Pauta Interrogación 1

Problema 1

(a) **(1pt)** Sea $t > e$. Muestre que

$$\int_e^t \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln(t)).$$

(b) **(3pts)** Determine si la integral

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(2+\ln(x^{5/2}))+\ln(x^x)}\,\mathrm{d}x$$

converge o no. De hacerlo, calcule su valor.

Sugerencia: utilice la parte anterior.

(c) **(2pts)** Calcule, si existe,

$$\int_4^8 \frac{3y}{\sqrt{y-4}}\,\mathrm{d}y.$$

Solución

(a) Realizando el cambio de variable $u = \ln(x)$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, obtenemos

$$\int_e^t \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \int_1^{\ln(t)} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln(u)\Big|_1^{\ln(t)} = \ln(\ln(t)).$$

(b) Sea $f : [e,\infty) \to \mathbb{R}$ el integrando del enunciado. Comenzamos notando que

$$\frac{1}{f(x)} = 2x + x\ln(x^{5/2})) + \ln(x^x) = 2x + \frac{5}{2}x\ln(x) + x\ln(x) = 2x + \frac{7}{2}x\ln(x).$$

Por otro lado, definiendo $g(x) = \dfrac{1}{\frac{7}{2}x\ln(x)}$, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{7}{2}x\ln(x)}{2x+\frac{7}{2}x\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\frac{7}{2}x\ln(x)}{2x+\frac{7}{2}x\ln(x)} - \frac{2x}{2x+\frac{7}{2}x\ln(x)}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2x}{x(2+\frac{7}{2}\ln(x))} \;=\; \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{2+\frac{7}{2}\ln(x)} \;=\; 1\ .$$

Con esto, deducimos que $\int_e^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge si y sólo si la integral de $\int_e^\infty g(x)\mathrm{d}x$ converge. Finalmente, por la parte **(a)** deducimos directamente que $\int_e^\infty g(x)\mathrm{d}x$ diverge a $+\infty$, por lo que $\int_e^\infty f(x)\mathrm{d}x$ diverge a $+\infty$.

(c) Realizando el cambio de variable $u = y-4$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}y$, obtenemos

$$\int_4^8 \frac{3y}{\sqrt{y-4}}\,\mathrm{d}y = 3\int_0^4 \frac{u+4}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 3\int_0^4 \left(u^{\frac{1}{2}}+4u^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u = \lim_{t\to0^+} 3\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+4\cdot 2u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_t^4 = 64.$$

En particular, la integral impropia converge.

Problema 2

Considere la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante la recurrencia

$$s_1 = 0, \quad s_{n+1} = \frac{3}{4}-\frac{(1-s_n)^2}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

(a) **(3pts)** Demuestre que $0\le s_n\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Sugerencia: utilice inducción matemática.

(b) **(1.5pts)** Demuestre que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Sugerencia: utilice la parte anterior.

(c) **(1.5pts)** Deduzca que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcule su límite.

Solución

(a) Procedemos por inducción. El caso base se satisface trivialmente, dado que $s_1 = 0$. Resta entonces mostrar que si $0\le s_n\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ se satisface para algún $n\in\mathbb{N}$, entonces $0\le s_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por definición,

$$s_{n+1} = \frac{3}{4}-\frac{(1-s_n)^2}{2} = \frac{3-2(1-2s_n+s_n^2)}{4} = \frac{1+4s_n-2s_n^2}{4}. \tag{1}$$

Dado que $4s_n\ge0$ y que $-2s_n^2\ge-1$, deducimos que $s_{n+1}\ge0$.

Por otro lado, notemos que $1-s_n\ge1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}>0$ y por lo tanto

$$(1-s_n)^2\ge\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2},$$

de donde deducimos que

$$s_{n+1} = \frac{3}{4}-\frac{(1-s_n)^2}{2}\le\frac{3}{4}-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-(2-2\sqrt{2}+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Mostremos que $s_{n+1} - s_n \geq 0$. En efecto, usando (1), tenemos

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1 + 4s_n - 2s_n^2}{4} - s_n = \frac{1}{4} - \frac{s_n^2}{2}.$$

Por la parte **(a)** sabemos que $0 \leq s_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, y que por ende $-\frac{s_n^2}{2} \geq -\frac{1}{4}$, lo que combinado con lo anterior implica el resultado.

