

---

# Étude du chauffage par impact d'un planétésimal

Projet réalisé par BUNEL Félix et VERGNET Hadrien

---

**Résumé :** Nous avons réalisé, dans le cadre du module de Géophysique, un modèle numérique d'un planétésimal afin d'étudier l'importance du chauffage par impact sur sa température, en nous basant sur l'article *Thermal evolution and differentiation of planetesimals and planetary embryos. (2012), Icarus, 217(1), 339-354.* par Šrámek, O., Milelli, L., Ricard, Y., et Labrosse, S. . Notre étude nous a permis de décomposer les différentes contributions au profil de température dans ce planétésimal afin de mettre en évidence l'influence du chauffage par impact.

**Mots clefs :** planétésimal, accréation, chauffage

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Description du modèle</b>	<b>1</b>
1.1 Hypothèses de départ . . . . .	1
1.2 Méthodes numériques . . . . .	2
<b>2 Modèles numériques</b>	<b>3</b>
2.1 Modèle 1 : Chaleur latente et régimes de diffusion . . . . .	3
2.2 Modèle 2 : Accréation . . . . .	4
2.3 Modèle 3 : Chauffage par impact . . . . .	5
<b>Conclusion</b>	<b>6</b>

## Introduction

Pour remettre dans son contexte le sujet de cette étude, revenons d'abord sur les étapes de la formation de notre système solaire. Nous commencerons avec le gigantesque nuage d'hydrogène et d'hélium qui deviendra notre galaxie ; dans ce nuage naissent des premières étoiles qui synthétisent en leur cœur les éléments lourds comme le fer et les dispersent à leur mort. Ce nuage désormais enrichi en éléments lourds se fractionne ensuite en plus petits nuages dont un deviendra notre système solaire. Ce petit nuage s'effondre sur lui-même pour donner naissance à notre Soleil. Autour de ce Soleil il reste encore de la poussière qui va progressivement coalescer pour former des corps de plus en plus volumineux jusqu'à devenir des planétésimaux, qui ne sont autre que des embryons de planètes. Ces planétésimaux vont alors grossir par accréation gravitationnelle de la matière environnante pour finalement devenir des planètes. Le planétésimal est donc un corps céleste de quelques kilomètres de diamètre se trouvant dans une nébuleuse de poussières composées d'éléments lourds. Une caractéristique importante de ces planétésimaux est que leur champs gravitationnel est suffisamment intense pour attirer les autres planétésimaux et la matière environnante et qu'ils peuvent ainsi croître.

Le but de ce projet a été d'étudier l'influence du chauffage par impact lors de la formation d'un planétésimal par accréation. Cette étude s'inscrit dans une problématique plus large d'étude des différents scénarios de formations ayant pu mener à la différenciation du noyau et du manteau de la Terre. En effet la formation d'un noyau liquide est principalement conditionnée par la température atteinte qui permet ou non la fusion du matériau dans le planétésimal. Ainsi nous avons concentré notre étude sur la résolution numérique de l'équation de diffusion de la chaleur dans un planétésimal qui nous a permis de calculer l'évolution de la température  $T$  dans celui-ci :

$$\rho C_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = k_T \nabla T(\vec{r}, t) + P(\vec{r}, t) \quad (0.1)$$

Où  $\rho$ ,  $C_p$  et  $k_T$  sont respectivement la masse volumique, la capacité calorifique et la conductivité thermique du matériau et  $P$  est un terme qui permet de tenir compte des différentes sources de chaleur dans le modèle.

Pour réaliser cette étude nous avons développé, en **Python**, trois modèles successifs de complexité croissante, afin de pouvoir distinguer la contribution de chacun des paramètres que nous avons considérés dans notre modèle final. On détaillera ces trois modèles ainsi que les méthodes numériques utilisées pour résoudre numériquement les équations en jeu.

