# L3 - CMI017 : Signaux et Systèmes
# Séquence II


BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement




Aix Marseille Université

INSTITUT DES SCIENCES DU MOUVEMENT ETIENNE JULES MAREY

# Plan de cette séquence

# Signaux et Systèmes

## Phénomène périodique élémentaire

La cosinusoïde est le phénomène périodique le plus simple :

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Avec :

- $A$ : l'amplitude de l'oscillation
- $\phi$ : la phase en *rad*
- $\omega_0 = 2\pi f_0$ : pulsation (fréquence angulaire) en $rad \cdot s^{-1}$
- $f_0$ : la fréquence en $Hz$. $f_0 = \frac{1}{T_0}$, $T_0$ étant la période en $s$

## Phénomène périodique élémentaire

La cosinusoïde est le phénomène périodique le plus simple :

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Avec :

- $A$ : l'amplitude de l'oscillation
- $\phi$ : la phase en *rad*
- $\omega_0 = 2\pi f_0$ : pulsation (fréquence angulaire) en $rad \cdot s^{-1}$
- $f_0$ : la fréquence en $Hz$. $f_0 = \frac{1}{T_0}$, $T_0$ étant la période en $s$

## Phénomène périodique plus complexe

- superposition de phénomènes périodiques élémentaires
- les fréquences sont des multiples d'une fréquence de référence
- Cette fréquence est appelée la fondamentale

## Remarque

Une superposition de phénomènes périodiques élémentaires n'est pas forcément périodique. Par exemple :

$$x(t) = cos(2x) + cos(\pi x)$$

n'est pas périodique parce qu'il n'existe pas d'entiers $p$ et $q$ tels que :

$$p \times 2 = q \times \pi$$

puisque $\pi$ est irrationnel.

## Autre notation

$$x(t) = Acos(2\pi ft + \phi) = \Re[Ae^{i(2\pi ft+\phi)}]$$
$$= \frac{Ae^{i(2\pi ft+\phi)} + Ae^{-i(2\pi ft+\phi)}}{2}$$

Puisque :

$$e^{\pm i\theta} = cos(\theta) \pm i \cdot sin(\theta)$$

## Série de Fourier - Cas général

Presque tout signal périodique, noté $x(t)$, peut être décomposé en superposition de ń cosinusoïdes ż :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{2i\pi k f_0 t}$$

Les paramètres de cette décomposition sont donnés par le calcul de l'intégrale suivante :

$$X(k) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-2i\pi k f_0 t} dt$$

## Exercice I - Propriétés de la Série de Fourier lorsque $x(t)$ est réel

On supposera maintenant et dans toute la suite du cours que $x(t)$ est réel. $X(k)$ est un nombre complexe que l'on peut noter de la façon suivante :

$$X(k) = \rho(k)e^{i\phi(k)}$$

Avec :

- $\rho(k) = |X(k)|$, le module.
- $\phi(k) = arg[X(k)]$, la phase.

1. Quelle est l'expression de $X(0)$ ? Commentez.
2. Quelles propriétés vérifient $\rho(k)$ et $\phi(k)$ lorsque $x(t)$ est réel ?
3. Proposez alors une autre écriture de $x(t)$ en fonction de $\rho(k)$ et $\phi(k)$ qui ne prenne en compte que les fréquences positives ou nulle ($k \geq 0$).

## Exercice II - Synthèse d'un signal triangulaire

Avec Matlab créez un script et collez le code suivant dedans :

```
clear all; close all; clc;
time = 0:.001:2;
x = 0;
for k = 0:2
    rho = 4/((2*k+1)*pi)^2; phi = -pi;
    x = x+2*rho*cos(2*pi*(2*k+1)*time+phi);
    plot(time, x);
    title(['k = ', int2str(k)]);
    xlabel('time'); ylabel('x(t)');
    pause(0.15);
end
```

Augmentez le nombre de termes de la série et concluez.

## Exercice III - Synthèse d'un signal carré

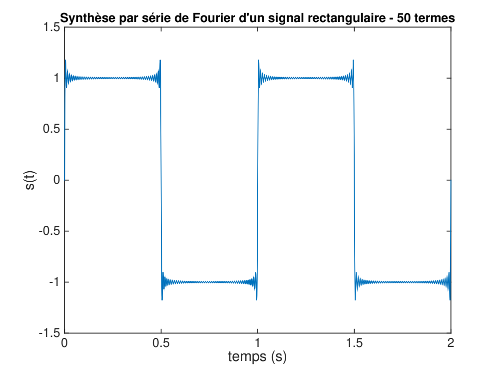
Avec Matlab créez un script et collez le code suivant dedans :

```
clear all; close all; clc;
time = 0:.001:2;
x = 0;
for k = 0:2
    rho = 2/((2*k+1)*pi); phi = -pi/2;
    x = x+2*rho*cos(2*pi*(2*k+1)*time+phi);
    plot(time, x);
    title(['k = ', int2str(k)]);
    xlabel('time'); ylabel('x(t)');
    pause(0.15);
end
```

Augmentez le nombre de termes de la série et concluez.

