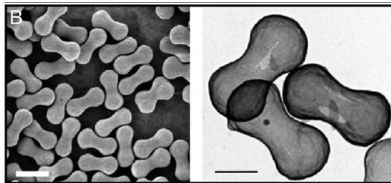


The force coupling method (FCM)

Florencio Balboa Usabiaga

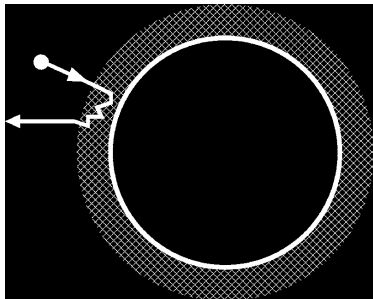
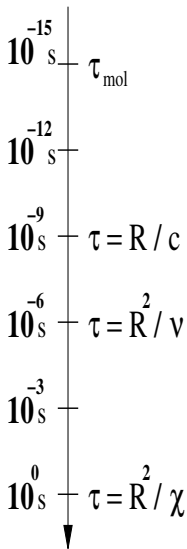


Introduction: fluidos mesoscópicos



Bacillaria Paxillier, Bacteria (Turner et al. [1]) and coloides [2].

Introducción: escalas de tiempo en un fluido



Escalas de tiempo de un coloide en suspensión, Padding 2006 [3].

Introducción: grados de libertad en un fluido

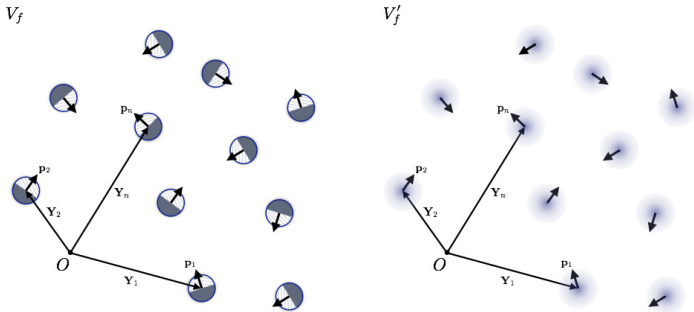
- ▶ En general nos interesan propiedades macroscópicas como la viscosidad, difusión de químicos o coloides etc. Un sistema puede tener $\sim 10^8$ coloides en un milímetro cúbico, no podemos simular tantas partículas. En lugar usamos **condiciones de contorno periódicas (CCP)**.
- ▶ Con CCP el sistema extiende una celda original con réplicas idénticas hasta el infinito. Los coloides interactúan con sus vecinos

Derivando ecuaciones: métodos *top-down* y *bottom-up*

- ▶ ***bottom-up***: empezamos con ecuaciones fundamentales, como las ecuaciones de Newton para describir el movimiento de moléculas y las promediamos para eliminar grados de libertad. En teoría se podrían derivar las ecuaciones de un fluido así.
- ▶ ***top-bottom***: empezamos con ecuaciones macroscópicas, por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes para describir un fluido y las modificamos para incluir efectos moleculares, por ejemplo el movimiento Browniano.

Force Coupling Method (FCM): introducción

- ▶ La idea general del FCM es usar una representación mínima de un coloide esférico.

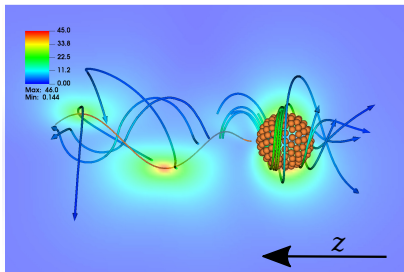


Bosquejo de coloides discretizados con alta y baja resolución.

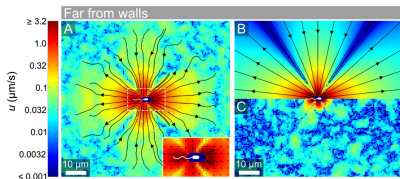
- ▶ Introducido por Maxey [4, 5].

