CAPíTULO 1

El Sistema Coordenado Polar

1. Elementos

- **El Polo,** que es un punto a partir del cual emanan **rayos** que son semirectas que guardan una inclinación respecto de la horizontal
- **El Eje Polar** que es una **semirecta** horizontal coincidente con la parte positiva del eje de las abscisas.
- El espacio (contiene todos los elementos del producto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$) se designa con $\mathbb{R}^2$ (se lee erre dos). Los elementos de ese conjunto son las tuplas o puntos que tienen la estructura $P(r, \theta)$ con $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$. El significado geométrico de estas coordenadas es r : radio o distancia del polo al Punto P, y el significado para la segunda coordenada θ (que se lee theta) es el ángulo o apertura medida desde el eje polar hasta el rayo que parte del polo en dirección al punto. Este ángulo se mide en dirección contraria a las agujas del reloj. Ver Figura 1
- **Reglas** para establecer una relación *biunívoca* entre la representación gráfica y los valores numéricos. Aquí se hace necesario establecer ciertas restricciones ya que los puntos de $\mathbb{R}^2$ tendrán múltiples denominaciones ya que al superar una vuelta completa angularmente hablando repetiremos el mismo punto de $\mathbb{R}^2$, además al permitirse que $r \in \mathbb{R}$ surge la posibilidad de radios negativos, hecho éste que incrementa igualmente las denominaciones a un mismo punto.de $\mathbb{R}^2$. Esto se representa matemáticamente así: $P(r, \theta) = P(r, \theta + (n)\, 2\pi) = P(-r, \theta + (2k+1)\, \pi)$ con $n, k \in \mathbb{Z}$
- Advierta que la *referencia* aquí son ambos: el polo $polo(0, \theta)$ y el eje polar $eje\ polar = \{(r, \theta) \,/\, r \in \mathbb{R} \wedge \theta = 0\}$

2. Reglas

1. Las coordenadas polares de un punto no son únicas a diferencia del sistema de coordenadas cartesianas, por lo que se hace necesario establecer la siguiente restricción: $(r, \theta) = \begin{cases} r \in \mathbb{R}^{+0} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$ Esto se traduce a que si estamos en presencia de radios negativos o el ángulo θ está fuera de la primera vuelta se hace necesario llevar el punto a su *par principal.*,que son las dos condiciones arriba mencionadas
2. Para el trazado de un punto se *lee primero* la componente angular y nos ubicamos en esa semirecta en un papel especial denominado *papel polar*. Ver próxima sección

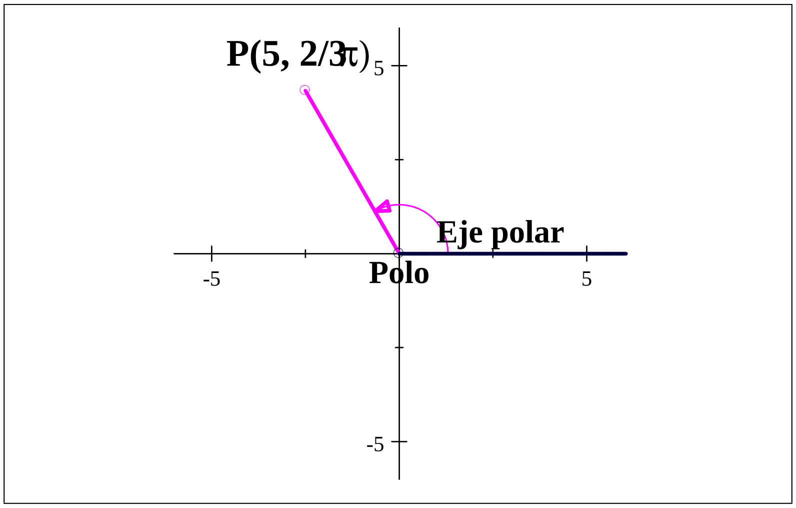

FIGURA 1. Punto en coordenadas polares

3. Seguidamente se lee la componente radial (la primera del par ordenado) y nos ubicamos alejados del polo tantas unidades como indique la coordenada. Si el radio es negativo en vez de desplazarse r unidades en dirección al semieje donde estamos ubicados, se desplaza hacia la prolongación (en **sentido opuesto**) la misma cantidad de unidades

Ejemplo 1.1. *Graficar sobre el plano polar* $S = \{(r,\theta) \diagup r \in \mathbb{R},\, \theta \in \mathbb{R}\}$, *los puntos* $P_1(4, \frac{\pi}{3})$ *y* $P_2(-4, \frac{\pi}{3})$

