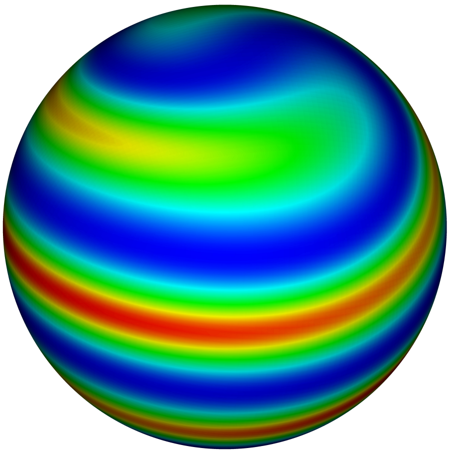
Master Sciences de la matière
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1

Projet de Géophysique
BUNEL Félix et VERGNET Hadrien
M2 Physique 2015-2016

Titre

Sous-titre



Résumé :

Mots clefs : cailloux, galet de référence

Remerciements

Table des matières

Introduction

1 Premiere partie

1.1 Première sous partie

2 Quelques formules et notations

On notera $\partial_x F$ la dérivée partielle telle que $\frac{\partial F}{\partial x}$. On notera T_i^t la valeur de T à t en r_i, les r_i appartenant à notre espace discrétisé.

Équation de la chaleur avec terme de production :

$$\rho C_p \partial_t T = \mathrm{div}(k_T \vec{\mathrm{grad}}(T)) + P \tag{2.1}$$

À 1D cela équivaut à :

$$\rho C_p \partial_t T = \partial_x(k_T \partial_x T) + P \tag{2.2}$$

À 3D en supposant une symétrie sphérique on a :

$$\rho C_p \partial_{t'} T' = \frac{1}{r'^2} \partial_{r'}(k_T r'^2 \partial_{r'} T') + P \tag{2.3}$$

On utilisera les formules de discrétisation suivantes :

$$\partial_t T \to \frac{T_r^{t+1} - T_r^{t+1}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

$$\partial_r T \to \frac{T_{i+1/2}^t - T_{i-1/2}^t}{\Delta r} \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r T) \to \frac{1}{r_i^2 \Delta r}\left[r_{i+1/2}^2 \frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta r} + r_{i-1/2}^2 \frac{T_{i-1}^t - T_i^t}{\Delta r}\right] \tag{2.6}$$

3 Modèles

Note pour tous les modèles suivants on supposera que la Terre est composée d'un mélange homogène de ϕ =18% de métal et de 82% de silicates. Et que les propriétés de ces matériaux ne changent pas avec leur température ou leur changement d'état.

Les constantes respectives et moyennes du mélange sont les suivantes :

Grandeur	moyenne	metal	silicate	unité
Densité (ρ)	4028	7800	3200	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Capacité calorifique (C_p)	939	450	1200	$\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$
Conductivité (k_T)	11.48	50	3	$\mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-1}}$
Chaleur latente de fusion	413	250	500	$\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$
Température de fusion		1261	1408	K

Pour la suite ρ désignera une valeur moyenne et $\rho_{materiau}$ la valeur respective d'un des matériaux.

On utilisera de plus les constantes suivantes :

Température initiale	300 K
Température de la nébuleuse	300 K
Constante de Stephan-Boltzman	5.67×10^{-8} $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$
Demi-vie du ^{26}Al	0.717 My
Abondance du ^{26}Al	1.5×10^{-7} Wkg − 1

3.1 Modèle 1

Fichier : sim1.py

3.1.1 Description

On fait une première simulation la plus simple possible. Hypothèses :

1. Rayon de la Terre constant
2. Chauffage causé par la désintégration du ^{26}Al et par le rayonnement de corps noir à la surface.

