Solución:

Debemos indagar la dependencia lineal de los tres vectores. Si los tres vectores son LI no pudieramos escribir a uno de ellos como com lineal de los otros dos

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C} = \overrightarrow{O} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = 2\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3 \\ 0 = 1\lambda_1 - 2\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ 0 = -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 10\lambda_3 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -10 \end{bmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow$Son Linealm Depend. Hecho que nos permite escribir a $\overrightarrow{C} = \lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} \therefore$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + 1\lambda_2 \\ 8 = 1\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ -10 = -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

Sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Trabajamos la primera ecuación y la segunda

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + 1\lambda_2 \\ 8 = 1\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases} \Longrightarrow \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -5 \neq 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}}{\Delta} = -\frac{10}{-5} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{15}{-5} = -3$$

Verificamos el cumplimiento de la tercera ecuación $-10 = -2\,(2) + 2\,(-3) = -10$

$$\begin{cases} \left\| \overrightarrow{A} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \\ \left\| \overrightarrow{B} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = \lambda_1 \left\| \overrightarrow{A} \right\| = 2 * 3 = 6 \\ \beta_2 = \lambda_2 \left\| \overrightarrow{B} \right\| = -3 * 3 = -9 \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{C}_{AB} = (6, -9)$$

Resultado: $\overrightarrow{C}_{AB} = (6, -9)$