Algo avancée
Affectation & Airport

16 avril 2018

1 Affectation

1.1 Énonce

Université de Strasbourg
Master d'informatique

Méthodes Algorithmiques Avancées
TD (Correction)

Affectation

Les sources d'énergie s'épuisant sur terre, vous partez coloniser une nouvelle planète. Vous devez répartir n bases spécialisées sur n sites prédéfinis. Chaque base i peut être construite sur n'importe quel site j, mais l'énergie e_{ij} qu'elle consommera dépend du site. Vous devez affecter une base par site de façon à minimiser l'énergie consommée.

1. Formalisez le problème.
2. Proposez une résolution par séparation et évaluation.
3. Déroulez la résolution sur l'exemple suivant, avec une stratégie de parcours mixte : en profondeur d'abord puis passez au nœud le mieux évalué.

	site 1	site 2	site 3
base 1	9	7	2
base 2	6	3	4
base 3	5	1	8

1.2 Formalisation

- n bases $1 \leqslant i \leqslant n$
- n sites $1 \leqslant j \leqslant n$
- $\rightarrow$ 1 base $\leftrightarrow$ 1 site, problème d'affectation $\Rightarrow$ permutation de $[1, n]$

Une solution S est permutation de $[1, n]$ $\;S = \{j_i\}, \;\; 1 \leqslant i \leqslant n$ (La base i est affectée au site j_i)