(c) De la parte **(a)** sabemos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y de la parte **(b)** sabemos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona. Luego, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un real $L \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Pasando al límite $n \to \infty$ en la relación

$$s_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{(1 - s_n)^2}{2},$$

deducimos que $L = \frac{3}{4} - \frac{(1-L)^2}{2}$. Desarrollando, obtenemos la relación $L^2 = \frac{1}{2}$, y como $L \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, concluimos que $L = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Problema 3

(a) **(1.5pts)** Calcule, si existe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^{2n+2}}\right).$$

(b) **(1.5pts)** Considere la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante la recurrencia

$$s_1 = 0, \quad s_{n+1} = \left(\ln(n) - n^2\right) s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calcule, si existe, $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$.

(c) **(3pts)** Para $x \geq 0$, considere la función

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Determine el dominio de f, es decir, $\{x \geq 0 \ : \ f(x) < +\infty\}$.

Comentario de cultura matemática: esta función se denomina zeta de Riemann y se utiliza para estudiar la distribución de los números primos.

Solución

(a) Tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^{2n+2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

que corresponde a una serie geométrica convergente y cuyo valor es igual a $\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

(b) Afirmamos que $s_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual probaremos por inducción. El caso base se tiene trivialmente, dado que $s_1 = 0$. Por otro lado, si $s_n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $s_{n+1} = (\ln(n) - n^2)s_n = 0$, lo que prueba el paso inductivo. De esto, se deduce directamente que $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = 0$.

(c) Afirmamos que $\mathrm{Dom}(f) = (1, \infty)$, lo cual se desprende directamente del comportimiento de la serie p vista en clases. En efecto, para $x \in (1, \infty)$ (fijo), tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

es convergente, mientras que si $x \in [0, 1]$ (fijo) la serie es divergente.

Asignación de puntajes

Problema 1

(a)
- **(i)** **(0.5pts)** Realiza un cambio de variables que permita el cálculo de la integral.
- **(ii)** **(0.5pts)** Obtiene correctamente el valor de la integral.

(b)
- **(i)** **(0.5pts)** Simplifica correctamente el integrando utilizando propiedades de la función logaritmo natural.
- **(ii)** **(0.5pts)** Identifica una función de comparación adecuada para el problema.
- **(iii)** **(1pt)** Calcula correctamente el límite, cuando $x \to \infty$, del cociente entre el integrando y la función de comparación.
- **(iv)** **(0.5pts)** Deduce a partir del valor del límite anterior que la integral impropia converge si y sólo si la integral de la función de comparación converge.
- **(v)** **(0.5pts)** Deduce a partir del resultado de la parte **(a)** que la integral de la función de comparación diverge.

(c)
- **(i)** **(0.5pts)** Realiza un cambio de variables que permita el cálculo de la integral.
- **(ii)** **(0.5pts)** Calcula correctamente la integral resultante entre t y 4, donde $t > 0$.
- **(ii)** **(1pt)** Calcula correctamente el límite cuando $t \to 0^+$, deduciendo la convergencia de la integral impropia y obtiendo su valor.

Problema 2

(a)
- **(i)** **(0.5pts)** Realiza correctamente el paso base inductivo.
- **(ii)** **(0.5pts)** Escribe correctamente la hipótesis y la tesis de inducción.
- **(iii)** **(0.8pts)** Muestra que $s_{n+1} \geq 0$ (sin puntaje parcial).
- **(iv)** **(1.2pts)** Muestra que $s_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (sin puntaje parcial).

(b)
- **(i)** **(0.5pts)** Expresa $s_{n+1} - s_n$ de una manera que permita el uso de la parte **(a)**.
- **(ii)** **(1pt)** Deduce correctamente a partir de **(a)** que la sucesión es creciente.

- **(c)** **(i)** **(0.3pts)** Deduce a partir de **(a)** y **(b)** que la sucesión es convergente.
  - **(ii)** **(0.2pts)** Deduce a partir de **(a)** y **(b)** que el límite pertenece al intervalo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
  - **(iii)** **(0.7pts)** Utiliza correctamente las propiedades de los límites para obtener la relación $L^2 = \frac{1}{2}$.
  - **(iv)** **(0.3pts)** Deduce a partir de lo anterior el valor del límite.

Problema 3

- **(a)** **(i)** **(0.5pts)** Escribe la serie como una serie geométrica.
  - **(ii)** **(1pt)** Calcula correctamente el valor de la serie geométrica, obteniendo el valor de la serie pedida.
- **(b)** **(i)** **(0.5pts)** Identifica que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión nula.
  - **(ii)** **(0.5pts)** Demuestra lo anterior utilizando inducción.
  - **(iii)** **(0.5pts)** Deduce correctamente el valor de la serie.
- **(c)** **(i)** **(1pt)** Argumenta que la serie converge para $x > 1$ (fijo).
  - **(ii)** **(1pt)** Argumenta que la serie diverge para $x \leq 1$ (fijo).
  - **(iii)** **(1pt)** Deduce correctamente el dominio de la función.