MOUT126 : Traitement du Signal

BULOUP Frank

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Organisation du cours

- Deux parties : signal et système
- Sept séances en salle informatique
- Présentation des notions théoriques
- Applications pratiques sur papier ou sur Matlab
- Contrôles continus (50%)
  - Petite interrogation en début de chaque séquence ($\simeq$10mn)
  - Contrôle Continu final d'une heure et demie
- Un examen final d'une heure et demie (50%)

Références

- Le logiciel libre Octave GNU (peut remplacer Matlab)
  `http://octave.sourceforge.net`
- La webtv de l'enseignement supérieur
  `http://www.canal-u.tv`
  - Chapitre "Leçons de choses" - Partie 4 (Trigo)
  - Nombres complexes - Parties 1 à 4 + exercices
- Le site de l'académie en ligne
  `http://www.academie-en-ligne.fr`
  → Lycée → Terminale S → Mathématique → Ensemble des nombres complexes
- Les sites :
  - `http://www.dspguru.com`
  - `http://www.dspguide.com/pdfbook.html`
  - `http://ocw.mit.edu/resources/res-6-008-digital-signal-processing-spring-2011`

Pourquoi étudier le traitement du signal ?

Pourquoi étudier le traitement du signal ?

Définition

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse et d'interprétation des signaux

Pourquoi étudier le traitement du signal ?

Définition

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse et d'interprétation des signaux

C'est donc forcément utile en analyse du mouvement :

après acquisition, enregistrement des signaux,
il faut bien passer à l'analyse !

Acquisition des signaux : MOUT104

Deuxième Partie

1. Transformée en z et filtrage numérique
   - Exemples de traitements mathématiques
   - Transformée en z : l'opérateur z^{-1}
   - Fonction de Transfert en z
   - Les filtres RIF
   - Les filtres RII
   - Exercices Matlab

Calcul numérique

La plupart des traitements mathématiques peuvent être réalisés en calcul numérique sur ordinateur :

- Moyenne
- Dérivée
- Lissage

Calcul numérique

La plupart des traitements mathématiques peuvent être réalisés en calcul numérique sur ordinateur :

- Moyenne
- Dérivée
- Lissage

Filtre numérique

Ces traitements peuvent être représentés par un filtre numérique

- Moyenne $\Leftrightarrow$ filtre moyenneur $\Leftrightarrow$ **filtre passe-bas**
- Dérivée $\Leftrightarrow$ filtre dérivateur $\Leftrightarrow$ **filtre passe-haut**
- Lissage $\Leftrightarrow$ généralisation du **filtre passe-bas**

Filtre passe-bande = filtre passe-bas + filtre passe-haut

Moyenne

Moyenne sur N points :

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e(n-k)$$

Sur quatre points :

$$s(n) = \frac{e(n) + e(n-1) + e(n-2) + e(n-3)}{4}$$

Moyenne

Moyenne sur N points :

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e(n-k)$$

Sur quatre points :

$$s(n) = \frac{e(n) + e(n-1) + e(n-2) + e(n-3)}{4}$$

Dérivée

Le signal a été échantillonné à la fréquence F_e :

$$s(n) = \frac{e(n) - e(n-1)}{Te}$$

Généralisation

Filtres non récursifs

Les échantillons passés de la sortie ne sont pas réemployés dans les calculs :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)e(n-k)$$

Généralisation

Filtres non récursifs

Les échantillons passés de la sortie ne sont pas réemployés dans les calculs :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)e(n-k)$$

Filtres récursifs

Des échantillons passés de la sortie sont mémorisés et réemployés dans les calculs :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)e(n-k) - \sum_{k=0}^{M-1} a(k)s(n-k)$$

Représenter un filtre numérique sous la forme d'une équation de récurrence n'est pas la seule possibilité. En passant de l'espace temporel à l'espace fréquenciel par transformée de Fourier, on obtient une autre représentation qui fait apparaître l'opérateur de retard, noté z^{-1}. Cet opérateur, appliqué à un signal $s(n)$, le retarde d'un échantillon.

Représenter un filtre numérique sous la forme d'une équation de récurrence n'est pas la seule possibilité. En passant de l'espace temporel à l'espace fréquenciel par transformée de Fourier, on obtient une autre représentation qui fait apparaître l'opérateur de retard, noté z^{-1}. Cet opérateur, appliqué à un signal $s(n)$, le retarde d'un échantillon.

