Solución:

Este es un ejercicio típico del uso de propiedades del producto escalar

El módulo de un vector al cuadrado es su producto escalar consigo mismo propiedad de Norma

$$\left\|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right\|^2=\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right)\cdot\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right)=$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right)+\overrightarrow{B}\cdot\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right)+\overrightarrow{C}\cdot\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right)=$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{C}=$$

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{B}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{C}\right\|^2+2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+2\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$$

Del mismo modo para $\left\|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{B}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{C}\right\|^2-2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}-2\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$$

Luego, igualando tenemos:

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{B}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{C}\right\|^2+2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+2\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}=\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{B}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{C}\right\|^2-2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}-2\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}+2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$$

Los términos $\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2, \left\|\overrightarrow{B}\right\|^2, \left\|\overrightarrow{C}\right\|^2$ y $2\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$ tienen igual signo a ambos lados de la ecuación por lo que desaparecen de la misma entonces:

$$4\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+4\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}=0\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=-\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\|\overrightarrow{A}\right\|\left\|\overrightarrow{B}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\left\|\overrightarrow{B}\right\|\left\|\overrightarrow{C}\right\|\cos\varphi$$

Pero $\left\|\overrightarrow{A}\right\|=\left\|\overrightarrow{C}\right\|=5$ y $\left\|\overrightarrow{B}\right\|=1$ entonces

$\cos\varphi=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ es decir que $\varphi=\pi-\frac{\pi}{8}$ el suplementario $\boxed{\varphi=\frac{7\pi}{8}}$

RESULTADO

$$\boxed{\varphi=\frac{7\pi}{8}}$$