Solución:

Los puntos A , B y C conforman un triángulo en $\mathbb{R}^3$ que es una figura plana (hay un plano que la contiene). Haremos un dibujo abstracto representativo de la situación tal como ocurre en el plano que lo contiene. Ver Figura . El pie de la perpendicular es el punto N cuyas coordenadas debemos calcular. El vector que va de A hacia N es el vector proyección del vector $\overrightarrow{AC}$ en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (2,-1,2) - (3,2,4) = (-1,-3,-2) \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (5,2,1) - (3,2,4) = (2,0,-3) \end{cases}$$

Ahora $\overrightarrow{PyccAC/AB} = \dfrac{\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{(-1,-3,-2)\cdot(2,0,-3)}{2^2+3^2}\right)(2,0,-3) = \dfrac{4}{13}(2,0,-3)$

Ya que nos interesa las coordenadas de N, formamos el vector $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PyccAC/AB}$:

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{N} - \overrightarrow{A} \Longrightarrow \overrightarrow{N} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{N} = (3,2,4) + \dfrac{4}{13}(2,0,-3) = \left(\dfrac{47}{13}, 2, \dfrac{40}{13}\right)$

RESULTADO $N\left(\dfrac{47}{13}, 2, \dfrac{40}{13}\right)$

Un modo de comprobar el resultado es calcular el vector $\overrightarrow{NC}$ que **debe** ser perpendicular a $\overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{NC} \perp \overrightarrow{AN} \Longrightarrow \overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$

$\overrightarrow{NC} = (2,-1,2) - \left(\dfrac{47}{13}, 2, \dfrac{40}{13}\right) = \left(-\dfrac{21}{13}, -3, -\dfrac{14}{13}\right) \therefore$

$\left(-\dfrac{21}{13}, -3, -\dfrac{14}{13}\right) \cdot \left(\dfrac{4}{13}(2,0,-3)\right) = 0$