CAPíTULO 1

# El Sistema Coordenado Cilíndrico

## 1. El Sistema

El sistema de coordenadas cilíndrico, forma parte de los llamados sistemas de coordenadas curvilíneos Puede considerarse como una extensión del sistema de coordenadas polares para $\mathbb{R}^3$. El punto se produce por la intersección de tres superficies (una superficie cilíndrica, y dos superficies planas). Ver Figuras 1 y 2

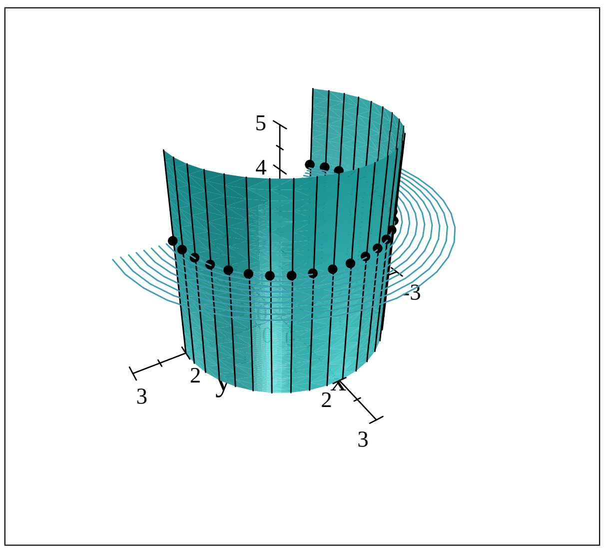


FIGURA 1. Cilindro de radio $r = 2$ , plano $z = 3$ y su intersección. Barrido $\theta \in [0, 2\pi]$

## 2. Elementos

- **El origen.** es un punto desde el cual se miden los radios de los cilindros. Es la superficie cilíndrica degenerada ($r = 0$). Se hace coincidir con la intersección de tres rectas perpendiculares entre sí tal como en el sistema de coordenadas cartesianas.
- **El Semiplano** $\pi_{+xz}$ que contiene al eje z y que es el plano desde el cual se miden el ángulo theta

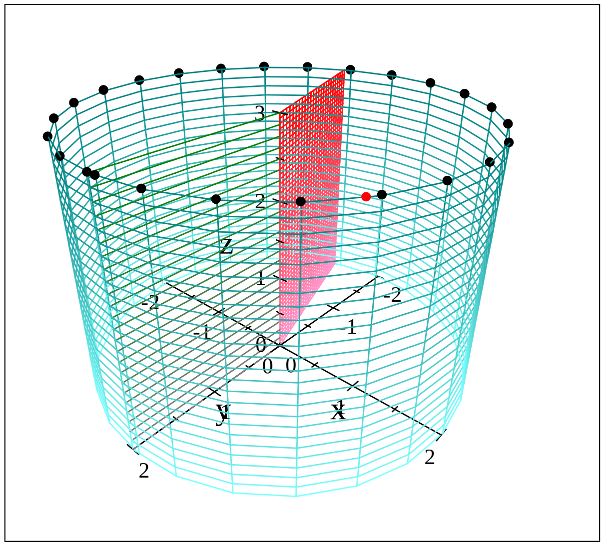


FIGURA 2. $\mathbb{C}_{ircunferencia}$: $\mathbf{C}_{ilindro} \cap \boldsymbol{\pi} : \mathbf{z} = \mathbf{ctte}$
Intersección de la Circunferencia con el semiplano $\perp \pi_{xy}$
Barrido del semiplano $\perp \pi_{xy}$ de $[0, 2\pi]$

- **El Plano coordenado** $\pi_{xy}$. que es el plano a partir el cual se mide la altura de la coordenada $z$
- El espacio (contiene todos los elementos del producto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}$) se designa con $\mathbb{R}^3$ (se lee erre tres). Los elementos de ese conjunto son las tuplas o puntos que tienen la estructura $P\,(r, \theta, z)$ con $r \in \mathbb{R}$ , $\theta \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$. El significado geométrico de estas coordenadas es $r$ : radio o distancia de la proyección del segmento que va del origen al punto $P$, y el significado para la segunda coordenada $\theta$ (que se lee theta) es el ángulo o apertura medida desde semiplano $\pi_{+xz}$ hasta el semiplano compuesto por el eje $z$.,y el segmento que va del origen al punto $P$ Este ángulo se mide en dirección contraria a las agujas del reloj. Ver movimiento de la Animación 2
- **Reglas** para establecer una relación *biunívoca* entre la representación gráfica y los valores numéricos. Aquí se hace necesario establecer ciertas restricciones ya que los puntos de $\mathbb{R}^3$ tendrán denominaciones redundantes, como en el caso de las coordenadas polares.
- Advierta que la *referencia* aquí es la terna: origen, el Semiplano $\pi_{+xz}$ y el plano coordenado $\pi_{xy}$