## 1 Description du modèle

### 1.1 Hypothèses de départ

Le modèle que nous avons étudié est celui d'un planétésimal simplifié. Nous avons en particulier supposé que le problème présentait une symétrie sphérique et qu'il pouvait se réduire à un modèle à une dimension en tenant compte de cette symétrie dans les équations. Nous avons ensuite supposé que le planétésimal était constitué d'un mélange homogène de métal et de silicates dans les proportions 18% de métal pour 82% de silicates et que les propriétés de ces matériaux ne dépendaient pas de la température, de la pression, ou de l'état (liquide ou solide) du matériau. Dans le continuité de cette hypothèse d'un mélange homogène, nous n'avons pas tenu compte des phénomènes mécaniques qui conduisent à la séparation des matériaux comme la séparation de phases et la percolation, qui ont lieux lors de la fusion des matériaux. Nous avons toutefois tenu compte de l'énergie libérée ou absorbée lors du changement d'état du métal et des silicates. Avec ces hypothèses l'équation de diffusion de la chaleur qui décrit l'évolution de notre système devient :

$$\rho C_p \partial_t T = \frac{k_T}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T) + P \quad (1.1)$$

Où  $r$  est la coordonnée radiale dans le planétésimal.

Les sources de chaleur que nous avons considérées dans notre planétésimal sont :

- la chaleur radioactive produite lors de la décomposition du  $^{26}\text{Al}$ ,
- la chaleur échangée à la surface de l'astre avec la nébuleuse environnante par le rayonnement de corps noir,
- et la chaleur apportée par l'accréation via la température propre de l'objet impactant et l'énergie cinétique qu'il dépose par l'impact.

Nous nous sommes aussi posé la question de la température initiale à donner au planétésimal, puisque l'on suppose sa formation instantanée au début de chaque simulation. Nous avons considéré une hypothèse consistant à donner une température équivalente à l'énergie potentielle gravitationnelle qu'il faudrait dissiper

pour assembler la masse du planétésimal, qui se calcule en intégrant l'énergie nécessaire pour apporter une particule de masse  $dm$  de l'infini à une distance  $R$  d'un objet de masse  $m$  :

$$dE = G \frac{mdm}{R}$$

sur tout la masse totale initiale du planétésimal. On trouve ainsi que l'énergie totale apportée est donnée par la formule :

$$E = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Ce qui donne l'expression suivante pour la température initiale :

$$T_0 = T_{neb} + \frac{4\pi}{5} \frac{\rho G}{C_p} R^2 \quad (1.2)$$

Où  $T_{neb}$  est la température de la nébuleuse,  $\rho$  et  $C_p$  sont la densité et capacité calorifique moyenne dans le planétésimal,  $R$  est le rayon du planétésimal et  $G$  la constante de gravitation. Or une application numérique pour le rayon initial  $R_0 = 5\text{km}$ , que nous avons considéré, révèle que la contribution de l'énergie gravitationnelle  $T_{grav} = 0.02\text{K}$  est négligeable devant la température de la nébuleuse  $T_{neb} = 300\text{K}$ . Ainsi l'hypothèse la plus simple consistant à prendre la température de la nébuleuse comme température initiale est justifiée, et c'est ce que nous avons finalement appliqué.

Dans tous nos modèles, nous avons utilisé la table suivante de constantes physiques pour les matériaux considérés. Nous avons de plus précisé quelques valeurs moyennes utiles pour simplifier certains calculs du fait de l'hypothèse de mélange homogène métal-silicates dans la proportion 18%-82%. Les constantes respectives et moyennes du mélange sont les suivantes :

Grandeur	moyenne	métal	silicate	unité
Densité ( $\rho$ )	4028	7800	3200	$\text{kg m}^{-3}$
Capacité calorifique ( $C_p$ )	939	450	1200	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$
Conductivité ( $k_T$ )	11.48	50	3	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
Chaleur latente de fusion	413	250	500	$\text{kJ kg}^{-1}$
Température de fusion		1261	1408	K

Pour la suite on notera  $\rho$  une valeur moyenne et  $\rho_{matériau}$  la valeur respective d'une grandeur pour l'un des matériaux. On utilisera aussi les constantes supplémentaires suivantes :

Constante de Stephan-Boltzman	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Demi-vie du $^{26}\text{Al}$	0.717 My
Température de la nébuleuse	300 K
Chaleur dégagée initiale du $^{26}\text{Al}$	$1.5 \times 10^{-7} \text{ W kg}^{-1}$