3.1.2 Équations

On considère les variables adimentionnées suivantes :

$$t = \frac{t'}{\tau_{1/2}^{Al}} \quad , \quad r = r'\sqrt{\frac{\rho C_p}{k_T \tau_{1/2}}} \quad \text{et} \quad T = \frac{T'}{T_{neb}} \tag{3.1}$$

Il en résulte l'équation suivante :

$$\frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \partial_t T = \frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T) + P + (S + Q_L) \tag{3.2}$$

Avec :

$$P = \rho H_0 e^{-ln(2)t} \quad \text{la production de chaleur par radioactivité} \tag{3.3}$$

Les termes S et Q_L sont traités séparément de la résolution de l'équation principale, ils représentent :

$$S = \frac{\sigma T_{neb}^4}{\Delta r}(1 - T^4) \quad \text{le rayonnement de corps noir (à la surface uniquement)} \tag{3.4}$$

Q_L représente la chaleur "perdue" lors du changement de phase de chaque matériau. Ce changement de phase est géré en dehors de l'équation de la chaleur. On note ϕ_{met} la proportion solide/liquide du métal et ϕ_{sil} pour le silicate ($\phi_{sil} = 0 \rightarrow$ solide, $\phi_{sil} = 1 \rightarrow$ liquide). On detecte le changement de phase solide $\rightarrow$ liquide du métal par la condition $T' > T_{fus,met}$ et $\phi_{met} < 1$ on "échange" alors de la température contre du changement de phase jusqu'à qu'une des condition de changement d'état atteigne sa limite de validité : c'est à dire soit $T' = T_{fus,met}$ soit $\phi_{met} = 1$. On fait de même avec la transition inverse et avec le silicate.

Exemples : on part de $T' > T_{fus,met}$, $\phi_{met} < 1$

!! Attention T_i, T_f et T_{afus} sont des variables adimentionées contrairement à T' et T_{neb} !!

Cas 1 on atteint $\phi_{met} = 1$. Calculons la température finale :

$$T_f = T_i + (\phi_{met,i} - 1)\frac{\phi L_{met}}{T_{neb} C_{p,met}} \tag{3.5}$$

Cas 2 on atteint $T' = T_{fus,met}$. Calculons le ϕ_{met} final :

$$\phi_f = \phi_i + (T_i - T_{afus,met})\frac{T_{neb} C_{p,met}}{\phi L_{met}} \tag{3.6}$$

3.1.3 Équations discrétisées

On pose $c_0 = \frac{\Delta t \tau_{1/2}}{\rho C_p T_{neb}}$

L'équation adimensionnée peut se réécrire sous la forme de l'équation matricielle suivante :

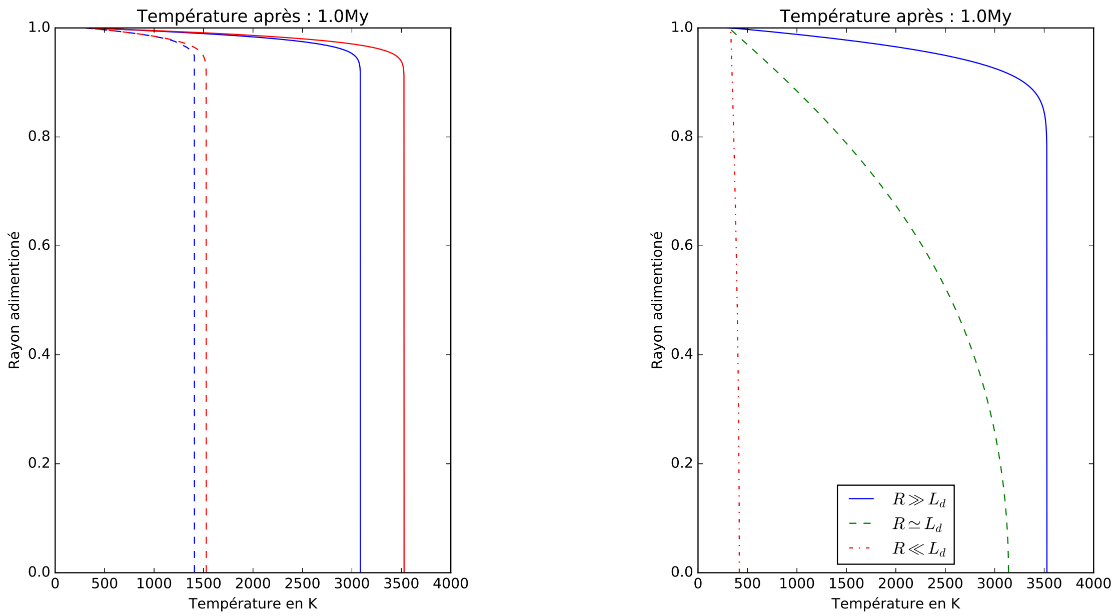
$$M T^{t+1} = T^t + c_0(P + S) \tag{3.7}$$

