Optimisation Stochastique

Pr Pierre Collet

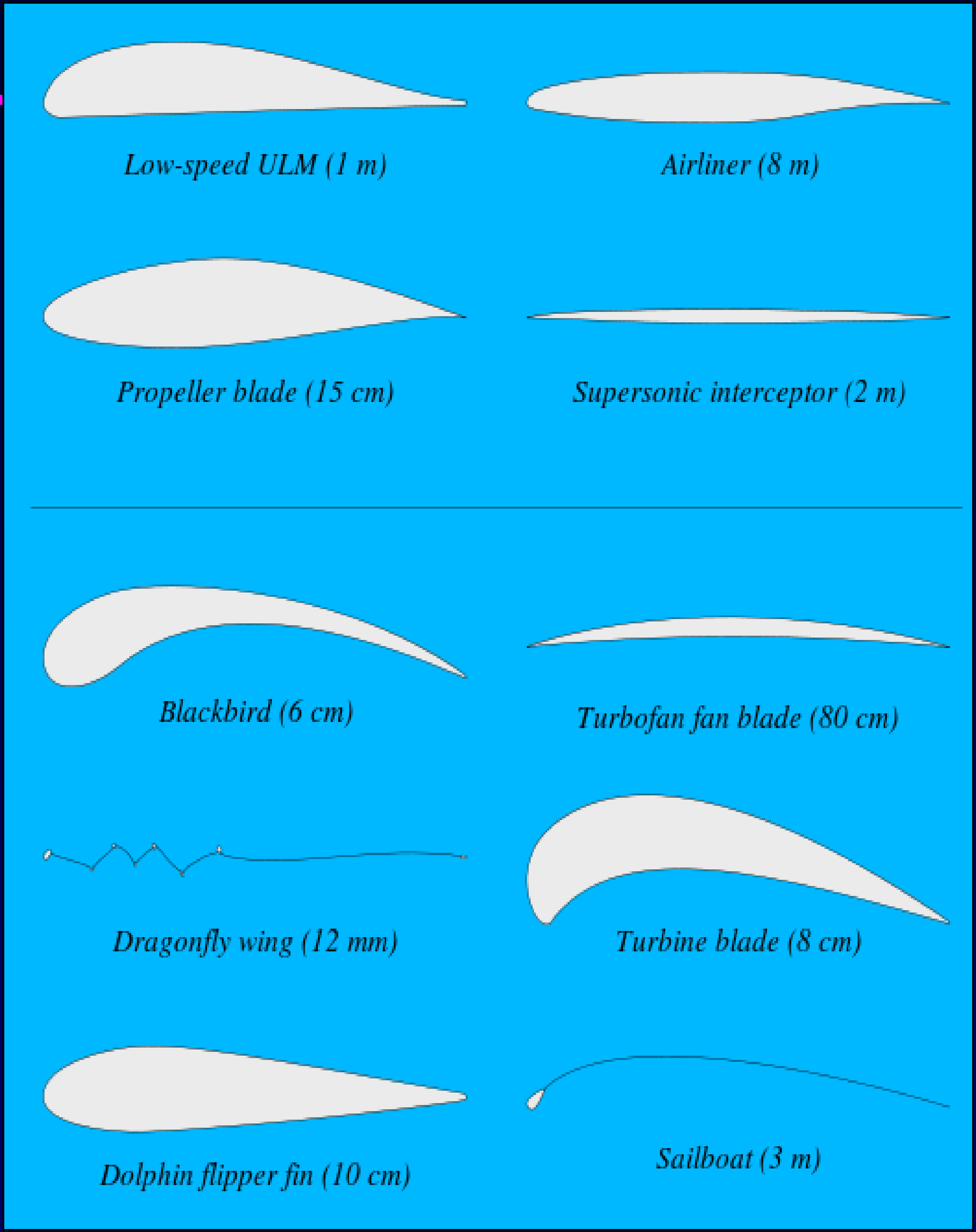
Laboratoire ICUBE

Campus Numérique des Systèmes Complexes

Pierre.Collet@unistra.fr

Problématique

- Problèmes inverses
  - Profil d'aile
  - Évaluation de la qualité par équations de Navier-Stokes



