Sémantique dénotationnelle

Environnements

Nom des variables	Valeur
x	4
y	5

$\sigma, \sigma' \quad \sigma\,[x{\rightarrow}4]$

$[\![x * x - 4 * y + z]\!](\sigma) = [\![x * x]\!](\sigma) - [\![4 * y * z]\!](\sigma)$

liste de variables x y z

$= [\![x]\!](\sigma) * [\![x]\!](\sigma) - [\![4]\!]\sigma * [\![y]\!]\sigma * [\![z]\!]\sigma$

$= \sigma(x) * \sigma(x) - 4 * \sigma(y) * \sigma(z)$

$x, y, z \rightarrow$	t, u, v, w	
$\sigma \rightarrow$	σ	approche impérative
$\sigma \rightarrow$	$int * int * int * int$	approche fonctionnelleil à tout effacé ce con !

Soit e une expression :

aff $[\![x := e]\!](\sigma) = \sigma[x \rightarrow [\![e]\!](\sigma)]$

seq $[\![I, J]\!](J) = [\![J]\!]o[\![I]\!](\sigma) = [\![J]\!]([\![I]\!](\sigma))$

condition $[\![if\ bthen\ i1else\ i2]\!](\sigma) = \begin{cases} [\![i1]\!](\sigma) & si\ [\![b]\!](\sigma) = true \\ [\![i2]\!](\sigma) & sinon \end{cases}$

while $[\![while\ bdo\ S]\!](\sigma) = \begin{cases} [\![S; while\ bdo\ S]\!](\sigma) si\ [\![b]\!](\sigma) = true \\ \sigma sinon \end{cases}$

1 Expressions, instructions

1.1 Question 2

$[\![tmp := x; x := y;]\!]$
demander a dedele

1.2 Question bonus ! !

1) Écrire l'échange de 2 variables entières sans utiliser de variables intermédiaires, uniquement avec des additions et des soustractions.

2) Vérifier en calculant la sémantique que c'est bien un échange.

2 variable x et y x_0, y_0

$$x := x + y;$$
$$y := x - y;$$
$$x := x - y;$$

$\sigma(x) = x_0$
$\sigma(y) = y_0$

$$\begin{aligned}
[\![x := x + y; y := x - y; x := x - y]\!](\sigma) &= [\![y := x - y; x := x - y]\!]([\![x := x + y]\!](\sigma)) \\
&= [\![y := x - y; x := x - y]\!](\sigma[x \to [\![x + y]\!](\sigma)]) \\
&= [\![y := x - y; x := x - y]\!](\sigma[x \to x_0 + y_0]) \\
&= [\![x := x - y]\!]([\![y := x - y]\!](\sigma[x \to x_0 + y_0])) \\
&= [\![x := x - y]\!](\sigma[y \to x_0 + y_0 - y_0; x \to x_0 + y_0])
\end{aligned}$$

3) <u>Variante</u> : on peut faire la même chose avec la multiplication et la division

1.3 Question 5

Rappel :

$$[\![if\ b\ then\ i1\ else\ i2]\!](\sigma) = \begin{cases} [\![i1]\!](\sigma) si\ [\![b]\!](\sigma) = true \\ [\![i2]\!](\sigma) sinon \end{cases}$$

$$\begin{aligned}[\![if\ x1 > x2\ then\ m := x1 else\ m := x2]\!](\sigma) &= \begin{cases} [\![m := x1]\!](\sigma)\ si\ [\![x1 > x2]\!](\sigma) = true \\ [\![m := x2]\!](\sigma)\ sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma[m \to \sigma(x1)]\ si\ \sigma(x1) > \sigma(x2) \\ \sigma[m \to \sigma(x2)]\ sinon \end{cases} \\ &= \sigma[m \to max(\sigma(x1), \sigma(x2))]\end{aligned}$$

$max : int \to int \to int$

$$[\![max(x, y)]\!](\sigma) = \begin{cases} \sigma(x)\ si\ \sigma(x) > \sigma(y) \\ \sigma(y)\ sinon \end{cases}$$

2 Question plus ouverte

3 Fonctionnelles simples

```
let rec f n = if (n = 0) then 0 else n + f(n - 1)
(* 1 + 2 + 3 + ...*)
(* ou bien *)
let rec f n = if (n = 0) then 1 else n * f(n - 1)
(* 1 * 2 * 3 * ...*)
```

Listing 1 – ?