Force Coupling Method (FCM): introducción

- ¿Cuál es la justificación física para usar este método?



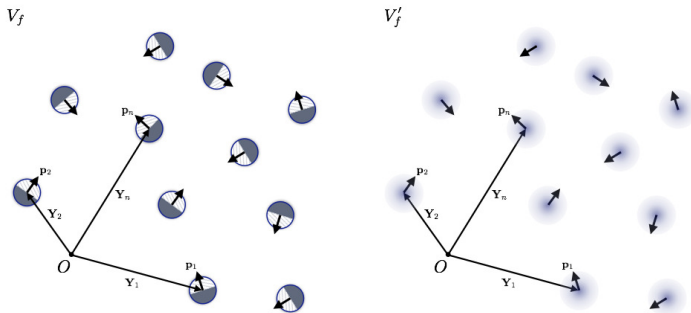
Lineas de flujo y magnitud de la velocidad alrededor de un bacteria.



Flujo alrededor de una bacteria medida experimentalmente, Drescher 2011 [6].

Force Coupling Method (FCM): introducción

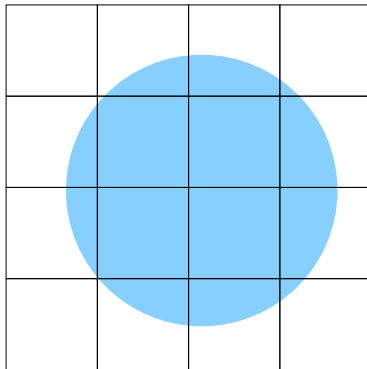
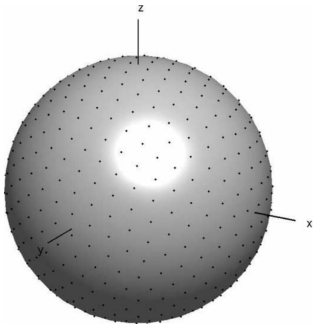
- ▶ ¿Cuál es la justificación física para usar este método?
- ▶ En muchos problemas no nos interesa la trayectoria concreta de un coloide pero los comportamientos colectivos. Para eso una descripción de baja resolución puede ser suficiente.



Bosquejo de coloides discretizados con alta y baja resolución.

Force Coupling Method (FCM): introducción

- ¿Cuál es la ventaja del FMC? Un coste computacional mucho menor.



Dos discretizaciones de un coloide esférico.

Force Coupling Method: ecuaciones

- Ecuación del fluido: Stokes

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

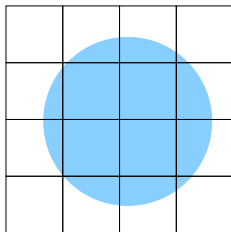
- Condición de contorno para el fluido y velocidad del coloide. La velocidad del fluido, \mathbf{v} tiene que igualar la velocidad del coloide \mathbf{u}_n y ω_n

$$\mathbf{u}_n = \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r,$$

$$\omega_n = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r$$

Los coloides transmiten fuerzas al fluido

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_n \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \right).$$



Force coupling method: algoritmo

- ▶ Calcular fuerzas entre coloides, \mathbf{F}_n , coste computacional $\mathcal{O}(N)$ para N coloides.
- ▶ Repartir fuerzas al fluido, coste computacional $\mathcal{O}(M)$ para un mallado con M celdas

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}) - \frac{1}{2} \tau_n \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \right).$$

- ▶ Resolver las ecuaciones de Stokes (coste $\mathcal{O}(M \log M)$)

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

- ▶ Interpola la velocidad del fluido a los coloides (coste $\mathcal{O}(N)$)

$$\mathbf{u}_n = \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r, \quad \omega_n = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r$$

- ▶ Integrar ecuaciones de movimiento $d\mathbf{q}_n/dt = \mathbf{u}_n$.