Problèmes difficiles

- Problèmes NP-complets très difficiles à résoudre
- Voyageur de commerce : (n-1)!/2 chemins possibles !
- Si un ordinateur est capable d'évaluer 1 milliard de chemins / s.
  - 16 villes : 653.10^9 chemins = 653 … 0,18h.
  - 17 villes : 10461.10^9 chemin … 1s = …
  - 18 villes : 17784 … j
  - 25 …

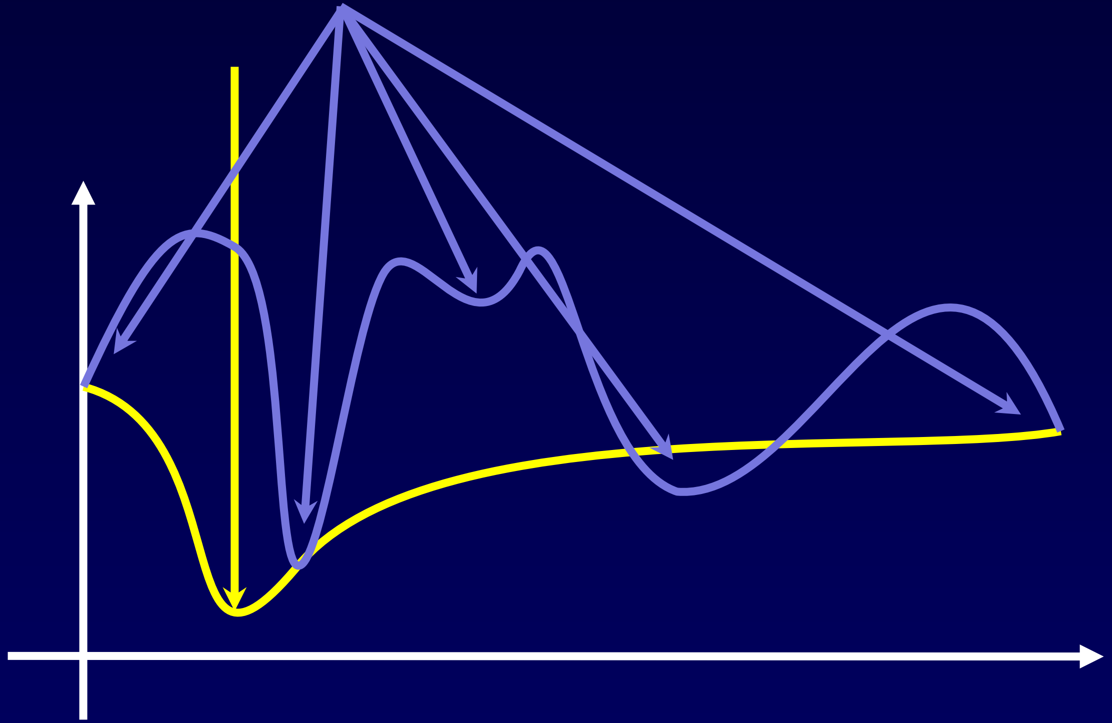
… es !!!

Vous venez d'assister à...
une explosion combinatoire !

Types de problèmes (fonctions) à optimiser

- Unimodal
- Multimodal

Un optimum global
Plusieurs optima locaux



(Dans ce cours, on cherchera à minimiser les valeurs)