Solución: Se lee la coordenada angular, es positiva con valor de $\frac{\pi}{3}$, se ubica el eje polar y desde allí se identifica en sentido contrario a las agujas del reloj (sentido **levógiro**) la semirecta $\frac{\pi}{3}$. Una vez identificada se hace lectura de la componente radial: positiva con valor de cuatro.cuenta cuatro unidades **sobre el rayo** que recién identificó y marcó el punto. En el segundo caso identifica el rayo que está con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con referencia al eje polar y al percatarse de que la primera coordenada es negativa cuenta las unidades de esa coordenada (en valor absoluto) en dirección **contraria al rayo** que previamente identificó Ver Figuras 2 y 3

De esta forma un punto es la intersección de un rayo (ángulo constante) con una circunferencia (radio constante)

Es claro que el P_2 no está escrito con las restricciones arriba mencionadas esto es: no satisface las condiciones de par principal ya que $r < 0$, entonces hay que convertirlo a par principal para ello existen dos procedimientos:

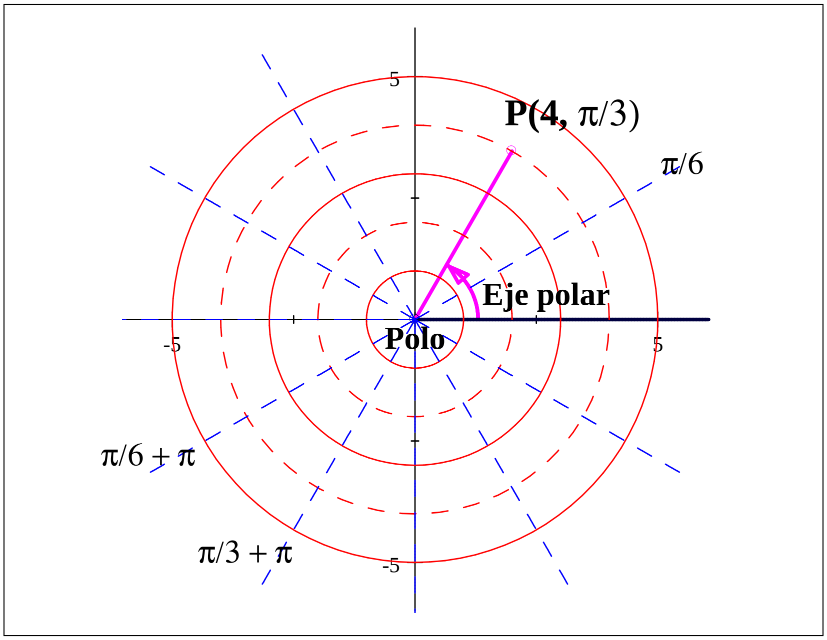

FIGURA 2. Punto $\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right)$

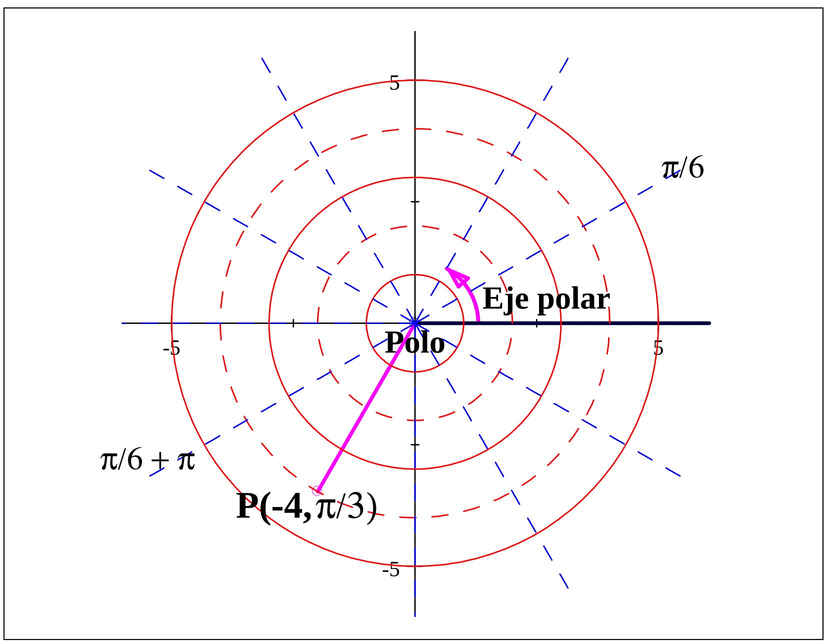

FIGURA 3. Punto $\left(-4, \dfrac{\pi}{3}\right)$

- Gráfico: Examina en el papel polar el rayo donde efectivamente se encuentra el punto $\dfrac{8\pi}{6} = \dfrac{4}{3}\pi$ y verifica el radio de la circunferencia intersección.$r = 4 \Rightarrow P_2\left(4, \dfrac{4}{3}\pi\right)$

