L3 - CMI017 : Signaux et Systèmes
Séquence IV

BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Plan de cette séquence

Rappels 1/2

Rappel I

Un SDLIT peut être définit par :

1. son EAD
2. son diagramme bloc
3. sa fonction de transfert en $\mathcal{R}$

Rappels 1/2

Rappel I

Un SDLIT peut être définit par :

1. son EAD
2. son diagramme bloc
3. sa fonction de transfert en $\mathcal{R}$

Rappel II

La réponse impulsionnelle d'un SDLIT est la réponse de ce système à une impulsion unitaire. C'est une caractéristique fondamentale de ce dernier.

Rappels 2/2

Rappel III

Pour les systèmes non bouclés, l'ensemble des coefficients des puissances de $\mathcal{R}$ de la fonction de transfert donne directement la réponse impulsionnelle.

Rappels 2/2

Rappel III

Pour les systèmes non bouclés, l'ensemble des coefficients des puissances de $\mathcal{R}$ de la fonction de transfert donne directement la réponse impulsionnelle.

Rappel IV

Pour les systèmes bouclés, la fonction de transfert en $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle et le développement en puissance de $\mathcal{R}$ peut être obtenu pas division polynomiale.

Signaux et Systèmes

On peut considérer tout signal numérique comme une somme pondérée et décalée dans le temps d'impulsions unitaires

Par exemple le signal $s(n)$ dont les valeurs successives sont 1, 2, 4, 3 puis 0 indéfiniment depuis l'origine du temps peut être exprimé de la façon suivante :

$$s(n) = 1 \cdot \delta(n) + 2 \cdot \delta(n-1) + 4 \cdot \delta(n-2) + 3 \cdot \delta(n-3)$$

De plus, on ne considère que les SDLIT

Donc la réponse du système à $\alpha\delta(n)$ est la réponse impulsionnelle pondérée par α, d'après l'hypothèse de linéarité

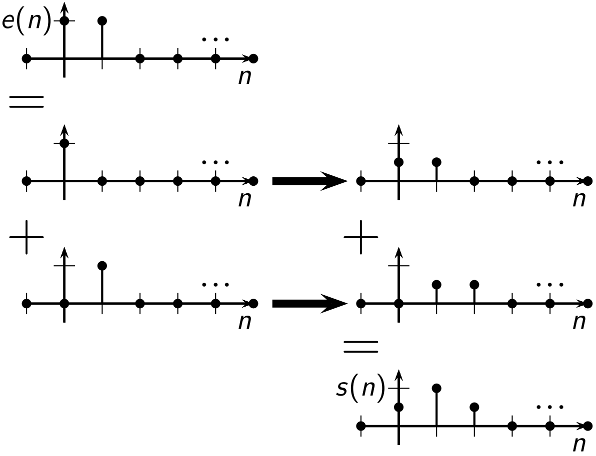
De plus, on ne considère que les SDLIT

Donc la réponse du système à $\alpha\delta(n)$ est la réponse impulsionnelle pondérée par α, d'après l'hypothèse de linéarité

Et la réponse du système à $\delta(n - n_0)$ est la réponse impulsionnelle décalée de n_0, d'après l'hypothèse de stationnarité

Pour obtenir la réponse d'un SDLIT à une entrée quelconque, il suffit de développer l'entrée en somme d'impulsions unitaires pondérées et décalées temporellement puis de sommer les réponses impulsionnelles individuelles

Pour obtenir la réponse d'un SDLIT à une entrée quelconque, il suffit de développer l'entrée en somme d'impulsions unitaires pondérées et décalées temporellement puis de sommer les réponses impulsionnelles individuelles



$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n) \text{ : rép. imp.}$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n) \text{ : rép. imp.}$$

$$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n-k)$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n) : \text{rép. imp.}$$

$$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n-k)$$

$$e(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow e(k)h(n-k)$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n) : \text{rép. imp.}$$

$$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n-k)$$

$$e(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow e(k)h(n-k)$$

$$e(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)h(n-k)$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n) \text{ : rép. imp.}$$

$$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h(n-k)$$

$$e(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow e(k)h(n-k)$$

$$e(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)h(n-k)$$

Les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle permettent d'obtenir une relation entrée/sortie générique : la sortie d'un système LIT discret est une somme pondérée de réponses impulsionnelles renversées et décalées temporellement.

