

# Algorithmes de recherche - TD

12 décembre 2018

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Intros et définitions</b>                                      | <b>2</b> |
| 1.1      | Périodicité et bords . . . . .                                    | 2        |
| 1.2      | Puissance et primitive . . . . .                                  | 3        |
| <b>2</b> | <b>Mots particuliers</b>  | <b>4</b> |
| 2.1      | Mots de fibonacci . . . . .                                       | 4        |
| 2.2      | Les mots de DE BRUIJN . . . . .                                   | 5        |
| <b>3</b> | <b>Automates de localisation</b>                                  | <b>6</b> |
| 3.1      | Arbre d'un dictionnaire . . . . .                                 | 6        |
| 3.2      | Localisation de plusieurs mots . . . . .                          | 6        |
| 3.3      | Construction de l'automate-dictionnaire . . . . .                 | 7        |
| 3.4      | Automate avec fonction de suppleance . . . . .                    | 8        |
| 3.5      | Automate avec optimisation de la fonction de suppleance . . . . . | 8        |

## Table des figures

|   |  |   |
|---|--|---|
| 1 | Automate DE BRUIJN ordre 3 avec $A = \{a,b\}$ . . . . .                          | 5 |
| 2 | Automate $A(X)$ reconnaissant $X = \{aa, abaaa, abab\}$ . . . . .                | 6 |
| 3 | Automate $D(X)$ reconnaissant $X = \{aa, abaaa, abab\}$ . . . . .                | 6 |
| 4 | Automate $D(X)$ reconnaissant $X = \{ab, babb, bb\}$ sur $A = \{a, b, c\}$ . . . | 7 |
| 5 | Automate $DS(X)$ reconnaissant $X = aa, abaaa, abab$ sur $A = \{a, b\}$ . . .    | 8 |

# 1 Intros et définitions

Recherche de mots dans un texte, algorithme exact, toutes les solutions et pas d'heuristique.

## 1.1 Périodicité et bords

Quelles sont les périodes du mot  $x = aabaabaa$  et  $\text{pér}(x)$  de  $x$  ?

$$p = 3 \Rightarrow \forall 0 \leq i \leq 8 - 3 - 1 \Rightarrow i \in [0, 4]$$

$$p = 6 \Rightarrow \forall 0 \leq i \leq 8 - 6 - 1 \Rightarrow i \in [0, 1]$$

$$p = 7 \Rightarrow \forall 0 \leq i \leq 8 - 7 - 1 \Rightarrow i \in [0, 0]$$

$$p = 8 \Rightarrow \text{Admis}$$

$$\text{pér}(x) = 3$$

Quelles sont les bords du mot  $x = aabaabaa$  ?

$\Rightarrow \epsilon, a, aa$  et  $aabaa$ .

Quelle est la relation entre les notions de bords et périodes ?

Les notions de bords et de périodes sont duales.

Application avec la bord  $aa$ .

Le bord correspond à la période 6, qui correspond à  $|aabaabaa| - |aa|$ .

Quel est le bord du mot  $aabaabaa$  ?

C'est  $aabaa$ .

Quelles sont les suites des bords et des périodes du mot  $x = aabaabaa$  ?

Suite des bords :  $(aabaa, aa, a, \epsilon)$ , car LE bord de  $aabaabaa$  est  $aabaa$  (le bord le plus long)

Suite des périodes :  $(3, 6, 7, 8)$ , car

$$\begin{aligned} 3 &= |x| - |\text{Bord}(x)| \\ &= |aabaabaa| - |aabaa| \\ &= 8 - 5 \end{aligned}$$

ET

$$\begin{aligned} 6 &= |x| - |\text{Bord}^2(x)| \\ &= |aabaabaa| - |aa| \\ &= 8 - 2 \end{aligned}$$

## 1.2 Puissance et primitive

Donner un exemple de mots  $x$  et  $y$  vérifiant  $x^m = y^n$  sur un alphabet à 2 lettres ?  
Soit  $x = ab$  et  $y = abab \Rightarrow x^2 = y^1$

Donner un exemple de mot primitif et de non-primitif de longueurs supérieures à 3.  
Le mot  $abaab$  est primitif.  
Le mot  $baba = (ba)^2$  n'est pas primitif.

