ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista de Matrizes e suas operações básicas - Gabarito.

1. Calcule os produtos AB e BA, sempre que possível

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

   Por ser a primeira multiplicação de matrizes, se realiza o produto AB passo a passo.
   Primeiro passo:
   Deve ser verificada a ordem das matrizes:
   O número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.
   No caso: $Colunas(A) = 3 = Linhas(B)$. Satisfaz, logo a multiplicação pode ser realizada.
   Segundo passo:
   Cria-se a matriz de resultados com o número de linhas de A e colunas de B, então 2×2

   $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

   Terceiro passo:
   Cada entrada da matriz produto r_{ij} é calculada como o somatório dos produtos das entradas da linha i de A vezes as entradas da coluna j de B.
   $r_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$, portanto:

   $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1) + (-4)(1) + (2)(1) & (1)(2) + (-4)(-1) + (2)(-3) \\ (-1)(1) + (4)(1) + (-2)(1) & (-1)(2) + (4)(-1) + (-2)(-3) \end{bmatrix}$$

   logo, o resultado é $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Realizando o mesmo processo, tem-se $BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$.

   Nota: Ao comutar as matrizes nas multiplicações obtemos resultados diferentes.
   Assim, a multiplicação de matrizes não é comutativa. Os resultados podem coincidir mas a propriedade não é válida.
   No exemplo $AB \neq BA$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

   Nota: O produto de duas matrizes não nulas, AB, tem como produto a matriz nula.
   Em números reais isso não acontece.

2. Determine $AB - BA$

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Resolução: $AB - BA = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -6 \\ 7 & 12 & 8 \\ -15 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

Resolução: $AB - BA = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 24 \\ 12 & -27 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obter uma fórmula para A^n.

Resolução: Para determinar A^n, é bom calcular pelo menos A^2, A^3 e A^4.
Se nada pode ser deduzido desses cálculos, será necessário calcular outras potências.
No exemplo: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Como podemos confirmar a entrada superior direita é a soma das entradas da segunda coluna da potência anterior, logo

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3(n) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deve ser verificada a fórmula, e o processo para validar a fórmula é chamado de **indução matemática.**
Faça a indução matemática para a fórmula obtida:
Como podemos ter certeza que a fórmula é válida para quaisquer n? Precisamos utilizar indução matemática para confirmar.
A indução matemática considera três passos.
1. Verificar que a fórmula funciona para $n = 1$: No exercício é $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então é válido para $n = 1$.
2. Assumir que funciona para $(n-1)$, isto é: assumimos que

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Provar que funciona para n, isto é: fazemos

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 3(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 + 3(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a fórmula é validada por indução matemática.

4. Represente as equações em matrizes

(a) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y + 9z = 30 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$

Resolução: Para representar um sistema de equações em formato de matriz, deve ser criada uma matriz de incógnitas:
$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, só assim se pode estabelecer as colunas das incógnitas na matriz de coeficientes.
Então, para montar a matriz de coeficientes se pode determinar que cada linha corresponde a uma equação na ordem que está no sistema de equações, e as colunas correspondem aos coeficientes de x primeiro, de y depois e de z por último.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

A matriz estendida correspondente é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & |10 \\ 2 & 7 & 9 & |30 \\ 1 & 5 & \alpha & |\beta \end{bmatrix}$$

(b) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=2 \\ 2y+6t=2 \\ \alpha y+3t=1 \\ 5y+z-t=2 \end{cases}$

Solução: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & |2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & |2 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 & |1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & |2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 3x+y+(\alpha+1)z=4 \end{cases}$

Solução: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & |-6\beta \\ \alpha & 3 & 2 & | \ \ 2\beta \\ 3 & 1 & (\alpha+1) & | \ \ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases}$

Solução: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & |10 \\ 2 & 7 & -2 & |10 \\ 1 & 5 & \alpha & |\ \beta \end{bmatrix}$

