**Párrafo 7.8 Integrales Impropias**

El objetivo de este párrafo es estudiar las integrales impropia y su convergencia o divergencia.

**Una integral "propia":**

> **restart:**

> **f:=x->x;**

> **plot(f(x),x=1..2);**

> **Int(f(x),x=1..2)=int(f(x),x=1..2);**

**Ahora veamos una integral "impropia" (del tipo I)**

> **restart:**

> **assume(t>1);**

> **f:=x->1/x^2;**

> **plot(f(x),x=1..5);**

> **Int(f(x),x=1..t)=int(f(x),x=1..t);**

> **Int(f(x),x=1..infinity)=limit(int(f(x),x=1..t),t=infinity);**

**Por otra parte (ejemplo 1):**

> **restart:**

> **assume(t>1):**

> **g:=x->1/x;**

> **plot(g(x),x=1..5);**

> **Int(g(x),x=1..t)=int(g(x),x=1..t);**

> **Int(g(x),x=1..infinity)=limit(int(1/x,x=1..t),t=infinity);**

**El ejemplo 2:**

> **restart:**

> **assume(t>0):**

> **h:=x->x\*exp(x);**

> **plot(h(x),x=-infinity..0);**

> **Int(h(x),x=-t..0)=int(h(x),x=-t..0);**

> **Int(x\*exp(x),x=-infinity..0)=limit(int(x\*exp(x),x=-t..0),t=infinity);**

**El ejemplo 3:**

> **restart:**

> **assume(t>0):**

> **f:=x->1/(1+x^2);**

> **plot(f(x),x=-infinity..infinity);**

> **Int(f(x),x=0..t)=int(f(x),x=0..t);**

> **Int(f(x),x=-infinity..infinity)=limit(int(f(x),x=0..t)+int(f(x),x=-t..0),t=infinity);**

**El ejemplo 4::**

> **restart:**

> **int(1/x^p,x=1..infinity);**

> **assume(-p+1<0):**

> **Int(i/x^p,x=1..infinity)=int(1/x^p,x=1..infinity);**

> **p:='p':**

> **assume(-p+1>0):**

> **Int(1/x^p,x=1..infinity)=simplify(int(1/x^p,x=1..infinity));**

**Ahora integrales del tipo II**

**El ejemplo 5:**

> **restart:**

> **f:=x->1/sqrt(x-2);**

> **plot(f(x),x=2.1..5);**

> **Int(f(x),x=2..5)=limit(int(f(x),x=t..5),t=2,right);**

> **int(f(x),x=2..5);**

**El ejemplo 6:**

> **restart:**

> **g:=x->sec(x);**

> **plot(g(x),x=0..Pi/2-.1);**

> **assume(t>0 and t<Pi/2):**

> **Int(g(x),x=0..Pi/2)=limit(int(g(x),x=0..t),t=Pi/2,left);**

>

**El ejemplo 7:**

> **restart:**

> **h:=x->1/(x-1);**

> **plot(h(x),x=0..3,discont=false);**

> **assume(0<t and t<1):**

> **i1:=limit(int(h(x),x=0..t),t=1,left);**

> **assume(1<t and t<3):**

> **i2:=limit(int(h(x),x=t..3),t=1,right);**

**El ejemplo 8:**

> **restart:**

> **f:=x->log(x);**

> **plot(f(x),x=0..1);**

> **int(f(x),x);**

> **Int(f(x),x=0..1)=limit(int(f(x),x=t..1),t=0,right);**

**Aplicaciones de los teoremas de comparación**

**El ejemplo 9:**

> **restart:**

> **f:=x->exp(-x^2);**

> **plot(f(x),x=0..infinity);**

> **Int(f(x),x=0..infinity)=int(f(x),x=0..infinity);**

Nótese que:

> **assume(t>0);**

> **int(f(x),x=0..t);**

**El ejemplo 10:**

> **restart:**

> **g:=x->(1+exp(-x))/x;**

> **plot(g(x),x=1..infinity);**

> **Int(g(x),x=1..infinity)=int(g(x),x=1..infinity);**

**Ahora algunos de los problemas propuestos:**

**Problema 3:**

> **restart:**

> **f:=x->1/x^3;**

> **plot(f(x),x=1..10);**

> **assume(t>1):**

> **F:=t->int(f(x),x=1..t);**

> **evalf(F(10)); evalf(F(100)); evalf(F(1000));**

> **A:=limit(F(t),t=infinity);**

**Problema 5:**

> **restart:**

> **g:=x->1/(3\*x+1)^2;**

> **plot(g(x),x=1..infinity);**

> **int(g(x),x);**

> **assume(t>1):**

> **Int(g(x),x=1..infinity)=limit(int(g(x),x=1..t),t=infinity);**

> **int(g(x),x=1..infinity);**

**Problema 13:**

> **restart:**

> **h:=x->x\*exp(-x^2);**

> **plot(h(x),x=-infinity..infinity);**

> **int(h(x),x);**

> **Int(h(x),x=-infinity..infinity)=limit(int(x\*exp(-x^2),x=-t..t),t=infinity);**

> **int(h(x),x=-infinity..infinity);**

**Problema 21:**

> **restart:**

> **f:=x->log(x)/x;**

> **plot(f(x),x=1..infinity);**

> **int(f(x),x);**

> **Int(f(x),x=1..infinity)=limit(int(f(x),x=1..t),t=infinity);**

> **int(f(x),x=1..infinity);**

**Problema 29:**

> **restart:**

> **g:=x->(x+2)^(-1/4);**

> **int(g(x),x);**

> **Int(g(x),x=-2..14)=limit(int(g(x),x=t..14),t=-2,right);**

> **int(g(x),x=-2..14);**

**Problema 37:**

> **restart:**

> **h:=x->exp(1/x)/x^3;**

> **plot(h(x),x=-1..0);**

> **int(h(x),x);**

> **assume(t<0);**

> **Int(exp(1/x)/x^3,x=-1..0)=limit(int(exp(1/x)/x^3,x=-1..t),t=0,left);**

> **int(exp(1/x)/x^3,x=-1..0);**

**Problema 39**

> **restart:**

> **f:=x->x^2\*log(x);**

> **plot(f(x),x=0..2);**

> **int(f(x),x);**

> **Int(f(x),x=0..2)=limit(int(f(x),x=t..2),t=0,right);**

> **int(f(x),x=0..2);**

**Problema 43:**

> **restart:**

> **y:=x->2/(x^2+9);**

> **plot(y(x),x=-5..5);**

> **int(y(x),x=-t..t);**

> **Int(y(x),x=-infinity..infinity)=limit(int(y(x),x=-t..t),t=infinity);**

> **int(y(x),x=-infinity..infinity);**

**Problema 55:**

> **restart:**

> **f:=x->1/(sqrt(x)\*(x+1));**

> **plot(f(x),x=0..infinity);**

> **int(f(x),x);**

> **Int(f(x),x=0..infinity)=int(f(x),x=0..infinity);**

> **I1:=int(f(x),x=0..1);**

> **I2:=int(f(x),x=1..infinity);**

> **If:=I1+I2;**

**Problema 61:**

> **restart:**

> **g:=x->x;**

> **Int(g(x),x=-infinity..infinity)=int(g(x),x=-infinity..infinity);**

> **limit(int(g(x),x=-t..t),t=infinity);**

Anexo: dos integrales impropias importantes:

> **restart:**

> **f:=x->sin(x)/x;**

> **plot(f(x),x=0..infinity);**

> **int(f(x),x=0..infinity);**

Pero:

> **int(abs(f(x)),x=0..infinity);**

> **evalf(%);**

Por otra parte:

> **g:=x->exp(-x^2);**

> **plot(g(x),x=0..infinity);**

> **int(g(x),x=0..infinity);**

>