- Algebraico: Suma o resta media vuelta angular (π) al ángulo original $P_2\left(4, \frac{\pi}{3} + \pi\right) = P_2\left(4, \frac{4}{3}\pi\right)$

Ejemplo 1.2. *Representar el Punto* $P_1\left(5, 460\,^\circ\right)$ *en forma de par principal*

Solución: El radio cumple la restricción en tanto que el ángulo se excede de una vuelta completa que son $360\,^\circ$ o 2π. Llevamos la expresión angular a radianes:

$P_1\left(5, 460\,^\circ\right) = P_1\left(5, \frac{460\pi}{180}\right) : \left(5, \frac{23}{9}\pi\right)$ pues bien ¿ cuántos $\frac{\pi}{9}$ caben en 2π? $\Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{9}} = 18$ (o sea 18 veces $\frac{\pi}{9}$ son una vuelta), La diferencia entre 23 y 18 , $(23 - 18) = 5$ es el excedente de una vuelta en términos de $\frac{\pi}{9}$. Ése es nuestro ángulo en par principal $P_1\left(5, 5\frac{\pi}{9}\right)$

3. El Papel Polar

El papel polar queda compuesto por *circunferencias concéntricas* alrededor del polo que en notación polar serán las ecuaciones del tipo $(r, \theta) = \begin{cases} r = ctte \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$ o bien $r = ctte\ \forall\theta.$, así como por un *haz de rectas* **que pasan por el polo** que en notación polar serán las rectas con un ángulo de inclinación **constante** respecto a la horizontal para todo r; es decir $(r, \theta) = \begin{cases} r \in \mathbb{R} \\ \theta = ctte \end{cases}$ o bien: $\theta = ctte\ \forall r$

4. Simetrías

Se distinguen tres simetrías:

- Respecto al eje polar: *Un punto $P\prime$ es simétrico de un punto P respecto al eje polar si se cumple que $P\prime\left(r\prime, \theta\prime\right) = P\left(r, -\theta\right)$.* Si al punto original le cambiamos la dirección del ángulo obtendremos el simétrico respecto al eje polar. También es cierto que *un punto $P\prime$ es simétrico de un punto P respecto al eje polar si se cumple que $P\prime\left(r\prime, \theta\prime\right) = P\left(-r, \pi - \theta\right)$*.Ver Figura 5
- Respecto al eje de $90\,^\circ$: *Un punto $P\prime$ es simétrico de un punto P respecto al eje de $90\,^\circ$ si se cumple que $P\prime\left(r\prime, \theta\prime\right) = P\left(r, \pi - \theta\right)$.* Si al punto original lo ubicamos en el ángulo $\pi - \theta$ obtendremos el simétrico respecto al eje de $90\,^\circ$. También es cierto que *un punto $P\prime$ es simétrico de un punto P respecto al eje polar si se cumple que $P\prime\left(r\prime, \theta\prime\right) = P\left(-r, -\theta\right)$*.Ver Figura 6

