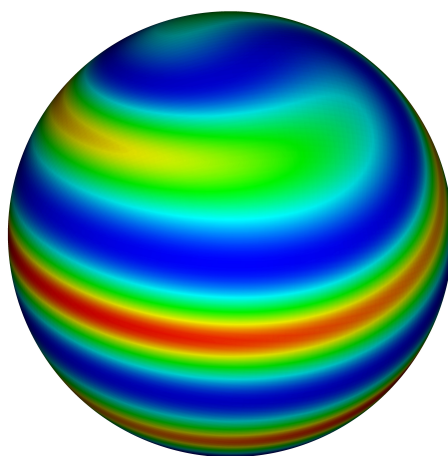

Titre

Sous-titre



Résumé :

Mots clefs : cailloux, galet de référence

Remerciements

Table des matières

Introduction	1
1 Première partie	2
1.1 Première sous partie	2
2 Quelques formules	2
2.1 discretisation	2
2.2 équation implicite	2
3 Modèles	3
3.1 Modèle 1	3
3.1.1 Description	3
3.1.2 Données initiales et constantes	3
3.1.3 Équations	3
3.1.4 Équations discrétisées	4
3.2 Modèle 2	4
3.2.1 Description	4
3.2.2 Données initiales et constantes	4
3.2.3 Équations	5
3.2.4 Équations discrétisées	5
Conclusion	6
A Première annexe	7

Introduction

1 Première partie

1.1 Première sous partie

2 Quelques formules

Remarque : $\frac{\partial F}{\partial x}$ sera noté $\partial_x F$

Équation de la chaleur avec terme de production :

$$\rho C_p \partial_t T = \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}}(T)) + P \quad (2.1)$$

À 1d ça devient

$$\rho C_p \partial_t T = \partial_x(\lambda \partial_x T) + P \quad (2.2)$$

À 3D en symétrie sphérique ça devient :

$$\rho C_p \partial_{t'} T = \frac{1}{r'^2} \partial_{r'}(\lambda r'^2 \partial_{r'} T) + P \quad (2.3)$$

En unités adimensionnées 3D en symétrie sphérique ça devient :

$$r = r'/R_T \quad (2.4)$$

$$t = t' \frac{\lambda}{\rho C_p R_T^2} \quad (2.5)$$

$$p = \frac{P R_T^2}{\lambda} \quad (2.6)$$

$$\partial_t T = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r T) + p \quad (2.7)$$

2.1 discretisation

On note $T(t, r_i) : T_i^t$

$$\partial_t T \rightarrow \frac{T_r^{t+1} - T_r^t}{\Delta t} \quad (2.8)$$

$$\partial_r T \rightarrow \frac{T_{i+1/2}^t - T_{i-1/2}^t}{\Delta r} \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r T) \rightarrow \frac{1}{r_i^2 \Delta r} \left[r_{i+1/2}^2 \frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta r} + r_{i-1/2}^2 \frac{T_{i-1}^t - T_i^t}{\Delta r} \right] \quad (2.10)$$

2.2 équation implicite

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{t+1} - T_i^t}{\Delta t} &= \frac{1}{r_i^2 \Delta r} \left[r_{i+1/2}^2 \frac{T_{i+1}^{t+1} - T_i^{t+1}}{\Delta r} + r_{i-1/2}^2 \frac{T_{i-1}^{t+1} - T_i^{t+1}}{\Delta r} \right] + p_i^t \\ T_i^{t+1} + \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r^2} \left[r_{i+1/2}^2 (T_i^{t+1} - T_{i+1}^{t+1}) + r_{i-1/2}^2 (T_i^{t+1} - T_{i-1}^{t+1}) \right] &= T_i^t + \Delta t p_i^t \end{aligned} \quad (2.11)$$

On a ainsi l'équation matricielle implicite suivante : $MT^{t+1} = T^t$

Où : $M = \left[Id + \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r^2} d1 + \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r^2} d2 \right]$

$$d1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$\rho L \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho L \frac{d\phi}{dT} \frac{\partial T}{\partial t}$ avec ϕ qui est une marche, on peut l'approximer par une fonction un peu plus dérivable
 par ex : $\phi \simeq \arctan(T - T_{fusion})$
 $\rho C p_{eff} = \rho C p(\phi) + \rho L \frac{d\phi}{dT}$
 $R_T = at^b, T = T(t, r/R_T(t))$
 $\Rightarrow \frac{\partial T(t, r/R_T(t))}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \frac{r}{R_T(t)}}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \frac{r}{R_T(t)}}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial r}$

3 Modèles

Note pour tous les modèles suivants on supposera que la Terre est composée d'un mélange homogène de $\phi = 18\%$ de métal et 82% de silicates. Et que les propriétés de ces matériaux ne changent pas avec la température ou le changement d'état.

