1 Algèbres, congruences et modèles

Voir notes écrites

2 Spécifications

2.1 Exercice 1

[Nat Bool]

op zero : -> Nat
op succ : Nat -> Nat
ops plus, mult : Nat Nat -> Nat
eq plus(zero, m) = m
eq plus (succ(n), p) = succ (plus n p)
eq mult (zero,n) = zero
eq mult (succ(p),q) = plus (q, mult(p,q))

$$\text{eq somme(x,y)} = \begin{cases} somme(y,x), & \text{si } y < x \\ x, & \text{si } x = y \\ x + somme(x+1,y) & \text{sinon} \end{cases}$$

eq egal(zero, zero) = true
eq egal(succ(n), zero) = false
eq egal(zero, succ(n)) = false
egal(succ(p),succ(q)) = egal(p,q)

3 Logique équationnelle

3.1 Exercice 1

$$\begin{cases} M + 0 = M \ (1) \\ M + s(N) = s(M + N) \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
s(s(0)) + (s(0) + s(s(s(0)))) &=^{(2)} s(s(0)) + (s(s(0) + s(s(0)))) \\
&=^{(2)} s(s(s(0))) + (s(0) + s(s(0)) \\
&=^{(2)} s(s(s(0))) + (s(s(0) + s(0))) \\
&=^{(2)} s(s(s(s(0)))) + (s(0) + s(0)) \\
&=^{(2)} s(s(s(s(0)))) + (s(s(0) + 0)) \\
&=^{(2)} s(s(s(s(0)))) + (s(s(0))) \\
&=^{(1)} s(s(s(s(0)) + s(0))) \\
&=^{(2)} s(s(s(s(s(0)))))) + 0 \\
&= s(s(s(s(s(0))))))
\end{aligned}$$

3.2 Exercice 2

On dispose des axiomes suivants :

1. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
2. $e + X = X$
3. $(-X) + X = e$

Montrer que $\forall X, X + (-X) = e$ est un théorème déductif.
Astuce :

$$
\begin{aligned}
X + (-X) &= - - X + -X + X \\
&= - - X + (-X + X) \\
&= - - X + e \\
\text{et } X + (-X) &= - - X + -X + X \\
&= e + X \\
&= X \\
\text{J'en déduis que } X &= - - X + e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X + (-X) &= (- - X + e) + (-X) \\
&= - - X + (e + -X) \\
&= - - X + -X \\
&= e
\end{aligned}
$$

4 Logique inductive

4.1 Exercice 1

Voir les note d'adèle

4.2 Exercice 2

On dispose des axiomes suivants :

1. $0 + M = M(A)$
2. $s(N) + M = s(N + M)(B)$

Montrons que $X + Y = Y + X$
Par induction

$$(1)\ 0 + Y = Y + 0$$
$$(2)\ N + Y = Y + N \rightarrow s(N) + Y = Y + s(N)$$

$$1) \quad \left.\begin{array}{ll} 0 + Y & =^{(A)} Y \\ Y + 0 & =^{(1)} Y \end{array}\right\} \text{d'où } 0 + Y = Y + 0$$

$$2) \left\{\begin{array}{ll} s(N) + Y & =^{(B)} s(N + Y) \\ Y + s(N) & =^{(2)} s(Y + N) \end{array}\right.$$

Par hypothèse d'induction