## 1.2 Méthodes numériques

Comme nous l'avons mentionné, nous avons considéré un modèle à une seule dimension radiale en tenant compte de la géométrie du planétésimal dans l'équation étudiée :

$$\rho C_p \partial_{t'} T' = \frac{k_T}{r'^2} \partial_{r'} (r'^2 \partial_{r'} T') + P \quad (1.3)$$

Pour éviter tout souci lié à la représentation numérique des grands nombres que nos équations manipulent, nous avons commencé par ré-exprimer cette équation en unités nées. Pour cela, nous avons introduit les trois variables adimensionnées suivantes en divisant les variables par les grandeurs caractéristiques du modèle, respectivement le temps de demi-vie du  $^{26}\text{Al}$ , la longueur de diffusion dans le planétésimal sur ce temps et la température de la nébuleuse :

$$t = \frac{t'}{\tau_{1/2}^{Al}}, \quad r = r' \sqrt{\frac{\rho C_p}{k_T \tau_{1/2}^{Al}}} \quad \text{et} \quad T = \frac{T'}{T_{neb}} \quad (1.4)$$

Nous avons ensuite injecté ces nouvelles variables dans notre équation afin d'obtenir une équation adimensionnée :

$$\partial_t T = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T) + c_0 P \quad (1.5)$$

Avec :

$$c_0 = \frac{\tau_{1/2}}{\rho C_p T_{neb}} \quad (1.6)$$

Nous avons discrétisé l'équation sur un maillage régulier à une dimension à l'aide d'une méthode de différence finie implicite. Nous avons utilisé une discrétisation d'Euler centrée en espace et en temps. Les différentes dérivées présentent dans l'équation devenant :

$$\partial_t T \rightarrow \frac{T_r^{t+1} - T_r^t}{\Delta t} \quad (1.7)$$

$$\partial_r T \rightarrow \frac{T_{i+1/2}^t - T_{i-1/2}^t}{\Delta r} \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T) \rightarrow \frac{1}{r_i^2 \Delta r} \left[ r_{i+1/2}^2 \frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta r} + r_{i-1/2}^2 \frac{T_i^t - T_{i-1}^t}{\Delta r} \right] \quad (1.9)$$

où  $\Delta t$  et  $\Delta r$  sont les pas de temps et d'espace choisis et où on utilise la notation  $T_i^t$  pour désigner  $T(t, r_i)$ . En utilisant cette discrétisation, l'équation née se réécrit sous la forme de l'équation matricielle suivante :

$$MT^{t+1} = T^t + c_0 P^t \quad (1.10)$$

Avec la matrice  $M = \left[ Id + \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r^2} d1 + \frac{\Delta t}{r_i^2 \Delta r^2} d2 \right]$ , où :

$$d1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Toutefois avant de résoudre cette équation il faut calculer le terme de production de chaleur  $P$ . Ce terme contient :

$$H = \rho H_0 e^{-\ln(2)t} \quad \text{la production de chaleur par radioactivité} \quad (1.12)$$

$$S = \frac{\sigma T_{neb}^4}{\Delta r} (1 - T^4) \quad \text{le rayonnement de corps noir (à la surface uniquement)} \quad (1.13)$$

$$\Delta H = \Delta \phi_{met} H_{fus,met} + \Delta \phi_{sil} H_{fus,sil} \quad \text{la chaleur latente de changement d'état} \quad (1.14)$$

où  $\Delta \phi_{met}$  et  $\Delta \phi_{sil}$  sont les variations des proportions liquide-solide pour le métal et les silicates. Pour calculer  $\Delta \phi_{met}$  et  $\Delta \phi_{sil}$  on procède par une méthode prédicteur-correcteur. On résout une première fois l'équation sans tenir compte de cette chaleur pour calculer une nouvelle température, on compare la température obtenue avec la température de fusion de chaque matériau et on calcule, là où cela s'applique, la chaleur latente de changement d'état. On peut alors résoudre à nouveau l'équation en tenant, cette fois, compte du changement d'état. Pour résoudre toutes ces équations matricielles, nous avons utilisé le module d'algèbre linéaire pour les matrices creuses `scipy.sparse.linalg` qui est inclus dans la librairie `scipy`.