Force coupling method: algoritmo

- ▶ Calcular fuerzas entre coloides, \mathbf{F}_n , coste computacional $\mathcal{O}(N)$ para N coloides.
- ▶ Repartir fuerzas al fluido, coste computacional $\mathcal{O}(M)$ para un mallado con M celdas

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{2} \tau_n \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \right).$$

- ▶ Resolver las ecuaciones de Stokes (coste $\mathcal{O}(M \log M)$)

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

- ▶ Interpola la velocidad del fluido a los coloides (coste $\mathcal{O}(N)$)

$$\mathbf{u}_n = \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r, \quad \omega_n = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r$$

- ▶ Integrar ecuaciones de movimiento $d\mathbf{q}_n/dt = \mathbf{u}_n$.

Force coupling method: algoritmo

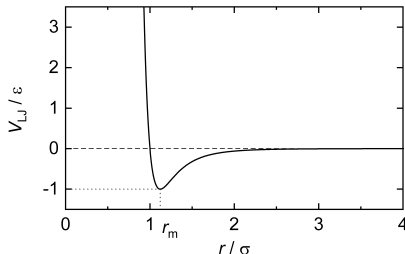
- ▶ Calcular fuerzas entre coloides, \mathbf{F}_n , coste computacional $\mathcal{O}(N)$ para N coloides.
- ▶ Se usan fuerzas repulsivas de corto alcance para que los coloides no se solapen. Por ejemplo un Lennard-Jones puramente repulsivo

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i U(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j),$$

con

$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] + \epsilon \text{ si } r < 2^{1/6}\sigma,$$

y cero para $r \geq 2^{1/6}\sigma$.



Force coupling method: algoritmo

- ▶ Calcular fuerzas entre coloides, \mathbf{F}_n , coste computacional $\mathcal{O}(N)$ para N coloides.
- ▶ Repartir fuerzas al fluido, coste computacional $\mathcal{O}(M)$ para un mallado con M celdas

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{2} \tau_n \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \right).$$

- ▶ Resolver las ecuaciones de Stokes (coste $\mathcal{O}(M \log M)$)

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

- ▶ Interpola la velocidad del fluido a los coloides (coste $\mathcal{O}(N)$)

$$\mathbf{u}_n = \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \, d^3r, \quad \omega_n = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \, d^3r$$

- ▶ Integrar ecuaciones de movimiento $d\mathbf{q}_n/dt = \mathbf{u}_n$.

Los interpoladores

- ▶ Ambos interpoladores son Gaussianas (en 3d)

$$\Delta(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_{\Delta}^2)^{-3/2} e^{-x^2/2\sigma_{\Delta}^2},$$

$$\Theta(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_{\Theta}^2)^{-3/2} e^{-x^2/2\sigma_{\Theta}^2},$$

- ▶ La anchura de cada Gaussiana es distinta y proporcional al radio del coloide a

$$\sigma_{\Delta} = \frac{a}{\sqrt{\pi}},$$

$$\sigma_{\Theta} = \frac{a}{(6\sqrt{\pi})^{1/3}}$$

- ▶ Estas constantes garantizan que la velocidad lineal y angular de un coloide sean

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{6\pi\eta a},$$

$$\omega = \frac{\tau}{8\pi\eta a^3}.$$

Repartir fuerza e interpolar velocidad

- ▶ En el caso continuo la fuerza se reparte como

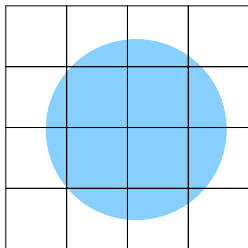
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{2} \tau_n \nabla \Theta(\mathbf{x} - \tau_n) \right),$$

donde \mathbf{x} es una variable continua.

- ▶ En el caso discreto la fuerza sobre los coloides se reparte a cada celda de fluido

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{2} \tau_n \nabla \Theta(\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_n) \right),$$

con posiciones \mathbf{x}_i para la celda i .



Repartir fuerza e interpolar velocidad

- ▶ En el caso continuo la velocidad se interpola (integra) como

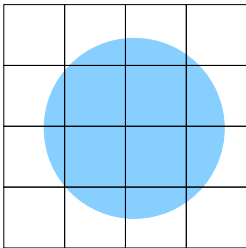
$$\mathbf{u}_n = \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r,$$

donde \mathbf{x} es una variable continua.

