Algorithmes de recherche - TD

18 septembre 2018

Table des matières

Table des figures

1 Intros et définitions

Recherche de mots dans un texte, algorithme exact, toutes les solutions et pas d'heuristique.

1.1 Périodicité et bords

Quelles sont les périodes du mot x = aabaabaa et pér(x) de x ?

$$\begin{aligned} p = 3 &\Rightarrow \forall 0 \leq i \leq 8-3-1 \Rightarrow i \in [0,4] \\ p = 6 &\Rightarrow \forall 0 \leq i \leq 8-6-1 \Rightarrow i \in [0,1] \\ p = 7 &\Rightarrow \forall 0 \leq i \leq 8-7-1 \Rightarrow i \in [0,0] \\ p = 8 &\Rightarrow \text{Admis} \\ \text{pér}(x) &= 3 \end{aligned}$$

Quelles sont les bords du mot x = aabaabaa ?
$\Rightarrow$ ϵ, a, aa et aabaa.

Quelle est la relation entre les notions de bords et périodes ?
Les notions de bords et de périodes sont duales.

Application avec la bord aa.
Le bord correspond à la période 6, qui correspond à $|aabaabaa| - |aa|$.

Quel est le bord du mot aabaabaa ?
C'est aabaa.

Quelles sont les suites des bords et des périodes du mot x = aabaabaa ?
Suite des bords : (aabaa, aa, a, ϵ), car LE bord de aaabaabaa est aabaa (le bord le plus long)
Suite des périodes : (3, 6, 7, 8), car

$$\begin{aligned} 3 &= |x| - |Bord(x)| \\ &= |aabaabaa| - |aabaa| \\ &= 8 - 5 \\ \text{ET} & \\ 6 &= |x| - |Bord^2(x)| \\ &= |aabaabaa| - |aa| \\ &= 8 - 2 \end{aligned}$$

1.2 Puissance et primitive

Donner un exemple de mots x et y vérifiant $x^m = y^n$ sur un alphabet à 2 lettres ?
Soit x = ab et y = abab $\Rightarrow x^2 = y^1$

Donner un exemple de mot primitif et de non-primitif de longueurs supérieures à 3.
Le mot abaab st primitif.
Le mot baba = $(ba)^2$ n'est pas primtif.

Vérifier la proposition 'Un mot non vide est primitif si et seulement s'il un facteur de son carré qu'en tant que préfix et suffixe', avec les mots abaab et baba.
Le mot abaab est primitif car abaab est uniquement un facteur de abaab . abaab en tant que préfixe et suffixe.
Le mot baba n'est pas primitif car baba n'est pas uniquement un facteur de baba . baba qu'en tant que préfixe et suffixe, par exemple ba . baba . ba.

Donner un exemple de mots conjugués.
Avec A = a, b, x = abbaba, y = abaabb, on a u = abb et v = aba.
Avec B = A, C, G, T, x = AGTACGTTA , y = ACGTTAAGT, on a u = AGT et v = ACGTTA.
Avec B^3 = AAA, AAC, ..., TTT, x = TTTACG , y = ACGTTT , on a u = TTT, v = ACG.

Donner un exemple de mot z avec des mots conjugués x et y.
Soit x = AAC, y = ACA, on a z = A car x = z . AC et y = AC . z

2 Mots particuliers

2.1 Mots de fibonacci

n	F_n	f_n
3	2	ab
4	3	aba
5	5	abaab
6	8	abaababa
7	13	abaababaabaab
8	21	abaababaabaababaababa

Propriété remarquable : ? ? ?

Démontrer $\phi^n(a) = f_{n+2}$.

$$\begin{aligned}
\phi^1(a) &= ab = f_3 \\
\phi^2(a) &= \phi^1(\phi(a)) \\
&= \phi^1(ab) \\
&= \phi(a).\phi(b) \\
&= ab.a = aba \\
&= f_4 \\
\phi^n(a) &= \phi^{n-1}(\phi(a)) \\
&= \phi^{n-1}(ab) \\
&= \phi^{n-1}(a).\phi^{n-1}(b) \\
&= f_{n+1}.\phi^{n-2}(\phi(b)) \\
&= f_{n+1}.\phi^{n-2}(a) \\
&= f_{n+1}.f_n \\
&= f_{n+2}
\end{aligned}$$

Démontrer la proposition du palindrome de fibonacci avec $n \geq 3$.

$$\begin{aligned}
f_3 &= ab, u = \epsilon \Rightarrow palindrome(trivial) \\
f_4 &= aba, u = a \Rightarrow palindrome(trivial) \\
f_5 &= abaab, u = aba \Rightarrow palindromecar
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 5$, on a $f_n = f_{n-1}.f_{n-2} = f_{n-2}.f_{n-3}.f_{n-2}$.