C'est la **convolution**

On a :

$$\mathcal{H}(\mathcal{R}) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\mathcal{R}^k$$

$h(k)$ **étant la réponse impulsionnelle du système. On peut obtenir la sortie du système à une entrée quelconque en utilisant la relation de convolution :**

$$s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)h(n-k)$$

Signaux et Systèmes

Définition

Soit $x(n)$ un signal discret. La transformée en z de $x(n)$ est définie par :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Définition

Soit $x(n)$ un signal discret. La transformée en z de $x(n)$ est définie par :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Exercice I - Calculs de TZ

Calculer les transformées en z des signaux suivants :

1. $\delta(n)$
2. $\delta(n-1)$
3. $x_1(n) = (\frac{1}{4})^n$
4. $x_2(n) = \alpha^n$

Exercice I - Calculs de TZ

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cdot z^{-n}$$

Exercice I - Calculs de TZ

$$
\begin{aligned}
X_2(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha \cdot z^{-1})^n
\end{aligned}
$$

Exercice I - Calculs de TZ

$$\begin{aligned}
X_2(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha \cdot z^{-1})^n \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - (\alpha \cdot z^{-1})^{n+1}}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}
\end{aligned}$$

Exercice I - Calculs de TZ

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cdot z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha \cdot z^{-1})^n$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - (\alpha \cdot z^{-1})^{n+1}}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}$$

Cette dernière expression converge si $|\alpha \cdot z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |\alpha|$. Dans ce cas :

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

On a vu (séquence II - slide n° 23) que les coefficients du développement polynomial de la fonction de transfert en $\mathcal{R}$ donnent la réponse impulsionnelle du système :

$$\mathcal{H}(\mathcal{R}) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) \cdot \mathcal{R}^n$$

Pour obtenir la fct. de trsf. en z, il suffit de remplacer $\mathcal{R}$ par z^{-1} :

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

avec

$$\mathcal{H}(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

On a vu (séquence II - slide n° 23) que les coefficients du développement polynomial de la fonction de transfert en $\mathcal{R}$ donnent la réponse impulsionnelle du système :

$$\mathcal{H}(\mathcal{R}) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) \cdot \mathcal{R}^n$$

Pour obtenir la fct. de trsf. en z, il suffit de remplacer $\mathcal{R}$ par z^{-1} :

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

avec

$$\mathcal{H}(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

La TZ de la réponse impulsionnelle d'un système est sa fonction de transfert en z

Signaux et Systèmes

¿ Question ?

Pourquoi s'intéresser de si près à la réponse impulsionnelle ?

¿ Question ?

Pourquoi s'intéresser de si près à la réponse impulsionnelle ?

Parce que si l'on connait la Rep. Imp. d'un SDLIT, on connaitra sa réponse pour toute entrée !

¿ Question ?

Pourquoi s'intéresser de si près à la réponse impulsionnelle ?

Parce que si l'on connait la Rep. Imp. d'un SDLIT, on connaitra sa réponse pour toute entrée !

¿ Question ?

Comment connaitre la réponse d'un SDLIT à une entrée quelconque ?

¿ Question ?

Pourquoi s'intéresser de si près à la réponse impulsionnelle ?

Parce que si l'on connait la Rep. Imp. d'un SDLIT, on connaitra sa réponse pour toute entrée !

¿ Question ?

Comment connaitre la réponse d'un SDLIT à une entrée quelconque ?

En utilisant la convolution !

Il existe plusieurs méthodes d'obtention de la réponse impulsionnelle à partir de la fonction de transfert en z. Nous utiliserons la méthode de la division polynomiale.

Exercice II - Calculs de Réponses Impulsionnelles

Pour chacun des systèmes caractérisés par les fonctions de transfert en z suivantes :

$$\mathcal{H}_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\mathcal{H}_2(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1}}$$

Exercice II - Calculs de Réponses Impulsionnelles

1. Donner les valeurs des pôles de la fonction rationnelle
2. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle. Vérifier avec **impz**.
3. La réponse impulsionnelle converge-t-elle vers zéro pour n grand ? Concluez quant au comportement de la sortie du système à une entrée bornée.
4. En utilisant la fonction Matlab **conv**, donner la réponse du système à une sinusoïde de fréquence 1Hz, échantillonnée à 1000Hz pendant 50ms.