Les constantes respectives et moyennes du mélange sont les suivantes :

Grandeur	moyenne	metal	silicate	unité
Densité (ρ)	4028	7800	3200	kg m^{-3}
Capacité calorifique (C_p)	1065	450	1200	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$
Conductivité	11.48	50	3	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
Chaleur latente de fusion		250	500	kJ kg^{-1}
Température de fusion		1261	1408	K

Pour la suite ρ désignera une valeur moyenne et $\rho_{matériau}$ la valeur respective d'un des matériaux.

3.1 Modèle 1

Fichier : sim1.py

3.1.1 Description

On fait une première simulation la plus simple possible. Hypothèses :

1. Rayon de la Terre constant
2. Chauffage causé par la désintégration du ^{26}Al et par le rayonnement de corps noir.

3.1.2 Données initiales et constantes

Rayon de la Terre	500 km
Température initiale	300 K
Température de la nébuleuse	300 K
Constante de Stephan-Boltzman	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Demi-vie du ^{26}Al	0.74 My
Abondance du ^{26}Al	$1.5 \times 10^{-7} \text{ W kg}^{-1}$

3.1.3 Équations

On considère les variables adimensionnées suivantes :

$$t = \frac{t'}{\tau_{1/2}^{Al}}, \quad r = r' \sqrt{\frac{\rho C_p}{k_T \tau_{1/2}}} \quad \text{et} \quad T = \frac{T'}{T_{neb}} \quad (3.1)$$

Il en résulte l'équation suivante :

$$\frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \partial_t T = \frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T) + P + S (+ Q_L) \quad (3.2)$$

Avec :

$$P = \rho H_0 e^{-\ln(2)t} \quad (3.3)$$

$$S = \frac{\sigma T_{neb}^4}{\Delta r} (1 - T^4) \quad \text{à la surface uniquement} \quad (3.4)$$

Q_L représente la chaleur "perdue" lors du changement de phase de chaque matériau. Ce changement de phase est géré en dehors de l'équation de la chaleur. On note ϕ_{met} la proportion solide/liquide du métal et ϕ_{sil}

pour le silicate ($\phi_{sil} = 0 \Rightarrow$ solide, $\phi_{sil} = 1 \Rightarrow$ liquide). On detecte le changement de phase solide \rightarrow liquide du métal par la condition $T' > T_{fus,met}$ et $\phi_{met} < 1$ on "échange" alors de la température contre du changement de phase de sorte à obtenir soit $T' = T_{fus,met}$ soit $\phi_{met} = 1$. On fait de même avec la transition inverse et avec le silicate.

Exemples : on part de $T' > T_{fus,met}$, $\phi_{met} < 1$

!! Attention T_i , T_f et T_{afus} sont des variables adimensionnées contrairement à T' et T_{neb} !!

Cas 1 on atteint $\phi_{met} = 1$. Calculons la température finale :

$$T_f = T_i + (\phi_{met} - 1) \frac{\phi L_{met}}{T_{neb} C_{p,met}} \quad (3.5)$$

Cas 2 on atteint $T' = T_{fus,met}$. Calculons le ϕ_{met} final :

$$\phi_f = \phi_i + (T_i - T_{afus,met}) \frac{T_{neb} C_{p,met}}{\phi L_{met}} \quad (3.6)$$

3.1.4 Équations discrétisées

On pose $c_0 = \frac{\Delta t \tau_{1/2}}{\rho C_p T_{neb}}$

On a l'équation matricielle suivante :

$$MT^{t+1} = T^t + c_0(P + S) \quad (3.7)$$

Avec la matrice M calculée plus tôt : $M = \left[Id + \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r^2} \frac{r_{i+1/2}^2}{r_i^2} d1 + \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r^2} \frac{r_{i-1/2}^2}{r_i^2} d2 \right]$

$$d1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.2 Modèle 2

Fichier : sim2.py

3.2.1 Description

Pour cette deuxième simulation on va prendre en compte l'accrétion qui change le rayon de la Terre au cours du temps

Hypothèses :

1. Rayon de la Terre évoluant en $\dot{R} \simeq R^\beta$
2. Chauffage causé par la désintégration du ^{26}Al et par le rayonnement de corps noir.