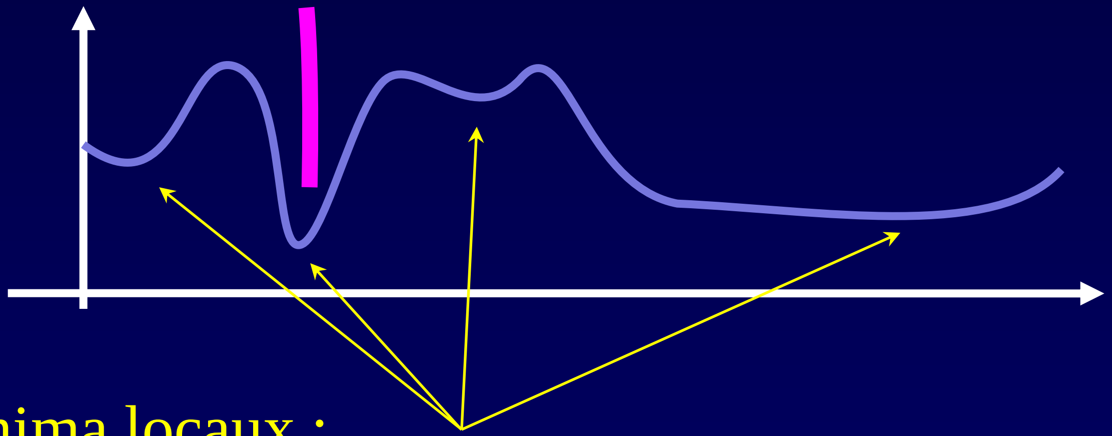
Notion d'optimisation

- Trouver x^* tq $F(x^*) = \mathrm{Inf}\ \{ F(y) \text{ pour } y \in \Omega \}$

  E, espace mesuré, $\Omega \subset E$, $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$

  F est la fonction objectif à minimiser

Minimum global : x^* tq $\forall\ x \in \Omega$, $F(x^*) \leq F(x)$



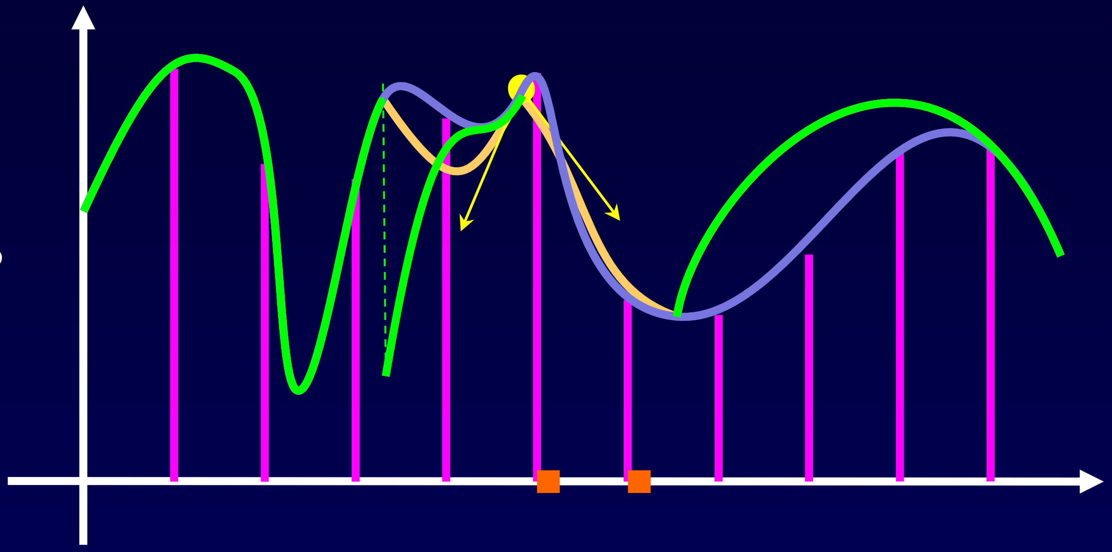
Minima locaux :

$$x^* \text{ tq } \exists\ \varepsilon > 0, \forall\ x \in B\ (x^*, \varepsilon) \cap \Omega, F(x^*) \leq F(x)$$

