Solución:

Con los puntos P_1 , P_2 y P_3 se construyen dos vectores (digamos $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{P_1P_3}$) que, si no son paraleos, son capaces de generar un espacio $\mathbb{R}^2$. Mediante el doble producto vectorial con $\overrightarrow{A}$ obtendremos un vector ortogonal a $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{P_1P_2}$, paralela al plano generado por $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, que la emplearemos para la construcción del triángulo equilátero. Llamemos $\overrightarrow{Ort}$ a ese vector. Ver Figura 7

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1} = (3,2,1) - (1,2,-1) = (2,0,2)$

$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_3} - \overrightarrow{P_1} = (2,2,-4) - (1,2,-1) = (1,0,-3)$

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \det \begin{bmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 8j$$

$$\overrightarrow{Ort} = \overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \det \begin{bmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} = 16k - 16i = (-16,0,16) = 16\,(-1,0,1) \implies$$

$\overrightarrow{\mu_{Ort}} = \dfrac{\pm(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$ La dirección ortogonal a $\overrightarrow{A}$ tiene dos sentidos, ello significa a su vez que hay dos soluciones:

$\overrightarrow{P_1P_E} = \dfrac{\overrightarrow{A}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \left\|\overrightarrow{A}\right\| \overrightarrow{\mu_{Ort}} \implies \overrightarrow{P_E} = \overrightarrow{P_1} + \dfrac{\overrightarrow{A}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \left\|\overrightarrow{A}\right\| \overrightarrow{\mu_{Ort}}$ Ver Figura 8

$\left\|\overrightarrow{A}\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{P_E} = \overrightarrow{P_1} + \dfrac{\overrightarrow{A}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \left\|\overrightarrow{A}\right\| \overrightarrow{\mu_{Ort}} = (1,2,-1) + \dfrac{(2,0,2)}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{2}\right) \dfrac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = (2,2,0) \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-2,0,2) = \left(2 \mp \sqrt{3}, 2, \pm\sqrt{3}\right)$

Resultado:

$P_{E_1}\left(2 - \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}\right)$ y $P_{E_2}\left(2 + \sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}\right)$

Comprobación: El tamaño del vector $\left\|\overrightarrow{P_1P_E}\right\| = \left\|\overrightarrow{A}\right\| = 2\sqrt{2}$ Los equiláteros tienen iguales sus lados

$\left\|\overrightarrow{P_1P_E}\right\| = \left\|\left(2-\sqrt{3},2,\sqrt{3}\right)-(1,2,-1)\right\| = \left\|\left(1-\sqrt{3},0,\sqrt{3}+1\right)\right\| = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = 2\sqrt{2}$

$\left\|\overrightarrow{P_1P_E}\right\| = \left\|\left(2+\sqrt{3},2,-\sqrt{3}\right)-(1,2,-1)\right\| = \left\|\left(\sqrt{3}+1,0,1-\sqrt{3}\right)\right\| = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2}$

El vector $\overrightarrow{P_1P_E} \perp \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \left(1-\sqrt{3},0,\sqrt{3}+1\right)\cdot(0,8,0) = 0$