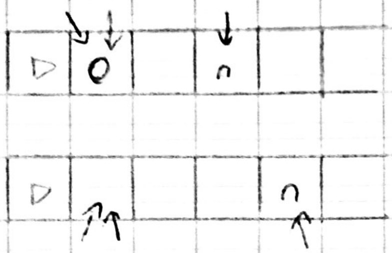
"Allez vous faire foutre ailleurs !!"
Rafy -2017

Bande infinie des 2 côtés :

. On a pas besoin du symbole $\triangleright$, cases numérotées dans $\mathbb{Z}$

. On peut le simuler avec 2 bandes



numéro de case $n > 0$

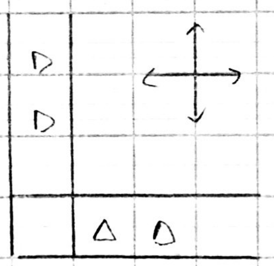
numéro de case $-n < 0$

numéro de case 0

Multiples têtes :

. ⚠ si les 2 têtes sont sur la même case

Bande à 2 dimensions :



Machine de Turing non déterministe :

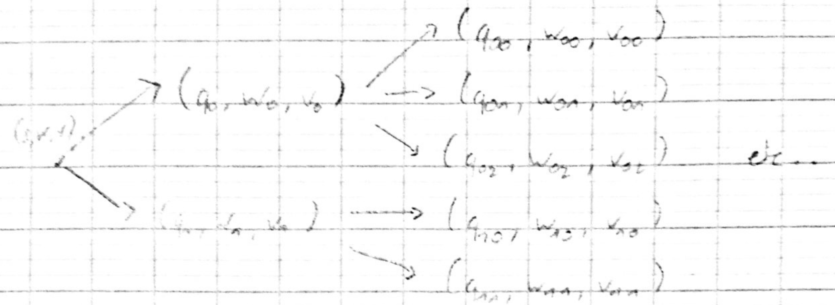
. La fonction de transition δ est remplacée par une relation Δ. $\Delta(q, a, p, b)$

$$\Delta \subseteq \underbrace{(K-H)}_{\text{états non d'arrêt}} \times \underbrace{\Sigma}_{\text{contenu de bande}} \times \underbrace{K}_{\text{nouvel état}} \times \underbrace{(\Sigma \cup \{\rightarrow, \leftarrow\})}_{\text{action sur la bande}}$$

. Si on est dans l'état $q \notin H$ et qu'on lit a sur la bande, alors on peut aller vers l'état p et faire b sur la bande.

- Symbole de dérivation : $\vdash$
  $C \vdash C'$ de la configuration C on peut aller à la configuration C'

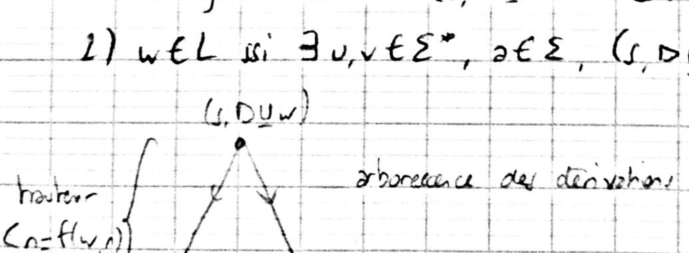
- A partir d'une configuration initiale on obtient par dérivation une arborescence de configurations.



- $r = \max\limits_{(q,a) \in (K-H) \times \Sigma} \operatorname{card} \{ (p,b) \in K \times (\Sigma \cup \{\rightarrow, \leftarrow\}) \mid \Delta(q,a,p,b) \}$

  r degré sortant maximum.

