Ayudantía 10

Calculo II - MAT1620

Teorema de Fubini: Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Región Tipo I: Es una región donde la coordenada y está acotada por dos funciones de x. Si f es continua en una región D tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

Región Tipo II: Es una región donde la coordenada x está acotada por dos funciones de y. Si f es continua en una región D tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid h_1(x) \le x \le h_2(x), c \le y \le d\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Jacobiano: Dada una transformación T en que $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, el jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Cambio de variables en una Integral Doble: dado un cambio de variable en que $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$. Al integran en una región R se tiene

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f\big(g(u,v), h(u,v)\big) * \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| * dudv$$

1. Cambie el orden de integración de las siguientes integrales dobles:

   a. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dxdy$
   b. $\int_1^2 \int_0^{\ln(x)} f(x,y)\,dydx$

2. Calcule las siguientes integrales dobles:

   a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\,dxdy$
   b) $\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\,dydx$

3. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_{arcseny}^{\frac{\pi}{2}} cosx\sqrt{1+\cos^2 x}\,dxdy$$

4. Escriba la siguiente integral

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)dxdy$$

   como una sola integral.

5. Sea D la región limitada por las curvas $y = x^2, x = y^2$. Calcule

$$\iint_D (x^2+2y)dydx$$

6. Sea D la región del plano que se encuentra dentro del círculo $x^2+y^2=2y$ pero fuera de $x^2+y^2=1$. Calcule

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

7. Calcule

$$\iint_D arctg(\frac{y}{x})dA$$

   donde D es la región encerrada por $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, y=x, y=\sqrt{3}x$ y cumple la condición $y>0$.