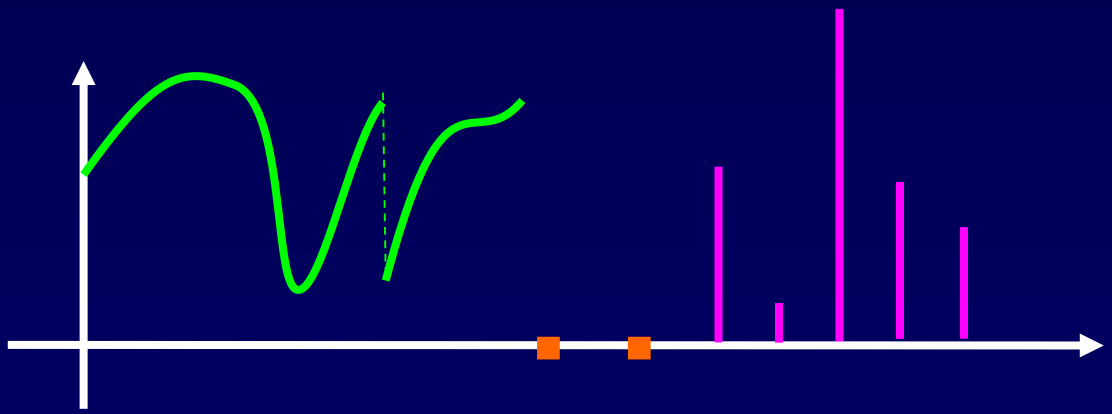
(Minima stricts si inégalités strictes pour $x \neq x^*$)

Espaces de recherche en optimisation

- Continus
  - Dérivables
  - Non dérivables
- Discontinus
- Discrets

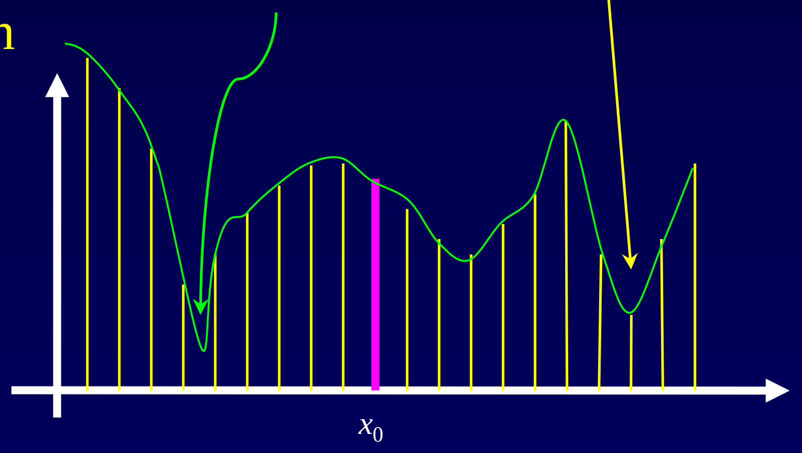


- Combinatoires
- Mixtes



Méthode locale pour problème discret

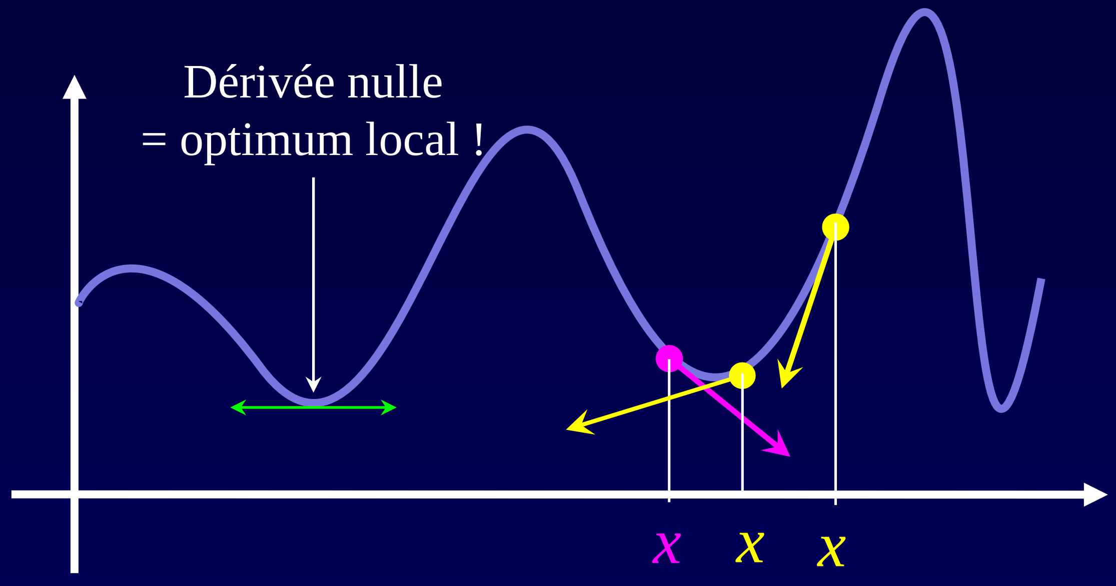
- Algorithme « Glouton »
  - x_{i+1}= « Meilleur voisin » de x_i
  - Contexte:
    - Tout espace (possiblement discrétisé)
    - Fonctionne avec toute fonction
  - Condition nécessaire:
    - x_0 bien choisi.