Transformée en z

La transformée en z découle directement de la TFD (Cf. séquence 5). En posant $z = e^{2i\pi\frac{k}{N}}$ dans l'expression de la TFD, on obtient :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) z^{-k}$$

Exercice sur l'opérateur de retard

Calculer les TZ des signaux suivants :

- $e(n-1)$
- $e(n-2)$
- $e(n-3)$
- Généraliser pour en déduire le théorème du retard

Exercice sur l'opérateur de retard

$$TZ\{e(n-1)\} = z^{-1}E(z)$$

Exercice sur l'opérateur de retard

$$TZ\{e(n-1)\} = z^{-1}E(z)$$

$$TZ\{e(n-1)\} = z^{-2}E(z)$$

$$TZ\{e(n-3)\} = z^{-3}E(z)$$

Exercice sur l'opérateur de retard

$$TZ\{e(n-1)\} = z^{-1}E(z)$$

$$TZ\{e(n-1)\} = z^{-2}E(z)$$
$$TZ\{e(n-3)\} = z^{-3}E(z)$$

$$TZ\{e(n-m)\} = z^{-m}E(z)$$

Calcul de Transformée en z

Calculer les TZ des équations suivantes :

- La moyenne : $s(n) = \frac{e(n)+e(n-1)+e(n-2)+e(n-3)}{4}$
- La dérivée : $s(n) = \frac{e(n)-e(n-1)}{T_e}$
- Un filtre non récursif : $s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)e(n-k)$
- Un filtre récursif :
  $s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)e(n-k) - \sum_{k=1}^{M-1} a(k)s(n-k)$

Calcul de Transformée en z

Moyenne :

$$S(z) = \frac{E(z) + z^{-1}E(z) + z^{-2}E(z) + z^{-3}E(z)}{4}$$

Calcul de Transformée en z

Moyenne :

$$S(z) = \frac{E(z) + z^{-1}E(z) + z^{-2}E(z) + z^{-3}E(z)}{4}$$

Dérivée :

$$S(z) = \frac{E(z) - z^{-1}E(z)}{T_e}$$

Calcul de Transformée en z

Filtre non récursif :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) z^{-k} E(z)$$

Calcul de Transformée en z

Filtre non récursif :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) z^{-k} E(z)$$

Filtre récursif :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) z^{-k} E(z) - \sum_{k=1}^{M-1} a(k) z^{-k} S(z)$$

L'utilsation de la transformée en z, et donc le passage dans le domaine fréquenciel, permet de simplifier l'écriture en ne faisant apparaître que l'opérateur z^{-1}. Par exemple :

$$s(n) = e(n) + e(n-1)$$

On obtient par TZ :

$$S(z) = E(z) + z^{-1}E(z) = (1 + z^{-1})E(z)$$

Et on peut alors écrire :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = 1 + z^{-1}$$

Défintion

On appelle fonction de transfert en z, que l'on note souvent $H(z)$, le quotient de $S(z)$ par $E(z)$:

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

Défintion

On appelle fonction de transfert en z, que l'on note souvent $H(z)$, le quotient de $S(z)$ par $E(z)$:

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

Remarques

- $H(z)$ est une fraction rationnelle en z
- On utilise son expression pour créer un filtre sous Matlab
- Il faut la toolbox Signal Processing
- On ne saisit alors que les coefficients des polynômes en z du dénominateur et du numérateur de $H(z)$

Par exemple : $H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{1+z^{-1}}{1} = \frac{b(1)+b(2)z^{-1}}{a(1)}$

On peut alors en déduire les vecteurs suivants sous Matlab :

$$b = [1,\ 1] \text{ et } a = [1]$$

Calcul de fonction de transfert $H(z)$

Écrire les fonctions de transfert pour le filtre :

1. moyenneur
2. dérivateur
3. récursif
4. non récursif

Donner les vecteurs a et b pour les deux premiers filtres

Calcul de fonction de transfert $H(z)$

Moyenneur :

$$H(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

Calcul de fonction de transfert $H(z)$

Moyenneur :

$$H(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

Dérivateur :

