leq y \leq d, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$, entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

En español, para saber cuáles son los primeros límites de integración, es ver cuál es el piso y cuál es el techo de la región E (son superficies, por ejemplo, planos, paraboloides, etc). Luego para saber los segundos y terceros límites de integración, es ver en este caso la proyección de la región en el plano (x,y), es decir, tratar como si fuera una integral doble.

Coordenadas Cilíndricas: Dada una función f continua y la región
$E = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$, donde D es la región que se forma al proyectar la región E en el plano (x,y) y puede describirse fácilmente en coordenadas polares. Haciendo la transformación: $x = rcos\theta, y = rsen\theta, z = z$ queda

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(rcos\theta, rsen\theta)}^{u_2(rcos\theta, rsen\theta)} rf(rcos\theta, rsen\theta, z)dzdrd\theta$$

Momento y Centro de masa: Sea una región D con densidad variable $\rho(x,y)$, entonces las coordenadas del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

donde

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x,y,z)dV, M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)dV, M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)dV$$

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)dV$$

$$M_{ij} = Momento\ con\ respecto\ al\ plano\ ij$$
$$m = Masa\ del\ volumen\ D$$

1. Reescriba las siguientes integrales como la integral iterada que se pide:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdydx$$

Como

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz, \iiint_R f(x,y,z)dydxdz,$$

2. Calcule

$$\iiint_R (1-x-y-z)dV$$

Donde R es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$.

3. Determine el centroide del solido S acotado por el paraboloide $z=4x^2+4y^2$ y el plano $z=a, a>0$, sabiendo que la densidad es constante.

4. Encuentre el centroide de la región E acotada por los paraboloides $z=x^2+y^2$ y $z=36-3x^2-3y^2$, sabiendo que la densidad es constante.

5. Encuentre el volumen limitado por las superficies.

$$x^2+y^2=a^2, az=2a^2+x^2+y^2$$

Y el plano $z=0$, para $a>0$.

6. Considere el sólido encerrado entre los paraboloides $z=x^2+y^2, z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ y que está debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcule el volumen del sólido.

7. **Propuesto.** Calcular el volumen del solido interior al cilindro $x^2+y^2=2ax$, $a>0$ comprendido entre el plano xy y el cono $z^2=x^2+y^2$, $z\geq 0$.