Méthode locale, coûteuse (surtout si plusieurs dimensions), qui détermine le plus proche optimum local (attention à la discrétisation !)

Fonction continue et dérivable

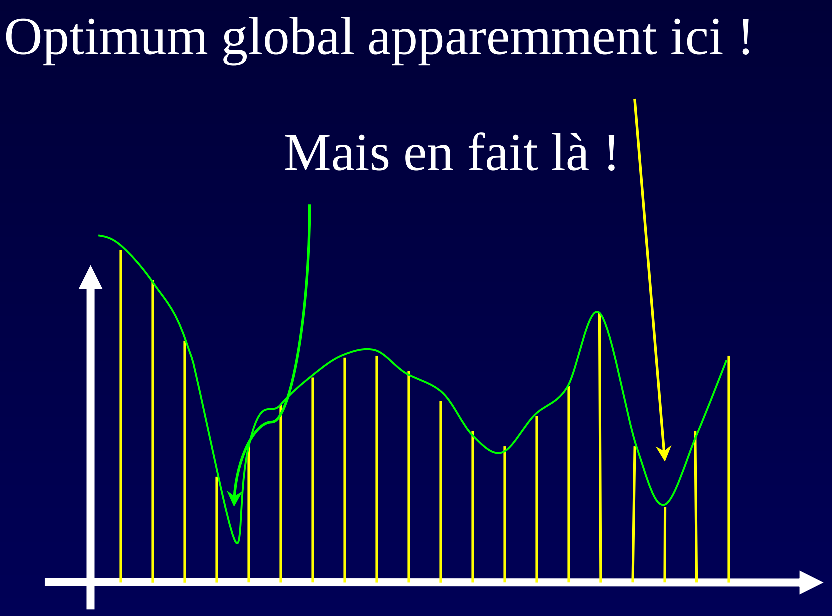
- Descente de gradient (*gradient search*)



- *La fonction doit être gentille (continue et dérivable)*
- $x_{i+1} = x_i - \alpha\, f'(x_i)$
- Efficace, mais c'est une recherche locale (et il faut avoir le bon α !)
- On ne trouve l'optimum global que si x_0 est bien choisi ☹

Méthodes énumératives

- Contexte:
  - *Espace fini*
  - Toute fonction *F*
  - Ordre de parcours
    - Fixé
    - Dépend du problème
- Conditions nécessaires
  - Taille de l'espace limitée
  - Discrétisation bien choisie



Méthodes globales, mais coûteuses et non fiables pour des problèmes continus

Méthodes stochastiques

- Utilisent des variables aléatoires permettant de ne pas tout explorer de manière exhaustive (problèmes difficiles)
- Sélectionner x_i dans Ω d'après une distribution de probabilités

- Monte-Carlo (Metropolis, Ulam 1949)
- Évolution Artificielle (1953, renaissance en 1990)

- Recuit simulé (Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi, 1983)