M1 IEAP - BTI/FH/IEMH
FIEA11CM : Analyse et Traitement du Signal

Flavy ROSEREN
Martin EGIZIANO
Frank BULOUP

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Première Partie

Généralisation

L'exemple de l'exercice précédent peut se généraliser : presque tout **signal continu** périodique peut être synthétisé par sommation de sinus et/ou de cosinus. C'est ce que l'on appelle la Série de Fourier. Un signal $s(t)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$s(t) = S(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho(k) cos[2\pi k f_0 t + \phi(k)]$$

Généralisation

L'exemple de l'exercice précédent peut se généraliser : presque tout **signal continu** périodique peut être synthétisé par sommation de sinus et/ou de cosinus. C'est ce que l'on appelle la Série de Fourier. Un signal $s(t)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$s(t) = S(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho(k) cos[2\pi k f_0 t + \phi(k)]$$

Remarques

- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ sont respectivement des amplitudes et des phases

Généralisation

L'exemple de l'exercice précédent peut se généraliser : presque tout **signal continu** périodique peut être synthétisé par sommation de sinus et/ou de cosinus. C'est ce que l'on appelle la Série de Fourier.
Un signal $s(t)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$s(t) = S(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho(k) cos[2\pi k f_0 t + \phi(k)]$$

Remarques

- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ sont respectivement des amplitudes et des phases
- $S(0)$ est la valeur moyenne, c'est toujours un réel pur

Généralisation

L'exemple de l'exercice précédent peut se généraliser : presque tout **signal continu** périodique peut être synthétisé par sommation de sinus et/ou de cosinus. C'est ce que l'on appelle la Série de Fourier. Un signal $s(t)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$s(t) = S(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho(k) cos[2\pi k f_0 t + \phi(k)]$$

Remarques

- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ sont respectivement des amplitudes et des phases
- $S(0)$ est la valeur moyenne, c'est toujours un réel pur
- f_0 est la fréquence fondamentale

Généralisation

L'exemple de l'exercice précédent peut se généraliser : presque tout **signal continu** périodique peut être synthétisé par sommation de sinus et/ou de cosinus. C'est ce que l'on appelle la Série de Fourier.

Un signal $s(t)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$s(t) = S(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\rho(k) cos[2\pi k f_0 t + \phi(k)]$$

Remarques

- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ sont respectivement des amplitudes et des phases
- $S(0)$ est la valeur moyenne, c'est toujours un réel pur
- f_0 est la fréquence fondamentale
- Les fréquences des cosinus sont des multiples entiers de f_0. Ce sont les harmoniques.

Mais comment obtenir $\rho(k)$ et $\phi(k)$?

Par le calcul du nombre complexe $S(k)$ suivant :

$$S(k) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-2i\pi k f_0 t}dt \Rightarrow \begin{cases} \rho(k) = |S(k)| \\ \phi(k) = Arg[S(k)] \end{cases}$$

Mais comment obtenir $\rho(k)$ et $\phi(k)$?

Par le calcul du nombre complexe $S(k)$ suivant :

$$S(k) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-2i\pi k f_0 t}dt \Rightarrow \begin{cases} \rho(k) = |S(k)| \\ \phi(k) = Arg[S(k)] \end{cases}$$

Série de Fourier du signal carré

Le calcul de $S(k)$ sur le signal carré précédent nous donnerait :

$$S(k) = \begin{cases} \frac{2}{k\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ pour toutes les valeurs de } k \text{ impaires} \\ 0 \text{ pour toutes les valeurs de } k \text{ paires} \end{cases}$$

Remarques

- La synthèse d'un signal périodique par une série de Fourier nécessite un nombre infini d'harmoniques, c.a.d. que le signal est composé de bien plus hautes fréquences que la fondamentale.

Remarques

- La synthèse d'un signal périodique par une série de Fourier nécessite un nombre infini d'harmoniques, c.a.d. que le signal est composé de bien plus hautes fréquences que la fondamentale.
- En pratique on se limite a un nombre fini de termes. Le signal obtenu est alors une approximation du signal périodique initial.

Remarques

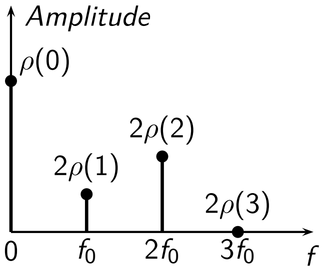
- La synthèse d'un signal périodique par une série de Fourier nécessite un nombre infini d'harmoniques, c.a.d. que le signal est composé de bien plus hautes fréquences que la fondamentale.
- En pratique on se limite a un nombre fini de termes. Le signal obtenu est alors une approximation du signal périodique initial.
- Si le signal initial présente des points de discontinuités, un phénomène oscillatoire autour de ces points vient compromettre la convergence : en ces points, la série de Fourier ne converge pas vers le signal original. C'est ce que l'on nomme **phénomène de Gibbs**.