Avec la matrice M calculée plus tôt : $M = \left[Id + \frac{\Delta t \ r_{i+1/2}^2}{r_i^2 \Delta r^2} \ d1 + \frac{\Delta t \ r_{i-1/2}^2}{r_i^2 \Delta r^2} \ d2 \right]$

$$d1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} d2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

3.1.4 Résultats

Comme on peut l'observer sur la figure 1a lorsqu'on considère un planétésimal de rayon 500 km, le profil de température est constant sur 95% de l'épaisseur de l'astre et chute rapidement quand on approche de la surface. Dans le cas où le chauffage a lieu de manière normale (courbes en trait plein), on constate une augmentation totale de la température d'environ 3527 K par rapport à la température initiale de 300 K ce qui est proche de 3543 K, la température attendue pour un système adiabatique dans les mêmes conditions, quand on ne tient pas



(a) (b)

FIGURE 1 – On peut voir sur ces figures le profil de température dans une planète après 1 My de chauffage par la décomposition radioactive du ^{26}Al. Sur la figure (a) on peut voir en trait plein le profil en supposant une origine des temps à 0 My et en pointillé une origine des temps à 1 My, les courbes bleues tiennent compte de la fusion des matériaux et les courbes rouges n'en tienne pas compte. Sur la figure (b) on peut voir le profil de température après 1 My selon le rapport entre le rayon de la planète R et la longueur caractéristique de diffusion L_d.

compte de la fusion des matériaux (courbes rouges). Si on tient compte de la fusion la température finale est de 3085 K, ce qui correspond à la différence attendue d'environ 440 K perdus dans la chaleur latente de fusion. Lorsque l'on prend des conditions initiales retardées de 1 My (courbes en tirets) les températures finales sont réduites de moitié (la raison de ce calcul est d'illustrer le lien entre le début de la formation des planètes et la formation du soleil (soleil -> fabrique les elements -> flottent dans l'espace -> s'agrègent en planètes après x annèes de décroissance radioactive dans l'espace , donc délai x influe sur T final)) .

Les résultats de ce modèle simple permettent aussi de distinguer plusieurs régimes de diffusion selon le rayon du planétésimal considéré. En effet le rayonnement radiatif à la surface étant extrêmement efficace du fait de sa variation en T^4, la température de la surface est reste quasiment égale à 300 K, la température de la nébuleuse. C'est ensuite l'efficacité de la diffusion de la température dans le planétésimal qui détermine si l'influence de la température de surface reste confinée en surface ou si elle diffuse jusqu'au centre de l'astre. On peut observer ces différents régimes sur la figure 1b : pour un rayon petit devant la longueur caractéristique de diffusion L_d, le chauffage radioactif n'a quasiment aucune influence, après 1 My la température du centre à augmenté d'environ 100 K

C'est la figure (b) la plus intéressante pour le quidam, je trouve. Peut etre fusionner le deux, à voir

C'est un résultat que l'on attendait aussi qualitativement du fait du rapport qu'il existe entre les termes de production volumiques et surfaciques dans une sphère : la production totale d'énergie totale due aux premiers est proportionnelle à $\frac{4}{3}\pi R^3$ et celle due aux seconds à $4\pi R^2$. Ainsi le rapport "production volumique"/"production surfacique" évolue comme R^3/R^2 autrement dit comme R. Ainsi quand $R \to 0$ le système est dominé par l'influence du terme surfacique tandis que pour $R \to +\infty$ c'est l'influence de la production volumique qui domine.

3.2 Modèle 2

Fichier : sim2.py

3.2.1 Description

Pour cette deuxième simulation on va prendre en compte l'accrétion qui change le rayon de la Terre au cours du temps

Hypothèses :

1. Rayon de la Terre évoluant en $\dot{R} \simeq R^{\beta}$ avec $\beta = 0$, 1 ou 2
2. Chauffage causé par la désintégration du ^{26}Al et par le rayonnement de corps noir.

