M1 IEAP - BTI/FH/IEMH
pFIEA02CM : Analyse et Traitement du Signal

Flavy ROSEREN
Martin EGIZIANO
Frank BULOUP

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Pourquoi des rappels sur les complexes ?

Les complexes sont utilisés dans pratiquement toutes les sciences et **tout particulièrement en traitement du signal** : représentation fréquentielles des signaux et des systèmes

Pourquoi des rappels sur les complexes ?

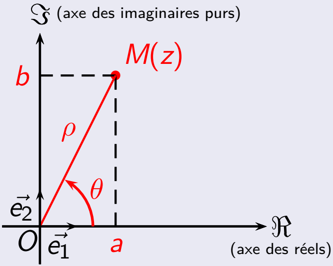
Les complexes sont utilisés dans pratiquement toutes les sciences et **tout particulièrement en traitement du signal** : représentation fréquentielles des signaux et des systèmes

Pourquoi les complexes ?

- Résoudre certains problèmes insolubles autrement
- Faciliter les calculs

Jérôme CARDAN (1501-1576)

Le plan complexe



$(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère orthonormé

ρ est la longueur du segment $[OM]$

θ est l'angle orienté entre l'axe réel et la droite (OM)

Le point M est l'**image** du nombre complexe z

z est appelé **affixe** du point M

Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

Forme polaire

$$z = \rho[cos(\theta) + isin(\theta)]$$

Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

Forme polaire

$$z = \rho[cos(\theta) + isin(\theta)]$$

Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

Forme polaire

$$z = \rho[cos(\theta) + isin(\theta)]$$

Forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

Forme polaire

$$z = \rho[cos(\theta) + isin(\theta)]$$

Forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Conjugué d'un nombre complexe

$$\begin{aligned} \bar{z} &= a - ib \\ &= \rho[cos(\theta) - isin(\theta)] \\ &= \rho e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Forme cartésienne

$$z = a + ib, \quad i^2 = -1$$

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

Forme polaire

$$z = \rho[cos(\theta) + isin(\theta)]$$

Forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Conjugué d'un nombre complexe

$$\begin{aligned} \bar{z} &= a - ib \\ &= \rho[cos(\theta) - isin(\theta)] \\ &= \rho e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Combinaison linéaire

$$Z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 \ldots$$

Z est un nombre complexe résultant de la somme pondérée de nombres complexes

Exercice I - Nombres complexes

1. Exprimer ρ et θ en fonction de a et b
2. Calculer $z\bar{z}$
3. Soit $z_1 = 2+5i$ sous forme cartésienne. Exprimer z_1 sous forme polaire puis exponentielle
4. Soit $z_2 = 10e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme exponentielle. Exprimer z_2 sous forme polaire puis cartésienne.
5. Soit deux complexes z_3 et z_4, le premier réel pur de module 4 et le second imaginaire pur de module 5. Exprimer z_3 et z_4 sous forme cartésienne puis exponentielle.
6. Exprimer les conjugués de tous ces nombres complexes sous forme cartésienne et exponentielle.
7. Placer tous ces nombres dans la plan complexe.
8. Calculer $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_3 z_4$ et $\frac{z_1}{z_4}$ en utilisant la notation (cartésienne ou exponentielle) la plus appropriée.

Exercice II - Nombres complexes avec Python

1. Définir les complexes z_1 (cartésienne), z_2 (exponentielle), z_3 et z_4
2. En utilisant la commande *help*, lire l'aide des fonctions *real*, *imag*, *abs*, *angle* et *conj*
3. En déduire le module et l'argument (la phase) de z_1. Vérifier le résultat.
4. En déduire les parties réelles et imaginaires de z_2. Vérifier le résultat.
5. Vérifiez les résultats obtenus aux questions six et huit de l'exercice précédent.
6. Tracer ces nombres dans le même plan complexe en utilisant l'aide de la fonction *plot*

Exercice III - Formule d'Euler

1. En partant de la formule d'Euler, montrer que $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
2. En utilisant les résultats précédents, exprimer $cos^2(\theta)$ en fonction de $cos(2\theta)$
3. De même, exprimer $sin^2(\theta)$ en fonction de $cos(\theta)$ et $sin(\theta)$