1　行列式の定義

1.1 Df.　行列 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (a_{ij})$ とするとき，この行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ を次のように定義する．

$$\det(\boldsymbol{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1\,\sigma(1)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \tag{1}$$

行列式は，次のように表すことがある．

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n), \det(a_{ij}), |A|, |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n|, |a_{ij}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

2　行列式の双線形性

2.1. 双線形性

1) a

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_j + \boldsymbol{a}''_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}''_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1j} + a''_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nj} + a''_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a''_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a''_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

2) b

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & \lambda a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

2.2. $\tau \in S_n$

$$\det(\boldsymbol{a}_{\tau(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\tau(j)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\tau(n)}) = \operatorname{sgn}(\tau) \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1\tau(1)} & \ldots & \lambda a_{1\tau(j)} & \ldots & a_{1\tau(n)} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n\tau(1)} & \ldots & \lambda a_{n\tau(j)} & \ldots & a_{n\tau(n)} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

2.3.

$$\det({}^t\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}) \tag{9}$$

3　行列式の展開

3.1 Df.

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

3.2.

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{i1}\det(\boldsymbol{A}_{1i}) + \cdots + a_{ij}\det(\boldsymbol{A}_{ij}) + \cdots + a_{in}\det(\boldsymbol{A}_{in}) \tag{11}$$