3.2.2 Données initiales et constantes

Rayon initial de la Terre	5 km
Rayon final de la Terre	500 km
Temps de croissance	1 My ou 5 My

3.2.3 Équations

On considère les mêmes équations que pour le problème précédent cependant il faut tenir compte de la variation du rayon de Terre en fonction du temps, on introduit pour ce faire une nouvelle variable adimensionnée :

$$r = \frac{r'}{R(t)} \quad \text{et on conserve} \quad t = \frac{t'}{\tau_{1/2}} \quad \text{et} \quad T = \frac{T'}{T_{neb}} \tag{3.9}$$

L'équation adimensionnée s'écrit alors :

$$\frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \partial_t T = \frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T) + P \tag{3.10}$$

Avec :

$$P = \rho H_0 e^{-ln(2)t} \tag{3.11}$$

3.2.4 Équations discrétisées

$$\rho C_p (d_{t'} T' - r \frac{\dot{R}}{R} \partial_r T') = \frac{1}{r^2} \partial_r (k_T \frac{r^2}{R^2} \partial_r T') + P \tag{3.12}$$

$$\frac{\rho C_p T_{neb}}{\tau_{1/2}} \partial_t T = \frac{1}{r^2} \partial_r (T_{neb} k_T \frac{r^2}{R^2} \partial_r T) + \rho C_p T_{neb} r \frac{\dot{R}}{R} \partial_r T + P \tag{3.13}$$

$$T^{t+1} - T^t = \frac{\tau_{1/2} k_T}{\rho C_p} \frac{\Delta t}{r^2} \partial_r (\frac{r^2}{R^2} \partial_r T) + r \tau_{1/2} \Delta t \frac{\dot{R}}{R} \partial_r T + \frac{\tau_{1/2} \Delta t}{\rho C_p T_{neb}} P \tag{3.14}$$

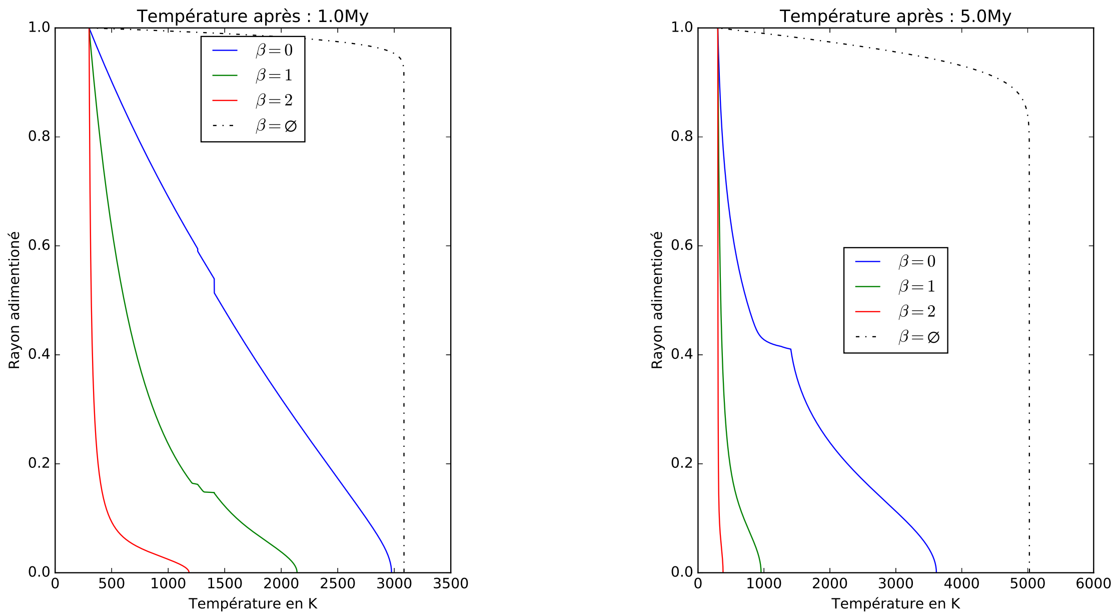
$$\begin{aligned} T_i^{t+1} + \frac{\tau_{1/2} k_T \Delta t}{\rho C \Delta r^2 R^2 r_i^2} \Big[r_{i+1/2}^2 (T_i^{t+1} - T_{i+1}^{t+1}) + r_{i-1/2}^2 (T_i^{t+1} - T_{i-1}^{t+1}) \Big] \\ + \tau_{1/2} \Delta t \frac{r \dot{R}}{2 \Delta r R} \Big[T_{i-1}^{t+1} - T_{i+1}^{t+1} \Big] = T_r^t + \frac{\tau_{1/2} \Delta t}{\rho C T_{neb}} P_i^t \end{aligned} \tag{3.15}$$