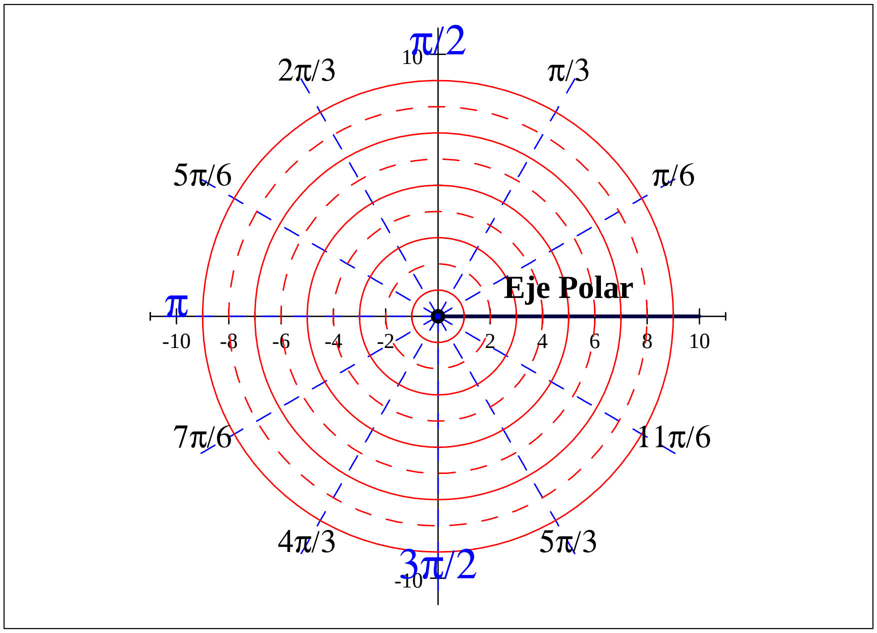

FIGURA 4. Papel polar

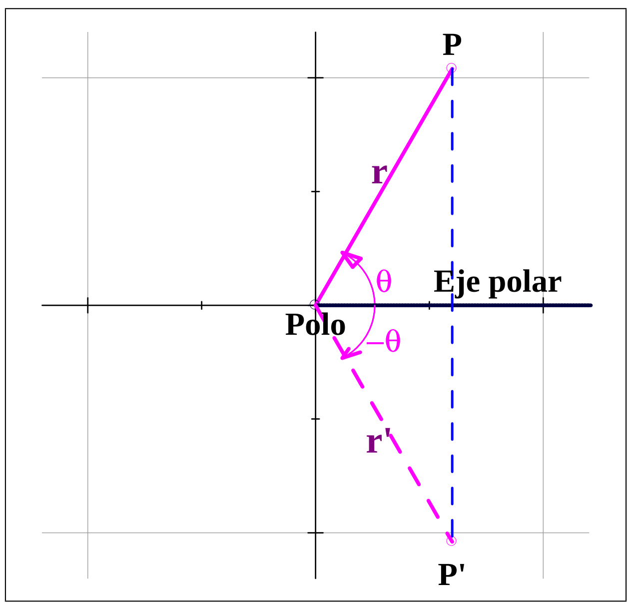

FIGURA 5. Simetría respecto Eje Polar

- Respecto al polo: *Un punto $P\prime$ es simétrico de un punto P respecto al polo si se cumple que $P\prime\,(r\prime,\theta\prime) = P\,(-r,\theta)$.* También es cierto que *un punto $P\prime$ es simétrico de un punto P respecto al polo si se cumple que $P\prime\,(r\prime,\theta\prime) = P\,(r,\theta+\pi)$* .Ver Figura 7