- ▶ En el caso discreto la velocidad se interpola (suma) sobre las celdas de fluido

$$\mathbf{u}_n = \sum_i \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \Delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_n) h^3$$

con posiciones \mathbf{x}_i para la celda i y h^3 el volumen de una celda.



Force coupling method: algoritmo

- ▶ Calcular fuerzas entre coloides, \mathbf{F}_n , coste computacional $\mathcal{O}(N)$ para N coloides.
- ▶ Repartir fuerzas al fluido, coste computacional $\mathcal{O}(M)$ para un mallado con M celdas

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{2} \tau_n \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \right).$$

- ▶ Resolver las ecuaciones de Stokes (coste $\mathcal{O}(M \log M)$)

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

- ▶ Interpola la velocidad del fluido a los coloides (coste $\mathcal{O}(N)$)

$$\mathbf{u}_n = \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r, \quad \omega_n = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r$$

- ▶ Integrar ecuaciones de movimiento $d\mathbf{q}_n/dt = \mathbf{u}_n$.

Resolviendo las Ecuaciones de Stokes

- ▶ Para dominios arbitrarios (canales, tuberías, ...) se puede usar Volúmenes finitos.
- ▶ Para dominios con **condiciones de contorno periódicas (CCP)** se pueden resolver las ecuaciones con métodos espectrales.

Interludio I: transformada de Fourier

- ▶ Los métodos espectrales usan **transformadas de Fourier**. Dada una función **periódica** en el espacio real, $f(x) = f(x + 2\pi)$,

Interludio I: transformada de Fourier

- ▶ Los métodos espectrales usan **transformadas de Fourier**. Dada una función **periódica** en el espacio real, $f(x) = f(x + 2\pi)$, podemos definir la transformada de Fourier como

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \, dx,$$

Interludio I: transformada de Fourier

- Los métodos espectrales usan **transformadas de Fourier**. Dada una función **periódica** en el espacio real, $f(x) = f(x + 2\pi)$, podemos definir la transformada de Fourier y su inversa como

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \mathcal{F}[f](k) = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk.\end{aligned}$$

- Una propiedad muy importante para nosotros de la transformada de Fourier es

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right](k) = -ik\tilde{f}(k).$$

- Además, hay un algoritmo muy eficiente (la Transformada Rápida de Fourier o *FFT*) para calcular Transformadas de Fourier numéricamente. Coste $\mathcal{O}(N \log N)$ para un muestreo con M puntos.

Interludio I: transformada de Fourier

- ▶ Ejemplo de porque la transformada de Fourier es tan útil: resolver la ecuación

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + b \frac{df(x)}{dx} = g(x),$$

para $f(x)$ suponiendo que conocemos la función periódica $g(x)$.

Interludio I: transformada de Fourier

- Ejemplo de porque la transformada de Fourier es tan útil: resolver la ecuación

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + b \frac{df(x)}{dx} = g(x),$$

para $f(x)$ suponiendo que conocemos la función periódica $g(x)$. Si transformamos toda la ecuación al espacio de Fourier

$$\begin{aligned} (-ik)^2 \tilde{f}(k) - ibk \tilde{f}(k) &= \tilde{g}(k) \longrightarrow \\ - (k^2 + ibk) \tilde{f}(k) &= \tilde{g}(k) \longrightarrow \\ \tilde{f}(k) &= -\frac{\tilde{g}(k)}{k^2 + ibk}. \end{aligned}$$

Resolviendo las Ecuaciones de Stokes

- ▶ Para dominios arbitrarios (canales, tuberías, ...) se puede usar Volúmenes finitos.
- ▶ Para dominios con **condiciones de contorno periódicas (CCP)** se pueden resolver las ecuaciones con métodos espectrales.
- ▶ Los métodos espectrales usan **transformadas de Fourier**.
- ▶ Las ecuaciones de Stokes en el espacio real son

$$\begin{aligned}-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}$$

- ▶ En el espacio de Fourier

$$\begin{aligned}ik\tilde{p}_k - \eta k^2 \tilde{\mathbf{v}}_k &= \tilde{\mathbf{f}}_k, \\ ik \cdot \tilde{\mathbf{v}}_k &= 0,\end{aligned}$$

