Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Mat1620 - Cálculo II

Ayudantía 4
Series de potencias, Series de Taylor

Ayudante: Cristian Cornejo V. (crcornejo@uc.cl)

Problema 1. Determine el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia.

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-1)^k}{(k+2)2^k}$.

ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k \ln k}$.

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{x-3}{5x^2+2}\right)^k$.

Problema 2. Encuentre la representación en series de potencias de las siguientes funciones

i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

ii) $f(t) = \dfrac{1}{4t^2 - 12t + 8}$.

iii) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(1-x)^3}$.

Problema 3. Encuentre la serie de taylor en $x_0 = 0$ (Mclaurin) de $\cos^2(x)$ y demuestre que representa a $\cos^2(x)$ $\forall x$.

P.Propuesto. *i)* Encontrar la serie que converja a

$$\int_0^x \frac{\sin(u)}{u}\, du$$

e indique cuántos términos son necesarios para obtener un error menor a 0.001

ii) Considere $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$, y deduzca que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

iii) Encuentre la función a la cual converge la serie $f(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots$

Solución problema 2.

Encuentre la representación en series de potencias de las siguientes funciones

i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Solución:

Lo primero que debemos notar, es que desconocemos series para $\ln(x)$, pero que se puede obtener por medio de la integración de una serie geométrica.
Además,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Para obtener el primer término, debemos integrar la serie geométrica evaluada en $-x$, esto es,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n &= \frac{1}{1+x} \\
\int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \; dx &= \int \frac{1}{1+x} \; dx \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} &= \ln(1+x).
\end{aligned}$$

Para el segundo término tenemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\
\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; dx &= \int \frac{1}{1-x} \; dx \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} &= -\ln(1-x).
\end{aligned}$$

Para obtener la serie pedida solo basta sumar ambos resultados, de donde se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}(1+(-1)^n).$$

En este punto se puede apreciar que si n es impar, el resultado será 0, mientras que si n es par, la potencia de x debe duplicarse. Por esta razón podemos reescribir el resultado final de la siguiente manera

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2 \cdot x^{2n+1}}{2n+1}.$$

ii) $f(t) = \dfrac{1}{4t^2 - 12t + 8}$.

Solución:

Comenzaremos trabajando $f(t)$ hasta llegar a una forma en que resulte sencillo encontrar la serie correspondiente.

$$f(t) = \frac{1}{4t^2 - 12t + 8} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(t-2)(t-1)}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2-t)(1-t)}\right]$$

Usando fracciones parciales en el último factor obtenemos

$$f(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-t)} - \frac{1}{(2-t)}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-t)} - \frac{1}{2(1-\frac{t}{2})}\right]$$

Finalmente, reemplazando por series conocidas (serie geométrica), se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}}\right] = \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}\right]$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(2^{n+1}-1)}{2^{n+3}}$$

iii) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(1-x)^3}$.

Solución:

La función puede escribirse como $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

Comenzamos derivando la serie geométrica ($|x| < 1$).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} && \Big/ \cdot \frac{d}{dx}() \\
\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} && /\cdot x \\
\sum_{n=1}^{\infty} nx^n &= \frac{x}{(1-x)^2} && \Big/ \cdot \frac{d}{dx}() \\
\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} &= \frac{(1+x)}{(1-x)^3} && /\cdot x \\
\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n,\ |x| < 1.$$