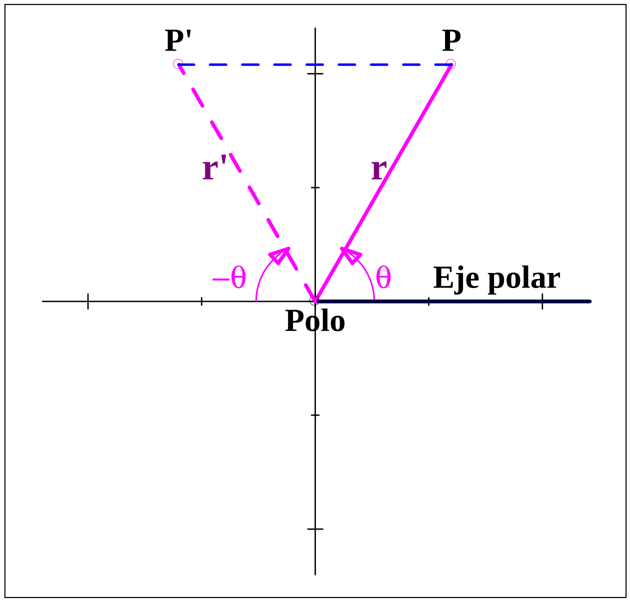

Figura 6. Simetría respecto Eje de 90°

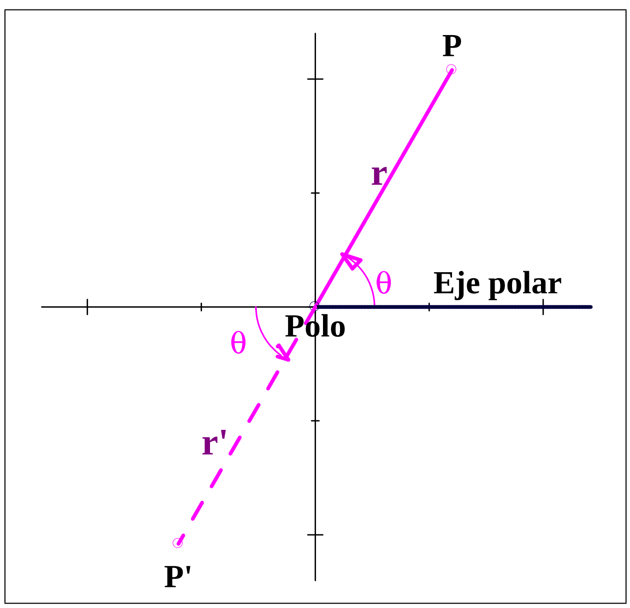

Figura 7. Simetría respecto al Polo

5. Distancia en Coordenadas Polares

Para definir un modo de calcular la distancia en coordenadas polares nos apoyaremos en el Teorema del coseno. Dados $P_1\left(r_1,\theta_1\right)$ y $P_2\left(r_2,\theta_2\right)$ la distancia entre P_1 y P_2 puede calcularse mediante $d\left(P_1,P_2\right)^2=\left(r_1\right)^2+\left(r_2\right)^2-2r_1r_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)$. Ver Figura 8

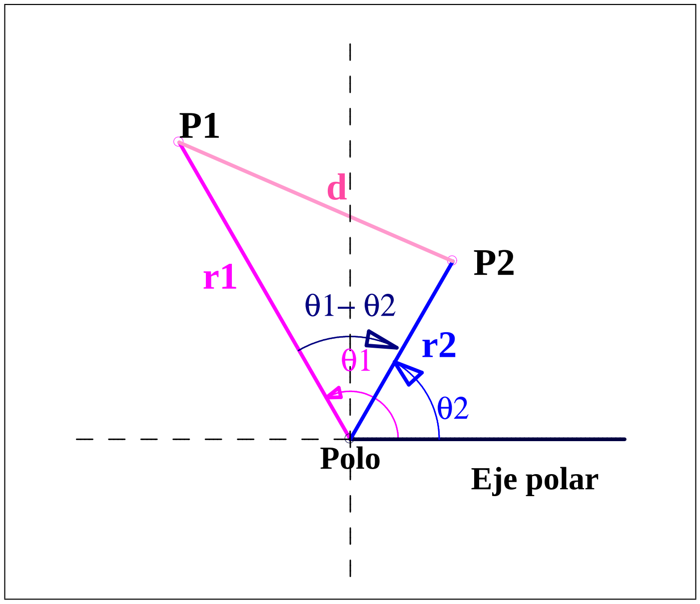

FIGURA 8. Distancia en coordenadas polares d

Ejemplo 1.3. *Calcular las longitudes de los lados del triángulo cuyos vértices son* $P_1\left(5, 60^\circ\right)$, $P_2\left(-2, \dfrac{7\pi}{4}\right)$,*y* $P_3\left(-4, 150^\circ\right)$

Solución: Llevamos los puntos a par principal. Los puntos con medida angular en grados hay que convertirlos a radianes

P1: $P_1\left(5, \dfrac{60\pi}{180}\right) = P_1\left(5, \dfrac{1}{3}\pi\right)$; **P2**: $P_2\left(-2, \dfrac{7\pi}{4}\right) = P_2\left(2, \dfrac{7\pi}{4} - \pi\right) = P_2\left(2, \dfrac{3}{4}\pi\right)$ En este caso o sumamos o restamos π , con la suma nos habríamos excedido de una vuelta completa los que nos hubiera llevado a otra cuenta adicional. **P3**: $P_3\left(-4, \dfrac{150\pi}{180}\right) = P_3\left(-4, \dfrac{5}{6}\pi\right) = P_3\left(4, \dfrac{5}{6}\pi + \pi\right) = P_3\left(4, \dfrac{11}{6}\pi\right)$.

Con los puntos en par principal lo graficamos:

d1: $d_1(P_{1,}P_3)^2 = (r_1)^2 + (r_3)^2 - 2r_1r_3\cos(\theta_1 - \theta_3) \therefore$

$$d_1(P_{1,}P_3)^2 = (5)^2 + (4)^2 - 2(5)(4)\cos\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{11}{6}\pi\right) = 41 \Rightarrow d_1 = \sqrt{41} = 6.403\,1$$

d2: $d_2(P_{2,}P_3)^2 = (r_2)^2 + (r_3)^2 - 2r_2r_3\cos(\theta_2 - \theta_3) \therefore$