- ▶ La solución es por tanto

$$\tilde{\mathbf{v}}_k = \frac{1}{\eta k^2} \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_k)}{k^2} \right).$$

Resolviendo las Ecuaciones de Stokes

Pasos para resolver las ecuaciones de Stokes:

1. Transformar la densidad de fuerza, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, al espacio de Fourier usando FFT

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) = \text{FFT}(\mathbf{f})(\mathbf{k}).$$

2. Calcular la solución en el espacio de Fourier

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\eta k^2} \left(\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}})}{k^2} \right).$$

3. Transformar la velocidad al espacio real usando FFT

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{inverse-FFT}(\tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{x}).$$

Force coupling method: algoritmo

- ▶ Calcular fuerzas entre coloides, \mathbf{F}_n , coste computacional $\mathcal{O}(N)$ para N coloides.
- ▶ Repartir fuerzas al fluido, coste computacional $\mathcal{O}(M)$ para un mallado con M celdas

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_n \left(\mathbf{F}_n \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) - \frac{1}{2} \tau_n \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \right).$$

- ▶ Resolver las ecuaciones de Stokes (coste $\mathcal{O}(M \log M)$)

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

- ▶ Interpola la velocidad del fluido a los coloides (coste $\mathcal{O}(N)$)

$$\mathbf{u}_n = \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) d^3r, \quad \omega_n = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{n}) d^3r$$

- ▶ Integrar ecuaciones de movimiento $d\mathbf{q}_n/dt = \mathbf{u}_n$.

Integrando las ecuaciones de movimiento

- Podemos usar cualquier integrador para actualizar la posición de las partículas. El más simple es el método de Euler

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \Delta t \mathbf{u}_i^n,$$

donde \mathbf{q}_i^n es la posición del coloide i en el paso de tiempo $t^n = n\Delta t$ y \mathbf{u}_i^n su velocidad calculada también en el mismo paso de tiempo.

- El error del método de Euler integrando las ecuaciones de movimiento es $\mathcal{O}(\Delta t)$. Hay métodos más precisos (Runge-Kutta-2, Runge-Kutta-4 etc.), pero requieren resolver las ecuaciones de Stokes más veces por paso de tiempo. En general merece la pena usar métodos de segundo order, error $\sim \Delta t^2$, en problemas deterministas.

Generalizaciones del FCM

- ▶ Incluir términos de estrés en la densidad de fuerza.
- ▶ Incluir fluctuaciones térmicas (ruido Browniano).
- ▶ Incluir términos de orden más alto en la fuerza para simular micro-nadadores (bacterias, algas etc.)
- ▶ Incluir reacciones químicas para modelar partículas foréticas.
- ▶ Coloides de formas complejas.

Generalizaciones del FCM

- ▶ Incluir términos de estrés en la densidad de fuerza.
- ▶ Incluir fluctuaciones térmicas (ruido Browniano).
- ▶ Incluir términos de orden más alto en la fuerza para simular micro-nadadores (bacterias, algas etc.)
- ▶ Incluir reacciones químicas para modelar partículas foréticas.
- ▶ Coloides de formas complejas.

