Sémantique dénotationnelle

Environnements

Nom des variables	Valeur
x	4
y	5

$\sigma, \sigma' \quad \sigma\,[x{\to}4]$

$[\![x * x - 4 * y + z]\!](\sigma) = [\![x * x]\!](\sigma) - [\![4 * y * z]\!](\sigma)$

liste de variables x y z

$= [\![x]\!](\sigma) * [\![x]\!](\sigma) - [\![4]\!]\sigma * [\![y]\!]\sigma * [\![z]\!]\sigma$

$= \sigma(x) * \sigma(x) - 4 * \sigma(y) * \sigma(z)$

$x, y, z \to \qquad t, u, v, w$

$\sigma \to \qquad \sigma$ approche impérative

$\sigma \to \qquad int * int * int * int$ approche fonctionnelleil à tout effacé ce con !

Soit e une expression :

aff $[\![x := e]\!](\sigma) = \sigma[x \to [\![e]\!](\sigma)]$

seq $[\![I, J]\!](J) = [\![J]\!]o[\![I]\!](\sigma) = [\![J]\!]([\![I]\!](\sigma))$

condition $[\![if\ bthen\ i1else\ i2]\!](\sigma) = \begin{cases} [\![i1]\!](\sigma) & si\ [\![b]\!](\sigma) = true \\ [\![i2]\!](\sigma) & sinon \end{cases}$

while $[\![while\ bdo\ S]\!](\sigma) = \begin{cases} [\![S; while\ bdo\ S]\!](\sigma) si\ [\![b]\!](\sigma) = true \\ \sigma sinon \end{cases}$

1 Expressions, instructions

1.1 Question 2

$$[\![tmp := x; x := y;]\!]$$

demander a dedele

1.2 Question bonus ! !

1) Écrire l'échange de 2 variables entières sans utiliser de variables intermédiaires, uniquement avec des additions et des soustractions.

2) Vérifier en calculant la sémantique que c'est bien un échange.

2 variable x et y x_0, y_0

$$x := x + y;$$
$$y := x - y;$$
$$x := x - y;$$

$\sigma(x) = x_0$
$\sigma(y) = y_0$

$$\begin{aligned}
[\![x := x + y; y := x - y; x := x - y]\!](\sigma) &= [\![y := x - y; x := x - y]\!]([\![x := x + y]\!](\sigma)) \\
&= [\![y := x - y; x := x - y]\!](\sigma[x \to [\![x + y]\!](\sigma)]) \\
&= [\![y := x - y; x := x - y]\!](\sigma[x \to x_0 + y_0]) \\
&= [\![x := x - y]\!]([\![y := x - y]\!](\sigma[x \to x_0 + y_0])) \\
&= [\![x := x - y]\!](\sigma[y \to x_0 + y_0 - y_0; x \to x_0 + y_0])
\end{aligned}$$

3) <u>Variante</u> : on peut faire la même chose avec la multiplication et la division

1.3 Question 5

Rappel :

$$[\![if\ b\ then\ i1\ else\ i2]\!](\sigma) = \begin{cases} [\![i1]\!](\sigma) si\ [\![b]\!](\sigma) = true \\ [\![i2]\!](\sigma) sinon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [\![if\ x1 > x2\ then\ m := x1 else\ m := x2]\!](\sigma) &= \begin{cases} [\![m := x1]\!](\sigma)\ si\ [\![x1 > x2]\!](\sigma) = true \\ [\![m := x2]\!](\sigma)\ sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma[m \to \sigma(x1)]\ si\ \sigma(x1) > \sigma(x2) \\ \sigma[m \to \sigma(x2)]\ sinon \end{cases} \\ &= \sigma[m \to max(\sigma(x1), \sigma(x2))] \end{aligned}$$

$max : int \to int \to int$

$$[\![max(x, y)]\!](\sigma) = \begin{cases} \sigma(x)\ si\ \sigma(x) > \sigma(y) \\ \sigma(y)\ sinon \end{cases}$$

2 Question plus ouverte

3 Fonctionnelles simples

```
let rec f n = if (n = 0) then 0 else n + f(n - 1)
(* 1 + 2 + 3 + ... *)
(* ou bien *)
let rec f n = if (n = 0) then 1 else n * f(n - 1)
(* 1 * 2 * 3 * ... *)
```

Listing 1 – ?

Les deux définitions sont les mêmes.