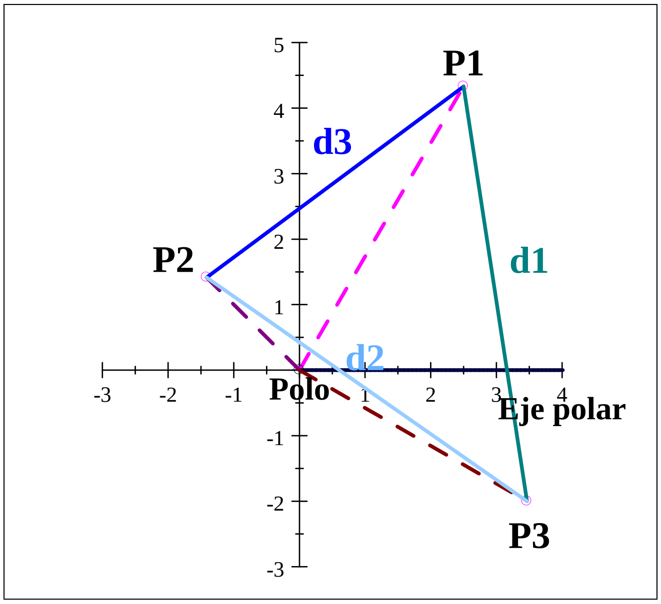

Figura 9. Ejemplo.Triángulo en Coordenadas Polares

$d_2(P_2,P_3)^2 = (2)^2+(4)^2-2\,(2)\,(4)\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{11}{6}\pi\right) = 4\sqrt{2}+4\sqrt{6}+20 = 20-16\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}\right) = 4\sqrt{2}+4\sqrt{6}+20 \Rightarrow d_2 = \sqrt{4\sqrt{2}+4\sqrt{6}+20} = 2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{6}+5} \simeq 5.9544$

d3: $d_3(P_1,P_2)^2 = (r_1)^2+(r_2)^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) \therefore$

$d_3(P_1,P_2)^2 = (5)^2+(2)^2-2\,(5)\,(2)\cos\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = 5\sqrt{2}-5\sqrt{6}+29 \Rightarrow d_1 = \sqrt{5\sqrt{2}-5\sqrt{6}+29} \simeq 4.8809$

6. Paso o Conversión de Coordenadas Cartesianas a Polares y Viceversa

Ecuación Rectangular: Aquella que contiene las variables del sistema de coordenadas cartesianas x y y

Ecuación Polar: Aquella que contiene las variables r y θ

Como en el fondo son los mismos puntos del espacio $\mathbb{R}^2$ (no debe emplearse el término transformación ya que matemáticamente lleva consigo otro significado) haremos coincidir el origen del sistema cartesiano con el polo y la parte positiva del eje de las x con el eje polar para abordar las deducciones. Ver Figuras 10 y 11.

En esas figuras puede apreciarse que para cualquier punto del plano:

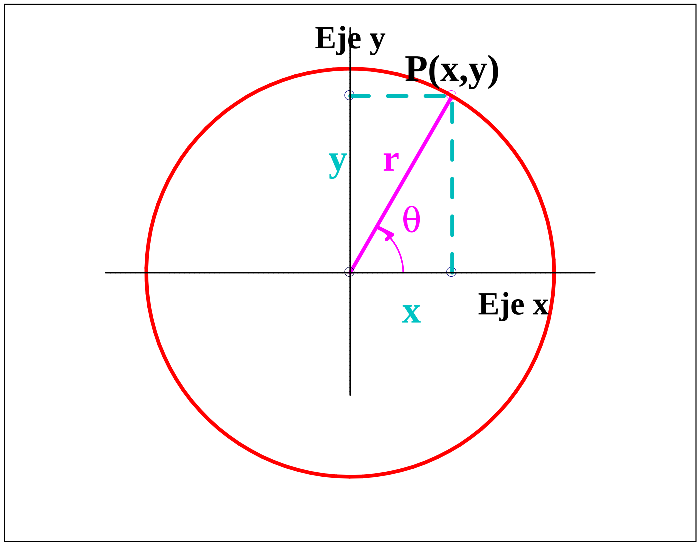

FIGURA 10. De coordenadas cartesianas a polares

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\sin\theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ y } \cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- A partir de las proyecciones del punto sobre los ejes coordenados surgen las coordenadas x y y; estas proyecciones se corresponden a su vez con $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$
- El radio r por aplicación de pitágoras $r^2 = x^2 + y^2$. Recordando la propiedad 8 del valor absoluto $\sqrt{r^2} = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |r| = \sqrt{x^2+y^2} \therefore r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$
- El ángulo θ puede relacionarse con x y y mediante $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$. Asímismo, $\sin\theta = \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\cos\theta = \pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Con ese conjunto de ecuaciones estamos preparados para ambas tareas: el paso de un sistema coordenado a otro y viceversa.tanto de puntos como ecuaciones seguidamente algunos ejemplos

