Sémantique CM

12 mars 2018

1 ??

[[...]] : pour les instructions
$[[while\ E_b\ do\ S]]y = \lambda e\ si\ [[t_b]]_z e\ est\ vrai\ Alors[[while\ E_b\ do\ S]]$

2 Sémantique dénotationnelle des boucles

Exemple avec une fonction récursive, ATTENTION : on n'est pas dans le langage des tant que. On considère $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
"définie" par $f(x) = si\ x = 0 alors\ 0 sinon\ f(x-1)$
En fait, f est solution d'une équation de point fixe.
$f = Gf\ avec\ G : (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z})$ (la fin manque)

On introduit $\perp_{\mathbb{Z}}$: indéterminé
$\perp_{\mathbb{Z}} - 1 = \perp_{\mathbb{Z}}$: le genre de classe
$\perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}}$: fonction indéterminée
$\perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}}(x) = \perp_{\mathbb{Z}}$
On essaie de voir si certaines informations marchent avec $f_0 = \perp$
est-ce que $f = Gf_0$?

$$f_1 = Gf_0 = \lambda x si x = 0 alors\ 0 sinon\ f_0(x-1)$$

$$f_1 = \lambda x si\ x = 0 alors\ 0 sinon\ \perp \neq f_0$$

mais f_1 est plus déterminée que f_0. $\gamma : E \to E$

$x = \gamma(x)$: x point fixe.

$$
\begin{aligned}
f_2 &= Gf_1 \\
&= \lambda x.si\ x = 0 alors\ 0 \\
&sinon\ si\ x - 1 = 0 alors\ 0 \\
&sinon\ \perp \\
f_2 &= \lambda x.si\ x \in [0,1] alors\ 0 \\
&sinon\ \perp
\end{aligned}
$$

On continue

$$
\begin{aligned}
f_k &= G^k f_0 = G(f_{k-1}) \\
f_k &= \lambda x.si\ x \in [0,1] alors\ 0 \\
&sinon\ \perp
\end{aligned}
$$

En faisant tendre $k \to \infty$:
$f_\infty = \lambda x.si\ x \in \mathbb{N}\ alors\ 0$
$sinon\ \perp$

Un peu de théorie : introduction de $\mathbb{L}$ littéraux $\mathbb{B}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. On ajoute un symbole d'indétermination : $\perp_\mathbb{B}, \perp_\mathbb{N}, \perp_\mathbb{Z}, \perp_\mathbb{Q}$.

...

On étend cette notion aux fonctions E : ensemble avec $\perp$ et $\sqsubseteq$.

$$
\begin{aligned}
f : E \to E\ et\ g : E \to E \\
f \sqsubseteq g
\end{aligned}
$$

......

propriétés de $\sqsubseteq$:

— $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre :

$$
\begin{aligned}
f \sqsubseteq f \\
si\ f \sqsubseteq g\ et\ g \sqsubseteq f\ alors\ f = g \\
si\ f \sqsubseteq g\ et\ g \sqsubseteq h\ alors\ f \sqsubseteq h
\end{aligned}
$$

— c'est un ordre partiel

— toute suite croissante admet une borne supérieure (plus petit majorant)
$f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 ... \sqsubseteq f_k \sqsubseteq f_{k+1} ....$

Il existe f_∞ une borne sup définie par

$$\begin{cases} Df_\infty = \underset{k}{\cup} Df_k \\ f_\infty(x) = f_k(x) pour\ x \in Df_k \end{cases}$$

Notation : f_∞ est notée $\underset{k}{lim} \uparrow f_k$ ou $lim \uparrow f_k$

Définitions :

— Soit E et F deux domaines et $f : E \to F$, on dit que f est monotone ssi $\forall x, y \in E, \exists x \sqsubseteq y \implies f(x) \sqsubseteq f(y)$

— si E est un domaine, et $f : E \to E$, on dit que f est continue ssi

1. f est monotone
2. ta mère la catin