Vérifier la proposition 'Un mot non vide est primitif si et seulement s'il n'a pas un facteur de son carré qu'en tant que préfixe et suffixe', avec les mots  $abaab$  et  $baba$ .  
Le mot  $abaab$  est primitif car  $abaab$  est uniquement un facteur de  $abaab$  .  $abaab$  en tant que préfixe et suffixe.  
Le mot  $baba$  n'est pas primitif car  $baba$  n'est pas uniquement un facteur de  $baba$  .  $baba$  qu'en tant que préfixe et suffixe, par exemple  $ba$  .  $baba$  .  $ba$ .

Donner un exemple de mots conjugués.  
Avec  $A = a, b, x = abbaba, y = abaabb$ , on a  $u = abb$  et  $v = aba$ .  
Avec  $B = A, C, G, T, x = AGTACGTTA, y = ACGTTAAGT$ , on a  $u = AGT$  et  $v = ACGTTA$ .  
Avec  $B^3 = AAA, AAC, \dots, TTT, x = TTTACG, y = ACGTTT$ , on a  $u = TTT$ ,  $v = ACG$ .

Donner un exemple de mot  $z$  avec des mots conjugués  $x$  et  $y$ .  
Soit  $x = AAC, y = ACA$ , on a  $z = A$  car  $x = z \cdot AC$  et  $y = AC \cdot z$

## 2 Mots particuliers

### 2.1 Mots de fibonacci

| n | $F_n$ | $f_n$                |
|---|-------|----------------------|
| 3 | 2     | ab                   |
| 4 | 3     | aba                  |
| 5 | 5     | abaab                |
| 6 | 8     | abaababa             |
| 7 | 13    | abaababaabaab        |
| 8 | 21    | abaababaabaabaabaaba |

Propriété remarquable : ???

Démontrer  $\phi^n(a) = f_{n+2}$ .

$$\begin{aligned}
 \phi^1(a) &= ab = f_3 \\
 \phi^2(a) &= \phi^1(\phi(a)) \\
 &= \phi^1(ab) \\
 &= \phi(a) \cdot \phi(b) \\
 &= ab \cdot a = aba \\
 &= f_4 \\
 \phi^n(a) &= \phi^{n-1}(\phi(a)) \\
 &= \phi^{n-1}(ab) \\
 &= \phi^{n-1}(a) \cdot \phi^{n-1}(b) \\
 &= f_{n+1} \cdot \phi^{n-2}(\phi(b)) \\
 &= f_{n+1} \cdot \phi^{n-2}(a) \\
 &= f_{n+1} \cdot f_n \\
 &= f_{n+2}
 \end{aligned}$$

Démontrer la proposition du palindrome de fibonacci avec  $n \geq 3$ .

$$\begin{aligned}
 f_3 &= ab, u = \epsilon \Rightarrow \text{palindrome}(\text{trivial}) \\
 f_4 &= aba, u = a \Rightarrow \text{palindrome}(\text{trivial}) \\
 f_5 &= abaab, u = aba \Rightarrow \text{palindromecar}
 \end{aligned}$$

Pour tout  $n \geq 5$ , on a  $f_n = f_{n-1} \cdot f_{n-2} = f_{n-2} \cdot f_{n-3} \cdot f_{n-2}$ .

Si n est impair alors, par hypothèse de récurrence alors  $f_{n-2}$  est impair et  $f_{n-3}$  est pair. Donc  $f_{n-2} = u_1ab$  et  $f_{n-3} = u_2ba$  avec  $u_1$  et  $u_2$  des palindromes.

Donc,  $f_n = u_1abu_2bau_1ab$ .

Mais  $u_1$  et  $u_2$  sont des palindromes, donc  $u_1abu_2bau_1$  est également un palindrome.

En posant  $u = u_1abu_2bau_1$ , on a alors  $f_n = uab$  où u est un palindrome.

Démonstration de façon similaire si n est pair.

## 2.2 Les mots de DE BRUIJN

Donner tous les mots de DE BRUIJN d'ordre  $k = 1$  dans l'alphabet  $A = a, b$ .  
Les mots  $ab$  et  $ba$  sont les deux seuls mots de DE BRUIJN d'ordre 1.

Pour  $k = 3$  :

$A^3 = aaa, aab, \dots, bbb$

Introuvables à la main car trop compliqués. Ex :  $aaababbbbaa$  car ses facteurs de longueur 3 sont les 8 mots de  $A^3$  :  $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$ . Chaque mot n'apparaît qu'une et une seule fois dans ce mot ET tous les mots de  $A^3$  y apparaissent.