Notas:

1. Las calculadoras computan el $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ quiero decir la función arco tangente para arrojar valores entre $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$
2. Luego es indispensable otorgar una interpretación al ángulo según el *cuadrante*
3. Se lleva la expresión del punto a la forma *par principal*

Ejemplo 1.4. *Hallar la representación polar de los puntos* $P_1\left(3, -3\sqrt{3}\right)$ *y* $P_2\left(-3, 3\sqrt{3}\right)$

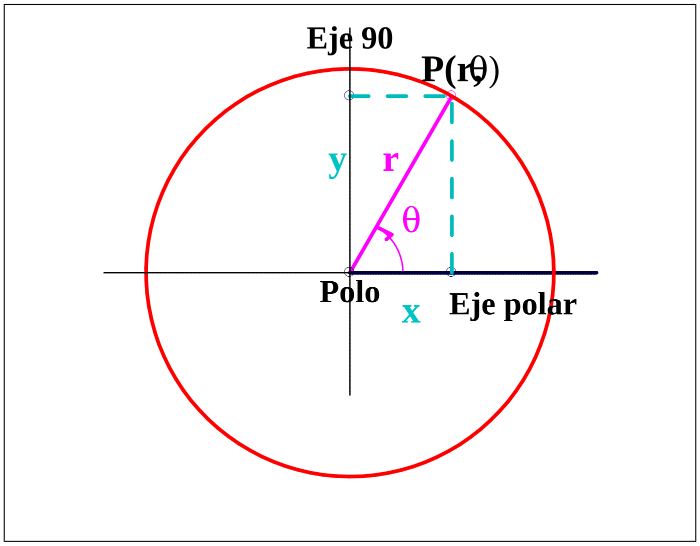

FIGURA 11. De coordenadas polares a cartesianas
$x = r\cos(\theta)$
$y = r\sin(\theta)$

Solución:

Punto 1: $r_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=3\\ y=-3\sqrt{3}}} = r_1 = \pm\sqrt{(3)^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \pm 6$

$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{\substack{x=3\\ y=-3\sqrt{3}}} = \arctan\left(\frac{-3\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{3}\pi$. En virtud a que el punto se encuentra en el **IV cuadrante** su representación llevada a par principal es $r_1 = 6$, $\theta_1 = -\frac{1}{3}\pi + 2\pi = \frac{5}{3}\pi \Rightarrow P_1\left(6, \frac{5}{3}\pi\right)$

Punto 2: $r_2 = \pm\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=-3\\ y=3\sqrt{3}}} = r_2 = \pm\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \pm 6$

$\theta_2 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{\substack{x=-3\\ y=3\sqrt{3}}} = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{-3}\right) = -\frac{1}{3}\pi$. En virtud a que el punto se encuentra en el **II cuadrante** su representación llevada a par principal es $r_2 = 6$, $\theta_2 = -\frac{1}{3}\pi + \pi = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow P_2\left(6, \frac{2}{3}\pi\right)$

Observe que los resultados matemáticos fueron los mismos para el radio y el ángulo; no obstante, la interpretación por los cuadrantes nos permitió ubicarlos apropiadamente.

Caso semejante ocurre con los ángulos que calculados mediante el arco tangente dan positivos. Estos últimos pueden resultar de puntos en el primer cuadrante o en el tercer cuadrante. En cuyo caso si son del primer cuadrante se deja el mismo valor pero si se trata del tercer cuadrante a la medida del ángulo hay que sumarle π

Ejemplo 1.5. *Obtenga la representación cartesiana de los puntos* $(5, 60\,^\circ)$, $(5, 420\,^\circ)$

Solución: Llevamos las medidas angulares a números reales. $\theta_1 = 60\,^\circ = \dfrac{60\pi}{180} = \dfrac{1}{3}\pi$, de igual manera para $\theta_2 = 420\,^\circ = \dfrac{420\pi}{180} = \dfrac{7}{3}\pi$ que es mayor que $2\pi\dfrac{3}{3} = \dfrac{6}{3}\pi$, o sea supera una vuelta. Puede llevarlo a par principal si lleva ese gusto pero no es **necesario** (un asunto es necesario cuando no puede ser de otra manera) puesto que las funciones trigonométricas son periódicas (repiten sus valores cada $\theta + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$ es decir $f(\theta) = f(\theta + 2n\pi)$).

