Lista: Matrizes e suas operações básicas 20/03/25

a)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2\times3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times2}$

$AB = C_{2\times2}$; $\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1-4+2 & 2+4-6 \\ -1+4-2 & -2-4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B_{3\times2} \cdot A_{2\times3} = C_{3\times3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -4+8 & 2-4 \\ 1+1 & -4-4 & 2+2 \\ 1+3 & -4-12 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ 20/03/25

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-4+2 & 2+4-6 \\ -2+4-2 & -2-4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{3\times2} \cdot A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & -8+8 & 4-4 \\ 1+1 & -4-4 & 2+2 \\ 1+3 & -4-12 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

$\boxed{Q2}$ $AB - BA = ?$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A_{3\times3} \cdot B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4-8+2 & 1+4+4 & 1+2+2 \\ 8-4+2 & 2+2+4 & 2+1+2 \\ -4-8+1 & -1+4+2 & -1+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 5 \\ 6 & 8 & 5 \\ -11 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{3\times3} \cdot A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4+2-1 & 8+1+2 & 8+2+1 \\ -4+4-1 & -8+2+2 & -8+4+1 \\ 1+4-1 & 2+2+2 & 2+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 11 \\ -1 & -4 & -3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -6 \\ 7 & 12 & 8 \\ -15 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

21/03/25

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

$$A_{3x3} B_{3x3} = \begin{bmatrix} 6+0+0 & 2+0+0 & -4+0+0 \\ 3+3-6 & 1-2+10 & -2+4+22 \\ -3+6-3 & -1-4+5 & 2+8+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 24 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

$$B_{3x3} A_{3x3} = \begin{bmatrix} 6+1+2 & 0+1-4 & 0+2-2 \\ 6-2-4 & 0-2+8 & 0-4+4 \\ -6+5-11 & 0+5+22 & 0+10+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -12 & 27 & 21 \end{bmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 24 \\ 12 & -27 & 0 \end{bmatrix}$$

03 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^n = ?$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 . A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4 . A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+4 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (Hipótese)

22/03/25

Pelo Princípio da indução finita, temos:

Para $n_0 = 1$, temos:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $K \mid K \in \mathbb{N}$, $K \geq n_0$, assumimos que:

$$A^{K+1} = \begin{bmatrix} 1 & K+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$A^{K+1} = A^K . A^1 = \begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0K & 1+K \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a fórmula é válida por indução matemática.

22/03/25

04 a) $\begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y+9z=30 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & t.i \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & 9 & 30 \\ 1 & 5 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \end{array}$

b) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=2 \\ 2y+6t=2 \\ \alpha y+3t=1 \\ 5y+z-t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & t.i \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$

c) $\begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 3x+y+(\alpha+1)z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & t.i \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -6\beta \\ \alpha & 3 & 2 & 2\beta \\ 3 & 1 & \alpha+1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$

d) $\begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & t.i \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \end{array}$

05

$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Adultos} & \text{crianças} \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array}$ nº sexo masc. / nº sexo fem.

$A_{2\times 2}$, a_{ij}; $\begin{cases} i: \text{sexo} \\ j: \text{faixa etária} \end{cases}$

$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Adultos} & \text{crianças} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 25 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$ consumo diário de proteína em gramas / consumo diário de gordura em gramas

a) Qtd de proteína consumida (g) diariamente por homens?

22/03/25

a) $A = \begin{array}{c} \\ M \\ F \end{array}\begin{array}{cc} \text{Adultos} & \text{crianças} \\ \left[\begin{matrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{array}$, $B = \begin{array}{cc} \text{Adultos} & \text{crianças} \\ \left[\begin{matrix} 20 & 15 \\ 25 & 10 \end{matrix}\right] \end{array}$ consumo diário de proteína (g)
// // gordura, em g.

qtd de g de proteína consumida pelos homens: linha M $\cdot$ linha de consumo de proteína ⇒

$$\begin{array}{c} \\ \text{Masculino} \\ \text{feminino} \end{array}\begin{array}{cc} \text{Adultos} & \text{crianças} \\ \left[\begin{matrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{cc} \text{proteína} & \text{gordura} \\ \left[\begin{matrix} 20 & 25 \\ 15 & 10 \end{matrix}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ \text{Adultos} \\ \text{crianças} \end{array} = \begin{bmatrix} 80.20 + 120.15 & 80.25 + 120.10 \\ 100.20 + 200.15 & 100.25 + 200.10 \end{bmatrix}$$

$A_{2\times 2}$ $\quad B^t_{2\times 2}$

$$= \begin{bmatrix} 1600 + 1800 & 2000 + 1200 \\ 2000 + 3000 & 2500 + 2000 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \text{Qtd de proteína (g)} & \text{Qtd de gordura (g)} \\ \left[\begin{matrix} 3400 & 3200 \\ 5000 & 4500 \end{matrix}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ \text{Masculino} \\ \text{feminino} \end{array}$$

Respostas.

a) 3400g de proteína; b) 4500g de gordura

$\boxed{08}$

Fábrica A ⇒ $A = \begin{array}{c} \\ \text{Milho} \\ \text{Carroço} \\ \text{Calcário} \end{array}\begin{array}{ccc} \text{gordura} & \text{cálcio} & \text{fósforo} \\ \left[\begin{matrix} 4.2 & 10 & 1.6 \\ 6.5 & 0.2 & 0.6 \\ 2.3 & 1.2 & 0.0 \end{matrix}\right] \end{array}$ g nutriente/100g de ingrediente

4,2g de gordura / 100g milho

Fábrica B ⇒ $B = \begin{array}{c} \\ \text{gordura} \\ \text{cálcio} \\ \text{fósforo} \end{array}\begin{array}{ccc} \text{milho} & \text{carroço} & \text{calcário} \\ \left[\begin{matrix} 5 & 1.2 & 1.2 \\ 4 & 0.35 & 0.2 \\ 2.7 & 0.7 & 0.15 \end{matrix}\right] \end{array}$, $B^t = \begin{array}{c} \\ \text{Milho} \\ \text{Carroço} \\ \text{Calcário} \end{array}\begin{array}{ccc} \text{gordura} & \text{cálcio} & \text{fósforo} \\ \left[\begin{matrix} 5 & 4 & 2.7 \\ 1.2 & 0.35 & 0.7 \\ 1.2 & 0.2 & 0.15 \end{matrix}\right] \end{array}$

g nutriente p/ 100g de ingrediente

$\boxed{07}$

Resposta $(A + B^t)\frac{1}{2}$; Para que exista significado físico, é necessário que as operações de soma sejam realizadas apenas entre valores com a mesma unidade (determinada pela linha e coluna.) Assim, $A + B$ e $A^t + B^t$ não apresentam significado físico, já $A + B^t$ e $A^t + B$ apresentam significado físico.