Chapitre : Codage des nombres entiers positifs.

François Boyer

27 novembre 2022

1 Deux signes pour écrire tous les nombres naturels...

203501 - Premiers pas en binaire ! - Passage de tête de la base 10 à la base 2

203501A - Premiers pas en binaire ! - Passage de tête de la base 2 à la base 10

$$(9)_{10} = \square\ \square\ \square\ \square\ \square = (\qquad\qquad)_2$$

$$(31)_{10} = \square\ \square\ \square\ \square\ \square = (\qquad\qquad)_2$$

$$(2)_{10} = \square\ \square\ \square\ \square\ \square = (\qquad\qquad)_2$$

$$(12)_{10} = \square\ \square\ \square\ \square\ \square = (\qquad\qquad)_2$$

$$(27)_{10} = \square\ \square\ \square\ \square\ \square = (\qquad\qquad)_2$$

$(7)_{10} =$ $= (\quad)_2$

203501A - Premiers pas en binaire ! - Passage de tête de la base 10 à la base 2

$(01011)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(10110)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(00101)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(10011)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(01010)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(10100)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(00010)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(00100)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(01000)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(10000)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

203500 Passer de la représentation d'une base dans une autre. Représenter en base 2.

Question 1 - On appelle **bit de poids faible** le bit le plus à droite du mot-nombre. Que constate-t-on ? Qu'indique le bit de poids faible pour les nombres entiers ? Réponds puis illustre par un exemple ci-dessous.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$(\qquad)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

$(\qquad)_2 =$ $= (\quad)_{10}$

Question 2 - Si derrière un nombre écrit en binaire on ajoute un bit à l'état bas (autrement dit on ajoute un *zéro*), qu'advient-il de la quantité représentée ? Même question pour deux *zéros*, trois *zéros*,... Réponds puis illustre par un exemple ci-dessous.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$(\qquad\qquad)_2 = \qquad = (\qquad\qquad)_{10}$

$(\qquad\qquad)_2 = \qquad = (\qquad\qquad)_{10}$

$(\qquad\qquad)_2 = \qquad = (\qquad\qquad)_{10}$

Question 3 - En base 2, quelle quantité représente un *un* suivi de n *zéros* ? Par exemple : $(10)_2$ ou $(1000)_2$. Réponds puis illustre par un exemple ci-dessous.

$(\qquad\qquad)_2 = \qquad = (\qquad\qquad)_{10}$

$(\qquad\qquad)_2 = \qquad = (\qquad\qquad)_{10}$

$(\qquad\qquad)_2 = \qquad = (\qquad\qquad)_{10}$

203501B - Premiers pas en binaire ! - Quelques règles en binaire - Vidéos à regarder pour corriger les questions précédentes

203500 Représenter en base 2.

203502 - Additions en binaire - Poser et évaluer des additions de nombres représentés en binaire.

$$\begin{array}{rr} & (\ 101111)_2 \\ + & (\ 111110)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 100011)_2 \\ + & (\ 110100)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 100101)_2 \\ + & (\ 110000)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 101010)_2 \\ + & (\ 111110)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 100101)_2 \\ + & (\ 111000)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 100101)_2 \\ + & (\ 101010)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 101001)_2 \\ + & (\ 101010)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 111011)_2 \\ + & (\ 111101)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (\ 100110)_2 \\ + & (\ 101001)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & (\ 101001)_2 \\ + & (\ 111101)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

203500 Additionner, soustraire, multiplier en base 2.

203502 - Table d'addition en base 2 - Compléter avec chaque case de la table d'addition

203500 Additionner, soustraire, multiplier en base 2.

+	0	1
0		
1		

203502 - Soustractions en binaire - Poser et évaluer des soustractions de nombres représentés en binaire

$$\begin{array}{rr} & (\ 1011111)_2 \\ - & (\ 110110)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & (\ 1101011)_2 \\ - & (\ 111011)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (1010011)_2 \\ - & (101110)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (101111)_2 \\ - & (111110)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (1011011)_2 \\ - & (110010)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (1010110)_2 \\ - & (101011)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (100001)_2 \\ - & (101011)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (1101101)_2 \\ - & (110011)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (1100000)_2 \\ - & (111001)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & (1101001)_2 \\ - & (101111)_2 \\ \hline & (\qquad\qquad)_2 \end{array}$$

203500 Additionner, soustraire, multiplier en base 2.

☐ ☐ ☐ ☐

2 Encodage des entiers naturels

L'encodage des entiers naturels est l'encodage le plus simple. Il suffit de représenter l'entier comme écrit en base 2. Mais kesako la base 2 ? Mais en fait kesako déjà la base 10 ? [1]

1. extrait de «Numérique et Sciences Informatiques - Première - 30 leçons avec exercices corrigés »- Ellipses

203503 Représentation des entiers naturels - (Base 2 et 10)

203503 Écouter à nouveau la présentation de la représentation en base 2 et compléter le cours (2.1 et 2.2)

2.1 Écriture des entiers en base 10

Un nombre entier en base 10 est un suite de chiffres. En base 10 on peut écrire tous les nombres entiers avec dix chiffres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

C'est ce qu'on appelle une numération de position, autrement dit, la position du chiffre indique la quantité qu'il représente.