FCM con estrés

- ▶ A largas distancias cualquier objeto se puede aproximar con unos pocos multipolos

$$v(r \gg 1) \sim A \frac{F}{r} + B \frac{\tau}{r^2} + \textcolor{red}{C} \frac{\textcolor{red}{S}}{r^2} + \dots$$

- ▶ La velocidad de deformación del fluido es el tensor (matriz)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right), \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

- ▶ Pero dentro de una coloide rígido la deformación tiene que ser cero

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{2} \int \left[\mathbf{v}(\mathbf{x})(\nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n))^T + \mathbf{v}^T(\mathbf{x}) \nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) \right] d^3x.$$

- ▶ Para imponer esta condición la densidad de fuerza en el fluido tiene un término adicional

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_n \mathbf{S}_n \cdot \left(\nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) + (\nabla \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n))^T \right).$$

Generalizaciones del FCM

- ▶ Incluir términos de estrés en la densidad de fuerza.
- ▶ Incluir fluctuaciones térmicas (ruido Browniano).
- ▶ Incluir términos de orden más alto en la fuerza para simular micro-nadadores (bacterias, algas etc.)
- ▶ Incluir reacciones químicas para modelar partículas foréticas.
- ▶ Coloides de formas complejas.

FCM con fluctuaciones térmicas (ruido Browniano)

- ▶ Se puede incluir un estrés que genera ruido término en las ecuaciones de Stokes [7, 8]

$$\begin{aligned}-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{P}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}$$

con

$$\langle P_{ij}(\mathbf{x}, t^n) P_{kl}(\mathbf{x}', t^m) \rangle = 2\eta k_B T (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \delta_{nm} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

- ▶ El estrés \mathbf{P} se puede incluir en el espacio real o directamente en el espacio de Fourier con lo que se ahorran FFT extras.

Generalizaciones del FCM

- ▶ Incluir términos de estrés en la densidad de fuerza.
- ▶ Incluir fluctuaciones térmicas (ruido Browniano).
- ▶ Incluir términos de orden más alto en la fuerza para simular micro-nadadores (bacterias, algas etc.)
- ▶ Incluir reacciones químicas para modelar partículas foréticas.
- ▶ Coloides de formas complejas.

Coloides de formas arbitrarias

- ▶ Se conectan partículas de FCM y se les fuerza a moverse como un cuerpo rígido. Con esto se pueden partículas de formas arbitrarias.
- ▶ Por ejemplo una tubería, un elipsoide y un flagelo [9]

Conclusiones

- ▶ El *Force Coupling Method* es un método barato para simular coloides con baja resolución.
- ▶ El FCM es muy flexible, permite muchas generalizaciones para estudiar distintos tipos de problemas en el campo de la materia blanda (*soft matter*).

Bibliografía I

- [1] L. Turner, W. S. Ryu, and H. C. Berg, "Real-time imaging of fluorescent flagellar filaments," *Journal of Bacteriology*, vol. 182, no. 10, pp. 2793–2801, 2000.
- [2] S. Sacanna, W. T. Irvine, L. Rossi, and D. J. Pine, "Lock and key colloids through polymerization-induced buckling of monodisperse silicon oil droplets," *Soft Matter*, vol. 7, no. 5, pp. 1631–1634, 2011.
- [3] J. T. Padding and A. A. Louis, "Hydrodynamic interactions and brownian forces in colloidal suspensions: Coarse-graining over time and length scales," *Physical Review E*, vol. 74, p. 031402, 2006.
- [4] M. R. Maxey and B. K. Patel, "Localized force representations for particles sedimenting in stokes flow," *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 27, p. 1603, 2001.
- [5] S. Lomholt and M. R. Maxey, "Force-coupling method for particulate two-phase flow: Stokes flow," *Journal of Computational Physics*, vol. 184, p. 381, 2003.
- [6] K. Drescher, J. Dunkel, L. H. Cisneros, S. Ganguly, and R. E. Goldstein, "Fluid dynamics and noise in bacterial cellcell and cellsurface scattering," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 108, no. 27, pp. 10940–10945, 2011.
- [7] E. E. Keaveny, "Fluctuating force-coupling method for simulations of colloidal suspensions," *Journal of Computational Physics*, vol. 269, no. 0, pp. 61 – 79, 2014.
- [8] B. Delmotte and E. E. Keaveny, "Simulating brownian suspensions with fluctuating hydrodynamics," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 143, no. 24, p. 244109, 2015.
- [9] F. Balboa Usabiaga and B. Delmotte, "A numerical method for suspensions of articulated bodies in viscous flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 464, p. 111365, 2022.