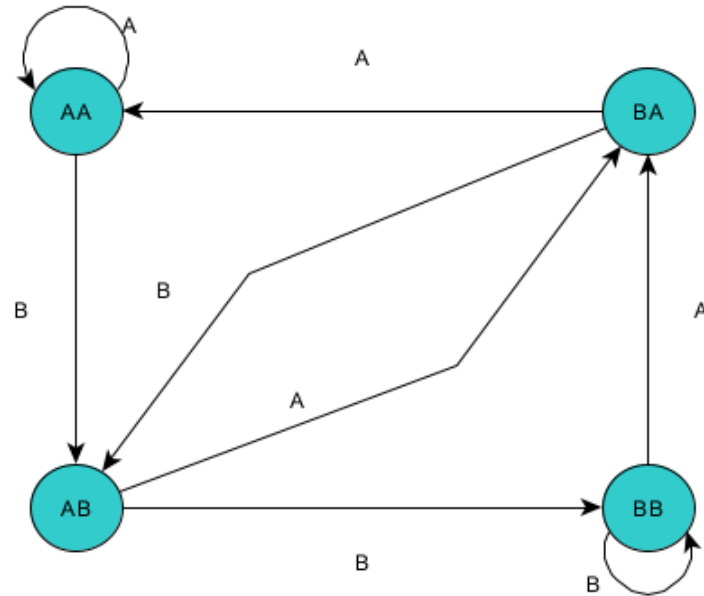


FIGURE 1 – Automate DE BRUIJN ordre 3 avec  $A = \{a, b\}$

Exactement 2 flèches sortent de chacun des états, l'une étiquetée par  $a$ , l'autre par  $b$ , et exactement 2 flèches entrent dans chacun des états, toutes 2 étiquetées par la même lettre. Il faut passer par toutes les flèches en commençant et terminant par le même état.

Longueur d'un mot de DE BRUIJN d'ordre  $k = f(k)$  ?  
 $2^k + (k - 1)$

### 3 Automates de localisation

#### 3.1 Arbre d'un dictionnaire

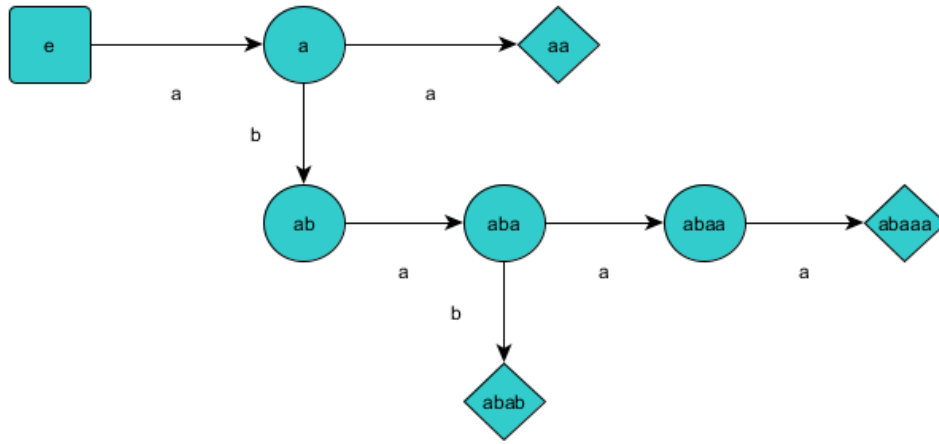


FIGURE 2 – Automate  $A(X)$  reconnaissant  $X = \{aa, abaaa, abab\}$

#### 3.2 Localisation de plusieurs mots

$h(b) = \epsilon \Rightarrow$  Tout ce qui se finit par b va vers  $\epsilon$   
 $h(a) = a$   
 $h(aa) = aa$   
 $h(ab) = ab$   
 $h(aaa) = aa$   
 $h(aab) = ab$   
 $h(aba) = aba$   
 $h(abb) = \epsilon$