En base 10, si un 9 est dans la 2ème case [2] alors il représente 9×100 ou encore 9 centaines.

La séquence de chiffre 61027 autrement dit le nombre $N = 61027$ vaut donc :

Plus généralement, une série de k chiffres :

$$d_{k-1}d_{k-2}...d_1d_0$$

vaut si c'est en base 10 :

Comme généralement on manipule seulement des nombres en base 10 alors on ne précise pas. En informatique, on précisera plus facilement, étant donné qu'on manipulera souvent du binaire et aussi de l'hexadécimal.

On écrira alors :

$$(61027)_{10}$$

2. On compte les rangs de droite vers la gauche, et remarquez que j'ai considéré la première colonne comme la numéro 0

2.2 Écriture des entiers en base 2

Une série de bits, une série de 0 ou 1 pourra s'interpréter comme un nombre écrit en base 2. Les poids ne sont plus les puissances de 10 mais cette fois les puissances de 2.

L'octet : `0100 1101` en machine, si il représente un entier naturel, alors pourrait représenter la quantité suivante :

qui correspondra à en base 10.

On écrira cette fois

$$(01001101)_2$$

Comme précédemment en base 2, une suite de k « zéros »et « uns » :

$$b_{k-1}b_{k-2}...b_1b_0$$

correspond au nombre :

On retiendra aussi que sur un octet on pourra coder entiers naturels :

Sur deux octets, on codera

2.3 Exercices : Passer de la représentation binaire à la représentation décimale.

Question 4 - Ci-dessous, à la main, trouver l'écriture décimale des entiers suivants (écrits en binaire). Reporter les résultats plus bas.

- $(11)_2$ $(101)_2$ $(111011)_2$ $(1010)_2$ $(11101)_2$ $(1101111)_2$ $(110010)_2$ $(1011)_2$

$(11)_2$ $(\quad)_{10}$

$(101)_2$ $(\quad)_{10}$

$(111011)_2$ $(\quad)_{10}$

$(1010)_2$ $(\quad)_{10}$

$(11101)_2$ $(\quad)_{10}$

$(1101111)_2$ $(\quad)_{10}$

$(110010)_2$ $(\quad)_{10}$

$(1011)_2$ $(\quad)_{10}$

203500 **Passer de la représentation d'une base dans une autre.**

Représentation des entiers en machine : la base 16

203504

Écouter à nouveau la présentation de la représentation en base 16 et compléter le cours (2.4)

203503

2.4 Le système hexadécimal - La base 16

Un autre système fréquemment utilisé est la base 16, on parle de système hexadécimal
En base 16 on peut écrire tous les nombres entiers avec dix chiffres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

et on utilise en plus 6 lettres :

$$A, B, C, D, E, F$$

De la même manière que pour les autres bases de numération, la position du symbole détermine la valeur qu'il représente : Par exemple $2A4D$ correspond à la quantité suivante :

qui correspondra à **en base** 10.

On écrira cette fois $(2A4D)_{16}$

2.4.1 Tableau de correspondance entre bases 2, 10 et 16

2.5 Exercices : Passer de la représentation hexadécimale à la représentation décimale.

Question 5 - Ci-dessous, à la main, trouver l'écriture décimale des entiers suivants (écrits en hexadécimal). Reporter les résultats plus bas.

- $(\mathbf{A3})_{16}$ $(\mathbf{F5})_{16}$ $(\mathbf{10C})_{16}$ $(\mathbf{1D5})_{16}$ $(\mathbf{C3})_{16}$ $(\mathbf{21})_{16}$ $(\mathbf{10A})_{16}$ $(\mathbf{1B1})_{16}$

$(\mathbf{A3})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

$(\mathbf{F5})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

$(\mathbf{10C})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

$(\mathbf{1D5})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

$(\mathbf{C3})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

$(\mathbf{21})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

$(\mathbf{10A})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

$(\mathbf{1B1})_{16}$ $\quad (\quad)_{10}$

203500 **Passer de la représentation d'une base dans une autre.**

☐ ☐ ☐ ☐

Changement de représentation base 2 $\leftrightarrow$ $base16$

203504

Écouter à nouveau la présentation de la représentation en base 16 et compléter le cours (2.6)

203504

2.6 Passage direct du binaire à l'hexadécimal

On remarque que 16 est une puissance de 2. Il sera donc très facile de passer d'une écriture binaire longue, coûteuse et source d'erreur à une écriture hexadécimale courte et concise.

