

1 Algèbres, congruences et modèles

Voir notes écrites

2 Spécifications

2.1 Exercice 1

[Nat Bool]

```
op zero : -> Nat
op succ : Nat -> Nat
ops plus, mult : Nat Nat -> Nat
eq plus(zero, m) = m
eq plus (succ(n), p) = succ (plus n p)
eq mult (zero,n) = zero
eq mult (succ(p),q) = plus (q, mult(p,q))
```

$$\text{eq somme}(x,y) = \begin{cases} \text{somme}(y,x), & \text{si } y < x \\ x, & \text{si } x = y \\ x + \text{somme}(x+1,y) & \text{sinon} \end{cases}$$

```
eq egal(zero, zero) = true
eq egal(succ(n), zero) = false
eq egal(zero, succ(n)) = false
egal(succ(p),succ(q)) = egal(p,q)
```

3 Logique équationnelle

3.1 Exercice 1

$$\begin{aligned} & \begin{cases} M + 0 = M & (1) \\ M + s(N) = s(M + N) & (2) \end{cases} \\ & s(s(0)) + (s(0) + s(s(s(0)))) \stackrel{(2)}{=} s(s(0)) + (s(s(0) + s(s(0)))) \\ & \stackrel{(2)}{=} s(s(s(0))) + (s(0) + s(s(0))) \\ & \stackrel{(2)}{=} s(s(s(0))) + (s(s(0) + s(0))) \\ & \stackrel{(2)}{=} s(s(s(s(0)))) + (s(0) + s(0)) \\ & \stackrel{(2)}{=} s(s(s(s(0)))) + (s(s(0) + 0)) \\ & \stackrel{(2)}{=} s(s(s(s(0)))) + (s(s(0))) \\ & \stackrel{(1)}{=} s(s(s(s(0)) + s(0))) \\ & \stackrel{(2)}{=} s(s(s(s(s(s(0)))))) + 0 \\ & = s(s(s(s(s(s(0)))))) \end{aligned}$$

3.2 Exercice 2

On dispose des axiomes suivants :

1. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
2. $e + X = X$
3. $(-X) + X = e$

Montrer que $\forall X, X + (-X) = e$ est un théorème déductif.

Astuce :

$$\begin{aligned} X + (-X) &= - - X + -X + X \\ &= - - X + (-X + X) \\ &= - - X + e \\ \text{et } X + (-X) &= - - X + -X + X \\ &= e + X \\ &= X \end{aligned}$$

J'en déduis que $X = - - X + e$

$$\begin{aligned} X + (-X) &= (- - X + e) + (-X) \\ &= - - X + (e + -X) \\ &= - - X + -X \\ &= e \end{aligned}$$

4 Logique inductive

4.1 Exercice 1

Voir les note d'adèle

4.2 Exercice 2

On dispose des axiomes suivants :

1. $0 + M = M(A)$
2. $s(N) + M = s(N + M)(B)$

Montrons que $X + Y = Y + X$

Par induction

$$(1) 0 + Y = Y + 0$$

$$(2) N + Y = Y + N \rightarrow s(N) + Y = Y + s(N)$$

1)

$$0 + Y =^{(A)} Y$$

$$Y + 0 =^{(1)} Y$$

$$\text{d'où } 0 + Y = Y + 0$$

2)

$$s(N) + Y =^{(B)} s(N + Y)$$

$$Y + s(N) =^{(2)} s(Y + N)$$

Par hypothèse d'induction