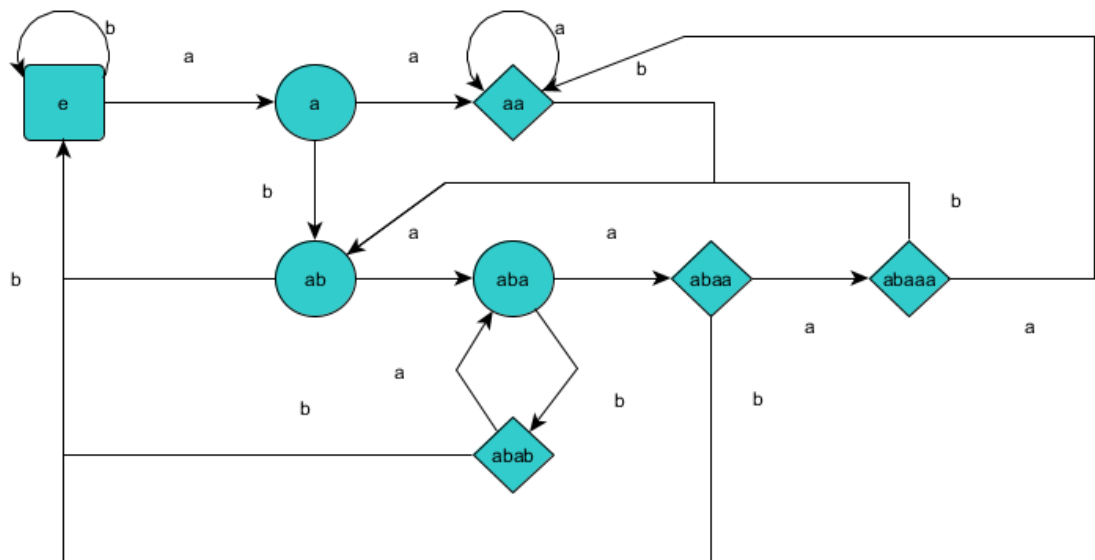


FIGURE 3 – Automate  $D(X)$  reconnaissant  $X = \{aa, abaaa, abab\}$

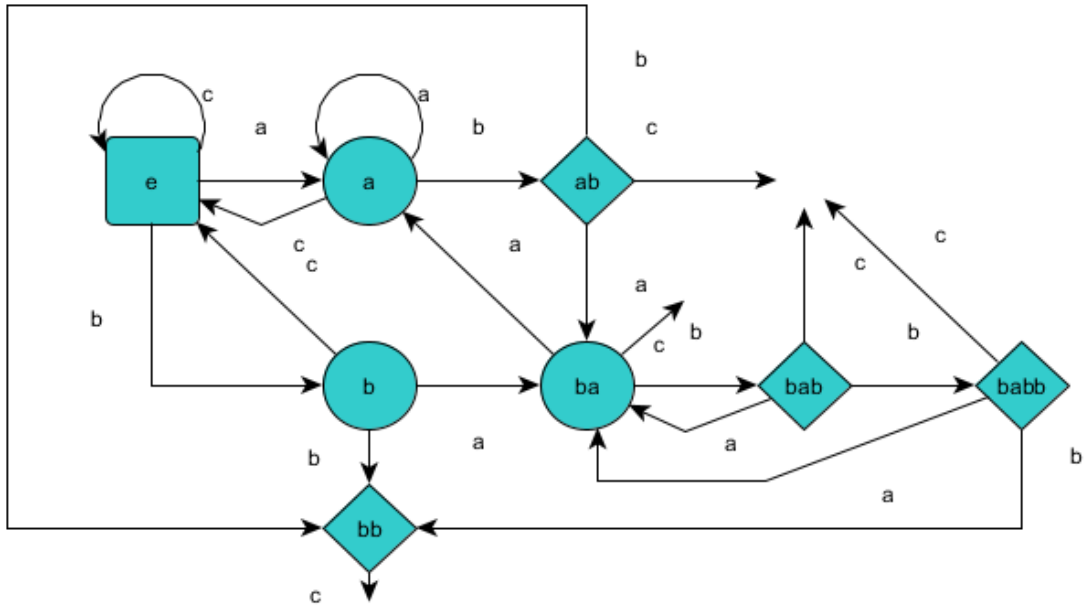


FIGURE 4 – Automate  $D(X)$  reconnaissant  $X = \{ab, babb, bb\}$  sur  $A = \{a, b, c\}$

Sur ce dernier automate, les flèches étiquetées 'c' vont toutes vers l'état  $\epsilon$ .