L'octet : 1001 1110 représente la valeur suivante :

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 \;\; + \;\; 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

François Boyer

2.7 Exercices : Passer directement de la représentation binaire à la représentation hexadécimale (et vice-versa).

2.7.1 Convertir de la base 2 à la base 16 :

0	0000	4	0100	8	1000	C	1100
1	0001	5	0101	9	1001	D	1101
2	0010	6	0110	A	1010	E	1110
3	0011	7	0111	B	1011	F	1111

Question 6 - Ci-dessous, à la main, trouver l'écriture hexadécimale des entiers suivants (écrits en binaires). Reporter les résultats plus bas.

- $(1001)_2$ $(111110011001)_2$ $(11001111)_2$ $(110011001)_2$ $(1101001110011000)_2$ $(1110010100010001000110)_2$ $(11000010010101010011000010001001)_2$

$(1001)_2$ $(\quad)_{16}$

$(111110011001)_2$ $(\quad)_{16}$

$(11001111)_2$ $(\quad)_{16}$

$(110011001)_2$ $(\quad)_{16}$

$(1101001110011000)_2$ $(\quad)_{16}$

$(1110010100010001000110)_2$ $(\quad)_{16}$

$(11000010010101010011000010001001)_2$ $(\quad)_{16}$

203500 **Passer de la représentation d'une base dans une autre.**

2.7.2 Convertir de la base 16 à la base 2 :

Question 7 - Ci-dessous, à la main, trouver l'écriture hexadécimale des entiers suivants (écrits en binaires). Reporter les résultats plus bas.

- $(A3)_{16}$ $(F5)_{16}$ $(A10C)_{16}$ $(1D5B)_{16}$ $(1C0)_{16}$ $(437)_{16}$ $(10A0)_{16}$

$(A3)_{16}$ $(\quad)_2$

$(F5)_{16}$ $(\quad)_2$

$(\mathbf{A10C})_{16}$ (| | | | | | | | | | | | | | | |)$_2$

$(\mathbf{1D5B})_{16}$ (| | | | | | | | | | | | | | | |)$_2$

$(\mathbf{1C0})_{16}$ (| | | | | | | | | | | | | | | |)$_2$

$(\mathbf{437})_{16}$ (| | | | | | | | | | | | | | | |)$_2$

$(\mathbf{10A0})_{16}$ (| | | | | | | | | | | | | | | |)$_2$

203500 **Passer de la représentation d'une base dans une autre.**

Changement de représentation - 2to16 - 16to2

203505B

3 Algorithmes des divisions successives.

Algorithme des divisions successives)

203504

203503B - Algorithme des divisions successives

Pour passer de la base 10 à la base b, il suffit d'appliquer l'algorithme suivant [3] :

tant que *A n'est pas nul* **faire**
  $r \leftarrow A \,\%\, b$;
  mmoriser r ;
  $A \leftarrow A \,//\, b$;
fin
renvoyer les nombres mmoriss dans l'ordre invers