Théroème de Scott : Toute fonction continue F dans un domaine admet des points fixes. Le plus petit d'entre eux est lim $\uparrow F^n(\perp)$

3.1 Point fixe de F

$$
\begin{aligned}
F^0(\perp)(x) &= \perp \\
F(\perp)(x) &= if\ x = 0\ then\ 0\ else\ x + \perp \\
F(\perp)(x) &= if\ x = 0\ then\ 0\ else\ \perp \\
F(\perp)(x) &= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
F^2(\perp)(x) &= F(F(\perp))(x) \\
&= if\ x = 0\ then\ 0\ else\ x + F(\perp)(x-1) \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + F(\perp)(x-1)\ sinon \end{cases} \\
&= ... \\
F^3(\perp)(x) &= F(F^2(\perp))(x) \\
&= if\ x = 0\ then\ 0 \\
&\qquad\qquad else\ x + F^2(\perp)(x-1) \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + F^2(\perp)(x-1)\ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + \begin{cases} 0\ si\ x = 1 \\ 0 + 1\ si\ x = 2 \\ \perp\ sinon \end{cases} \end{cases} \\
F^3(\perp)(x) &= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ 1 + 0\ si\ x = 1 \\ 2 + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
F^4(\perp)(x) &= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ 1 + 0\ si\ x = 1 \\ 2 + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ 3 + 2 + 1 + 0\ si\ x = 3 \\ \perp\ sinon \end{cases} \\
F^4(\perp)(x) &= F(F^3(\perp))(x) \\
&= if\ x = 0\ then\ 0 \\
&\qquad\qquad else\ x + F^3(\perp)(x-1) \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ 1 + 0\ si\ x = 1 \\ 2 + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ \perp\ sinon \end{cases} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0\ si\ x = 0 \\ x + 0\ si\ x = 1 \\ x + 1 + 0\ si\ x = 2 \\ x + 2 + 1 + 0\ si\ x = 3 \\ \perp\ sinon \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$F^4(\perp)(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ 1 + 0 \ si \ x = 1 \\ 2 + 1 + 0 \ si \ x = 2 \\ 3 + 2 + 1 + 0 \ si \ x = 3 \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

$$F^p(\perp)(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ 1 + 0 \ si \ x = 1 \\ 2 + 1 + 0 \ si \ x = 2 \\ 3 + 2 + 1 + 0 \ si \ x = 3 \\ \vdots \\ (p-1) + \ldots + 0 \ si \ x = p - 1 \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

3.2 Conjecture

$$F^p(\perp)(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i \ si \ x < p, \ x \in \mathbb{N} \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur p que cette propriété est bien vérifiée.

$$\begin{aligned}
F^{(p+1)}(\perp)(x) &= F(F^{(p)}(\perp))(x) \\
&= if \ x = 0 \ then \ 0 \\
&\qquad\qquad else \ x + F^p(\perp)(x-1) \\
&= if \ x = 0 \ then \ 0 \\
&\qquad\qquad else \ x + \begin{cases} \sum_{i=0}^{x-1} i \ si \ x - 1 < p \\ \perp \ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ x + \sum_{i=0}^{x-1} i \ si \ x - 1 < p \\ \perp \ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ \sum_{i=0}^{x} i \ si \ x - 1 < p \\ \perp \ sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i \ si \ x = 0 \\ \sum_{i=0}^{x} i \ si \ x - 1 < p \\ \perp \ sinon \end{cases} \\
F^{(p+1)}(\perp)(x) &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i \ si \ x < p + 1 \\ \perp \ sinon \end{cases}
\end{aligned}$$

F est continue monotone, donc on peut appliquer le théorème de Scott.

$$\lim \uparrow F^p(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} i \ si \ x \geqslant 0 \\ \perp \ sinon \end{cases}$$

4 Boucles

4.1 a)

Quand $\sigma(y) = 1$,

$$\begin{aligned} &while\ x - y > 0\ do \\ &\qquad y = 2 * y \end{aligned}$$

Calcule dans y la plus petit puissance de 2 sup ou égale à $\sigma(x)$ et laisse x inchangé.

$$\begin{aligned} &[\![while\ x - y > 0\ do\ y = 2 * y]\!]\sigma \\ &\qquad = si\ [\![x - y > 0]\!](\sigma) alors [\![while [\![y = 2 * y]\!](\sigma)]\!] \circ \\ &\qquad\qquad sinon\ \sigma \end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned} [\![x - y > 0]\!](\sigma) &= true \\ &= [\![while\ \ldots]\!] \circ [\![y = 2 * y]\!](\sigma) \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 2] \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 4] \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 8] \\ &= [\![while\ \ldots]\!]\sigma[x \to 9, y \to 16] \\ &= si\ [\![x - y > 0]\!](\sigma)[x \to 9, y \to 16]\ alors\ [\![y = 2 * y]\!]\sigma[x \to 9, y \to 16] \\ &= \sigma[x \to 9, y \to 16]\ sinon\ \sigma.... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P = while\ x - y > 0\ do \\ &\qquad y = 2 * y \\ &\sigma(x) = 9 \sigma(y) = 1 \end{aligned}$$