Punto 1: $(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = (5)\cos\left(\dfrac{1}{3}\pi\right) \\ \\ y = (5)\sin\left(\dfrac{1}{3}\pi\right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{5}{2}\sqrt{3} \end{array} \right. \Rightarrow P_1\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

Punto 2: $(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = (5)\cos\left(\dfrac{7}{3}\pi\right) \\ \\ y = (5)\sin\left(\dfrac{7}{3}\pi\right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{5}{2}\sqrt{3} \end{array} \right. \Rightarrow P_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

Si hubiésemos llevado el punto 2 a par principal tendríamos

$P_2(x, y) = (5\cos\theta_2, 5\sin\theta_2)\big|_{\theta_2 = \frac{7\pi}{3} - \frac{6\pi}{3}} = (5\cos\theta_2, 5\sin\theta_2)\big|_{\theta_2 = \frac{1}{3}\pi} = \left(5\cos\dfrac{1}{3}\pi, 5\sin\dfrac{1}{3}\pi\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\sqrt{3}\right)$ idénticos resultados

Ejemplo 1.6. *Pasar de ecuación rectangular a ecuación polar*

a.- $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$ b.- $2x - y = 0$ c.- $xy = 2$

Solución:

a.- $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) + 2x - 6y + 3 = 0$ Reescrito así se puede aplicar $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ de forma que sustituyendo tendremos $2r^2 + 2r\cos\theta - 6r\sin\theta + 3 = 0$

b.- $2x - y = 0 \Rightarrow 2x = y$ Y ahora sustituimos x y y por sus correspondientes polares

$2r\cos\theta = r\sin\theta \Rightarrow 2\cos\theta = \sin\theta \Rightarrow 2 = \tan\theta \therefore \theta = \arctan 2$ Es decir un ángulo constante que es una recta que pasa por el origen c.- $xy = 2 \Rightarrow r\cos\theta * r\sin\theta = 2 \Rightarrow r^2\sin\theta\cos\theta = 2$ Apelando a la expresión del ángulo doble $(\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$ puede simplificarse un poco más $2r^2\sin\theta\cos\theta = 4 \Rightarrow r^2\sin 2\theta = 4$

Ejemplo 1.7. *Pasar de ecuación polar a ecuación rectangular*

a.- $r\cos\theta - 2 = 0$ b.- $r = 8\cos\theta$ c.- $r - r\cos\theta = 4$

Solución:

a.- $r\cos\theta - 2 = 0$ Al hacer valer $x = r\cos\theta$, simplemente $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2\ \forall y$

b.- $r = 8\cos\theta$ Aquí para lograr $x = r\cos\theta$, hay que multiplicar ambos miembros de la ecuación polar por r

$rr = r8\cos\theta \Rightarrow r^2 = 8r\cos\theta$ ahora sí podemos hacer la sustitución $x = r\cos\theta$ además $r^2 = x^2 + y^2$ en consecuencia $x^2 + y^2 = 8x$ esta última ecuación cartesiana podemos simplificarla aún más por un método conocido como completación de cuadrados $x^2 - 8x + y^2 = 0$

Sumamos y restamos la siguiente cantidad $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$, entonces $x^2-8x+16-16+y^2 = 0$. Note que los tres primeros términos se corresponden al desarrollo de un **trinomio cuadrado perfecto** cuyo origen es un binomio al cuadrado luego $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Verifique este desarrollo. Un último comentario se trata de los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuya distancia al punto $(4, 0)$ es 4 unidades. Ver el ejemplo de distancia en $\mathbb{R}^2$

c.- $r - r\cos\theta = 4$. Sustituimos $r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ y $x = r\cos\theta$

$\pm\sqrt{x^2+y^2} - x = 4 \Rightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2} = x + 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ Por lo tanto $y^2 = 8x + 16$

Ejercicio 1.8. *Hallar la representación polar de los puntos* $P_1\left(3, \sqrt{3}\right)$ *y* $P_2\left(-3, -\sqrt{3}\right)$

Ejercicio 1.9. *Hallar la representación cartesiana de los puntos* $P_1\left(5, \frac{1}{3}\pi\right)$, $P_2\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$ *y* $P_3\left(4, \frac{11}{6}\pi\right)$. *Ellos son los puntos del triángulo del ejemplo anterior de distancia. Con la representación cartesiana de los puntos calcule las longitudes de los lados del triángulo que forman y compare con el ejercicio anterior*