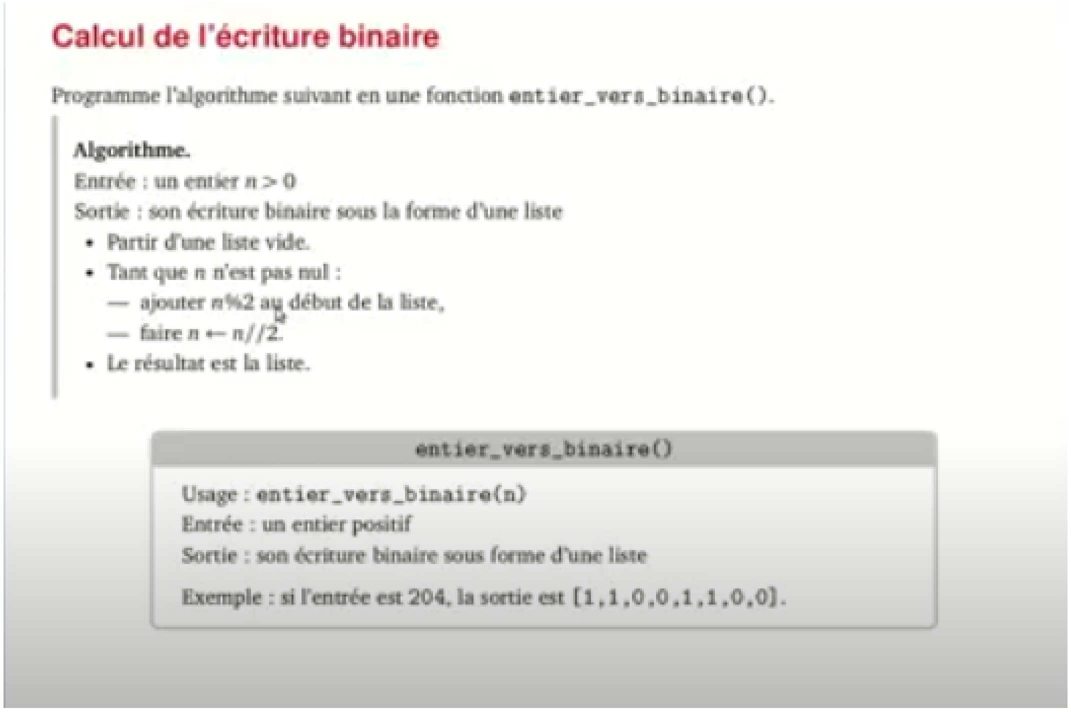
Algorithme 1 : Passer le nombre A de la base 10 à la base b

4 Algo Dec_To_Bin :

Voilà l'algo à programmer en Python

6 :45

3. Un algorithme est une suite d'actions simples à répéter pour obtenir un résultat. On parle aussi de recette ou de méthode dans certains cas.



4.1 Exercices : Passer de la représentation décimale à la représentation binaire.

Visionner la vidéo

0 : 00 → 6 : 10

Question 8 - Combien de bits (binary digits) sont nécessaires pour écrire tous les nombres de 0 **jusque** 31, 64 **ou encore** 1023

203400 **Évaluer le nombre de signes nécessaires pour écrire un nombre dans une base quelconque, comprendre et savoir calculer un logarithme.**

Question 9 - Ci-dessous, à la main, trouver l'écriture binaire des entiers suivants. Reporter les résultats plus bas.

- 13 , 18 , 29 , 31
- 44 , 48 , 63 , 64
- 100 , 135 , 239 , 1023

$(\mathbf{13})_{10}$ $(\quad)_2$

$(\mathbf{18})_{10}$ $(\quad)_2$

$(\mathbf{29})_{10}$ $(\quad)_2$

$(\mathbf{31})_{10}$ $(\quad)_2$

François Boyer

$(44)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

$(48)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

$(63)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

$(64)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

$(100)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

$(135)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

$(239)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

$(1023)_{10}$ $(\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square)_2$

203500 **Passer de la représentation d'une base dans une autre.**

Question 10 - Vérifier les résultats sur la console de thonny, en utilisant la fonction `bin()`

4.2 Exercices : Passer de la représentation décimale à la représentation hexadécimale.

Question 11 - Combien de signes sont nécessaires pour écrire tous les nombres de 0 **jusque** 518 **en base** 16

203400 **Évaluer le nombre de signes nécessaires pour écrire un nombre dans une base quelconque, comprendre et savoir calculer un logarithme.**

Question 12 - Ci-dessous, à la main, trouver l'écriture hexadécimale des entiers suivants. Reporter les résultats plus bas.

- 26 , 11 , 340 , 518

$(26)_{10}$ $(\square\square\square\square)_{16}$

$(11)_{10}$ $(\square\square\square\square)_{16}$

$(240)_{10}$ $(\square\square\square\square)_{16}$

$(518)_{10}$ $(\square\square\square\square)_{16}$

203500 **Passer de la représentation d'une base dans une autre.**

4.3 Exercices : Passer de la représentation décimale à la représentation en une base quelconque (exemple de la base 5)

Question 13 - Combien de signes sont nécessaires pour écrire tous les nombres de 0 **jusque** 260 **en base** 5

203400 **Évaluer le nombre de signes nécessaires pour écrire un nombre dans une base quelconque, comprendre et savoir calculer un logarithme.**

Question 14 - Ci-dessous, à la main, trouver l'écriture en base 5 des entiers suivants. Reporter les résultats plus bas.

- 260 , 93 , 8 , 37

$(\mathbf{260})_{10}$ $(\square\square\square\square)_5$

$(\mathbf{93})_{10}$ $(\square\square\square\square)_5$

$(\mathbf{8})_{10}$ $(\square\square\square\square)_5$

$(\mathbf{37})_{10}$ $(\square\square\square\square)_5$

203500 **Passer de la représentation d'une base dans une autre.**

François Boyer