PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Pauta Examen - MAT1620

1. a) Determine la serie de potencias, centrada en $x = 0$, de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-x}.$$

Solución:

Sabemos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ para $x \in (-1, 1)$, por lo tanto

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

y

$$\frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2)^{-k} x^k,$$

de lo anterior tenemos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k + (2)^{-k}) x^k.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar la serie de $\dfrac{1}{1+x}$.
- (1 punto) por determinar la serie de $\dfrac{2}{2-x}$
- (1 punto) por determinar la serie de $f(x)$.

b) Use el inciso a) para determinar la serie de Maclaurin de la función

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{(2-x)^2}\right)$$

indicando el radio de convergencia de la serie.

Solución:

Observe que

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{(2-x)^2}\right) = \ln(1+x) - 2\ln(2-x)$$

por lo tanto

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2-x} = \sum_{k=0}^{\infty}((-1)^k + (2)^{-k})x^k$$

luego

$$g(x) = \int \sum_{k=0}^{\infty}((-1)^k + (2)^{-k})x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int ((-1)^k + (2)^{-k})x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k + (2)^{-k})}{k+1} x^{k+1} + C_0$$

con $C_0 = g(0) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$, es decir

$$g(x) = -\ln(4) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^{k-1} + (2)^{-k+1})}{k} x^k.$$

Del inciso anterior tenemos que el intervalo de convergencia de la serie de $\dfrac{1}{1+x}$ es $(-1,1)$, por otra parte, la serie de $\dfrac{1}{1-x/2}$ converge si $\dfrac{x}{2} \in (-1,1)$, es decir, para $x \in (-2,2)$, por lo tanto el intervalo de convergencia de la función f es $(-1,1)$.

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) por determinar $g'(x)$.
- (1 punto) por integrar correctamente la serie. .
- (0.5 puntos) por determinar el valor de C_0.
- (0.5 puntos) por determinar el intervalo de convergencia.
- (0.5 puntos) por la justificación determinar el intervalo de convergencia.

2. Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + \alpha t) + g(x - \alpha t)$$

es una solución a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Solución:

Sea $u = x + \alpha t$ y $v = x - \alpha t$, de esta forma

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \right)$$

luego

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)$$

por otra parte tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right)$$

luego

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) por determinar fórmula para $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.
- (1 punto) por determinar fórmula para $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$
- (0.5) por determinar $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ o algo equivalente.
- (0.5) por determinar $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ o algo equivalente.
- (0.5) por determinar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ o algo equivalente.
- (0.5) por determinar $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ o algo equivalente.
- (0.5 punto) por determinar fórmula para$\dfrac{\partial z}{\partial t}$.
- (1 punto) por determinar fórmula para$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$
- (1 punto) por concluir que satisface la ecuación.

3. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x, y) = x + y - xy$ en D donde D es la región triangular cerrada con vértices en $(0, 0), (0, 2)$ y $(4, 0)$.

Solución:

Para encontrar el máximo absoluto y el mínimo absoluto, partiremos buscando los puntos críticos en el interior del triángulo, para esto derivamos $f(x, y)$ respecto de x y y, obteniedno que

$$f_x = 1 - y, \quad f_y = 1 - x.$$

igualando a cero para encontrar los puntos críticos

$$1 - y = 0 \quad \text{y} \quad 1 - x = 0 \implies x = 1,\, y = 1.$$

obtenemos que el único punto crítico en el interior de D es $(1,1)$.

Ahora estudiamos los bordes del triángulo,

Borde 1=$\{(x,0) : 0 \leq x \leq 4\}$, la función restringida a ese borde es $f(x,y) = x + 0 - x \cdot 0 = x$, por lo tanto en este borde los puntos críticos a estudiar son $(0,0)$ y $(4,0)$.

Borde 2=$\{(0,y) : 0 \leq y \leq 2\}$, la función restringida a ese borde es $f(x,y) = 0 + y - 0 \cdot y = y$, por lo tanto en este borde los puntos críticos a estudiar son $(0,0)$ y $(0,2)$.

Borde 3=$\left\{\left(x, -\dfrac{1}{2}x + 2\right) : 0 \leq x \leq 4\right\}$, la función restringida a ese borde es la función $f(x,y) = x - \frac{1}{2}x + 2 - x\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 2$,

derivando respecto a x tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{2}x + 2 + \frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{3}{2} + x.$$

al igualar a cero obtenemos que $x = \dfrac{3}{2} \in (0,4)$, de esta forma

$$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{5}{4}.$$

por lo tanto en este borde los puntos críticos a estudiar en este borde son $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$, $(0,2)$ y $(4,0)$.

