L3 - CMI017 : Signaux et Systèmes
Séquence II

BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Aix Marseille Université

INSTITUT DES SCIENCES DU MOUVEMENT ETIENNE JULES MAREY

Plan de cette séquence

Signaux et Systèmes

Phénomène périodique élémentaire

La cosinusoïde est le phénomène périodique le plus simple :

$$x(t) = A cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Avec :

- A : l'amplitude de l'oscillation
- ϕ : la phase en *rad*
- $\omega_0 = 2\pi f_0$: pulsation (fréquence angulaire) en $rad \cdot s^{-1}$
- f_0 : la fréquence en Hz. $f_0 = \frac{1}{T_0}$, T_0 étant la période en s

Phénomène périodique élémentaire

La cosinusoïde est le phénomène périodique le plus simple :

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Avec :

- A : l'amplitude de l'oscillation
- ϕ : la phase en *rad*
- $\omega_0 = 2\pi f_0$: pulsation (fréquence angulaire) en $rad \cdot s^{-1}$
- f_0 : la fréquence en Hz. $f_0 = \frac{1}{T_0}$, T_0 étant la période en s

Phénomène périodique plus complexe

- superposition de phénomènes périodiques élémentaires
- les fréquences sont des multiples d'une fréquence de référence
- Cette fréquence est appelée la fondamentale

Remarque

Une superposition de phénomènes périodiques élémentaires n'est pas forcément périodique. Par exemple :

$$x(t) = cos(2x) + cos(\pi x)$$

n'est pas périodique parce qu'il n'existe pas d'entiers p et q tels que :

$$p \times 2 = q \times \pi$$

puisque π est irrationnel.

Autre notation

$$x(t) = Acos(2\pi ft + \phi) = \Re[Ae^{i(2\pi ft+\phi)}]$$
$$= \frac{Ae^{i(2\pi ft+\phi)} + Ae^{-i(2\pi ft+\phi)}}{2}$$

Puisque :

$$e^{\pm i\theta} = cos(\theta) \pm i \cdot sin(\theta)$$

Série de Fourier - Cas général

Presque tout signal périodique, noté $x(t)$, peut être décomposé en superposition de « cosinusoïdes » :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{2i\pi k f_0 t}$$

Les paramètres de cette décomposition sont donnés par le calcul de l'intégrale suivante :

$$X(k) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-2i\pi k f_0 t} dt$$

Exercice I - Propriétés de la Série de Fourier lorsque $x(t)$ est réel

On supposera maintenant et dans toute la suite du cours que $x(t)$ est réel. $X(k)$ est un nombre complexe que l'on peut noter de la façon suivante :

$$X(k) = \rho(k)e^{i\phi(k)}$$

Avec :

- $\rho(k) = |X(k)|$, le module.
- $\phi(k) = arg[X(k)]$, la phase.

1. Quelle est l'expression de $X(0)$? Commentez.
2. Quelles propriétés vérifient $\rho(k)$ et $\phi(k)$ lorsque $x(t)$ est réel ?
3. Proposez alors une autre écriture de $x(t)$ en fonction de $\rho(k)$ et $\phi(k)$ qui ne prenne en compte que les fréquences positives ou nulle ($k \geq 0$).

Exercice II - Synthèse d'un signal triangulaire

Avec Matlab créez un script et collez le code suivant dedans :

```
clear all; close all; clc;
time = 0:.001:2;
x = 0;
for k = 0:2
    rho = 4/((2*k+1)*pi)^2; phi = -pi;
    x = x+2*rho*cos(2*pi*(2*k+1)*time+phi);
    plot(time, x);
    title(['k = ', int2str(k)]);
    xlabel('time'); ylabel('x(t)');
    pause(0.15);
end
```

Augmentez le nombre de termes de la série et concluez.