Si n est impair alors, par hypothèse de récurrence alors f_{n-2} est impair et f_{n-3} est pair. Donc $f_{n-2} = u_1ab$ et $f_{n-3} = u_2ba$ avec u_1 et u_2 des palindromes.
Donc, $f_n = u_1abu_2bau_1ab$.
Mais u_1 et u_2 sont des palindromes, donc $u_1abu_2bau_1$ est également un palindrome.
En posant $u = u_1abu_2bau_1$, on a alors $f_n = uab$ où u est un palindrome.

Démonstration de façon similaire si n est pair.

2.2 Les mots de DE BRUIJN

Donner tous les mots de DE BRUIJN d'ordre $k = 1$ dans l'alphabet $A = a, b$.
Les mots ab et ba sont les deux seuls mots de DE BRUIJN d'ordre 1.

Pour k = 3 :
$A^3 = aaa, aab, ..., bbb$
Introuvables à la man car trop compliqués. Ex : aaababbbaa car ses facteurs de longueur 3 sont les 8 mots de A^3 : aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb. Chaque mot n'apparait qu'une et une seule fois dans ce mot ET tout les mots de A^3 y apparaissent.

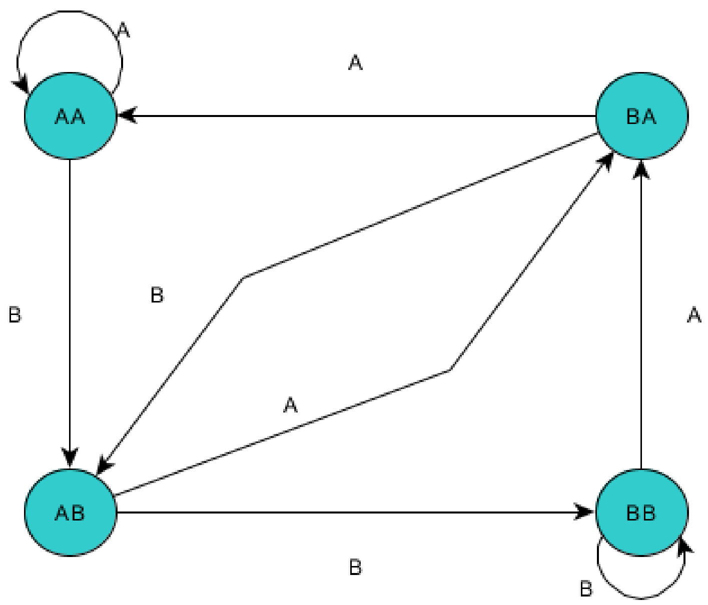

FIGURE 1 – Automate DE BRUIJN ordre 3 avec A = {a,b}

Exactement 2 flèches sortent de chacun des états, l'une étiqutée par a, l'autre par b, et exactement 2 flèches entrent dans chacun des états, toutes 2 étiquetées par la même lettre. Il faut passer par toutes les flèches en commençant et terminant par le même état.

Longueur d'un mot de DE BRUIJN d'ordre k = f(k) ?
$2^k + (k - 1)$

3 Automates de localisation

3.1 Arbre d'un dictionnaire

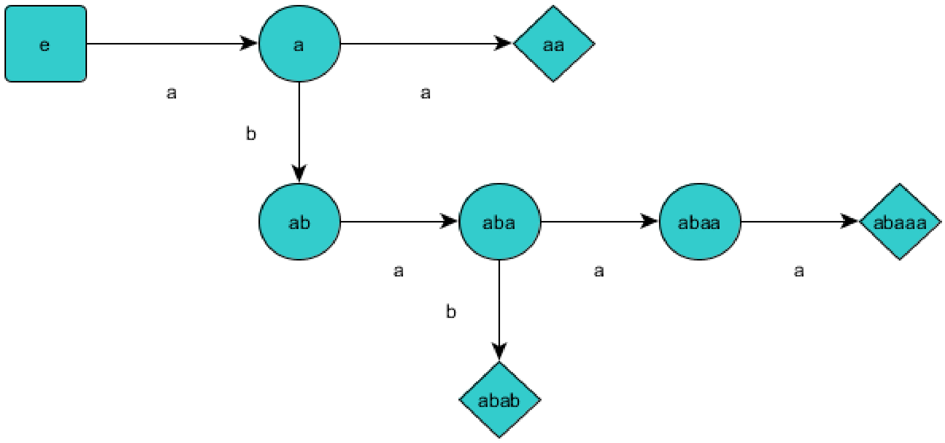

Figure 2 – Automate A(X) reconnaissant X = {aa, abaaa, abab}

3.2 Localisation de plusieurs mots

$$
\begin{aligned}
h(b) &= \epsilon \Rightarrow \text{Tout ce qui se finit par b va vers } \epsilon \\
h(a) &= a \\
h(aa) &= aa \\
h(ab) &= ab \\
h(aaa) &= aa \\
h(aab) &= ab \\
h(aba) &= aba \\
h(abb) &= \epsilon
\end{aligned}
$$

