目次

第I部

実数

第 II 部

微分積分

第1章

三角函数

1.1　公式

1.1.1 (加法定理)**.**

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\\
\tan(x+y) &= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}
\end{aligned}$$

1.1.2 (ピタゴラスの基本三角函数公式)**.**

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

1.1.3. $\sin(x)$ の　$x=0$　のときの微分係数

$$\left.\frac{d}{dx}\sin(x)\right|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$$

1.1.4 (倍角の公式)**.**

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\
&= 2\cos^2(x) - 1\\
&= 1 - 2\sin^2(x)\\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\\
\tan(2x) &= \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}
\end{aligned}$$

1.1.5 (半角の公式)**.**

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$$
$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$
$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

1.1.6 (和積公式)**.**

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\sin(x)+\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

1.1.7 (積和公式)**.**

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$$
$$\sin(x)\sin(y) = -\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y))$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

1.1.8 (負角公式)**.**

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

1.1.9 (余角公式)**.**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot(x)$$

1.1.10 (補角公式)**.**

$$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi-x) = \sin(x)$$
$$\tan(\pi-x) = -\tan(x)$$

第 III 部

線形代数

第2章

行列式

2.1　集合

2.1.1 Df. 自然数 n の切片 $\mathbb{N}[n]$ を，次のように定義する．

$$\mathbb{N}(n) := \{x \in \mathbb{N}; 0 \leq x < n\}$$

2.1.2 Df. 集合 A が有限集合とは，ある自然数 n の切片 $\mathbb{N}(n)$ から有限集合 A への全単射が存在することである．すなわち，

$$\exists n \in \mathbb{N}; \exists \varphi : \mathbb{N}(n) \longrightarrow A; \varphi : \text{全単射}$$

である．

2.2　置換

(1)　置換の定義

(2)　あみだくじ

(3)　置換の性質

(4)　偶置換と奇置換

(5)　sgn 函数

2.3　実数の四則演算

(a)　数列

2.3.1 Df (有限列). 　ある自然数 n から実数の集合 $\mathbb{R}$ への写像 a を実数の有限列といい，$\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$ で表す．すなわち，

$$\{a_i\}_{i=0}^{n-1} :\Leftrightarrow a : \mathbb{N}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

2.3.2 Df (無限列). 　自然数の集合 $\mathbb{N}$ から実数の集合 $\mathbb{R}$ への写像 a を実数の有限列といい，$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ で表す．すなわち，

$$\{a_i\}_{i=0}^{\infty} :\Leftrightarrow a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(b)　総和

2.3.3 Df. 数列 $\{a_i\}_{i=0}$ の総和を次のように定義する．

$$\sum_{i=0}^{n} a_i := \begin{cases} a_0 & n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n & 0 < n \end{cases}$$

2.3.4 Df. l, n が自然数のとき，数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 　の l 項から $l+n$ 項までの総和を次のように定義する．

$$\sum_{i=l}^{l+n} a_i := \sum_{i=0}^{n} a_{l+i}$$

2.3.5 (結合法則). 　数列 $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ について，次の一般結合法則が成り立つ．

$$0 \leq \forall k < n; \sum_{i=0}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

2.3.6 (交換法則)**.**　数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ について，次の一般交換法則が成り立つ．

$$\forall\sigma \in S_n; \sum_{i=0}^{n} a_{\sigma(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

(c)　総乗

2.3.7 Df. 数列 $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ の総乗を次のように定義する．

$$\prod_{i=0}^{n} a_i := \begin{cases} a_0 & n = 0 \\ \prod_{i=0}^{n-1} a_i + a_n & 0 < n \end{cases}$$

2.4　行列式の定義

2.4.1 Df (行列式)**.**　n 次正方行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ の行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ を次のように定義する．

$$\det(\boldsymbol{A}) := \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ を，

$$\det(a_{ij})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と表すことがある．さらに，行列 $\boldsymbol{A}$ を列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ で表すとき，

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

と表すことがある．

2.4.2. 転置行列 ${}^t\boldsymbol{A}$ の行列式 $\det({}^t\boldsymbol{A})$ は，元の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ と等しい．すなわち，

$$\det({}^t\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$$

が成り立つ．

2.5　行列式の展開

2.5.1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}+0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0+a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0+a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12}+0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0+a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & 0+a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{vmatrix}$$

QED