## 2 Modèles numériques

### 2.1 Modèle 1 : Chaleur latente et régimes de diffusion

Dans notre premier modèle nous n'avons pas du tout tenu compte de l'accrétion, nous avons considéré un planétésimal de taille fixée qui n'est chauffé que par la radioactivité du  $^{26}\text{Al}$  et les pertes radiatives. Comme on peut le voir sur la figure 1a on peut observer plusieurs régimes de conduction selon que le rapport entre la taille du planétésimal et la longueur caractéristique de diffusion  $L_d$  sur l'échelle de temps considérée qui vaut approximativement 10 km. On voit ainsi qu'un planétésimal plus petit que la longueur de diffusion va diffuser très efficacement sa chaleur vers sa surface. Or sa surface est elle-même thermalisée avec la nébuleuse à

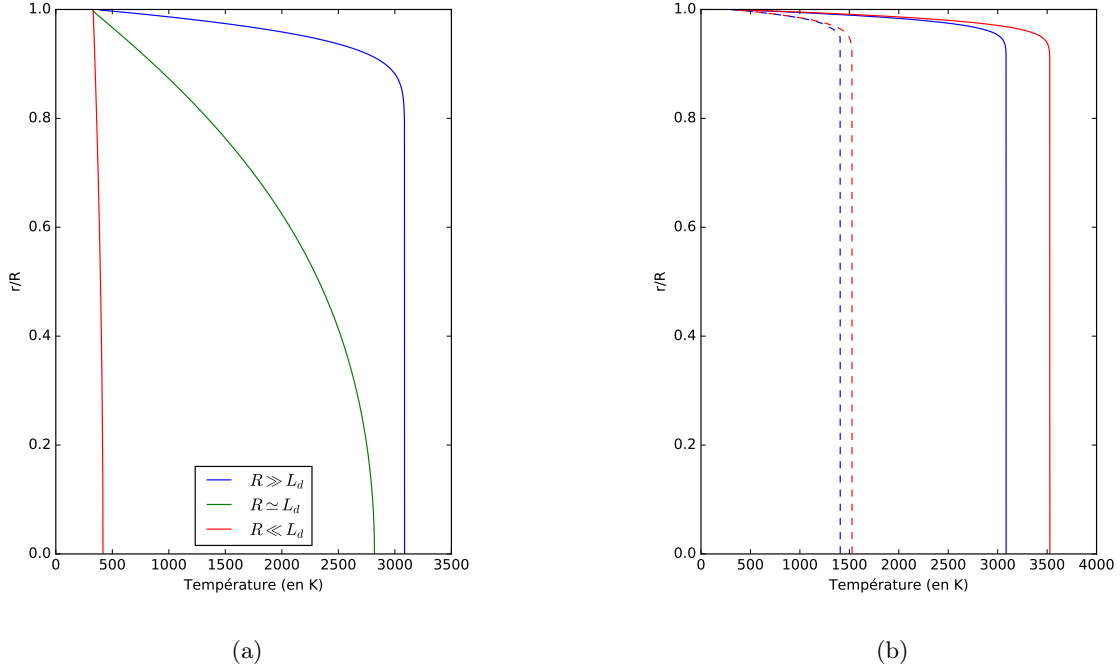


FIGURE 1 – On peut voir sur ces figures le profil de température dans une planète après 1 My de chauffage par la décomposition radioactive du  $^{26}\text{Al}$ . Sur la figure (a) on peut voir le profil de température après 1 My selon le rapport entre le rayon de la planète  $R$  et la longueur caractéristique de diffusion  $L_d \simeq 10\text{km}$ . Sur la figure (b) on peut voir en trait plein le profil en supposant une origine des temps à 0 My et en pointillé une origine des temps à 1 My, les courbes bleues tiennent compte de la fusion des matériaux et les courbes rouges n'en tiennent pas compte.

300 K du fait du transfert radiatif très efficace puisque dépendant de  $T^4$ . Ainsi la température à l'intérieur du planétésimal n'augmente quasiment pas et vaut 400 K au centre. Dans le cas extrême inverse, où le rayon est très grand devant  $L_d$ , la chaleur diffuse très peu vers la surface pour la majorité de l'épaisseur du planétésimal. Seule une couche d'épaisseur comparable à la longueur de diffusion est affectée par la thermalisation de la surface. La température atteint 3500 K, qui correspond à la température atteinte par un système sans perte radiative, sur la majorité de l'épaisseur. Dans le cas intermédiaire la température varie sur l'ensemble de l'épaisseur mais on atteint tout de même 3200 K au centre soit 300 K de moins que pour le cas précédent.