## 3. Reglas

1. El punto se escribe $P\,(r, \theta, z)$ .Tanto $r$ $\theta$ y $z$ , pertenecen a los números reales con significado geométrico siguiente (Ver Figura 1):

$$\begin{cases} r : \text{Radio del cilindro} \\ \theta : \text{Medida del ángulo entre semiplano } \pi_{+xz} \\ \quad \text{y el plano} \perp \pi_{xy} \text{ (que contiene a } \overline{OP} \text{ y al eje } z) \\ z : \text{Coordenada lineal medida desde } \pi_{xy} \end{cases}$$

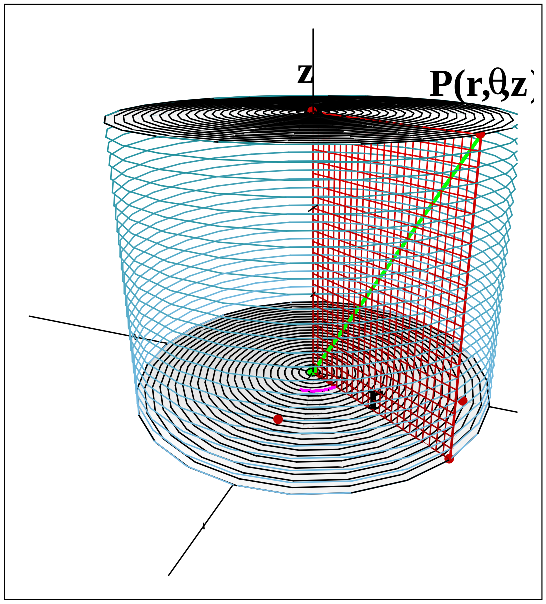


FIGURA 3. Sistema Coordenado Cilíndrico

2. Las restricciones que se imponen a las coordenadas son

(**Restricciones**)
$$\begin{cases} r : \ r \geq 0 \\ \theta : \ \theta \in [0 \ , 2\pi) \\ z : \ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Para el trazado de un punto se *lee primero* la primera componente (el radio) y nos ubicamos en una circunferencia con ese radio en el plano coordenado $\pi_{xy}$
4. Seguidamente se lee la componente en $z$ lo cual nos da la posición exacta del plano $z = ctte$ que será la limitante o tope del cilindro
5. Por último se lee la componente angular que nos indicará la apertura angular del plano perpendicular al $\pi_{xy}$ (que contiene al segmento $\overline{OP}$ y al eje $z$) con respecto al semiplano constituido por el eje $z$ y el eje positivo de las $x$.

**Ejemplo 1.1.** *Graficar los puntos cuyas coordenadas cilíndricas son:* $P_1(4, \frac{\pi}{3}, 3)$ *y* $P_2(-2, \frac{\pi}{6}, -3)$

**Solución:**

$P_1(4, \frac{\pi}{3}, 3)$ : se lee la primera coordenada , es positiva con valor de 4, se traza una circunferencia sobre el plano $\pi_{xy}$ centrada en el origen de radio $r = 4$.Se lee la tercera coordenada, positiva con valor de $z = 3$. Contamos con el tamaño del cilindro. Resta ver el ángulo: se lee la segunda coordenada $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ giramos un semiplano imaginario desde el plano $\pi_{+xz}$ un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ hasta llegar al punto. Ver Figura

$P_2(-2, \dfrac{\pi}{6}, -3)$ : se lee la primera coordenada , es negativa con valor absoluto de 2 (recuerde el caso para coordenadas polares llevamos en mente sumar o restar $\pi$).se traza una circunferencia sobre el plano $\pi_{xy}$ centrada en el origen de radio $r = 2$.. Leemos la tercera coordenada negativa con valor de $z = -3$.. Dibujamos el cilindro *debajo* del plano $\pi_{xy}$. Leemos la segunda coordenada positiva con valor de $\dfrac{\pi}{6}$ pero tenemos pendiente sumar o restar $\pi$ dependiendo de si quedamos fuera del intervalo de las restricciones $\Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{7}{6}\pi \in [0\ , 2\pi)$ El punto escrito en terna principal es $P_2\left(2, \dfrac{7}{6}\pi, -3\right)$

**Ejemplo 1.2.** *Graficar los conjuntos de* $\mathbb{R}^3$ *cuyas expresiones son:*

$$A = \{P\,(r, \theta, z)\ /\ r = 3\ ,\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]\ , z \in [2, 3]\ \}$$

$$B = \{P\,(r, \theta, z)\ /\ \theta = \frac{5\pi}{6}\ , z \in [1, 2]\ \ , \forall r\}$$

$$C = \{P\,(r, \theta, z)\ /\ r \in [1, 2]\ \ ,\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]\ \ , z \in [-1, 1]\}$$