Evaluando tenemos que $f(0,0) = 0, f(1,1) = 1, f(0,2) = 2, f(4,0) = 4$ y $f\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{7}{8}$, por lo tanto el máximo es 4 y el mínimo es 0.

Distribución de puntajes:

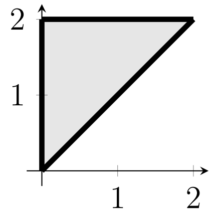
- (1 punto) por determinar que $(1,1)$ es el único punto crítico en el interior .
- (1 punto) por determinar los puntos críticos de borde 1.
- (1 punto) por determinar los puntos críticos de borde 2.
- (1 punto) por determinar los puntos críticos de borde 3.
- (1 punto) por concluir que 2 es el mínimo.
- (1 punto) por concluir que 4 es el máximo.

4. a) Considere la región triangular D cuyos vértices son $(0,0)$, $(0,2)$ y $(2,2)$. Escriba la integral doble

$$\iint_D \cos(y^2)\,dA$$

como integral iterada de tipo I y como integral iterada de tipo II. Determine el valor de la integral.

Solución: Un esbozo de la región D facilita la determinación de los límites de integración.



Como integral de tipo I:

$$\iint_D \cos(y^2)dA = \int_0^2 \int_x^2 \cos(y^2)dydx$$

y como integral de tipo II:

$$\iint_D \cos(y^2)dA = \int_0^2 \int_0^y \cos(y^2)dxdy$$

Esta última la podemos calcular haciendo una sustitución $u = y^2$ en el segundo paso:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^y \cos(y^2)dxdy &= \int_0^2 y\cos(y^2)dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 \cos(u)du \\ &= \frac{\text{sen}(4)}{2}\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por escribirla como integral de tipo I .
- (1 punto) por escribirla como integral de tipo II.
- (1 punto) por calcular correctamente la integral.

b) Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \text{sen}(x^2+y^2)dy\,dx.$

Solución:

Usamos coordenadas polares para determinar la región de integración, esto corresponde a $\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, de esta forma la integral es:

$$\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \text{sen}(x^2+y^2)dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^3 \text{sen}(r^2)rdrd\theta = \pi\int_0^3 \text{sen}(r^2)rdr$$

para resolver esta última integral hacemos $u = r^2$, tenemos que $du = 2rdr$ obteniendo que

$$\int_0^3 \text{sen}(r^2)rdr = \frac{1}{2}\int_0^9 \text{sen}(u)du = \left[-\frac{1}{2}\cos(u)\right]\Bigg|_0^9 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(9)$$

por lo tanto tenemos que

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)dy\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1-\cos(9)\right).$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) por describir la región en coordenadas polares.
- (0.5 punto) por enunciar correctamente la integral en coordenadas polares.
- (1 punto) por calcular correctamente la primera integral.
- (1 punto) por calcular correctamente la segunda integral.

5. Calcule

$$\iiint_E z dV$$

sabiendo que E es la región que se encuentra entre las esferas de ecuaciones $x^2+y^2+z^2=9$ y $x^2+y^2+z^2=4$ y sobre el plano $z=0$.

Solución:

Al cambiar a coordenadas esféricas tenemos que

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta, \quad y=\rho\sin\phi\sin\theta, \quad z=\rho\cos\phi,$$

con

$$dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

De lo anterior tenemos que la región E está limitada por:

$$2\le\rho\le 3, \quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

por lo tanto la integral queda

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_2^3 (\rho\cos\phi)\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Observamos que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_2^3 (\rho\cos\phi)\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\,d\phi\cdot\int_2^3\rho^3\,d\rho.$$

lo que nos permite simplificar calculando cada uno por separado, al calcular la integral en variable θ, tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi.$$

La integral respecto a la variable ϕ es

$$\int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi \, d\phi.$$

para calcularla usaremos la identidad $\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$, obteniendo que

$$\int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2\phi)\, d\phi. = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2\phi)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[\cos(0)-\cos(\pi)] = \frac{1}{4}[1-(-1)] = \frac{1}{2}.$$

Ahora, la última integral en la variable ρ queda

$$\int_2^3 \rho^3 \, d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}.$$

multiplicando los resultados obtenemos que

$$\iiint_E z\, dV = (2\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{65}{4}\right) = \frac{65\pi}{4}.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por describir la región en coordenadas esféricas.
- (1 punto) por plantear correctamente la integral en coordenadas esféricas.
- (1 punto) por calcular correctamente la primera integral.
- (1 punto) por calcular correctamente la segunda integral.
- (1 punto) por calcular correctamente la tercera integral.
- (1 punto) por resultado final.