Solución:

Haremos un dibujo abstracto de la situación planteada a partir del cual nos prefiguramos las ecuaciones, Ver Figura

El ejercicio consiste en el fondo en encontrar las coordenadas de D . El área en un triángulo rectángulo es el producto del tamaño de sus catetos divididos estre dos

$$\acute{A}rea = \frac{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \left\|\overrightarrow{CD}\right\|}{2}$$

Surgen dos observaciones:

1.- Perpendicularidad entre $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$

2.- Colinealidad entre B A y D. Los vectores DEBEN tener un mismo origen y conviene que la incógnita D esté en un extremo

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BA}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1,2,3) - (3,2,0) = (-2,0,3) \\ \overrightarrow{BA} = (1,2,3) - (2,-1,4) = (-1,3,-1) \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que: $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BA} \Longrightarrow \overrightarrow{D} - \overrightarrow{B} = \lambda \overrightarrow{BA}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{D} = \overrightarrow{B} + \lambda \overrightarrow{BA} = (2,-1,4) + \lambda(-1,3,-1) = (2-\lambda, 3\lambda-1, 4-\lambda)$$

Con esta expresión para $\overrightarrow{D}$ calculamos el vector $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C} = (2-\lambda, 3\lambda-1, 4-\lambda) - (3,2,0) = (-\lambda-1, 3\lambda-3, 4-\lambda)$$

Empleamos la ecuación de ortogonalidad para encontrar lambda

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0. \Longrightarrow (-2,0,3) \cdot (-\lambda-1, 3\lambda-3, 4-\lambda) = 0$$

$$14 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 14$$

Para la ecuación de área $Area = \frac{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \left\|\overrightarrow{CD}\right\|}{2}$ nos falta encontrar el vector $\overrightarrow{CD}$ que depende de lambda

$\overrightarrow{CD} = (-\lambda - 1, 3\lambda - 3, 4 - \lambda)|_{\lambda=14} = (-14 - 1, 3\,(14) - 3, 4 - 14) = (-15, 39, -10)$

$\therefore Area = \dfrac{\sqrt{2^2 + 3^2}\sqrt{15^2 + 39^2 + 10^2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{13}\sqrt{1846}$

RESULTADO

$Area = \dfrac{1}{2}\sqrt{13}\sqrt{1846}$

Una forma de comprobar es que se cumple la ortogonalidad $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

$\Longrightarrow (-2, 0, 3) \cdot (-15, 39, -10) = 0$