## Phénomène de GIBBS

Si le signal comporte des discontinuités, des oscillations apparaissent autour de celles-ci sans diminuer en amplitude avec l'augmentation du nombre de termes de la série. En savoir plus.



## Spectres d'un signal périodique

On peut représenter le nombre complexe $X(k)$ associé à $x(t)$ sous la forme de deux graphes :

- Spectre d'amplitude : on représente $|X(k)|$ en fonction de $kf_0$
- Spectre de phase : on représente $arg[X(k)]$ en fonction de $kf_0$

On peut tracer ces spectres sur les fréquences positives uniquement. Dans ce cas ils sont qualifiés de monolatéraux. Si on les trace sur tout le support fréquentiel, ils sont dits bilatéraux.

## Spectre d'amplitude

lié à l'amplitude $\Leftrightarrow$ répartition énergétique

**Quelles sont les oscillations élémentaires porteuses d'énergie ?**

### Spectre d'amplitude

lié à l'amplitude $\Leftrightarrow$ répartition énergétique

**Quelles sont les oscillations élémentaires porteuses d'énergie ?**

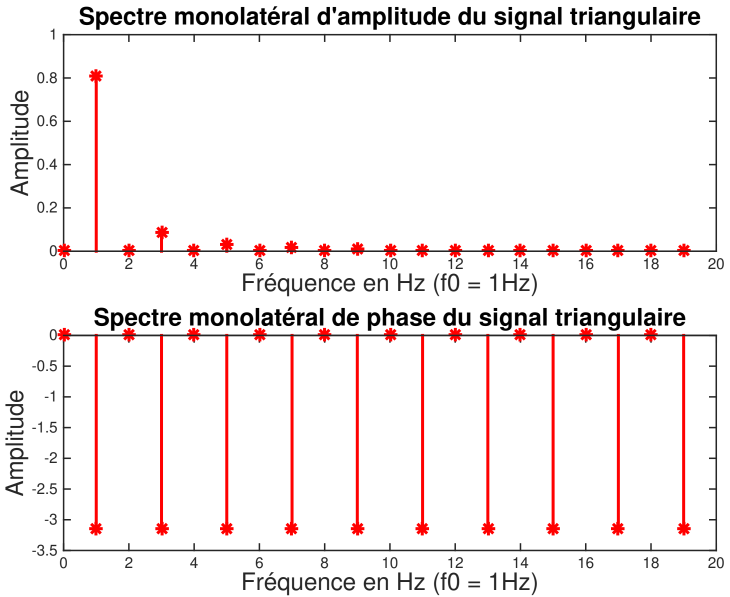
### Spectre de phase

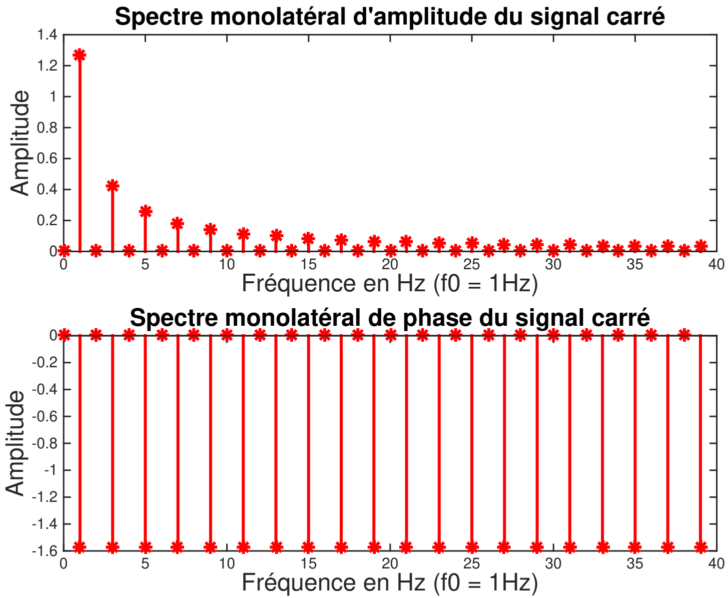
lié à la phase $\Leftrightarrow$ répartition temporelle