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Calcul de fonction de transfert $H(z)$

Filtre non récursif :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) z^{-k}$$

Calcul de fonction de transfert $H(z)$

Filtre non récursif :

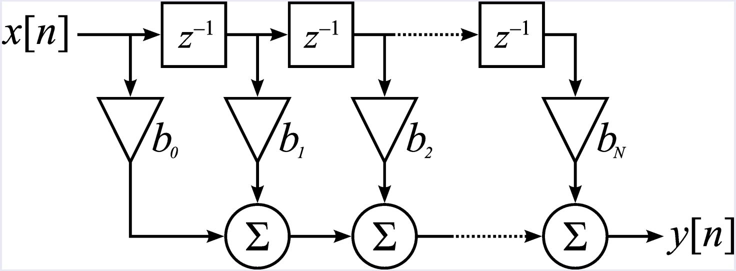
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) z^{-k}$$

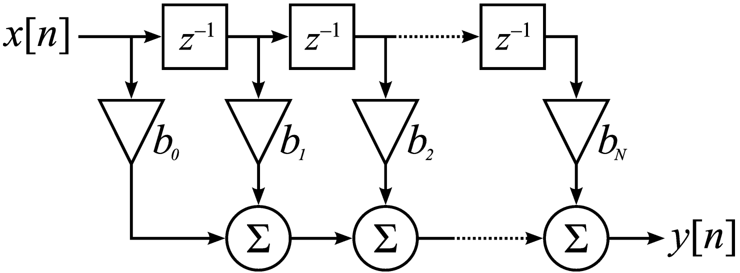
Filtre récursif :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b(k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a(k) z^{-k}}$$

Filtre non récursif

Dit aussi filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)



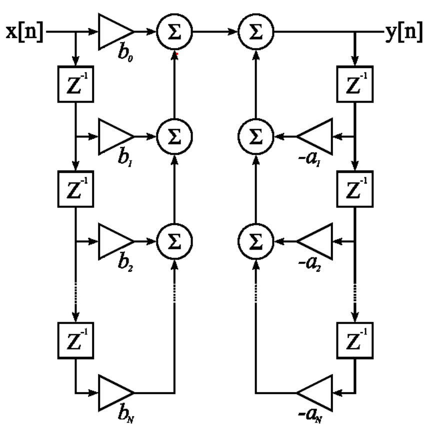


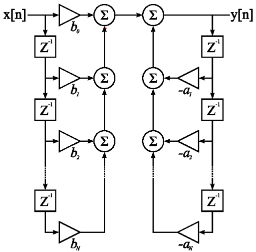
Propriétés

- Ils sont toujours stables
- Ils ne propage pas les erreurs de calculs numériques
- Ils sont à phase linéaire (retard uniquement)
- Ils sont moins sélectifs que les RII pour un même ordre

Filtre récursif

Dit aussi filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)





Propriétés

- Ils ne sont pas toujours stables (choisir une méthode de synthèse)
- Ils faut mémoriser plus d'échantillons passés
- Ils propagent les erreurs de calculs
- Ils sont à phase non linéaire (déformation du signal)
- Ils sont plus sélectifs que les RIF pour un même ordre

Exercice I

Soit le signal suivant $s(t)$ échantillonné à $F_e = 4Hz$:

$$s(t) = 3 + sin(2\pi t)$$

1. Représenter le signal sur une durée de $10s$
2. Lire l'aide de la fonction Matlab **filter**
3. Programmer un filtre moyenneur sur 4 points
4. Programmer un filtre dérivateur
5. Comparer la dérivée théorique avec la sortie du dérivateur. Conclusion ?

Exercice II

1. Charger le fichier de la note Mi
2. Calculer le module de la TFD de ce signal
3. Tracer le spectre monolatéral. Quelles informations en tirez-vous ?
4. Ajouter un bruit blanc (voir avec le prof.)
5. Filtrer avec un filtre de type RII. Utiliser la fonction **butter**
6. Proposer un ordre et une fréquence de coupure permettant de supprimer au mieux le bruit sans détruire l'information
7. Filtrer avec un filtre de type RIF. Utiliser la fonction **firpm**
8. Proposer un filtre RIF qui soit équivalent au filtre RII précédent
9. Conclure