**Solución:** Aplique las reglas de graficación para cada coordenada de los intervalos que componen los conjuntos. Examine detenidamente la figura que se propone a continuación

A: $(3, \theta, z)$ *con* $\theta \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$ *y* $z \in [2, 3]$ Porción de concha cilíndrica

B: $\left(r, \dfrac{5\pi}{6}, z\right)$ *con* $r \in \mathbb{R}$ *y* $z \in [1, 2]$ Banda plana que pasa por el eje $z$

C: $(r, \theta, z)$ *con* $r \in [1, 2]$ , $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ *y* $z \in [-1, 1]$ Cuña cilíndrica

**Ejercicio 1.3.** *Obtenga las expresiones en coordenadas cilíndricas para los ejes coordenados y los planos coordenados*

## 4. Distancia en Coordenadas Cilíndricas

Para definir un modo de calcular la distancia en coordenadas cilíndricas nos apoyaremos en el Teorema de Pitágoras así como en la deducción de distancia en coordenadas polares, ver Figura 1. Dados $P_1\,(r_1, \theta_1, z_1)$ y $P_2\,(r_2, \theta_2, z_2)$ la distancia entre $P_1$ y $P_2$ puede calcularse mediante:

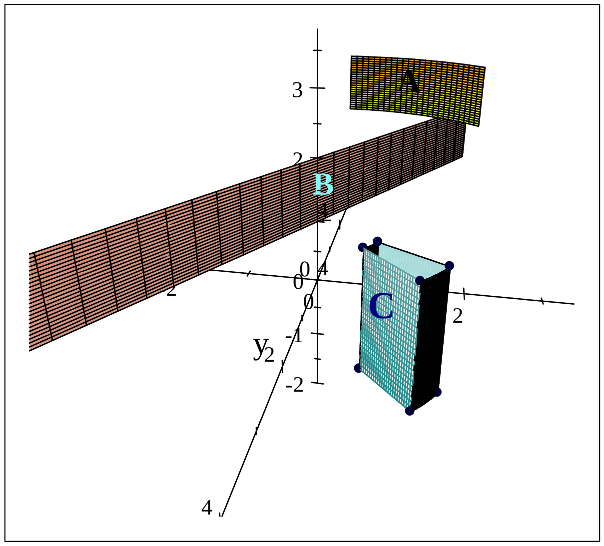


FIGURA 4. Algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cilíndricas

$d\left(P_1, P_2\right)^2 = \left(\Delta z\right)^2 + a^2$ Con $\Delta z$ : diferencia en las coordenadas $z$ ; y $a$ : tamaño del segmento proyección de $\overline{P_2 P_1}$ sobre el plano $xy$

Así $\Delta z = \left(z_1 - z_2\right)$ y $a = \left(r_1\right)^2 + \left(r_2\right)^2 - 2r_1 r_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)$ Finalmente

$$\mathbf{d}\left(P_1, P_2\right)^2 = \left(z_1 - z_2\right)^2 + \left(r_1\right)^2 + \left(r_2\right)^2 - \mathbf{2r}_1\mathbf{r}_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right).$$

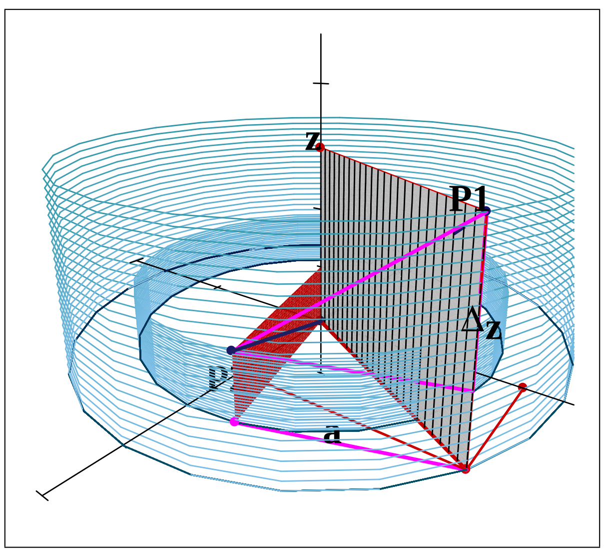


FIGURA 5. Distancia en Coordenadas Cilíndricas

**Ejemplo 1.4.** *Calcular el perímetro del triángulo en coordenadas cilíndricas que conforman los puntos* $P_1\left(0,0,0\right)$, $P_2\left(4, \frac{\pi}{3}, 3\right)$, *y* $P_3\left(3, \frac{\pi}{12}, 1\right)$