Exercice III - Synthèse d'un signal carré

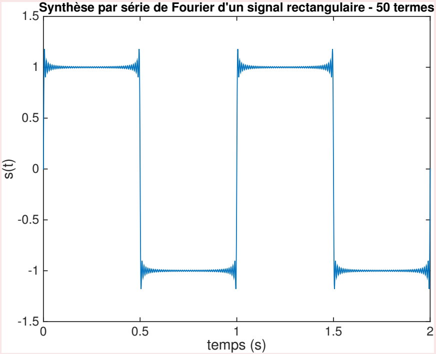
Avec Matlab créez un script et collez le code suivant dedans :

```
clear all; close all; clc;
time = 0:.001:2;
x = 0;
for k = 0:2
    rho = 2/((2*k+1)*pi); phi = -pi/2;
    x = x+2*rho*cos(2*pi*(2*k+1)*time+phi);
    plot(time, x);
    title(['k = ', int2str(k)]);
    xlabel('time'); ylabel('x(t)');
    pause(0.15);
end
```

Augmentez le nombre de termes de la série et concluez.

Phénomène de GIBBS

Si le signal comporte des discontinuités, des oscillations apparaissent autour de celles-ci sans diminuer en amplitude avec l'augmentation du nombre de termes de la série. En savoir plus.



Spectres d'un signal périodique

On peut représenter le nombre complexe $X(k)$ associé à $x(t)$ sous la forme de deux graphes :

- Spectre d'amplitude : on représente $|X(k)|$ en fonction de kf_0
- Spectre de phase : on représente $arg[X(k)]$ en fonction de kf_0

On peut tracer ces spectres sur les fréquences positives uniquement. Dans ce cas ils sont qualifiés de monolatéraux. Si on les trace sur tout le support fréquentiel, ils sont dits bilatéraux.

Spectre d'amplitude

lié à l'amplitude $\Leftrightarrow$ répartition énergétique

Quelles sont les oscillations élémentaires porteuses d'énergie ?

Spectre d'amplitude

lié à l'amplitude $\Leftrightarrow$ répartition énergétique

Quelles sont les oscillations élémentaires porteuses d'énergie ?

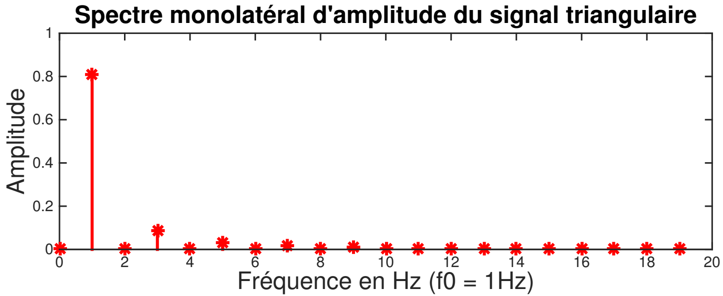
Spectre de phase

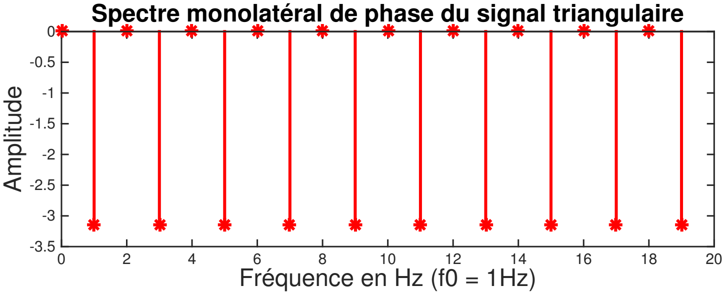
lié à la phase $\Leftrightarrow$ répartition temporelle

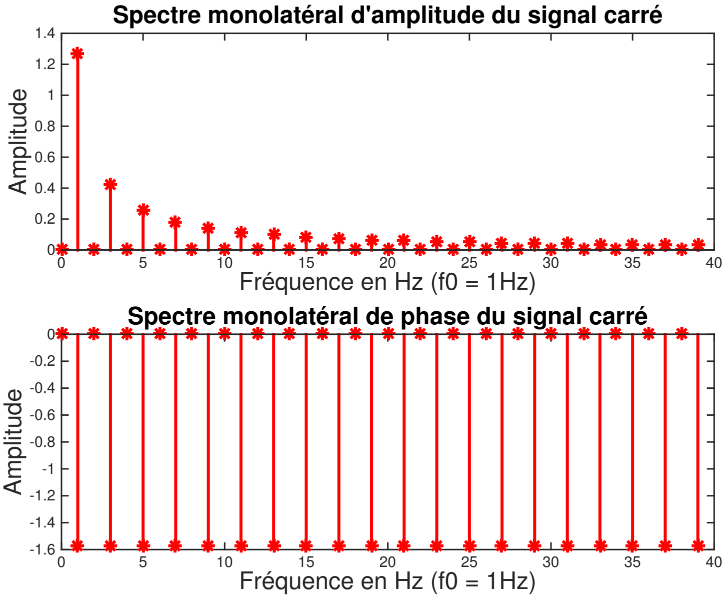
De quelle façon doivent se recombiner ces oscillations élémentaires significatives pour reconstituer le signal ?