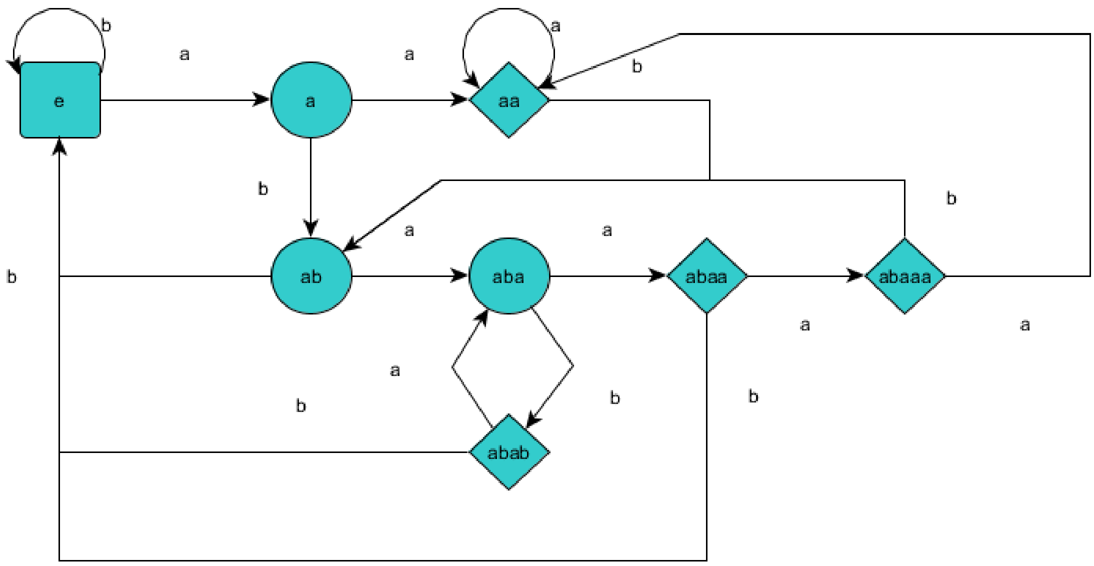

Figure 3 – Automate D(X) reconnaissant X = {aa, abaaa, abab}

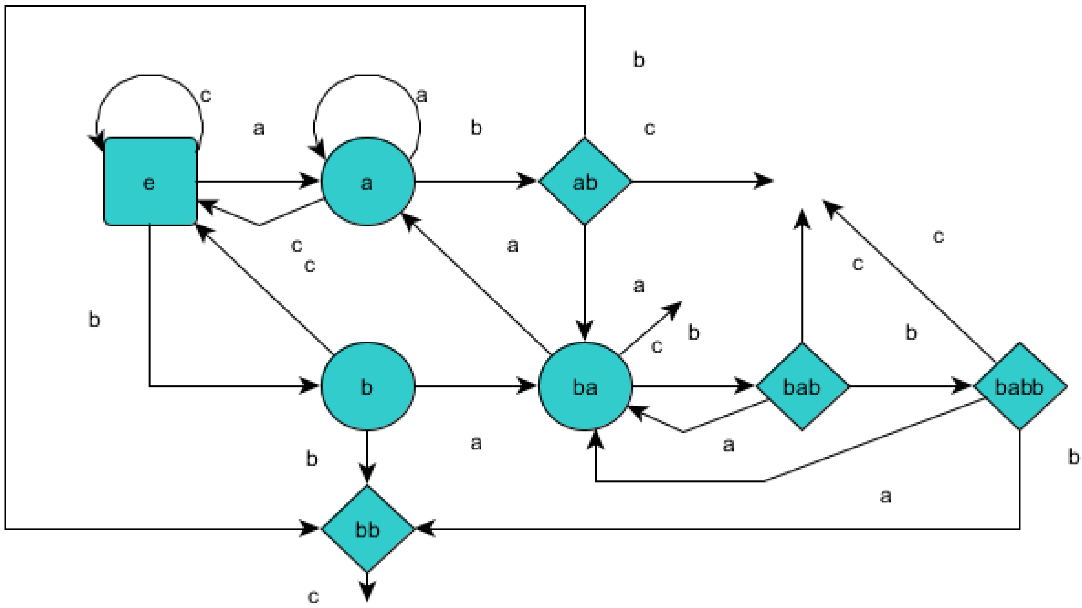

FIGURE 4 – Automate D(X) reconnaissant X = {ab, babb, bb} sur A = {a, b, c}

Sur ce dernier automate, les flèches étiquetées 'c' vont toutes vers l'état ϵ.