### 3.3 Construction de l'automate-dictionnaire

Localisation des mots  $X = ab, babb, bb$  sur  $A = a, b, c$  sur le texte  $y = cbabba$ . Utilisation de l'algorithme LOCALISATION( $X, y$ ) sur l'automate  $D(X)$  fait précédemment.

| j | $y[j]$ | Etat r     | Mot                     |
|---|--------|------------|-------------------------|
|   |        | $\epsilon$ |                         |
| 0 | c      | $\epsilon$ |                         |
| 1 | b      | b          |                         |
| 2 | a      | ba         |                         |
| 3 | b      | bab        | Occurence de ab         |
| 4 | b      | babb       | Occurence de babb et bb |
| 5 | a      | ba         |                         |

La colonne Mot contient la liste des mots reconnus, si l'état r appartient aux états terminaux de  $D(X)$ .

### 3.4 Automate avec fonction de suppleance

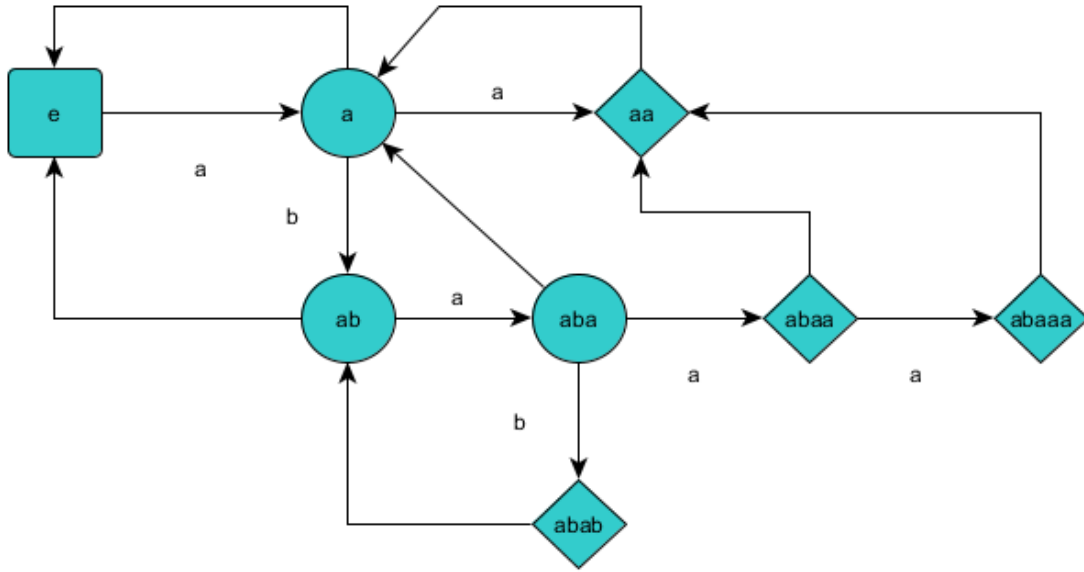


FIGURE 5 – Automate DS(X) reconnaissant  $X = \{aa, abaa, abab\}$  sur  $A = \{a, b\}$

### 3.5 Automate avec optimisation de la fonction de suppleance

Avec l'automate DS(X) (page 8), donner des exemples d'ensembles  $Suivant(u)$  avec  $u = abaa$  (état abaa).

$$\begin{aligned}
 Suivant(u) &= \{a\} \\
 f(u) &= aa \\
 Suivant(f(u)) &= Suivant(aa) = \emptyset \\
 &\Rightarrow \text{car } \{a\} \Leftrightarrow \{a\} \cup \emptyset \\
 f(f(u)) &= f(aa) = a \\
 Suivant(f(f(u))) &= Suivant(a) = \{a, b\} \\
 &\Rightarrow \text{fin car } Suivant(a) \notin Suivant(aa) \\
 &\Rightarrow g : \text{état abaa} \rightarrow \text{état a}
 \end{aligned}$$

Exemple avec  $u = aba$  (état 4).

$$\begin{aligned}
 Suivant(u) &= \{a, b\} \\
 f(u) &= a \\
 Suivant(a) &= \{a, b\} \\
 f(f(u)) &= \epsilon \\
 Suivant(\epsilon) &= \{a\} \\
 &\Rightarrow g : \text{état aba} \rightarrow \text{état } \epsilon
 \end{aligned}$$