Solución:

Llevamos las ecuaciones a un dibujo abstracto representativo de la situación, tomando en cuenta que $\overrightarrow{A}$ $\overrightarrow{C}$ y $\overrightarrow{D}$ son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ y los tres son LD ya que la ecuación **N°3** nos indica que puedo escribir a $\overrightarrow{A}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{C}$ y $\overrightarrow{D}$ ello implica que los tres vectores están en un mismo plano son coplanares. Figura 10

La ecuación **N°3** incluyendo el paralelismo entre $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D}$ se convierte en

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{C} + \lambda\overrightarrow{B}$

Sabemos que $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{A}$ eso se traduce en $\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{A} = 0$

Tomamos producto punto del vector $\overrightarrow{A}$ consigo mismo

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{C} + \lambda\overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C} + \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)\lambda \Longrightarrow \left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)\lambda$$

A partir de esta ecuación obtendremos el vector $\overrightarrow{D}$

$$\lambda = \frac{\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2}{\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)} = \frac{\left(\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}\right)^2}{(-2,1,2) \cdot (4,0,3)} = -\frac{9}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{D} = -\frac{9}{2}(4,0,3)$$

El vector $\overrightarrow{C}$ se despeja de $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} \Longrightarrow \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{D} = (-2,1,2) - \left(-\frac{9}{2}(4,0,3)\right) = \left(16, 1, \frac{31}{2}\right)$$

RESULTADO

$$\overrightarrow{D} = -\frac{9}{2}(4,0,3); \qquad \overrightarrow{C} = \left(16, 1, \frac{31}{2}\right)$$

Una comprobación es dable al verificar la ortogonalidad entre $\overrightarrow{C}$ y $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{A} \qquad \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{A} = \left(16, 1, \frac{31}{2}\right) \cdot (-2,1,2) = 0$$