On peut voir sur la figure 1b que la conséquence de la prise en compte de la chaleur latente est une différence de température d'environ 440 K ce qui correspond exactement à la perte de chaleur attendue lors du changement d'état. Nous avons aussi représenté sur la figure 1b le profil de température final que l'on obtiendrait si le planétésimal s'était formé 1 My plus tard et donc si l'abondance de  $^{26}\text{Al}$  était moindre, on voit qu'un retard de 1 My réduit considérablement la température finale atteinte qui est environ de 1400 K. Ainsi l'abondance initiale du  $^{26}\text{Al}$  radioactif et le délai d'apparition des planétésimaux après la synthèse du  $^{26}\text{Al}$  ont une très grande influence sur le chauffage des planétésimaux.

## 2.2 Modèle 2 : Accrétion

Dans ce second modèle, nous avons conservé les mêmes sources de chaleur que pour le modèle précédent en tenant cette fois compte de la variation du rayon provoquée par l'accrétion. Nous avons supposé que la croissance du rayon suivait la loi suivante :

$$\dot{R} \propto R^\beta \quad \text{avec } \beta = 0, 1 \text{ ou } 2 \quad (2.1)$$

La variation est régulière pour  $\beta = 0$ , mais elle est plus explosive pour  $\beta = 1$  ou  $2$  puisqu'elle accélère avec le temps, on pourra alors distinguer la croissance initiale lente, suivie d'une croissance très rapide vers la fin. Nous avons tenu compte de rayon variable dans notre modèle sans changer le maillage mais en ajoutant à l'équation un terme de transport équivalent. L'équation de la chaleur devient :