**De quelle façon doivent se recombiner ces oscillations élémentaires significatives pour reconstituer le signal ?**

La phase contient toute l'information temporelle

Elle est plus difficile à interpréter et à mettre en oeuvre


Spectre monolatéral d'amplitude du signal triangulaire
Amplitude
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)
Spectre monolatéral de phase du signal triangulaire
Amplitude
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)


Spectre monolatéral d'amplitude du signal carré
Amplitude
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)
Spectre monolatéral de phase du signal carré
Amplitude
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
0 5 10 15 20 25 30 35 40
Fréquence en Hz (f0 = 1Hz)

# Signaux et Systèmes

## Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N-1)T_e$, $N$ étant le nombre d'échantillons et $T_e$ la période d'échantillonnage.

## Exercice IV - Résolution de TFD

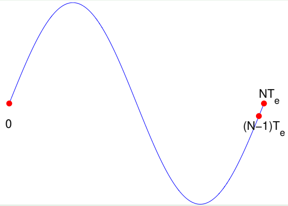
Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?

## Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N-1)T_e$, $N$ étant le nombre d'échantillons et $T_e$ la période d'échantillonnage.

## Exercice IV - Résolution de TFD

Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?

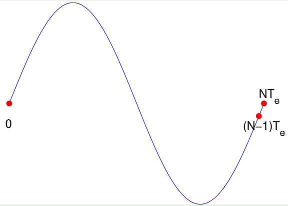


## Situation réelle

On acquière sur ordinateur un signal pendant une durée finie $D = (N-1)T_e$, $N$ étant le nombre d'échantillons et $T_e$ la période d'échantillonnage.

## Exercice IV - Résolution de TFD

Quelle sera alors la plus petite fréquence observable ?




$$\Delta f = \frac{1}{NT_e} \text{ à comparer à } f_0 \text{ dans la série de Fourier}$$

## Transformée de Fourier Discrète

En partant des observations précédentes, on peut en déduire la formulation discrète de la série de Fourier :

$$X(kf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-2i\pi k f_0 t} dt$$

$$X(k\Delta f) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2i\pi k \frac{1}{NT_e} nT_e} T_e$$

$$X(k\Delta f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Avec $\Delta f = \frac{1}{NT_e}$, résolution fréquencielle de la TFD

On peut réécrire cette TFD de la façon suivante :

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2i\pi\frac{kn}{N}}$$

et en posant $z = e^{2i\pi\frac{k}{N}}$, son expression devient :

$$X(z) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

qui est, au facteur $\frac{1}{N}$ près, la TZ de $x(n)$

## Transformée de Fourier Rapide, TFR

La TFR est une algorithme optimisé de la TFD

## Exercice V - Spectre d'amplitude d'un signal avec Matlab

On a acquis 100 échantillons du signal suivant :

$$x(t) = 2 \cdot cos(2\pi 100t) + \frac{1}{2}cos(2\pi 200t) + cos(2\pi 250t)$$

avec un pas d'échantillonnage de $1ms$.

1. Simuler cette acquisition dans un script Matlab.
2. Utiliser les fonctions **fft** et **fftshift** pour calculer la TFR de ce signal.
3. Calculer **magFFTX**, le module de cette TFR (utiliser **abs**).
4. Créer le vecteur fréquenciel pour une représentation bilatérale.
5. Tracer le spectre d'amplitude (utiliser la fonction **stem**).

# Signaux et Systèmes

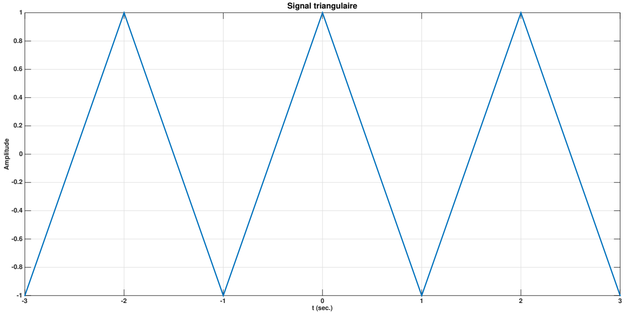
### Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Pour les signaux triangulaire et carré ci-après :

1. Calculer les coefficients complexes des séries de Fourier associées.
2. Tracer les spectres d'amplitude et de phase correspondants.

## Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Signal triangulaire :



## Exercice VI - Calculs de séries de Fourier

Signal carré :