3.3 Construction de l'automate-dictionnaire

Localisation des mots $X = ab, babb, bb$ sur $A = a, b, c$ sur le texte $y = cbabba$. Utilisation de l'algorithme LOCALISATION(X, y) sur l'automate D(X) fait précédemment.

j	$y[j]$	Etat r	Mot
		ϵ	
0	c	ϵ	
1	b	b	
2	a	ba	
3	b	bab	Occurence de ab
4	b	babb	Occurence de babb et bb
5	a	ba	

La colonne Mot contient la liste des mots reconnus, si l'état r appartient aux états terminaux de D(X).

3.4 Automate avec fonction de suppleance

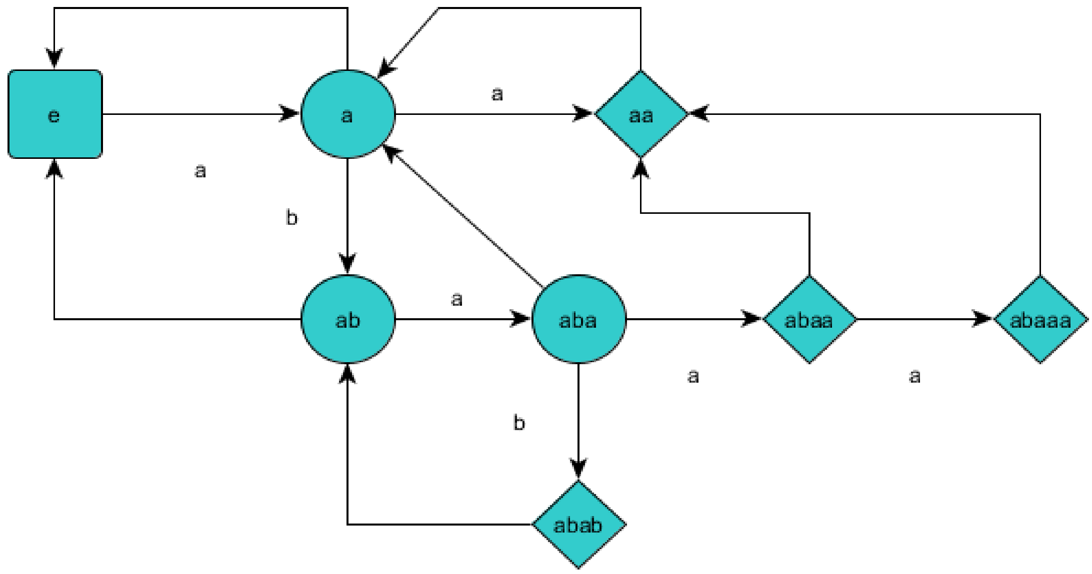

FIGURE 5 – Automate DS(X) reconnaissant X = aa, abaaa, abab sur A = {a, b}

3.5 Automate avec optimisation de la fonction de suppleance

Avec l'automate DS(X) (page 8), donner des exemples d'ensembles Suivant(u) avec $u = abaa$ (état abaa).

$$
\begin{aligned}
Suivant(u) &= \{a\} \\
f(u) &= aa \\
Suivant(f(u)) &= Suivant(aa) = \emptyset \\
&\Rightarrow \text{car } \{a\} \Leftrightarrow \{a\} \cup \emptyset \\
f(f(u)) &= f(aa) = a \\
Suivant(f(f(u))) &= Suivant(a) = \{a, b\} \\
&\Rightarrow \text{fin car } Suivant(a) \notin Suivant(aa) \\
&\Rightarrow \text{g : état abaa} \rightarrow \text{état a}
\end{aligned}
$$

Example avec $u = aba$ (état 4).

$$
\begin{aligned}
Suivant(u) &= \{a, b\} \\
f(u) &= a \\
Suivant(a) &= \{a, b\} \\
f(f(u)) &= \epsilon \\
Suivant(\epsilon) &= \{a\} \\
&\Rightarrow \text{g : état aba} \rightarrow \text{état } \epsilon
\end{aligned}
$$