**Solución:** Si los puntos están escritos fuera de restricción los llevamos a terna principal.

Como los puntos están en terna principal calculamos las distancia de $\overline{P_1P_2}$ , $\overline{P_1P_3}$ y por ecuación de la distancia el tamaño del segmento $\overline{P_2P_3}$

Llamemos $\rho_1$ : Distancia de $\overline{P_1P_2}$ y $\rho_2$ : Distancia de $\overline{P_1P_3}$

El perímetro es $P_{er} = \rho_1 + \rho_2 + d\left(P_2, P_3\right)$

Por Pitágoras

$$\rho_1 = \sqrt{r_1^2 + z_1^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$$

$$\rho_2 = \sqrt{r_2^2 + z_2^2} = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

$P_1\left(4, \dfrac{\pi}{3}, 3\right)$

$P_2\left(3, \dfrac{\pi}{12}, 1\right)$

$$d\left(P_2, P_3\right) = (3-1)^2 + (4)^2 + (3)^2 - 2\,(4)\,(3)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = 29 - 12\sqrt{2}$$

Finalmente el perímetro es:

$$P_{er} = \rho_1 + \rho_2 + d\left(P_2, P_3\right) = 5 + \sqrt{10} + 29 - 12\sqrt{2} = \sqrt{10} - 12\sqrt{2} + 34 \approx 20{,}192$$

**Ejercicio 1.5.** *Escribir en coordenadas cilíndricas los simétricos de los puntos* $P_1\left(4, \dfrac{\pi}{3}, 3\right)$,*y* $P_2\left(3, \dfrac{\pi}{12}, 1\right)$ *respecto de los planos coordenados, respecto del origen y respecto de los ejes coordenados.*

## 5. Paso del Sistema Cartesiano al Sistema Cilíndrico y Viceversa

Vamos a deducir la ecuaciones para la conversión de un sistema coordenado a otro. A partir de la Figura 6

(**SCCartesiano<->SCCil**)

| $(x, y, z)$ | Sistema Coordenado Cilíndrico |
|---|---|
| | $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| | $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ |
| | $z = z$ |

| $(r, \theta, z)$ | Sistema Coordenado Cartesiano |
|---|---|
| | $x = r\cos\theta$ |
| | $y = r\sin\theta$ |
| | $z = z$ |

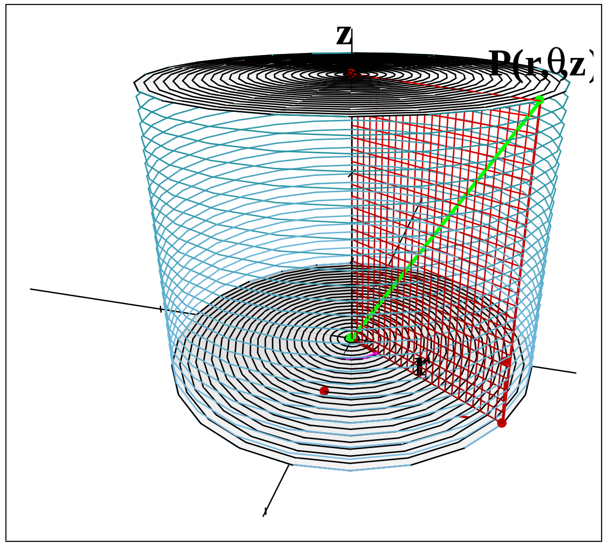


FIGURA 6. Sistema Coordenado Cilíndrico

**Ejemplo 1.6.** *Convertir los puntos que en coordenadas cilíndricas son* $P_1\left(4, \dfrac{\pi}{3}, 3\right)$,*y* $P_2\left(3, \dfrac{\pi}{12}, 1\right)$ *a coordenadas cartesianas*

**Solución:** Se verifica primeramente que las coordenadas cilíndricas satisfagan las restricciones. Luego se precede a aplicar las ecuaciones de conversión

| $(r, \theta, z)$ | Sistema Coordenado Cartesiano |
|---|---|
| $\left(4, \dfrac{\pi}{3}, 3\right)$ | $x = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2$ |
| | $y = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ |
| | $z = 3$ |

$\Longrightarrow \quad P_{1Cart}\left(2, 2\sqrt{3}, 3\right)$

| $(r, \theta, z)$ | Sistema Coordenado Cartesiano |
|---|---|
| $\left(3, \dfrac{\pi}{12}, 1\right)$ | $x = 3\cos\frac{\pi}{12} = \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{6}$ |
| | $y = 3\sin\dfrac{\pi}{12} = \frac{3}{4}\sqrt{6} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$ |
| | $z = 3$ |

$\Longrightarrow \quad P_{2Cart}\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{2} + \dfrac{3}{4}\sqrt{6}\ ,\ \dfrac{3}{4}\sqrt{6} - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}\ ,\ 3\right)$