3.2.2 Données initiales et constantes

Rayon initial de la Terre	5 km
Température initiale	300 K
Température de la nébuleuse	300 K
Constante de Stephan-Boltzman	$5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Demi-vie du ^{26}Al	0.74 My
Abondance du ^{26}Al	$1.5 \times 10^{-7} \text{ Wkg} - 1$

3.2.3 Équations

On considère les variables adimensionnées suivantes :

$$t = \frac{t'}{\tau_{1/2}} \quad , \quad r = \frac{r'}{R(t)} \quad \text{et} \quad T = \frac{T'}{T_{neb}} \quad (3.9)$$

$$t = \frac{t'}{\tau_{1/2}^{Al}} \quad , \quad r = r' \sqrt{\frac{\rho C_p}{k_T \tau_{1/2}}} \quad \text{et} \quad T = \frac{T'}{T_{neb}} \quad (3.10)$$

Il en résulte l'équation suivante :

$$\frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \partial_t T = \frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T) + P + S (+ Q_L) \quad (3.11)$$

Avec :

$$P = \rho H_0 e^{-\ln(2)t} \quad (3.12)$$

$$S = \frac{\sigma T_{neb}^4}{\Delta r} (1 - T^4) \quad \text{à la surface uniquement} \quad (3.13)$$

Q_L représente la chaleur "perdue" lors du changement de phase de chaque matériau. Ce changement de phase est géré en dehors de l'équation de la chaleur. On note ϕ_{met} la proportion solide/liquide du métal et ϕ_{sil} pour le silicate ($\phi_{sil} = 0 \Rightarrow$ solide, $\phi_{sil} = 1 \Rightarrow$ liquide). On détecte le changement de phase solide \rightarrow liquide du métal par la condition $T' > T_{fus,met}$ et $\phi_{met} < 1$ on "échange" alors de la température contre du changement de phase de sorte à obtenir soit $T' = T_{fus,met}$ soit $\phi_{met} = 1$. On fait de même avec la transition inverse et avec le silicate.

Exemples : on part de $T' > T_{fus,met}$, $\phi_{met} < 1$

!! Attention T_i , T_f et T_{afus} sont des variables adimensionnées contrairement à T' et T_{neb} !!

Cas 1 on atteint $\phi_{met} = 1$. Calculons la température finale :

$$T_f = T_i + (\phi_{met} - 1) \frac{\phi L_{met}}{T_{neb} C_{p,met}} \quad (3.14)$$

Cas 2 on atteint $T' = T_{fus,met}$. Calculons le ϕ_{met} final :

$$\phi_f = \phi_i + (T_i - T_{afus,met}) \frac{T_{neb} C_{p,met}}{\phi L_{met}} \quad (3.15)$$

3.2.4 Équations discrétisées

$$\rho C_p (\partial_{t'} T' - r \frac{\dot{R}}{R} \partial_r T') = \frac{1}{r^2} \partial_r (k_T \frac{r^2}{R^2} \partial_r T') + P \quad (3.16)$$

$$\frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \partial_t T = \frac{1}{r^2} \partial_r (T_{neb} k_T \frac{r^2}{R^2} \partial_r T) + \rho C_p T_{neb} r \frac{\dot{R}}{R} \partial_r T + P \quad (3.17)$$

$$T^{t+1} - T^t = \frac{\tau_{1/2} k_T \Delta t}{\rho C_p} \frac{\Delta t}{r^2} \partial_r \left(\frac{r^2}{R^2} \partial_r T \right) + r \tau_{1/2} \Delta t \frac{\dot{R}}{R} \partial_r T + \frac{\tau_{1/2} \Delta t}{\rho C_p T_{neb}} P \quad (3.18)$$

$$T_i^{t+1} + \frac{\tau_{1/2} k_T \Delta t}{\rho C \Delta r^2 R^2 r_i^2} \left[r_{i+1/2}^2 (T_i^{t+1} - T_{i+1}^{t+1}) + r_{i-1/2}^2 (T_i^{t+1} - T_{i-1}^{t+1}) \right] + \tau_{1/2} \Delta t \frac{r \dot{R}}{2 \Delta r R} [T_{i-1}^{t+1} - T_{i+1}^{t+1}] = T_r^t + \frac{\tau_{1/2} \Delta t}{\rho C T_{neb}} P_i^t \quad (3.19)$$

On a l'équation matricielle suivante :

$$\left[Id + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 \right] T^{t+1} = T^t + c_0 P \quad (3.20)$$

$$\text{Avec : } c_1 = \frac{\tau_{1/2} k_T \Delta t}{\rho C} \frac{r_{i+1/2}^2}{\Delta r^2 R^2 r_i^2} \quad , \quad c_2 = \frac{\tau_{1/2} k_T \Delta t}{\rho C} \frac{r_{i-1/2}^2}{\Delta r^2 R^2 r_i^2} \quad , \quad c_3 = \tau_{1/2} \Delta t \frac{r \dot{R}}{2 \Delta r R} \quad , \quad c_0 = \frac{\Delta t \tau_{1/2}}{\rho C_p T_{neb}}$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad d_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Conclusion

A Première annexe