5. Em um projeto de pesquisa sobre dieta participam adultos e crianças de ambos os sexos. A distribuição dos participantes no projeto é dada pela matriz.
$A = \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix}$
Nesta matriz sabe-se que os elementos das linhas i representam o sexo dos participantes do projeto de pesquisa, ou seja, masculino e feminino respectivamente; já os elementos das colunas j tratam dos adultos e das crianças, nessa ordem.
O número de gramas diário de proteínas e gorduras consumido pelas crianças e adultos é dado pela matriz.
$B = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$
Nesta matriz os elementos das linhas i representam o consumo diário, em gramas, de proteína e gordura, já os elementos das colunas j os participantes do projeto de pesquisa, ou seja, adultos e crianças respectivamente.
Responda utilizando a multiplicação de matrizes de forma adequada:
a) Quantos gramas de proteína são consumidos diariamente por homens no projeto?
b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente por mulheres no projeto?
Resolução: (Multiplicação de matrizes)
As perguntas pedem informação por sexo e consumo.
Observar que uma matriz tem informação dos sexos e a outra do consumo. Aparentemente, precisaremos multiplicar ambas, mas vamos verificar como é o relacionamento entre essas matrizes.
Primeiro:
Pode multiplicar AB, e nesse caso as colunas de A (adulto, criança) não batem com as linhas de B.
Segundo:
Pode multiplicar BA, sim, pois as duas tem 2×2, mas olhando o significado das linhas de A e as colunas de B, são informações diferentes.
Realizando o produto AB, não temos as informações solicitadas.
Observar que a informação das colunas de A não é coerente com as informações das linhas de B, podemos multiplicar? Se puder, o que representa o resultado?:

$$AB = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{array}{c} homem \\ mulher \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{array}{c} proteina \\ gordura \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \quad =???$$

Realizando o produto AB^t, (agora as colunas de A e as linhas de B^t se relacionam corretamente), assim temos as informações solicitadas.
Observar a multiplicação das matrizes:

$$AB^t = \begin{array}{c} \\ homem \\ mulher \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ adulto \\ criança \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} proteina & gordura \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ homem \\ mulher \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} proteina & gordura \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2800 & 4000 \\ 4000 & 6000 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Quantos gramas de proteína são consumidos diariamente por homens no projeto?
$2800g$

(b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente por mulheres no projeto?
$6000g$

6. Considere o problema anterior e troque a matriz B pela matriz.
$B = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 25 & 10 \end{bmatrix}$
Nesta matriz os elementos das colunas representam os participantes do projeto de pesquisa, considerando as informações como adultos e crianças respectivamente; já os elementos das linhas representam o consumo diário de proteína e gordura, em gramas e nessa ordem. Responda as duas perguntas a) e b) da questão anterior.
Resolução: (Multiplicação de matrizes)
As perguntas pedem informação por sexo e consumo.
Observar que uma matriz tem informação dos sexos e a outra do consumo. Aparentemente, precisaremos multiplicar ambas, mas vamos verificar como é o relacionamento entre essas matrizes.
Primeiro: pode multiplicar AB, e nesse caso as colunas de A (adulto, criança) não batem com as linhas de B (proteína, gordura).
Segundo: pode multiplicar BA, sim, pois as duas tem 2×2, mas olhando o significado das linhas de A (masculina, feminino) e as colunas de B (adulto, criança), são informações diferentes.
Realizando o produto AB, não temos as informações solicitadas. Observar que a informação das colunas de A não é coerente com as informações das linhas de B, podemos multiplicar? Se puder, o que representa o resultado?:

$$AB = \begin{array}{c} \\ masculino \\ femenino \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ proteina \\ gordura \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 25 & 10 \end{bmatrix} \end{array} =???$$

