M1 IEAP - BTI/FH/IEMH
pFIEA02CM : Analyse et Traitement du Signal

Flavy ROSEREN
Martin EGIZIANO
Frank BULOUP

Aix Marseille Université
Institut des Sciences du Mouvement

Première Partie

1. Signal discret - Aspect fréquentiel
   - Représentation fréquentielle des signaux
   - Transformées de Fourier Discrète et Rapide (TFD, TFR)
   - Transformée en Z

Mais dans la majorité des cas pratiques :

- on enregistre des phénomènes transitoires, non périodique
- les signaux sont discrets, sur ordinateur, issus d'une acquisition de données)

À quoi peut donc bien servir la série de Fourier ? => TFD

Mais dans la majorité des cas pratiques :

- on enregistre des phénomènes transitoires, non périodique
- les signaux sont discrets, sur ordinateur, issus d'une acquisition de données)

À quoi peut donc bien servir la série de Fourier ? => TFD

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- La période T_0 correspond à la durée de l'enregistrement plus un pas d'échantillonnage : NT_e (T_e étant la période ou le pas d'échantillonnage)
- La sommation n'est plus continue mais discrète sur tous les échantillons acquis
- La variable t est discrétisée et se transforme en nT_e
- dt correspond au pas d'échantillonnage T_e

On obtient alors la Transformée de Fourier Discrète :

$$S(k) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) e^{-2i\pi k \frac{1}{NT_e} nT_e} T_e$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

On obtient alors la Transformée de Fourier Discrète :

$$S(k) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) e^{-2i\pi k \frac{1}{NT_e} nT_e} T_e$$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDI)

Il existe une transformée inverse

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Remarques

- Dans la série de Fourier, les fréquences sont des multiples de f_0. Dans la TFD les fréquences sont des multiples de $\frac{F_e}{N}$
- On dit que $\frac{F_e}{N}$ est la résolution fréquentielle de la TFD
- Il existe une méthode rapide de calcul des TFD : l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)
- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ se calculent de la même manière que pour la série de Fourier

Remarques

- Dans la série de Fourier, les fréquences sont des multiples de f_0. Dans la TFD les fréquences sont des multiples de $\frac{F_e}{N}$
- On dit que $\frac{F_e}{N}$ est la résolution fréquentielle de la TFD
- Il existe une méthode rapide de calcul des TFD : l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)
- $\rho(k)$ et $\phi(k)$ se calculent de la même manière que pour la série de Fourier

Autres définitions

Ces définitions des TFD ne sont pas uniques. Le facteur $\frac{1}{N}$ peut se trouver dans la transformée inverse

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \quad s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{2i\pi \frac{kn}{N}}$$

Exercice FFT Python

Représenter les spectres des signaux suivants en utilisant les commandes *fft* et *stem* de Python :

- $s_1(t) = 3$
- $s_2(t) = 6sin(2\pi t)$
- $s_3(t) = 1 + 2cos(10\pi t) + 4cos(20\pi t + \frac{\pi}{6})$
- $s_4(t) = cos(100\pi t) + cos^2(100\pi t)$

Exercice FFT Python

Représenter les spectres des signaux suivants en utilisant les commandes *fft* et *stem* de Python :

- $s_1(t) = 3$
- $s_2(t) = 6sin(2\pi t)$
- $s_3(t) = 1 + 2cos(10\pi t) + 4cos(20\pi t + \frac{\pi}{6})$
- $s_4(t) = cos(100\pi t) + cos^2(100\pi t)$

Remarque importante

La command *fft* de Python donne un résultat qui fait intervenir le spectre bilatéral où les fréquences négatives doivent être prises en compte.

Exercice TFD

1. Exprimer $\overline{S(k)}$ en fonction de $S(-k)$ lorsque $s(t)$ est un signal réel
2. En déduire les relations liant $\rho(k)$ à $\rho(-k)$ et $\phi(k)$ à $\phi(-k)$
3. Si on a acquis un signal à la fréquence F_e, quelle est la fréquence maximale observable ?
4. Dans les expressions précédentes de la TFD, quelle doit-être la fréquence maximale ?
5. Conclusions ?

