PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

Pauta Interrogación 3 - MAT1620

1. a) Sea $z = f(x, y)$ una función continua con segundas derivadas parciales continuas, con $x = r^2 - s^2$ e $y = rs$. Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$.

Solución:
Usando la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

reemplazando tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(r),$$

derivando nuevamente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right)(-2s) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right) r$$

reemplazando, tenemos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 4s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4rs\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por determinar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$.
- (1 punto) por determinar, la fórmula para $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$.
- (1 punto) por determinar, haciendo los reemplazos, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$.

b) Sea $w(u,v,) = h(u,v,g(u,v))$, con h y g funciones continuas con segundas derivadas parciales continuas. Determine $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$.

Solución:

Usando regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial u}$$

derivando nuevamente tenemos que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial g \partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial g} + \frac{\partial^2 h}{\partial g^2}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

Distribución de puntaje:

– (1 punto) por determinar $\dfrac{\partial w}{\partial u}$.

– (2 puntos) por determinar $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$.

2. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está definido por

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz.$$

a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3,4,5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b) ¿En qué dirección V crece con mayor rapidez en P?

c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

Solución. Tenemos que $\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz, xz - 3x, xy)$, y $\nabla V(3,4,5) = (38,6,12)$.

a) La razón de cambio es

$$D_v V(3,4,5) = \nabla V(3,4,5) \cdot \frac{v}{|v|} = (38,6,12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

b) La dirección en que V cambia con mayor rapidez en P ocurre cuando $v = \nabla V(3,4,5) = (38,6,12)$.

c) La razón máxima de cambio de en P es $|\nabla V(3,4,5)| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624}$.

Distribución de puntaje:

- (1 punto) Por el gradiente.
- (1 punto) por obtener correctamente la derivada direccional.
- (1 punto) por reconocer la dirección donde se produce el mayor cambio.
- (1 punto) por determinar la dirección.
- (1 punto) por reconocer cuál es la razón máxima de cambio.
- 1 punto) por calcularla razón máxima de cambio.

3. Considere la función
$$f(x, y) = \ln(x^2 y) + x\cos(y^2 - 1).$$

   a) Encuentre el plano tangente a la función $f(x, y)$ en el punto $(1, 1)$.
   b) Encuentre una aproximación de $f(1.1, 0.9)$ usando el resultado anterior.

   Solución:

   Las derivadas parciales son
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + \cos(y^2 - 1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - 2xy\sin(y^2 - 1)$$

   Evaluando cada una en el punto $(1, 1)$, obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ y que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$ y por lo tanto el plano tangente es
$$z = f(1, 1) + (x - 1)\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} + (y - 1)\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1 + 3(x - 1) + (y - 1) = 3x + y - 3.$$

   La aproximación lineal dada por el plano tangente determinado anteriormente es
$$f(1.1, 0.9) \approx L(1.1, 0.9) = 1.2.$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) Por determinar la fórmula para las derivadas parciales.
   - (1 punto) Por determinar el valor de las derivadas parciales en el punto (1,1).
   - (2 puntos) Por la ecuación del plano tangente.
   - (2 puntos) Por la aproximación.

4. Determine el máximo y mínimo absoluto de la función $f(x, y) = x + y - xy$ sobre la región encerrada por el triangulo de vértices $(0, 0), (0, 2)$ y $(4, 0)$, incluyendo el borde de este.

   Solución:

   Partimos buscando los puntos en el interior del triángulo en donde podrían encontrarse los extremos, para eso debemos resolver el sistema $f_x = 1 - y = f_y = 1 - x = 0$ cuya única solución es el punto $(1, 1)$. y observamos que $f(1, 1) = 1$.

   Ahora analizamos el primer borde del triángulo que corresponde al conjunto $B_1 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 2\}$. Lo primero que se observa que la función restringida a ese borde corresponde a $f(y) = y$ que tiene como máximo 2 y como mínimo 0.

   Ahora analizamos el segundo borde del triángulo que corresponde al conjunto $B_2 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 4\}$. Lo primero que se observa que la función restringida a ese borde corresponde a $f(x) = x$ que tiene como máximo 2 y como mínimo 0.

   Finalmente analizamos el tercer borde del triángulo que corresponde al conjunto $B_3 = \{(x, (2-x/2)) : 0 \leq x \leq 4\}$. Lo primero que se observa que la función restringida a ese borde corresponde a $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 2$ que tiene como máximo 4 y como mínimo 7/8.

   Del análisis anterior tenemos que el máximo es 4 y el mínimo 0.

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por estudiar el interior.
- (1 punto) por estudiar en el primer borde.
- (1 punto) por estudiar en el segundo borde.
- (1 punto) por estudiar en el tercer borde.
- (1 punto) por el máximo.
- (1 punto) por el mínimo.

5. Determine el máximo de la función $f(x,y,z) = \ln(xyz^3)$ sobre la esfera $x^2+y^2+z^2 = 20$. ¿Por qué el valor encontrado es un máximo?

Solución:

Usamos el método de Lagrange con $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, obteniendo que $\nabla f = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{3}{z}\right)$ y $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$, por lo que el sistema asociado es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \lambda 2x \\ \frac{1}{y} &= \lambda 2x \\ \frac{3}{z} &= \lambda 2x \\ x^2+y^2+z^2 &= 20 \end{aligned}$$

Obteniendo como soluciones

$$P_1 = (2,2,2\sqrt{3}), P_2 = (2,-2,-2\sqrt{3}), P_3 = (-2,-2,2\sqrt{3}), P_4 = (-2,2,-2\sqrt{3})$$

al evaluar, obtenemos que $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = f(P_4) = \ln(96\sqrt{3})$ y que corresponde al máximo ya que, por ejemplo, $(2\sqrt{3},2,2)$ pertenece a la esfera pero $f(2\sqrt{3},2,2) = ln(32\sqrt{3}) < \ln(96\sqrt{3})$.

Distribución de puntaje:

- (2 puntos) por plantear el sistema.
- (2 puntos) por resolver el sistema.
- (1 punto) por determinar el máximo.
- (1 punto) por justificar que es máximo.