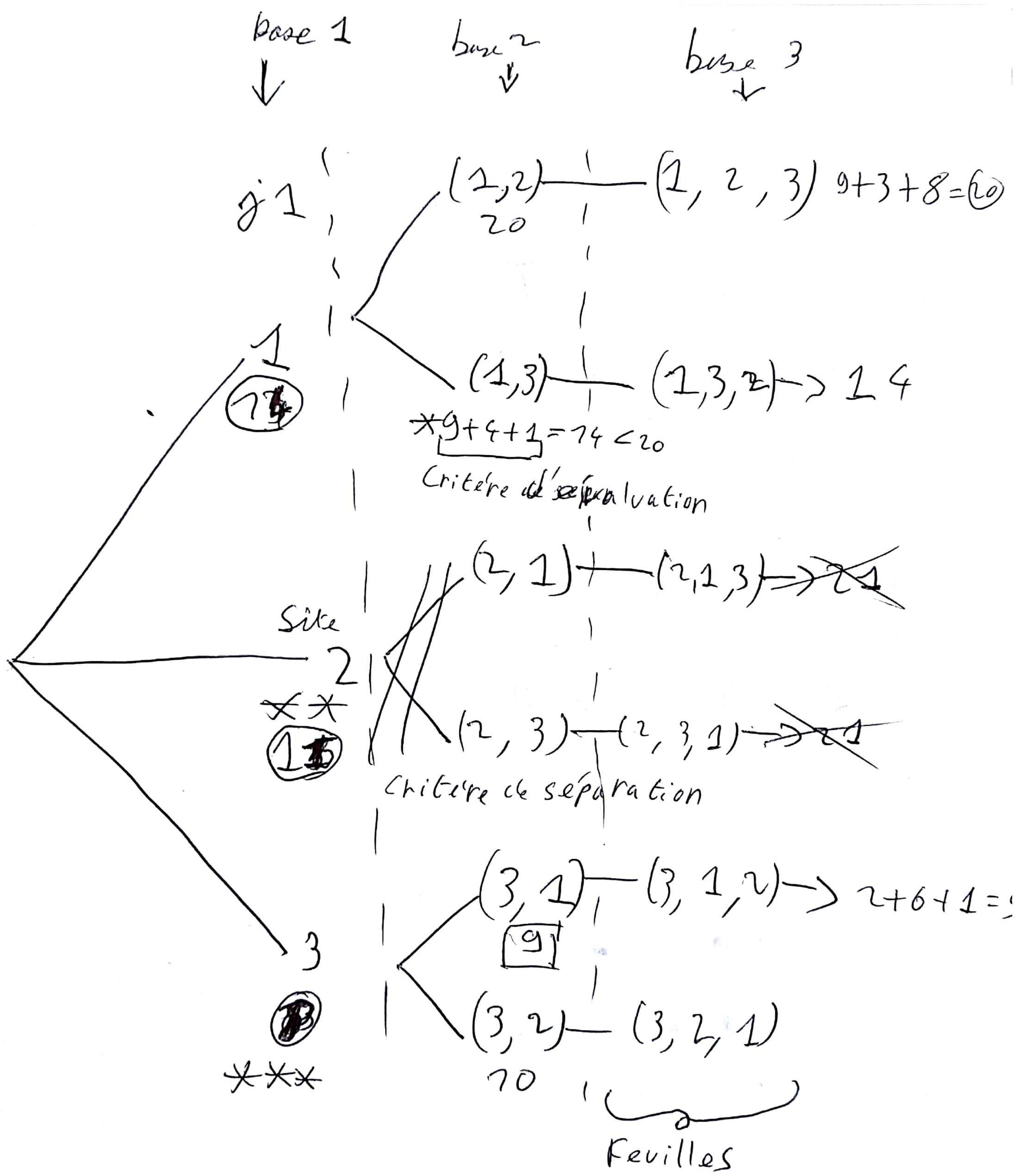
$$v(S) = \sum_{i=1}^{n} e_{i,j_i}$$

$v(S)$ est la valeur d'une solution S. On veut minimum v(S). Niveau k permet de calculer j_k

1.3 Séparation et évaluation

- noeud ? S_k donne$\{j_i\}, 1 \leqslant i \leqslant k$
- feuille ? S_k solutions

$$e(S_k) = \sum_{i=1}^{k} e_{i,ji} + \sum_{i=k+1}^{n} \underset{j \notin S_k}{min}(e_{i,ji})$$



— * : $9 + 4 + min(1)$

— ** : $7 + min(6, 5) + min(4, 8) = 7 + 5 + 4 = 16$

— *** : $2 + min(6, 5) + min(3, 1) = 2 + 5 + 1 = 8$

i \ j	s1	s2	s3
b1	9	7	2
b2	6	3	4
b3	5	1	8

$$e(S_k) = \sum_{i=1}^{k} e_{i,ji} + \sum_{i=k+1}^{n} \min_{j \notin S_k}(e_{i,ji})$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ j_1 & 2 \end{pmatrix} \text{ site 2 à la base 1}$$

$e_{1,2} + min(6,4) + min(5,8) = 7 + 4 + 5 = 16$

2 Airport

2.1 Énoncé

Airport [1], (ou 58 minutes pour vivre)

Vous dirigez un aéroport et une tempête de neige qui s'approche oblige tous les avions des environs à se poser. Votre objectif est de permettre à un maximum de passagers de se mettre en sécurité dans l'aéroport. Une fois un avion posé, il ne peut plus repartir en raison de la tempête.

L'espace de parking des avions dans l'aéroport est limité ; il est mesurable en nombre de rampes d'embarquement. L'aéroport possède R rampes d'embarquement au total.

Les n avions pouvant potentiellement rallier votre aéroport sont numérotés $1 \leq i \leq n$. L'avion numéroté i transporte p_i passagers et occupe au sol l'espace de parking de r_i rampes d'embarquement.

Vous devez choisir quels avions vous autorisez à se poser.

1. Formalisez le problème en précisant la forme et le valeur d'une solution.
2. Dans le cadre d'une approche par *séparation et évaluation*, détaillez la structuration des solutions explorées et proposez une évaluation efficace. Précisez le coût algorithmique de cette évaluation.

2.2 Formalisation

- n avions, $1 \leqslant i \leqslant n$
- Chaque avion i à P_i passagers, occupe r_i rampes
- $\rightarrow$ type "sac à dos"
- $\rightarrow$ chaque avion 1 seul fois

$$\text{La solution } S = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$$

$$b_i = 0, 1$$

$$\text{Critère d'admissibilité : } \Omega(S) = \sum_{i=1}^{n} b_i r_i \leqslant R$$

$$\text{Valeur d'une solution : } v(S) = \sum_{i=1}^{n} b_i r_i$$

$\Rightarrow$ On trie par ordre croissant les rapports $\frac{P_i}{r_i}$

$$\frac{P_{\sigma(1)}}{r_{\sigma(1)}} \geqslant \frac{P_{\sigma(2)}}{r_{\sigma(2)}} \geqslant ... \geqslant \frac{P_{\sigma(n)}}{r_{\sigma(n)}}$$

Le niveaux k permet de choisir b_k.

$$\text{Noeud } S_k \begin{cases} e(S_k) = \sum_{i=1}^{k} b_{\sigma(i)} p_{\sigma(i)} \\ r(S_k) = \sum_{i=1}^{k} b_{\sigma(i)} p_{\sigma(i)} \leqslant R \end{cases}$$