Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Primer Semestre del 2025

Ayudantía 5

Cálculo 2

Problema 1

a) Sabiendo que para $-1 < x < 1$, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

determinar la serie de potencias, en torno a x = 0, de la función $\ln(1+x)$.

b) Utilice el resultado anterior para calcular el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

Problema 2

Encuentre una representación como serie de potencias para las siguientes funciones y determine el intervalo de convergencia.

a) $f(x) = \frac{3}{x^2-x-2}$

b) $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

Problema 3

Calcule la serie de Taylor para $f(x) = \sin(x)$ centrada en $a = \frac{\pi}{2}$ y determine el radio de convergencia asociado.

Problema 4

Determine la serie de Maclaurin de la función $f(x)$. Luego, utilice los primeros 4 términos de la serie para estimar el valor de $f(0{,}1)$.

$$f(x) = e^x + arctan(x)$$

Problema 5*

Demuestre que para cualquier $R > 1$ y $N \in \mathbb{N}$, existe una constante $c > 0$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\left(1 + \frac{R}{N}\right)\left(1 + \frac{R}{N+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{R}{n}\right) \geq cn^R.$$

Problema 6*

(Principio de Unicidad) Sea $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función analítica en I (esto es, que coincide con sus series de Taylor en I). Demuestre que las siguientes tres propiedades son equivalentes:

(i) f es constantemente 0 en I.

(ii) Existe $b \in I$ tal que $f^{(n)}(b) = 0$ para todo $n \geq 0$.

(iii) Existe una secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números no-repetidos en I tales que $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la cual converge a un punto de I.

Concluya que:

a) Si dos funciones f y g analíticas en I coinciden en cualquier subintervalo $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset I$, entonces $f = g$ en todo I.

b) Si f es una función analítica en I que no es constantemente 0, entonces para cualquier $x_0 \in I$, f puede ser escrita como $f(x) = (x - x_0)^m g(x)$, donde $m \geq 0$ es algún entero y $g(x)$ es una función analítica en I tal que $g(x_0) \neq 0$.