La phase contient toute l'information temporelle

Elle est plus difficile à interpréter et à mettre en oeuvre


Spectre monolatéral d'amplitude du signal triangulaire
Amplitude
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)


Spectre monolatéral de phase du signal triangulaire
Amplitude
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)


Spectre monolatéral d'amplitude du signal carré
Amplitude
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)
Spectre monolatéral de phase du signal carré
Amplitude
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)

Signaux et Systèmes

Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N-1)T_e$, N étant le nombre d'échantillons et T_e la période d'échantillonnage.

Exercice IV - Résolution de TFD

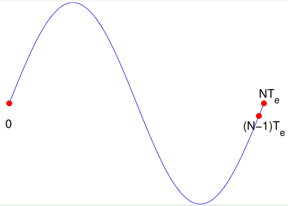
Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?

Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N-1)T_e$, N étant le nombre d'échantillons et T_e la période d'échantillonnage.

Exercice IV - Résolution de TFD

Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?

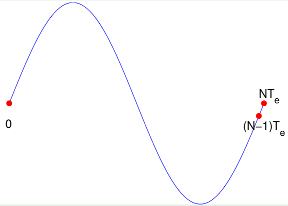


Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N-1)T_e$, N étant le nombre d'échantillons et T_e la période d'échantillonnage.

Exercice IV - Résolution de TFD

Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?



$$\Delta f = \frac{1}{NT_e} \text{ à comparer à } f_0 \text{ dans la série de Fourier}$$

Transformée de Fourier Discrète

En partant des observations précédentes, on peut en déduire la formulation discrète de la série de Fourier :

$$X(kf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-2i\pi k f_0 t} dt$$

$$X(k\Delta f) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2i\pi k \frac{1}{NT_e} nT_e} T_e$$

$$X(k\Delta f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Avec $\Delta f = \frac{1}{NT_e}$, résolution fréquencielle de la TFD

On peut réécrire cette TFD de la façon suivante :

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

et en posant $z = e^{2i\pi \frac{k}{N}}$, son expression devient :

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

qui est, au facteur $\frac{1}{N}$ près, la TZ de $x(n)$

Transformée de Fourier Rapide, TFR

La TFR est une algorithme optimisé de la TFD

Exercice V - Spectre d'amplitude d'un signal avec Matlab

On a acquis 100 échantillons du signal suivant :

$$x(t) = 2 \cdot cos(2\pi 100t) + \frac{1}{2} cos(2\pi 200t) + cos(2\pi 250t)$$

avec un pas d'échantillonnage de $1ms$.

1. Simuler cette acquisition dans un script Matlab.
2. Utiliser les fonctions **fft** et **fftshift** pour calculer la TFR de ce signal.
3. Calculer **magFFTX**, le module de cette TFR (utiliser **abs**).
4. Créer le vecteur fréquenciel pour une représentation bilatérale.
5. Tracer le spectre d'amplitude (utiliser la fonction **stem**).

Signaux et Systèmes

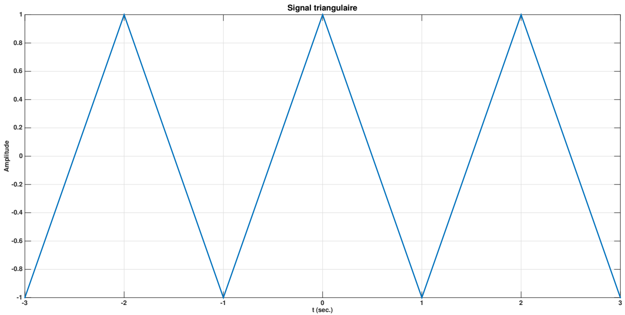
Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Pour les signaux triangulaire et carré ci-après :

1. Calculer les coefficients complexes des séries de Fourier associées.
2. Tracer les spectres d'amplitude et de phase correspondants.

Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Signal triangulaire :



Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Signal carré :