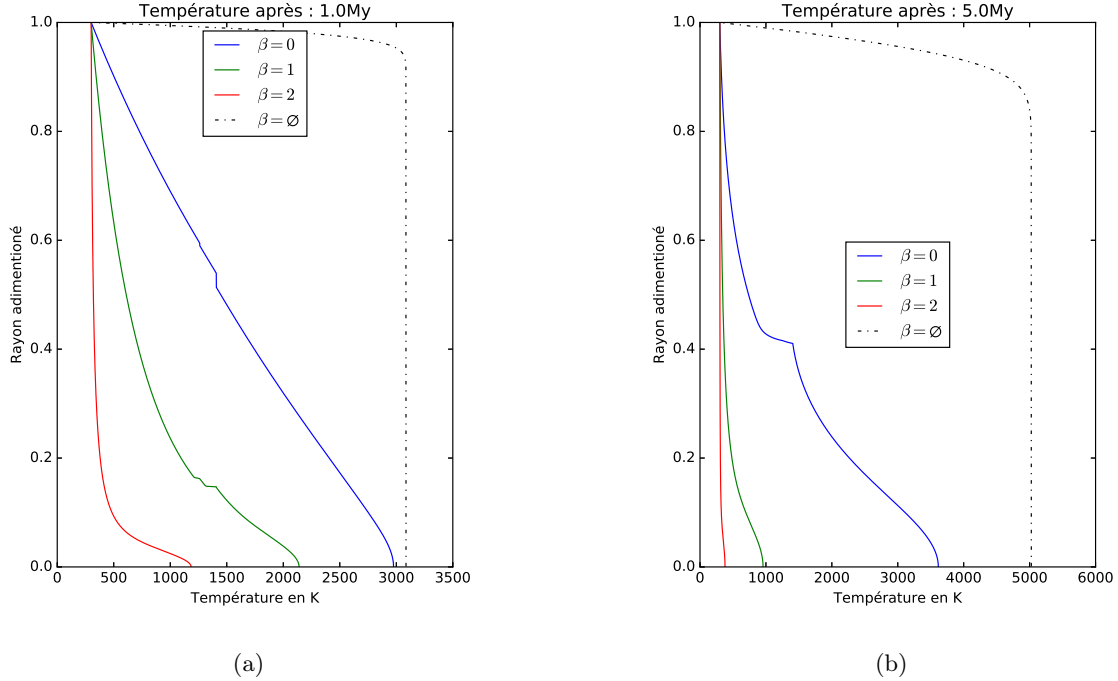


FIGURE 2 – Profil de température dans une planète qui croît par accrétion de 5 km à 500 km sur une période de 1 My sur la figure (a) et de 5 My sur la figure (b). Chaque courbe correspond à un taux de croissance différent, les courbes en pointillé correspondent à un astre dont le rayon est constant à 500 km

$$\rho C_p (\partial_t T' - r \frac{\dot{R}}{R} \partial_r T') = \frac{1}{r^2} \partial_r (k_T \frac{r^2}{R^2} \partial_r T') + P \quad (2.2)$$

Une fois adimensionné et discrétisé, nous avons obtenu une nouvelle équation matricielle que nous avons traité de la même façon que précédemment. Pour ce modèle, nous avons considéré l'évolution d'un planétésimal partant d'un rayon initial de 5 km pour arriver à un rayon final de 500 km.

On peut voir sur la figure 2a les profils obtenus pour une croissance en 1 My. Constate que pour  $\beta = 0$  on observe un profil linéaire du centre à la surface du planétésimal, ce qui est cohérent avec la croissance régulière de l'épaisseur du planétésimal. La température au centre est proche de la température maximale. Contrairement au cas  $\beta = 1$  et 2 où la croissance est initialement lente ce qui laisse le planétésimal dans le régime de diffusion efficace pendant une longue période, c'est pourquoi la température au centre reste faible à respectivement 2200 K et 1200 K pour  $\beta = 1$  et 2. La croissance rapide, qui arrive après cela, ajoute la majorité de l'épaisseur qui n'a pas le temps de chauffer et reste donc proche de 300 K.

Dans le cas où la croissance se fait plus lentement, comme on peut le voir sur la figure 2b on voit que les températures sont largement inférieures à la situation précédente, le planétésimal ne conserve que très peu de sa chaleur puisqu'il a plus de temps pour se thermaliser avec la nébuleuse. On mesure ainsi des températures maximales au centre valant respectivement 3600 K, 1000 K et 400 K pour  $\beta = 0, 1$  et 2.

### 2.3 Modèle 3 : Chauffage par impact

Pour notre troisième et dernier modèle, nous avons repris le modèle précédent en ajoutant cette fois l'apport de chaleur des impacts. Cet apport se fait sous deux formes : via la chaleur propre de l'objet impactant et via l'énergie cinétique qu'il dépose lors de l'impact. Toutefois cette énergie est déposée à la surface du planétésimal ; or comme on a pu le constater grâce aux modèles précédents, les échanges radiatifs à la surface sont très efficaces, ainsi sur la totalité de l'énergie apportée par l'impact, seule une portion est effectivement déposée dans les couches supérieures du planétésimal, le reste étant immédiatement rayonné vers la nébuleuse. L'article sur le quel nous nous sommes basés proposait une proportion d'énergie conservée comprise entre 20% et 40% cette part d'énergie étant déposée sur une épaisseur  $R/5$  qui correspond au rayon moyen du planétésimal impactant. Nous avons considéré deux hypothèses sur la températures des impactants, la première est de supposer leur température fixe égale à 1000 K, et la seconde est de supposer que les impactants sont des planétésimaux qui suivent la même évolution que le planétésimal que nous modélisons. Nous avons ainsi calculé la température