- Soit M une machine de Turing non déterministe. M accepte le mot w si on a pour un $h \in H$ et $v, u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.
  $(s, \triangleright \underline{\sqcup} w) \vdash^* (h, v\underline{a}u)$
- <u>M décide le langage L</u> :
  1) Il existe un $n \in \mathbb{N}$, fonction de w et de M, s'il n'y a pas de configuration C avec $(s, \triangleright \underline{\sqcup} w) \vdash^n C$.
  2) $w \in L$ ssi $\exists u, v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $(s, \triangleright \underline{\sqcup} w) \vdash^* (y, \triangleright v \underline{a} u)$ quand pas y, on a n.



si $w \in L$, $\exists$ une feuille avec y
si $w \notin L$, $\forall$ feuille on a n.

feuilles = configurations d'arrêt.

. M semi-décide L : $\forall w \in \Sigma_0^*$
$w \in L$ ssi M accepte w ssi $\exists u, v \in \Sigma^*, a \in \Sigma$
$(s, \triangleright \underline{\sqcup} w) \vdash^* (h, u a v)$

Calcul d'une fonction f :
1) Comme par décision
2) $(s, \triangleright \underline{\sqcup} w) \vdash^* (h, u\underline{a}v)$ ssi $u\underline{a}v = \triangleright \underline{\sqcup} f(w)$

. Tout langage décidé ou semi-décidé, toute fonction calculée par une MTDN l'est par une MT standard. Si la MTDN décide en temps t, la MT standard décide en temps $O(r^t)$.

Grammaires :

. $G = (V, \Sigma, R, S)$
V alphabet, ensemble de symboles
Σ ensemble des symboles terminaux, $\Sigma \subset V$, élément de Σ : minuscule, $V-\Sigma$: majuscule
$S \in V-\Sigma$ symbole de départ
R ensemble de règles de substitution

$$R \subseteq \underbrace{[V^*(V-\Sigma)V^*]}_{\text{chaînes de caractères ayant au moins un symbole non terminal}} \times \underbrace{V^*}_{\text{toutes les chaînes}}$$

On écrit $\alpha \to \beta$ pour $(\alpha, \beta) \in R$

. Grammaire algébrique : V au lieu de $V^*(V-\Sigma)V^*$ $\alpha \in V$

ex : $S0 \to 0S$
$S0 \to 11S$
$S0S \to \varepsilon$

. Dérivation : soient $v, w \in V^*$ $(\alpha, \beta) \in R : \alpha \to \beta$
On a la dérivation $v\alpha w \Rightarrow v\beta w$
Succession de dérivations $\Rightarrow^*$ fermeture réflexive et transitive de $\Rightarrow$ $X \Rightarrow^* Y$
si $Y = X$ ou $X = X_0 \Rightarrow X_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_n = Y$ pour $n \geq 0$

. $L(G)$ langage engendré par G : ensemble des $w \in \Sigma^*$ tels que $S \Rightarrow^* w$
L récursivement énumérable ssi $\exists G$ grammaire, $L = L(G)$.

. Calcul d'une fonction : G calcule une fonction $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ssi $\forall w, v \in \Sigma^*$
on a $S w S \Rightarrow^* v \iff v \Rightarrow f(w)$
Succession d'un nombre en chiffres binaires :

$0S \to N1$	$S1010S$	$S111S$
$1S \to R0$	$S101N1$	$S11R0$
$0N \to N0$	$S10N11$	$S1R00$
$1N \to N1$	$S1N011$	$SR000$
$0R \to N1$	$SN1011$	1000
$1R \to R0$	1011	
$SN \to \varepsilon$		
$SR \to 1$		

. On dit que f est grammaticalement calculable s'il existe une grammaire qui la calcule.
f récursive ssi grammaticalement calculable.

Fonctions récursives primitives et μ-récursives :

. Ingrédients de base : - fonctions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
- fonction zéro k-aire, $zero_k(x_1, \ldots, x_k) = 0$
- fonction successeur 1-aire, $S(n) = n+1$
- fonction projection (ou identité), $id_{k,j}(x_1, \ldots, x_k) = x_j$ $(1 \leq j \leq k)$

. Composition de fonctions $h_1, \ldots, h_k$ k fonctions m-aires, g k-aire
$g \circ [h_1, \ldots, h_k]$ m-aire
$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (h_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_m))$