On a l'équation matricielle suivante :

$$\Big[Id + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 \Big] T^{t+1} = T^t + c_0 P \tag{3.16}$$

Avec : $c_1 = \frac{\tau_{1/2} k_T \Delta t}{\rho C} \frac{r_{i+1/2}^2}{\Delta r^2 R^2 r_i^2}$, $c_2 = \frac{\tau_{1/2} k_T \Delta t}{\rho C} \frac{r_{i-1/2}^2}{\Delta r^2 R^2 r_i^2}$, $c_3 = \tau_{1/2} \Delta t \frac{r \dot{R}}{2 \Delta r R}$, $c_0 = \frac{\Delta t \tau_{1/2}}{\rho C_p T_{neb}}$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} d_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} d_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$



(a) (b)

Figure 2 – Profil de température dans une planète qui croît par accrétion de 5 km à 500 km sur une période de 1 My sur la figure (a) et de 5 My sur la figure (b). Chaque courbe correspond à un taux de croissance différent, les courbes en pointillé correspondent à un astre dont le rayon est constant à 500 km

3.2.5 Résultats

On peut observer sur la figure 2 les conséquences de l'évolution du rayon du planétésimal au cours du temps sur le profil de température. On constate sur la figure 2a qu'une croissance linéaire du rayon ($\beta = 0$) sur un temps comparable au temps de demi-vie du ^{26}Al (0.717 My) donne un profil qui atteint une température maximale de 3000 K proche des 3100 K atteint dans notre premier modèle, le profil évolue ensuite linéairement jusqu'à atteindre 300 K à la surface.

3.2.6 autre méthode possible (en fait pas besoin de ca)

On peut essayer de traiter le problème en deux temps :

$$\frac{dT'}{dt'} = \partial_{t'} T' + \frac{\partial r'}{\partial t'} \partial_{r'} T' = \partial_{t'} T' + r\frac{\dot{R}}{R} \partial_r T' \tag{3.17}$$

où $r'(t) = R(t)r$ avec $r \in [0, 1]$

$$\begin{tikzcd}
 & T'_{t+1} \\
T'_t \arrow[ur, "\frac{dT'}{dt'}"] \arrow[r, "\partial'_t T'"'] & \tilde{T}'_{t+1} \arrow[u, "r\frac{\dot{R}}{R}\partial_r T'"']
\end{tikzcd}$$

On calcule donc d'abord une première estimation de la température $\tilde{T}'_{t+1}$ avec uniquement les contributions diffusives :

$$\rho C_p \partial_{t'} T' = \rho C_p \frac{\tilde{T}'_{t+1} - T'_t}{\Delta t'} = \frac{1}{r^2} \partial_r (k_T \frac{r^2}{R^2} \partial_r T') + P \tag{3.18}$$

On calcule a partir de cette température intermédiaire la contribution du terme de transport pour avoir la température finale :

$$\frac{T'_{t+1} - T'_t}{\Delta t'} = \frac{\tilde{T}'_{t+1} - T'_t}{\Delta t'} + \frac{\partial r'}{\partial t'} \partial_{r'} T' = \frac{\tilde{T}'_{t+1} - T'_t}{\Delta t'} + \frac{r \Delta R}{R \Delta t'} \partial_r T' \tag{3.19}$$

D'où

$$T'_{t+1} = \tilde{T}'_{t+1} + \frac{r \Delta R}{R} \partial_r T'_{t+1} \tag{3.20}$$

On résout à la suite ces deux équations matricielles :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M_1 \tilde{T}'_{t+1} & = & T'_t + c_0 (P + S) \\ M_2 T'_{t+1} & = & \tilde{T}'_{t+1} \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Conclusion

A Première annexe

$\rho L\frac{\partial\phi}{\partial t} = \rho L\frac{d\phi}{dT}\frac{\partial T}{\partial t}$ avec ϕ qui est une marche, on peut l'approximer par une fonction un peu plus dérivable par ex : $\phi \simeq arctan(T - T_{fusion})$
$\rho Cp_{eff} = \rho Cp(\phi) + \rho L\frac{d\phi}{dT}$
$R_T = at^b, T = T(t, r/R_T(t))$
$\Rightarrow \frac{\partial T(t,r/R_T(t))}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \frac{r}{R_T(t)}}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \frac{r}{R_T(t)}}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial r}$