

# M1 IEAP - BTI/FH/IEMH

## FIEA11CM : Analyse et Traitement du Signal

Flavy ROSEREN  
Martin EGIZIANO  
Frank BULOUP

Aix Marseille Université  
Institut des Sciences du Mouvement



**amU**  
Aix Marseille Université



INSTITUT ///////////////  
DES SCIENCES **ETIENNE**  
DU MOUVEMENT **JULES**  
///////////////// **MAREY**

## Pourquoi des rappels sur les complexes ?

**Les complexes** sont utilisés dans pratiquement toutes les sciences et **tout particulièrement en traitement du signal** : représentation fréquentielles des signaux et des systèmes

## Pourquoi des rappels sur les complexes ?

**Les complexes** sont utilisés dans pratiquement toutes les sciences et **tout particulièrement en traitement du signal** : représentation fréquentielle des signaux et des systèmes

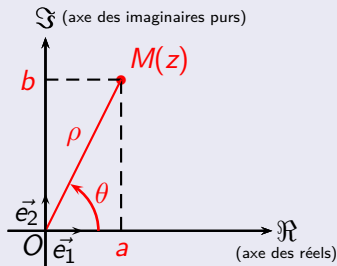
## Pourquoi les complexes ?

- Résoudre certains problèmes insolubles autrement
- Faciliter les calculs



Jérôme CARDAN (1501-1576)

## Le plan complexe



$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est un repère orthonormé

$\rho$  est la longueur du segment  $[OM]$

$\theta$  est l'angle orienté entre l'axe réel et la droite  $(OM)$

Le point  $M$  est l'**image** du nombre complexe  $z$

$z$  est appelé **affixe** du point  $M$

## Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

## Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

## Forme polaire

$$z = \rho[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

## Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

## Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

## Forme polaire

$$z = \rho[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

## Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

## Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

## Forme polaire

$$z = \rho[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

## Forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\theta}$$



## Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

## Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

## Forme polaire

$$z = \rho[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

## Forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\theta}$$

## Conjugué d'un nombre complexe

$$\begin{aligned}\bar{z} &= a - ib \\ &= \rho[\cos(\theta) - i\sin(\theta)] \\ &= \rho e^{-i\theta}\end{aligned}$$

## Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

## Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

## Forme polaire

$$z = \rho[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

## Forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\theta}$$

## Conjugué d'un nombre complexe

$$\begin{aligned}\bar{z} &= a - ib \\ &= \rho[\cos(\theta) - i\sin(\theta)] \\ &= \rho e^{-i\theta}\end{aligned}$$

## Combinaison linéaire

$$Z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 \dots$$

$Z$  est un nombre complexe résultant de la somme pondérée de nombres complexes

## Exercice I - Nombres complexes

- ❶ Exprimer  $\rho$  et  $\theta$  en fonction de  $a$  et  $b$
- ❷ Calculer  $z\bar{z}$
- ❸ Soit  $z_1 = 2 + 5i$  sous forme cartésienne. Exprimer  $z_1$  sous forme polaire puis exponentielle
- ❹ Soit  $z_2 = 10e^{i\frac{\pi}{4}}$  sous forme exponentielle. Exprimer  $z_2$  sous forme polaire puis cartésienne.
- ❺ Soit deux complexes  $z_3$  et  $z_4$ , le premier réel pur de module 4 et le second imaginaire pur de module 5. Exprimer  $z_3$  et  $z_4$  sous forme cartésienne puis exponentielle.
- ❻ Exprimer les conjugués de tous ces nombres complexes sous forme cartésienne et exponentielle.
- ❼ Placer tous ces nombres dans la plan complexe.
- ❽ Calculer  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_3 z_4$  et  $\frac{z_1}{z_4}$  en utilisant la notation (cartésienne ou exponentielle) la plus appropriée.

## Exercice II - Nombres complexes avec Python

- 1 Définir les complexes  $z_1$  (cartésienne),  $z_2$  (exponentielle),  $z_3$  et  $z_4$
- 2 En utilisant la commande *help*, lire l'aide des fonctions *real*, *imag*, *abs*, *angle* et *conj*
- 3 En déduire le module et l'argument (la phase) de  $z_1$ . Vérifier le résultat.
- 4 En déduire les parties réelles et imaginaires de  $z_2$ . Vérifier le résultat.
- 5 Vérifiez les résultats obtenus aux questions six et huit de l'exercice précédent.
- 6 Tracer ces nombres dans le même plan complexe en utilisant l'aide de la fonction *plot*

### Exercice III - Formule d'Euler

- ① En partant de la formule d'Euler, montrer que  $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$   
et  $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- ② En utilisant les résultats précédents, exprimer  $\cos^2(\theta)$  en fonction de  $\cos(2\theta)$
- ③ De même, exprimer  $\sin^2(\theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$