Exercice TFD

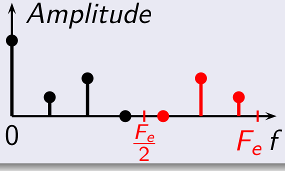
1. Exprimer $\overline{S(k)}$ en fonction de $S(-k)$ lorsque $s(t)$ est un signal réel
2. En déduire les relations liant $\rho(k)$ à $\rho(-k)$ et $\phi(k)$ à $\phi(-k)$
3. Si on a acquis un signal à la fréquence F_e, quelle est la fréquence maximale observable ?
4. Dans les expressions précédentes de la TFD, quelle doit-être la fréquence maximale ?
5. Conclusions ?

Représentation bilatérale de la TFD

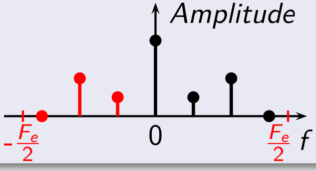
$S(k)$ possède une certaine symétrie par rapport à l'origine et ne peut contenir d'énergie à des fréquences supérieures à $\frac{F_e}{2}$. Une représentation physiquement cohérente correspond donc au **spectre bilatéral** : le signal comporte de l'énergie entre $-\frac{F_e}{2}$ et $\frac{F_e}{2}$.

Spectre de module bilatéral - Fonction paire

Ce que donne la TFD

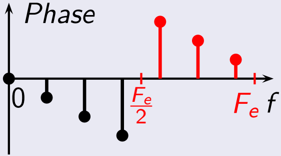


Ce que l'on a en réalité

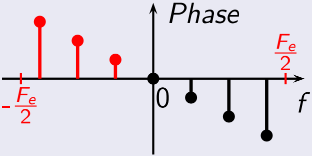


Spectre de phase bilatéral - Fonction impaire

Ce que donne la TFD



Ce que l'on a en réalité



Exercices représentation spectrale bilatérale

Représenter les spectres bilatéraux des signaux suivants :

- $s_1(t) = 3$
- $s_2(t) = 6sin(2\pi t)$
- $s_3(t) = 1 + 2cos(10\pi t) + 4cos(20\pi t + \frac{\pi}{6})$
- $s_4(t) = cos(100\pi t) + cos^2(100\pi t)$

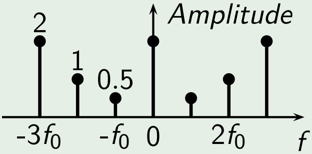
Refaire cet exercice en utilisant Python

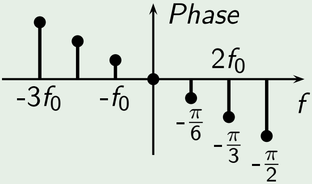
Remarque importante

La commande *fftshift* de Python permet de recentrer le spectre. L'affichage peut alors être fait correctement en bilatéral.

Exercice représentation spectrale bilatérale

Donner l'expression temporelle du signal dont les représentations spectrales sont les suivantes :





Exercice TFR (FFT) sur Python

- Lire le documentation des fonctions fft et ifft de Python
- Charger le fichier *mi2_bute_ros.wav*
- Calculer le module et la phase de la transformée de Fourier du signal
- Définir le vecteur fréquence associé à ce signal
- Lire les documentations de fftshift et unwrap
- Tracer les spectres bilatéraux de ce signal. Quelles informations en tirez-vous ?
- Faire de même avec les données fournies

Transformée en Z

En posant $z = e^{2i\pi\frac{k}{N}}$, on obtient la transformée en Z

$$S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) z^{-n}$$

Exercice sur le théorème du retard

Calculer les TZ des signaux suivants :

- $x(n-1)$
- $x(n-2)$
- $x(n-3)$
- Généraliser