3.1 Point fixe de F

$$\begin{aligned}F^2(\bot)(x) &= F(F(\bot))(x) \\ &= if\ x = 0\ then\ 0 \\ &\qquad else\ x + F(\bot)(x - 1) \\ &....\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F^3(\perp)(x) &= F(F^2(\perp))(x) \\
&= if\ x = 0\ then\ 0 \\
&\qquad\qquad\quad else\ x + F^2(\perp)(x-1) \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + F^2(\perp)(x-1)\ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + \begin{cases} 0\ si\ x = 1 \\ 0 + 1\ si\ x = 2 \\ \perp\ sinon \end{cases} \end{cases} \\
F^3(\perp)(x) &= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ 1 + 0\ si\ x = 1 \\ 2 + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
F^4(\perp)(x) &= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ 1 + 0\ si\ x = 1 \\ 2 + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ 3 + 2 + 1 + 0\ si\ x = 3 \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
F^4(\perp)(x) &= F(F^3(\perp))(x) \\
&= if\ x = 0\ then\ 0 \\
&\qquad\qquad\quad else\ x + F^3(\perp)(x-1) \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ 1 + 0\ si\ x = 1 \\ 2 + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ \perp\ sinon \end{cases} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + 0\ si\ x = 1 \\ x + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ x + 2 + 1 + 0\ si\ x = 3 \\ \perp\ sinon \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$F^4(\perp)(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ 1 + 0 \ si \ x = 1 \\ 2 + 1 + 0 \ si \ x = 2 \\ 3 + 2 + 1 + 0 \ si \ x = 3 \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

$$F^p(\perp)(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ 1 + 0 \ si \ x = 1 \\ 2 + 1 + 0 \ si \ x = 2 \\ 3 + 2 + 1 + 0 \ si \ x = 3 \\ \vdots \\ (p-1) + \ldots + 0 \ si \ x = p - 1 \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

3.2 Conjecture

$$F^p(\perp)(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i \ si \ x < p, \ x \in \mathbb{N} \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur p que cette propriété est bien vérifiée.

$$
\begin{aligned}
F^{(p+1)}(\perp)(x) &= F(F^{(p)}(\perp))(x) \\
&= if\ x = 0\ then\ 0 \\
&\qquad\qquad\quad else\ x + F^{p}(\perp)(x-1) \\
&= if\ x = 0\ then\ 0 \\
&\qquad\qquad\quad else\ x + \begin{cases} \sum_{i=0}^{x-1} i\ si\ x-1 < p \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + \sum_{i=0}^{x-1} i\ si\ x-1 < p \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ \sum_{i=0}^{x} i\ si\ x-1 < p \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i\ si\ x = 0 \\ \sum_{i=0}^{x} i\ si\ x-1 < p \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
F^{(p+1)}(\perp)(x) &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i\ si\ x < p+1 \\ \perp\ sinon \end{cases}
\end{aligned}
$$

F est continue monotone, donc on peut appliquer le théorème de Scott.

$$
\lim \uparrow F^{p}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i\ si\ x \geqslant 0 \\ \perp\ sinon \end{cases}
$$

4 Boucles

4.1 a)

Quand $\sigma(y) = 1$,

$$\begin{aligned} &while\ x - y > 0\ do \\ &\qquad y = 2 * y \end{aligned}$$

Calcule dans y la plus petit puissance de 2 sup ou égale à $\sigma(x)$ et laisse x inchangé.

$$\begin{aligned} &[\![while\ x - y > 0\ do\ y = 2 * y]\!]\sigma \\ &\qquad = si\ [\![x - y > 0]\!](\sigma) alors [\![while [\![y = 2 * y]\!](\sigma)]\!]\circ \\ &\qquad\qquad sinon\ \sigma \end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned} [\![x - y > 0]\!](\sigma) &= true \\ &= [\![while\ \ldots]\!] \circ [\![y = 2 * y]\!](\sigma) \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 2] \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 4] \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 8] \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 16] \\ &= si\ [\![x - y > 0]\!](\sigma)[x \to 9, y \to 16]\ alors\ [\![y = 2 * y]\!]\sigma[x \to 9, y \to 16] \\ &= \sigma[x \to 9, y \to 16]\ sinon\ \sigma?? \end{aligned}$$