Représentation fréquentielle et spectres monolatéraux

Le développement d'un signal en série de Fourier donne donc une information sur sa composition en fréquence : le signal est une somme de cosinusoïdes dont les amplitudes, les phases et les fréquences sont bien définies. Il est donc possible de le caractériser par un ensemble de triplets $[2\rho(k), \phi(k), kf_0]$ lorsque k est différent de zéro et par le triplet $[\rho(0), \phi(0), 0]$ pour la fréquence nulle, $\phi(0)$ valant 0 ou π.

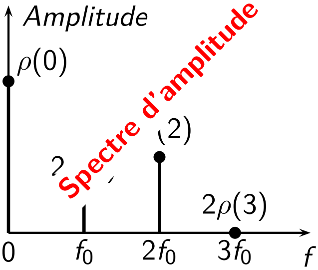
Représentation fréquentielle et spectres monolatéraux

Le développement d'un signal en série de Fourier donne donc une information sur sa composition en fréquence : le signal est une somme de cosinusoïdes dont les amplitudes, les phases et les fréquences sont bien définies. Il est donc possible de le caractériser par un ensemble de triplets $[2\rho(k), \phi(k), kf_0]$ lorsque k est différent de zéro et par le triplet $[\rho(0), \phi(0), 0]$ pour la fréquence nulle, $\phi(0)$ valant 0 ou π.



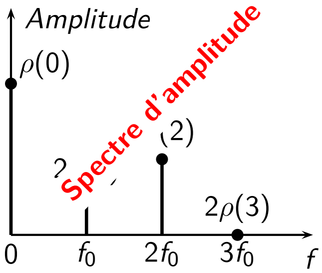
Représentation fréquentielle et spectres monolatéraux

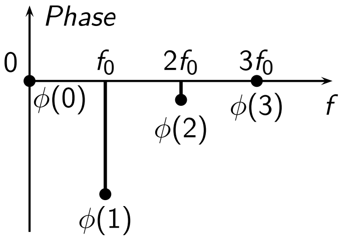
Le développement d'un signal en série de Fourier donne donc une information sur sa composition en fréquence : le signal est une somme de cosinusoïdes dont les amplitudes, les phases et les fréquences sont bien définies. Il est donc possible de le caractériser par un ensemble de triplets $[2\rho(k), \phi(k), kf_0]$ lorsque k est différent de zéro et par le triplet $[\rho(0), \phi(0), 0]$ pour la fréquence nulle, $\phi(0)$ valant 0 ou π.



Représentation fréquentielle et spectres monolatéraux

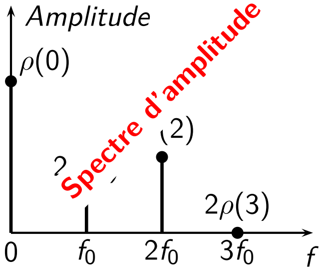
Le développement d'un signal en série de Fourier donne donc une information sur sa composition en fréquence : le signal est une somme de cosinusoïdes dont les amplitudes, les phases et les fréquences sont bien définies. Il est donc possible de le caractériser par un ensemble de triplets $[2\rho(k), \phi(k), kf_0]$ lorsque k est différent de zéro et par le triplet $[\rho(0), \phi(0), 0]$ pour la fréquence nulle, $\phi(0)$ valant 0 ou π.

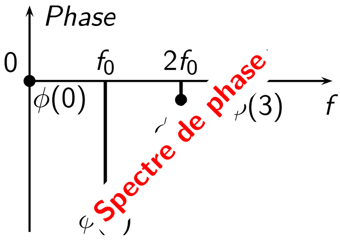




Représentation fréquentielle et spectres monolatéraux

Le développement d'un signal en série de Fourier donne donc une information sur sa composition en fréquence : le signal est une somme de cosinusoïdes dont les amplitudes, les phases et les fréquences sont bien définies. Il est donc possible de le caractériser par un ensemble de triplets $[2\rho(k), \phi(k), kf_0]$ lorsque k est différent de zéro et par le triplet $[\rho(0), \phi(0), 0]$ pour la fréquence nulle, $\phi(0)$ valant 0 ou π.





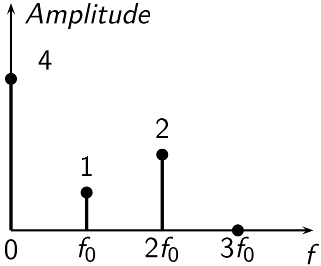
Exercice I - Représentation spectrale monolatérale

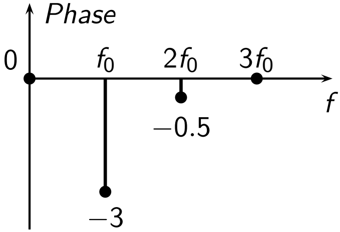
Représenter les spectres monolatéraux des signaux suivants :

- $s_1(t) = 3$
- $s_2(t) = 6sin(2\pi t)$
- $s_3(t) = 1 + 2cos(10\pi t) + 4cos(20\pi t)$
- $s_4(t) = cos(100\pi t) + cos^2(100\pi t)$

Exercice II - Représentation spectrale monolatérale

- Représenter les spectres monolatéraux d'amplitude et de phase du signal carré
- Écrire le signal temporel associé aux spectres monolatéraux :





Exercice III - Série de Fourier

Retrouver le résultat de l'exercice précédent par le calcul de $S(k)$ sur le signal suivant :