P calcule la plus petit puissance de 2 supérieure ou égale à x.

$$\begin{aligned} &[\![while\ x - y > 0\ do\ y := 2 * y]\!](\sigma) = ? \\ &\quad f : X\sigma \to [\![while\ b\ do\ X]\!](\sigma) \\ &\quad [\![while\ x - y\ do\ y := 2 * y]\!](\sigma) \\ &\qquad\qquad = si\ [\![x - y > 0]\!](\sigma)\ alors\ ① \\ &\qquad\qquad\qquad sinon\ \sigma \end{aligned}$$

$$① \llbracket while\ x-y>0\ do\ y:=y*2\rrbracket(\llbracket y:=2*y\rrbracket)(\sigma)$$

$$F : X\sigma \to si\ \llbracket x-y>0\rrbracket(\sigma)\ alors\ (X \circ \llbracket y:=2*y\rrbracket)(\sigma)$$

$$sinon\ \sigma$$

$$F(X)=X$$

$$
\begin{aligned}
F^0(\bot)(\sigma) &= \bot \\
F^1(\bot)(\sigma) &= \ si\ \llbracket x-y>0\rrbracket(\sigma)\ alors\ \bot sinon \sigma \\
F^2(\bot)(\sigma) &= F(F(\bot))(\sigma) \\
&= \ si\ \llbracket x-y>0\rrbracket(\sigma)\ alors\ F(\bot)(\sigma[y\to 2\sigma(y)])\ sinon\ \sigma \\
&= \ si\ \llbracket x-y>0\rrbracket(\sigma)\ alors\ si\ \llbracket x-y>0\rrbracket\sigma[y\to 2\sigma(y)] alors\ \bot\ sinon\ \sigma[y\to 2\sigma(y)]
\end{aligned}
$$

On va noter $y_0=\sigma(y)$;

$x_0=\sigma(x)$;

$x_0-y_0>0$;

$$= \ si\ x_0-y_0>0\ alors\ si\ x_0-2y_0>0\ alors\ \bot\ sinon\ \sigma$$

$$
\begin{aligned}
F^3(\bot)(\sigma) &= F(F^2(\bot))(\sigma) \\
&= \ si\ \llbracket x-y>0\rrbracket(\sigma)\ alors\ F^2(\bot)\sigma[y\to 2y_0] \\
&= \ si\ x_0-\sigma(y)>0\ alors \\
&\qquad si\ x_0-2\sigma(y)>0\ alors \\
&\qquad\quad si\ x_0-4\sigma(y)>0\ alors\ \bot\ sinon\ \sigma[y\to 4\sigma(y)] \\
&\qquad sinon\ \sigma[y\to 2\sigma(y)] \\
&\quad sinon\ \sigma
\end{aligned}
$$

$$F^3(\bot)(\sigma) = \begin{cases} \sigma\ si\ x_0 \leqslant \sigma(y) \\ \sigma[y\to 2\sigma(y)]\ si\ \sigma(y)<x_0\leqslant 2\sigma(y) \\ \sigma[y\to 4\sigma(y)]\ si\ 2\sigma(y)<x_0\leqslant 4\sigma(y) \\ \bot\ si\ 4\sigma(y)<x_0 \end{cases}$$

$$F^p(\bot)(\sigma) = \begin{cases} \sigma\ si\ x_0 \leqslant \sigma(y) \\ \sigma[y\to 2\sigma(y)]\ si\ 2^{i-1}\sigma(y)<x_0\leqslant 2^i\sigma(y), \quad i=1\to p-1 \\ \bot\ si\ 2^{p-1}(\sigma(y))<x_0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
F^{p+1}i(\bot)(\sigma) &= \ si\ \llbracket x-y>0\llbracket(\sigma)\ alors\ F^p(\bot)(\sigma)[y\to 2\sigma(y)] sinon \sigma \\
&= \begin{cases} \sigma\ si\ x_0 \leqslant \sigma(y) \\ \sigma[y\to 2\sigma(y)]\ si\ x_0\leqslant 2\sigma(y), \quad x_0>\sigma(y) \\ \sigma[y\to 2^i\sigma(y)]\ si\ 2^{i-1}\sigma(y)<x_0\leqslant 2^i, \quad i=1..p \\ \bot\ si\ 2^p\sigma(y)<x_0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\lim \uparrow F^p(\bot)(\sigma) = \begin{cases} \sigma\ si\ x_0\leqslant y_0 \\ \sigma[y\to 2^i y_0]\ si\ 2^{i-1}y_0<x_0\leqslant 2^i y_0 \end{cases}$$

Remarque : on à supposé $y_0=1$.