Realizando o produto AB^t, (agora as colunas de A (adulto, criança) e as linhas de B^t (adulto, criança) se relacionam corretamente), assim temos as informações solicitadas. Observar a multiplicação das matrizes:

$$AB^t = \begin{array}{c} \\ masculino \\ femenino \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} adulto & criança \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ adulto \\ criança \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} proteina & gordura \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 25 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$AB^t = \begin{array}{c} \\ masculino \\ femenino \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} proteina & gordura \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3400 & 3200 \\ 5000 & 4500 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Quantos gramas de proteína são consumidos diariamente pelos participantes masculinos no projeto?
$3400g$

(b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente pelas participantes femininas no projeto?
$4500g$

7. Na formulação de ração das diversas espécies animais, a procedência dos ingredientes é de extrema importância já que pode haver alterações na quantidade de determinados nutrientes. Para tanto, fez-se uma análise de três ingredientes coletados de duas fábricas (A e B) localizadas em diferentes regiões do estado de São Paulo.

$$A = \begin{bmatrix} 4.2 & 1.0 & 1.6 \\ 6.5 & 0.2 & 0.6 \\ 2.3 & 1.2 & 0.0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1.2 & 1.2 \\ 4 & 0.35 & 0.2 \\ 2.7 & 0.7 & 0.15 \end{bmatrix}$$

OBS: Na matriz A, sabe-se que os elementos das linhas i representam os ingredientes (Milho, caroço de algodão e Calcário calcítico) e os elementos das colunas j os nutrientes (gordura, cálcio e fósforo) em gramas do nutriente/ para cada 100g do ingrediente. Na matriz B tem-se os mesmos ingredientes em coluna. Os

nutrientes estão nas linhas: gordura, cálcio e fósforo.
Um produtor irá utilizar esses ingredientes, em mistura com quantidades iguais, na formulação de ração e para tanto deve-se saber a média de nutriente de cada ingrediente.
Por exemplo:
4.2g de gordura/100g de ingrediente presente no milho - Fábrica A
5.0g de gordura/100g de ingrediente presente no milho - Fábrica B
A média se calcula somando e dividindo por 2:
Média de gordura no milho $= \frac{1}{2}[4.2 + 5.0]$ (g de gordura/100g de ingrediente) $=$ 4.6g de gordura/100g de ingrediente.
a) Expresse utilizando operações de matrizes, uma fórmula para conseguir todas as médias por ingrediente e nutriente em uma matriz.
b) Especifique se tem significado físico o resultado de $A + B$, $A + B^t$, $A^t + B$ e $A^t + B^t$.
Resolução: Observar que para obter as médias precisa-se somar as informações das duas fábricas e cada soma dividir por 2(multiplicar vezes 0.5).
Observar:

$$A = \begin{array}{c} \\ Mi \\ Alg \\ Calc \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} gor & cálc & fós \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4.2 & 1.0 & 1.6 \\ 6.5 & 0.2 & 0.6 \\ 2.3 & 1.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \text{ e } B = \begin{array}{c} \\ gor \\ cálc \\ fós \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Mi & Alg & Cal \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1.2 & 1.2 \\ 4 & 0.35 & 0.2 \\ 2.7 & 0.7 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array}$$

onde: $Mi = Milho$, $Alg = Algodão$, $Calc = Calcário$, $gor = gordura$, $cálc = cálcio$ e $fós = fósforo.$
Mas, como as informações da fábrica B, estão trocadas em linhas e colunas quando comparadas com as informações da fábrica A, basta aplicar a transposta.
Por exemplo aplicando transposta na matriz B, ter-se-á a mesma informação da matriz A, sendo ingredientes nas linhas e nutrientes nas colunas.
Agora tem sentido somar informações com o mesmo significado:

$$B^t = \begin{array}{c} \\ Mi \\ Alg \\ Calc \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} gor & cálc & fós \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 & \frac{27}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{20} & \frac{7}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Matriz Médias} = \frac{1}{2}\left(A + B^t\right) = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & \frac{5}{2} & \frac{43}{20} \\ \frac{77}{20} & \frac{11}{40} & \frac{13}{20} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{10} & \frac{3}{40} \end{bmatrix}.$$