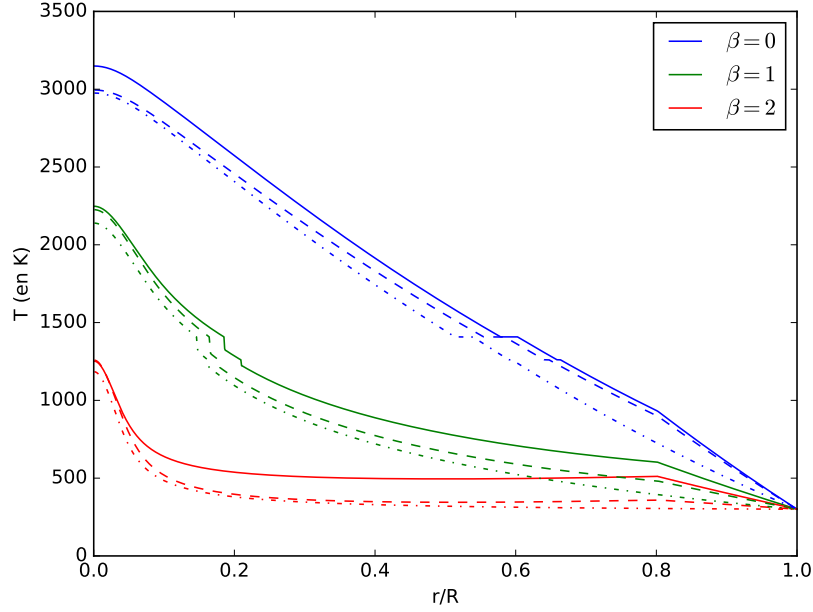


FIGURE 3 – Profil de température dans une planète qui croît par accrétion de 5 km à 500 km sur une période de 1 My. En traits pleins et en tirets sont tracés les résultats avec chauffage par impact. Les courbes en traits pleins correspondent à un chauffage par impact avec des impacts de température fixe à 1000 K et les courbes en tirets correspondent à un chauffage avec des impactants dont la température est calculée via le modèle précédent. En traits pointillés sont rappelés les résultats du modèle précédent sans chauffage par impact.

moyenne en fonction du temps pour des planétésimaux impactants de rayon  $R(t)/5$  où  $R(t)$  est le rayon du planétésimal que l'on étudie.

On peut constater sur la figure 3 que le chauffage par impact avec une température des impactants fixée à 1000 K est responsable d'une augmentation de la température quasiment uniforme sur l'ensemble de l'épaisseur du planétésimal d'environ 100 à 200 K.

Quand on considère l'évolution de la température des planétésimaux impactants on trouve un chauffage moindre. Pour  $\beta = 0$  le chauffage est de quelques dizaines de kelvins au centre et il croît jusqu'à 200 K proche de la surface. Pour  $\beta = 1$  et 2 le chauffage est plus uniforme sur l'épaisseur du planétésimal et vaut environ 100 K pour  $\beta = 1$  et 50 K pour  $\beta = 2$ .

On constate ainsi que la contribution du chauffage par impact au profil de température du planétésimal est faible en comparaison à l'influence du chauffage radioactif et de la croissance causée par ces mêmes impacts dans les cas  $\beta = 0$  et 1. Mais que pour  $\beta = 2$  l'augmentation de 200 K grâce aux impactants à 1000 K est très significative puisqu'on a observé, dans le modèle précédent, que la majorité de l'épaisseur était thermalisée avec la nébuleuse à 300 K ou autrement dit totalement froide.

On constate finalement que l'augmentation de température due au chauffage par impact n'est pas ici suffisante pour permettre un noyau fondu là où les autres sources de chaleur ne le permettaient pas déjà.

## Conclusion

Avec les trois modèles que nous avons étudiés, nous avons pu constater les contributions de différents paramètres importants sur le profil de température final dans le planétésimal et sur la possibilité ou non de former un noyau fondu. Ainsi nous avons constaté que pour un planétésimal qui croît de 5 km à 500 km en 1 My, le chauffage par impact est responsable d'une élévation de la température de 100 à 200 K uniformément sur la totalité de l'épaisseur du planétésimal. Mais nous avons observé que cette contribution est moins critique que celle du taux de croissance  $\beta$  qui conditionne de façon nettement plus importante l'apparition d'un noyau fondu, on avait en effet constaté que pour  $\beta = 0$  ou 1 on pouvait observer de la fusion alors que  $\beta = 2$  la température au centre restait trop faible. On peut toutefois nuancer ces observations en remarquant qu'à l'instar du calcul que nous avons effectué pour estimer la température initiale du planétésimal, l'énergie déposée par l'impact est proportionnelle au carré du rayon du planétésimal ainsi la contribution du chauffage par impact va dominer pour des planétésimaux plus grands.