Remarques

1. Les pôles peuvent être complexes
2. Si des pôles ont des modules supérieurs à un, le système est instable
3. Cf. stabilité BIBO

Signaux et Systèmes

Théorème du retard

Si $x(n)$ et $X(z)$ sont des paires de transformées. Alors la transformée de :

$$y(n) = x(n-m)$$

est :

$$Y(z) = z^{-m}X(z)$$

Soient $x(n)$ et $X(z)$ une paire de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = x(n-m)$?

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n-m) \cdot z^{-n}$$

Soient $x(n)$ et $X(z)$ une paire de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = x(n-m)$?

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n-m) \cdot z^{-n}$$

Posons $k = n - m$, alors :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-m}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k-m} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k} \end{aligned}$$

Soient $x(n)$ et $X(z)$ une paire de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = x(n-m)$?

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n-m) \cdot z^{-n}$$

Posons $k = n - m$, alors :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-m}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k-m} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k} \\ &= z^{-m} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k} \end{aligned}$$

car $x(k) = 0$ si $k < 0$. Finalement :

Soient $x(n)$ et $X(z)$ une paire de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = x(n-m)$?

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n-m) \cdot z^{-n}$$

Posons $k = n - m$, alors :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-m}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k-m} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k} \\ &= z^{-m} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k} \end{aligned}$$

car $x(k) = 0$ si $k < 0$. Finalement :

$$Y(z) = z^{-m} X(z)$$

Linéarité

Si $x_1(n)$, $X_1(z)$ et $x_2(n)$, $X_2(z)$ sont des paires de transformées. Alors la transformée en z de :

$$y(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

est :

$$Y(z) = \alpha X_1(Z) + \beta X_2(z)$$

Soient $x_1(n)$, $X_1(z)$ et $x_2(n)$, $X_2(z)$ deux paires de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = \alpha x_1(n) + \beta y_1(n)$?

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] \cdot z^{-n}$$

Soient $x_1(n)$, $X_1(z)$ et $x_2(n)$, $X_2(z)$ deux paires de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = \alpha x_1(n) + \beta y_1(n)$?

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] \cdot z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha x_1(n) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta x_2(n) \cdot z^{-n} \end{aligned}$$

Soient $x_1(n)$, $X_1(z)$ et $x_2(n)$, $X_2(z)$ deux paires de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = \alpha x_1(n) + \beta y_1(n)$?

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] \cdot z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha x_1(n) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta x_2(n) \cdot z^{-n} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} x_1(n) \cdot z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} x_2(n) \cdot z^{-n}
\end{aligned}
$$

Soient $x_1(n)$, $X_1(z)$ et $x_2(n)$, $X_2(z)$ deux paires de transformées. Quelle est la transformée de $y(n) = \alpha x_1(n) + \beta y_1(n)$?

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] \cdot z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha x_1(n) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta x_2(n) \cdot z^{-n} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} x_1(n) \cdot z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} x_2(n) \cdot z^{-n} \\
&= \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)
\end{aligned}$$

À partir de la forme générale de l'EAD :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)e(n-k) - \sum_{k=1}^{M-1} a(k)s(n-k)$$

et des deux résultats précédents, il est possible d'en déduire la forme générale de la fonction de transfert $\mathcal{H}(z)$:

$$\boxed{\mathcal{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b(k) \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a(k) \cdot z^{-k}}}$$

Que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \ldots + b(N-1)z^{-N+1}}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \ldots + a(M-1)z^{-M+1}}$$

$$= z^{M-N} b(0) \cdot \frac{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{N-1})}{(z - p_0)(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_{M-1})}$$

Que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \ldots + b(N-1)z^{-N+1}}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \ldots + a(M-1)z^{-M+1}}$$
$$= z^{M-N} b(0) \cdot \frac{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{N-1})}{(z-p_0)(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_{M-1})}$$

Remarques

1. Les z_i sont les zéros de $\mathcal{H}(z)$
2. Les p_i sont les pôles de $\mathcal{H}(z)$
3. Le système est stable si tous les pôles ont des modules inférieurs à un

Signaux et Systèmes

Exercice III - Calculs de Réponses Impulsionnelles

Pour les systèmes caractérisés par les fonctions de transfert en z suivantes :

$$\mathcal{H}_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$\mathcal{H}_4(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

$$\mathcal{H}_5(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

Exercice III - Calculs de Réponses Impulsionnelles

1. Donner les valeurs des pôles de la fonction rationnelle
2. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle
3. La réponse impulsionnelle converge-t-elle vers zéro pour n grand ? Concluez quant au comportement de la sortie du système à une entrée bornée