TP 5 - Faire des preuves avec seulement intro et apply

Dans ce TP, nous allons étudier comment faire des démonstrations en Coq en utilisant uniquement les tactiques `intro` et `apply`. On pourra néanmoins utiliser des tactiques comme `simpl` et `unfold` pour clarifier les étapes de démonstration.

L'important à retenir est que, pour la durée de ce TP, il est interdit d'utiliser la tactique `elim`. On appliquera à la place explicitement l'opérateur de traitement par cas ou de récurrence (par exemple `and_ind` et `nat_ind`).

1 Connecteurs logiques

1- Utiliser la commande `Print` pour observer comment sont définies les constructions `/\` (`and`) et `\/` (`or`).

2- Etudier le type des principes d'induction associés à ces deux types (inductifs), à savoir `and_ind` et `or_ind`.

3- A quelles cases du tableau fourni au TP1, les constructeurs et les principes d'induction correspondent-ils ?

4- Prouver les propriétés suivantes :

- `l1:` $\forall A\ B\ C : \texttt{Prop}, ((A \land B) \to C) \to A \to B \to C$
- `l2:` $\forall A\ B\ C : \texttt{Prop}, (A \to B \to C) \to (A \land B) \to C$
- `l3:` $\forall A\ B : \texttt{Prop}, A \lor B \to B \lor A$
- `l4:` $\forall A\ B\ C : \texttt{Prop}, (A \land (B \lor C)) \to ((A \land B) \lor (A \land C))$
- `l5:` $\forall A\ B\ C : \texttt{Prop}, ((A \land B) \lor (A \land C)) \to (A \land (B \lor C))$

5- Observer les termes de preuve associés à ces démonstrations.

2 Entiers naturels

On s'intéresse maintenant aux entiers naturels.

6- Comment prouver le lemme $\forall n : \texttt{nat}, n + 0 = n.$ avec uniquement `intro` et `apply` ? On pourra s'intéresser au théorème `refl_equal` pour terminer la démonstration.

7- Prouver maintenant le lemme d'associativité $\forall n : \texttt{nat}, n + (m + p) = (n + m) + p.$

8- Prouver la commutativité $\forall nm : \texttt{nat}, n+m = m+n.$ Cette preuve nécessitera sans doute l'utilisation de la tactique `rewrite`. Essayez d'utiliser à la place la tactique `apply` avec un des deux théorèmes suivants : `eq_ind` et `eq_ind_r`.